Rapport de Stage

Licence Informatique
Parcours Double Licence Informatique et Mathématiques

Stage de Recherche au Laboratoire LAGA

Du 03 Juin 2024 au 03 Juillet 2024

Présenté par : Mamadou Moustapha KAMARA

Stage de fin de licence réalisé au sein de le laboratoire LAGA
Sous la responsabilité de :

- M. Charles Declercq, « tuteur de stage »
- M. Pierre Rousselin, « Responsable de formation »

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers M. Declercq, mon tuteur de stage, pour son soutien inestimable tout au long de mes recherches. Ses conseils et sa disponibilité ont été précieux et m'ont grandement aidé dans la rédaction de mon mémoire.

Un grand merci également à M. Rousselin, mon responsable de formation et ancien professeur. Son encadrement et sa disponibilité ont grandement contribué à l'enrichissement de mes connaissances.

Je tiens également à remercier mes camarades de promotion et mes anciens professieur pour leur aide et leur soutien permanent

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Étudiant en troisième année de Licence Informatique parcours Double Licence Mathématiques et Informatique, mon parcours académique est le résultat d'une formation riche et diversifiée, conçue allier les domaines des mathématiques et de l'informatique. En mathématiques, j'ai exploré des cours tels que la théorie des probabilités et les statistiques, la théorie de la mesure. Dans le domaine informatique, j'ai consolidé mes compétences en programmation orientée objet, notamment à travers un projet en Java. Des modules consacrés à la programmation en langage C et aux concepts de réseau, matérialisés par un projet client-serveur, m'ont fourni une base solide dans le développement logiciel et les communications réseau. Ces expériences pratiques ont renforcé ma compréhension de la programmation sous ses différentes facettes.
Au-delà des compétences techniques, j'ai su développer tout au long de mon cursus une grande capacité d'adaptation. Elle m'a été d'une aide précieuse lors de travaux collaboratifs. Ma capacité d'organisation s'est également affinée au fil du temps. Mon objectif, sur le long terme, est d'exercer en tant que data scientist.
Plusieurs méthodes ont été utilisées pour ma recherche de stage. Dans un premier temps, j'ai pris le temps de parcourir les offres disponibles sur les plateformes tels que LinkedIn et Indeed qui correspondaient le plus à mes compétences et mes aspirations, tout en optant parallèlement à des candidatures spontanées ciblant des entreprises spécifiques. A cela s'ajoute le bouche-à-oreille de proche en proche où je demandais dans mon entourage des pistes d'entreprises à la recherche de stagiaires.
Des difficultés ont notamment été rencontrées au cours des recherches. D'une part, de nombreux refus résidaient dans l'aspect théorique et orientée recherche que propose la licence en mathématiques et informatique. Les recruteurs la percevaient comme plus orientée vers des enseignements théoriques, ne correspondant pas toujours aux attentes des entreprises. D'autre

part, une grande majorité des offres de stage disponibles étaient destinée aux étudiants du niveau master pour des stages de fin d'études. De surcroit, la durée des stages généralement proposés excédaient la période d'un mois. En fin de compte, grâce à mon responsable de formation, j'ai pu décrocher un stage de recherche mathématique dans le laboratoire LAGA de l'Université Sorbonne Paris Nord.

En m'engageant dans ce stage de recherche, mon désir était d'approfondir mes connaissances en mathématiques, notamment avec la découverte des espaces dits de Hilbert et ainsi que le théorème de représentation de Reisz, qui trouvent de nombreuses applications en Analyse fonctionnelle et théorie de la mesure, avec notamment le théorème de Radon-Nikodym. L'objectif sous-jacent du stage est donc de fournir une démonstration de ce théorème en prenant appui sur des éléments d'analyse fonctionnelle.

En somme, je vois en ce stage une opportunité pour moi de m'instruire, d'approfondir mes connaissances en mathématiques et de découvrir le domaine de la recherche.

Chapitre 2

Présentation du laboratoire LAGA

Le LAGA (Laboratoire d'analyse, géométrie et application) est le laboratoire de mathématiques rataché à l'Institut Galilée, composante de l'université Sorbonne Paris Nord. Associé au CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), il comprend environ 90 chercheurs et enseignants-chercheurs (dont une dizaine de chercheurs CNRS) plus de 50 doctorants et il reçoit chaque année plus de trente visiteurs étrangers et post-docs.

Les principaux thèmes de recherches développés actuellement au sein du laboratoire sont les suivants : Arithmétique, géométrie algébrique, théorie des nombres, théorie des catégories, topologie algébrique, théorie de l'homotopie, théorie des représentations, systèmes dynamiques, théorie ergodique, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, analyse microlocale, physique mathématique, théorie spectrale, analyse numérique, probabilités et statistiques, analyse stochastique, codage et cryptographie, traitement de l'image.

Le laboratoire a pour mission de fournir un encadrement solide aux doctorants issus des Masters du département de mathématiques de l'université Paris 13, ainsi que des autres Masters de mathématiques de la région parisienne, de province, et potentiellement de formations similaires à l'international.

Chapitre 3

Espaces de Hilbert, Théoreme de représentation de Riesz et théorème de Radon-Nikodym

3.1 Rappels sur le Produit scalaire

Définition 1. (produit scalaire) Un produit scalaire dans un espace vectoriel V est une fonction $V \times V \to \mathbb{K}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Linéarité : pour tout vecteur $v \in V$, la fonction $\phi(v) = \langle u, v \rangle$ est linéaire, c'est à dire que $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, +w \rangle$ et $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
2. Symétrie conjuguée : Pour tous vectecteurs u, v $\in V$, on a $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$. Notez que cette propriété, combinée à la linéarité, implique que le produit scalaire est en effet linéaire dans son premier argument ainsi que dans son deuxième par rapport à l'addition, mais seulement linéairement conjugué dans son premier argument par rapport à la multiplication par un scalaire. La raison pour laquelle nous faisons ce choix est afin que nous puissions avoir la dernière propriété définitoire du produit scalaire...
3. Définie positive : pour tout vecteur $v \in V$, $\langle u, v \rangle$ est un réel positif. Notons que la symétrie conjuguée permet de toujours garder la fomer définie positive dans un espace vectoriel complexe.

