Rapport de Stage

Licence Informatique
Parcours Double Licence Informatique et Mathématiques

Stage de Recherche au Laboratoire LAGA

Du 03 Juin 2024 au 03 Juillet 2024

Présenté par : Mamadou Moustapha KAMARA

Stage de fin de licence réalisé au sein de le laboratoire LAGA
Sous la responsabilité de :

- M. Charles Declercq, « tuteur de stage »
- M. Pierre Rousselin, « Responsable de formation »

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers M. Declercq, mon tuteur de stage, pour son soutien inestimable tout au long de mes recherches. Ses conseils et sa disponibilité ont été précieux et m'ont grandement aidé dans la rédaction de mon mémoire.

Un grand merci également à M. Rousselin, mon responsable de formation et ancien professeur. Son encadrement et sa disponibilité ont grandement contribué à l'enrichissement de mes connaissances.

Je tiens également à remercier mes camarades de promotion et mes anciens professeurs pour leur aide et leur soutien permanent

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Étudiant en troisième année de Licence informatique parcours Double Licence Mathématiques et Informatique, mon parcours académique est le résultat d'une formation riche et diversifiée, conçue pour allier les domaines des mathématiques et de l'informatique. En mathématiques, j'ai exploré des cours tels que la théorie des probabilités et les statistiques, la théorie de la mesure. Dans le domaine informatique, j'ai consolidé mes compétences en programmation orientée objet, notamment à travers un projet en Java. Des modules consacrés à la programmation en langage C et aux concepts de réseau, matérialisés par un projet client-serveur, m'ont fourni une base solide dans le développement logiciel et les communications réseau. Ces expériences pratiques ont renforcé ma compréhension de la programmation sous ses différentes facettes.
Au-delà des compétences techniques, j'ai su développer tout au long de mon cursus une grande capacité d'adaptation. Elle m'a été d'une aide précieuse lors de travaux collaboratifs. Ma capacité d'organisation s'est également affinée au fil du temps. Mon objectif, sur le long terme, est d'exercer en tant que data scientist.
J'ai utilisé plusieures méthodes pour trouver un stage. Dans un premier temps, j'ai parcouru les offres disponibles sur les plateformes telles que LinkedIn et Indeed qui correspondaient le plus à mes compétences et mes aspirations. A cela s'ajoute le bouche-à-oreille de proche en proche où je demandais dans mon entourage des pistes d'entreprises à la recherche de stagiaires.
Des difficultés ont notamment été rencontrées au cours des recherches. D'une part, de nombreux refus résidaient dans l'aspect théorique et orientée recherche que propose la licence en mathématiques et informatique. Les recruteurs la percevaient comme plus orientée vers des enseignements théoriques, ne correspondant pas toujours aux attentes des entreprises. D'autre part, une grande majorité des offres de stage disponibles étaient destinée aux étudiants du niveau master pour des stages de fin d'études. De surcroit,

la durée des stages généralement proposés excédaient la période d'un mois. En fin de compte, grâce à mon responsable de formation, j'ai pu décrocher un stage de recherche mathématique dans le laboratoire LAGA de l'Université Sorbonne Paris Nord.

En m'engageant dans ce stage de recherche, mon désir était d'approfondir mes connaissances en mathématiques, notamment avec la découverte des espaces dits de Hilbert et ainsi que le théorème de représentation de Reisz, qui trouvent de nombreuses applications en Analyse fonctionnelle et théorie de la mesure, avec notamment le théorème de Radon-Nikodym. L'objectif sous-jacent du stage est donc de fournir une démonstration de ce théorème en prenant appui sur des éléments d'analyse fonctionnelle.

En somme, je vois en ce stage une opportunité pour moi de m'instruire, d'approfondir mes connaissances en mathématiques et de découvrir le domaine de la recherche.

Chapitre 2

Présentation du laboratoire LAGA

Le LAGA (Laboratoire d'analyse, géométrie et application) est le laboratoire de mathématiques rataché à l'Institut Galilée, composante de l'université Sorbonne Paris Nord. Associé au CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), il comprend environ 90 chercheurs et enseignants-chercheurs (dont une dizaine de chercheurs CNRS) plus de 50 doctorants et il reçoit chaque année plus de trente visiteurs étrangers et post-docs.

