

$$\begin{aligned} 5.1 \quad a) \quad P(5) &= \binom{6}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^1 \\ &= 6 \cdot 0,03125 \cdot 0,5 \\ &= 0,9375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ \binom{6}{5} &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad P(4) &= \binom{7}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,1^3 \\ &= 35 \cdot 0,6561 \cdot 0,001 \\ &= 0,02296 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad P(8) + P(9) &= \left(\binom{9}{8} \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^1 \right) + \left(\binom{9}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^0 \right) \\ &= (9 \cdot 0,167777 \cdot 0,2) + (1 \cdot 0,1342) \\ &= 0,302 + 0,134 \\ &= 0,436 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad P(x \geq 1) &= 1 - P(x < 1) \\ &= 1 - \left(\binom{24}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{24} \right) \\ &= 1 - 0,1094 = 0,8906 \end{aligned}$$

$$5.2 \quad a) \quad n = 16 \\ p = 0,25$$

$$P(X \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$P(0) = \binom{16}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{16-0} = 0,01$$

$$P(1) = \binom{16}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^{16-1} = 0,053$$

$$P(2) = \binom{16}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{16-2} = 0,134$$

$$P(3) = \binom{16}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{16-3} = 0,208$$

$$P(4) = \binom{16}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^{16-4} = 0,225$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= 0,01 + 0,053 + 0,134 + 0,208 + 0,225 \\ &= 0,63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad P(X > 4) &= 1 - 0,63 = 0,37 \\ 0,37 \cdot 1000 &= 370 \end{aligned}$$

A: Es wird erwartet, dass 370 von 1000 mehr als 4 richtige Antworten erreichen

$$5.3 \quad n = 15 \quad p = 0,5 \quad R \geq 12$$

$$P(X \geq 12) = P(12) + P(13) + P(14) + P(15)$$

$$P(12) = \binom{15}{12} \cdot 0,5^{12} \cdot 0,5^{15-12} = 0,014$$

$$P(13) = \binom{15}{13} \cdot 0,5^{13} \cdot 0,5^{15-13} = 0,003$$

$$P(14) = \binom{15}{14} \cdot 0,5^{14} \cdot 0,5^{15-14} = 0,00045$$

$$P(15) = \binom{15}{15} \cdot 0,5^{15} \cdot 0,5^{15-15} = 0,000$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 12) &= 0,014 + 0,003 + 0,00045 + 0 \\ &= 0,01745 \approx 0,017 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 12) = 0,014 + 0,003 + 0,00045 + 0$$

$$= 0,01745 \approx 0,018$$

5.9 $n = 10$ $p = 0,25$ $R \geq 3$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$P(0) = \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10-0} = 0,056$$

$$P(1) = \binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^{10-1} = 0,188$$

$$P(2) = \binom{10}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{10-2} = 0,282$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (0,056 + 0,188 + 0,282)$$

$$= 1 - 0,526$$

$$= 0,474$$

5.1 a)

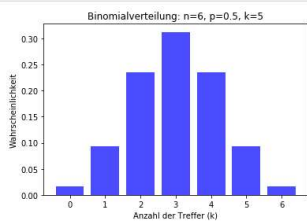
```
In [23]: import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 6
p = 0.5
k = 5

# Erzeuge eine Liste von Werten für x (0 bis n)
x_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von x
probabilities = [binom.pmf(x, n, p) for x in x_values]

# Plot
plt.bar(x_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=6, p=0.5, k=5')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```



b)

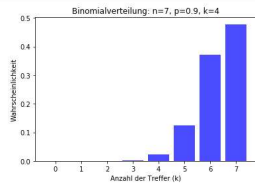
```
In [24]: import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 7
p = 0.9
k = 4

# Erzeuge eine Liste von Werten für x (0 bis n)
x_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von x
probabilities = [binom.pmf(x, n, p) for x in x_values]

# Plot
plt.bar(x_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=7, p=0.9, k=4')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```



