Der Zufall im Computer

Hannes Nikulski

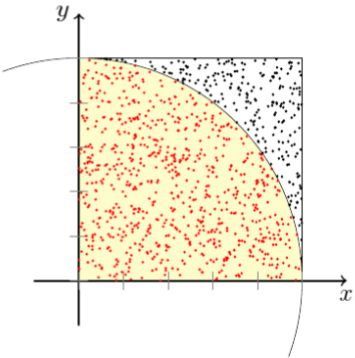
TU Dresden

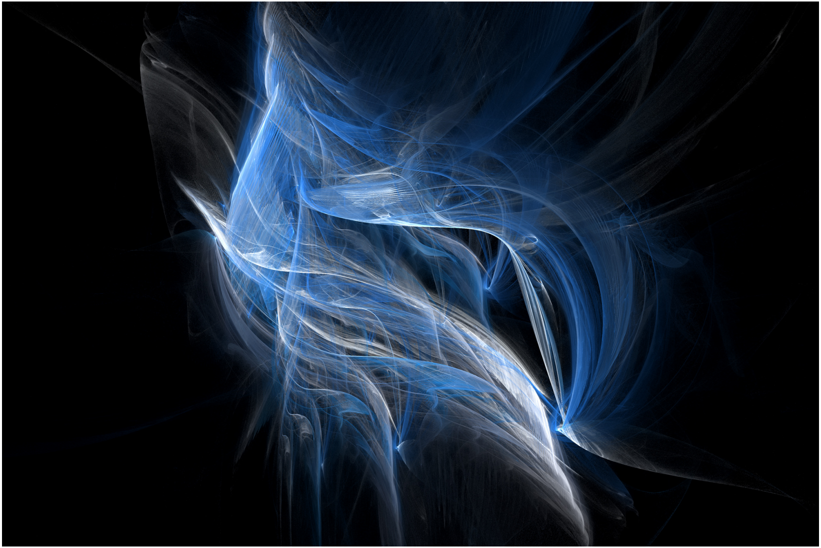
10. Januar 2022

Zufall?

- Wozu denn?
  - Simulation
  - Numerische Analyse
  - Spiele
  - Kryptografie
  - Kunst

  ...
- Welcher Zufall?
  - Zahlen in $(0, 1)$
  - Gleichverteilt
  - Unabhängig


y
x

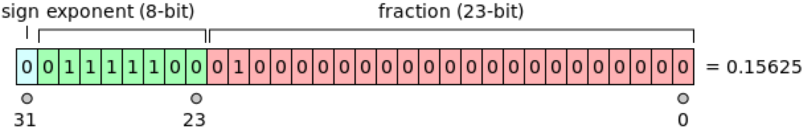


Echter Zufall

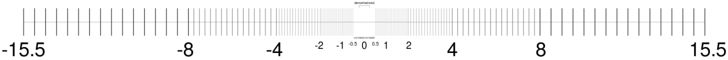
- Algorithmen sind deterministisch
  - Erzeugung von Pseudozufallszahlen
- Echter Zufall durch Messung physikalischer Phänomene
  - Tastatureingaben
  - Mausbewegungen
  - Radioaktiver Zerfall
  - Würfeln

Zahlen im Computer

- IEEE Darstellung (32-Bit)



- Dichte der Zahlen



- Erzeuge ganze Zahlen mit späterer Normalisierung

Lineare Kongruenzgeneratoren

Ein Linearer Kongruenzgenerator (LKG) hat die Form

$$x_{i+1} \equiv (ax_i + c) \mod m$$

- Startwert (Seed) $0 \leq x_i < m$
- Faktor (Multiplier) $0 \leq a < m$
- Modul m
- maximale Periode: m
- $u_i := \frac{x_i}{m} \in [0, 1)$

Periode

- Multiplikativer Kongruenzgeneratoren für ($c = 0$)

$$x_{i+1} \equiv a x_i \mod m$$

- maximale Periode: $m - 1$
- Wegen $x_{i+k} \equiv a^k x_i \mod m$ Wiederholung bei

$$1 \equiv a^k \mod m$$

Satz von Euler

Theorem

Seien $a, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gilt

$$1 \equiv a^{\phi(n)} \mod n.$$

Beweis.

Sei $k := \phi(n)$. Dann gilt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} = \{r_1, \ldots, r_k\}$ (zu n teilerfremden Zahlen kleiner als n). Die Multiplikation mit a ist eine Permutation auf $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$. Es folgt

$$r_1 \cdots r_k \equiv ar_1 \cdots ar_k \equiv a^k r_1 \cdots r_k \mod n$$

Wir erhalten $1 \equiv a^{\phi(n)} \mod n$. □

Maximale Periode

Wir suchen a, sodass k in

$$1 \equiv a^k \mod m$$

möglichst groß wird.

