Apprentissage automatique

apprendre à partir d'exemples

Charles Prud'homme

Charles. Prudhomme@imt-atlantique.fr

TASC (CNRS/IMT Atlantique)



IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire École Mines-Télécom

Syllabus

1 Apprentissage par renforcement

1 Apprentissage par renforcement

Apprentissage de réflexes par renforcement

Mise en situation

Vous jouez pour la première fois à un jeu dont vous ne connaissez pas les règles. Après une centaine de coups, votre adversaire annonce : "Tu as perdu".

Définition

Un algorithme d'apprentissage par renforcement s'attache

- à apprendre les actions à prendre
- à partir d'expériences
- de façon à optimiser une récompense quantitative
- au cours du temps.

Apprentissage de réflexes par renforcement

Mise en situation

Vous jouez pour la première fois à un jeu dont vous ne connaissez pas les règles. Après une centaine de coups, votre adversaire annonce : "Tu as perdu".

Définition

Un algorithme d'apprentissage par renforcement s'attache

- à apprendre les actions à prendre
- à partir d'expériences
- de façon à optimiser une récompense quantitative
- au cours du temps.

- 1 L'agent ne connaît pas ou mal son environnement :
 - Ne connait pas a priori quels sont les renforcements associés à chaque état ou transition
 - Ne connait pas la topologie de l'espace
- L'agent ne connaît pas ou mal l'effet de ses actions dans un état donné

- 1 L'agent ne connaît pas ou mal son environnement :
 - Ne connait pas a priori quels sont les renforcements associés à chaque état ou transition
 - Ne connait pas la topologie de l'espace
- L'agent ne connaît pas ou mal l'effet de ses actions dans un état donné

Défi

- Connaissance faible du monde et de ses réactions
- Mesures sur les états peuvent être imparfaites
- Renforcements pauvre en information, parfois tardif
- ⇒ Nécessite énormément d'interactions

- 1 L'agent ne connaît pas ou mal son environnement :
 - Ne connait pas a priori quels sont les renforcements associés à chaque état ou transition
 - Ne connait pas la topologie de l'espace
- L'agent ne connaît pas ou mal l'effet de ses actions dans un état donné

Défi

- Connaissance faible du monde et de ses réactions
- Mesures sur les états peuvent être imparfaites
- Renforcements pauvre en information, parfois tardif
- ⇒ Nécessite énormément d'interactions

AlphGo (2016) : des 10aines de millions de parties ont été nécessaires

- 1 L'agent ne connaît pas ou mal son environnement :
 - Ne connait pas a priori quels sont les renforcements associés à chaque état ou transition
 - Ne connait pas la topologie de l'espace
- L'agent ne connaît pas ou mal l'effet de ses actions dans un état donné

Défi

- Connaissance faible du monde et de ses réactions
- Mesures sur les états peuvent être imparfaites
- Renforcements pauvre en information, parfois tardif
- ⇒ Nécessite énormément d'interactions

Relativement inefficace mais très adaptable

- 1 L'agent ne connaît pas ou mal son environnement :
 - Ne connait pas a priori quels sont les renforcements associés à chaque état ou transition
 - Ne connait pas la topologie de l'espace
- L'agent ne connaît pas ou mal l'effet de ses actions dans un état donné

Seules hypothèses valables

Le monde est

- stochastique : les actions peuvent avoir des effets non déterministes,
- stationnaire : les probabilités de transition et les renforcements restent stables

L'agent communique avec son environnement par trois canaux :

- Un canal perceptif: s(t), mesure l'état dans lequel il se trouve dans l'environnement
- Un canal spécifique aux signaux de renforcement : r(t), renseigne sur la qualité de l'état courant,
- Un canal qui transmet l'action de l'agent, a(t), à l'environnement

Notations

L'agent communique avec son environnement par trois canaux :

- Un canal perceptif: s(t), mesure l'état dans lequel il se trouve dans l'environnement
- Un canal spécifique aux signaux de renforcement : r(t), renseigne sur la qualité de l'état courant,
- ullet Un canal qui transmet l'action de l'agent, a(t), à l'environnement