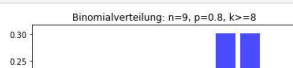
c)

```
In [25]: import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 9
p = 0.8
k_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von k
probabilities = [binom.pmf(k, n, p) for k in k_values]

# Plot
plt.bar(k_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=9, p=0.8, k>=8')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```



You
Schreibe ein Python-Programm um die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung: k = 5 bei n = 6 Versuchen mit p = 0,5 zu visualisieren.

ChatGPT
Hier ist ein einfaches Python-Programm, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung für k = 5 Treffer bei n = 6 Versuchen mit p = 0,5 zu visualisieren:

```
python
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 6
p = 0.5
k = 5

# Erzeuge eine Liste von Werten für x (0 bis n)
x_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von x
probabilities = [binom.pmf(x, n, p) for x in x_values]

# Plot
plt.bar(x_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=6, p=0.5, k=5')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```

You
Schreibe ein Python-Programm um die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung: k = 4 bei n = 7 Versuchen mit p = 0,9 zu visualisieren.

ChatGPT
Hier ist ein Python-Programm, das die Wahrscheinlichkeitsverteilung für k = 4 Treffer bei n = 7 Versuchen mit p = 0,9 visualisiert:

```
python
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 7
p = 0.9
k = 4

# Erzeuge eine Liste von Werten für x (0 bis n)
x_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von x
probabilities = [binom.pmf(x, n, p) for x in x_values]

# Plot
plt.bar(x_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=7, p=0.9, k=4')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```

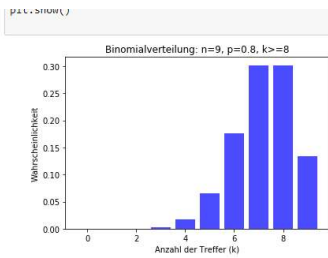
You
Schreibe ein Python-Programm um die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung: k >= 8 bei n = 9 Versuchen mit p = 0,8 zu visualisieren.

ChatGPT
Um die Wahrscheinlichkeit für k >= 8 Treffer bei n = 9 Versuchen mit p = 0,8 zu visualisieren, können wir ein ähnliches Python-Programm verwenden. Hier ist der Code:

```
python
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 9
p = 0.8

# Erzeuge eine Liste von Werten für k (0 bis n)
k_values = list(range(n+1))
```



```
n = 9
p = 0.8

# Erzeuge eine Liste von Werten für k (0 bis n)
k_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von k
probabilities = [binom.pmf(k, n, p) for k in k_values]

# Plot
plt.bar(k_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=9, p=0.8, k>=8')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```

d)

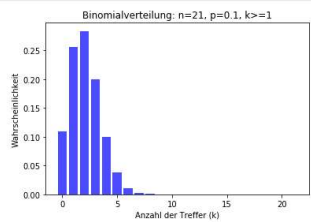
```
In [26]: import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 21
p = 0.1

# Erzeuge eine Liste von Werten für k (0 bis n)
k_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von k
probabilities = [binom.pmf(k, n, p) for k in k_values]

# Plot
plt.bar(k_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=21, p=0.1, k>=1')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```



- You** Schreibe ein Python-Programm um die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung: $k \geq 1$ bei $n = 21$ Versuchen mit $p = 0,1$ zu visualisieren.
- ChatGPT** Um die Wahrscheinlichkeit für $k \geq 1$ Treffer bei $n = 21$ Versuchen mit $p = 0,1$ zu visualisieren, können wir das folgende Python-Programm verwenden:

```
python
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 21
p = 0.1

# Erzeuge eine Liste von Werten für k (0 bis n)
k_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von k
probabilities = [binom.pmf(k, n, p) for k in k_values]

# Plot
plt.bar(k_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=21, p=0.1, k>=1')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```

5.2 a)

