

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3334-М3339, осень 2018 года

## Домашнее задание №1: «знакомство с лямбда-исчислением»

1. Расставьте скобки:

$\lambda f.\lambda x.f\ x\ (\lambda c.g\ f)\ x\ a\ \lambda b.\lambda a.x$

2. Проведите бета-редукции и приведите выражения к нормальной форме:

(a)  $(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

(b)  $(\lambda a.\lambda b.b)\ ((\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x\ x))$

3. Выразите следующие функции в лямбда-исчислении:

(a) Or, Xor

(b) isZero (T, если аргумент равен 0, иначе F)

(c) isEven (T, если аргумент чётный)

(d) умножение на 2, умножение

(e) возведение в степень

(f) вычитание 1, вычитание

## Домашнее задание №2: «пропущенные теоремы лямбда-исчисления»

Докажите следующие леммы, упомянутые, но недоказанные на лекции:

1. Если отношение  $R$  обладает ромбовидным свойством, то и отношение  $R^*$  (транзитивное и рефлексивное замыкание  $R$ ) также им обладает.
2. Отношение альфа-эквивалентности является отношением эквивалентности.
3. Если  $P_1 \Rightarrow_\beta P_2$  и  $Q_1 \Rightarrow_\beta Q_2$ , то  $P_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta P_2[x := Q_2]$ .
4.  $(\Rightarrow_\beta)$  обладает ромбовидным свойством.
5.  $(\Rightarrow_\beta) \subseteq (\rightarrow_\beta)^*$
6.  $(\rightarrow_\beta) \subseteq (\Rightarrow_\beta)$

## Домашнее задание №3: «просто типизированное лямбда-исчисление»

1. Докажите лемму о промежуточных типах (Generation lemma, 3.1.6 из Morten Heine B. Sørensen, Pawel Urzyczyn: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism). А именно, покажите, что:
  - (a)  $\Gamma \vdash x : \tau$  влечёт  $x : \tau \in \Gamma$ .
  - (b)  $\Gamma \vdash MN : \sigma$  влечёт существование типа  $\tau$ , такого, что  $\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma$  и  $\Gamma \vdash N : \tau$ .
  - (c)  $\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma$  влечёт существование типов  $\tau$  и  $\rho$ , таких, что  $\Gamma, x : \tau \vdash M : \rho$  и  $\sigma = \tau \rightarrow \rho$
2. Докажите лемму о подстановке (Substitution lemma, 3.1.8):
  - (a) Обозначим за  $\sigma[\alpha := \tau]$  (за  $\Gamma[\alpha := \tau]$ ) замену всех элементарных типов  $\alpha$  на тип  $\tau$  в типе  $\sigma$  (во всех типах в  $\Gamma$ ). Тогда, если  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , то  $\Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$ .
  - (b) Если  $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$  и  $\Gamma \vdash N : \tau$ , то  $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$ .
3. Докажите лемму о редукции терма (Subject reduction proposition, 3.1.9): если  $\Gamma \vdash M : \sigma$  и  $M \rightarrow_\beta N$ , то  $\Gamma \vdash N : \sigma$ .
4. Пользуясь предыдущими пунктами, покажите, что  $Y$  нетипизируем в просто типизированном лямбда-исчислении.

5. Найдите терм  $M$  и два различных типа  $\sigma$  и  $\tau$ , что  $\vdash M : \sigma$  и  $\vdash M : \tau$ . А существует ли терм  $M$ , имеющий в точности один тип?
6. Покажите, что лемма о редукции терма не работает «в обратную сторону». А именно, что:
  - (a) Найдутся  $M$ ,  $N$  и  $\tau$ , что  $\vdash N : \tau$ ,  $M \rightarrow_{\beta} N$ , но  $M$  не имеет типа.
  - (b) Найдутся  $M$ ,  $N$ ,  $\sigma$  и  $\tau$ , что  $\vdash M : \sigma$ ,  $\vdash N : \tau$  и  $M \rightarrow_{\beta} N$ , но  $\nvdash M : \tau$ .

