Tema 3 - Algoritmica Grafurilor

Lazăr Cătălina A6 —– Marin Mălina A6

02.01.2021

Exercitiul 1

a)

Consideram o parcurgere DFS/BFS a arborelui T. Astfel, va fi stabilit nodul radacina.
Metoda aleasa este inductie dupa numarul de noduri ale arborelui T.
Distingem doua cazuri:
1. M, cuplajul de cardinal k, expune cel putin un nod pendant al lui T si demonstratia se incheie considerand insusi cuplajul M;
2. M, cuplajul de cardinal k, satureaza toate nodurile pendante ale lui T.
Daca T are mai mult de 2 noduri, atunci, considerand o parcurgere DFS/BFS a arborelui T, va fi stabilit nodul radacina, r, care evident nu va fi pendant. Nodurile pendante vor fi frunzele arborelui T.

Caz de baza:(daca n=2, T admite cuplaj perfect, contradictie cu enuntul problemei)
Daca x=3, singura posibilitate de cuplaj este cuplaj de cardinal k=1, fie ca este vorba de arbore cu 3 noduri si o frunza (r, a, f)(caz 1) sau arbore cu 3 noduri: radacina r si doua frunze f1,f2(caz 2).
caz 1: avem M=(a,f) cuplaj, rezulta ca avem si M'=(r,a) cuplaj care expune nodul pendant f. Daca M=(r,a) cuplaj, M expune oricum nodul pendant f, M' = M.
caz 2: avem M=(r,f1) cuplaj sau M'=(r,f2) cuplaj, in orice caz va fi expus fie nodul pendant f1, fie nodul pendant f2, rezulta ca mereu va fi expus un nod pendant.

Pas inductiv:
Presupunem ca orice arbore S cu numar de noduri mai mic decat n (caz particular n-2) care nu admite cuplaj perfect, cu un cuplaj N (de cardinal k-1) ce satureaza nodurile pendante, are un cuplaj N' de acelasi cardinal care expune cel putin un nod pendant. Aratam ca acest lucru se va intampla si pentru T, arbore cu n noduri care nu admite cuplaj perfect, cu un cuplaj M de cardinal k ce satureaza nodurile pendante. Adica, aratam ca presupunerea initiala implica faptul ca acest lucru se va intampla si pentru T (si T va avea un cuplaj M' de cardinal k care sa expuna cel putin un nod pendant al lui T).

Vom porni de la constructia arborelui T. Fie f_1 o frunza a lui T si fie x_1 nodul parinte al nodului f_1. Rezulta ca x_1 nu poate avea mai mult de un nod copil. Daca, spre exemplu, x_1 ar mai avea un nod copil, f_2, care evident ar fi tot frunza, deci nod pendant, ar insemna ca M nu ar putea satura toate nodurile pendante, mai precis nu ar putea satura nodul f_2, acesta fiind conectat cu un singur nod - nodul x_1 care este deja saturat de cuplajul M prin muchia obligatorie $x_1 f_1$ conform ipotezei.
Mai mult decat atat, asta ar insemna si ca $x_1 \neq r$. Daca $x_1 = r$, atunci, conform demonstratiei anterioare, x_1 nu poate avea mai mult de un nod copil, deci T nu va avea decat 2 noduri - contradictie.
Cum $x_1 \neq r$, putem considera x_2 nodul parinte al lui x_1. Fie S arborele obtinut prin stergerea nodurilor f_1 si x_1 si, implicit, a muchiilor incidente cu acestea. Rezulta ca numarul de noduri ale lui S va fi $n - 2$. S are cuplaj N de cardinal k-1 care acopera toate nodurile pendante (consideram cuplajul M din care eliminam muchia $x_1 f_1$, $N = M \setminus x_1 f_1$). Din presupunerea facuta rezulta ca S va avea si cuplaj N' de acelasi cardinal, k-1, care expune cel putin un nod pendant al lui S. Rezulta ca putem obtine, utilizand N' si adaugand muchia $x_1 f_1$, un cuplaj M' de cardinal k - 1 + 1 = k, al lui T care sa expuna cel putin un nod pendant al lui T, $M' = N' \cup x_1 f_1$ (nodurile pendante ale lui S vor fi noduri pendante ale lui T, insa T va avea un nod pendant in plus, f_1, saturat prin adaugarea muchiei $x_1 f_1$)
In concluzie, avand un arbore T fara cuplaje perfecte, cu un cuplaj M de cardinal k, exista un cuplaj de acelasi cardinal care expune cel putin un nod pendant al lui T.