Sacrifier la pleine linéarité dans l'un des arguments pour la définition positive peut sembler étrange au premier abord. Les propriétés suivantes motivent la définition positive de sorte que ce choix soit justifié.

Définition 2. (Norme induite) Pour un produit scalaire défini sur V, on définie une **norme** $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ respectant les propriétés suivantes :

— Positivité : $\|v\| \geq 0 \; \forall v \in V$

— Homogénéité : $\forall v \in V$ et pour tout scalaire λ dans sa "base field", $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$, où $|\lambda|$ représente la valeur absolue ou le module de λ si λ est réel ou complexe.

— Inégalité triangulaire : pour tous vecteurs $u, v \in V$, $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

Définition 3. (Espaces Vectoriels Normés) Un espace vectoriel V muni d'une norme $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ est appelé **espace vectoriel normé** si la norme vérifie ces propriétés, que la norme soit induite ou non d'un produit scalaire.

Pour un espace vectoriel normé V, l'inégalité triangulaire que la fonction distance $d(u, v) = \|u - v\|$ est une métrique. Cela implique que tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique. Notons que l'inégalité triangulaire inversé ($\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$) découle de l'inégalité triangulaie et implique la continuité de la norme par rapport à la métrique qu'elle induit.

Définition 4. (Espaces de Banach, Espaces de Hilbert) Si V est un espace métrique complet par rapport à une distance induite par sa propre norme, on dit qe V est un **Espace de Banach**. Si la norme de V induit un espace vectoriel complet qui découle lui-même d'un produit scalaire de V, on dit que V est un **espace de Hilbert**. Notons que les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach, et que tous les espaces de Banach sont des espaces vectoriels normés.

Nous allons montrer qu'un espace préhilbertien muni d'une norme découlant de son produit scalaire satisfait les propriétés d'un espace vectoriel normé. Pour cela, nous allons d'abord prouver une autre inégalité qui est elle-même très importante.

Théorème 1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous vecteurs u, v dans un espace préhilbertien V, $| \langle u, v\rangle | \leq \|u\|\|v\|$, avec égalité si et seulement si u et v sont des scalaires colinéaires (ou si l'un d'entre eux est nul).*

Avant d'entamer la preuve, il y a un lemme familier que nous allons introduire . On dit que deux vecteurs u, v de V sont **orthogonaux** si $\langle u, v\rangle = 0$.

Théorème 2. *(Théoreme de Pytaghore pour les produits scalaires) Si u, v sont orthogonaux, alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Démonstration. (théoreme de Pytaghore). En distribuant la somme $u + v$, on a :

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le théorème de Cauchy-Schwarz.

Démonstration. Si u ou v est égal à zéro, l'inégalité devient triviale. Supposons que u et v soient différents de 0. Posons $w = u - \frac{\langle v,u \rangle}{\langle v,v \rangle} v$. Puisque $\langle v, w \rangle = 0$, w est orthogonal à v donc nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 = |\frac{\langle v,u \rangle}{\langle v,v \rangle}|^2 \|v\|^2 + \|w\|^2 = \frac{|\langle v,u \rangle|^2}{(\|v\|^2)^2} \|v\|^2 + \|w\|^2 \geq \frac{|\langle v,u \rangle|^2}{\|v\|^2}$$

, avec la première inégalité, puisque u est la somme de w et d'un scalaire multiplié par v. L'inégalité de Cauchy-Scharwz suit en multipliant le terme de gauche et celui de droite par $\|v\|^2$ et en appliquant la racine carré :

$$\|u\|^2 \|v\|^2 \geq |\langle v,u \rangle|^2 \implies \|u\| \|v\| \geq |\langle u,v \rangle|$$

On remarque qu'on a égalité si et seulement si $w = 0$, ce qui implique par définition de u et v sont colinéaires ($u = \frac{\langle v,u \rangle}{\langle v,v \rangle} v$). □

L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que les vecteurs de petites normes donneront, en valeur absolue, un petit produit scalaire. Ceci avec la linéarité met en évidence la continuité du produit scalaire sur ces deux variables. Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorè suivant.

Théorème 3. *tout espace préhilbertien avec une norme induite par son produit scalaire est un espace vectoriel normé.*

Démonstration.
- Positivité : Vérifié par définition du produit scalaire
- Homogénéité : $\sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle v,v \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2} \sqrt{\langle v,v \rangle} = |\lambda| \, \|v\|$, et ce $\forall v \in V$.
- Inégalité triangulaire : Résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour u, $v \in V$, on a

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle^2 = \langle u,u \rangle + \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle \leq$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

L'inégalité est ainsi obtenue en ramenant le tout à la racine. □

Il y a une égalité élementaire supplémentaire qui nous sera utile :

Théorème 4. *(Egalité du parallélogramme) Pour tous vecteurs u, $v \in V$,* $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Démonstration.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle^2 =$$

$$\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle+\langle u,-v\rangle+\langle -v,u\rangle+\langle v,v\rangle = 2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

□

Trouver un couple de vecteurs qui ne vérifient pas l'égalité du parallélogramme est la façon la plus simple de montrer qu'un espavce vectoriel normé donné n'est pas forcément un espace préhilbertien. On peut aussi montrer que tous les espaces vectoriels normés verifiant l'inégalité du parallélogramme peut être muni d'un produit scalire qui induit sa norme. Dans ce cas, ce produit scalaire sera $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u+v\|^2)$.

3.2 Propriétés métriques des espaces de Hilbert

Définition 5. (Ensembles convexes et distance par rapport à un ensemble) Un sous-ensemble U de V est dit **convexe** si pour tous u, $v \in U$, $tu + (1-t)v \ \in U$ pour tout $t \ \in [0,1]$. Quand V est un espace vectoriel normé, on dit que la distance entre un vecteur p et un sous-ensemble U est définie par $d(p,U) = inf\{\|p-q\|, q \ \in U\}$.

Théorème 5. *(Théorème de projection de Hilbert) Pour V un espace de Hilbert et un sous-ensemble U de V fermé et convexe, il existe un unique élément $q \in U$ tel que la distance décrite ci-dessus est atteinte.*

Ceci n'est pas toujours le cas pour tous les espaces de Banach. La preuve qui suit fera usage de l'égalité du parallelogramme.