Les principaux thèmes de recherches développés actuellement au sein du laboratoire sont les suivants : Arithmétique, géométrie algébrique, théorie des nombres, théorie des catégories, topologie algébrique, théorie de l'homotopie, théorie des représentations, systèmes dynamiques, théorie ergodique, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, analyse microlocale, physique mathématique, théorie spectrale, analyse numérique, probabilités et statistiques, analyse stochastique, codage et cryptographie, traitement de l'image.

Le laboratoire a pour mission de fournir un encadrement solide aux doctorants issus des Masters du département de mathématiques de l'université Paris 13, ainsi que des autres Masters de mathématiques de la région parisienne, de province, et potentiellement de formations similaires à l'international.

Chapitre 3

Espaces de Hilbert, Théorème de représentation de Riesz et théorème de Radon-Nikodym

3.1 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des structures très importantes en Algèbre et en Analyse fonctionnelle, dont j'avais souvent entendu parler lors de mes cours en Algèbre 4 et 5. A travers cette étape, j'ai découvert cette struture définie à partir de notions topologiques et algébriques. Ces espaces donnent d'importants résultats, notamment d'isomorphismes entre des espaces et leur dual que l'on verra plus tard. Cette partie sera notre point de départ dans notre quête de démonstrations, d'une part du théorème de représentation de Riesz, mais aussi du théorème de Radon-Nikodym. Avant de donner la définition et quelques propriétés des espaces de Hilbert, procédons à certains rappels.

3.1.1 Rappels

Définition 1. (Produit Scalaire) Etant donné un espace vectoriel V, un produit scalaire sur V est une application f de $V \times V \to \mathbb{K}$ qui satisfait les propriétés ci-dessous :

1. Linéarité :
$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

2. Symétrie conjuguée : Pour tous vecteurs u, v $\in V$, on a

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

3. Définie positive : Pour tout $u \in V$

$$\langle u, u\rangle \geq 0$$

et

$$\langle u, u\rangle = 0 \text{ si et seulement si } u = 0$$

Définition 2. (Norme induite et Espace vectoriel normé) Pour un produit scalaire défini sur V, on définit une **norme** $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ respectant les propriétés suivantes :

— Positivité : $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$

— Homogénéité : $\forall v \in V$ et pour tout scalaire λ dans $\mathbb{K}$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$, où $|\lambda|$ représente la valeur absolue ou le module de λ si λ est réel ou complexe.

— Inégalité triangulaire : pour tous vecteurs $u, v \in V$, $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé Espace Vectoriel normé.

Nota Bene : La norme d'un espace vectoriel normé peut ne pas être issu d'un produit scalaire, tant que cette dernière respecte les propriétés énoncées ci-dessus.

On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'un espace préhilbertien (muni d'un produit scalaire) avec une norme induite par son produit scalaire est bel et bien un espace vectoriel normé. Pour cela, il pourra utiliser les résutats des théorèmes ci-après.

Théorème 1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous vecteurs u, v dans un espace préhilbertien E, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires (ou si l'un d'entre eux est nul).*

Théorème 2. *(Théorème de Pythagore pour les produits scalaires) Pour des vecteurs u, v sont orthogonaux, c'est à dire que $\langle u, v\rangle = 0$, nous avons $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Introduisons une dernière égalité qui nous sera utile qui nous sera probablement utile.

Théorème 3. *(Egalité du parallélogramme) Pour tous vecteurs u, $v \in V$, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$*

Démonstration.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle^2 =$$

$$\langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle + \langle u, -v\rangle + \langle -v, u\rangle + \langle v, v\rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

□

3.1.2 Définition et propriétés

Passons maintenant à la définition d'un espace de Hilbert.

Définition 3. (Espaces de Hilbert) Un espace vectoriel H est dit de **Hilbert** s'il est normé, complet, et que sa norme est issue d'un produit scalaire de H. En d'autres termes, H est de Hilbert s'il est de **Banach** (normé + complet) et qu'il existe un produit scalaire $\phi : H \times H \to \mathbb{R}$ tel que $\|h\| = \sqrt{\phi(h,h)}$.

