

LAMPIRAN C

Bukti Matematis Model Λ CDM

C.1 Analisis Matematis Profil NFW

C.1.1 Profil Densitas NFW

Profil densitas NFW, yang memiliki singularitas di pusat, dinyatakan sebagai:

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{h} \left(1 + \frac{r}{h}\right)^2} \quad (\text{C.1})$$

dengan:

- ρ_0 : skala densitas pada radius tertentu
- h : radius skala tempat kemiringan logaritmik profil berubah dari -1 di dalam menjadi -3 di luar
- r : jarak radial dari pusat halo

Massa yang terkandung di dalam radius r diperoleh melalui integrasi volumetrik:

$$M_{\text{NFW}}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_{\text{NFW}}(r') dr' \quad (\text{C.2})$$

Substitusi profil densitas NFW ke dalam integral memberikan:

$$M_{\text{NFW}}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \cdot \frac{\rho_0}{\frac{r'}{h} \left(1 + \frac{r'}{h}\right)^2} dr' = 4\pi \rho_0 \int_0^r \frac{r'^2 h}{r' \left(1 + \frac{r'}{h}\right)^2} dr' \quad (\text{C.3})$$

Penyederhanaan persamaan dilakukan sebagai berikut:

$$M_{\text{NFW}}(r) = 4\pi \rho_0 \int_0^r \frac{r'^2}{\frac{r'}{h} \left(1 + \frac{r'}{h}\right)^2} dr' \quad (\text{C.4})$$

$$M_{\text{NFW}}(r) = 4\pi \rho_0 \int_0^r \frac{r'^2 h}{r' \left(1 + \frac{r'}{h}\right)^2} dr' \quad (\text{C.5})$$

Sehingga diperoleh:

$$M_{\text{NFW}}(r) = 4\pi\rho_0 h \int_0^r \frac{r'}{(1 + \frac{r'}{h})^2} dr' \quad (\text{C.6})$$

Untuk mempermudah penyelesaian integral, diperkenalkan variabel tak berdimensi $x \equiv r'/h$. Transformasi variabel ini menghasilkan:

$$r' = hx$$

$$dr' = hdx$$

$$\text{Batas integral: } r' = 0 \rightarrow x = 0$$

$$r' = r \rightarrow x = r/h$$

Substitusi variabel tak berdimensi ke dalam integral menghasilkan:

$$M_{\text{NFW}} = 4\pi\rho_0 h \int_0^{r/h} \frac{hx}{(1+x)^2} hdx \quad (\text{C.7})$$

Integral massa menjadi:

$$M_{\text{NFW}} = 4\pi\rho_0 h \int_0^{r/h} \frac{hx}{(1+x)^2} hdx = 4\pi\rho_0 h^3 \int_0^{r/h} \frac{x}{(1+x)^2} dx \quad (\text{C.8})$$

Integral $\int \frac{x}{(1+x)^2} dx$ diselesaikan menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial. Dinyatakan bahwa:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} \quad (\text{C.9})$$

Persamaan di atas dikalikan dengan $(1+x)^2$ pada kedua ruasnya menjadi:

$$x = A(1+x) + B \quad (\text{C.10})$$

$$x = A + Ax + B \quad (\text{C.11})$$

Dengan membandingkan koefisien suku yang bersesuaian:

$$\text{Koefisien } x : 1 = A$$

$$\text{Konstanta: } 0 = A + B$$

Solusi sistem persamaan tersebut adalah:

$$A = 1, \quad B = -1 \quad (\text{C.12})$$

Sehingga dekomposisi pecahan parsial menjadi:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \quad (\text{C.13})$$

Dekomposisi ini memecah integral kompleks menjadi dua integral sederhana:

$$\int \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx \quad (\text{C.14})$$

$$= \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad (\text{C.15})$$

Penyelesaian secara langsung menggunakan teknik integrasi dasar memberikan:

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| \quad (\text{C.16})$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x} \quad (\text{C.17})$$

Solusi integral tak tentu adalah:

$$\int \frac{x}{(1+x)^2} dx = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} + C \quad (\text{C.18})$$