Démonstration. Soient $q_1, q_2...$ une suite de vecteurs dans U dont les distances par rapport à p tendent vers l'infimum. Montrons que cette suite est de Cauchy. En appliquant l'inégalité du parallélogramme aux paires $(p-q_n)$ et $(p-q_m)$, on a :

$$\|q_n-q_m\|^2 = \|(p-q_m)-(p-q_n)\|^2 = 2\|p-q_m\|^2+\|p-q_n\|^2-\|2p-(q_m+q_n)\|^2$$

En factorisant par 2 à droite, on $\frac{q_m+q_n}{2}$ qui est aussi un élément de U par convexité, on obtient donc :

$$\|q_n-q_m\|^2 \leq 2\|p-q_m\|^2 + \|p-q_n\|^2 - 4(dist(p,U))^2$$

puisque $\|p - \frac{q_m-p_n}{2}\| \geq (dist(p,U))$.

Puisque $\|p-q_m\|$ et $\|p-q_n\|$ approchent tous deux $dist(p,U)$, la partie droite de l'inégalité ci-dessus est très petite en choisissant arbitrairement des nombre n et m assez grands, ce qui prouve que la suite des q_i est de

Cauchy. La limite q des q_i est un élément de U puique U est un sous espace fermé donc complet. La continuité de la norme nous permet de conclure que $\|p-q\| = dist(p, U)$.

Pour montrer que q est unique, procédons par l'absurde en considérant deux tels vecteurs q et q'. On obtient comme démontré précédemment :

$$\|q-q'\|^2 \leq 2\|p-q\|^2 + \|p-q'\|^2 - 4(dist(p,U))^2 = 0$$

Ce qui implique que $q = q'$. □

Définition 6. (Projections orthogonales) Pour un vecteur v et un sous ensemble fermé convexe U (plus souvent un sous-espace) d'un espace de Hilbert, on utilise la notation v_U pour désigner l'élément de U minimisant la distance, appelé **projection orthogonale** de v sur U.

Pour justifier le terme 'projection orthogonale' utilisé, nous allons montrer que $v - v_U$ est orthogonal à U, c'est à dire orthogonal à tout élément $u \in U$, et ce $\forall\ v \in V$ et pour tout sous-espace fermé U.

Démonstration. Pour tout scalaire λ on a $\|v - v_U\|^2 \leq \|v - (v_U + \lambda u)\|^2$, comme $v_u + \lambda u$ est un élément de U avec une distance par rapport à v supérieure ou égale à celle par rapport à v_U. Donc pour tout réel $t > 0$, on choisit $\lambda = -t\overline{\langle v - v_U, u\rangle}$:

$$\|v-v_U\|^2 \leq \langle v - v_U + \lambda u, v - v_U + \lambda u\rangle = \|v-v_U\|^2+|\lambda|^2\|u\|^2+2Re(\lambda \langle v - v_U, u\rangle).$$

En remplaçant λ par la valeur choisie, on obtient :

$$\|v - v_U\|^2 \leq \|v - v_U\|^2 + t^2|\langle v - v_U, u\rangle|^2\|u\|^2 - 2t\|\langle v - v_u, u\rangle\|^2 \implies$$

$$2t\|\langle v - v_u, u\rangle\|^2 \leq t^2|\langle v - v_U, u\rangle|^2\|u\|^2$$

pour tout réel $t > 0$. Donc $\langle v - v_U, u\rangle = 0$, ce qui compléte la preuve. □

La projection orthogonale fournit une décomposition de v en somme de sa "composante en U" de sa "non composante" en U, avec $v = v_U + (v - v_U)$, avec $v_U \in U$ et $v - v_U$ orthogonal à U. Pour montrer que cette décomposition est unique, compositions tel que $v = j_1 + k_1 = j_2 + k_2$, avec $j_1, j_2 \in U$ et k_1, k_2 orthogonal à U. On a $j_1 - j_2 = k_2 - k_1 = l$, avec $j_1 - j_2 \in U$, et $k_2 - k_1$ orthogonal à U. Par calcul, on obtient que $\langle l, l\rangle = 0$ d'où $j_1 = j_2$ et $k_1 = k_2$.

Définition 7. (Complémentaires orthogonaux d'un ensemble) Pour un sous-ensemble U d'un epace euclidien V, on note $U^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à U, que l'on appelle **complémentaire orthogonal** de U.

Par la continuité du produit scalaire, nous avons que $U^\perp$ est un sous-espace fermé de V et que $U^\perp = \overline{U}^\perp$, où ici la barre désigne une fermeture métrique. Il est facile de vérifier que $U \subset (U^\perp)^\perp$, et donc $\overline{U} \subset (\overline{U^\perp})^\perp = (U^\perp)^\perp$. Nous avons également que $\overline{U}$ est en effet un sous-espace fermé de V lorsque U est un sous-espace. Nous allons à présent prouver l'inclusion inverse $(U^\perp)^\perp \supset \overline{U}$ lorsque U est un sous-espace de V :

Démonstration. Supposons que $v \in (U^\perp)^\perp$. Nous avons que $v_{\overline{U}} \in \overline{U} \subset (U^\perp)^\perp$, donc $v - v_{\overline{U}} \in (U^\perp)^\perp$. Comme démontré précédemment, puisque $\overline{U}$ est un sous-espace fermé, nous avons que $v - v_{\overline{U}} \in \overline{U}^\perp = U^\perp$. Puisque $v - v_{\overline{U}}$ appartient à la fois à $U^\perp$ et à son complémentaire orthogonal $(U^\perp)^\perp$, nous avons que $v - v_{\overline{U}} = 0$, impliquant que $v_{\overline{U}} = v$ et que v appartenait à $\overline{U}$. $\square$

Avec le paragraphe précédent, nous avons $(U^\perp)^\perp = \overline{U}$ lorsque U est un sous-espace de V.

Ces propriétés impliquent qu'un sous-espace d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son complémentaire orthogonal est $\{0\}$. Une preuve du théorème de représentation de Riesz n'est pas loin, mais d'abord nous prendrons un moment pour introduire quelques idées liées au théorème.

3.3 Dualié et théoreme de représentation de Riesz

Définition 8. (Formes) Une fonction d'un espace vectoriel vers son corps de base est appelée une **formen** Une forme linéaire ϕ sur un espace vectoriel normé V est dite bornée s'il existe un réel M tel que $\|\phi(v)\| \leq M\|v\|$ pour tout $v \in V$. Ceci est équivalent à ϕ étant continue.

