Abgabe: 12.11.2023   Mathe Hermann

Nr. 1 1.

x	y
1	2
2	3

NR: $\bar{x} = \frac{1}{2}(1+2) = 1{,}5$

$\bar{y} = \frac{1}{2}(2+3) = 2{,}5$

Nr. 2

$m = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

$= \dfrac{(1-1{,}5)(2-2{,}5) + (2-1{,}5)(3-2{,}5)}{(1-1{,}5)^2 + (2-1{,}5)^2}$

$= \dfrac{(-0{,}5)\cdot(-0{,}5) + 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}25 + 0{,}25} = \dfrac{0{,}25 + 0{,}25}{0{,}5} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1$

$b = \bar{y} - m\bar{x}$

$= 2{,}5 - 1 \cdot 1{,}5$

$= 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 1x + 1}}$

Nr. 2 1. geg: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ges: Regressionsgerade   Nr. 2

$R: \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 & 1\cdot1 + 1\cdot2 + 1\cdot3 \\ 1\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot1 & 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 \\ 1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix}$

LGS: $\quad V^T V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} I \begin{pmatrix} 3a_0 + 6a_1 & 9 \\ 6a_0 + 14a_1 & 20 \end{pmatrix} II - 2I \end{array}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} I \begin{pmatrix} 3a_0 + 6a_1 & 9 \\ 0 + 2a_1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} II \quad 2a_1 = 2 \quad \Rightarrow a_1 = 1 \\ I \quad 3a_0 + 6\cdot1 = 9 \Rightarrow a_0 = 1 \end{array}$

Regressionsgerade $\quad p(x) = a_0 + a_1 x$
$\qquad\qquad = \underline{\underline{1 + 1x}}$

Nr. 3 1. geg: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ges: Polynom 2. Grades

$R: \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$V^T V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3 & 1\cdot1+1\cdot4+1\cdot9 \\ 1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot9 \\ 1\cdot1+4\cdot1+9\cdot1 & 1\cdot1+4\cdot2+9\cdot3 & 1\cdot1+4\cdot4+9\cdot9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$V^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 \\ 1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 \\ 1\cdot2 + 4\cdot3 + 9\cdot4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V^T V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} \quad :3 \quad \begin{array}{l} I \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{14}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix} II \\ II \\ III \quad :\frac{5}{3} \end{array}$

$\begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{14}{3} & 3 \\ 6 & 14 & 36 & 20 \\ 14 & 36 & 98 & 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} II\cdot6I \\ III\cdot14I \end{array} \quad \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{14}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} I\cdot\left(\frac{14}{3}III\right) \\ II-(4\cdot III) \end{array}$

$\begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{14}{3} & 3 \\ 0 & 2 & \frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 8 & \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix} :2 \quad \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{14}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 8 & \frac{20}{3} & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} I-2II \\ \\ III-8II \end{array} \quad \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{array}$

$p(x) = \underline{\underline{1 + 1x}}$

Nr.4 1 geg: $(0|1)$ ges: Polynom 3.Grades
$(1|2)$
$(2|3)$
$(3|4)$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \qquad V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

$$V^T V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3 & 1\cdot0+1\cdot1+1\cdot4+1\cdot9 & 1\cdot0+1\cdot1+1\cdot8+1\cdot27 \\ 0\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot1+2\cdot4+3\cdot9 & 0\cdot0+1\cdot1+2\cdot8+3\cdot27 \\ 0\cdot1+1\cdot1+4\cdot1+9\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+4\cdot2+9\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot1+4\cdot4+9\cdot9 & 0\cdot0+1\cdot1+4\cdot8+9\cdot27 \\ 0\cdot1+1\cdot1+8\cdot1+27\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot1+8\cdot2+27\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot1+8\cdot4+27\cdot9 & 0\cdot0+1\cdot1+8\cdot8+27\cdot27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 & 36 \\ 6 & 14 & 36 & 98 \\ 14 & 36 & 98 & 276 \\ 36 & 98 & 276 & 821 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$V^T \cdot \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 50 \\ 134 \end{pmatrix}$$

$$V^T \cdot V \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 14 & 36 & 10 \\ 6 & 14 & 36 & 98 & 20 \\ 14 & 36 & 98 & 276 & 50 \\ 36 & 98 & 276 & 821 & 134 \end{array} \right) \quad (LR)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 14 & 36 & 10 \\ 0 & 5 & 15 & 44 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tfrac{14}{5} & 0 \end{array} \right)$$

$x_4: \quad \dfrac{14}{5} \cdot x_4 = 0$

$x_3: \quad 4x_3 = 18x_4 = 18 \cdot 0 = 0$

$\qquad x_3 = 1$

$x_2: \quad 5x_2 = 5 - 15x_3 - 44x_4 = 5 - 15\cdot0 - 44\cdot0 = 5$

$\qquad x_2 = 1$

$x_1: \quad 4x_1 = 10 - 6x_2 - 14x_3 - 36x_4 = 10 - 6\cdot1 - 14\cdot0 - 36\cdot0 = 4$

$\qquad x_1 = 1$

$$\Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\underline{= 1 + 1x}$$