b)

I) T are cuplaj perfect, rezulta ca orice cuplaj de cardinal maxim satureaza toate nodurile pendante.
Presupunem prin reducere la absurd ca T nu are cuplaje perfecte, rezulta conform punctului a) ca, avand M un cuplaj al lui T, fie el de cardinal maxim k, rezulta ca exista un cuplaj de acelasi cardinal k, maxim, care expune cel putin un nod pendant al lui T - contradictie, rezulta ca presupunerea facuta este falsa, rezulta ca daca T are cuplaj perfect, orice cuplaj de cardinal maxim satureaza toate nodurile pendante.
II) Daca, in arborele T, orice cuplaj de cardinal maxim satureaza toate nodurile pendante, rezulta ca T are cuplaj perfect.
Presupunem prin reducere la absurd ca exista un cuplaj de acelasi cardinal, maxim, care expune un nod pendant al lui T. Asta ar insemna, conform punctului a), ca T nu admite cuplaj perfect, intrucat cuplajul de cardinal maxim nu poate satura de fapt toate nodurile lui T - contradictie, rezulta ca presupunerea facuta este falsa. Rezulta ca, daca orice cuplaj de cardinal maxim al abrorelui T satureaza toate nodurile pendante, T are cuplaj perfect.
Din I) si II) rezulta ca T are cuplaj perfect daca si numai daca orice cuplaj de cardinal maxim satureaza toate nodurile pendante.
Partea II) a demonstratiei se poate arata si prin inductie, utilizand aceeasi demonstratie si aceeasi metoda de constructie a arborilor S si T ca la punctul a).(consideram k=maxim, difera si enuntul fiecarui pas)

Exercitiul 2

Un flux este maxim atunci cand nu exista niciun drum de crestere relativ la x in R. Un drum de crestere este un A-drum de la s la t, ceea ce presupune ca toate arcele de pe acest drum sa indeplineasca conditia $x_{ij} < c_{ij}$ in cazul arcelor directe, $x_{ij} > 0$ in cazul arcelor inverse. (1) Datorita constructiei lui G toate arcele sunt orientate spre t, ceea ce inseamna ca toate arcele sunt directe. (2)

Din 1 si 2 $\Rightarrow$ Nu vor mai exista drumuri de crestere atunci cand pe orice drum de la s la t exista cel putin un arc cu $x_{ij} == c_{ij}$, $r_{ij} = 0$.

Functia Flow determina toate drumurile de la s la t, fiind o parcurgere de tip DFS. α initial reprezinta suma capacitatilor muchiilor care pornesc din s, dar prin intermediul apelurilor recursive si a instructiunii $min\{c[uv], \alpha\}$ $\Rightarrow$ in final α are valoarea $min\{c_{ij}\}, ij \in P$, P - orice drum. Valorea este returnata in ultimul nod al drumului (t sau o frunza din G), propagata inapoi pe flux $\Rightarrow$ Capacitatea reziduala a arcului cu capacitate minima devine 0. $\Rightarrow$ Exista pe orice drum de la s la t cel putin un arc cu $r_ij = 0$.

In tabloul x, initial fluxul 0, este retinut pentru fiecare arc suma valorilor fluxului pentru arcele succesoare, astfel ca este reprezinta valoarea din fluxul maxim pentru acel arc $\Rightarrow$ In final tabloul x contine fluxul de valoare maxima.