Définition 9. (l'opérateur de norme) Pour un opérateur linéaire borné, nous utilisons $\|\phi\|$ pour désigner l'infimum de toutes ces valeurs M, appelé la **norme d'opérateur** de ϕ. Notez que $\|\phi\|$ est également le supremum de $\frac{|\phi(v)|}{\|v\|}$ pour les vecteurs non nuls $v \in V$ et le supremum de $|\phi(v)|$ pour les vecteurs de longueur unitaire $v \in V$.

Définition 10. (L'Espace dual et l'espace dual continu) Pour un espace vectoriel V, nous utilisons V' pour désigner l'espace vectoriel des formes linéaires de V, avec l'addition et la multiplication par un scalaire définie, appelé **espace dual** de V. L'**espace dual continu** de V est l'espace des formes linéaires continues sur V.

Théorème 6. *L'espace dual continu V' muni de norme d'opérateur est un espace vectoriel normé.*

Démonstration.
— La positivité découle de la définition de la norme d'opératoire et du fait que la forme nulle a une norme de 0.

— L'homogénéité découle de l'équation $|\lambda\phi(v)| = |\lambda||\phi(v)|$ appliquée aux vecteurs unitaires de V, et du fait que $\sup(|\lambda|S) = |\lambda|\sup(S)$ pour tous les ensembles de réels S.

— L'inégalité triangulaire découle en considérant deux formes linéaires ϕ_1 et ϕ_2 restreintes aux vecteurs unitaires, et du fait que le supremum de la somme de deux fonctions est inférieur ou égal aux suprema des deux fonctions ajoutées ensemble.

□

Lorsque V est de dimension finie, V' est isomorphe à V. En effet, considérons une base $\{e_i\}$ de V et une base duale correspondante de formes linéaires $\{e'_i\}$, chacune envoyant son e_i correspondant à 1 et tous les autres vecteurs de base à 0. Considérons la fonction linéaire inversible qui envoie chaque e_i à son e'_i correspondant. Sous cet isomorphisme d'espace vectoriel, une forme linéaire ϕ sur V est identifiée au vecteur $\overline{\phi'} = \sum \phi_i e_i$, où ϕ_i est $\phi(e_i)$, ou la composante e'_i de ϕ dans la base duale. Mais pour l'isomorphisme standard entre V et V', nous choisirons en fait de sacrifier la linéarité (ce qui rend le nom 'isomorphisme' un abus de terminologie) et de définir le vecteur dual de ϕ $\phi' = \sum \overline{\phi_i} e_i$. Ce choix signifie que l'isomorphisme standard envoyant ϕ à ϕ' n'est pas linéaire, mais linéaire conjugué. La raison en est une convention dont la commodité deviendra claire sous peu.

Prenons maintenant $V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, et $\{e_i\}$ comme étant la base standard de V. Avec le produit scalaire canonique, nous avons $\phi(v) = \langle \phi', v \rangle$. Cela peut être vu en distribuant ce produit scalaire dans une somme de produits scalaires de vecteurs de base : $\langle \sum \phi_i e_i, \sum v_j e_j \rangle = \sum\sum \phi_i v_j \langle e_i, e_j \rangle$. Notant que $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ quand $i = j$ et 0 quand $i \neq j$, nous retrouvons $\langle \phi', v \rangle = \sum \phi_i v_i = \sum v_i \phi(e_i) = \phi(v)$.

L'inégalité/égalité de Cauchy-Schwarz implique que $\|\phi\| = \|\phi'\|$, montrant que l'isomorphisme est non seulement une application linéaire conjuguée, mais aussi une isométrie entre V et V'.

Les seules propriétés de la base standard que nous avons utilisées sont que deux vecteurs de base standard distincts sont orthogonaux, et que chaque vecteur de la base a une norme de un. Un tel ensemble de vecteurs est appelé orthonormé, et en effet la correspondance forme linéaire/produit scalaire tient par rapport à toute base orthonormée d'un espace de produit scalaire de dimension finie.

En général, les espaces vectoriels de dimension infinie ne sont pas isométriquement isomorphes à leurs propres espaces duaux continus. Mais les espaces de Hilbert le sont : la correspondance fonctionnelle linéaire/produit scalaire tient pour toutes les fonrmes linéaires continues sur un espace de Hilbert, grâce à...

Théorème 7. *(Théoreme de Représentation de Riesz) Pour une forme linéaire continue ϕ sur un espace de Hilbert V, il existe un unique $u \in V$ tel que $\phi(v) = \langle u, v\rangle$ pour tous $v \in V$. De plus, $\|u\| = \|\phi\|$.*

Démonstration. (Théorème de représentation de Riesz) Si ϕ est la forme nulle, prenez $u = 0$. Supposons donc que ϕ soit non nulle. Par continuité, nous avons que le noyau de ϕ est un sous-espace fermé de V. Comme précédemment montré, un sous-espace d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son complémentaire orthogonal est trivial. Puisque le noyau de ϕ est fermé et n'est pas tout V, il doit exister un certain $w \in V$ orthogonal à tout le noyau de ϕ. En normalisant, nous pouvons supposer que $\|w\| = 1$. Choisissons $u = \overline{\phi(w)}w$.

Puisque w est de longueur unitaire, nous avons $\|u\| = |\phi(w)|$ et $\phi(u) = |\phi(w)|^2 = \|u\|^2$. Pour tout $v \in V$, nous avons $\langle u, v\rangle = \langle u, v - \frac{\phi(v)}{\|u\|^2}u\rangle + \langle u, \frac{\phi(v)}{\|u\|^2}u\rangle$. Puisque ϕ appliqué à $v - \frac{\phi(v)}{\|u\|^2}u$ est égal à zéro, et puisque u est orthogonal à tout vecteur dans le noyau de ϕ, nous avons :

$$\langle u, v\rangle = 0 + \langle u, \frac{\phi(v)}{\|u\|^2}u\rangle = \phi(v).$$

Pour prouver l'unicité, considérons deux tels vecteurs u et u' :

$$\langle u - u', u - u'\rangle = \langle u, u - u'\rangle - \langle u', u - u'\rangle = \phi(u - u') - \phi(u - u') = 0,$$

prouvant que $u = u'$.

