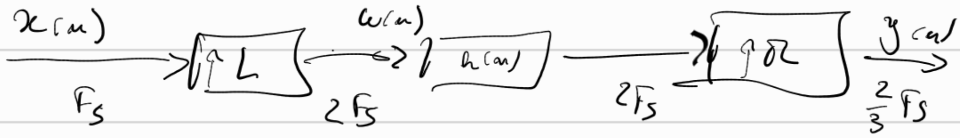
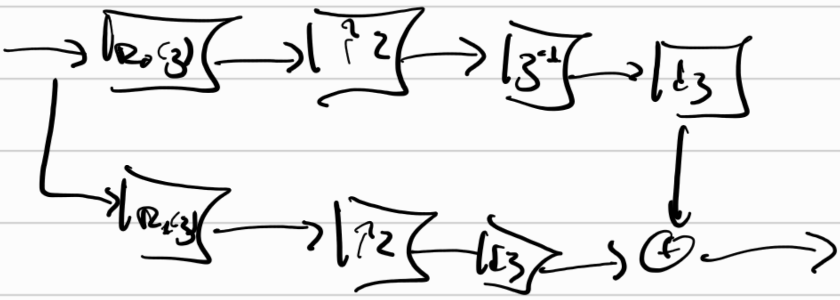
1. $\frac{48}{32} = \frac{3}{2} = \frac{M}{L}$:



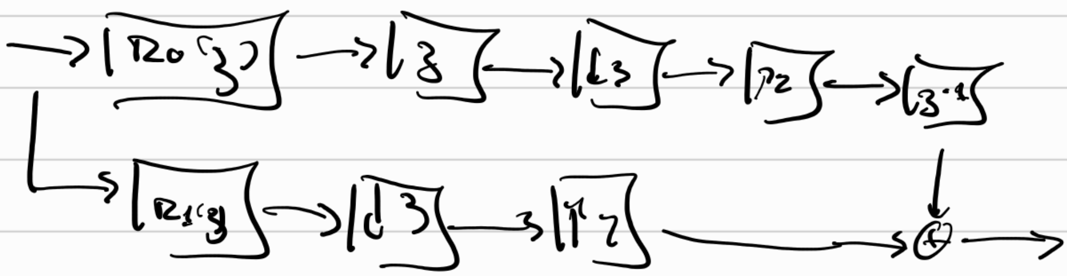
On suréchantillonne d'un facteur L puis on applique h où :

$$H(e^{i2\pi\nu}) = \begin{cases} L & \forall\ |\nu| \leq \min\left(\frac{1}{2L}, \frac{1}{2M}\right) \\ 0 & \forall\ \min\left(\frac{1}{2L}, \frac{1}{2M}\right) \leq |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(⇔)