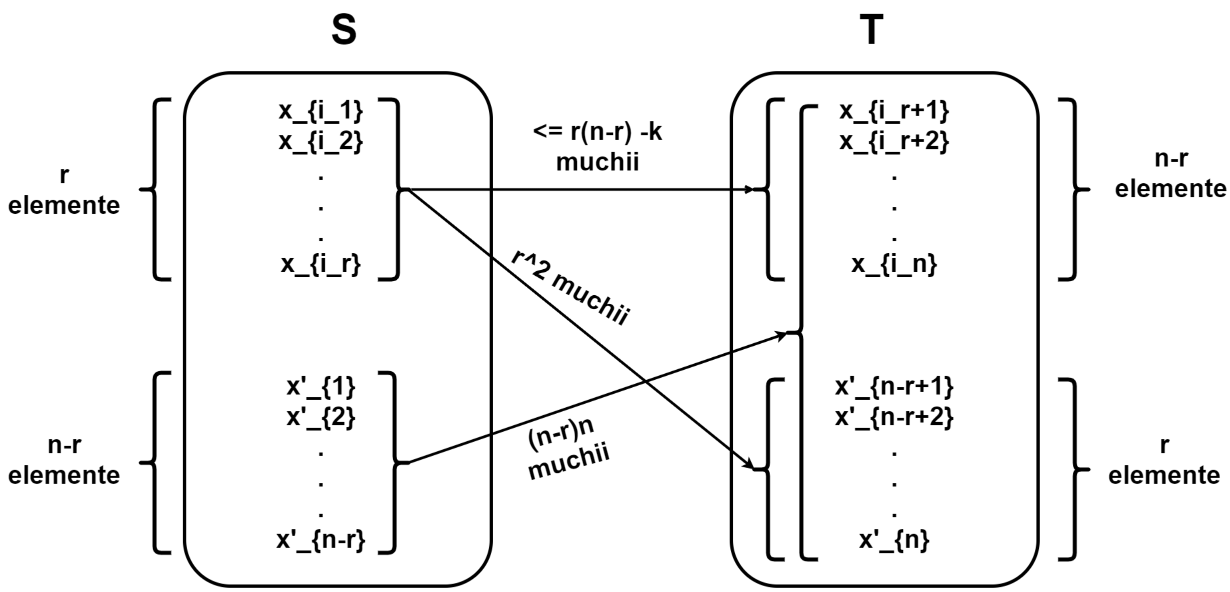
La finalul iteratiei prin vecinii fiecarui nod u, este propagata inapoi suma valorii fluxului de pe arcele dintre nodul u si vecini sai prin variabila FlowOut sau alfa in cazul nodurilor frunza si nodului t. $\Rightarrow$ FlowOut reprezinta pentru fiecare nod valoarea fluxului maxim care trece prin nodul respectiv. Astfel ca pentru nodul s reprezinta valoarea fluxului x, acesta este maxim $\Rightarrow$ Valoarea returnata de algoritm este valoarea fluxului maxim Complexitatea algoritmului este $\mathcal{O}(n+m)$, n- numarul nodurilor, m- numarul arcelor, fiind un algoritm DFS modificat pentru a propaga valoarea fluxului, dar modificarile nu schimba complexitatea.

Exercitiul 3

a)

$S = X \cup \{x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\}$
Din enunt avem ca (X, Y) este o bipartitie a lui W si ca $|X| = r$, unde $1 \leq r < n$. Dar $W = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, asa ca vom nota $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}\}$
Cum $W' = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ este o multime de noduri noi, rezulta ca $X \cap \{x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\} = \varnothing$, deci cardinalul lui S se va calcula adunand numarul de elemente din X cu numarul de elemente din $\{x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\}$.
$|\{x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\}| = n - r - 1 + 1 = n - r$ (1)
$|X| = r$ din enuntul problemei (2)
Din (1) si (2) rezulta ca $|S| = |\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}, x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\}| = r + n - r = n$ (3)

$T = V \setminus S$, dar $V = W \cup W' = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \cup \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ intrucat W' este o multime de noduri noi, iar $S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}, x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\}$
$T = V \setminus S = \{x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, ..., x_{i_n}, x'_{n-r+1}, x'_{n-r+2}, ..., x'_n\}$
Rezulta ca $|T| = n - r - 1 + 1 + n - n + r - 1 + 1 = n - r + r = n$ (4)
Din (3) si (4) rezulta ca $|S| = |T| = n$.
Ramane de aratat ca $|\{xy \in E : x \in S, y \in T\}| \leq p$.
Mai sus am aratat ca multimile S si T, ambele de cardinal n, sunt formate din urmatoarele elemente:
$S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}, x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}\}$
$T = \{x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, ..., x_{i_n}, x'_{n-r+1}, x'_{n-r+2}, ..., x'_n\}$
Din constructia multimii $E, E = \{uv : u \in V, v \in V, u \neq v, uv \notin F\}$, rezulta ca : vor exista toate muchiile posibile intre elemente distincte din W', toate muchiile posibile intre: un element din W si unul din W', iar in ceea ce priveste muchiile intre elemente distincte din W, $x_i x_j, i \neq j$, se va lua in considerare complementarierea muchiilor din $\{xy \in F : x \in X, y \in Y\}$.



