

AVL树

@M了个J

<https://github.com/CoderMJLee>

<http://cnblogs.com/mjios>

码拉松

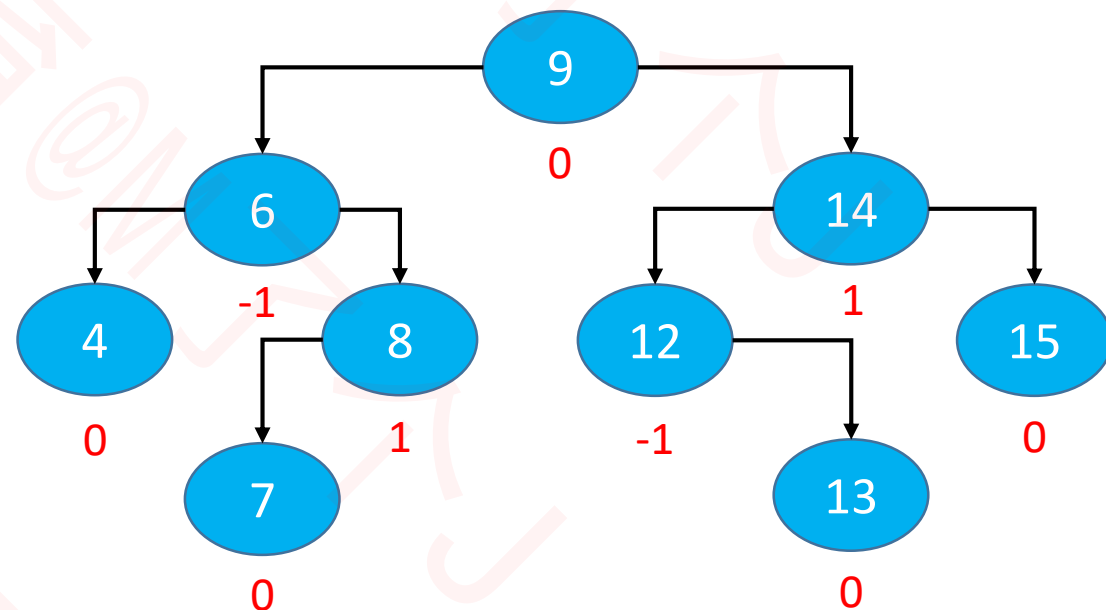
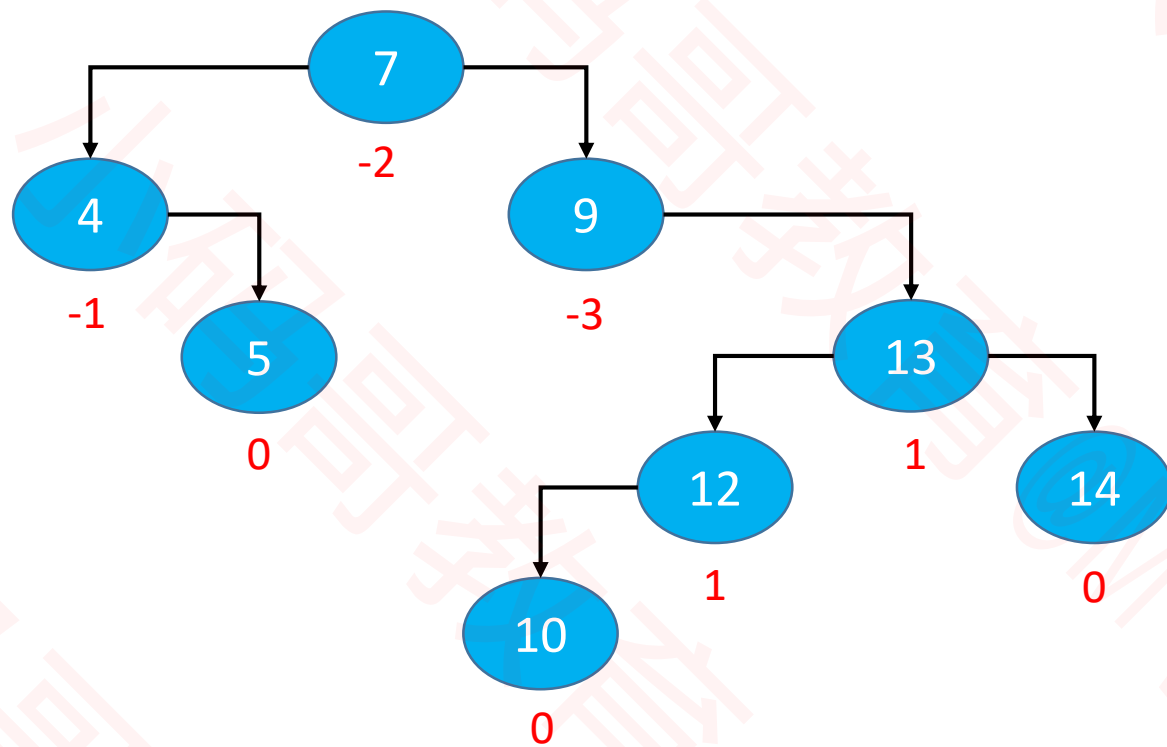


实力IT教育 www.520it.com

- AVL树是最早发明的自平衡二叉搜索树之一
- AVL 取名于两位发明者的名字
 - G. M. Adelson-Velsky 和 E. M. Landis (来自苏联的科学家)
- Something interesting
 - 有人把AVL树念做 “艾薇儿树”
 - 加拿大女歌手，几首不错的歌：《Complicated》、《When You're Gone》、《Innocence》

AVL树

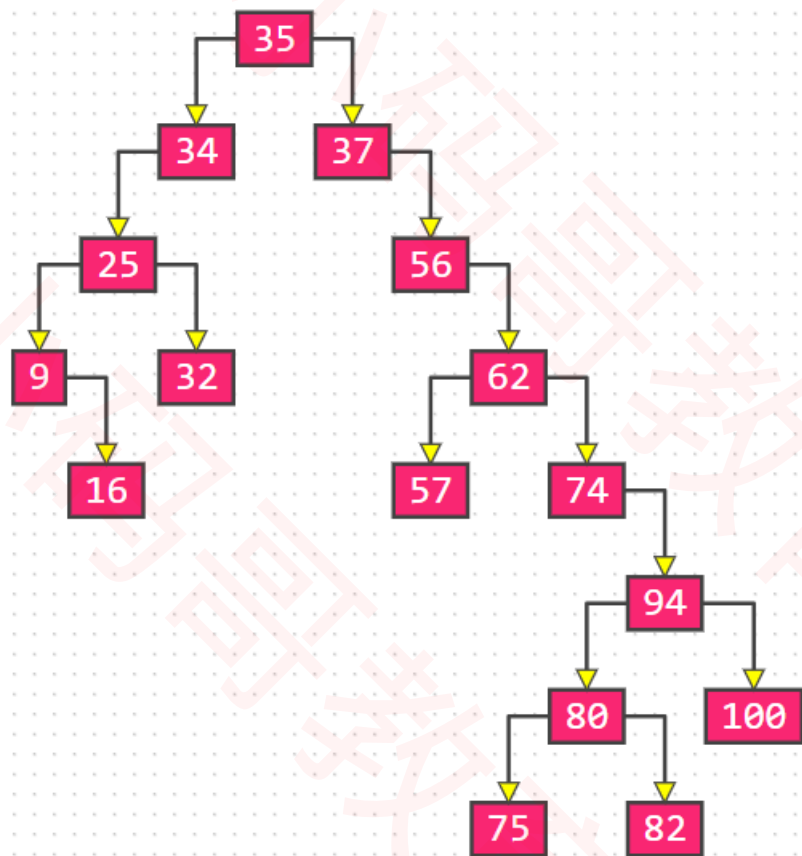
- 平衡因子 (Balance Factor) : 某结点的左右子树的高度差
- AVL树的特点
 - 每个节点的平衡因子只可能是 1、0、-1 (绝对值 ≤ 1 , 如果超过 1, 称之为“失衡”)
 - 每个节点的左右子树高度差不超过 1
 - 搜索、添加、删除的时间复杂度是 $O(\log n)$