## Домашнее задание №4: «просто типизированное лямбда-исчисление; алгебраические типы»

1. Списки и алгебраические типы. В данном задании потребуются строить и преобразовывать довольно сложные лямбда-выражения. Для проверки рекомендуем пользоваться интерпретатором, например, можно взять LCI: <https://chatziko.github.io/lci/>. Возможно, для демонстрации домашнего задания вам потребуется использовать свой ноутбук и проектор.
  - (a) Определите алгебраический тип для списка целых чисел в вашем любимом языке программирования. На Окамле это будет `type int_list = Nil | Cons of (int * int_list)`. Вы можете использовать и не функциональный язык (C++, Kotlin и т.п.), но вы должны применять именно алгебраический тип или его аналог (то есть, `union` в C++, `sealed class` в Kotlin и т.п.).
  - (b) Напишите функции вычисления длины списка, подсчёта суммы списка, произведения списка.
  - (c) Определите функцию высшего порядка `map` (применяющую переданную параметром функцию к каждому элементу списка), и примените её для построения списка нулей (превратить список чисел в список нулей той же длины), удвоенных значений (превратить список  $[1, 3, 5]$  в  $[2, 6, 10]$ ), списка остатков от деления на 2 ( $[2, 3, 5]$  в  $[0, 1, 1]$ ).
  - (d) Перепишите весь код из предыдущих пунктов в чистых лямбда-выражениях, используя рассмотренные на лекции представления в лямбда-исчислении для упорядоченных пар и алгебраических типов.
2. Ещё немного алгебраических типов. Аналогично предыдущему пункту, определите на языке высокого уровня алгебраический тип для корней квадратного уравнения. Варианты значений: «нет решений» без параметров, «одно решение» с одним параметром, «два решения» с двумя параметрами. Определите функции вычисления корней по коэффициентам квадратного уравнения и печати корней.
3. Деревья с помощью алгебраических типов. Определите на языке высокого уровня тип для дерева двоичного поиска, варианты для узла: «лист» без параметров и «ветвь» с двумя сыновьями и целочисленным значением. Определите:
  - (a) функцию печати дерева;
  - (b) функцию поиска значения в дереве;
  - (c) функцию добавления значения в дерево двоичного поиска;
  - (d) функцию удаления значения из дерева.
4. Доопределите бета-редукцию для просто типизированного лямбда-исчисления по Чёрчу.
5. Докажите теорему Чёрча-Россера для просто типизированного лямбда-исчисления по Чёрчу.
6. Докажите лемму о поднятии с лекции, а именно, что для всех  $M, N \in \Lambda_{\mathbf{q}}$ :
  - (a) если  $M \rightarrow_{\beta} N$ , то для любого  $M' \in \Lambda_{\mathbf{q}}$ , такого, что  $|M'| = M$ , найдётся такой  $N' \in \Lambda_{\mathbf{q}}$ , что  $|N'| = N$  и  $M' \rightarrow_{\beta} N'$ ;
  - (b) если  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , то найдётся такой  $M' \in \Lambda_{\mathbf{q}}$ , что  $\Gamma \vdash_{\mathbf{q}} M' : \sigma$ .