Pour rappel, un espace vectoriel est dit complet si toute suite de Cauchy converge dans cet espace.

Exemple 1. $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$

Produit scalaire : Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Norme induite :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

L'espace $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. De plus, $\mathbb{R}^n$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}^n$. Donc $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est un espace de Hilbert.

Définition 4. (Ensembles convexe) Un sous-ensemble U de V est dit **convexe** si pour tous u, $v \in U$, $tu + (1-t)v \ \in U$ pour tout $t \ \in [0, 1]$.

Théorème 4. *(Théorème de projection de Hilbert) Soit V un espace de Hilbert et U un sous-ensemble de V fermé et convexe. Alors pour tout $x \in V$, il existe un unique élément $q \in U$ qui minimise la distance ci-dessus. En d'autres termes, il existe un unique $q \in U$ tel que $\|x - q\| = inf_{z \in U}\|x - z\|$. L'élément q est appelé projection orthogonale de x sur U.*

Ceci n'est pas toujours le cas pour tous les espaces de Banach. La preuve qui suit fera usage de l'égalité du parallélogramme.

Démonstration. Soient $q_1, q_2...$ une suite de vecteurs dans U dont les distances par rapport à x tendent vers l'infimum. Montrons que cette suite est de Cauchy. En appliquant l'inégalité du parallélogramme aux paires $(x - q_n)$ et $(x - q_m)$, on a :

$$\|q_n - q_m\|^2 = \|(x - q_m) - (x - q_n)\|^2 = 2\|x - q_m\|^2 + \|x - q_n\|^2 - \|2x - (q_m + q_n)\|^2$$

En factorisant par 2 à droite, on $\frac{q_m+q_n}{2}$ qui est aussi un élément de U par convexité, on obtient donc :

$$\|q_n - q_m\|^2 \leq 2\|x - q_m\|^2 + \|x - q_n\|^2 - 4(dist(x, U))^2$$

puisque $\|x - \frac{q_m - p_n}{2}\| \geq (dist(x, U))$.

Puisque $\|x - q_m\|$ et $\|x - q_n\|$ approchent tous deux $dist(x, U)$, la partie droite de l'inégalité ci-dessus est très petite en choisissant arbitrairement des nombre n et m assez grands, ce qui prouve que la suite des q_i est de Cauchy. La limite q des q_i est un élément de U puique U est un sous espace fermé donc complet. La continuité de la norme nous permet de conclure que $\|x - q\| = dist(x, U)$.

Pour montrer que q est unique, procédons par l'absurde en considérant deux tels vecteurs q et q'. On obtient comme démontré précédemment :

$$\|q - q'\|^2 \leq 2\|x - q\|^2 + \|x - q'\|^2 - 4(dist(x, U))^2 = 0$$

Ce qui implique que $q = q'$. □

Définition 5. (Projections orthogonales) Pour un vecteur v et un sous ensemble fermé convexe U (plus souvent un sous-espace) d'un espace de Hilbert, on utilise la notation v_U pour désigner l'élément de U minimisant la distance, appelé **projection orthogonale** de v sur U.

Pour justifier le terme 'projection orthogonale' utilisé, nous allons montrer que $v - v_U$ est orthogonal à U, c'est à dire orthogonal à tout élément $u \in U$, et ce $\forall\ v \in V$ et pour tout sous-espace fermé U.

Démonstration. Pour tout scalaire λ on a $\|v - v_U\|^2 \leq \|v - (v_U + \lambda u)\|^2$, comme $v_u + \lambda u$ est un élément de U avec une distance par rapport à v supérieure ou égale à celle par rapport à v_U. Donc pour tout réel $t > 0$, on choisit $\lambda = -t\overline{\langle v - v_U, u\rangle}$:

$$\|v-v_U\|^2 \leq \langle v - v_U + \lambda u, v - v_U + \lambda u\rangle = \|v-v_U\|^2+|\lambda|^2\|u\|^2+2Re(\lambda \langle v - v_U, u\rangle).$$