- gilt $k = \phi(m)$, so heißt a **Primitivwurzel**
- a heißt **Primitives Element**, wenn es für gegebenes m, größtes k liefert
- Oft genutzt werden Mersenne Primzahlen als Modulus

Implementation in Python

```python
class LinearCongruentialGenerator:
    def __init__(self, multiplier: int, modulus: int, seed: int) → None:
        self.a = multiplier
        self.m = modulus
        self.x = seed

    def random(self):
        self.x = (self.a * self.x) % self.m
        return self.x

prng = LinearCongruentialGenerator(15, 29, 17)
prng.random()  # >>> 23
```

Beispiel

$$x_{i+1} \equiv 15x_i \mod 29, \qquad x_0 = 17$$

Output:

$$[23, 26, 13, 21, 25, 27, 28, 14, 7, 18, 9, 19, \ldots, 22, 11, 20, 10, 5, 17]$$

Erwartungswert und Varianz (normalisiert)

$$\mu = 0.5 \qquad \sigma^2 = 0.077586$$

Autokorrelation

- Korrelation zwischen zwei Stichproben $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

- Autokorrelation mit „Lag 1“

$$y_i = x_{i+1}, \quad y_n = x_1$$

Autokorrelation

- Im Beispiel

$$0.4444, \quad 0.111, \quad 0.063$$

Autokorrelation

- Im Beispiel

$$0.4444, \quad 0.111, \quad 0.063$$

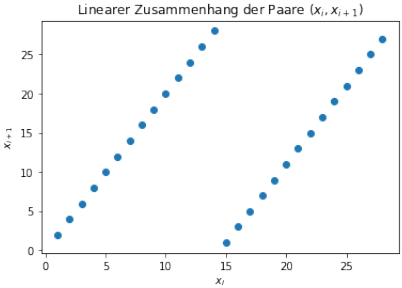
- Zusammenhang der Paare (x_i, x_{i+1}) (Spectral test)

Autokorrelation

- Im Beispiel

$$0.4444, \quad 0.111, \quad 0.063$$

- Zusammenhang der Paare (x_i, x_{i+1}) (Spectral test)

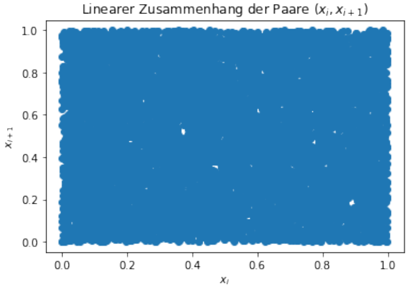


RANDU

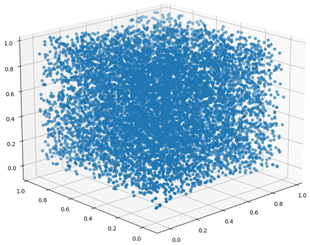
- `RANDU` ist ein linearer Kongruenzgenerator (genutzt in den 1960-ern bis 1970-ern)

$$x_{i+1} \equiv 65539 x_i \mod 2^{31}$$

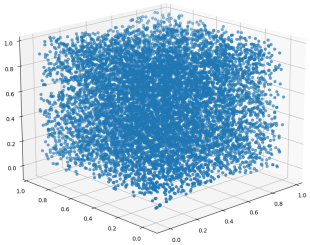
- In 2D

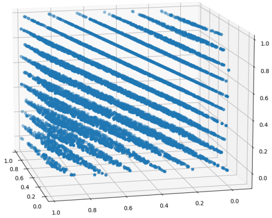


Spectral test - RANDU in 3D



Spectral test - RANDU in 3D





Marsagila (1968)

- „*RANDOM NUMBERS FALL MAINLY IN THE PLANES*“
  - maximale Hyperebenen-Anzahl

$$(d! \cdot m)^{\frac{1}{d}}$$

  - Für `RANDU` in 3D sind das $(3! \cdot 2^{31})^{\frac{1}{3}} \approx 2344$
  - genauere Schranke in Dimension d

$$|c_1| + \cdots + |c_d|,$$

wenn $c_1 x_1 + \cdots c_d x_d = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

THEOREM 1. *If $c_1, c_2, \ldots, c_n$ is any choice of integers such that*

$$c_1 + c_2k + c_3k^2 + \ldots + c_nk^{n-1} \equiv 0 \text{ modulo } m,$$

then all of the points $\pi_1, \pi_2, \ldots$ will lie in the set of parallel hyperplanes defined by the equations

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

There are at most

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n|$$

of these hyperplanes which intersect the unit n-cube, and there is always a choice of $c_1, c_2, \ldots, c_n$ such that all of the points fall in fewer than $(n!m)^{1/n}$ hyperplanes.