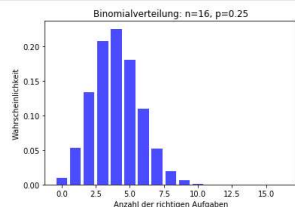
```
In [22]: import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 16
p = 0.25

# Erzeuge eine Liste von Werten für k (0 bis n)
k_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von k
probabilities = [binom.pmf(k, n, p) for k in k_values]

# Plot
plt.bar(k_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=16, p=0.25')
plt.xlabel('Anzahl der richtigen Aufgaben')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```



- You** Schreibe ein Python-Programm um die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung: $k \leq 4$ bei $n = 16$ Versuchen mit $p = 0,25$ zu visualisieren.
- ChatGPT** Um die Wahrscheinlichkeit für $k \leq 4$ Treffer bei $n = 16$ Versuchen mit $p = 0,25$ zu visualisieren, kannst du das folgende Python-Programm verwenden:

```
python
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom

n = 16
p = 0.25

# Erzeuge eine Liste von Werten für k (0 bis n)
k_values = list(range(n+1))

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert von k
probabilities = [binom.pmf(k, n, p) for k in k_values]

# Plot
plt.bar(k_values, probabilities, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Binomialverteilung: n=16, p=0.25, k<=4')
plt.xlabel('Anzahl der Treffer (k)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.show()
```

e)

```
In [4]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import binom

# Anzahl der Fragen
anzahl_fragen = 16

# Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort
p = 1 / 4

# Anzahl der maximal richtigen Antworten
max_richtige_antworten = 4

# Wahrscheinlichkeit für höchstens vier richtige Antworten
wahrscheinlichkeit_max_vier = binom.cdf(max_richtige_antworten, anzahl_fragen, p)

# Erstelle ein Array von 0 bis anzahl_fragen (inklusive) für die x-Achse
x = np.arange(anzahl_fragen + 1)

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jede Anzahl von richtigen Antworten
y = binom.pmf(x, anzahl_fragen, p)

# Erstelle das Diagramm
plt.bar(x, y, align='center', alpha=0.7, color='blue', label='Binomialverteilung')

# Markiere die Wahrscheinlichkeit für höchstens vier richtige Antworten
plt.axvline(max_richtige_antworten, color='red', linestyle='dashed', label=f'P(X ≤ {max_richtige_antworten}) = {wahrscheinlichkeit_max_vier}')

# Beschriftungen und Titel hinzufügen
plt.title('Binomialverteilung für Multiple-Choice Klausur')
plt.xlabel('Anzahl der richtigen Antworten')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.legend()

# Diagramm anzeigen
plt.show()
```

```
In [3]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import binom

# Anzahl der Fragen
anzahl_fragen = 16

# Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort
p = 1 / 4

# Anzahl der maximal richtigen Antworten
max_richtige_antworten = 4

# Anzahl der Studenten
anzahl_studenten = 1000

# Wahrscheinlichkeit für höchstens vier richtige Antworten
wahrscheinlichkeit_max_vier = binom.cdf(max_richtige_antworten, anzahl_fragen, p)

# Anzahl der Studenten mit mehr als vier richtigen Antworten
anzahl_studenten_mehr_vier = anzahl_studenten * (1 - wahrscheinlichkeit_max_vier)

# Erstelle ein Array von 0 bis anzahl_fragen (inklusive) für die x-Achse
x = np.arange(anzahl_fragen + 1)

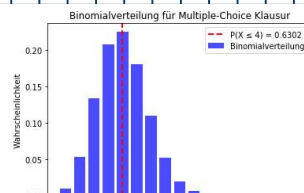
# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jede Anzahl von richtigen Antworten
y = binom.pmf(x, anzahl_fragen, p)

# Erstelle das Diagramm
plt.bar(x, y, align='center', alpha=0.7, color='blue', label='Binomialverteilung')
```

- You** Löse mir diese Aufgabe in Python:
- Eine Multiple-Choice Klausur besteht aus 16 Fragen. Jeder Frage folgen vier Antwortalternativen, von denen genau eine richtig ist.
- Berechne mir in Python folgende Aufgabe: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Ankreuzen höchstens vier Aufgaben richtig zu lösen?

You Ergänze, dass es in einem Diagramm dargestellt wird.

- You** Bitte dasselbe mit Aufgabe b) machen:
- Die Klausur wird von 1000 Studenten bearbeitet. Alle Studenten raten. Von wie vielen Studenten würden Sie einen Wert größer als vier erwarten?