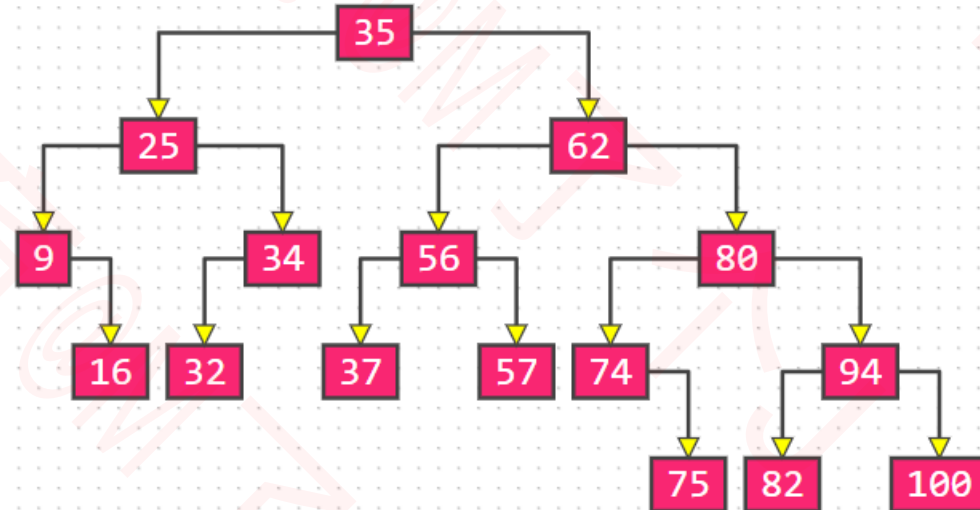
平衡对比

■ 输入数据: 35, 37, 34, 56, 25, 62, 57, 9, 74, 32, 94, 80, 75, 100, 16, 82

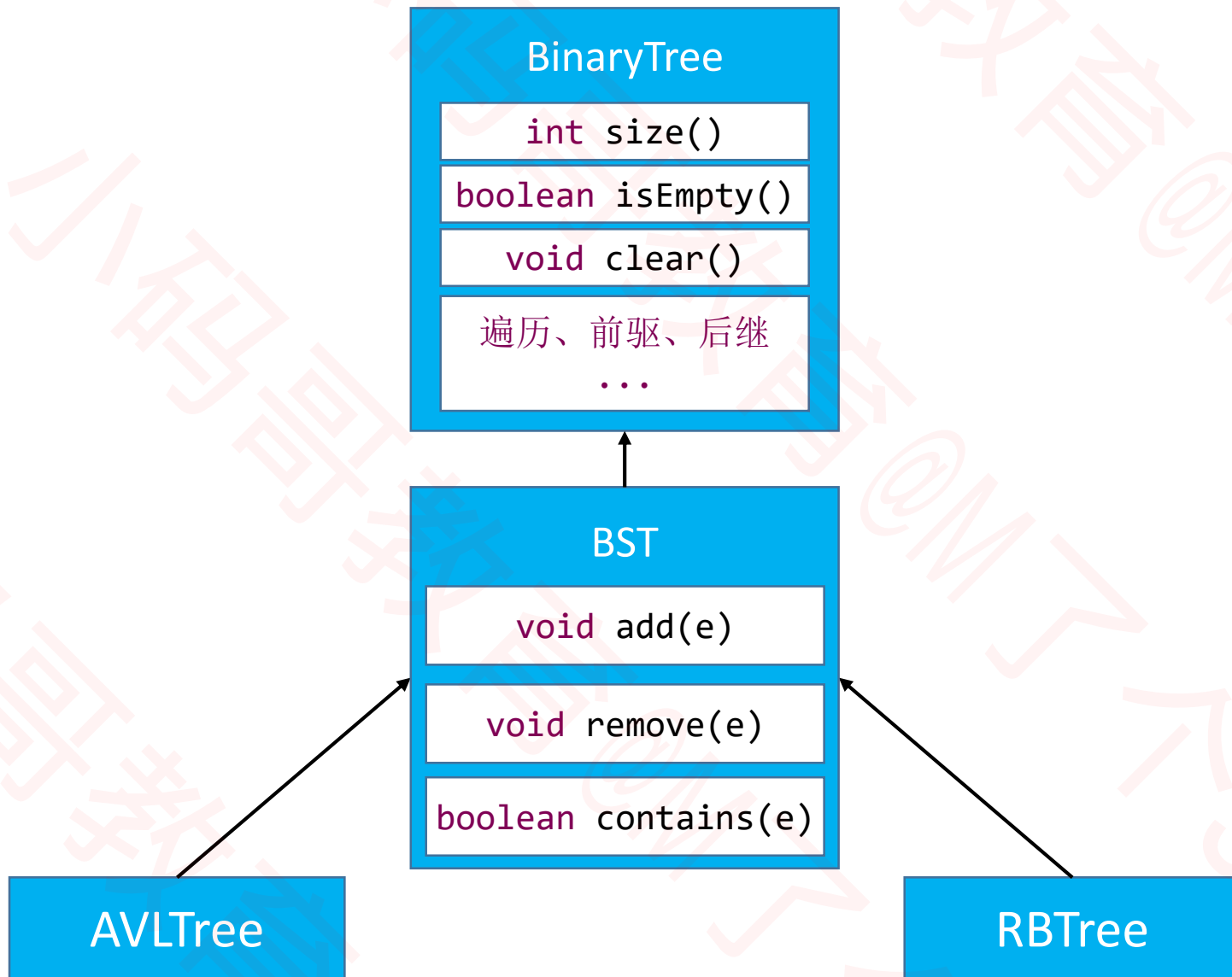
普通二叉搜索树



AVL树

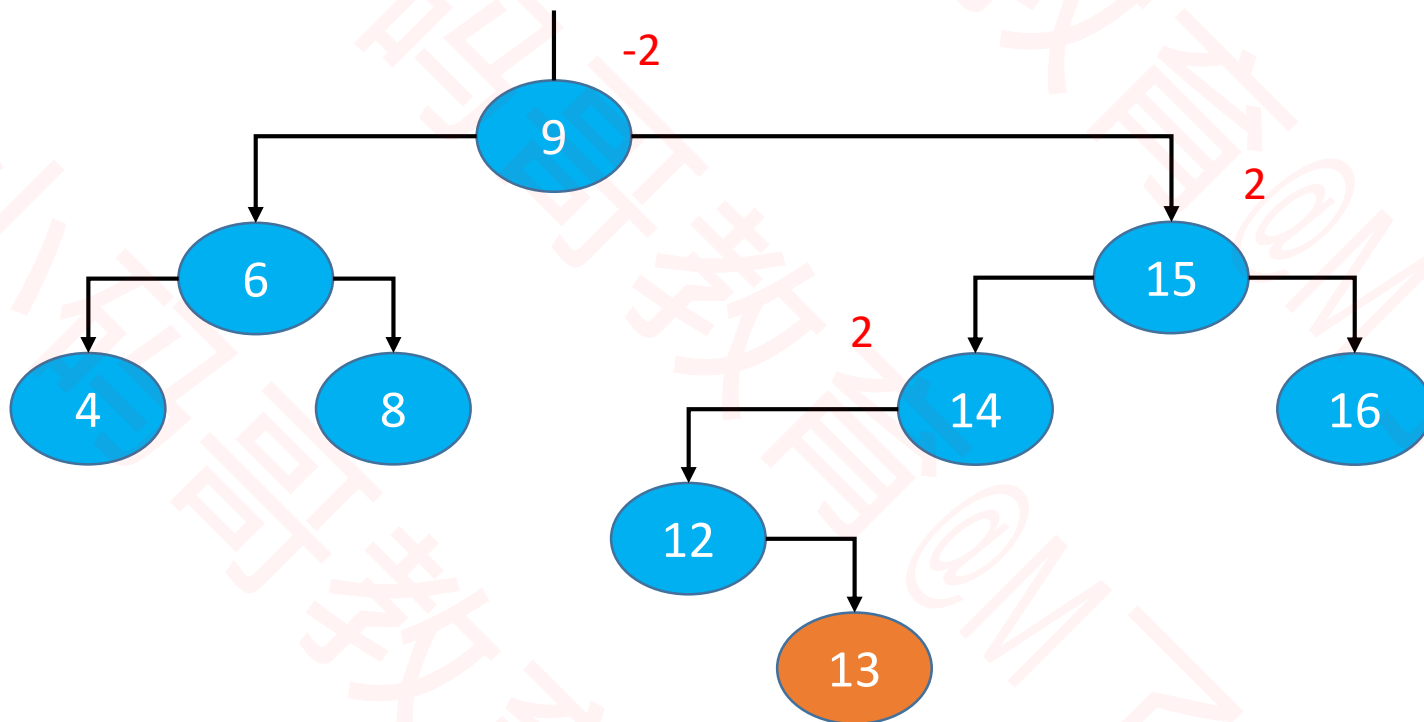


简单的继承结构



添加导致的失衡

- 示例：往下面这棵子树中添加 13
- 最坏情况：可能会导致**所有祖先节点**都失衡
- 父节点、非祖先节点，都不可能失衡



LL - 右旋转 (单旋)

■ $g.left = p.right$

■ $p.right = g$

■ 让p成为这棵子树的根节点

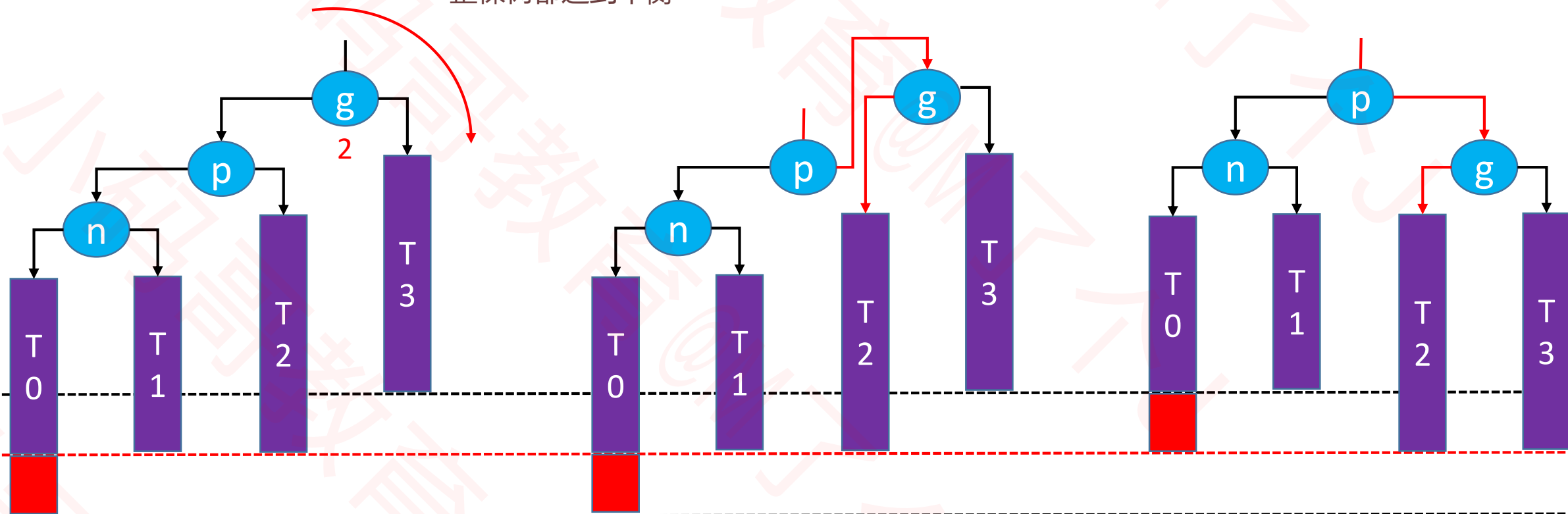
■ 仍然是一棵二叉搜索树: $T_0 < n < T_1 < p < T_2 < g < T_3$