L'inégalité/égalité de Cauchy-Schwarz garantit que $\|\phi\| = \|u\|$. □

Le théorème de représentation de Riesz dans sa forme actuelle est un résultat d'existence qui semble tomber du ciel : pourquoi le complémentaire orthogonal du noyau de ϕ devrait-il être exactement unidimensionnel ? Il n'y a aucune mention de bases orthonormées comme il y en avait dans le cas de dimension finie, et il n'y a aucune suggestion quant à la façon de construire w aux fins de la preuve. La section suivante nous permettra de mieux appréhender concrètement le théorème de représentation de Riesz.

3.4 Bases et théoreme de représentation de Riesz

Avant de commencer à parler des bases dans les espaces vectoriels de dimension infinie, nous devons d'abord affirmer leur existence. L'existence d'une base pour un espace vectoriel en général repose sur une forme de l'axiome du choix connue sous le nom de lemme de Zorn.

Définition 11. (Ensembles partiellement ordonnés) Nous disons qu'un ensemble S avec une relation $\leq$, qui tient pour un sous-ensemble de paires ordonnées d'éléments de S, est partiellement ordonné si $\leq$ est :

- Réflexive : pour tout $a \in S$, $a \leq a$.
- Antisymétrique : si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
- Transitive : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

Définition 12. (Autre définitions) Si $a \leq b$, nous disons que a précède b. Une chaîne est un sous-ensemble C des éléments de S tel que pour deux éléments a, b de C, soit $a \leq b$, soit $b \leq a$. Nous pouvons imaginer C comme une sorte de séquence, dont les membres "augmentent" en ordre tel que les premiers termes précèdent les termes ultérieurs. Une borne supérieure d'un sous-ensemble Q d'un ensemble partiellement ordonné S est un élément $u \in S$ tel que $q \leq u$ pour tout $q \in Q$. Si un des membres de Q précède tous les autres éléments de Q, nous disons qu'il s'agit d'un élément maximal de Q.

Lemme 1. *(Lemme de Zorn) Si S est un ensemble partiellement ordonné tel que chaque chaîne dans S contient une borne supérieure dans S, alors S contient au moins un élément maximal.*

Il n'y a pas de preuve du lemme de Zorn utilisant les autres axiomes de la théorie des ensembles, et nous devons le prendre comme un axiome pour faire de l'analyse fonctionnelle intéressante. Nous allons maintenant prouver l'existence d'une base pour chaque espace vectoriel en utilisant le lemme de Zorn. La définition d'une base que nous connaissons du cas de dimension finie (un ensemble de vecteurs linéairement indépendants tel que chaque vecteur est une combinaison linéaire finie de ces vecteurs) est appelée une base algébrique ou base de Hamel.

Théorème 8. *Tout espace vectoriel est muni d'une base de Hamel.*

Démonstration. Pour un espace vectoriel V, considérons l'ensemble S des sous-ensembles linéairement indépendants de V. Si nous laissons $\leq$ correspondre à l'inclusion des ensembles, il est clair que S est un ensemble partiellement ordonné. Une chaîne d'éléments de S est donc une séquence croissante de sous-ensembles linéairement indépendants imbriqués de V. Pour toute chaîne C, nous avons que l'union des éléments de C, notée u, sera également un sous-ensemble linéairement indépendant de V. Cela est dû au fait que toute dépendance linéaire au sein de u serait composée d'un nombre fini de vecteurs, qui devraient tous être contenus dans une queue de C, ce qui poserait une contradiction. Donc u est un membre de S et une borne supérieure de C, puisque tous les membres de C sont des sous-ensembles de u. Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de Zorn pour obtenir un élément maximal H de S, un sous-ensemble linéairement indépendant de V qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble linéairement indépendant de V. Puisque nous ne pouvons pas ajouter un autre vecteur à H sans créer une dépendance linéaire, nous avons que chaque vecteur de V est une combinaison linéaire finie d'éléments de H. Donc H est une base de Hamel. $\square$

Lorsque V est un espace de Hilbert, nous aimerions pouvoir exécuter exactement le même argument avec la condition supplémentaire que nos sous-ensembles de V composant S soient non seulement linéairement indépendants mais aussi orthonormés. Un élément maximal M de S dans ce cas peut ne pas avoir de vecteurs qui englobent tout V, cependant : considérons l'espace de Hilbert ℓ^2 des suites de scalaires sommables au carré $\{a_i : \sum |a_i|^2 < \infty\}$ avec le produit scalaire $\langle a_i, b_i \rangle = \sum \overline{a_i} b_i$. L'ensemble orthonormé des vecteurs avec un 1 dans une entrée et 0 dans toutes les autres est maximal dans S, mais il ne couvre pas tout l'espace (considérez $a_i = \frac{1}{2^i}$).

Cependant, nous savons qu'aucun vecteur n'est orthogonal à tous les éléments de M (sinon nous pourrions normaliser un tel vecteur et l'ajouter à M, rendant M non maximal). Nous avons également qu'un sous-espace d'un espace de Hilbert dont le complément orthogonal est trivial doit être dense. Ainsi, la fermeture métrique de l'enveloppe des vecteurs de M sera tout V. Nous appelons un tel ensemble M une base orthonormée de V, et nous avons $V = \overline{\text{span}(M)}$. L'avantage d'utiliser une base orthonormée au lieu d'une base de Hamel est que nous pouvons construire des bases orthonormées et que nous pouvons utiliser toute la machinerie que nous avons développée au cours des sections précédentes. L'inconvénient est qu'au lieu de travailler avec des combinaisons linéaires finies, nous devons traiter des séquences approximatives de combinaisons linéaires finies. Heureusement, dans un espace de Hilbert, il existe une correspondance bien définie entre ces séquences et des "combinaisons linéaires infinies" formelles, que nous allons maintenant développer.

La première question technique que nous devons aborder est celle de la définition d'une somme infinie de manière à ne pas dépendre de l'ordre des termes. Cela signifie que toutes les séquences possibles de sommes partielles (c'est-à-dire toutes les séquences de sous-ensembles finis imbriqués) doivent toujours converger vers la même valeur.

Définition 13 ("Sommes non-ordonée")**.** Pour un espace de Banach V, nous disons que la somme non ordonnée d'un ensemble de vecteurs $v_\Psi \subset V$ (où v_Ψ est un ensemble de vecteurs de V indexé par un ensemble Ψ) est L si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini Ω de Ψ tel que $\|L - \sum_{k \in \Omega'} v_k\| < \epsilon$ pour tous les sous-ensembles finis Ω' de Ψ contenant Ω.