Toate muchiile posibile intre $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}$ si $x'_{n-r+1}, x'_{n-r+2}, ..., x'_n$ sunt in numar de r^2, toate muchiile posibile intre $x'_1, x'_2, ..., x'_{n-r}$ si T sunt in numar de $(n - r) * n = n^2 - n * r$.
$|\{xy \in F : x \in X, y \in Y\}| \geq k$, rezulta ca, prin complementariere, numarul de muchii intre $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}$ si $x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, ..., x_{i_n}$ va fi mai mic sau egal cu: totalul de muchii posibile, din care scadem numarul de muchii din multimea initiala , adica $r(n - r) - k = nr - r^2 - k$.
Adunand toate aceste muchii, obtinem:
$|\{xy \in E : x \in S, y \in T\}| \leq r^2 + n^2 - n * r + n * r - r^2 - k = n^2 - k = p \rightarrow |\{xy \in E : x \in S, y \in T\}| \leq p$.

b)

$|S| = |T| = n$ fiindca (S,T) este o bipartitie a lui V, $|S| = |T|$ si $|V| = 2n$.
$S, T \in V \rightarrow S, T \in \{x_1, x_2, ..., x_n, x'_1, x'_2, ..., x'_n\}.\ Fie : S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_j}, x'_{k_1}, x'_{k_2}, ..., x'_{k_{n-j}}\}, 1 \leq j < n$.

Presupunem prin reducere la absurd ca $j \geq 0$ (j poate fi si 0). Asta ar insemna ca S poate fi : $S = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\} = W'$ si T poate fi : $T = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = W$.
Dar constructia lui E ne spune ca avem toate muchiile posibile intre un element din W' si unul din W, si cum $|S| = |T| = n$, numarul total de muchii va fi n^2. (*)
Dar din definitia problemei avem k numar natural nenul, si cum $p = n^2 - k$ si bipartitia a fost construita asa incat $|\{xy \in E : x \in S, y \in T\}| \leq p$, ar trebui ca $|\{xy \in E : x \in S, y \in T\}| \leq n^2 - k \leq n^2 - 1$, contradictie cu (*), deci presupunerea facuta este falsa, rezulta ca $j \geq 1$, ceea ce inseamna ca S contine cel putin un element x_i din W , $i = \overline{1, n}$, rezulta ca $W \cap S \neq \varnothing \rightarrow X \neq \varnothing$.(1)

Fie $T = \{x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}}, ..., x_{i_n}, x'_{k_{n-j+1}}, x'_{k_{n-j+2}}, ..., x'_{k_n}\}, 1 \leq j < n$

Presupunem prin reducere la absurd ca $j \leq n$ (j poate fi si n). Asta ar insemna ca T poate fi: $T = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\} = W'$ si deci S va fi $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = W$. Se intampla acelasi lucru ca si mai sus, numarul de muchii va fi n^2, dar bipartitia a fost construita asa incat numarul de muchii sa fie mai mic sau egal cu $n^2 - k \leq n^2 - 1$, deci presupunerea facuta este falsa, rezulta ca $j < n$, ceea ce inseamna ca T contine cel putin un element x_p din W , $p = \overline{1, n}$, rezulta ca $W \cap T \neq \varnothing \to Y \neq \varnothing$.(2)
Din (1) si (2) rezulta ca X si Y sunt nevide. Ramane de demonstrat ca $|\{xy \in F : x \in X, y \in Y\}| \geq k$.
Mai sus am aratat ca multimile X si Y sunt nevide, $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_j}\}$ si $Y = \{x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}}, ..., x_{i_n}\}$.
Din constructia multimilor S,T,V,E avem ca: vor exista toate muchiile posibile intre elemente distincte din W', toate muchiile posibile intre: un element din W si unul din W' si, in ceea ce priveste muchiile intre X si Y (multimi incluse in W si deci in S, respectiv T), taietura aferenta va fi complementarierea muchiilor din F.

