1.6 Finite sample space

Def) Simple sample space

$\Leftrightarrow |S| = n \quad S = \{s_1 \cdots s_n\}$, and

$P(s_1 \text{ occurs}) = P(s_2 \text{ occurs}) = \cdots$

$= P(s_n \text{ occurs}) = \frac{1}{n}$

A = n 개의 outcome 중 m 개를 포함하는 event

$P(A) = \frac{m}{n}$.

ex) 동전 3개 던지기 (H, T)

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

S가 simple sample space 라 하면

$P(HHH) = P(HHT) = \cdots P(TTT) = \frac{1}{8}$

$P(\text{첫 시도에 H이 나옴}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

1.7. counting methods

Thm 1.7.1 multiplication rule (곱의 법칙)

Experiment가 $k \geq 1$ 개의 과정(step)으로

이루어져 있음.

$$\underset{1st}{\square} \to \underset{2nd}{\square} \to \cdots \to \underset{kth}{\square}$$

i-th step에서 나올 수 있는 outcome의 경우의 수를 n_i라 하면.

Sample space $S = \{(u_1, \cdots, u_k) \mid u_i$는 i-th step의 outcome$\}$

$|S| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

ex) 주사위 두개 던지기. → 2개의 step으로 구성

$$\underset{n_1=6}{\square} \to \underset{n_2=6}{\square} \quad \Rightarrow 6 \times 6 = 36\text{가지}.$$

ex) 4자리 비밀번호 각 자리는 0-9의 integer 가능

$$\underset{n_1=10}{\square} \to \underset{n_2=10}{\square} \to \underset{n_3=10}{\square} \to \underset{n_4=10}{\square} \quad \Rightarrow 10^4.$$

※ Permutation (순열)
↳ ordering

Def) Permutation of k from n.

⇒ n개 중에서 k를 골라 순서대로 나열할 수 있는 총 경우의 수 (중복 허용 X)

⇒ k개의 step으로 이루어진 experiment.

$\boxed{V} \to \boxed{V} \Rightarrow \boxed{} \cdots \to \boxed{}$

$n_1 = n$ $n_2 = n-1$ $n_3 = n-2$ $n_k = n-k+1$

$\Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \Leftarrow$

$\Downarrow$

만약 $k=n$ 이면 $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$

ex) 25명 학생 중 반장 1명 부반장 1명 뽑는 총 경우의 수?

i) ordering? O

$25 \cdot 24 = 600$ 가지.

ii) replacement? X

ex) 다른 책 6권을 일렬로 나열하는 경우의 수.

i) ordering O

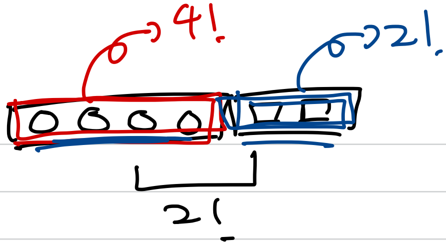
ii) replacement. X

$6 \cdot 5 \cdots 1 = 6! = 720.$

ex) 서로 다른 수학책 4권 + 국어책 2권을 나열하는 경우의 수. 단 수학책은 수학책끼리, 국어책은 국어책끼리 있어야 함

수수수수국국 O

수국국수수수 X



$\Rightarrow 4! \times 2! \times 2! = 96.$

* Combination (조합)

⇒ n개의 element로 이루어진 set에서 크기가 k인 subset을 만들 수 있는 경우의 수.

$$\Rightarrow \frac{\overset{3}{n}\cdot\overset{2}{(n-1)}\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \boxed{\binom{n}{k}} \Rightarrow n \text{ choose } k$$

$\cancel{{}_nC_k} \Leftarrow$

- ordering X
- replacement X

ex) 25명의 학생들 중 반대표 2명 뽑기.

ordering X
replacement X

$$\binom{25}{2} = \frac{25!}{23!\,2!} = 300.$$

ex) 동전을 10개 던질때, 앞면이 3번 나올 확률 (A)

$|S| = 2^{10}$

$|A| = \binom{10}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$$

ex) 남자 10명, 여자 20명 중 총 10명을

뽑았을 때, 남자가 3명 이하일 확률

$$\underbrace{\text{남자가 3명 이하일}}_{A}$$

S = 30명 중 10명을 뽑는 경우의 수 $\Rightarrow \binom{30}{10}$

$$\left.\begin{cases} A_0 = \text{10명 중 남자가 0명} \\ A_1 = \quad '' \quad \text{1명} \\ A_2 = \quad '' \quad \text{2명} \\ A_3 = \quad '' \quad \text{3명} \end{cases}\right) \rightarrow \text{mutually disjoint}$$