Notez que lorsque v_Ψ sont des nombres réels positifs, nous avons $\sum_{k \in \Psi} v_k =$

$\sup(\sum_{k\in\Omega} v_k)$ pour les sous-ensembles finis Ω de Ψ. Nous disons qu'un ensemble de vecteurs converge s'ils ont une telle somme non ordonnée.

Deux questions naturelles à poser sont de savoir si un ensemble de vecteurs avec des normes convergentes a une somme non ordonnée, et si tout ensemble convergent de vecteurs a des normes avec une somme non ordonnée. La réponse à la première question est oui, et la réponse à la seconde est non. Il se trouve que les conditions de la première affirmation sont en fait un peu plus fortes que nécessaire, et celles de la seconde trop faibles. Une preuve de la première affirmation dans un espace de Banach reposera sur l'inégalité triangulaire, mais pour quantifier réellement la taille des sommes de vecteurs, nous devrons considérer le problème dans un espace de Hilbert, où des égalités remarquablement agréables se présenteront.

Théorème 9. *Un ensemble convergent de vecteurs orthogonaux a une somme convergente de normes au carré*

Démonstration. Pour un ensemble fini de vecteurs orthogonaux v_Ω dans un espace de Hilbert V, nous avons $\|\sum_{k\in\Omega} v_k\|^2 = \sum_{k\in\Omega}\|v_k\|^2$ par le théorème de Pythagore. Supposons donc que nous ayons une somme de vecteurs mutuellement orthogonaux $\sum_{k\in\Psi} v_k$ qui est convergente, avec une limite L. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $\Omega \subset \Psi$ tel que pour tous les sous-ensembles finis $\Omega' \supset \Omega$, nous avons :

$$\|L - \sum_{k\in\Omega'} v_k\| < \epsilon \Rightarrow \|L\| - \epsilon < \|\sum_{k\in\Omega'} v_k\| <$$
$$\|L\| + \epsilon \Rightarrow \|L\| - \epsilon < \sqrt{\sum_{k\in\Omega'}\|v_k\|^2} < \|L\| + \epsilon,$$

avec la première implication découlant de l'inégalité triangulaire inverse et la seconde implication découlant du théorème de Pythagore. Cela signifie que la somme non ordonnée de $\sum_{k\in\Psi}\|v_k\|^2 est \|L\|^2$, et donc $\sum_{k\in\Psi}\|v_k\|^2 = \|\sum_{k\in\Psi} v_k\|^2$.

□

Ce "théorème de Pythagore infini" n'est pas tout à fait aussi fort que nous l'aurions souhaité. Nous avons seulement que les normes au carré d'un ensemble de vecteurs - et non les normes - convergent lorsque les vecteurs ont une somme non ordonnée. Considérez la série harmonique, qui a une somme divergente de termes mais une somme convergente de termes au carré.

Mais cela suggère que nous pourrions être capables de relâcher les conditions sur l'énoncé inverse : est-il vrai que tout ensemble orthogonal de vecteurs avec une somme convergente de normes au carré convergera, même si la somme de leurs normes ne le fait pas ?

Théorème 10. *Un ensemble orthogonal de vecteurs avec une somme convergente de normes au carré est convergent*

Démonstration. Supposons que v_Ψ est un ensemble de vecteurs orthogonaux tel que $\sum_{k\in\Psi} \|v_k\|^2 < \infty$. Pour chaque entier m, il existe un sous-ensemble fini $\Omega_m \in \Psi$ tel que pour tous les sous-ensembles finis $\Omega' \supset \Omega_m$, nous avons $\sum_{k\in\Omega'\setminus\Omega_m} \|v_k\|^2 < \frac{1}{m^2}$. Nous pouvons choisir les Ω_m de telle sorte qu'ils forment une séquence imbriquée croissante en m. Pour chaque m, soit $g_m = \sum_{k\in\Omega_m} v_k$. Nous avons pour $n > m$ que $\|g_n - g_m\|^2 = \sum_{k\in\Omega_n\setminus\Omega_m} \|v_k\|^2 < \frac{1}{m^2}$ par le théorème de Pythagore, donc la séquence des g_i est de Cauchy avec une certaine limite $g \in V$. En prenant une limite lorsque n tend vers l'infini, nous avons également $\|g - g_m\| \leq \frac{1}{m}$.

Nous allons maintenant montrer que g est la somme non ordonnée des v_k. Pour tout $\epsilon > 0$, choisissons m tel que $\frac{2}{m} < \epsilon$ et soit Ω_m notre ensemble fini. Pour tous les Ω' finis contenant Ω_m, nous avons

$$\|g - \sum_{k\in\Omega'} v_k\| \leq \|g - g_m\| + \|g_m - \sum_{k\in\Omega'} v_k\| \leq \frac{1}{m} + \|\sum_{k\in\Omega'\setminus\Omega_m} v_k\| < \frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m^2}} < \epsilon,$$

par hypothèse sur Ω_m et le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs $\{v_k \in \Omega' \setminus \Omega_m\}$. □

Cela répond à notre question par l'affirmative : un ensemble de vecteurs avec des normes sommables au carré convergera même si leurs normes ne le sont pas (considérez un ensemble orthogonal dénombrable de vecteurs avec des normes $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$). Une preuve qu'un ensemble de vecteurs dans un espace de Banach avec des normes sommables est convergent est essentiellement la même que cette preuve.

