Контрольна робота №1
Дисципліна: "Термодинаміка та статистична фізика"
Сьомий семестр
Варіант 1

Шульга Дмитро Олександрович
КФ-14

12 листопада 2017 р.

Зміст

1 Завдання 1

1.1 Умова:

Рівняння стану досконалого газу має вигляд:

$$P = \frac{kNT}{V - b_0N} - a_0\frac{N^4}{V^4}, a_0, b_0 = const$$

1. Довести, що його теплоємність має вигляд $C_V(T, V, N) = Nc$.
2. Обчислити ентропію газу $S(T, V, N)$.
3. Обчислити похідну $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)\Big|_{S,N}$

1.2 Вказівка:

За означенням, досконалий газ при великому об'ємі переходить в досконалий ідеальний газ, для якого тиск, ентропія і внутрішня енергія мають вигляд:

$$P = \frac{kNT}{V}\ ,\ S = N\left(c\ln T + k\ln\frac{V}{N} + b\right)\ ,\ E = N(cT + a)\ ,\ a, b, c = const$$

1.3 Розв'язок:

1) Скористаємось рівнянням $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)\Big|_{V,N} = \frac{C_V}{T}$.
Оскільки $S = N\left(c\ln T + k\ln\frac{V}{N} + b\right)$, то $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)\Big|_{V,N} = \frac{Nc}{T}$.
Отже $C_V(T, V, N) = Nc$
2) З рівняння $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)\Big|_{V,N} = \frac{Nc}{T}$ маємо $S(T, V, N) = Nc\ln T + C_1(V, N)$.
Для ентропії повинно виконуватись відношення $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)\Big|_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)\Big|_{V,N}$.
$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)\Big|_{V,N} = \frac{kN}{V - b_0N} = \left(\frac{\partial C_1(V, N)}{\partial V}\right)\Big|_{N}$.
$C_1(V, N) = kN\ln(V - b_0N) + C_2(N) = kN\ln(V - b_0N) - kN\ln N + C_3(N)$
Оскільки $S \sim N$, то $C_3(N) = bN$
Отже, ентропія $S(T, V, N) = Nc\ln T + kN\ln\frac{V - b_0N}{N} + bN$.

3) З умови задачі ми маємо $P(T, V, N)$. Для обчислення похідної нам необхідно знайти $P(S, V, N)$. Оскільки ми вже обчислили $S(T, V, N)$, то достатньо виразити $T(S, V, N)$ та підставити вираз у $P(T, V, N)$.
$T = \exp\left(\frac{S}{cN} - k\ln\frac{V - b_0N}{N} - b\right)$.
$P(S, V, N) = \frac{kN}{V - b_0N}\exp\left(\frac{S}{cN} - k\ln\frac{V - b_0N}{N} - b\right) - a_0\frac{N^4}{V^4}$
$\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_{S,N} = \frac{4a_0N^4}{V^5} - \frac{(k^2 + k)N\exp\left(\frac{S}{cN} - k\ln\frac{V - b_0N}{N} - b\right)}{(V - b_0N)^2}$

2 Завдання 2

2.1 Умова:

Для досконалого ідеального газу виконується рівноважний процес, в якому $T = \dfrac{b}{V^3}, b, N = const$, обчислити:

Коефіцієнт об'ємного розширення газу $\alpha_b = \dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial T}\right|_{b,N}$

Термічний коефіцієнт тиску газу $\beta_b = \dfrac{1}{P}\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_{b,N}$

Стисливість газу $\gamma_b = -\dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right|_{b,N}$

Теплоту зміни об'єму газу $\delta_b = \left.\dfrac{\partial Q}{\partial V}\right|_{b,N}$

Теплоємність газу $C_b = \left.\dfrac{\partial Q}{\partial T}\right|_{b,N}$

Роботу газу $R_b = \displaystyle\int_{V_1}^{V_2} P\,\mathrm{d}V$ при зміні його об'єму від V_1 до V_2

Теплоту $Q_b = \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} C_b\,\mathrm{d}T$, яку отримує газ при зміні його температури від T_1 до T_2.

2.2 Вказівка:

Вважати відомими вирази для тиску, ентропії та внутрішньої енергії ідеального газу, наведені в попередній задачі.

2.3 Розв'язок:

$$\alpha_b = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{b,N} = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial}{\partial T}\right|\left(\sqrt[3]{\frac{b}{T}}\right)_{b,N} = \frac{\sqrt[3]{b}}{V}\left.\frac{\partial}{\partial T}\right|\left(T^{-1/3}\right) = \frac{\sqrt[3]{b}}{V}\left(-\frac{1}{3}T^{-4/3}\right) = -\frac{1}{3T}$$

$$\beta_b = \frac{1}{P}\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{b,N} = \frac{1}{P}\left.\frac{\partial}{\partial T}\right|\left(\frac{kNT}{V}\right)_{b,N} = \frac{kN}{\sqrt[3]{b}P}\left.\frac{\partial}{\partial T}\right|\left(T^{4/3}\right) = \frac{kN}{\sqrt[3]{b}P}\frac{4}{3}T^{1/3} = \frac{4}{3T}$$