■ 整棵树都达到平衡

■ 还需要注意维护的内容

□ T2、p、g 的 parent 属性

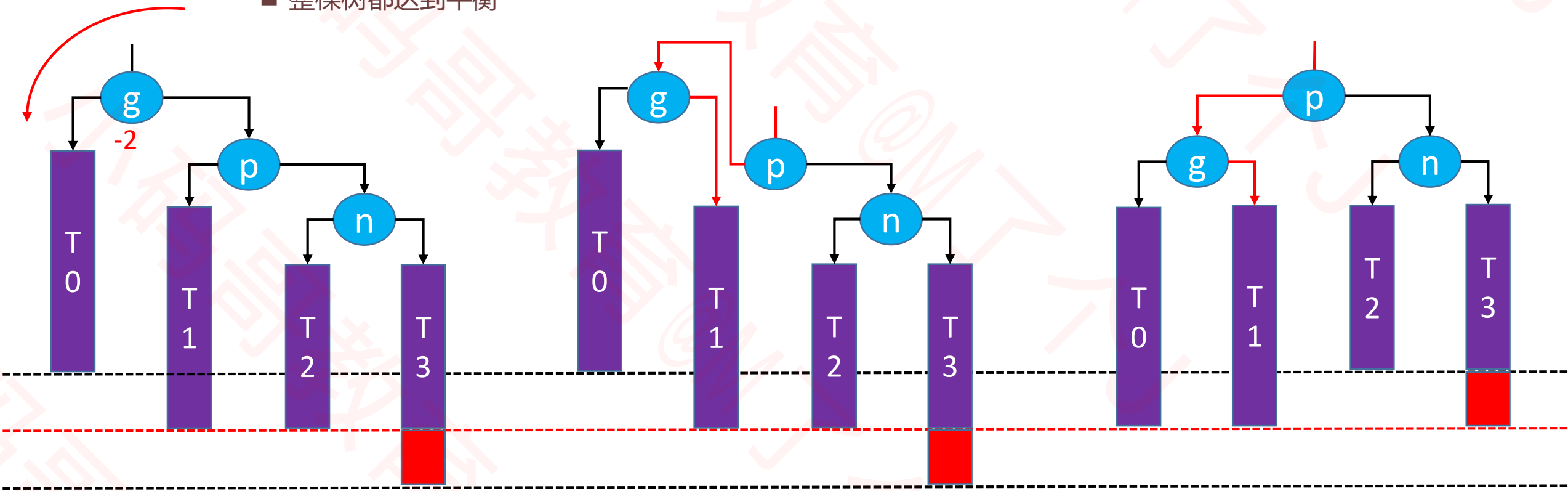
□ 先后更新 g、p 的高度



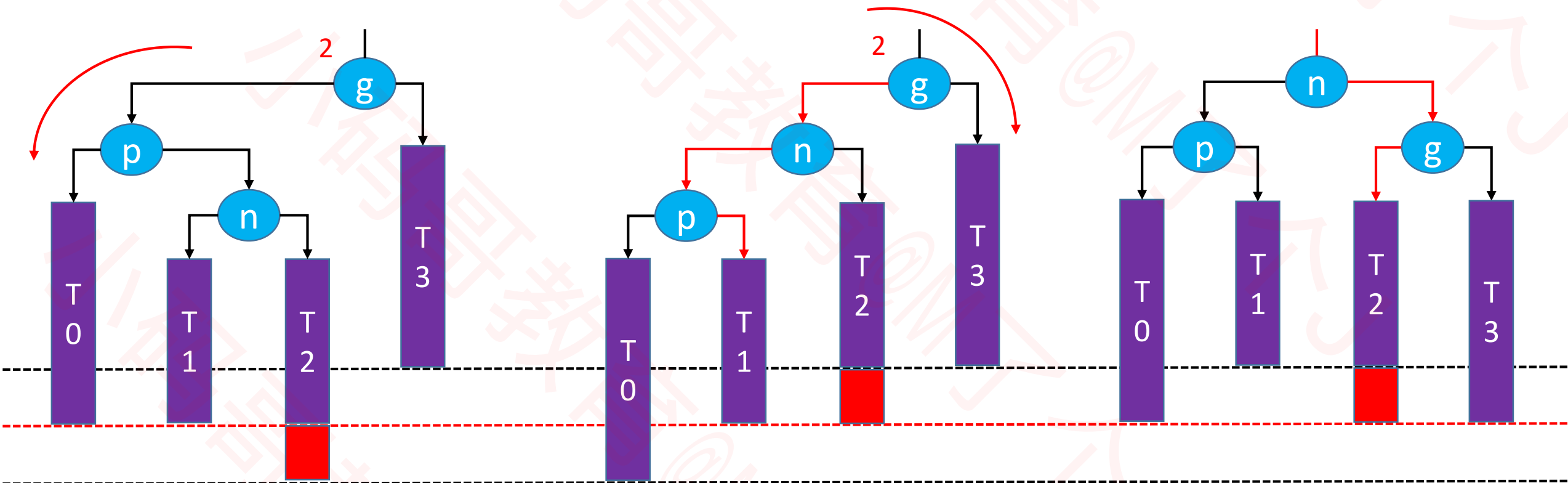
RR – 左旋转（单旋）

- $g.right = p.left$
- $p.left = g$
- 让p成为这棵子树的根节点
- 仍然是一棵二叉搜索树: $T_0 < g < T_1 < p < T_2 < n < T_3$
- 整棵树都达到平衡

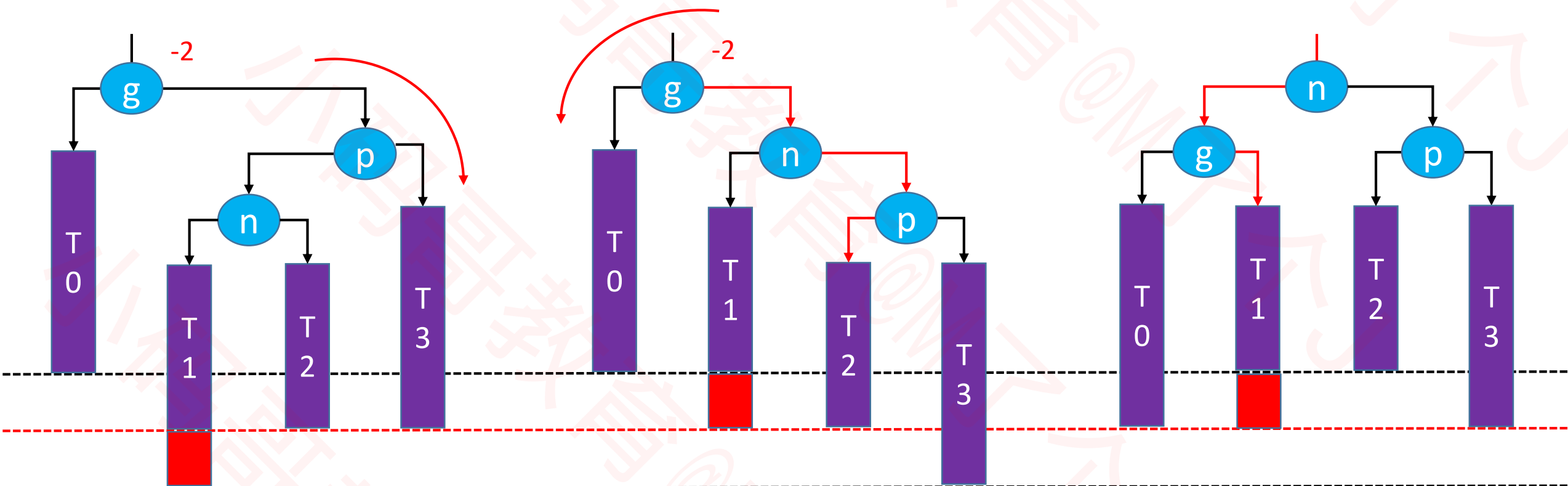
- 还需要注意维护的内容
 - T1、p、g 的 `parent` 属性
 - 先后更新 g、p 的高度



LR – RR左旋转， LL右旋转（双旋）



RL – LL右旋转，RR左旋转（双旋）



zig、zag

■ 有些教程里面

□ 把右旋转叫做zig，旋转之后的状态叫做zigged

□ 把左旋转叫做zag，旋转之后的状态叫做zagged

添加之后的修复

```
@Override
protected void afterAdd(Node<E> node) {
    while ((node = node.parent) != null) {
        if (isBalanced(node)) {
            // 更新高度
            updateHeight(node);
        } else {
            // 恢复平衡
            rebalance(node);
            break;
        }
    }
}
```

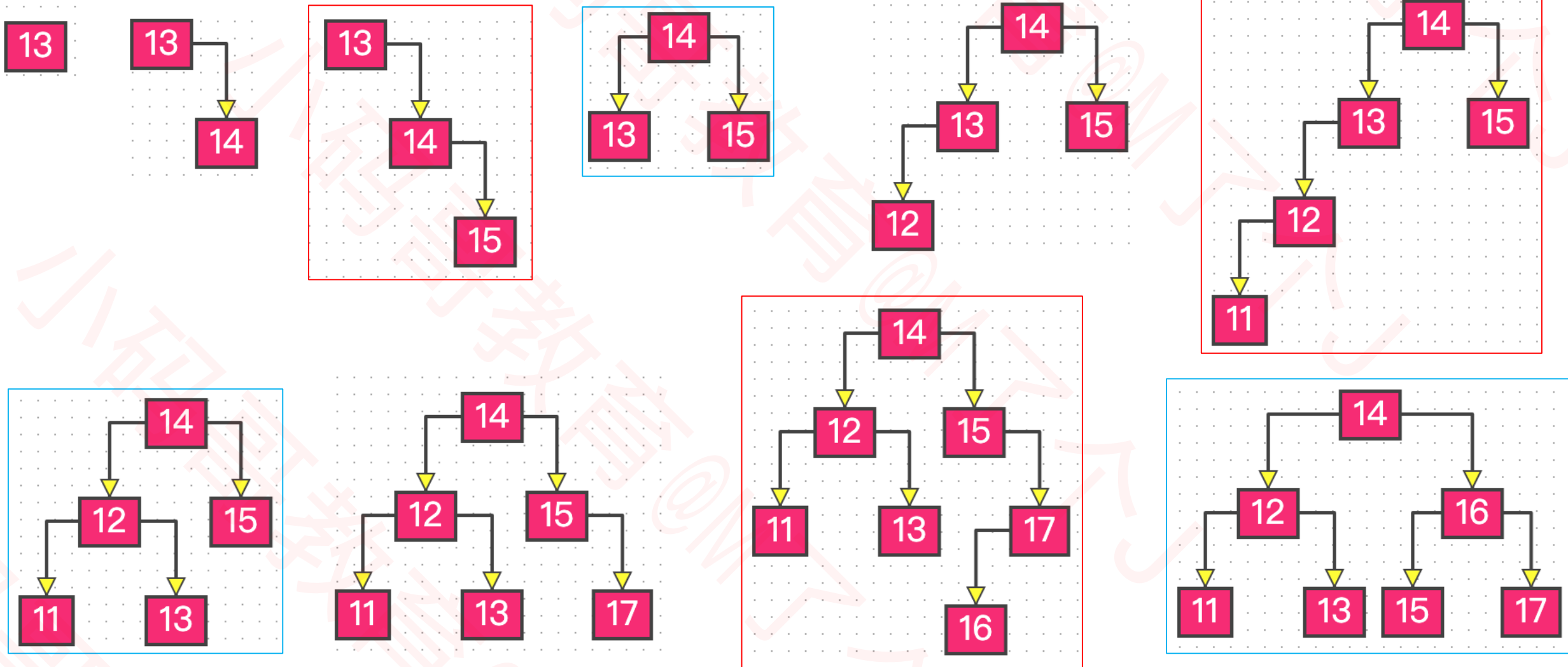
```
/**
 * 重新恢复平衡
 * @param grand 高度最低的不平衡节点
 */
protected void rebalance(Node<E> grand) {
    Node<E> parent = grand.tallerChild();
    Node<E> node = parent.tallerChild();
    if (parent.isLeftChild()) { // L
        if (node.isLeftChild()) { // LL
            rotateRight(grand);
        } else { // LR
            rotateLeft(parent);
            rotateRight(grand);
        }
    } else { // R
        if (node.isLeftChild()) { // RL
            rotateRight(parent);
            rotateLeft(grand);
        } else { // RR
            rotateLeft(grand);
        }
    }
}
```

```
protected void rotateLeft(Node<E> grand) {  
    // 交换子树  
    Node<E> parent = grand.right;  
    Node<E> child = parent.left;  
    grand.right = child;  
    parent.left = grand;  
    // 维护parent和height  
    afterRotate(grand, parent, child);  
}  
  
protected void rotateRight(Node<E> grand) {  
    // 交换子树  
    Node<E> parent = grand.left;  
    Node<E> child = parent.right;  
    grand.left = child;  
    parent.right = grand;  
    // 维护parent和height  
    afterRotate(grand, parent, child);  
}
```