En résumé, nous avons qu'un ensemble orthogonal de vecteurs dans un espace de Hilbert est convergent si et seulement si la somme de leurs normes au carré est convergente. Maintenant que nous avons une notion bien définie de "combinaisons linéaires infinies", nous allons montrer que chaque vecteur dans un espace de Hilbert est une combinaison linéaire infinie de vecteurs de base orthonormés. Tout d'abord, nous aurons besoin d'un autre lemme :

Théorème 11. *(Inégalité de Bessel) Si e_Ψ est un ensemble orthonormé, alors pour tout $v \in V$, $\sum_{k\in\Psi} |\langle e_k, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2$.*

Démonstration. Pour tous les sous-ensembles finis Ω de Ψ, nous avons $v = (\sum_{k\in\Omega}\langle e_k, v\rangle e_k) + (v - \sum_{k\in\Omega}\langle e_k, v\rangle e_k)$. Puisque nous avons supposé les e_k orthonormés, nous avons que les deux termes entre parenthèses ci-dessus sont orthogonaux. En appliquant le théorème de Pythagore, nous avons

$$\|v\|^2 = \|\sum_{k\in\Omega}\langle e_k, v\rangle e_k\|^2 + \|v - \sum_{k\in\Omega}\langle e_k, v\rangle e_k\|^2 \geq \|\sum_{k\in\Omega}\langle e_k, v\rangle e_k\|^2 = \sum_{k\in\Omega}|\langle e_k, v\rangle|^2.$$

Puisque cette inégalité tient pour tous les sous-ensembles finis Ω, l'inégalité désirée découle de la définition d'une somme non ordonnée. □

Nous sommes maintenant prêts à prouver que la fermeture de l'enveloppe d'un ensemble orthonormé est exactement les vecteurs qui sont des "combinaisons linéaires infinies" de l'ensemble orthonormé :

Théorème 12. *Soit e_Ψ un ensemble orthonormé de vecteurs dans un espace de Hilbert V. Alors span$(e_\Psi) = \sum_{k\in\Psi}\alpha_k e_k$ pour α_k tels que $\sum_{k\in\Psi}|\alpha_k|^2 < \infty$.*

Démonstration. Supposons que nous ayons un tel ensemble de α_k. Pour tout $\epsilon > 0$, soit Ω un sous-ensemble fini de Ψ tel que $\sum_{k\in\Psi\setminus\Omega}|\alpha_k|^2 < \epsilon^2$. Puisque $\|\sum_{k\in\Psi} v_k\|^2 = \sum_{k\in\Psi}\|v_k\|^2$ pour tout ensemble orthogonal de v_k, nous avons :

$$\|\sum_{k\in\Psi}\alpha_k e_k - \sum_{k\in\Omega}\alpha_k e_k\| = \|\sum_{k\in\Psi\setminus\Omega}\alpha_k e_k\| = \sqrt{\sum_{k\in\Psi\setminus\Omega}|\alpha_k|^2} < \epsilon.$$

Ainsi, il existe un vecteur $\sum_{k\in\Omega}\alpha_k e_k$ dans l'enveloppe des e_k avec une distance inférieure à ϵ de $\sum_{k\in\Psi}\alpha_k e_k$.

Pour prouver le sens inverse, soit $v \in \overline{\text{span}(e_\Psi)}$, et soit $u = \sum_{k\in\Psi}\langle e_k, v\rangle e_k$. La somme à droite converge par l'inégalité de Bessel, donc nous savons que u est bien défini. Comme précédemment montré, cette convergence implique que $u \in \overline{\text{span}(e_\Psi)}$, et donc $u - v \in \overline{\text{span}(e_\Psi)}$. De plus, la continuité du produit scalaire implique que $\langle u, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle$ pour chaque e_j.

Comme $\langle u-v, e_j\rangle = 0$ pour tous les e_j, nous avons que $u-v \in (\text{span}(e_\Psi))^\perp = \overline{\text{span}(e_\Psi)}^\perp$. Puisque $u - v$ est à la fois dans $\overline{\text{span}(e_\Psi)}$ et son complémentaire orthogonal $\overline{\text{span}(e_\Psi)}^\perp$, nous avons que $u = v$, prouvant ainsi que v prend bien la forme $\sum_{k\in\Psi}\alpha_k e_k$, avec $\sum_{k\in\Psi}|\alpha_k|^2 < \infty$. En effet, $v = \sum_{k\in\Psi}\langle e_k, v\rangle e_k$. □

Cette correspondance signifie que nous pouvons identifier tout élément d'un espace de Hilbert avec un ensemble de scalaires sommables au carré indexé par une base orthonormée (dont la fermeture de l'enveloppe égale tout l'espace). Maintenant que nous avons cette classification des vecteurs d'un espace de Hilbert en termes de leurs produits scalaires avec une base orthonormée, nous pouvons revisiter le théorème de représentation de Riesz avec une preuve légèrement plus constructive.

Théorème 13. *(Encore le théorème de représentation de Riesz) Si ϕ est une forme linéaire bornée sur un espace de Hilbert V, alors le vecteur $u = \sum_{k\in\Psi} \overline{\phi(e_k)} e_k$ a la propriété que $\phi(v) = \langle u, v\rangle$ pour tous les $v \in V$ et toute base orthonormée $\{e_\Psi\}$ de V. De plus, $\|\phi\| = \|u\| = \sqrt{\sum_{k\in\Psi} |\phi(e_k)|^2}$.*

Démonstration. Tout d'abord, vérifions que la somme définissant u converge. Pour tous les sous-ensembles finis Ω de Ψ, nous avons :

$$\sum_{k\in\Omega} |\phi(e_k)|^2 = \phi(\sum_{k\in\Omega} \overline{\phi(e_k)} e_k) \leq \|\phi\| \| \sum_{k\in\Omega} \overline{\phi(e_k)} e_k\| = \|\phi\| \sqrt{\sum_{k\in\Omega} |\phi(e_k)|^2},$$

par la bornitude de ϕ et le théorème de Pythagore. En divisant par $\sqrt{\sum_{k\in\Omega} |\phi(e_k)|^2}$, nous avons $\sqrt{\sum_{k\in\Omega} |\phi(e_k)|^2} \leq \|\phi\|$ et $\sum_{k\in\Omega} |\phi(e_k)|^2 \leq \|\phi\|^2$ pour tous les sous-ensembles finis Ω de Ψ. Cela signifie que les coefficients au carré des e_k convergent, et que la somme définissant u converge.

La continuité du produit scalaire implique que $\langle u, e_k\rangle = \phi(e_k)$ pour tous les e_k. Ainsi, pour tout $v \in V$, on a :

$$\phi(v) = \phi(\sum_{k\in\Psi} \langle e_k, v\rangle\, e_k) = \sum_{k\in\Psi} \langle e_k, v\rangle\, \phi(e_k) = \sum_{k\in\Psi} \langle e_k, v\rangle\, \langle u, e_k\rangle$$

par continuité de ϕ. Finalement :

$$\sum_{k\in\Psi} \langle e_k, v\rangle\, \langle u, e_k\rangle = \left\langle u, \sum_{k\in\Psi} \langle e_k, v\rangle\, e_k \right\rangle = \langle u, v\rangle$$

par continuité du produit scalaire. Donc $\phi(v) = \langle u, v\rangle$. La preuve précedente du théorème de représentation de Riesz comfirme le fait que u soit unique et que $\|\phi\| = \|u\| = \sqrt{\sum_{k\in\Psi} |\phi(e_k)^2|}$.

