LAMPIRAN D

Bukti Matematis Teori MOND

D.1 Analisis Solusi MOND dengan Fungsi Interpolasi Standar

D.1.1 Hubungan MOND dan Fungsi Interpolasi Standar

Persamaan MOND menghubungkan percepatan barionik (a_B) dengan percepatan MOND (a_M) melalui:

$$\mu\left(\frac{a_M}{a_0}\right) a_M = a_B \tag{D.1}$$

Fungsi interpolasi standar didefinisikan sebagai:

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{D.2}$$

dengan $x = a_M/a_0$ sebagai variabel tak berdimensi.

Substitusi $x = a_M/a_0$ ke dalam persamaan menghasilkan:

$$\frac{a_M/a_0}{\sqrt{1+(a_M/a_0)^2}} \cdot a_M = a_B \tag{D.3}$$

Penyederhanaan persamaan memberikan:

$$\frac{a_M^2}{a_0\sqrt{1+(a_M/a_0)^2}} = a_B \tag{D.4}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (D.2) ke dalam Persamaan (D.1) diperoleh:

$$\frac{a_M/a_0}{\sqrt{1+(a_M/a_0)^2}} \cdot a_M = a_B \tag{D.5}$$

Didefinisikan variabel tak berdimensi sebagai berikut:

$$u \equiv \frac{a_M}{a_0}, \quad k \equiv \frac{a_B}{a_0} \tag{D.6}$$

Substitusi variabel tak berdimensi ke dalam persamaan menghasilkan:

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u a_0 = k a_0 \tag{D.7}$$

$$\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} = k \tag{D.8}$$

Persamaan (D.8) merupakan persamaan dalam u. Kedua ruas dikuadratkan untuk menghilangkan akar kuadrat:

$$\left(\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = k^2 \tag{D.9}$$

$$\frac{u^4}{1+u^2} = k^2 \tag{D.10}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $1 + u^2$:

$$u^4 = k^2(1+u^2) \tag{D.11}$$

$$u^4 = k^2 + k^2u^2 \tag{D.12}$$

Semua suku dipindahkan ke satu ruas:

$$u^4 - k^2u^2 - k^2 = 0 \tag{D.13}$$

Untuk mengubah persamaan kuartik menjadi persamaan kuadrat, dilakukan substitusi $v = u^2$:

$$v^2 - k^2v - k^2 = 0 \tag{D.14}$$

Persamaan kuadrat (D.14) diselesaikan menggunakan rumus kuadrat:

$$v = \frac{k^2 \pm \sqrt{(-k^2)^2 - 4(1)(-k^2)}}{2(1)} \tag{D.15}$$

$$v = \frac{k^2 \pm \sqrt{(-k^2)^2 + 4k^2}}{2} \tag{D.16}$$

$$v = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 + 4k^2}}{2} \tag{D.17}$$

Karena $v = u^2$ merepresentasikan kuadrat dari percepatan tak berdimensi, nilai v harus positif. Dipilih solusi dengan tanda positif:

$$u^2 = \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + 4k^2}}{2} \tag{D.18}$$

Untuk menyederhanakan ekspresi ini, faktor k^2 dikeluarkan dari akar kuadrat:

$$\sqrt{k^4 + 4k^2} = \sqrt{k^2(k^2 + 4)} = k\sqrt{k^2 + 4} \tag{D.19}$$

Substitusi kembali ke persamaan memberikan:

$$u^2 = \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 + 4}}{2} \tag{D.20}$$

Faktor k^2 dikeluarkan dari pembilang:

$$u^2 = \frac{k^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2}}\right) \tag{D.21}$$

Variabel asli dikembalikan dengan substitusi $u = a_M/a_0$ dan $k = a_B/a_0$:

$$\frac{a_M^2}{a_0^2} = \frac{(a_B/a_0)^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{(a_B/a_0)^2}}\right) \tag{D.22}$$

Kedua ruas dikalikan dengan a_0^2:

$$a_M^2 = \frac{a_B^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0^2}{a_B^2}}\right) \tag{D.23}$$