RANDU - Spektraltest

- $65539 = 2^{16} + 3$ und 2^{31} wegen Berechnungseffizienz gewählt
- Schlechte Wahl, wegen

$$\begin{aligned}
x_{i+2} &= (2^{16} + 3)x_{i+1} = (2^{16} + 3)^2 x_i \\
&= (2^{32} + 6 \cdot 2^{16} + 9)x_i \\
&= [6 \cdot (2^{16} + 3) - 9]x_i \\
x_{i+2} &= 6x_{i+1} - 9x_i
\end{aligned}$$

- Maximal 16 Ebenen

Weitere Varianten

- Ausgabewerte mischen (erhöht Periode)
  - Bays-Durham Shuffle
- Vektorwertig

$$x_{i+1} \equiv (Ax_i + c) \bmod m$$

- multiple recursive generator

$$x_i \equiv (a_1 x_{i-1} + \cdots + a_k x_{i-k}) \bmod m$$

- Nichtlinearer Kongruenzgenerator

$$x_i \equiv f(x_{i-1}, \ldots, x_{i-k})$$

Linear Feedback Shift Registers (LFSR)

- Form:

$$b_i \equiv (a_p b_{i-p} + a_{p-1} b_{i-p+1} + \cdots + a_1 b_{i-1}) \bmod 2$$

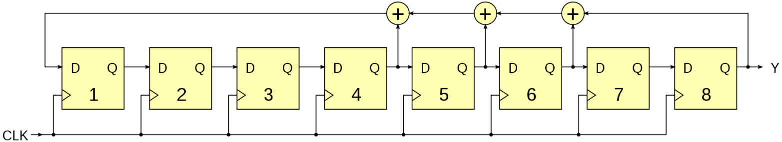
- zugehöriges Polynom über $\mathbb{Z}_2$

$$f(z) = z^p - (a_1 z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + a_p)$$

- Addition in $\mathbb{Z}_2$ entspricht XOR-Operation (meistens sind nur wenige $a \neq 0$)

$$b_i = b_{i-p} \oplus b_{i-q}$$

LFSR



$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1$

- Operation identisch für l-Tupel

$$x_i = x_{i-p} \oplus x_{i-q}$$

Beispiel

- Startsequenz $1, 0, 1, 0$ (Periode $2^4 - 1 = 15$)

Beispiel

- Startsequenz $1, 0, 1, 0$ (Periode $2^4 - 1 = 15$)

$$\ldots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0$$

Beispiel

- Startsequenz $1, 0, 1, 0$ (Periode $2^4 - 1 = 15$)

$$\ldots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0$$

- bilde Tupel der Länge 4

$$\begin{pmatrix} 0011_2 & 1101_2 & 0110_2 & 0100_2 & 0111_2 & 1010_2 \\ 3 & 13 & 6 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Beispiel

- Startsequenz $1, 0, 1, 0$ (Periode $2^4 - 1 = 15$)

$$\ldots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0$$

- bilde Tupel der Länge 4

$$\begin{pmatrix} 0011_2 & 1101_2 & 0110_2 & 0100_2 & 0111_2 & 1010_2 \\ 3 & 13 & 6 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

- XOR der Dezimalzahlen mit Startsequenz $6, 4, 7, 10$

$$7 \oplus 10 = 13, \quad 4 \oplus 7 = 3, \quad \ldots$$

XORShift

- Einfache Implementierung von LFSR mit, XOR-, Shift-, und Rotationsoperationen
- extrem schnell
- mit nicht linearer Transformation, besteht diese Gruppe fast alle Tests
  - xoshiro256**
  - xoroshiro128**

XORShift - Beispiel

```python
class XORShift:
    def __init__(self, seed:int) -> None:
        self.x = np.uint32(seed)

    def random(self):
        self.x ^= self.x << np.uint32(13)
        self.x ^= self.x >> np.uint32(17)
        self.x ^= self.x << np.uint32(5)

        return self.x

prng = XORShift(12541)
prng.random()  # >>> 3320704434
```

