ECUACIONES PARAMÉTRICAS

REPRESENTACIÓN DE CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Las coordenadas (x, y) del punto P de una curva pueden estar dadas en función de una tercera variable, llamado parámetro es decir

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{....................(1)}$$

A la expresión dada en (1) se denomina ecuaciones paramétricas, en donde cada valor de t le corresponde un punto $P(f(t), g(t))$ del plano XY.

El lugar geométrico que describe el punto P se denomina curva parametrizada de la ecuación paramétrica, para obtener la ecuación cartesiana se elimina el parámetro t y de esa manera se obtiene una ecuación en forma cartesiana.

$$y = f(x) \ \text{ó} \ \ E(x, y) = 0$$

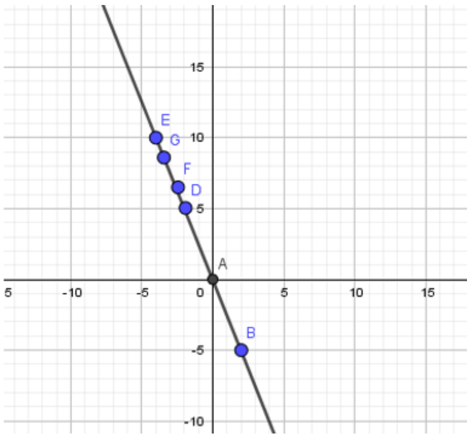
Ejemplo: Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas

1. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -5t \end{cases}$ $\quad y = -\frac{5}{2}x$ $\quad t = \frac{x}{2}$ $\quad t = \frac{y}{-5}$ $\quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-5} \to y = -\frac{5}{2}x$

Solución:

Para trazar la gráfica primero tabulamos

t	x	y
0	0	0
1	2	-5
2	4	-10
-1	-2	5
2	-4	10



$$\begin{cases} x = 2t & , \frac{x}{2} = t \\ y = -5t & , \frac{y}{-5} = t \end{cases} \to \frac{x}{2} = \frac{y}{-5}$$

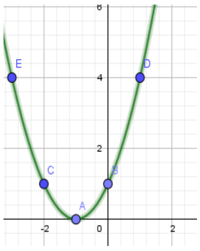
$$\to -5x = 2y \to y = -\frac{5}{2}$$

2. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$

Solución:

Para trazar la gráfica primero tabulamos

t	x	y
0	-1	0
1	0	1
-1	-2	1
2	1	4



ÁREA BAJO UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMÉTRICA

Consideramos una curva C definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Entonces el área de la región acotada por esta curva, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ se expresa mediante la integral

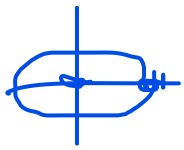
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t) dt$$

Donde $\alpha \; y \; \beta$ se determinan de las ecuaciones $a = f(\alpha)$; $b = f(\beta)$ y $g(t) \geq 0$ en $[\alpha, \beta]$

Ejemplo:

Calcular el área de la elipse dada por sus ecuaciones paramétricas $C: \begin{cases} \frac{x}{a} = cost \\ \frac{y}{b} = sent \end{cases}$

Solución:



$$C: \begin{cases} \frac{x}{a} = cost \\ \frac{y}{b} = sent \end{cases} \quad \rightarrow \; C: \begin{cases} x = acost \\ y = bsent \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dada la simetría de la elipse canónica respecto a $OX \; y \; OY$, bastara con calcular el área de un cuadrante y multiplicarla por 4 desde $x = 0 \quad hasta \quad x = a$

Si $x = 0 \;\; \rightarrow 0 = acost \quad \rightarrow \quad 0 = cost \quad \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Si $x = a \;\; \rightarrow a = acost \quad \rightarrow \quad 1 = cost \quad \rightarrow t = 0$

Pero: $\begin{cases} dx = -asent\,dt \\ dy = bcost\,dt \end{cases}$ $\quad , f'(t) = -asent$

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsent\,(-asent)dt$$

$$A = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sen^2 t\,dt$$

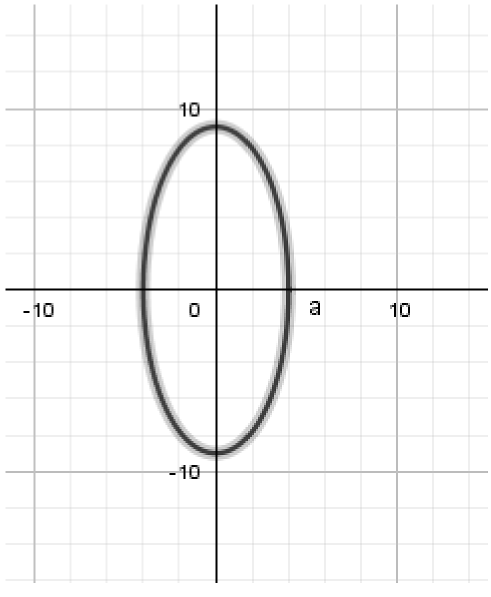
$$A = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-cos2t}{2}dt$$

$$A = -2ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-cos2t)\,dt$$

$$A = -2ab\left[t - \frac{sen2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$A = -2ab\left[\left(\cancel{0} - \frac{\cancel{sen0}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\cancel{sen2\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$A = \pi ab\,u^2$$



$$\left.\begin{matrix} x = 4\cos(t) \\ y = 9\,sen(t) \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 6.28$$

Ejemplo:

Calcula el area comprendida entre $\left\{ \begin{array}{l} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{array} \right.$

Solución:

Calculamos donde corta la cicloide en el eje OX

haciendo $y = 0 \rightarrow 0 = a\,(1 - \cos t) \rightarrow 1 = \cos t \rightarrow t = 0, 2\pi, 4\pi....$

Un arco estara comprendido entre 0 y 2π

$dx = a(1 - \cos t)dt$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} a\,(1-\cos t)\,a(1-\cos t)dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\,(1-\cos t)dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= a^2 \left[\left(\frac{3}{2}2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - \left(\frac{3}{2}.0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right] \\
&= a^2\,[(3\pi)] = 3a^2\pi u^2
\end{aligned}$$