Optimisation Linéaire - TD

Exercice 1 : Explosion de couleurs

Un peintre possède 80 litres de peinture rouge, 120 litres de peinture bleu et 100 litres de peinture jaune qu'il souhaite vendre. Il peut cependant mélanger ces trois couleurs pour en obtenir d'autres. Ainsi,

— en mélangeant du jaune et du bleu (en même quantité), il obtient du vert,
— en mélangeant du jaune et du rouge (en même quantité), il obtient de l'orange,
— en mélangeant du rouge et du bleu (en même quantité), il obtient du violet.

Le prix de vente de chaque litre de peinture est résumé dans le tableau suivant :

Rouge	Jaune	Bleu	Vert	Orange	Violet
10	20	8	35	40	50

Question 1.1 : Formuler le problème sous forme de problème linéaire.

Question 1.2 : Le peintre peut aussi acheter de la couleur bleu à un collègue (au plus 30 litres) pour un prix de 10 euros par litre. Modifier le problème en conséquence.

Question 1.3 : Le peintre peut également créer du noir en mélangeant à part égales le rouge, le bleu et le jaune. De plus, comme cette couleur est très demandée, il souhaite que la moitié au minimum de sa "production" de couleurs soit du noir. Cette couleur se vend 25 euros par litre. Modifier le PL en conséquence.

Question 1.4 : Les couleurs rouge, bleu et jaune ne sont pas à la mode. Le peintre peut vendre au plus 20 litres de chacune de ces trois couleurs. Modifier le PL en conséquence.

Question 1.5 : Le peintre se rend compte qu'il a déjà une commande de 40 litres de vert. Comme il s'est déjà engagé, il devra payer 5 euros par litre non livré. Modifier le PL en conséquence.

Exercice 2 : Résolution graphique

Question 2.1 : Résoudre graphiquement le problème linéaire. Quelle est la solution optimale ? Le coût de cette solution ?

$$\begin{aligned}
&\max 2x + 3y \\
&x + 3y \leq 6 \\
&x \geq y \\
&x \geq 0 \\
&y \geq -2
\end{aligned}$$

Question 2.2 : Quels sont les sommets du domaine réalisable ? Quelles inégalités vérifient-ils à l'égalité ?

Question 2.3 : Quelle est la solution optimale si, dans le problème précédent, l'objectif est maintenant $\min 2x + 3y$?

Exercice 3 : Inégalités d'un domaine réalisable

Supposons que l'on a un problème linéaire contenant deux variables (x et y) et dont le domaine réalisable est donné par la figure 1. Donner les contraintes du problème linéaire associé.

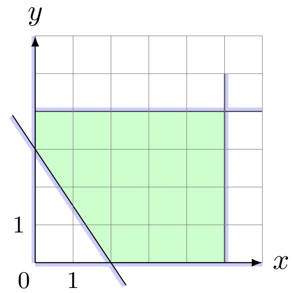

Figure 1 – Domaine réalisable

Exercice 4 : Exemples de problèmes linéaires

Donner un exemple de problème linéaire (au plus deux variables) pour chacun des cas suivants :

1. problème linéaire avec une solution,
2. problème linéaire sans solution,
3. problème linéaire avec une infinité de solutions,
4. problème linéaire avec une solution optimale,
5. problème linéaire avec une infinité de solutions optimales,
6. problème linéaire avec au moins une solution mais pas de solution optimale,
7. problème linéaire avec exactement deux solutions.

Exercice 5 : Détermination des surfaces de cultures

Un fermier souhaite optimiser le revenu de ses terres agricoles, d'une surface totale de 100 acres. Pour cela, il dispose de 1100 € d'investissement et l'équivalent de 160 jours de main d'œuvre. Vous disposez de l'ensemble des informations suivantes :

— Coût de travail et d'ensemencement $\begin{cases} 20 \text{ €} & \text{par acre de blé,} \\ 10 \text{ €} & \text{par acre de pommes de terre.} \end{cases}$

— Revenus $\begin{cases} 120 \text{ €} & \text{par acre de blé,} \\ 40 \text{ €} & \text{par acre de pommes de terre.} \end{cases}$

— Temps de main d'oeuvre $\begin{cases} 4 \text{ jours} & \text{par acre de blé,} \\ 1 \text{ jour} & \text{par acre de pommes de terre.} \end{cases}$

Question 5.1 : Modéliser le problème sous forme de problème linéaire.

