# Теоретические ("малые") домашние задания

*Теория типов, ИТМО, M3334-M3339, осень 2018 года*

## Домашнее задание №1: «знакомство с лямбда-исчислением»

1. Расставьте скобки:
   $\lambda f.\lambda x.f\ x\ \ (\lambda c.g\ f)\ x\ a\ \lambda b.\lambda a.x$
2. Проведите бета-редукции и приведите выражения к нормальной форме:
   (a) $(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$
   (b) $(\lambda a.\lambda b.b)\ ((\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x\ x))$
3. Выразите следующие функции в лямбда-исчислении:
   (a) Or, Xor
   (b) isZero (T, если аргумент равен 0, иначе F)
   (c) isEven (T, если аргумент чётный)
   (d) умножение на 2, умножение
   (e) возведение в степень
   (f) вычитание 1, вычитание

## Домашнее задание №2: «пропущенные теоремы лямбда-исчисления»

Докажите следующие леммы, упомянутые, но недоказанные на лекции:

1. Если отношение $R$ обладает ромбовидным свойством, то и отношение $R^*$ (транзитивное и рефлексивное замыкание $R$) также им обладает.
2. Отношение альфа-эквивалентности является отношением эквивалентности.
3. Если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$.
4. $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.
5. $(\rightrightarrows_\beta) \subseteq (\to_\beta)^*$
6. $(\to_\beta) \subseteq (\rightrightarrows_\beta)$

## Домашнее задание №3: «просто типизированное лямбда-исчисление»

1. Докажите лемму о промежуточных типах (Generation lemma, 3.1.6 из Morten Heine B. Sørensen, Pawel Urzyczyn: Lections on the Curry-Howard Isomorphism). А именно, покажите, что:
   (a) $\Gamma \vdash x : \tau$ влечёт $x : \tau \in \Gamma$.
   (b) $\Gamma \vdash MN : \sigma$ влечёт существование типа $\tau$, такого, что что $\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma$ и $\Gamma \vdash N : \tau$.
   (c) $\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma$ влечёт существование типов $\tau$ и $\rho$, таких, что $\Gamma, x : \tau \vdash M : \rho$ и $\sigma = \tau \to \rho$
2. Докажите лемму о подстановке (Substitution lemma, 3.1.8):
   (a) Обозначим за $\sigma[\alpha := \tau]$ (за $\Gamma[\alpha := \tau]$) замену всех элементарных типов $\alpha$ на тип $\tau$ в типе $\sigma$ (во всех типах в $\Gamma$). Тогда, если $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$.
   (b) Если $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash N : \tau$, то $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$.
3. Докажите лемму о редукции терма (Subject reduction proposition, 3.1.9): если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \to_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$.
4. Пользуясь предыдущими пунктами, покажите, что $Y$ нетипизируем в просто типизированном лямбда-исчислении.

5. Найдите терм $M$ и два различных типа $\sigma$ и $\tau$, что $\vdash M : \sigma$ и $\vdash M : \tau$. А существует ли терм $M$, имеющий в точности один тип?

6. Покажите, что лемма о редукции терма не работает «в обратную сторону». А именно, что:

   (a) Найдутся $M$, $N$ и $\tau$, что $\vdash N : \tau$, $M \to_\beta N$, но $M$ не имеет типа.

   (b) Найдутся $M$, $N$, $\sigma$ и $\tau$, что $\vdash M : \sigma$, $\vdash N : \tau$ и $M \to_\beta N$, но $\nvdash M : \tau$.

## Домашнее задание №4: «просто типизированное лямбда-исчисление; алгебраические типы»

1. Списки и алгебраические типы. В данном задании потребуется строить и преобразовывать довольно сложные лямбда-выражения. Для проверки рекомендуем пользоваться интерпретатором, например, можно взять `LCI`: `https://chatziko.github.io/lci/`. Возможно, для демонстрации домашнего задания вам потребуется использовать свой ноутбук и проектор.

   (a) Определите алгебраический тип для списка целых чисел в вашем любимом языке программирования. На Окамле это будет `type int_list = Nil | Cons of (int * int_list)`. Вы можете использовать и не функциональный язык (C++, Kotlin и т.п.), но вы должны применять именно алгебраический тип или его аналог (то есть, `union` в C++, `sealed class` в Kotlin и т.п.).

   (b) Напишите функции вычисления длины списка, подсчёта суммы списка, произведения списка.

   (c) Определите функцию высшего порядка `map` (применяющую переданную параметром функцию к каждому элементу списка), и примените её для построения списка нулей (превратить список чисел в список нулей той же длины), удвоенных значений (превратить список $[1, 3, 5]$ в $[2, 6, 10]$), списка остатков от деления на 2 ($[2, 3, 5]$ в $[0, 1, 1]$).

   (d) Перепишите весь код из предыдущих пунктов в чистых лямбда-выражениях, используя рассмотренные на лекции представления в лямбда-исчислении для упорядоченных пар и алгебраических типов.

2. Ещё немного алгебраических типов. Аналогично предыдущему пункту, определите на языке высокого уровня алгебраический тип для корней квадратного уравнения. Варианты значений: «нет решений» без параметров, «одно решение» с одним параметром, «два решения» с двумя параметрами. Определите функции вычисления корней по коэффициентам квадратного уравнения и печати корней.