Maka, persamaan massa menjadi:

$$M_{\text{NFW}} = 4\pi\rho_0 h^3 \int_0^{r/h} \frac{x}{(1+x)^2} dx = 4\pi\rho_0 h^3 \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right]_0^{r/h} \quad (\text{C.19})$$

Evaluasi dengan batas $x = 0$ hingga $x = r/h$:

$$\int_0^{r/h} \frac{x}{(1+x)^2} dx = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right]_0^{r/h} \quad (\text{C.20})$$

Evaluasi pada batas atas ($x = r/h$) memberikan:

$$\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) + \frac{1}{1 + \frac{r}{h}} = \ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) + \frac{h}{r + h} \quad (\text{C.21})$$

Evaluasi pada batas bawah ($x = 0$) memberikan:

$$\ln(1) + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1 \quad (\text{C.22})$$

Hasil integral tentu adalah:

$$\int_0^{r/h} \frac{x}{(1+x)^2} dx = \left[\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) + \frac{h}{r+h} \right] - 1 \quad (\text{C.23})$$

Substitusi hasil tersebut ke dalam persamaan massa NFW menghasilkan:

$$M_{\text{NFW}} = 4\pi\rho_0 h^3 \left[\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) + \frac{h}{r+h} - 1 \right] \quad (\text{C.24})$$

Penyederhanaan dilakukan sebagai berikut:

$$\frac{h}{r+h} - 1 = \frac{h - (r+h)}{r+h} = -\frac{r}{r+h} \quad (\text{C.25})$$

Setelah substitusi, bentuk akhir massa NFW adalah:

$$M_{\text{NFW}}(r) = 4\pi\rho_0 h^3 \left[\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) - \frac{r}{r+h} \right] \quad (\text{C.26})$$

C.1.2 Penurunan Rumus Kecepatan Rotasi NFW

Kecepatan rotasi untuk orbit lingkaran diturunkan dari kesetimbangan gaya sentripetal dan gaya gravitasi:

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (\text{C.27})$$

Penyederhanaan dilakukan dengan menghilangkan massa uji m :

$$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{C.28})$$

Kedua ruas dikalikan dengan r :

$$\frac{GM(r)}{r} = v^2 \quad (\text{C.29})$$

Substitusi massa NFW yang telah diperoleh menghasilkan:

$$v_{\text{NFW}}^2(r) = \frac{G}{r} \cdot 4\pi\rho_0 h^3 \left[\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) - \frac{r}{r+h} \right] \quad (\text{C.30})$$

C.2 Analisis Matematis Profil Core-Modified

C.2.1 Profil Densitas Core-Modified

Berbeda dengan profil NFW yang memiliki singularitas di pusat, profil *core-modified* memprediksi inti dengan densitas konstan di wilayah pusat. Profil densitas *core-modified* didefinisikan sebagai:

$$\rho_{\text{core}}(r) = \frac{\rho_0 h^3}{r^3 + h^3} \quad (\text{C.31})$$

dengan:

- ρ_0 : densitas pusat yang konstan di wilayah inti
- h : radius karakteristik di mana densitas berkurang menjadi setengah nilai pusat
- r : jarak radial dari pusat galaksi

Massa di dalam radius r diperoleh melalui:

$$M_{\text{core}}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_{\text{core}}(r') dr' = \int_0^r 4\pi r'^2 \left(\frac{\rho_0 h^3}{r'^3 + h^3} \right) dr' \quad (\text{C.32})$$

Didefinisikan variabel substitusi sebagai berikut:

$$u \equiv r'^3 + h^3 \quad (\text{C.33})$$

$$du = 3r'^2 dr' \quad (\text{C.34})$$

$$r'^2 dr' = \frac{du}{3} \quad (\text{C.35})$$

Batas integral ditransformasikan menjadi:

$$r' = 0 \implies u = 0^3 + h^3 = h^3$$

$$r' = r \implies u = r^3 + h^3$$

Substitusi ke dalam integral massa menghasilkan:

$$M_{\text{core}} = 4\pi\rho_0 h^3 \int_{h^3}^{r^3+h^3} \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3} \quad (\text{C.36})$$

$$M_{\text{core}} = \frac{4\pi}{3}\rho_0 h^3 \int_{h^3}^{r^3+h^3} \frac{du}{u} \quad (\text{C.37})$$