```
# Anzahl der Studenten mit mehr als vier richtigen Antworten
anzahl_studenten_mehr_als_vier = anzahl_studenten * (1 - wahrscheinlichkeit_max_vier)

# Erstelle ein Array von 0 bis anzahl_fragen (inklusive) für die x-Achse
x = np.arange(0, anzahl_fragen + 1)

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jede Anzahl von richtigen Antworten
y = binom.pmf(x, anzahl_fragen, p)

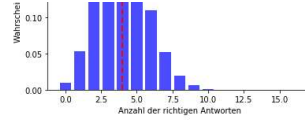
# Erstelle das Diagramm
plt.bar(x, y, align='center', alpha=0.7, color='blue', label='Binomialverteilung')

# Markiere die Wahrscheinlichkeit für höchstens vier richtige Antworten
plt.axvline(max_richtige_antworten, color='red', linestyle='dashed', linewidth=2, label=f'P(X ≤ {max_richtige_antworten}) = {wahrscheinlichkeit_max_richtige_antworten}')

# Beschriftungen und Titel hinzufügen
plt.title('Binomialverteilung für Multiple-Choice Klausur')
plt.xlabel('Anzahl der richtigen Antworten')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.legend()

# Diagramm anzeigen
plt.show()

# Ergebnis für Aufgabe 8) ausgeben
print(f'Von {anzahl_studenten} Studenten erwarten wir, dass {anzahl_studenten_mehr_als_vier*20} Studenten mehr als vier Fragen richtig beantworten.')
<
>
```



Von 1000 Studenten erwarten wir, dass 369.81 Studenten mehr als vier Fragen richtig beantworten.

5.3

```
In [7]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import binom

# Anzahl der Versuche
anzahl_versuche = 15

# Wahrscheinlichkeit für Erfolg (grüner Knopf)
p_erfolg = 0.5

# Wahrscheinlichkeit für Misserfolg (roter Knopf)
p_misserfolg = 1 - p_erfolg

# Mindestanzahl an Erfolgen
min_erfolge = 12

# Wahrscheinlichkeit für mindestens 12 Erfolge
wahrscheinlichkeit_min_12 = 1 - binom.cdf(min_erfolge - 1, anzahl_versuche, p_erfolg)

# Erstelle ein Array von 0 bis anzahl_versuche (inklusive) für die x-Achse
x = np.arange(0, anzahl_versuche + 1)

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jede Anzahl von Erfolgen
y = binom.pmf(x, anzahl_versuche, p_erfolg)

# Erstelle das Diagramm
plt.bar(x, y, align='center', alpha=0.7, color='green', label='Binomialverteilung')

# Markiere die Wahrscheinlichkeit für mindestens 12 Erfolge
plt.axvline(min_erfolge - 1, color='red', linestyle='dashed', linewidth=2, label=f'P(X ≥ {min_erfolge}) = {wahrscheinlichkeit_min_12}')

# Beschriftungen und Titel hinzufügen
plt.title('Binomialverteilung für Katzenexperiment')
plt.xlabel('Anzahl der Erfolge (grüner Knopf)')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.legend()

# Diagramm anzeigen
plt.show()

# Ausgabe des Ergebnisses
print(f'Die Wahrscheinlichkeit, dass die Katze bei 15 Versuchen mindestens 12 mal den grünen Knopf drückt, beträgt: {wahrscheinlichkeit_min_12}')
<
>
```

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Katze bei 15 Versuchen mindestens 12 mal den grünen Knopf drückt, beträgt: 0.0176

You
Hier die nächste Aufgabe:

ChatGPT
Natürlich, bitte stelle die nächste Aufgabe. Ich stehe zur Verfügung, um zu helfen!

You
Ein Psychologe untersucht, ob Katzen Farben sehen können. In einer Lernphase erhält eine Katze jedes Mal eine Belohnung, wenn sie einen grünen Knopf drückt. In einer Versuchsphase werden der Katze ein roter und ein grüner Knopf dargeboten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Katze bei 15 Versuchen mindestens 12 mal den grünen Knopf drückt, wenn sie nicht zwischen dem roten und dem grünen Knopf unterscheiden kann?

5.4