En remplaçant λ par la valeur choisie, on obtient :

$$\|v - v_U\|^2 \leq \|v - v_U\|^2 + t^2| \langle v - v_U, u\rangle |^2\|u\|^2 - 2t\| \langle v - v_u, u\rangle \|^2 \implies$$

$$2t\| \langle v - v_u, u\rangle \|^2 \leq t^2| \langle v - v_U, u\rangle |^2\|u\|^2$$

pour tout réel $t > 0$. Donc $\langle v - v_U, u\rangle = 0$, ce qui compléte la preuve. □

La projection orthogonale fournit une décomposition de v en somme de sa "composante en U" de sa "non composante" en U, avec $v = v_U + (v - v_U)$, avec $v_U \in U$ et $v - v_U$ orthogonal à U. Pour montrer que cette décomposition est unique, compositions tel que $v = j_1 + k_1 = j_2 + k_2$, avec $j_1, j_2 \in U$ et k_1, k_2 orthogonal à U. On a $j_1 - j_2 = k_2 - k_1 = l$, avec $j_1 - j_2 \in U$, et $k_2 - k_1$ orthogonal à U. Par calcul, on obtient que $\langle l, l \rangle = 0$ d'où $j_1 = j_2$ et $k_1 = k_2$.

Définition 6. (Complémentaires orthogonaux d'un ensemble) Pour un sous-ensemble U d'un espace euclidien V, on note $U^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à U, que l'on appelle **complémentaire orthogonal** de U.

3.2 Théorème de Représentation de Riesz

> Dans cette partie, nous allons introduire un théorème important en algèbre dénommé le théorème de représentation de Riesz. Ce theorème est important dans la mesure où elle nous permettra de représenter les éléments du dual d'un espace de Hilbert par un produit scalaire. Elle offre aussi un résultat d'isomorphie important entre un espace vectoriel et son dual.

Voici certaines définitions dont nous aurons besoin.

Définition 7. (Forme linéaire) Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire ϕ sur V est une application linéaire de V dans $\mathbb{K}$.

Définition 8. (L'Espace dual et l'espace dual continu) Soit V un espace vectoriel. On note V^* l'ensemble des formes linéaires de V, avec l'addition et la multiplication par un scalaire définie, que l'on appelle **espace dual** de V. L'**espace dual continu** de V représente quant à lui l'espace des formes linéaires continues sur V.

NB : L'espace dual V^* est bel et bien un espace vectoriel normé muni d'une $\|.\|$ définie par $\|\phi\| = sup\frac{|\phi(v)|}{\|v\|^2}$ pour tout v non nul. Cette norme est appelée norme d'opérateur.

Lorsque V est un evn de dimension finie, V^* est isomorphe à V. Cependant, ceci n'est pas toujours le cas en dimension infinie pour les espaces vectoriels standard. Toutefois, avec le théorème qui suit, on verra qu'il y a une certaine correspondance entre une forme linéaire continue donnée et un élément u d'un espace de Hilbert .

Théorème 5. *(Théoreme de Représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert et ϕ une forme linéaire continue sur H. Sous ces hypothèses, il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout v dans H, $\phi(v) = \langle u, v \rangle$.*

Ce théorème stipule que nous avons l'existence d'un unique élément u de H qui permet représenter la forme linéaire ϕ à travers le produit scalaire défini sur H.

Avant de commencer la preuve, nous aurons besoin d'une certaine propriété :

Proposition 1. *Soit H un espace de Hilbert, et ϕ une forme linéaire sur H. Alors $Ker\phi$ est un sous espace vectoriel fermé de H.*

Passons maintenant à la preuve de ce théoreme si important.

Démonstration. (Théorème de représentation de Riesz)

Existence :

Soit $\phi : H \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Posons $K = Ker\phi = \{x \in H \mid \phi(x) = 0\}$.

1er cas : $K = H$

$K = H \Leftrightarrow \forall v \in H, \phi(v) = 0$. On choisira naturellement le vecteur $u = 0$

2ème cas : $K \neq H$

Choisissons $v \notin K$ .On sait par la proposition que K est un sous espace vectoriel fermé. Dans ce cas, il existe un unique v_0 appartenant à K tel que $v = v_0 + (v - v_0)$, $v - v_0 = \lambda v_1$, où $v_1 \in K^{\perp}$ qui est lui même un sev fermé.