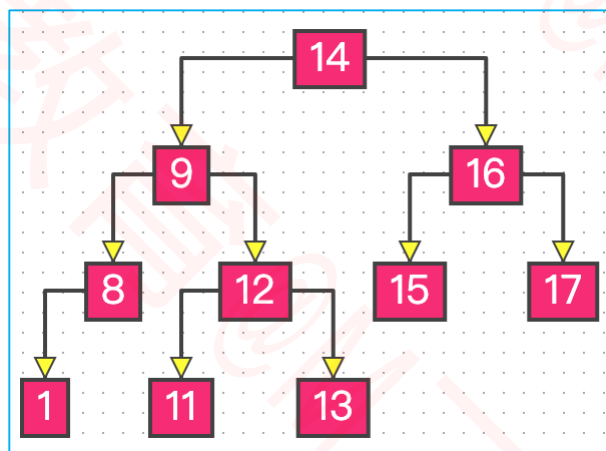
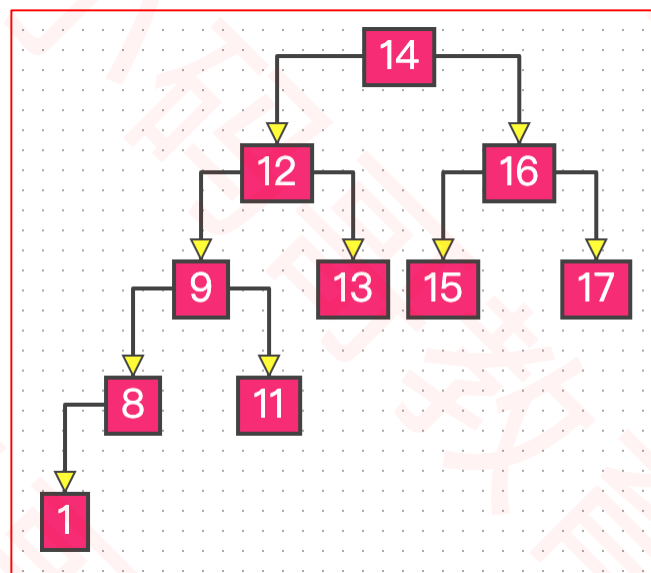
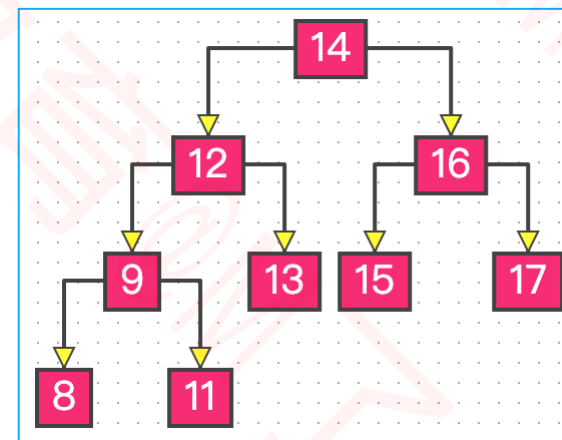
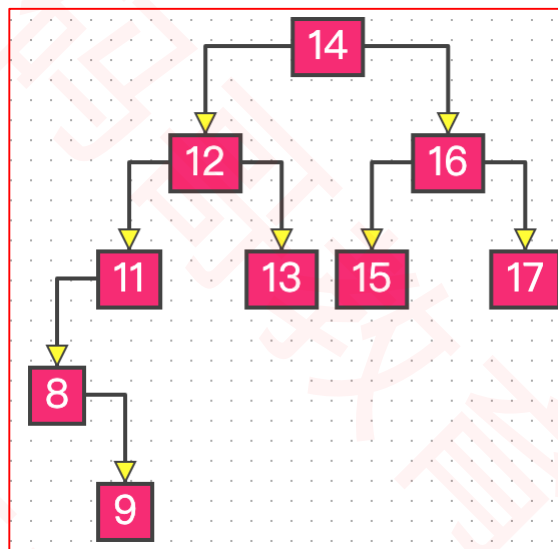
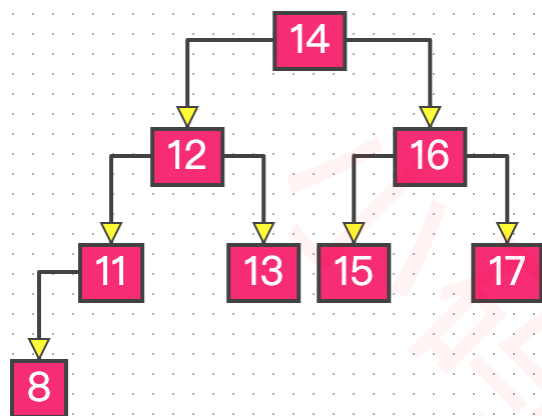
```
/**  
 * 公共代码：不管是左旋转、右旋转，都要执行的  
 * @param grand 失衡节点  
 * @param parent 失衡节点的tallerChild  
 * @param child g和p需要交换的子树（本来是p的子树，后面会变成g的子树）  
 */  
protected void afterRotate(Node<E> grand, Node<E> parent, Node<E> child) {  
    // 子树的根节点嫁接到原树中  
    if (grand.isLeftChild()) {  
        grand.parent.left = parent;  
    } else if (grand.isRightChild()) {  
        grand.parent.right = parent;  
    } else {  
        root = parent;  
    }  
  
    // parent维护  
    if (child != null) {  
        child.parent = grand;  
    }  
    parent.parent = grand.parent;  
    grand.parent = parent;  
  
    // 更新高度（先更新比较矮的grand，再更新比较高的parent）  
    updateHeight(grand);  
    updateHeight(parent);  
}
```