```
In [8]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import binom

# Anzahl der Fragen im Test
anzahl_fragen_test = 10

# Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort
p_richtig = 1 / 4

# Mindestanzahl an richtigen Antworten
min_richtige_antworten = 3

# Wahrscheinlichkeit für mindestens drei richtige Antworten
wahrscheinlichkeit_min_3 = 1 - binom.cdf(min_richtige_antworten - 1, anzahl_fragen_test, p_richtig)

# Erstelle ein Array von 0 bis anzahl_fragen_test (inklusive) für die x-Achse
x = np.arange(0, anzahl_fragen_test + 1)

# Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jede Anzahl von richtigen Antworten
y = binom.pmf(x, anzahl_fragen_test, p_richtig)

# Erstelle das Diagramm
plt.bar(x, y, align='center', alpha=0.7, color='blue', label='Binomialverteilung')

# Markiere die Wahrscheinlichkeit für mindestens drei richtige Antworten
plt.axvline(min_richtige_antworten - 1, color='red', linestyle='dashed', linewidth=2, label=f'P(X ≥ {min_richtige_antworten}) = {wahrscheinlichkeit_min_3}')

# Beschriftungen und Titel hinzufügen
plt.title('Binomialverteilung für Test')
plt.xlabel('Anzahl der richtigen Antworten')
plt.ylabel('Wahrscheinlichkeit')
plt.legend()