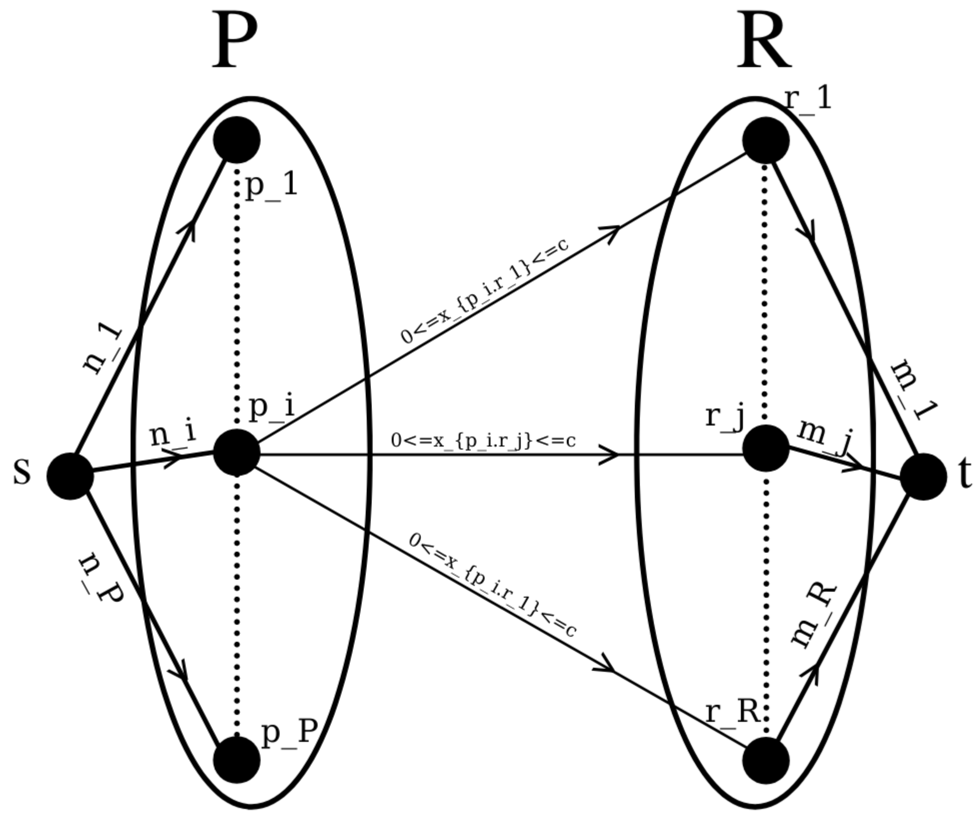
Toate muchiile posibile intre $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_j}$ si $x'_{k_{n-j+1}}, x'_{k_{n-j+2}}, ..., x'_{k_n}$ sunt in numar de j^2, toate muchiile posibile intre $x'_{k_1}, x'_{k_2}, ..., x'_{k_{n-j}}$ si T sunt in numar de $(n - j) * n = n^2 - n * j$.
Notam $a = |\{xy \in F : x \in X, y \in Y\}|$. Atunci numarul de muchii intre $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_j}$ si $x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}}, ..., x_{i_n}$ va fi egal cu $j * (n - j) - a = n * j - j^2 - a$.
Dar avem ca numarul total de muchii din taietura, $|\{xy \in E : x \in S, y \in T\}| \leq p = n^2 - k$, rezulta ca $j^2 + n^2 - n * j + n * j - j^2 - a \leq n^2 - k \to n^2 - a \leq n^2 - k \to -a \leq -k \to a \geq k \to |\{xy \in F : x \in X, y \in Y\}| \geq k$.

c)

Pentru orice bipartitie (S,T) aleasa, se poate verifica in timp polinomial daca$|S| = |T|$ (in O(n)) si daca taietura generata are cardinal mai mic sau egal cu p (in $O(n^2)$). Rezulta ca MBC apartine multimii NP.(1)
Putem construi in timp polinomial o instanta MBC (G=(V,E),p) pornind de la (H=(W,F),k) (polinomial relativ la dimensiunea H = (W,F) si k - algoritmul din enuntul problemei, avand G=(V,E), cu $|V| = 2 * |W|$, $|E| = n^2 - |F|$, $p = n^2 - k$, este evident polinomial relativ la H si k).
Din enunt avem ca simple-Max-Cut este NP-completa. La punctul a am demonstrat ca, daca exista o bipartitie (X,Y) a lui W care satisface cerintele simple-Max-Cut , atunci exista o bipartitie (S,T) a lui V care satisface MBC. La punctul b am demonstrat ca, daca exista o bipartitie (S,T) a lui V care satisface MBC, atunci exista o bipartitie (X,Y) a lui W care satisface cerintele simple-Max-Cut.
In concluzie, din punctele a si b avem ca exista o bipartitie (X,Y) a lui W care satisface cerintele simple-Max-Cut daca si numai daca exista o bipartitie (S,T) a lui V care satisface MBC. Rezulta ca simple-Max-Cut se reduce polinomial la MBC. Rezulta ca MBC este NP-hard. (2)
Din (1) si (2) rezulta ca MBC este NP-completa.