On a : $\langle v - v_0, v_1\rangle = \langle \lambda v_1, v_1\rangle = \lambda\|v_1\|^2$

Par ailleurs, $\langle v - v_0, v_1\rangle = \langle v, v_1\rangle$ car $\langle v_0, v_1\rangle = 0$

On a donc : $\lambda\|v_1\|^2 = \langle v, v_1\rangle \implies \lambda = \frac{\langle v,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}$

On obtient :

$$\phi(v) = \phi(v - v_0) = \phi(\lambda v_1) = \phi(\frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\phi(v_1)$$

Donc, par linéarité de ϕ et en sachant que $v \notin K$, on a $\phi(v) = \langle v, \frac{\phi(v_1)v_1}{\|v_1\|^2}\rangle$

On prouve ainsi l'existence de u en posant $u = \frac{\phi(v_1)v_1}{\|v_1\|^2}$.

Unicité :

Choisissons deux éléments u et u' vérifiant le théorème. On obtient :

$$\langle u - u', u - u'\rangle = \langle u, u - u'\rangle - \langle u', u - u'\rangle = \phi(u - u') - \phi(u - u') = 0,$$

On en conclut donc que $u = u'$

□

Pour finir, montrons que Kerϕ est un sous-espace vectoriel fermé.

Démonstration. Il est aisé de vérifier que Kerϕ est un sous espace vectoriel en vérifiant les differentes propriétés.

Pour v, $w \in Ker\phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\phi(\lambda v + w) = \lambda\phi(v) + \phi(w) = 0$$

Montrons que Kerϕ est un fermé dans H.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy sur Kerϕ. Montrons que cette suite converge dans Kerϕ.

Or Ker$\phi \in H$ qui est de Hilbert, donc de Banach. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H, c'est à dire qu'il existe $v \in H$ tel que $lim_{n\to\infty}v_n = v$. Montrons que $v \in Ker\phi$.

$$\phi(v) = \phi(v - v_n + v_n) = \phi(v - v_n) + \phi(v_n) = \phi(v - v_n)$$

Or ϕ est continue, alors $\exists c > 0$ tel que $\forall w \in H$, $|\phi(w)| \leq c\|w\|$.

Particuluèrement pour $w = v - v_n$, on a :

$$0 \leq |\phi(v)| \leq c\|v - v_n\| \to 0$$

$|\phi(v)| = 0 \implies \phi(v) = 0 \implies v \in Ker\phi$

□

3.3 Théorème de Radon-Nikodym

Nous arrivons presque à la fin de ce rapport et sommes sur le point d'énoncer et donner un esquisce de preuve du théorème de Radon-Nikodym. Nous utiliserons des notions qui relèvent de la théorie de la mesure, que nous considererons connues par le lecteur. C'est en effet le théorème que j'ai eu le plus de mal à comprendre, et qui je crois n'ai pas encore compris l'entiereté de la preuve, juste les grandes lignes. Cela dit, ce que j'ai trouvé le intéressant à ce niveau est le fait d'utiliser des éléments de l'algèbre et de l'analyse fonctionelle pour procéder à la démonstration d'un théorème découlant de la théorie de la mesure. Et ici, le théorème de représentation de Riesz va jouer un rôle important. Par soucis de compréhension, je simplifierais un peu en ne donnant qu'une esquisce de démonstration pour les mesures positives.

Définissons la notion d'absolue continuité d'une mesure par rapport à une autre.

Définition 9. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable et ν une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$. Alors ν est absolument continue par rapport à μ (que l'on note $\nu \ll \mu$) si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$.