Suku di dalam akar kuadrat ditulis ulang menjadi:

$$\frac{4a_0^2}{a_B^2} = \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2 \tag{D.24}$$

Bentuk akhir solusi MOND adalah:

$$\boxed{a_M^2 = \frac{a_B^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2}\right)} \tag{D.25}$$

D.1.2 Analisis Perilaku Asimtotik dalam Berbagai Rezim

Dalam rezim *deep-MOND* ($a_B \ll a_0$), percepatan barionik jauh lebih kecil daripada percepatan karakteristik MOND. Solusi percepatan MOND yang diperoleh sebelumnya adalah:

$$a_M^2 = \frac{a_B^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2}\right) \tag{D.26}$$

Dalam limit $a_B \ll a_0$, suku $\left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2$ sangat besar, sehingga:

$$\left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2 \gg 1 \tag{D.27}$$

Aproksimasi suku akar kuadrat:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2} \approx \frac{2a_0}{a_B}\sqrt{1 + \left(\frac{a_B}{2a_0}\right)^2} \tag{D.28}$$

Ekspresi di dalam akar kuadrat diekspansi menggunakan deret binomial:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a_B}{2a_0}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_B}{2a_0}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{a_B}{2a_0}\right)^4 + \cdots \tag{D.29}$$

Sehingga diperoleh:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2} \approx \frac{2a_0}{a_B}(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_B}{2a_0}\right)^2 - \cdots) \tag{D.30}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2} \approx \frac{2a_0}{a_B} + \frac{a_B}{4a_0} - \cdots \tag{D.31}$$

Substitusi aproksimasi ini ke dalam solusi eksak menghasilkan:

$$a_M^2 \approx \frac{a_B^2}{2}\left(1 + \frac{2a_0}{a_B} + \frac{a_B}{4a_0} - \cdots\right) \tag{D.32}$$

$$a_M^2 \approx \frac{a_B^2}{2} + a_B a_0 + \frac{a_B^3}{8a_0} - \cdots \tag{D.33}$$

Dalam limit $a_B \ll a_0$, suku $a_B a_0$ menjadi dominan karena $\frac{a_B^2}{2}$ jauh lebih kecil dibandingkan $a_B a_0$, sementara $\frac{a_B^3}{8a_0}$ bahkan lebih kecil. Suku $\frac{a_B^2}{2}$ dan $\frac{a_B^3}{8a_0}$ dapat diabaikan terhadap suku dominan $a_B a_0$. Oleh karena itu:

$$a_M^2 \approx a_B a_0 \tag{D.34}$$

Bentuk akhir untuk rezim *deep-MOND* adalah:

$$\boxed{a_M \approx \sqrt{a_B a_0}} \tag{D.35}$$

Dalam rezim Newton, di mana percepatan barionik jauh lebih besar daripada percepatan karakteristik MOND ($a_B \gg a_0$). Solusi percepatan MOND yang diperoleh sebelumnya adalah:

$$a_M^2 = \frac{a_B^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2}\right) \tag{D.36}$$

Untuk menganalisis perilaku asimtotik dalam rezim ini, digunakan ekspansi deret Taylor untuk $\sqrt{1+y}$ dengan $y = \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2$:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \cdots \tag{D.37}$$

Substitusi $y = \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^4 + \cdots \tag{D.38}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2a_0}{a_B}\right)^2} = 1 + \frac{2a_0^2}{a_B^2} - \frac{2a_0^4}{a_B^4} + \cdots \tag{D.39}$$