Question 5.2 : Quelles surfaces de blé et de pommes de terre faut-il cultiver pour obtenir un revenu maximum ? Quel est le profit généré ?

Exercice 6 : Résolution graphique

Question 6.1 : Résoudre graphiquement le problème linéaire. Quelle est la solution optimale ? Le coût de cette solution ?

$$\begin{aligned} &\min x \\ &-x + y \leq -1 \\ &x + y \geq 3 \\ &y \leq 2 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Question 6.2 : Que se passe-t-il si l'objectif du PL précédent est maintenant $\max 2x + y$?

Exercice 7 : Résolution graphique

Résoudre graphiquement le problème linéaire suivant. Quelle est la solution optimale ? Le coût de cette solution ?

$$\begin{aligned}
&\max 2x + 2y + z\\
&x + 2z \leq 2\\
&4x + y \geq 4\\
&y - z = 2\\
&x \geq 0\\
&y \geq 0\\
&z \geq 0
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Régime alimentaire bovin

Un éleveur possède deux vaches de race charolaise et 5 vaches de race aveyronnaise. Pour nourrir son cheptel, il doit acheter un mélange de différentes céréales. Son objectif est d'acheter ces différentes céréales au coût minimum tout en s'assurant que chaque vache soit nourrie correctement. En effet, une vache charolaise a besoin de 40 mg de vitamine A, 50 mg de vitamine B et 100 mg de vitamine C par jour, alors qu'une vache aveyronnaise nécessite 70 mg de vitamine A, 60 mg de vitamine B et 30 mg de vitamine C. Il peut nourrir chaque vache avec différentes céréales : blé (5€ le kilogramme), maïs (4€ le kilogramme) et orge (7€ le kilogramme). Les teneurs en vitamines de ces différentes céréales sont données dans le tableau suivant :

	Vitamine A	Vitamine B	Vitamine C
Blé	30 mg/kg	25 mg/kg	40 mg/kg
Maïs	10 mg/kg	15 mg/kg	20 mg/kg
Orge	50 mg/kg	45 mg/kg	35 mg/kg

Question 8.1 : L'éleveur souhaite connaître les quantités des différentes céréales à acheter pour nourrir son troupeau au mois de mai. Modéliser son problème sous forme de PL.

Question 8.2 : Suite à un problème d'approvisionnement, l'éleveur ne peut pas acheter plus de 10 kilogrammes de blé. Par ailleurs, pour des questions de santé, le maïs ne peut représenter plus du quart de la consommation de céréales d'une vache charolaise. Modifier le PL en conséquence.

Exercice 9 : Production d'électricité

Une entreprise d'électricité doit fournir de l'électricité pour les villes de Villetaneuse, Épinay et Saint-Denis. La puissance nécessaire d'électricité pour chaque ville est respectivement de 3000, 6000 et 5000 GW. Pour produire cette électricité, l'entreprise dispose de trois centrales électriques C1, C2 et C3. Le coût de production et d'acheminement de l'électricité en fonction des villes et des centrales (en € par GW) est récapitulée dans le tableau suivant.

	Villetaneuse	Épinay	Saint-Denis
C1	80	100	120
C2	20	30	40
C3	40	60	80

De plus, chaque centrale possède une puissance limitée. Cette limite est respectivement de 9000, 6000 et 7000 GW. L'entreprise souhaite déterminer la production d'électricité par centrale ainsi que la répartition de la production en fonction des trois villes de telle manière que le coût soit minimal. Formuler ce problème comme un problème linéaire.