□

3.5 Théorème de Radon-Nikodym

> Note : Cette section recquiert quelques éléments de théorie de la mesure, dont nous admettrons qu'elles sont connues par le lecteur.

Théorème 14. *(Théoreme de Radon-Nikodym) Si μ et ν sont deux mesures σ-finies définies sur la même σ-algebre d'un espace mesurable X telles que $\nu(A) = 0$ pour tous les ensembles mesurables μ-nuls $A \subset X$, alors il existe une fonction mesurable h sur X telle que $\nu(A) = \int_A h d\mu$ pour tous les ensembles mesurables $A \subset X$.*

Une preuve découlant de la théorie de la mesure du théoreme de Radon-Nikodym serait d'approcher une fonction h en utilisant des fonctions ayant la propriété que $\int_A h d\mu \leq \nu(A)$ four tout ensemble mesurable $A \subset X$. La preuve qui suit, découlant de l'analyse fonctionnelle, debute avec l'existence d'une d'une fonction ayant les même propriétés que ce h désiré, et le travail consiste à construire h à partir de cette fonction. La démonstration est résolument plus algébrique que son homologue en théorie de la mesure, et elle repose sur le travail analytique effectué dans les sections précédentes pour prouver le théorème de représentation de Riesz.

Nous allons démontrer le résultat pour les mesures finies positives μ et ν. Le théorème de convergence monotone et le théorème de décomposition de Hahn (admis) permet d'étendre aux mesure complexes σ-finies ν et mesures σ-finies positives μ

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{L}^p(X) \subset \mathcal{L}(X)^q$ dans un espace mesurable X pour $q < p$, et que $\|f\|_q$ est bornée pas un multiple de $\|f\|_p$ dépendant de p, q, et de la mesure de l'espacce. Nous allons utiluiser le fait que $\|f\|_1 \leq \sqrt{\nu(X)}\|f\|_2$ pour un espace de mesure finie X.

Considérons la mesure $\sigma = \nu + \mu$. Nous définissons une forme linéaire sur $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$:

$$\phi(f) = \int_X f \, d\nu.$$

Puisque ν est dominée par σ, nous savons que toute fonction dans l'espace $\mathcal{L}^2$ de X par rapport à σ sera dans son espace L^2 par rapport à ν, et donc ϕ (qui est dominée par la norme $\mathcal{L}^1$ par rapport à ν) est bien définie, linéaire et bornée par l'inégalité ci-dessus. Nous appliquons donc le théorème de représentation de Riesz à ϕ pour obtenir un élément g de $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$ avec la propriété que

$$\phi(f) = \int_X f \, d\nu = \int_X f g \, d\sigma$$

pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{L}^2(X, \sigma)$.

En prenant f comme la fonction indicatrice de l'ensemble où g prend des valeurs supérieures ou égales à 1, les deux côtés de cette équation doivent être égaux à 0. Il en est de même lorsque f est la fonction indicatrice de l'ensemble où g prend des valeurs inférieures à 0. Donc $0 \leq g < 1$ μ-presque partout. Étant donné que les ensembles nuls pour μ sont nécessairement aussi nuls pour ν, nous avons également que $0 \leq g < 1$ ν-presque partout.

En remplaçant $f = \frac{1}{1-g}$ dans cette équation ci-dessus, nous obtenons l'égalité souhaitée : intégrer la fonction constante 1 sur un domaine par rapport à ν (c'est-à-dire, en prenant la mesure ν du domaine) serait égal à intégrer la fonction $\frac{g}{1-g}$ (qui serait notre h désirée) dans ce domaine par rapport à μ. Mais $\frac{1}{1-g}$ peut ne pas être dans $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$. Donc, nous devons utiliser cette équation pour obtenir une suite d'égalités, chacune utilisant une fonction d'approximation dans $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$, et appliquer le théoreme de convergence monotone. Ces fonctions d'approximations peuvent ne pas converger au sens de $\mathcal{L}^2$, mais nous en avons pas besoin pour construire h.

Soit $f_k = \frac{1}{1-g}$ lorsque $0 < \frac{1}{1-g} < k$ et 0 sinon. Cette fonction est bornée et donc appartient à $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$, donc

$$\int_A f_k(1-g)\, d\nu = \int_A f_k g\, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset X$.

En prenant la limite lorsque k tend vers l'infini et en utilisant la convergence monotone (rappelons que f_k, g et $1-g$ sont tous non négatifs ν- et μ-presque partout), nous avons que

$$\int_A 1\, d\nu = \int_A \frac{g}{1-g}\, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset X$. Donc $\frac{g}{1-g}$ est en effet notre h recherché, et

$$\nu(A) = \int_A h\, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset X$.

$\square$

Chapitre 4

Conclusion

Ce stage m'a donné l'opportunité d'appronfondir mes connaissances en mathématiques, notamment en analyse fonctionnelle avec la découverte des theoremes de repésentation de Riesz et de Radon-Nikodym, qui trouvent des applications dans de nomlbreux domaines tels que la probabilité, le traitement de signal, la finance quanntitative ou la theorie de l'information.

Ce stage m'a également introduit au domaine de la recherche mathématique, me permettant de travailler de façon autonome en faisant un certain effort de recherche et de comprehension individuelle, améliorant ma capacité à être autonome.

Cela dit, malgré cette belle expérience, je n'envisage pas de continuité dans la lancée de chercheur prefere pursuivre vers une voie plus mathématique appliquée à l'informatique, plus particulierement dans le domaine de la science des données.

Bibliographie

[1] Ben Adler, *HILBERT SPACES AND THE RIESZ REPRESENTATION THEOREM*,

[2] François DE MARÇAY, *Espaces de Hilbert*

[3] Jimmy Lamboley, *Cours d'analyse pour l'Agrégation Externe de Mathématiques*, 2022-2023