Integral $\int \frac{du}{u}$ merupakan integral dasar dengan solusi logaritma natural:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| \quad (\text{C.38})$$

Evaluasi integral tentu:

$$M_{\text{core}} = \frac{4\pi}{3}\rho_0 h^3 [\ln |u|]_{h^3}^{r^3+h^3} \quad (\text{C.39})$$

$$M_{\text{core}} = \frac{4\pi}{3}\rho_0 h^3 [\ln(r^3 + h^3) - \ln(h^3)] \quad (\text{C.40})$$

Penyederhanaan menggunakan sifat logaritma memberikan:

$$\ln(r^3 + h^3) - \ln(h^3) = \ln\left(\frac{r^3 + h^3}{h^3}\right) = \ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) \quad (\text{C.41})$$

Maka, massa menjadi:

$$M_{\text{core}} = \frac{4\pi}{3}\rho_0 h^3 \ln\left(\frac{r^3 + h^3}{h^3}\right) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 h^3 \ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) \quad (\text{C.42})$$

Bentuk akhir massa *core-modified* adalah:

$$M_{\text{core}}(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 h^3 \ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) \quad (\text{C.43})$$

C.2.2 Penurunan Rumus Kecepatan Rotasi Core-Modified

Kecepatan rotasi diturunkan dari hubungan kesetimbangan gaya sentripetal dan gravitasi:

$$v_{\text{core}}^2(r) = \frac{GM_{\text{core}}(r)}{r} \quad (\text{C.44})$$

Substitusi massa *core-modified* yang telah diperoleh memberikan:

$$v_{\text{core}}^2(r) = \frac{G}{r} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho_0 h^3 \ln \left(1 + \frac{r^3}{h^3} \right) \quad (\text{C.45})$$

C.3 Analisis Perilaku Asimtotik

C.3.1 Profil NFW

Perilaku wilayah dalam (limit $r \ll h$):

$$\frac{r}{h} \ll 1 \quad (\text{C.46})$$

Ekspansi deret Taylor untuk logaritma natural:

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \quad \text{untuk } |y| < 1 \quad (\text{C.47})$$

Substitusi $y = \frac{r}{h}$ ke dalam deret menghasilkan:

$$\ln \left(1 + \frac{r}{h} \right) = \frac{r}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{h} \right)^3 - \dots \quad (\text{C.48})$$

Ekspansi deret untuk suku rasional:

$$\frac{r}{r+h} = \frac{r}{h(1 + \frac{r}{h})} = \frac{r}{h} \left(1 - \frac{r}{h} + \left(\frac{r}{h} \right)^2 - \left(\frac{r}{h} \right)^3 + \dots \right) \quad (\text{C.49})$$

$$\frac{r}{r+h} = \frac{r}{h} - \left(\frac{r}{h} \right)^2 + \left(\frac{r}{h} \right)^3 - \dots \quad (\text{C.50})$$

Substitusi kedua ekspansi ke dalam persamaan massa NFW:

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{r}{h} \right) - \frac{r}{r+h} &= \left[\frac{r}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{h} \right)^3 - \dots \right] \\ &\quad - \left[\frac{r}{h} - \left(\frac{r}{h} \right)^2 + \left(\frac{r}{h} \right)^3 - \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

$$\ln \left(1 + \frac{r}{h} \right) - \frac{r}{r+h} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{r}{h} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{r}{h} \right)^3 + \dots \quad (\text{C.52})$$

Aproksimasi orde kedua untuk $r \ll h$:

$$\ln \left(1 + \frac{r}{h} \right) - \frac{r}{r+h} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} \right)^2 \quad (\text{C.53})$$

Substitusi ke dalam ekspresi kecepatan rotasi:

$$v_{\text{NFW}}^2(r) \approx \frac{G}{r} \cdot 4\pi\rho_0 h^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \quad (\text{C.54})$$

$$v_{\text{NFW}}^2(r) \approx 2\pi G\rho_0 h^2 \cdot r \quad (\text{C.55})$$

$$v_{\text{NFW}}(r) \approx \sqrt{2\pi G\rho_0 h^2} \cdot \sqrt{r} \quad (\text{C.56})$$

Sehingga $v_{\text{NFW}}(r) \propto r^{1/2}$ di wilayah dalam.