Notations

À l'instant t

- $s_t \in \mathcal{E}$, l'espace des états
- $r_t \in \mathcal{R}$, l'espace des signaux, $r(t) \in [-a, +b], \ a,b \in \mathbb{R}^+$
- $a_t \in \mathcal{A}$, l'espace des actions

L'agent communique avec son environnement par trois canaux :

- Un canal perceptif: s(t), mesure l'état dans lequel il se trouve dans l'environnement
- Un canal spécifique aux signaux de renforcement : r(t), renseigne sur la qualité de l'état courant,
- Un canal qui transmet l'action de l'agent, a(t), à l'environnement

Notations

- L' agent est une fonction $s_t \mapsto a_t$
- On parlera de *politique*, notée π_t
- $\pi(s,a)$: la probabilité de choisir l'action a dans l'état s.

L'agent communique avec son environnement par trois canaux :

- Un canal perceptif: s(t), mesure l'état dans lequel il se trouve dans l'environnement
- Un canal spécifique aux signaux de renforcement : r(t), renseigne sur la qualité de l'état courant,
- Un canal qui transmet l'action de l'agent, a(t), à l'environnement

Notations

- L'environnement est une fonction $(s_t, a_t) \mapsto (s_{t+1}, r_t)$
- On distinguera :
 - la fonction de transition entre états, T
 - la fonction de renforcement immédiat, R

Les mesures de gain

- Pas de mesure de gain universelle
- Doit être spécifiée par problème
- En général, on choisit de cumuler le gain dans le temps
- Choix de la mesure est déterminant

Les mesures de gain

• Gain cumulé avec horizon fini

$$R_T = \sum_{t=0}^{T-1} r_t |s_0|$$

• Gain cumulé avec intérêt et horizon infini

$$R = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t | s_0, \ 0 \le \gamma \le 1$$

Gain en moyenne

$$R_T = \frac{1}{T-1} \sum_{t=0}^{T-1} r_t |s_0|$$

Apprentissage par renforcement

⇒ problème de décision séquentielle dans l'incertain.

Chaque décision de l'agent a un effet sur les décisions à suivre ⇒ les entrées ne sont pas considérées comme *i.i.d.*.

Formalisation par processus décisionnels de Markov

Généralisation de la recherche de plus court chemin dans un environnement stochastique.

- n'est pas une séquence de décisions
- mais une politique qui spécifie l'action à prendre en chacun des états rencontrée pour maximiser l'espérance de gain.

Apprentissage par renforcement

⇒ problème de décision séquentielle dans l'incertain.

Chaque décision de l'agent a un effet sur les décisions à suivre

 \Rightarrow les entrées ne sont pas considérées comme *i.i.d.*.

Formalisation par processus décisionnels de Markov

Généralisation de la recherche de plus court chemin dans un environnement stochastique.

- n'est pas une séquence de décisions
- mais une politique qui spécifie l'action à prendre en chacun des états rencontrée pour maximiser l'espérance de gain.

Apprentissage par renforcement

⇒ problème de décision séquentielle dans l'incertain.

Chaque décision de l'agent a un effet sur les décisions à suivre

 \Rightarrow les entrées ne sont pas considérées comme *i.i.d.*.

Formalisation par processus décisionnels de Markov

Généralisation de la recherche de plus court chemin dans un environnement stochastique.

- n'est pas une séquence de décisions
- mais une politique qui spécifie l'action à prendre en chacun des états rencontrée pour maximiser l'espérance de gain.

Apprentissage par renforcement

⇒ problème de décision séquentielle dans l'incertain.

Chaque décision de l'agent a un effet sur les décisions à suivre

 \Rightarrow les entrées ne sont pas considérées comme *i.i.d.*.

Formalisation par processus décisionnels de Markov

Généralisation de la recherche de plus court chemin dans un environnement stochastique.

- n'est pas une séquence de décisions
- mais une politique qui spécifie l'action à prendre en chacun des états rencontrée pour maximiser l'espérance de gain.