Exercice 10 : Mise sous forme canonique

Question 10.1 : Mettre les problèmes linéaires suivants sous forme canonique.

Problème 1 :

$$\begin{aligned}
&\max 3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3\\
&5\,x_1 + x_2 + x_3 \geq 5\\
&3\,x_1 - 4\,x_2 = 4\\
&2\,x_1 - x_3 \leq 10\\
&x_1 \geq 0\\
&x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Problème 2 :

$$\begin{aligned}
&\min x_1 - x_2\\
&x_1 + 2\,x_2 \leq 5\\
&x_1 + 5\,x_2 = 10\\
&x_2 \geq -3\\
&x_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Question 10.2 : Un problème linéaire sous forme canonique peut être écrit sous forme matricielle, c'est-à-dire sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\max c^T x\\
&Ax \leq b\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

où :

— c et x sont des vecteurs de $\mathbb{Q}^n$,
— b est un vecteur de $\mathbb{Q}^m$,
— $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ est une matrice de m lignes et n colonnes de nombres rationnels.

Écrire les formes canoniques des deux problèmes sous forme matricielle.

Question 10.3 : Écrire sous forme matricielle les problèmes linéaires sous forme standard.

Exercice 11 : Dictionnaire optimal, variable entrante et variable sortante

Pour chacun des dictionnaires suivants, donner la solution associée. Indiquer s'il est réalisable. Si c'est le cas, indiquer s'il est optimal. Dans le cas contraire, déterminer la variable entrante. Indiquer si le problème est non borné ou donner la variable sortante associée. On utilisera la règle de choix donnée en cours dans le cas de plusieurs variables entrantes ou sortantes possibles.

Remarque : Un dictionnaire est dit *réalisable* si la solution associée vérifie les contraintes.

Problème 1 :

$$\begin{array}{rrrr}
\max & 263 & -78\,x_3 & -x_5\\
x_1 = & 500 & +20\,x_3 & -10\,x_5\\
x_2 = & -30 & +4\,x_3 & +10\,x_5\\
x_4 = & 1200 & -2\,x_3 & +x_5\\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Problème 2 :

$$\begin{array}{lrrr}
\max & 187 & -5\,x_3 & +3\,x_5 \\
x_1 = & 500 & +20\,x_3 & -10\,x_5 \\
x_2 = & 800 & +40\,x_3 & -20\,x_5 \\
x_4 = & 1200 & -2\,x_3 & +100\,x_5 \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Problème 3 :

$$\begin{array}{lrrr}
\max & 300 & +100\,x_2 & -\,x_4 \\
x_1 = & 20 & +20\,x_2 & -10\,x_4 \\
x_3 = & 60 & & -20\,x_4 \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Problème 4 :

$$\begin{array}{lrrr}
\max & 50 & -\,x_2 & -2\,x_1 \\
x_4 = & 17 & +20\,x_2 & -10\,x_1 \\
x_3 = & \frac{3}{2} & & -20\,x_1 \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Problème 5 :

$$\begin{array}{lrrr}
\max & 190 & +\,x_2 & +3\,x_3 \\
x_1 = & 20 & -20\,x_2 & -10\,x_3 \\
x_5 = & 12 & +40\,x_2 & -2\,x_3 \\
x_4 = & 1 & -\,x_2 & \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Exercice 12 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{array}{l}
\max 3\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 14\,x_4 \\
2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \leq 7 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}$$

Exercice 13 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{array}{l}
\max 3\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 \\
x_1 + x_2 + 2\,x_3 \leq 4 \\
2\,x_1 + 3\,x_3 \leq 5 \\
2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 \leq 7 \\
x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{array}$$

Exercice 14 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}
&\max 5\,x_1 + 6\,x_2 + 9\,x_3 + 8\,x_4\\
&x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 \leq 5\\
&x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 \leq 3\\
&x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Exercice 15 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}
&\max -2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3\\
&2\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 \leq 6\\
&3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 \leq 10\\
&x_1 - 3\,x_2 + x_3 \leq 3\\
&x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$