## Домашнее задание №5: «выразительная сила просто типизированного лямбда-исчисления, алгоритм унификации»

1. Покажите, что чёрчевский нумерал в общем случае имеет тип  $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ . Имеют ли нумералы для 0, 1 и 2 какие-то более общие типы?
2. Обозначим тип для целых чисел  $\eta = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ . В данных обозначениях покажите, что операция сложения имеет тип  $\eta \rightarrow \eta \rightarrow \eta$ .
3. Напомним, что  $\overline{m} = \lambda f.\lambda x.f^{(m)} x$  (чёрчевский нумерал для  $m$ ). Рассмотрим выражение  $Power = \lambda m.\lambda n.n\ m$ .
  - (a) найдите тип  $Power$ ;
  - (b) покажите, что  $Power\ \overline{m}\ \overline{n} = \overline{m^n}$ , найдите тип  $Power\ \overline{m}\ \overline{n}$ ;
  - (c) покажите, что  $\lambda x.Power\ x\ x$  не имеет типа;
  - (d) объясните кажущееся противоречие между предыдущими пунктами: почему  $Power\ \overline{2}\ \overline{2}$  имеет тип, а  $(\lambda x.Power\ x\ x)\ \overline{2}$  не имеет типа.
4. Докажите, что изложенный на лекции алгоритм унификации всегда завершается. Указание: постройте оценку сложности уравнения в алгебраических термах и покажите, что эта оценка уменьшается при каждом шаге алгоритма.

## Домашнее задание №6: «унификация и типы, комбинаторы»

1. Выразите  $\lambda f.\lambda x.f\ x$  через  $S$  и  $K$ .
2. Докажите, что алгоритм устранения абстракций  $T$  с лекции, преобразующий замкнутое лямбда-выражение в выражение в комбинаторах  $S$  и  $K$ , корректен. То есть, для любого лямбда-выражения  $A$ :
  - (a)  $T(A)$  определено и вычисляется за конечное время;
  - (b)  $T(A) =_{\beta} A$ ;
  - (c) если  $A$  замкнуто, то  $T(A)$  не содержит абстракций и свободных переменных и состоит только из применений (аппликаций) и комбинаторов  $S$  и  $K$ .
3. Покажите, что базис  $B, C, K, W$  позволяет выразить любое замкнутое лямбда-выражение.
4. Постройте систему аксиом для импликационного фрагмента просто типизированного лямбда-исчисления на основе базиса  $B, C, K, W$ .
5. Будем говорить, что тип  $\sigma$  есть частный случай типа  $\theta$  (и записывать это как  $\sigma \subseteq \theta$ ), если существует такая подстановка  $S$ , что  $\sigma = S(\theta)$ . Рассмотрим лямбда-выражение  $M$ , такое, что  $\vdash M : \sigma$  и  $\vdash M : \theta$ .
  - (a) Покажите, что найдётся тип  $\tau$ , что  $\vdash M : \tau$ ,  $\sigma \subseteq \tau$  и  $\theta \subseteq \tau$ .
  - (b) Всегда ли найдётся  $\tau$ , что  $\tau \subseteq \sigma$  и  $\tau \subseteq \theta$ ?
  - (c) Всегда ли выполнено либо  $\theta \subseteq \sigma$ , либо  $\sigma \subseteq \theta$ ?
  - (d) Можно ли определить решётку на типах для данного  $M$  с определённым выше отношением предпорядка ( $\subseteq$ )? Естественно, вам потребуется рассмотреть классы эквивалентности типов, чтобы «склеить» случаи типов, отличающихся только переименованием переменных. Какими свойствами эта решётка будет обладать (дистрибутивность, имплицативность, существование 0 и т.п.)?

## Домашнее задание №7: «исчисление второго порядка, система F»

1. Докажите, что введённые на лекции представления для связок соответствуют правилам для связок:
  - (a) Конъюнкция. Если  $\varphi \& \psi \equiv \forall \alpha.(\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ , то всегда можно доказать заключения следующих правил при доказанных посылках:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

(b) Дизъюнкция. Если  $\varphi \vee \psi \equiv \forall \alpha. (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ , то можно показать такие правила:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \pi \quad \Gamma, \psi \vdash \pi \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \pi}$$

(c) Квантор существования. Если  $\exists \alpha. \varphi \equiv \forall \theta. (\forall \alpha. \varphi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta$ , то можно показать и следующие правила:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash \exists \alpha. \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash \exists \alpha. \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

... дополнительные задания следуют ...