Les approches

Plusieurs approches pour résoudre ce problème :

Model-Based RL

- Apprendre un modèle de l'environnement (fonction de renforcement + fonction de transition)
- + ≈ Apprentissage supervisé
- Ignore les interactions entre états

Les approches

Plusieurs approches pour résoudre ce problème :

Value-Based RL

Model-based RL + fonction d'utilité (pour les interactions)

```
soit V(s) : espérance de gain à partir d'un état
```

soit Q(s,a) : espérance de gain à partir d'un couple état-action

 Agir sur le monde et calculer sur le long terme la qualité des états ou des couples état-action

Les approches

Plusieurs approches pour résoudre ce problème :

Policy-Based RL

Travailler sur l'espace des politiques

soit Sélection darwinienne où chaque agent correspond à une politique

soit Apprendre *directement* une politique $\pi: \mathcal{E} \mapsto \mathcal{A}$

Fonctions d'utilité

Volontés

- Optimiser la conduite sur le long terme
- sur la base de décisions locales
- ne nécessitant de recherche en avant
- ⇒ l'information locale doit refléter l'espérance de gain à long terme!

$$V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi}\{R_t|s_t = s\}$$

 ${
m Figure}$ – Espérance de gain à partir de l'étape s en suivant la politique $\pi.$

Fonctions d'utilité

Volontés

- Optimiser la conduite sur le long terme
- sur la base de décisions locales
- ne nécessitant de recherche en avant
- ⇒ l'information locale doit refléter l'espérance de gain à long terme!

$$Q^{\pi}(s, a) = \mathbb{E}_{\pi} \{ R_t | s_t = s, a_t = a \}$$

FIGURE – Espérance de gain à partir de l'étape s, en effectuant l'action a, puis en suivant la politique π .

 Apprentissage par renforcement Quand l'environnement est connu

Préliminaires

On suppose ici connus:

- Les probabilités de transition
- Les renforcements associés
- L'agent sait ce qu'il peut atteindre dans l'environnement
- Mais ne connait pas les fonctions d'utilités

Donc il ne connait pas l'impact de ses décisions sur le long terme

- Omment les apprendre pour une politique donnée?
- Occurrence of the comment of the

Préliminaires

On suppose ici connus:

- Les probabilités de transition
- Les renforcements associés
- L'agent sait ce qu'il peut atteindre dans l'environnement
- Mais ne connait pas les fonctions d'utilités

Donc il ne connait pas l'impact de ses décisions sur le long terme

- Omment les apprendre pour une politique donnée?
- Occurrence of the comment of the

Préliminaires

On suppose ici connus:

- Les probabilités de transition
- Les renforcements associés
- L'agent sait ce qu'il peut atteindre dans l'environnement
- Mais ne connait pas les fonctions d'utilités

Donc il ne connait pas l'impact de ses décisions sur le long terme

- 1 Comment les apprendre pour une politique donnée?
- 2 Comment approcher une politique optimale?

Évaluer une politique

par propagation locale d'information

Approche simple

- Tester tous les états s
- En suivant la politique π (au moins une fois)
- Et calculer la moyenne des gains cumulés

Notation

 $\pi(s,a)$: probabilité de choisir a dans l'état s alors qu'on applique la politique π

Évaluer une politique par propagation locale d'information

Approche simple

- ullet Tester tous les états s
- En suivant la politique π (au moins une fois)
- Et calculer la moyenne des gains cumulés

Notation

 $\pi(s,a)$: probabilité de choisir a dans l'état s alors qu'on applique la politique π

P-ex., gain cumulé avec intérêts et horizon infini :

$$V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi} \{ R_t | s_t = s \}$$

= $r(s, \pi(s)) + \gamma \sum_{s'} p^{\pi}(s' | s_t) V^{\pi}(s')$ (1)

$$=\sum_{a}\pi(s,a)Q^{\pi}(s,a) \tag{2}$$

- son propre renforcement
- et des espérances de gain des états qu'il peut atteindre

P-ex., gain cumulé avec intérêts et horizon infini :

$$V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi} \{ R_t | s_t = s \}$$

= $r(s, \pi(s)) + \gamma \sum_{s'} p^{\pi}(s'|s_t) V^{\pi}(s')$ (1)

$$=\sum_{a}\pi(s,a)Q^{\pi}(s,a) \tag{2}$$

- son propre renforcement
- et des espérances de gain des états qu'il peut atteindre

P-ex., gain cumulé avec intérêts et horizon infini :

$$V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi} \{ R_t | s_t = s \}$$

= $r(s, \pi(s)) + \gamma \sum_{s'} p^{\pi}(s'|s_t) V^{\pi}(s')$ (1)

$$=\sum_{a}\pi(s,a)Q^{\pi}(s,a) \tag{2}$$

- son propre renforcement
- et des espérances de gain des états qu'il peut atteindre