# Diagramm anzeigen
plt.show()

# Ausgabe des Ergebnisses
print(f'Die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Test mindestens {min_richtige_antworten} richtige Antworten zufällig erraten werden, beträgt: {wahrscheinlichkeit_min_3}')
<
>
```

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Test mindestens 3 richtige Antworten zufällig erraten werden, beträgt: 0.4744

You
Beantworte auch diese Aufgabe:

Ein Test möge aus zehn Fragen bestehen, wobei zu jeder Frage vier Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Test mindestens drei richtige Antworten zufällig erraten werden?

5.2 Diskrete Verteilungen

Im Folgenden sollen einige theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die für die Statistik von besonderer Bedeutung sind, besprochen werden. In diesem Abschnitt behandeln wir zunächst diskrete Verteilungen. Die für die angewandte Statistik wichtigsten diskreten Verteilungen sind die Binomialverteilung, die hypergeometrische Verteilung und die Poisson-Verteilung. Neben diesen Verteilungen werden kurz die Multinomialverteilung und die negative Binomialverteilung erwähnt.

5.2.1 Binomialverteilung

Als erste diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung wird die Binomialverteilung behandelt. Im Rahmen der Binomialverteilung interessieren wir uns für Zufallsvariablen, die nur zwei Werte annehmen können. Solche Variablen bezeichnet man auch als **binäre** oder **dichotome** Variablen. Beispiele für dichotome Variablen sind: Kopf versus Zahl beim Münzwurf oder Zahl 6 versus eine andere Zahl beim Würfeln.

Einer der beiden möglichen Werte der Zufallsvariablen wird als **Erfolg** betrachtet und dessen Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit π . Betrachtet man beim Werfen einer Münze „Kopf“ als Erfolg, so wäre $\pi = 1/2$. Betrachtet man dagegen beim einmaligen Würfeln die Zahl 6 als Erfolg, so ist $\pi = 1/6$.

Das Zufallsexperiment wird nun n -mal ausgeführt, wobei davon ausgegangen wird, dass die

x lautet:

$$P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \quad (5.4)$$

Ist die Zufallsvariable x binomialverteilt, schreiben wir auch

$$x \sim B(n, \pi). \quad (5.5)$$

Wir wollen nun überlegen, wie man Gl. (5.4) begründen kann. Mit x bezeichnen wir die Häufigkeit des Auftretens von A. Für $n = 1$ kann x nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Für diese beiden Ereignisse erhalten wir, falls $\pi = 0.5$, jeweils eine Wahrscheinlichkeit von $P(0) = P(1) = 0.5$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Münzwurf das Ereignis Zahl eintritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass Zahl nicht fällt.

Ist $n = 2$ und $\pi = 0.5$, lautet die Menge der Elementarereignisse $\Omega = \{AA, AA, AA, AA\}$. Diese vier möglichen Ereignisse sind gleichwahrscheinlich, und die möglichen Werte der Zufallsvariablen x sind: 0, 1 und 2. Für diese x -Werte ergeben sich die folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(0) = 1/4,$$

$$P(1) = 1/2,$$

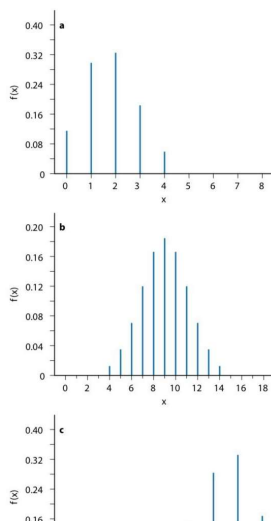
$$P(2) = 1/4,$$

denn $x = 0$, falls $\bar{A}\bar{A}$ eintritt, $x = 1$, falls $A\bar{A}$ oder $\bar{A}A$ eintritt und $x = 2$ falls AA eintritt. Bei $n = 3$ lautet die Menge der Elementarereignisse

$$\Omega = \{AAA, AA\bar{A}, A\bar{A}A, \bar{A}AA, A\bar{A}\bar{A}, \bar{A}A\bar{A}, \bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}\}.$$

Die die möglichen Werte von x entspricht wie die

Kapitel 5 - Wahrscheinlichkeitsverteilungen



Deshalb dürfen wir die Wahrscheinlichkeiten jeder Sequenz aus n Zufallsexperimenten, für die der gleiche x -Wert resultiert, addieren (Additionstheorem für disjunkte Ereignisse). Zweitens besitzt jede dieser Sequenzen offensichtlich die selbe Wahrscheinlichkeit, da die Anzahl der Erfolge bzw. Misserfolge konstant bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Sequenz lautet

$$\underbrace{\pi \cdots \pi}_{x\text{-mal}} \cdot \underbrace{(1-\pi) \cdots (1-\pi)}_{(n-x)\text{-mal}} = \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}.$$

Wie viele solcher gleichwertiger Sequenzen gibt es? Diese Frage beantwortet die 3. Kombinationsregel (s. Kap. 4.2.6), wenn diese auf zwei Gruppen spezialisiert wird. Die Anzahl der gleichwertigen Anordnungen von n Objekten, welche in zwei Gruppen der Größen x und $n-x$ zerfallen, ist somit durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{x}$ gegeben. Da jede dieser Sequenzen die gleiche Wahrscheinlichkeit $\pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}$ besitzt, genügt es, diesen Ausdruck mit dem Binomialkoeffizienten zu multiplizieren. Somit ergibt sich die gesuchte Formel