Perilaku wilayah luar ($r \gg h$):

$$\frac{r}{h} \gg 1 \quad (\text{C.57})$$

$$\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) \approx \ln\left(\frac{r}{h}\right) \quad (\text{C.58})$$

$$\frac{r}{r+h} = \frac{1}{1 + \frac{h}{r}} \approx 1 - \frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r}\right)^2 - \dots \quad (\text{C.59})$$

Untuk aproksimasi orde utama di wilayah luar:

$$\ln\left(1 + \frac{r}{h}\right) - \frac{r}{r+h} \approx \ln\left(\frac{r}{h}\right) - 1 \quad (\text{C.60})$$

Substitusi ke dalam ekspresi kecepatan rotasi:

$$v_{\text{NFW}}^2(r) \approx \frac{G}{r} \cdot 4\pi\rho_0 h^3 \left[\ln\left(\frac{r}{h}\right) - 1 \right] \quad (\text{C.61})$$

$$v_{\text{NFW}}^2(r) \approx 4\pi G\rho_0 h^3 \frac{\ln(r/h) - 1}{r} \quad (\text{C.62})$$

Sehingga $v_{\text{NFW}}^2(r) \propto \frac{\ln r}{r}$ di wilayah luar.

C.3.2 Profil Core-Modified

Perilaku wilayah dalam (limit $r \ll h$):

$$\frac{r^3}{h^3} \ll 1 \quad (\text{C.63})$$

Ekspanasi deret Taylor untuk logaritma natural:

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \quad \text{untuk } |y| < 1 \quad (\text{C.64})$$

Substitusi $y = \frac{r^3}{h^3}$ ke dalam deret:

$$\ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) = \frac{r^3}{h^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{r^3}{h^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r^3}{h^3}\right)^3 - \dots \quad (\text{C.65})$$

Aproksimasi orde pertama untuk $r \ll h$:

$$\ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) \approx \frac{r^3}{h^3} \quad (\text{C.66})$$

Substitusi ke dalam ekspresi kecepatan rotasi:

$$v_{\text{core}}^2(r) \approx \frac{G}{r} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho_0 h^3 \cdot \frac{r^3}{h^3} \quad (\text{C.67})$$

$$v_{\text{core}}^2(r) \approx \frac{4\pi}{3} G \rho_0 r^2 \quad (\text{C.68})$$

$$v_{\text{core}}(r) \approx \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho_0} r \quad (\text{C.69})$$

Sehingga $v_{\text{core}}(r) \propto r$ di wilayah dalam. Perilaku ini menunjukkan penurunan kecepatan rotasi yang lebih bertahap dibandingkan dengan profil NFW ($v_{\text{NFW}}(r) \propto r^{1/2}$), yang memprediksi peningkatan kecepatan rotasi lebih tajam di wilayah dalam.

Perilaku wilayah luar ($r \gg h$):

$$\frac{r^3}{h^3} \gg 1 \quad (\text{C.70})$$

$$\ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) \approx \ln\left(\frac{r^3}{h^3}\right) \quad (\text{C.71})$$

$$\ln\left(\frac{r^3}{h^3}\right) = \ln(r^3) - \ln(h^3) = 3 \ln r - 3 \ln h \quad (\text{C.72})$$

$$\ln\left(1 + \frac{r^3}{h^3}\right) \approx 3 \ln\left(\frac{r}{h}\right) \quad (\text{C.73})$$

Substitusi ke dalam ekspresi kecepatan rotasi:

$$v_{\text{core}}^2(r) \approx \frac{G}{r} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho_0 h^3 \cdot 3 \ln\left(\frac{r}{h}\right) \quad (\text{C.74})$$

$$v_{\text{core}}^2(r) \approx 4\pi G \rho_0 h^3 \frac{\ln(r/h)}{r} \quad (\text{C.75})$$

Sehingga $v_{\text{core}}^2(r) \propto \frac{\ln r}{r}$ di wilayah luar. Perilaku ini menunjukkan penurunan kecepatan rotasi yang serupa dengan profil NFW, namun dengan koefisien berbeda yang mencerminkan perbedaan struktur halo.