P-ex., gain cumulé avec intérêts et horizon infini :

$$V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi} \{ R_t | s_t = s \}$$

$$= r(s, \pi(s)) + \gamma \sum_{s'} p^{\pi}(s'|s_t) V^{\pi}(s')$$
(1)

$$= \sum_{a} \pi(s, a) Q^{\pi}(s, a) \tag{2}$$

- son propre renforcement
- et des espérances de gain des états qu'il peut atteindre

Politique optimale

Ordre sur les politiques

$$\pi \ge \pi' \iff V^{\pi}(s) \ge V^{\pi'}(s), \forall s \in \mathcal{E}$$

Politique optimale π^*

Si une politique est supérieure à toutes les autres, elle est optimale et notée π^*

Conduite optimale

Ordre sur les politiques

$$\pi \geq \pi' \iff V^\pi(s) \geq V^{\pi'}(s), \forall s \in \mathcal{E}$$

Politique optimale π^*

Si une politique est supérieure à toutes les autres, elle est optimale et notée π^* .

Conduite optimale

Ordre sur les politiques

$$\pi \ge \pi' \iff V^{\pi}(s) \ge V^{\pi'}(s), \forall s \in \mathcal{E}$$

Politique optimale π^*

Si une politique est supérieure à toutes les autres, elle est optimale et notée π^* .

Conduite optimale

Ordre sur les politiques

$$\pi \ge \pi' \iff V^{\pi}(s) \ge V^{\pi'}(s), \forall s \in \mathcal{E}$$

Politique optimale π^*

Si une politique est supérieure à toutes les autres, elle est optimale et notée π^* .

Conduite optimale

Si l'agent dispose des $V^*(s) = \max_{\pi} V^{\pi}(s), \ \forall s \in \mathcal{E}$

- pour chaque action a, faire un pas en avant
- choisir l'action avec la meilleure espérance de gain

Ordre sur les politiques

$$\pi \ge \pi' \iff V^{\pi}(s) \ge V^{\pi'}(s), \forall s \in \mathcal{E}$$

Politique optimale π^*

Si une politique est supérieure à toutes les autres, elle est optimale et notée π^* .

Conduite optimale

Si l'agent dispose des $Q^*(s,a) = \max_{\pi} Q^{\pi}(s,a), \ \forall s \in \mathcal{E}$ et $\forall a \in \mathcal{A}$

• choisir l'action avec la meilleure espérance de gain

Amélioration de politique

Théorème : Relation d'ordre sur les politiques

Soient π et π' deux politiques déterministes, telles que, pour tout état $s \in \mathcal{E}$:

$$Q^{\pi}(s, \pi'(s)) \ge V^{\pi}(s)$$

Alors la politique π' doit être au moins aussi bonne que la politique π , ce qui signifie que, pour tout état $s \in \mathcal{E}$:

$$V^{\pi'}(s) \ge V^{\pi}(s)$$

Un procédure de type gradient permet de choisir pour chaque état la meilleure action en fonction d'une politique

$$\pi_0 \xrightarrow{E} V^{\pi_0} \xrightarrow{A} \pi_1 \xrightarrow{E} V^{\pi_1} \xrightarrow{A} \pi_2 \xrightarrow{E} \cdots \xrightarrow{A} \pi^* \xrightarrow{E} V^*$$

*E : évaluation, A : amélioration.

Bilan

- + Convergence en un nombre fini d'itérations
- Phase d'évaluation de politique est très coûteuse
- + On peut la limiter à un passage par état
 - En pratique, tous les états ne peuvent pas être visités...

Sans modèle du monde : la méthode de Monte-Carlo

→ Estimer les valeurs de probabilités de transitions et de renforcement par un échantillonage.

$$\pi_0 \xrightarrow{E} V^{\pi_0} \xrightarrow{A} \pi_1 \xrightarrow{E} V^{\pi_1} \xrightarrow{A} \pi_2 \xrightarrow{E} \cdots \xrightarrow{A} \pi^* \xrightarrow{E} V^*$$

*E: évaluation, A: amélioration.