3. Деревья с помощью алгебраических типов. Определите на языке высокого уровня тип для дерева двоичного поиска, варианты для узла: «лист» без параметров и «ветвь» с двумя сыновьями и целочисленным значением. Определите:

   (a) функцию печати дерева;

   (b) функцию поиска значения в дереве;

   (c) функцию добавления значения в дерево двоичного поиска;

   (d) функцию удаления значения из дерева.

4. Доопределите бета-редукцию для просто типизированного лямбда-исчисления по Чёрчу.

5. Докажите теорему Чёрча-Россера для просто типизированного лямбда-исчисления по Чёрчу.

6. Докажите лемму о поднятии с лекции, а именно, что для всех $M, N \in \Lambda_{\text{к}}$:

   (a) если $M \to_\beta N$, то для любого $M' \in \Lambda_{\text{ч}}$, такого, что $|M'| = M$, найдётся такой $N' \in \Lambda_{\text{ч}}$, что $|N'| = N$ и $M' \to_\beta N'$;

   (b) если $\Gamma \vdash M : \sigma$, то найдётся такой $M' \in \Lambda_{\text{ч}}$, что $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M' : \sigma$.

## Домашнее задание №5: «выразительная сила просто типизированного лямбда-исчисления, алгоритм унификации»

1. Покажите, что чёрчевский нумерал в общем случае имеет тип $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Имеют ли нумералы для 0, 1 и 2 какие-то более общие типы?

2. Обозначим тип для целых чисел $\eta = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. В данных обозначениях покажите, что операция сложения имеет тип $\eta \to \eta \to \eta$.

3. Напомним, что $\overline{m} = \lambda f.\lambda x.f^{(m)}\ x$ (чёрчевский нумерал для $m$). Рассмотрим выражение $Power = \lambda m.\lambda n.n\ m$.

   (a) найдите тип $Power$;

   (b) покажите, что $Power\ \overline{m}\ \overline{n} = \overline{m^n}$, найдите тип $Power\ \overline{m}\ \overline{n}$;

   (c) покажите, что $\lambda x.Power\ x\ x$ не имеет типа;

   (d) объясните кажущееся противоречие между предыдущими пунктами: почему $Power\ \overline{2}\ \overline{2}$ имеет тип, а $(\lambda x.Power\ x\ x)\ \overline{2}$ не имеет типа.

4. Докажите, что изложенный на лекции алгоритм унификации всегда завершается. Указание: постройте оценку сложности уравнения в алгебраических термах и покажите, что эта оценка уменьшается при каждом шаге алгоритма.

## Домашнее задание №6: «унификация и типы, комбинаторы»

1. Выразите $\lambda f.\lambda x.f\ x$ через $S$ и $K$.

2. Докажите, что алгоритм устранения абстракций $T$ с лекции, преобразующий замкнутое лямбда-выражение в выражение в комбинаторах $S$ и $K$, корректен. То есть, для любого лямбда-выражения $A$:

   (a) $T(A)$ определено и вычисляется за конечное время;

   (b) $T(A) =_\beta A$;

   (c) если $A$ замкнуто, то $T(A)$ не содержит абстракций и свободных переменных и состоит только из применений (аппликаций) и комбинаторов $S$ и $K$.

3. Покажите, что базис $B$, $C$, $K$, $W$ позволяет выразить любое замкнутое лямбда-выражение.

4. Постройте систему аксиом для импликационного фрагмента просто типизированного лямбда-исчисления на основе базиса $B$, $C$, $K$, $W$.

5. Будем говорить, что тип $\sigma$ есть частный случай типа $\theta$ (и записывать это как $\sigma \sqsubseteq \theta$), если существует такая подстановка $S$, что $\sigma = S(\theta)$. Рассмотрим лямбда-выражение $M$, такое, что $\vdash M : \sigma$ и $\vdash M : \theta$.

   (a) Покажите, что найдётся тип $\tau$, что $\vdash M : \tau$, $\sigma \subseteq \tau$ и $\theta \subseteq \tau$.

   (b) Всегда ли найдётся $\tau$, что $\tau \subseteq \sigma$ и $\tau \subseteq \theta$?

   (c) Всегда ли выполнено либо $\theta \subseteq \sigma$, либо $\sigma \subseteq \theta$?

   (d) Можно ли определить решётку на типах для данного $M$ с определённым выше отношением предпорядка ($\subseteq$)? Естественно, вам потребуется рассмотреть классы эквивалентности типов, чтобы «склеить» случаи типов, отличающихся только переименованием переменных. Какими свойствами эта решётка будет обладать (дистрибутивность, импликативность, существование 0 и т.п.)?

## Домашнее задание №7: «исчисление второго порядка, система F»

1. Докажите, что введённые на лекции представления для связок соответствуют правилам для связок:

   (a) Конъюнкция. Если $\varphi\&\psi \equiv \forall\alpha.(\varphi \to \psi \to \alpha) \to \alpha$, то всегда можно доказать заключения следующих правил при доказанных посылках:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi\&\psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi\&\psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi\&\psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

(b) Дизъюнкция. Если $\varphi \vee \psi \equiv \forall\alpha.(\varphi \to \alpha) \to (\psi \to \alpha) \to \psi$, то можно показать такие правила:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \pi \quad \Gamma, \psi \vdash \pi \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \pi}$$

(c) Квантор существования. Если $\exists\alpha.\varphi \equiv \forall\theta.(\forall\alpha.\varphi \to \theta) \to \theta)$, то можно показать и следующие правила:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash \exists\alpha.\varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists\alpha.\varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

*... дополнительные задания следуют ...*