$$\gamma_b = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{b,N} = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial}{\partial P}\right|\left(\sqrt[4]{\frac{kNb}{P}}\right)_{b,N} = \frac{\sqrt[4]{kNb}}{4V}P^{-5/4} = \frac{-1}{4P}$$

$$\delta_b = \left.\frac{\partial Q}{\partial V}\right|_{b,N} = \{\delta Q = \mathrm{d}E - P\,\mathrm{d}V\} = \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{b,N} + P = Nc\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_{b,N} + P = P - \frac{3cbN}{V^4} = \frac{kNb}{V^4} - \frac{3cbN}{V^4} = \frac{TN(k-3c)}{V}$$

$$C_b = \left.\frac{\partial Q}{\partial T}\right|_{b,N} = \left.\left(\frac{\partial E}{\partial T} + P\frac{\partial V}{\partial T}\right)\right|_{b,N} = Nc - P\frac{V^4}{3b} = Nc - \frac{NkTV^3}{3b} = N\left(c - \frac{k}{3}\right)$$

$$R_b = \int_{V_1}^{V_2} P\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2}\frac{kNT}{V}\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2}\frac{kNb}{V^4}\,\mathrm{d}V = kNb\left.\left(\frac{-1}{3V^3}\right)\right|_{V_1}^{V_2} = \frac{kNb}{3(V_1^2 - V_2^2)}$$

$$Q_b = \int_{T_1}^{T_2} C_b\,\mathrm{d}T = \int_{T_1}^{T_2} N\left(c - \frac{k}{3}\right)\mathrm{d}T = N\left(c - \frac{k}{3}\right)(T_2 - T_1)$$

3 Завдання 3

3.1 Умова:

Внутрішня енергія ідеального бозе-газу при температурах $T < T_0\left(\frac{N}{V}\right)$ має вигляд $E(T, V, N) = aVT^{5/2}$. Обчислити для цього газу теплоємність $C_V(T, V, N)$, ентропію $S(T, V, N)$ (врахувати III закон термодинаміки), тиск $P(T, V, N)$ та залежність $T(V)$ у адіабатному процесі ($S, N = const$).

3.2 Розв'язок:

1) $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)\Big|_{V,N} = \frac{5aVT^{3/2}}{2}$

2) $\frac{C_V}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)\Big|_{V,N} = \frac{5aVT^{1/2}}{2}$

$S = \frac{5aVT^{3/2}}{3} + C_1(V, N)$

$\lim\limits_{T\to 0} S = 0 \Rightarrow C_1(V, N) = 0 \Rightarrow S = \frac{5aVT^{3/2}}{3}$

3) $T = \left(\frac{3S}{5aV}\right)^{2/3} = T(V)\big|_{S,N}$

4) $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)\Big|_{V,N} = -aV\left(\frac{3}{5aV}\right)^{5/3} \cdot \frac{5}{3}S^{2/3} = \frac{-5aV}{3}\left(\frac{3}{5aV}\right)^{5/3}S^{2/3} = \left(\frac{3S}{5aV}\right)^{2/3} = -T$

Я не бачу помилок у розв'язку, проте результат дії 4) протитічить розмірностям величин, оскільки Па$\neq$К.

4 Завдання 4

4.1 Умова:

Внутрішня енергія E деякої системи як функція своїх для неї змінних S, V, N має вигляд:

$$E(S,V,N) = N\left(a + c\left(\frac{N}{V}\right)^{k/c} \exp\left(\frac{S-bN}{cN}\right)\right)$$

Знайти: $T(S,V,N), P(S,V,N), P(T,V,N), S(T,V,N)$.

4.2 Розв'язок:

Скористаємось формулами $T = \left(\dfrac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}$ та $P = \left(\dfrac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}$.

$T(S,V,N) = \left(\dfrac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = \dfrac{\partial}{\partial S}\left(aN + cN\left(\dfrac{N}{V}\right)^{k/c} \exp\left(\dfrac{S-bN}{cN}\right)\right)_{V,N} = \left(\dfrac{N}{V}\right)^{k/c} \exp\left(\dfrac{S-bN}{cN}\right)$

$P(S,V,N) = \left(\dfrac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = \dfrac{\partial}{\partial V}\left(aN + cN\left(\dfrac{N}{V}\right)^{k/c} \exp\left(\dfrac{S-bN}{cN}\right)\right)_{S,N} = k\left(\dfrac{N}{V}\right)^{k/c+1} \exp\left(\dfrac{S-bN}{cN}\right)$

$\exp\left(\dfrac{S-bN}{cN}\right) = T\left(\dfrac{V}{N}\right)^{k/c}$

$S(T,V,N) = cN\ln\left(T\left(\dfrac{V}{N}\right)^{k/c}\right) + bN$

$P(T,V,N) = k\left(\dfrac{N}{V}\right)^{k/c+1} T\left(\dfrac{V}{N}\right)^{k/c} = kT\dfrac{N}{V}$

5 Завдання 5

5.1 Умова:

Для досконалого ідеального газу, вважаючи відомими співвідношення задачі 1, обчислити:
Похідну $f_1 = \left(\dfrac{\partial V}{\partial S}\right)\Bigg|_{P,N}$ як функцію $f_1(T, V, N)$.
Похідну $f_2 = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\Bigg|_{S,N}$ як функцію $f_2(T, V, N)$.