Bilan

- + Convergence en un nombre fini d'itérations
 - Phase d'évaluation de politique est très coûteuse
- + On peut la limiter à un passage par état
 - En pratique, tous les états ne peuvent pas être visités...

Sans modèle du monde : la méthode de Monte-Carlo

→ Estimer les valeurs de probabilités de transitions et de renforcement par un échantillonage.

$$\pi_0 \xrightarrow{E} V^{\pi_0} \xrightarrow{A} \pi_1 \xrightarrow{E} V^{\pi_1} \xrightarrow{A} \pi_2 \xrightarrow{E} \cdots \xrightarrow{A} \pi^* \xrightarrow{E} V^*$$

*E: évaluation, A: amélioration.

Bilan

- + Convergence en un nombre fini d'itérations
- Phase d'évaluation de politique est très coûteuse
- + On peut la limiter à un passage par état
 - En pratique, tous les états ne peuvent pas être visités...

Sans modèle du monde : la méthode de Monte-Carlo

→ Estimer les valeurs de probabilités de transitions et de renforcement par un échantillonage.

$$\pi_0 \stackrel{E}{\longrightarrow} V^{\pi_0} \stackrel{A}{\longrightarrow} \pi_1 \stackrel{E}{\longrightarrow} V^{\pi_1} \stackrel{A}{\longrightarrow} \pi_2 \stackrel{E}{\longrightarrow} \cdots \stackrel{A}{\longrightarrow} \pi^* \stackrel{E}{\longrightarrow} V^*$$

*E : évaluation, A : amélioration.

Bilan

- + Convergence en un nombre fini d'itérations
- Phase d'évaluation de politique est très coûteuse
- + On peut la limiter à un passage par état
 - En pratique, tous les états ne peuvent pas être visités...

Sans modèle du monde : la méthode de Monte-Carlo

 \rightarrow Estimer les valeurs de probabilités de transitions et de renforcement par un échantillonage.

1 Apprentissage par renforcement Évaluation de la politique par la méthode des différences temporelles

Méthode des différences temporelles

Principes

On approxime la formule : $V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi}\{R_t|s_t = s\}$ par :

$$V(s) \leftarrow V(s) + \alpha [R_t - V(s)]$$

où R_t mesure le gain après l'instant t en partant de s, $R_t = r + V(s')$.

- $R_t V(s)$ calcul l'erreur sur l'estimation courante = direction
- Pas besoin de connaissances a priori sur l'environnement
- Nécessite de ne mémoriser que V(s) + calcul simple
- α est constant ou décroissant lentement

Méthode des différences temporelles

```
1: procedure TemporalDifference
        Initialiser V(s) arbitrairement et \pi à la politique à évaluer.
 2:
 3:
        repeat
 4:
            for all épisode do
                 Partir de s
 5:
 6:
                 repeat
 7:
                     for all étape de l'épisode do
 8:
                         a \leftarrow l'action donnée par \pi pour l'état s
 9:
                         Executer a, recevoir r et s'
                         V^{\pi}(s) \leftarrow V^{\pi}(s) + \alpha[r + \gamma V^{\pi}(s') - V^{\pi}(s)]
10:
                         s \leftarrow s'
11:
12:
                 until s est terminal
13:
        until critère d'arrêt
```

Amélioration de politique

SARSA: méthode "sur politique"

- Choisir l'action a selon une politique suivie presque tout le temps (procédure ε -gloutonne)
- 2 Après observation de s' et r, mettre à jour la valeur d'utilité

$$Q^{\pi}(s, a) \leftarrow Q^{\pi}(s, a) + \alpha[r + \gamma Q^{\pi}(s', a') - Q^{\pi}(s, a)]$$

Amélioration de politique

Q-learning: méthode "hors politique"

- f a Choisir l'action a avec une procédure arepsilon-gloutonne
- 2 Après observation de s' et r, mettre à jour la valeur d'utilité

$$Q(s, a) \leftarrow Q(s, a) + \alpha [r + \gamma \max_{a' \in A} Q(s', a') - Q(s, a)]$$

1 Apprentissage par renforcement Résolution du compromis exploration contre exploitation

Exploration -vs- Exploitation

Situation

Je déménage dans une ville inconnue. J'aime manger au restaurant, mais je n'en connais aucun. Je les essaye tous une fois :

- je n'en favorise aucun, et continue de choisir à l'aveugle :
 Exploration pure
- je les note tous un par un, puis je ne vais plus qu'au meilleur : Exploitation pure

Il vaut mieux trouver un compromis entre exploration et exploitation.

