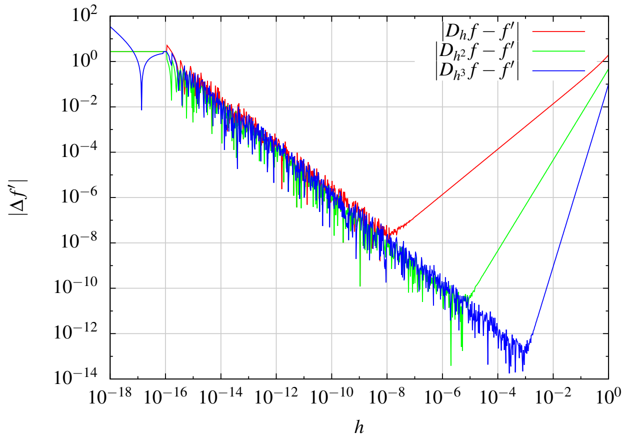

Figure 1: Błąd bezwzględny pochodnej obliczonej trzema metodami dla $f(x) = e^x$ w punkcie $x = 1$.

Wstęp do metod numerycznych

Zadania numeryczne

N1. Napisz program testujący trzy metody liczenia pochodnej dla różnych wartości h. Proszę zrobić wykres zależności $|D_h f(x) - f'(x)|$ od h w skali logarytmicznej dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ w punkcie $x = 1$. Odczytać z wykresu optymalną wartość h. Patrz rys. 1.

N2. Napisz program, który faktycznie sprawdza do jakiej potęgi można podnieść szybciej wykonując mnożenia. *Uwaga:* obliczenia (pow(x,n)) oraz własną metodą należy wykonywać wielokrotnie, tak aby czas działania programu był zauważalny np. rzędu sekundy.

N3. Oblicz wartość wyrażenia:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx) \exp(-n)$$

dobierając N tak aby dokładność wyniku była 10^{-10} dla $x = 0.2$. Funkcji cos i exp można użyć tylko jeden raz!

N4. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Skorzystać z faktu, że macierz jest macierzą trójdiagonalną.

N5. Korzystając ze wzoru Shermana-Morrisona rozwiązać poniższy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

N6. Znaleźć rozwiązanie układu $N \times N$ równań o poniższej strukturze:

$$\begin{cases} u_0 = 1 & \text{dla } n = 0 \\ (D_2 + D_1 + 4\mathbb{1})\, u = b & \text{dla } 0 < n < N-1 \\ u_{N-1} = 1 & \text{dla } n = N-1 \end{cases}$$

gdzie macierze D są zdefiniowane w następujący sposób (dla $n \neq 0 \wedge n \neq N-1$):

$$(D_1)_{mn} = \left(-\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1}\right)/(2h),$$

$$(D_2)_{mn} = \left(\delta_{n,m+1} - 2\delta_{n,m} + \delta_{n,m-1}\right)/(h^2),$$

oraz $h = 4.0/(N-1)$.
Wskazówka: macierz dla takiego układu jest macierzą trójdiagonalną. Co się stanie jeśli ostatnie równanie będzie miało postać:

$$-3u_0 + 4u_1 - u_2 = 0?$$

Rozwiąż powyższe równania, a rozwiązania przedstaw na wykresie $(x_n = nh, u_n)$ dla dużego N, np. $N = 1001$.

N7. Zaimplementować metodę:

- relaksacyjną
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \gamma\left(b - Ax^{(n)}\right),$$
- Jacobiego:
$$x^{(n+1)} = D^{-1}\left(b - Rx^{(n)}\right),$$
- Gausa-Seidla
$$x^{(n+1)} = L^{-1}\left(b - Ux^{(n)}\right),$$

- Successive OverRelaxation

$$x_i^{(n+1)} = (1-\omega)x_i^{(n)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(n)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, N \,.$$

Proszę znaleźć rozwiązania układu $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

z dokładnością 10^{-10}. Która metoda jest najszybsza?

N8. Zaimplementować metodę gradientów sprzężonych dla układu z zadania 6 z poprzedniego zestawu.

N9. Na płaszczyźnie (x, y) wybieramy $N \times N = N^2$ równo oddalonych punktów $(x_n, y_m) = (hn, hm), h = 10.0/(N-1), n, m = 0 \ldots N-1$. Znaleźć wartości $u_{n,m}$ w zadanych punktach spełniające następujące warunki:

$$u_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, n = N-1, m = N-1, \\ 1 - |x_n - 5|/5 & \text{dla } m = 0, \\ 1 & \text{dla } (x_n - 3)^2 + (y_m - 7)^2 < 0.2, \\ 2 & \text{dla } (x_n - 8)^2 + (y_m - 7)^2 < 0.2, \\ \left(u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1}\right)/4 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Uwaga: tak naprawdę to mamy układ N^2 równań na N^2 niewiadomych, zatem szukany wektor będzie miał długość N^2.
Proszę wybrać spore $N \sim 100 - 1000$.
Rozwiązanie przedstawić w postaci wykresu.