Substitusi ekspansi ke dalam solusi percepatan MOND:

$$a_M^2 = \frac{a_B^2}{2}\left(1 + 1 + \frac{2a_0^2}{a_B^2} - \frac{2a_0^4}{a_B^4} + \cdots\right) \tag{D.40}$$

$$a_M^2 = \frac{a_B^2}{2}\left(2 + \frac{2a_0^2}{a_B^2} - \frac{2a_0^4}{a_B^4} + \cdots\right) \tag{D.41}$$

$$a_M^2 = a_B^2 + a_0^2 - \frac{a_0^4}{a_B^2} + \cdots \tag{D.42}$$

Dalam limit $a_B \gg a_0$, suku a_B^2 menjadi dominan, sehingga suku-suku lainnya dapat diabaikan karena nilainya jauh lebih kecil dibandingkan a_B^2:

$$a_M^2 \approx a_B^2 \tag{D.43}$$

Bentuk akhir untuk rezim Newton adalah:

$$\boxed{a_M \approx a_B} \tag{D.44}$$

D.2 Analisis Solusi MOND dengan Fungsi Interpolasi Arctangent

D.2.1 Hubungan MOND dan Fungsi Interpolasi Arctangent

Persamaan fundamental MOND dinyatakan sebagai:

$$\mu\left(\frac{a_M}{a_0}\right) a_M = a_B \tag{D.45}$$

Fungsi interpolasi arctangent didefinisikan sebagai:

$$\mu(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \tag{D.46}$$

Substitusi $x = a_M/a_0$ menghasilkan bentuk alternatif:

$$\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi a_M}{2a_0}\right) \cdot a_M = a_B \tag{D.47}$$

Untuk menyederhanakan analisis, didefinisikan variabel tak berdimensi:

$$u \equiv \frac{a_M}{a_0}, \quad k \equiv \frac{a_B}{a_0} \tag{D.48}$$

Dengan substitusi ini, persamaan menjadi:

$$u \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) = k \tag{D.49}$$

Persamaan ini merupakan persamaan dalam u dan tidak memiliki solusi analitik tertutup yang sederhana. Oleh karena itu, digunakan pendekatan analitik melalui ekspansi deret Taylor dan analisis asimtotik.

D.2.2 Analisis Rezim Deep-MOND dengan Ekspansi Taylor

Dalam rezim *deep-MOND* di mana $u \ll 1$, digunakan ekspansi deret Taylor untuk fungsi $\arctan(x)$ di sekitar $x = 0$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{D.50}$$

Substitusi $x = \frac{\pi u}{2}$ menghasilkan:

$$\arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) = \frac{\pi u}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^5 - \cdots \tag{D.51}$$

$$\arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) = \frac{\pi u}{2} - \frac{\pi^3 u^3}{24} + \frac{\pi^5 u^5}{160} - \cdots \tag{D.52}$$

Substitusi ekspansi ini ke dalam persamaan fundamental MOND memberikan:

$$u \cdot \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi u}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^3 + \cdots\right] = k \tag{D.53}$$

$$u \cdot \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi u}{2} - \frac{\pi^3 u^3}{24} + \frac{\pi^5 u^5}{160} - \cdots\right) = k \tag{D.54}$$

Penyederhanaan dilakukan secara bertahap:

$$u^2 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3 u^4}{8} + \cdots = k \tag{D.55}$$

$$u^2 - \frac{\pi^2 u^4}{12} + \cdots = k \tag{D.56}$$

Untuk $u \ll 1$, suku orde tinggi (u^4 dan seterusnya) dapat diabaikan:

$$u^2 \approx k \tag{D.57}$$

Kembali ke variabel fisis:

$$\frac{a_M^2}{a_0^2} \approx \frac{a_B}{a_0} \tag{D.58}$$

Bentuk akhir untuk rezim *deep-MOND* adalah:

$$\boxed{a_M \approx \sqrt{a_B a_0}} \tag{D.59}$$

D.2.3 Analisis Rezim Newton dengan Ekspansi Asimtotik

Dalam rezim Newton di mana $u \gg 1$, digunakan ekspansi asimtotik untuk fungsi arctan(x) ketika $x \to \infty$:

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \cdots \tag{D.60}$$

Substitusi $x = \frac{\pi u}{2}$ memberikan:

$$\arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi u} + \frac{8}{3\pi^3 u^3} - \cdots \tag{D.61}$$

Substitusi ekspansi asimtotik ini ke dalam persamaan fundamental MOND:

$$u \cdot \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi u} + \frac{8}{3\pi^3 u^3} - \cdots\right] = k \tag{D.62}$$