Mersenne Twister - (MT 19937)

- Genutzt von: Dyalog APL, IDL, R, Ruby, Free Pascal, PHP, Python, Julia, CMU Common Lisp, Embeddable Common Lisp, Steel Bank Common Lisp
- Periode: $2^{19937} - 1$
- Initialisierung mit 624 „Wörtern“
- besteht Spektraltest bis Dimension 623
- Idee: $x_i = x_{i-p} \oplus A x_{i-q}$

Mersenne Twister

Algorithmus

$$
\begin{aligned}
h &:= Y_{i-N} - Y_{i-N} \mod 2^{31} + Y_{i-N+1} \mod 2^{31} \\
Y_i &:= Y_{i-227} \oplus \lfloor h/2 \rfloor \oplus ((h \mod 2) \cdot \texttt{9908B0DF}_{\texttt{hex}}) \\
x &:= Y_i \oplus \lfloor Y_i \;/\; 2^{11} \rfloor \\
y &:= x \oplus ((x \cdot 2^{7}) \wedge \texttt{9D2C5680}_{\texttt{hex}}) \\
z &:= y \oplus ((y \cdot 2^{15}) \wedge \texttt{EFC60000}_{\texttt{hex}}) \\
Z_i &:= z \oplus \lfloor z \;/\; 2^{18} \rfloor
\end{aligned}
$$

Inversionmethode

Theorem

Sei F eine Verteilungsfunktion und $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ eine gleichverteilte Zufallsvariable. Die Inverse Verteilungsfunktion (Quantil) ist definiert durch

$$F^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} \qquad \forall p \in [0,1].$$

Dann ist $X := F^{-1}(U)$ eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

Beweis.

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x) \qquad \square$$

Beispiel

- Exponentialverteilung ($\lambda = 1$)

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x} \implies x = -\ln(1 - y)$$

- Stichprobe mit 100.000 Zahlen

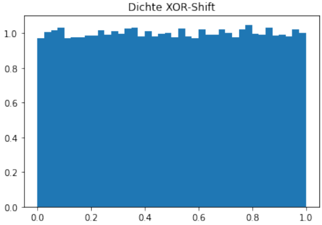


Abbildung: Gleichverteilung von XOR-Shift

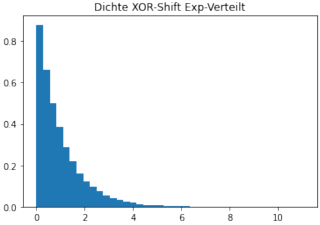


Abbildung: Transformation mit $y = -\ln(x)$

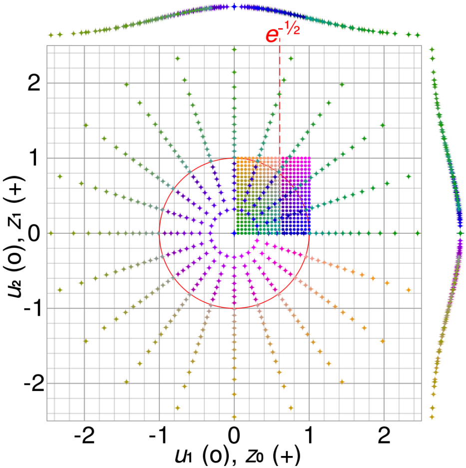
Normalverteilung

- Box-Muller-Transform

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$
$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

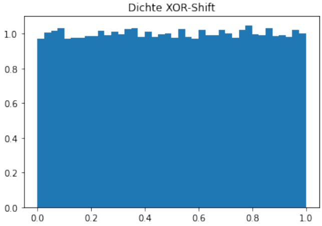
- U_1, U_2 gleichverteilt, Z_1, Z_2 normalverteilt
- Polar-Methode vermeidet Berechnung trigonometrischer Funktionen

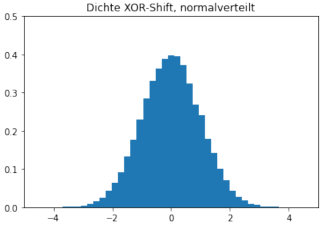
Normalverteilung



Beispiel

- Stichprobe mit 100.000 Zahlen





Abschluss

- Aktuelle Zufallsgeneratoren
  - ChaCha
  - Xoroshiro128+
- OS abhängig
  - `/dev/random` (UNIX)
  - `CryptGenRandom` (Windows)
- Weitere Tests
  - Diehard tests
  - TESTU01

Dieser Vortrag ist erhältlich unter

https://github.com/Malmosmo/WL20