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$|A_0| = \binom{20}{10}$$

$$|A_1| = \binom{20}{9} \cdot \binom{10}{1} \quad \rightarrow P(A_i) = \frac{|A_i|}{|S|}$$

$$|A_2| = \binom{20}{8} \cdot \binom{10}{2}$$

$$|A_3| = \binom{20}{7} \cdot \binom{10}{3}$$

Chap 2. Conditional probability (조건부 확률)

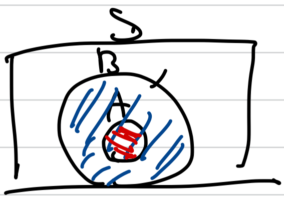
ex) 로또 (1 - 30 사이의 숫자중 6개 선택)

↳ 순서 상관 X.

event A : 1, 14, 15, 20, 23, 27 이 뽑힘
" B : 15가 뽑힘.

조건.

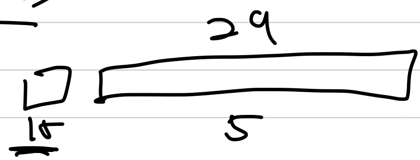
⇒ $\boxed{\text{B가 일어난걸 알았을때 (가정했을때)}}$
A가 일어날 확률.



$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Def) (conditional probability)
Conditional probability of the event A, given that the event B has occured.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{if } P(B) > 0).$$



ex) lotto 풀이)

$$P(B) = \frac{\binom{29}{5}}{\binom{30}{6}} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{\binom{30}{6}} = 1.68 \times 10^{-6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 8.4 \times 10^{-6}.$$

ex) 주사위 2개 던지기.

$S = \{(a,b) \mid$ 첫시도 $= a$, 두번째시도 $= b\}$

$A = \{(a,b) \mid a+b < 8\}$

$B = \{(a,b) \mid a+b \text{ is odd}\}$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B
- 3 : (1,2) (2,1) → 2가지
- 5 : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) → 4가지
- 7 : (1,6), (2,5) - - (6,1) → 6가지
- 9 : (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) → 4가지
- 11 : (5,6), (6,5) → 2가지.

+. 18가지

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

* Multiplication rul for conditional probability.

Thm 2-1.1 A, B = event.

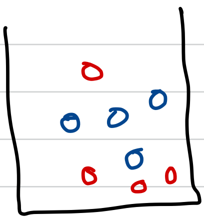
i) If $P(B)>0$. $P(A\cap B) = \underline{P(A|B)}\cdot P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ii) If $P(A)>0$, $P(A\cap B) = P(B|A)\cdot P(A)$

ex) 공 두개 고르기, 뽑은 공은 다시 넣지 않음

파란색



파란색공 b개

빨간공 r개

E = 처음에는 빨, 두번째에는 파 뽑는 event.

A = 처음에 빨   B = 두번째 파.

$$P(E) = P(A\cap B)$$

$$P(A) = \frac{r}{r+b}$$

$P(B) \longrightarrow$ 처음 결과물에 영향을 받음!

$$P(B|A) = \frac{b}{r+b-1}$$

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1}$$

Thm 2.1.2 (generalization form)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ = n events.

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \leftarrow$

$= P(A_1) \cdot P(\underline{A_2 | A_1}) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$

$\cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}) \cdots ①$

$\underline{P(\,)}$ ①

$$= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_2 \cap \cancel{A_1})}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{P(A_1 \cap \cancel{A_2} \cap A_3)}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdots \frac{\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n)}}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

$= P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.

ex) box · 예시) (파란공 b개, 빨간공 r개),

한번 뽑은 공은 다시 넣지 않는다.

여기서 4개를 뽑을때, 순서대로

빨, 파, 빨, 파 를 뽑을 확률

Event R_j = j번째 시도에 빨강.

B_j = 〃 파랑.