示例

■ 输入数据: 13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1

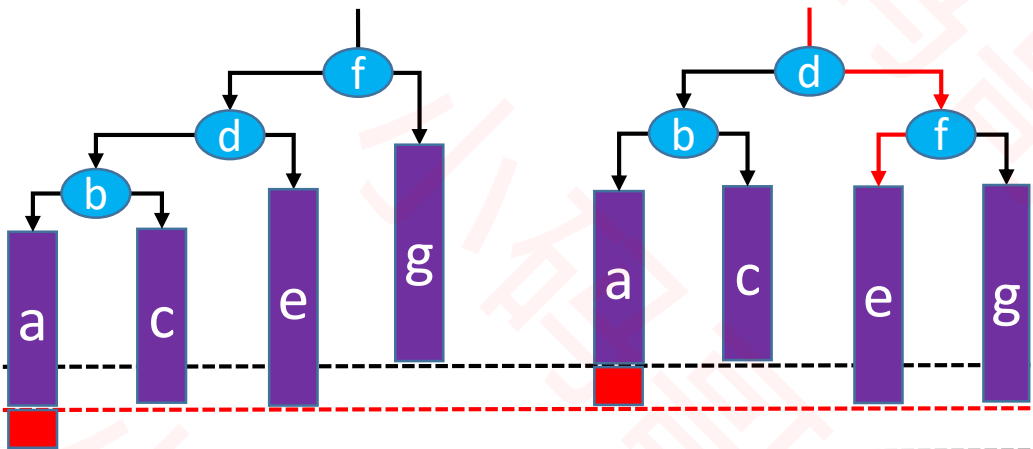


示例

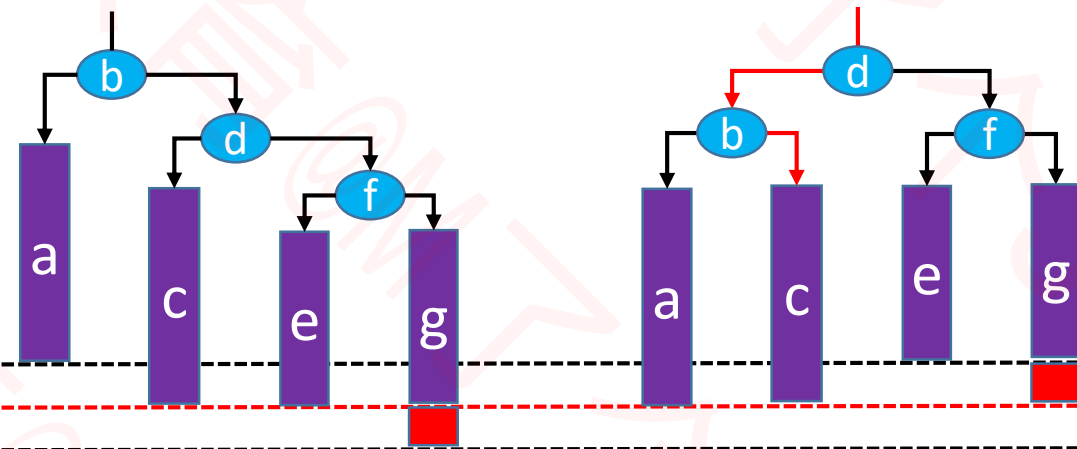


统一所有旋转操作

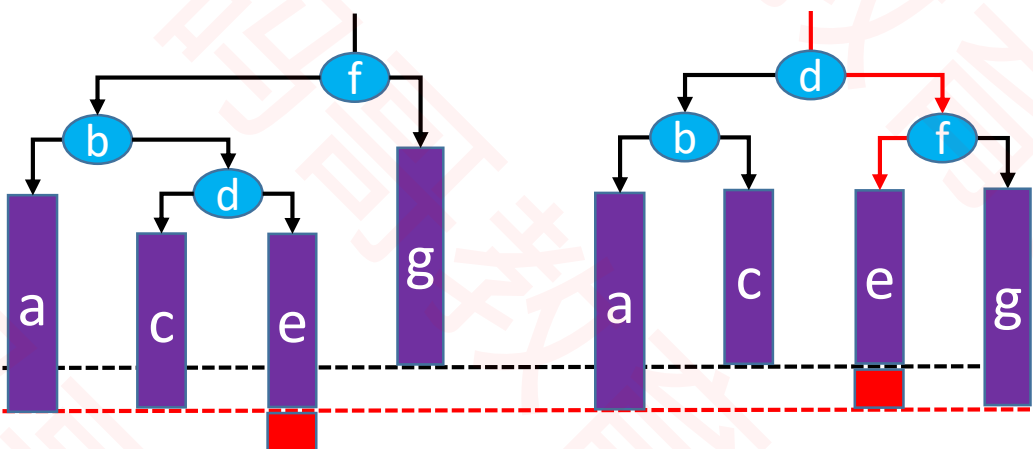
LL



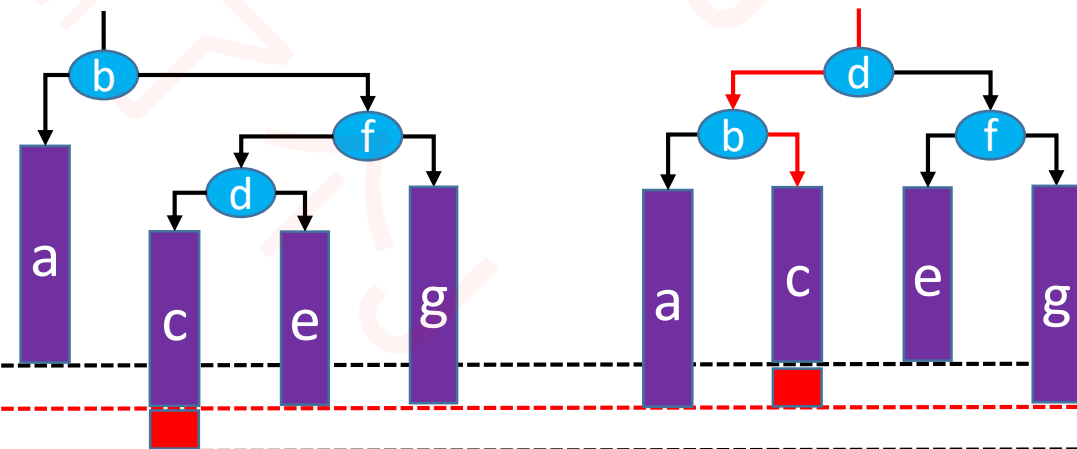
RR



LR



RL

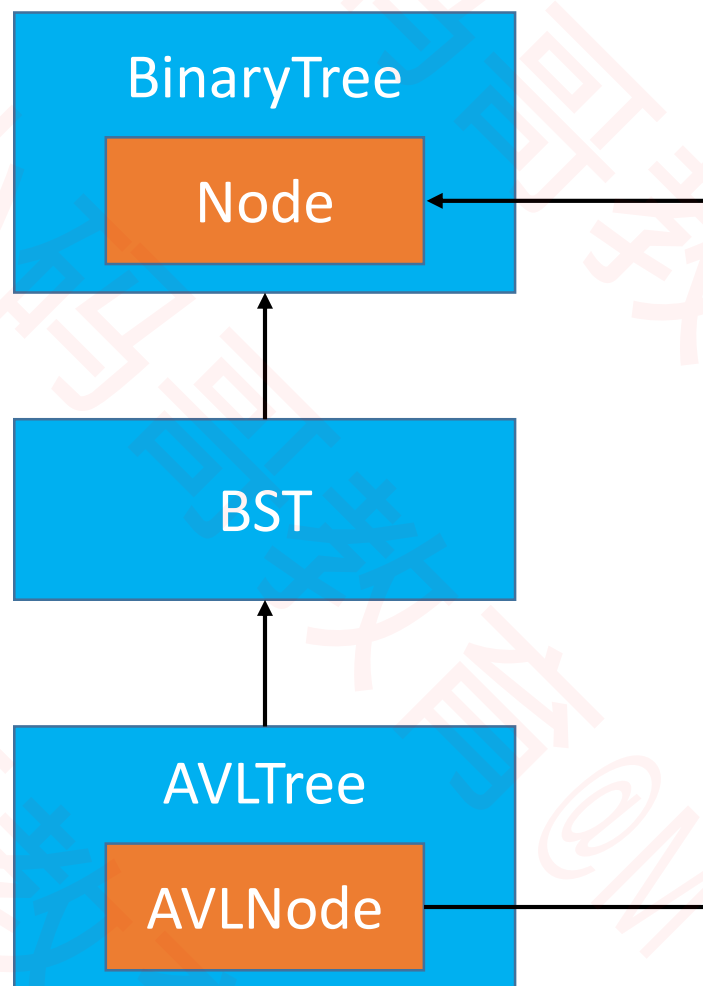


统一所有旋转操作

```
private void rotate(  
    Node<E> r, // 子树的根节点  
    Node<E> b, Node<E> c, Node<E> d, Node<E> e, Node<E> f) {  
    // 让d成为这棵子树的根节点  
    d.parent = r.parent;  
    if (r.isLeftChild()) {  
        r.parent.left = d;  
    } else if (r.isRightChild()) {  
        r.parent.right = d;  
    } else {  
        root = d;  
    }  
  
    // b-c  
    b.right = c;  
    if (c != null) c.parent = b;  
    updateHeight(b);  
  
    // e-f  
    f.left = e;  
    if (e != null) e.parent = f;  
    updateHeight(f);  
  
    // b-d-f  
    d.left = b;  
    d.right = f;  
    b.parent = d;  
    f.parent = d;  
    updateHeight(d);  
}
```