Exercitiul 4

a)



Noua schema de organizare a studentilor poate fi modelata sub forma unei retele de transport R(G, s, t, c) unde:

1. s - nodul initial si t - nodul final;
2. V = $P \bigcup R$. Nodurile din P reprezinta grupele din organizarea initiala, iar nodurile din R grupele dupa reorganizare;
3. E= $\{sp_i\} \bigcup \{p_i r_j\} \bigcup \{r_j t\}$ unde $i \in \overline{1,p}$; $j \in \overline{1,r}$;
4. functia de capacitate are urmatoarele valori:
   c[uv] =
   (a) n_i, $uv = sp_i$
   (b) m_j, $uv = r_j t$
   (c) a, $0 <= a <= c$, $uv = p_i r_j$

   unde $i \in \overline{1,p}$; $j \in \overline{1,r}$; $uv \in E$

b)

Exista o redistribuire a studentilor din anul 1 daca in reteua de transport descrisa la punctul anterior fluxul maxim are valoarea egala cu numarul de studenti, $v(x) = \sum_{i \in \overline{1,p}} n_i = \sum_{j \in \overline{1,r}} m_j$ si sunt saturate muchiile sp_i, $i \in \overline{1,p}$ si $r_j t$, $j \in \overline{1,r}$. De asemenea, trebuie sa fie respectata conditia: $\frac{max(n_i)}{c} <= r$

care asigura faptul ca exista destule grupe pentru a imparti numarul de studenti al unei grupe initiale numeroase fara a depasi limita impusa.
"$\Rightarrow$" Construim functia x pe arce in modul urmator:

1. $x[sp_i] = n_i$, $i \in \overline{1,p}$
2. $x[r_j t] = m_j$, $j \in \overline{1,r}$
3. $x[p_i r_j] \in \overline{0,c}$

x este un flux nenegativ si subcapacitar. Legea de conservare este respectata. In p_i intra un flux de valoare n_i si valoarea fluxului la iesire este exact aceeasi, fiind distribuit nodurilor r_j astfel incat in fiecare nod r_j valoarea fluxului sa fie m_j. $\sum_{i\in\overline{1,p}} n_i = \sum_{j\in\overline{1,r}} m_j \Rightarrow$ valoarea fluxului se pastreaza.
"$\Leftarrow$" $\exists$ x cu $v(x) = \sum_{i\in\overline{1,p}} n_i = \sum_{j\in\overline{1,r}} m_j$
Intrucat capacitatile sunt intregi, inseamna ca exista un flux maxim cu valoare intreaga. Din nodul p_i valoarea fluxului care pleaca va fi n_i, fiind distrubuita astfel: de la p_i pleaca un arc cu valoarea fluxului nenula spre r_j daca in r_j valoarea fluxului este mai mica decat m_j si $x[p_i r_j] + m_j^{`} <= m_j$, asadar valoarea fluxului in nodul $r_j = m_j$.

c)

Pentru a verifica existenta unui astfel de flux trebuie aplicat un algoritm care rezolva problema fluxui maxim si in final $v(x) = \sum_{i\in\overline{1,p}} n_i$. Complexitatea pentru determinarea acestui rezultat depinde de algoritmul ales. Mai intai trebuie stabilite urmatoarele variabile:

1. n - numarul de noduri. $V(R) = s \bigcup t \bigcup R \bigcup P \Rightarrow n = p + r + 2$;
2. m - numarul de muchii. $m = r + p + r * p$;
3. U - majorant al capacitatilor arcelor. $U = max(max(n_i), max(m_j)) + 1$, notat cu a.

Complexitatea poate fi:

1. pentru algoritmul Ford & Fulkerson: $\mathcal{O}(nmU) = \mathcal{O}((p + r + 2)(p + r + pr)a) \Rightarrow \mathcal{O}(p + r)^2 a \frac{pr}{p+r}$
2. pentru algoritmul Edmonds & Karp: $\mathcal{O}(m^2 n) = \mathcal{O}((p + r + pr)^2 (p + r))$
3. pentru algoritmul Ahuja & Orlin: $\mathcal{O}(nm + n^2 logU) = \mathcal{O}((p + r + pr)(p + r) + (p + r)^2 loga) \Rightarrow \mathcal{O}((p + r)^2 (\frac{pr}{p+r} + a))$