5.2 Розв'язок:

1)Користуючись виразом для ентропії з задачі 1, отримаємо вираз для температури:

$$T(P, S, N) = \left(\frac{P}{k}\right)^{\dfrac{c}{c+k}} \exp\left(\frac{S - bN}{(c+k)N}\right)$$

Знайдемо функцію $V(P, S, N)$ та її часткову похідну за S при постійних P та N:

$$V(P, S, N) = \frac{kNT}{P} = N\left(\frac{P}{k}\right)^{\dfrac{c}{c+k}-1} \exp\left(\frac{S - bN}{(c+k)N}\right)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)\Bigg|_{P,N} = \frac{N}{(c+k)N}\left(\frac{P}{k}\right)^{\dfrac{c}{c+k}-1} \exp\left(\frac{S - bN}{(c+k)N}\right) = f_1$$

Зведемо вираз для f_1 до бажаних координат.

$$f_1 = \frac{kT}{(c+k)P} = \frac{kT}{c+k} \cdot \frac{V}{kNT} = \frac{V}{(c+k)N} = f_1(T, V, N) = f_1(V, N)$$

2)Скористаемось основним термодинамічним відношенням для потенціалу Гіббса:

$$\mathrm{d}\Phi = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}P + \mu\,\mathrm{d}N$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}P} = -S\frac{\partial T}{\partial P} + V + \mu\frac{\partial N}{\partial P}$$

Обчислимо f_2:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\Bigg|_{S,N} = V - S\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\Bigg|_{S,N} = V - \frac{Sc}{k(k+c)}\left(\frac{P}{k}\right)^{\dfrac{c}{c+k}-1} \exp\left(\frac{S - bN}{(c+k)N}\right) = f_2$$

$$f_2 = V - \frac{Sc}{k(k+c)} \cdot \frac{Tk}{P} = V - \frac{ScT}{k+c} \cdot \frac{V}{kNT} = V - \frac{cSV}{kN(k+c)}$$

$$f_2(T, V, N) = V - \frac{cV}{k(k+c)}\left(c\ln T + k\ln\frac{V}{N} + b\right)$$

6 Завдання 6

6.1 Умова:

Малі квантові корекції до тиску та теплоємності класичного ідеального газу мають вигляд:

$$P(T,V,N) = \frac{kNT}{V} - \alpha\frac{N^2\hbar^3}{V^2\sqrt{T}} + O(\hbar^6)$$

$$C_V(T,V,N) = \frac{3kN}{2} + \beta\frac{N^2\hbar^3}{V\sqrt{T^3}} + O(\hbar^6)$$

Обчислити β , вважаючи сталу α відомою.
Обчислити за допомогою якобіанів $\beta_S = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)\Big|_{S,N}$ як функцію $\beta_S(T,V,N)$.
Обчислити внутрішню енергію газу $E(T,V,N)$.

6.2 Вказівка:

Формально можна вважати, що стала Планка $\hbar$ є мала величина. Вітаються акуратні оцінки.

6.3 Розв'язок:

Не вистачає конспектів для розв'язку.

7 Завдання 7

7.1 Умова:

Хімічний потенціал деякого газу має вигляд:

$$\mu = a + (c - b + k)T - cT \ln T - kT \ln \frac{V}{N}$$

Обчислити внутрішню енергію газу $E(T, V, N)$.

7.2 Вказівка:

Обчислити спочатку вільну енергію $F(T, V, N)$, потім тиск $P(T, V, N)$, враховуючи, що $F(T, \tilde{V}N, N) \sim N$ та $\lim\limits_{V \to \infty} P(T, V, N) = 0$

7.3 Розв'язок:

1) $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)\Big|_{T,V} \Rightarrow F = \int \mu \, \mathrm{d}N + C_1(T, V)$

$$F = aN + (c - b)TN - cTN \ln T - kTN \ln \frac{V}{N} + C_1(T, V)$$

2) $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)\Big|_{T,N}$

$$P = \frac{kTN}{V} - \frac{\partial C_1(T, V)}{\partial V}$$

3) $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)\Big|_{V,N}$

$$S = cN \ln T + kN \ln \frac{V}{N} + bN - \frac{\partial C_1(T, V)}{\partial T}$$

4) $E = F + TS$

$$E = aN + \left(c + 2k \ln \frac{N}{V}\right) TN + C_1(T, V) - \frac{\partial C_1(T, V)}{\partial T}$$

Поки що не розумію, як позбутись $C_1(T, V)$.