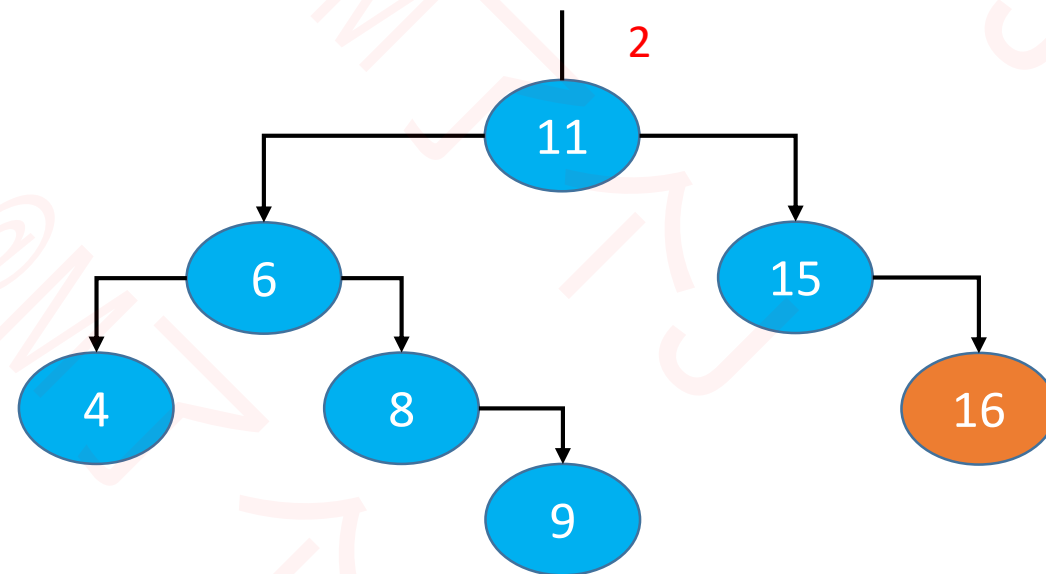
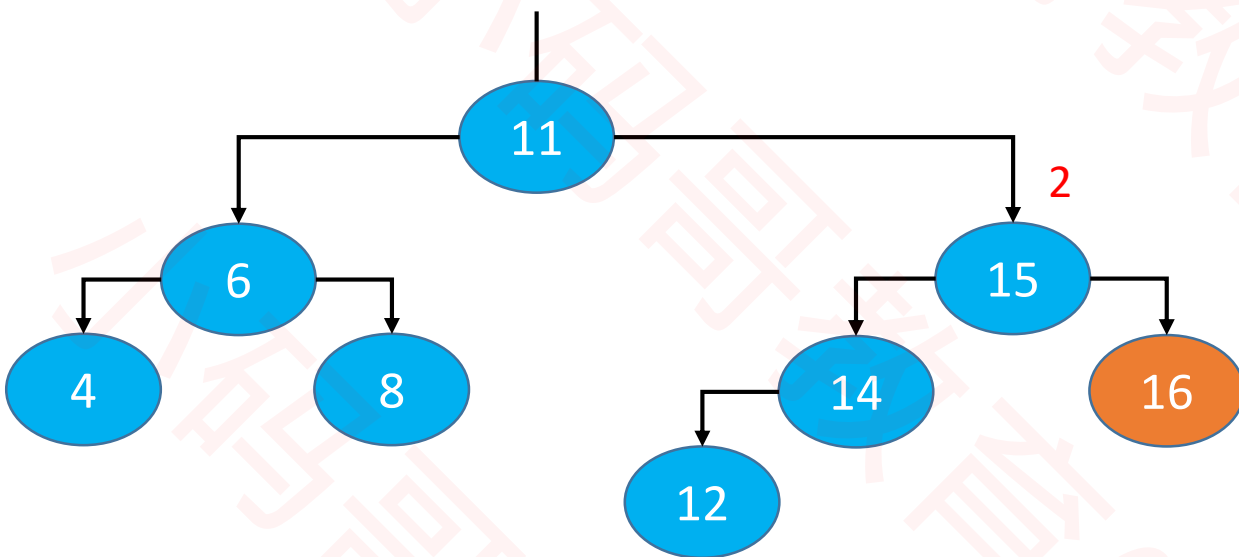
```
private void rebalance(Node<E> grand) {  
    Node<E> parent = ((AVLNode<E>)grand).tallerChild();  
    Node<E> node = ((AVLNode<E>)parent).tallerChild();  
    if (parent.isLeftChild()) { // L  
        if (node.isLeftChild()) { // LL  
            rotate(grand, node, node.right, parent, parent.right, grand);  
        } else { // LR  
            rotate(grand, parent, node.left, node, node.right, grand);  
        }  
    } else { // R  
        if (node.isLeftChild()) { // RL  
            rotate(grand, grand, node.left, node, node.right, parent);  
        } else { // RR  
            rotate(grand, grand, parent.left, parent, node.left, node);  
        }  
    }  
}
```