Penyederhanaan persamaan:

$$u \cdot \left[1 - \frac{4}{\pi^2 u} + \frac{16}{3\pi^4 u^3} - \cdots\right] = k \tag{D.63}$$

$$u - \frac{4}{\pi^2} + \frac{16}{3\pi^4 u^2} - \cdots = k \tag{D.64}$$

Dalam limit $u \gg 1$, suku u menjadi dominan, sehingga suku orde tinggi dan konstanta dapat diabaikan:

$$u \approx k \tag{D.65}$$

Untuk memperoleh akurasi yang lebih tinggi melalui iterasi pertama, suku konstanta pada koreksi orde pertama diperhitungkan kembali:

$$u - \frac{4}{\pi^2} \approx k \tag{D.66}$$

Sehingga diperoleh solusi pendekatan:

$$u \approx k + \frac{4}{\pi^2} \tag{D.67}$$

Kembali ke variabel fisis dengan substitusi $u = a_M/a_0$ dan $k = a_B/a_0$:

$$\frac{a_M}{a_0} \approx \frac{a_B}{a_0} + \frac{4}{\pi^2} \tag{D.68}$$

Bentuk akhir untuk rezim Newton adalah:

$$\boxed{a_M \approx a_B + \frac{4a_0}{\pi^2}} \tag{D.69}$$

D.2.4 Solusi Numerik Menggunakan Metode Newton-Raphson

Fungsi interpolasi arctangent tidak memiliki solusi analitik tertutup:

$$u \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) = k \tag{D.70}$$

Metode Newton-Raphson digunakan untuk memperoleh solusi eksak di seluruh rezim. Didefinisikan fungsi $f(u)$ sebagai:

$$f(u) = u \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) - k \tag{D.71}$$

Turunan fungsi $f(u)$ dihitung menggunakan aturan perkalian dan rantai. Turunan suku pertama adalah:

$$\frac{d}{du}\left[u \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) + u \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{du}\left[\arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right] \tag{D.72}$$

Turunan fungsi arctangent adalah:

$$\frac{d}{du}\left[\arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{\pi u}{2}\right)^2} \cdot \frac{d}{du}\left[\frac{\pi u}{2}\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{\pi u}{2}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \tag{D.73}$$

Substitusi turunan arctangent ke dalam ekspresi sebelumnya:

$$\frac{d}{du}\left[u \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) + u \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\pi u}{2}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \tag{D.74}$$

Penyederhanaan dilakukan dengan menghilangkan faktor $\frac{2}{\pi}$ dan $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d}{du}\left[u \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) + u \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\pi u}{2}\right)^2} \tag{D.75}$$

Turunan fungsi $f(u)$ menjadi:

$$f'(u) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u}{2}\right) + \frac{u}{1+\left(\frac{\pi u}{2}\right)^2} \tag{D.76}$$

Algoritma iteratif Newton-Raphson didefinisikan sebagai:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \tag{D.77}$$

Substitusi $f(u_n)$ dan $f'(u_n)$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u_n}{2}\right) - k}{\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi u_n}{2}\right) + \frac{u_n}{1+\left(\frac{\pi u_n}{2}\right)^2}} \tag{D.78}$$

Tebakan awal u_0 ditentukan berdasarkan rezim:

$$u_0 = \begin{cases} \sqrt{k} & \text{untuk } k \ll 1 \text{ (rezim } \textit{deep-MOND}\text{)} \\ k & \text{untuk } k \gg 1 \text{ (rezim Newton)} \end{cases} \tag{D.79}$$

Kriteria konvergensi ditetapkan sebagai:

$$|u_{n+1} - u_n| < \epsilon \tag{D.80}$$

dengan $\epsilon = 10^{-6}$ sebagai toleransi galat.

Iterasi dilanjutkan hingga mencapai konvergensi yang diinginkan, misalnya ketika $|u_{n+1} - u_n| < 10^{-6}$. Iterasi dihentikan saat kriteria konvergensi terpenuhi. Metode ini memberikan solusi numerik yang akurat untuk persamaan fungsi interpolasi arctangent di seluruh rezim percepatan.