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}$$

für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung. Abbildung 5.2 zeigt drei Binomialverteilungen.

BEISPIEL 5.1

Wir betrachten das Ereignis „Zahl=6“ beim Würfeln. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit, mit 8 Würfeln genau einmal eine 6 zu würfeln. Hierbei sind: $n = 8$ und $\pi = 1/6$. Mit Hilfe der

tet man beim Werfen einer Münze „Kopf“ als Erfolg, so wäre $\pi = 1/2$. Betrachtet man dagegen beim einmaligen Würfeln die Zahl 6 als Erfolg, so ist $\pi = 1/6$.

Das Zufallsexperiment wird nun n -mal ausgeführt, wobei davon ausgegangen wird, dass die einzelnen Experimente (1) voneinander unabhängig sind und dass (2) die Erfolgswahrscheinlichkeit π über die einzelnen Würfe hinweg konstant ist. Für das wiederholte Werfen einer Münze bzw. das mehrfache Werfen eines Würfels sind dies sicherlich plausible Annahmen.

Werden nun n Zufallsexperimente unter diesen Bedingungen durchgeführt, so beschreibt die Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, mit der genau x Erfolge eintreten, wobei $x = 0, 1, \dots, n$.

Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit $P(x)$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist zum einen abhängig von den Wahrscheinlichkeiten eines Erfolges π und zum anderen von der Anzahl der Versuche n . Man bezeichnet n und π auch als die Parameter der Binomialverteilung, da erst durch die Wahl dieser beiden Größen die Binomialverteilung festgelegt wird. Die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Anzahl von Erfolgen

$\bar{A}\bar{A}$ eintritt und $x = 2$ falls $\bar{A}\bar{A}$ eintritt. Bei $n = 3$ lautet die Menge der Elementarereignisse

$$\Omega = \{AAA, AA\bar{A}, A\bar{A}\bar{A}, \bar{A}AA, \bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}, \bar{A}A\bar{A}, A\bar{A}A, A\bar{A}\bar{A}\}.$$

Für die möglichen Werte von x ermitteln wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(0) = 1/8, (\bar{A}\bar{A}\bar{A}),$$

$$P(1) = 3/8, (A\bar{A}\bar{A} \text{ oder } \bar{A}A\bar{A} \text{ oder } \bar{A}\bar{A}A),$$

$$P(2) = 3/8, (AA\bar{A} \text{ oder } A\bar{A}A \text{ oder } \bar{A}AA),$$

$$P(3) = 1/8, (AAA).$$

Die Wahrscheinlichkeiten jeder Dreier-Sequenz aus A und \bar{A} lässt sich mit dem Multiplikationstheorem für unabhängige Ereignisse berechnen. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit für $AA\bar{A}$ gerade $\pi\pi(1-\pi)$, oder für die Sequenz $\bar{A}\bar{A}\bar{A}$ berechnet man

$$(1-\pi)\pi(1-\pi) = \pi(1-\pi)^2.$$

Gibt es nur eine mögliche Sequenz, für die ein Wert von x eintreten kann, so sind wir unmittelbar in der Lage, $P(x)$ zu berechnen. Allerdings ist

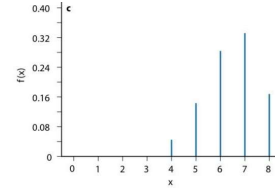


Abbildung 5.2. Binomialverteilungen: a) $B(n = 6, \pi = 0.3)$, b) $B(n = 18, \pi = 0.5)$ und c) $B(n = 8, \pi = 0.8)$

dies nur für $x = 0$ und $x = n$ der Fall. Für das dreimalige Werfen einer Münze ist somit $P(3) = \pi^3$ und $\pi(0) = (1-\pi)^3$. Wir aber werden die $P(x)$ bestimmt, wenn mehrere Ereignisse in Ω existieren, welche den gleichen Wert von x ergeben. Dies ergibt sich aus folgenden zwei Beobachtungen:

Erstens schließen sich die Ereignisse, die zum gleichen Wert von x führen, wechselseitig aus.

lung, Abbildung 5.2 zeigt drei Binomialverteilungen.

BEISPIEL 5.1

Wir betrachten das Ereignis „Zahl=6“ beim Würfeln. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit, mit 8 Würfeln genau einmal eine 6 zu würfeln. Hierbei sind $n = 8$ und $\pi = 1/6$. Mit Hilfe der Kurzschreibweise in Gl. (5.5) können wir die relevante Verteilung auch als $B(n = 8, \pi = 1/6)$ bezeichnen. Gesucht ist $P(1)$. Einsetzen dieser Werte in (5.4) ergibt:

$$P(1) = \binom{8}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0,372.$$

Oft wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass die Anzahl der Erfolge mindestens (höchstens) x beträgt. Um solche Aufgaben zu lösen, müssen die Wahrscheinlichkeiten, welche mit der Binomialverteilung errechnet werden, summiert werden. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit von mindestens x Erfolgen gleich

$$P(x) + P(x+1) + \dots + P(n).$$

Wir geben ein Beispiel, um diese Problemstellung zu illustrieren.

Ne 5.2 a)
5.3