独立出AVLNode



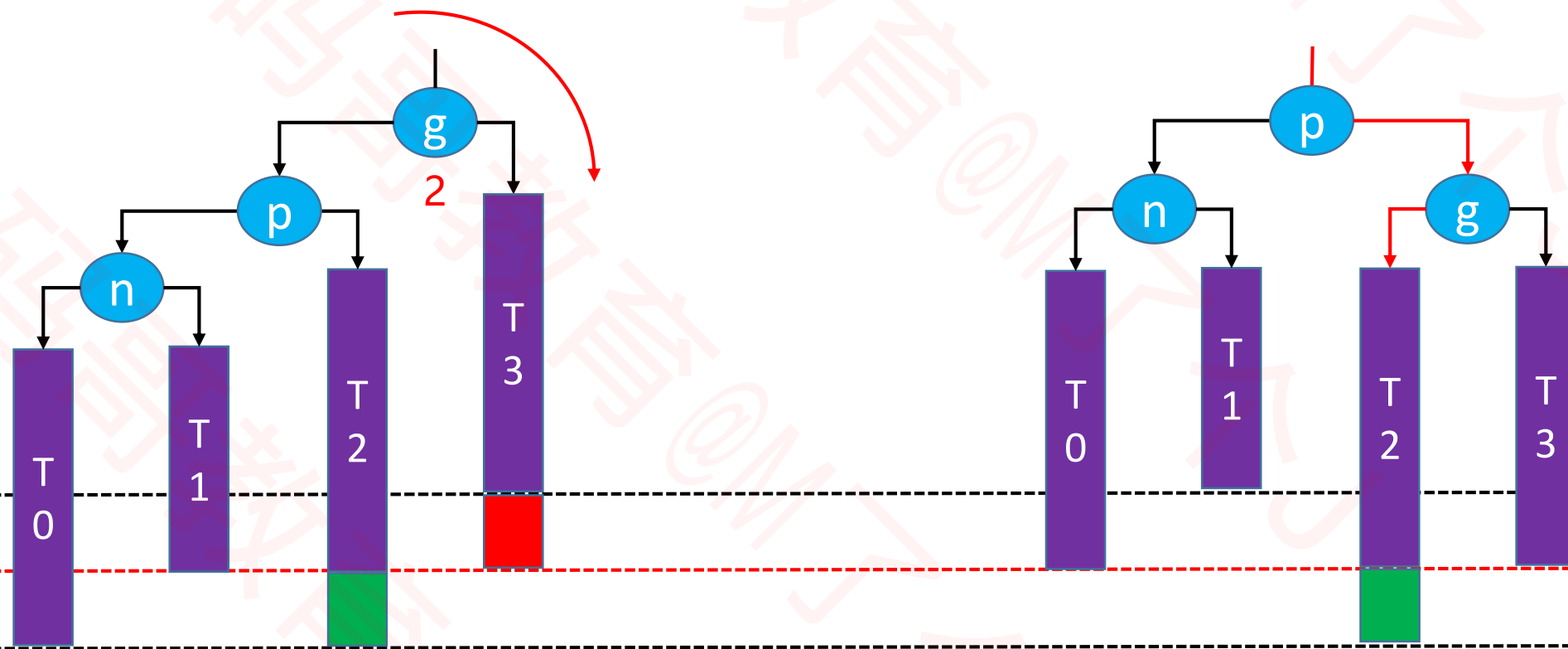
删除导致的失衡

- 示例：删除子树中的 16
- 可能会导致父节点或祖先节点失衡（只有1个节点会失衡），其他节点，都不可能失衡

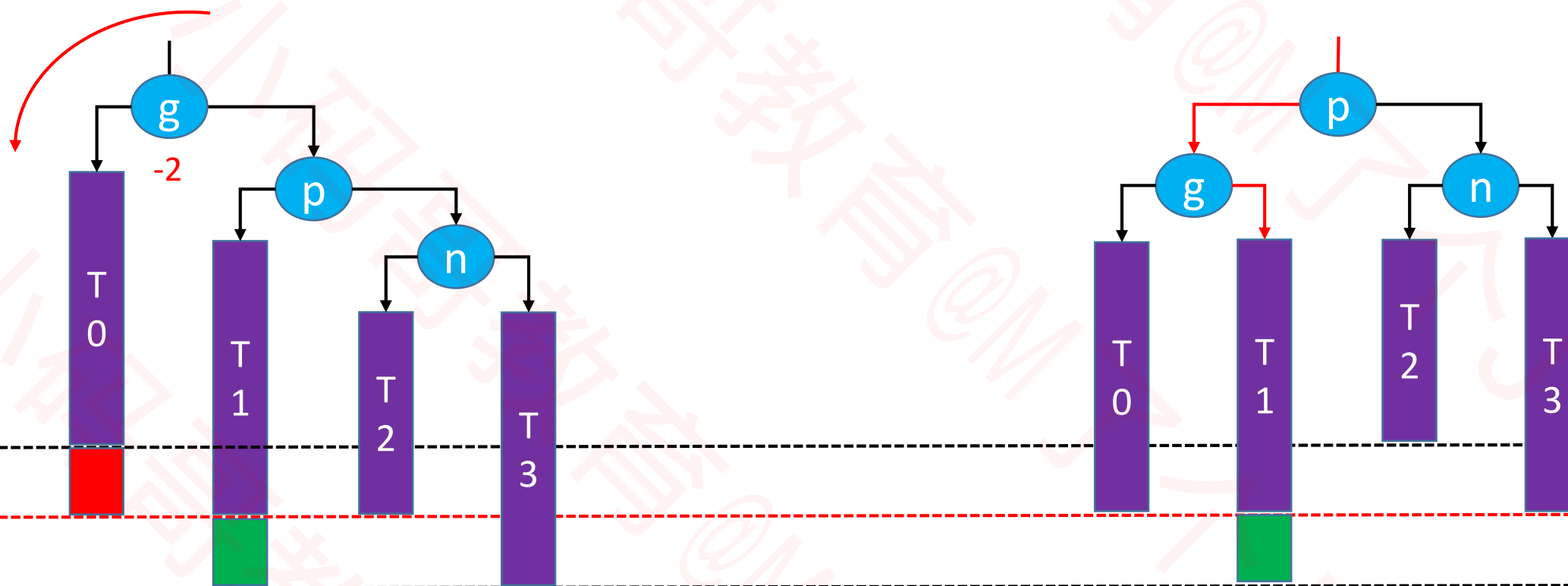


LL – 右旋转（单旋）

- 如果绿色节点不存在，更高层的祖先节点可能也会失衡，需要再次恢复平衡，然后又可能导致更高层的祖先节点失衡...
- 极端情况下，所有祖先节点都需要进行恢复平衡的操作，共 $O(\log n)$ 次调整

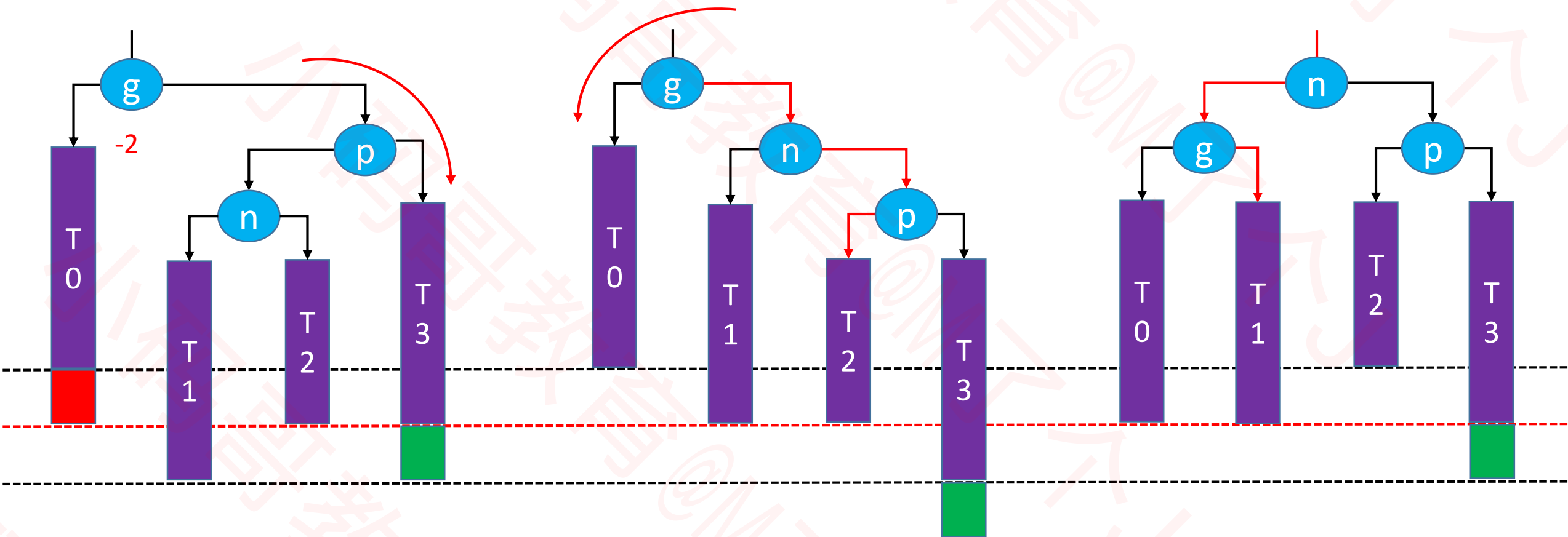


RR – 左旋转 (单旋)





RL – LL右旋转，RR左旋转（双旋）



删除之后的修复

```
@Override
protected void afterRemove(Node<E> node) {
    while ((node = node.parent) != null) {
        if (isBalanced(node)) {
            updateHeight(node);
        } else {
            rebalance(node);
        }
    }
}
```


■ 添加

- 可能会导致**所有祖先节点**都失衡
- 只要让高度最低的失衡节点恢复平衡，整棵树就恢复平衡【仅需 $O(1)$ 次调整】

■ 删除

- 可能会导致**父节点**或**祖先节点**失衡（只有1个节点会失衡）
- 恢复平衡后，可能会导致更高层的祖先节点失衡【最多需要 $O(\log n)$ 次调整】

■ 平均时间复杂度

- 搜索： $O(\log n)$
- 添加： $O(\log n)$ ，仅需 $O(1)$ 次的旋转操作
- 删除： $O(\log n)$ ，最多需要 $O(\log n)$ 次的旋转操作

作业

- 平衡二叉树: <https://leetcode-cn.com/problems/balanced-binary-tree/>