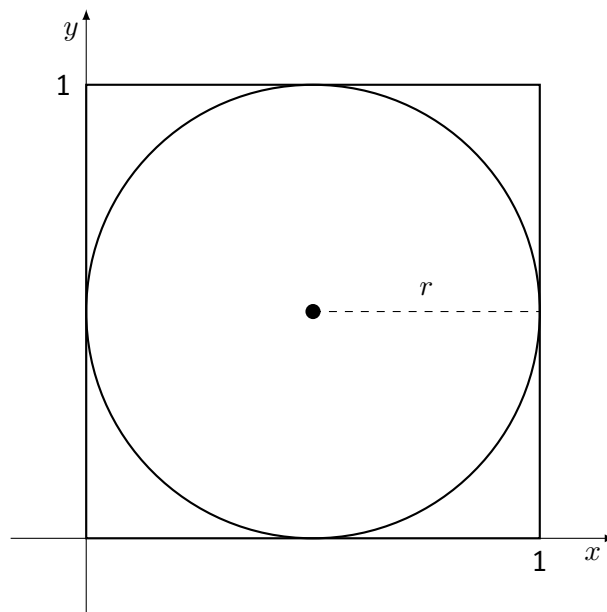


Tema #12 – Valor esperado em um jogo de dardos

Os métodos de Monte Carlo, também conhecidos como experimentos de Monte Carlo, são algoritmos computacionais que recorrem à amostras aleatórias para obter resultados numéricos.

Um famoso experimento de Monte Carlo permite computar uma aproximação de π . Considere um quadrado de lado 1, cujo vértice inferior esquerdo está posicionado na origem dos eixos ordenados. Considere também um círculo de raio $r = \frac{1}{2}$ inscrito neste quadrado. A figura abaixo ilustra esta situação.



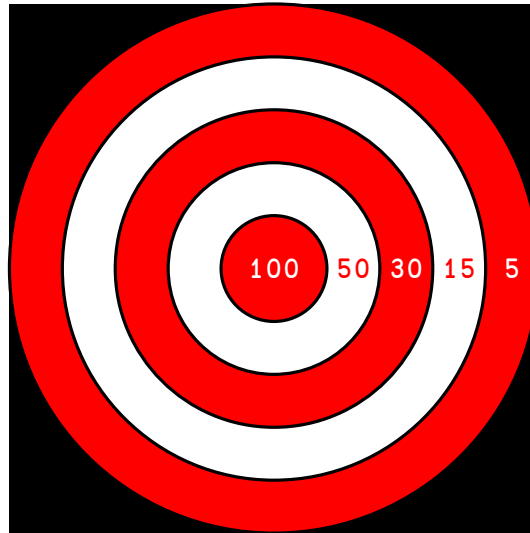
O quadrado tem área igual a 1, e o círculo tem área igual a $\frac{1}{4}\pi$. O experimento consiste em sortear N pontos $P_i = (x_i, y_i)$, com $x, y \in [0, 1]$ que estão contidos no quadrado. Seja M o número destes pontos que estão contidos no círculo, isto é, $M = |\mathcal{P}|$, onde

$$\mathcal{P} = \left\{ P_i \mid \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y_i - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

O valor de M é uma aproximação da área do círculo, e portanto $\pi \approx 4M$. Em geral, quanto maior o valor de N , melhor a aproximação.

Problema

Considere um jogo de dardos cujo alvo é um quadrado de lado 1 que contém uma série de círculos brancos e vermelhos concêntricos e inscritos neste quadrado. Acertar um dardo em uma faixa colorida vale a pontuação indicada; se o dardo não atingir nenhum círculo o jogador não marca pontos. Veja a figura abaixo.



Construa um experimento de Monte Carlo que compute o valor esperado da pontuação obtida pelo lançamento de N dardos aleatoriamente. Considere que todos os dados atingirão o alvo. Compute o valor esperado analiticamente e compare com o valor obtido para $N = 10^i$, com $i = 1, 2, \dots, 7$. Os raios dos círculos, do menor para o maior, são iguais a 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 e 0.5, respectivamente.

Lembre-se de que a esperança (valor esperado) de uma variável aleatória X é dada pela expressão

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \times p(X = i),$$

onde $p(X = i)$ é a probabilidade de X assumir o valor i .