$P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4)$

$= P(R_1) \cdot P(B_2 | R_1) \cdot P(R_3 | R_1 \cap B_2)$

$\cdot P(B_4 | R_1 \cap B_2 \cap R_3)$

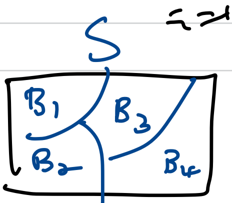
$$= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1} \cdot \frac{r-1}{r+b-2} \cdot \frac{b-1}{r+b-3}.$$

* Conditional probability & partition.

Def (partition) S = sample space.

event $B_1 \dots B_k$ 가 $\boxed{\text{S의 partition}}$을 이룬다.

$\Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$, and $B_1 \dots B_k$ are mutually disjoint



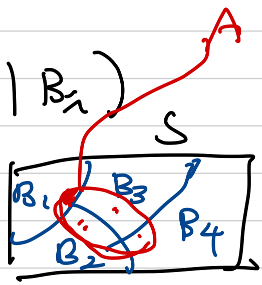
Thm 2-1-4 (Law of total probability)

Event $B_1 \cdots B_k$ form a partition of S, and

$\forall i \ P(B_i) > 0$. Then

for any event $A \subset S$.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$



pf) $B_1 \cdots B_k$가 S의 partition 이므로 $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cdots \cup (B_k \cap A)$

이때 $(B_1 \cap A), (B_2 \cap A) \cdots (B_k \cap A)$는 mutually disjoint 이므로 by axiom iii)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} (B_i \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i) \quad (\because P(B_i) > 0)$$

ex) 게임.

i) 1~50 중에 하나 뽑기. 이 수를 X라 하자

ii) $X \leq Y$ 인 Y가 나올때까지 계속해서 뽑기.

Y = 50일 확률? 12 12

A : Y = 50.

B_i : X = i 인 event.

$B_1, B_2 \cdots B_{50}$ → mutually disjoint

↳ 모두 $\frac{1}{50}$

$$P(A \mid B_i) = \frac{1}{51-i}$$

→ $50-i+1$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{50} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{51-i} \sim 0.09.$$

2.2 Independent events (독립사건)

ex) 순서대로 동전 두개 던지기.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$A = \{$ 두번째 H 나옴 $\} = \{HH, TH\}$

$B = \{$ 처음 T 나옴 $\} = \{TH, TT\}$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$= P(A)$$

$\Rightarrow$ Event B가 event A가 일어날 확률에

영향을 끼치지 않는다!

Def) (Independent)

Two events A and B are Independent.

$\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$

iff

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

☆ 문제에서 independent condition 꼭 확인하기!

ex) 공장에서 기계1과 기계2가 서로 독립적으로 작동함

event A: 기계1이 8시간안에 고장남

" B: " 2 "

$P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{1}{4}$.

이때 8시간안에 기계 1이나 2중 적어도 하나가 고장날 확률. $\Rightarrow A \cup B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(A) \cdot P(B)$$

($\because$ A and B are independent)

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Thm 2.2.1 (Independence of complements)

A, B: event

If A and B are independent then

A and B^c are also independent

pf) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$A \setminus B$ $= P(A) - P(A) \cdot P(B)$

($\because$ A and B are independent)

$= P(A)(\underline{1 - P(B)})$

$= P(A) \cdot P(B^c)$

$\therefore$ A and B^c are independent.

Def) Mutually independent events.

K events $A_1 \cdots A_k$ are mutually independent

$\longleftrightarrow$ $\forall$ subset $\{A_{i_1} \cdots A_{i_j}\}$ $i_1 = 2$, $i_2 = 4$

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j})$

$= P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_j})$

ex) 기계가 item 6개를 생산..

각각의 item이 고장나는 event는 mutually

independent., 이때 각각의 생산한 item이

고장날 확률 $= p$.

6개중 정확히 2개가 고장나 있을 확률.

event D_i : i번째 생산한 item이 고장.

$P(D_1) = P(D_2) \cdots = P(D_6) = p$.

예) 1,2 고장, 3,4,5,6 멀쩡.

$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3^c \cap D_4^c \cap D_5^c \cap D_6^c)$

$= \underset{p}{P(D_1)} \cdot \underset{p}{P(D_2)} \cdot \underset{1-p}{P(D_3^c)} \cdot \underset{1-p}{P(D_4^c)} \cdot \underset{1-p}{P(D_5^c)} \cdot \underset{1-p}{P(D_6^c)}$

$= p^2(1-p)^4$.

$\Rightarrow \binom{6}{2} \cdot p^2(1-p)^4$ //