Enonçons à présent le théorème de Radon-Nikodym

Théorème 6. *(Théorème de Radon-Nikodym) Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathcal{A})$, et ν une mesure σ-finie sur $(X, \mathcal{A})$ telle que $\nu \ll \mu$. Alors, il existe une fonction mesurable $h : X \to [0, \infty)$ telle que pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$,*

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu.$$

La fonction h est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ, et elle est souvent notée $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Nous allons démontrer le résultat pour les mesures finies positives μ et ν. Le théorème de convergence monotone et le théorème de décomposition de Hahn (admis) permet d'étendre aux mesure complexes σ-finies ν et mesures σ-finies positives μ

Démonstration. **Premièrement**, nous définissons une nouvelle mesure σ comme la somme des mesures ν et μ :

$$\sigma = \nu + \mu.$$

Cette mesure σ domine à la fois ν et μ, ce qui signifie que tout ensemble de mesure nulle pour σ est également de mesure nulle pour ν et μ.

Ensuite, nous définissons une forme linéaire ϕ sur l'espace $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$ par :

$$\phi(f) = \int_X f \, d\nu.$$

Puisque $\nu \ll \sigma$, la forme linéaire ϕ est bien définie et bornée sur $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$.

Pour rappel, $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$ correspond à l'espace des fonctions mesurables au carré intégrable par rapport à la mesure σ.

Application le théorème de représentation de Riesz

Le théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert affirme que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert peut être représentée par un produit scalaire avec un élément de cet espace. Dans notre cas, sachant que $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$ est de Hilbert, il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^2(X, \sigma)$ telle que :

$$\phi(f) = \int_X f \, d\nu = \int_X f g \, d\sigma$$

pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{L}^2(X, \sigma)$. Cette relation montre que ν est intégrée par rapport à σ avec la densité g.

Pour obtenir des informations sur g, nous considérons des fonctions indicatrices. En prenant $f = 1_A$ (la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable A), on obtient :

$$\int_A g \, d\sigma = \nu(A).$$

Cela montre que g est la densité de ν par rapport à σ. Cependant, nous devons encore exprimer ν en termes d'une intégrale par rapport à μ.

Construction de h

Pour montrer que ν est absolument continue par rapport à μ, nous devons exprimer ν en termes d'une intégrale par rapport à μ. Nous utilisons une séquence de fonctions pour approcher $h = \frac{g}{1-g}$.

Définissons f_k par :

$$f_k = \begin{cases} \frac{1}{1-g} & \text{si } 0 < \frac{1}{1-g} < k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est bornée et donc appartient à $\mathcal{L}^2(X, \sigma)$. Pour ces fonctions, nous avons :

$$\int_A f_k(1-g) \, d\nu = \int_A f_k g \, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset X$.

En prenant la limite lorsque k tend vers l'infini et en utilisant le théorème de convergence monotone, nous obtenons :

$$\int_A 1 \, d\nu = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset X$. Cela montre que la fonction $h = \frac{g}{1-g}$ est la dérivée de Radon-Nikodym, c'est-à-dire :

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset X$.

Conclusion

Ainsi, $h = \frac{g}{1-g}$ est la densité de ν par rapport à μ, ce qui complète la preuve du théorème de Radon-Nikodym.

$\square$

Chapitre 4

Conclusion

Ce stage m'a donné l'opportunité d'appronfondir mes connaissances en mathématiques, notamment en analyse fonctionnelle avec la découverte des théorèmes de repésentation de Riesz et de Radon-Nikodym, qui trouvent des applications dans de nombreux domaines tels que la probabilité, le traitement de signal, la finance quanntitative ou la théorie de l'information. J'ai aussi aussi l'opportunité de me rappeler d'anciennes notions que j'ai vu en cours pendant ces trois années de licence.

Ce stage m'a également introduit au domaine de la recherche mathématique. J'ai eu l'occasion de travailler de façon autonome en faisant un certain effort de recherche et de compréhension individuelle.

Cela dit, malgré cette belle expérience, je n'envisage pas de continuité dans le domaine de la recherche, esperant pursuivre vers une voie plus mathématique appliquée à l'informatique, dans l'ingénierie et le domaine de la science des données.

Bibliographie

[1] Ben Adler, *HILBERT SPACES AND THE RIESZ REPRESENTATION THEOREM*,

[2] François DE MARÇAY, *Espaces de Hilbert*

[3] Jimmy Lamboley, *Cours d'analyse pour l'Agrégation Externe de Mathématiques*, 2022-2023