N10. Znaleźć wartości własne macierzy z dokładnością 10^{-8}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

korzystając z metody potęgowej, Rayleigha i metody iteracyjnej QR:

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= A, \\ Q^{(n)} R^{(n)} &= B^{(n)}, \\ B^{(n+1)} &:= R^{(n)} Q^{(n)}. \end{aligned}$$

N11. Znaleźć 4 wektory własne odpowiadające *najmniejszym* wartościom własnym macierzy $N \times N$ zdefiniowanej w następujący sposób:

$$A_{n,m} = \left(-\delta_{n,m+1} + 2\delta_{n,m} - \delta_{n,m-1}\right)/h^2 + 6\delta_{n,m} \tanh^2(x_n),$$

dla $h = 20/(N-1)$ oraz $x_n = (n - N/2)h$. Proszę wybrać duże $N \sim 100 \ldots 1000$. Jako rozwiązanie proszę podać wartości własne oraz dla

każdej ze znalezionych wartości własnych narysować wykres $\{x_n, v_n\}$.
Wskazówka1: najlepiej skorzystać z metody Rayleigha lub odwrotnej metody potęgowej.
Wskazówka2: macierz w zadaniu jest znowu macierzą trójdiagonalną, węc rozwiązanie odpowiedniego układu równań nie jest zbyt kosztowne.

N12. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\det(A-\lambda\mathbb{1})$ wszystkimi metodami omawianymi na zajęciach z dokładnością 10^{-8}. Które metody działają najszybciej? A jest macierzą z zadania N10.

N13. Narysować zbiór $\{x_n : n > 100\}$ (atraktor) w zależności od parametru $k \in [2, 4]$ dla odwzorowania logistycznego.
`http://pl.wikipedia.org/wiki/Odwzorowanie_logistyczne`

N14. Rozwiązać równanie

$$z^3 - 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

metodą Newtona. Zaznaczyć różnymi kolorami baseny atrakcji poszczególnych rozwiązań na płaszczyźnie $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$.

N15. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} xy - \exp(-x+y) & = 0, \\ \sin\left(x^2+y\right) - 0.9\,x & = 0. \end{cases}$$

w kwadracie $(-2, 2) \times (-2, 2)$. Można korzystać z gotowych bibliotek numerycznych, ale nie z gotowych programów typu *Mathematica*.

N16. Znaleźć rozwiąnie następującego układu N równań nieliniowych na N niewiadomych u_n:

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} - 2h^2 u_n(u_n^2 - 1) & = 0, \text{ dla } 0 < n < N-1 \\ u_{N-1} & = 1 \end{cases}$$

dla dużego $N = 100..1000$ oraz $h = 20/(N-1)$. Narysować wykres rozwiązania (nh, u_n).
Wskazówka1: oczywiście jakobian będzie macierzą trójdiagonalną, co mocno przyspieszy rozwiązywanie problemu metodą Newtona.
Wskazówka2: Gdy dane początkowe zostaną źle dobrane, metoda Newtona może źle działać, wtedy można początkowo zmniejszyć krok.

N17. Znajdź interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ oraz } f_2(x) = e^{-x^2}$$

na przedziale $x \in [-5, 5]$

- dla N równoodległych punktów przy pomocy wielomianów Lagrange'a *(2 ptk.)*,
- dla N równoodległych punktów przy użyciu funkcji sinc *(2 ptk.)*,

- dla N punktów $x_n = 5\cos\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)$ przy pomocy wielomianów Lagrange'a, *(2 ptk.)*
- dla N równoodległych punktów przy użyciu splajnów kubicznych. *(2 ptk.)*

Dla każdego z powyższych podpunktów znajdź N minimalizujący błąd przybliżenia $\sigma = \max|f(x) - f_{approx}(x)|$?
Dlaczego z funkcją f_1 są takie problemy?
Narysuj wykresy (również poza punktami interpolacji!) dla N minimalizującego błąd.
Jakie są złożoności dla poszczególnych metod?
Uwaga: w tym zadaniu najważniejsza jest właściwa analiza i wnioski i to one stanowią podstawę oceny.

N18. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

z dokładnością do 10^{-6} za pomocą złożonej metody trapezów, Simpsona i reguły 3/8, stosując iteracyjne zagęszczanie podprzedziałów.
Uwaga: za liczenie dwukrotnie (lub więcej) wartości funkcji w obrębie jednej metody przy zagęszczaniu będą odejmowane punkty.
Wskazówka: zmienić zmienne tak aby pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału.

N19. Korzystając z szybkiej transformaty Fouriera (np. DCT-II z biblioteki FFTW) oblicz współczynniki rozkładu funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{N} c_n TL_n(x)$$

w bazie wielomianów Chebysheva dla przedziału $x \in [0, \infty)$ oraz $N = 200$.
Wskazówka: wprowadzając zmienną

$$t = 2\mathrm{arc\,cot}\left(\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$$

zamieniamy $TL_n(x) = \cos(nt)$.

- Narysować współczynniki w skali logarytmicznej $(n, \log|c_n|)$. Jak duże N można wziąć?
- Obliczyć pochodną
$$g(x) = df/dx$$
w każdym z punktów interpolacyjnych, narysować wykres i porównać z wartościami dokładnymi.
- Obliczyć całkę
$$h(x) = \int_0^x dx' f(x')$$
w każdym z punktów interpolacyjnych, narysować wykres i porównać z wartościami dokładnymi.

Jaka jest złożoność obliczeniowa obliczenie pochodnej i całki w punktach interpolacyjnych? *Wskazówka:* proces obliczania pochodnej i całki można przyspieszyć (za dodatkowe 2ptk.) korzystając z odwrotnych transformacji cosinusowej i sinusowej.

Terminy oddawania zadań

- *23.12.2015* N1-N8
- *bezterminowo* N9
- *27.01.2016* N10-N15 (obowiązują do terminu zerowego)
- *03.02.2016* N16