Теоретические (“малые”) домашние задания

Теория типов, ИТМО, M3334-M3339, осень 2018 года

Домашнее задание №1: «знакомство с лямбда-исчислением»

1. Расставьте скобки:
   $\lambda f.\lambda x.f\ x\ \ (\lambda c.g\ f)\ x\ a\ \lambda b.\lambda a.x$
2. Проведите бета-редукции и приведите выражения к нормальной форме:
   (a) $(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$
   (b) $(\lambda a.\lambda b.b)\ ((\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x\ x))$
3. Выразите следующие функции в лямбда-исчислении:
   (a) Or, Xor
   (b) isZero (T, если аргумент равен 0, иначе F)
   (c) isEven (T, если аргумент чётный)
   (d) умножение на 2, умножение
   (e) возведение в степень
   (f) вычитание 1, вычитание

Домашнее задание №2: «пропущенные теоремы лямбда-исчисления»

Докажите следующие леммы, упомянутые, но недоказанные на лекции:

1. Если отношение R обладает ромбовидным свойством, то и отношение R^* (транзитивное и рефлексивное замыкание R) также им обладает.
2. Отношение альфа-эквивалентности является отношением эквивалентности.
3. Если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$.
4. $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.
5. $(\rightrightarrows_\beta) \subseteq (\rightarrow_\beta)^*$
6. $(\rightarrow_\beta) \subseteq (\rightrightarrows_\beta)$

Домашнее задание №3: «просто типизированное лямбда-исчисление»

1. Докажите лемму о промежуточных типах (Generation lemma, 3.1.6 из Morten Heine B. Sørensen, Pawel Urzyczyn: Lections on the Curry-Howard Isomorphism). А именно, покажите, что:
   (a) $\Gamma \vdash x : \tau$ влечёт $x : \tau \in \Gamma$.
   (b) $\Gamma \vdash MN : \sigma$ влечёт существование типа τ, такого, что что $\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash N : \tau$.
   (c) $\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma$ влечёт существование типов τ и ρ, таких, что $\Gamma, x : \tau \vdash M : \rho$ и $\sigma = \tau \rightarrow \rho$
2. Докажите лемму о подстановке (Substitution lemma, 3.1.8):
   (a) Обозначим за $\sigma[\alpha := \tau]$ (за $\Gamma[\alpha := \tau]$) замену всех элементарных типов α на тип τ в типе σ (во всех типах в Γ). Тогда, если $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$.
   (b) Если $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash N : \tau$, то $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$.
3. Докажите лемму о редукции терма (Subject reduction proposition, 3.1.9): если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \rightarrow_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$.
4. Пользуясь предыдущими пунктами, покажите, что Y нетипизируем в просто типизированном лямбда-исчислении.

5. Найдите терм M и два различных типа σ и τ, что $\vdash M : \sigma$ и $\vdash M : \tau$. А существует ли терм M, имеющий в точности один тип?

6. Покажите, что лемма о редукции терма не работает «в обратную сторону». А именно, что:

   (a) Найдутся M, N и τ, что $\vdash N : \tau$, $M \to_\beta N$, но M не имеет типа.

   (b) Найдутся M, N, σ и τ, что $\vdash M : \sigma$, $\vdash N : \tau$ и $M \to_\beta N$, но $\nvdash M : \tau$.