

Tutorial 1

Q.1) Asymptotic Notation - It is used to describe running time of an algorithm - how much time an algorithm takes with a given input 'n'. There are 3 different notations -

(i) Big O - It gives the upper bound of an algorithm or how many iterations an algorithm takes in worst case scenario.

(ii) Big Ω - Big Omega describes the lower bound of an algorithm. Eg - bubble sort.

(iii) Θ Notation - It encloses f from above and below. It represents upper and lower bound of an algorithm. Used for calculating average time complexity.

Q.2)

```
for (int i=1 to n)
```

```
    i = i * 2;
```

```
}
```

loop runs upto n times
i.e. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216, 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648, 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472, 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104, 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328, 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248, 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968, 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488, 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808, 18446744073709551616, 36893488147419103232, 73786976294838206464, 147573952589676412928, 295147905179352825856, 590295810358705651712, 1180591620717411303424, 2361183241434822606848, 4722366482869645213696, 9444732965739290427392, 18889465931478580854784, 37778931862957161709568, 75557863725914323419136, 151115727451828646838272, 302231454903657293676544, 604462909807314587353088, 1208925819614629174706176, 2417851639229258349412352, 4835703278458516698824704, 9671406556917033397649408, 19342813113834066795298816, 38685626227668133590597632, 77371252455336267181195264, 154742504910672534362390528, 309485009821345068724781056, 618970019642690137449562112, 1237940039285380274899124224, 2475880078570760549798248448, 4951760157141521099596496896, 9903520314283042199192993792, 19807040628566084398385987584, 39614081257132168796771975168, 79228162514264337593543950336, 158456325028528675187087900672, 316912650057057350374175801344, 633825300114114700748351602688, 1267650600228229401496703205376, 2535301200456458802993406410752, 5070602400912917605986812821504, 10141204801825835211973625643008, 20282409603651670423947251286016, 40564819207303340847894502572032, 81129638414606681695789005144064, 162259276829213363391578010288128, 324518553658426726783156020576256, 649037107316853453566312041152512, 1298074214633706907132624082305024, 2596148429267413814265248164610048, 5192296858534827628530496329220096, 10384593717069655257060992658440192, 20769187434139310514121985316880384, 41538374868278621028243970633760768, 83076749736557242056487941267521536, 166153499473114484112975882535043072, 332306998946228968225951765070086144, 664613997892457936451903530140172288, 1329227995784915872903807060280344576, 2658455991569831745807614120560689152, 5316911983139663491615228241121378304, 10633823966279326983230456482242756608, 21267647932558653966460912964485513216, 42535295865117307932921825928971026432, 85070591730234615865843651857942052864, 170141183460469231731687303715884105728, 340282366920938463463374607431768211456, 680564733841876926926749214863536422912, 1361129467683753853853498429727072845824, 2722258935367507707706996859454145691648, 5444517870735015415413993718908291383296, 10889035741470030830827987437816582766592, 21778071482940061661655974875633165533184, 43556142965880123323311949751266331066368, 87112285931760246646623899502532662132736, 174224571863520493293247799005065324265472, 348449143727040986586495598010130648530944, 696898287454081973172991196020261297061888, 1393796574908163946345982392040522594123776, 2787593149816327892691964784081045188247552, 5575186299632655785383929568162090376495104, 11150372599265311570767859136324180752990208, 22300745198530623141535718272648361505980416, 44601490397061246283071436545296723011960832, 89202980794122492566142873090593446023921664, 178405961588244985132285746181186892047843328, 356811923176489970264571492362373784095686656, 713623846352979940529142984724747568191373312, 1427247692705959881058285969449495136382746624, 2854495385411919762116571938898990272765493248, 5708990770823839524233143877797980545530986496, 11417981541647679048466287755595961091061972992, 22835963083295358096932575511191922182123945984, 45671926166590716193865151022383844364247891968, 91343852333181432387730302044767688728495783936, 182687704666362864775460604089535377456991567872, 365375409332725729550921208179070754913983135744, 730750818665451459101842416358141509827966271488, 1461501637330902918203684832716283019655932542976, 2923003274661805836407369665432566039311865085952, 5846006549323611672814739330865132078623730171904, 11692013098647223345629478661730264157247460343808, 23384026197294446691258957323460528314494920687616, 46768052394588893382517914646921056628989841375232, 93536104789177786765035829293842113257979682750464, 187072209578355573530071658587684226515959365500928, 374144419156711147060143317175368453031918731001856, 748288838313422294120286634350736906063837462003712, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968, 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936, 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872, 463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744, 926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488, 1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976, 3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952, 7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904, 14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808, 29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616, 59285549689505892056868344324448208820874232148807968788202283012051522375647232, 118571099379011784113736688648896417641748464297615937576404566024103044751294464, 237142198758023568227473377297792835283496928595231875152809132048206089502588928, 474284397516047136454946754595585670566993857190463750305618264096412179005177856, 948568795032094272909893509191171341133987714380927500611236528192824358010355712, 1897137590064188545819787018382342682267975428761855

inside loop:

$i = i * 2$ i.e. $i = 1 * 2$ (for first value)

$i = 4$ (2nd value)

$i = 8$ (3rd value)

$$2^k = n$$

$$k = \log_2 n$$

$$T(n) = O(\log_2 n)$$

Ans 5) $T(n) = 3T(n-1)$ if $(n > 0)$

$$n = n-1$$

$$T(n-1) = 3T(n-1) - 1$$

$$T(n-1) = 3T(n-2)$$

$$T(n) = 3(3T(n-2))$$

$$T(n) = 9T(n-2)$$

$$T(n-1) = 9T(n-3)$$

$$T(n) = 3(9T(n-3)) \\ = 27T(n-3)$$

$$2T(n-1), 4T(n-2), 2T(n-3), \dots, 2^n T(n-n)$$

$$T(2) = O(3n) = O(3^n)$$

base case $T(n) = 2T(n-1) - 1$ if $n > 0$

$$\begin{aligned} n &= n-1 \\ T(n-1) &= 2T[(n-1)-1] - 1 \\ T(n-1) &= 2T(n-2) - 1 \\ T(n) &= 2(2T(n-2) - 1) - 1 \\ T(n) &= 4T(n-2) - 2 - 1 \end{aligned}$$

for $n = n-1$

$$\begin{aligned} T(n-1) &= 4T(n-1) - 2 - 1 \\ T(n-1) &= 4T(n-3) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^2 (2T(n-3) - 1) - 2 - 1 \\ &= 3T(n-3) - 4 - 2 - 1 \end{aligned}$$

$$2T(n-1) - 1, 4T(n-2) - 1 - 2, \dots, 2^n T(n-n) - 1$$

$$2^n - (2^n - 1)$$

$$T(n) = 1$$

$$T(1) = O(1)$$

Ans) Let $i=1, s=1;$

while ($s=n$)

{

$i++$

$s = s + i;$

printf (" $\#$ ");

}

$$1+2+3 \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} > n$$

$$k^2 = n$$

$$k = \sqrt{n} \Rightarrow O(\sqrt{n}) = f(n)$$

Ans) void function (let n)

{

let $i, \text{count} = 0;$

for ($i=1; i \leq n; i++$)

{

count++;

}

$$1 \rightarrow 1+1 \leq n \Rightarrow 2 \leq n$$

$$\text{for } (i=2 \text{ ; } i+2 \leq n \Rightarrow 2 \leq n$$

$$1 * n \leq n \Rightarrow n \leq n$$

$$1, 2, \dots, n \Rightarrow AP$$

$$\text{sum} = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

Ans) void function (let n)

{

 let i, j, k, count=0;

 for (i= n/2 ; i <= n ; i++) $\rightarrow n/2$

 for (j=1 ; j <= n ; j=j*2) $\log_2 n$

 for (k=1 ; k <= n ; k=k*2) $\log_2 n$

 count++

}

$$T(n) = n \log_2^2 n$$

Ans 2) function (int n)

```
{  
    int if (n=1)  
        return;  
}
```

```
for (i=1 to n)  $\rightarrow O(n)$ 
```

```
{  
    for (j=1 to n)  $\rightarrow O(n)$ 
```

```
{
```

```
    print ("x");  
}
```

function (n-3);

```
}
```

$T(n) = O(n^2)$

Ans 3) void function (int n)

```
{
```

```
for (i=1 to n)
```

```
{
```

```
    for (j=1, j<=n-j+i)  
        print ("x");
```

```
}
```

$$1, 2, 3, \dots, n$$

$$1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$1, 2, 3, \dots, n$$

$$T(n) = (n-1)n = O(n^2)$$

Ques) function n^k , c^n

Relation between the two

$$n^k = O(c^n) \text{ Ans.}$$