Mais comment?

résoudre un problème d'optimisation

Exploration -vs- Exploitation

Situation

Je déménage dans une ville inconnue. J'aime manger au restaurant, mais je n'en connais aucun. Je les essaye tous une fois :

- je n'en favorise aucun, et continue de choisir à l'aveugle :
 Exploration pure
- je les note tous un par un, puis je ne vais plus qu'au meilleur : Exploitation pure

Il vaut mieux trouver un compromis entre exploration et exploitation Mais comment? ⇒ résoudre un problème d'optimisation

Exploration -vs- Exploitation

Situation

Je déménage dans une ville inconnue. J'aime manger au restaurant, mais je n'en connais aucun. Je les essaye tous une fois :

- je n'en favorise aucun, et continue de choisir à l'aveugle :
 Exploration pure
- je les note tous un par un, puis je ne vais plus qu'au meilleur : Exploitation pure

Il vaut mieux trouver un compromis entre exploration et exploitation.

Mais comment? ⇒ résoudre un problème d'optimisation

Problème des bandits à bras mutliples

Définition

- Il existe un ensemble de K bras, chacun défini par une distribution de récompense ν_k (dans [0,1]) de loi inconnue
- À chaque pas de temps t, l'agent doit choisir un bras k_t . Il reçoit une récompense $r_t \overset{i.i.d}{\sim} \nu_{k_t}$
- But : trouver une politique de sélection des bras de manière à maximiser la somme des récompenses sur une durée donnée

Exemple de méthodes de résolution

- Méthode ε -greedy / non dirigée (*i.e.*,évalue les actions)
- Méthode basée sur la récence / dirigée (i.e.,+ mémoire)
- Upper Confidence Bound

L'algorithme UCB

```
procedure UCB
Initialisation : Jouer chaque bras une fois repeat
```

Jouer le bras j qui maximise $\overline{x}_j + \sqrt{\frac{2 \ln n}{T_j(n)}}$ until fin du jeu

Où \overline{x}_j est le renforcement moyen obtenu en jouant le bras j, $T_j(n)$ le nombre de fois où le bras j a été joué et n le nombre total de tirage jusque là.

Monte-Carlo Tree Search

Que faire quand le jeu n'est pas une "répétition" mais un déplacement dans un arbre?

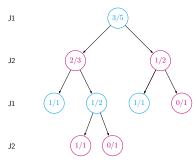
Monte-Carlo Tree Search

Monte-Carlo Tree Search

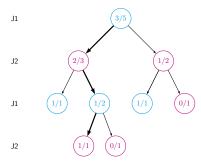
- Recherche arborescente, enraciné à l'état courant
- Les nœuds sont les états accessibles , les arcs sont les actions
- Une branche = séquence de coups joués
- Déterminer l'action à prendre à la racine

4 étapes

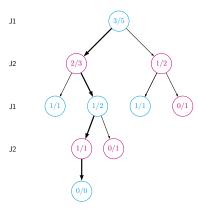
- Sélection : choisir le nœud le plus prometteur
- Expansion : créer un ou plusieurs nœuds fils et en choisir un
- ullet Simulation : simuler N parties avec la politique courante pour atteindre une feuille
- Rétro-propagation : mise à jour des valeurs dans les nœuds



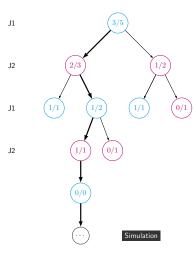
Arbre à l'étape t

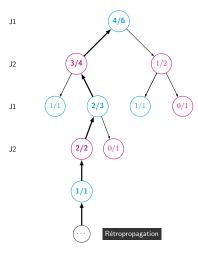


Sélection



Expansion





Apprentissage automatique

apprendre à partir d'exemples

Charles Prud'homme

Charles. Prudhomme@imt-atlantique.fr

TASC (CNRS/IMT Atlantique)



IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire École Mines-Télécom