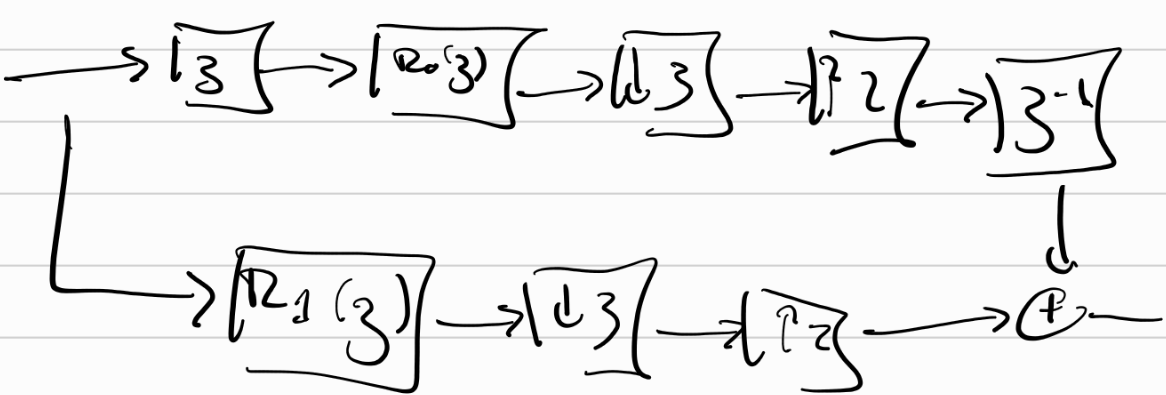


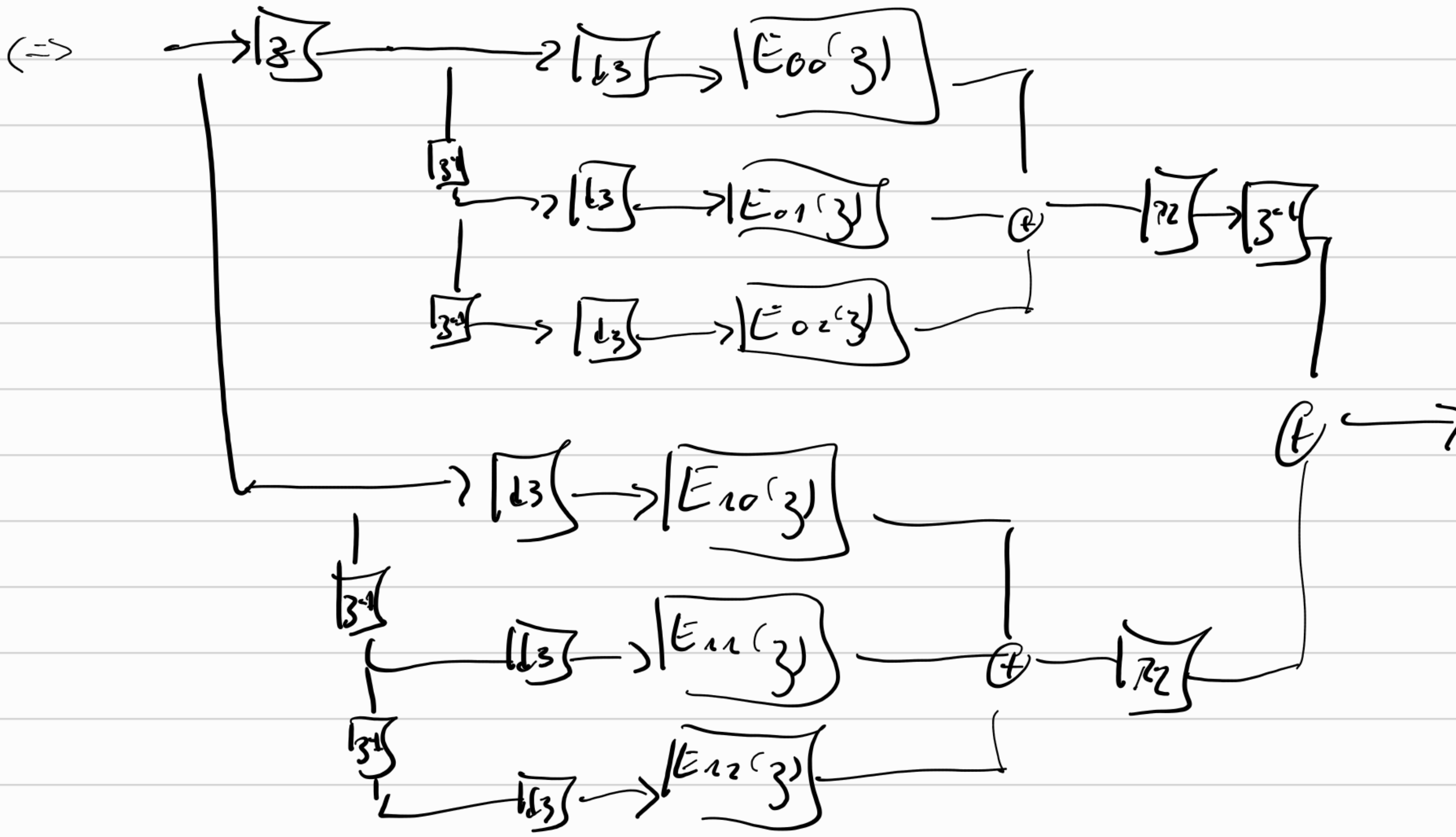
(⇔)



$2 \wedge 3 = 1$

(⇔)





6. On a une vitesse qui s'améliore d'environ un facteur 2,15.
On s'attendait à un résultat proche de max (2, 3) = 3.
Dans le code je montre que l'on gagne environ 0,03 s avec la méthode efficient au final.

STFT

1 → lobe principale : 1ère annulation en $\frac{2}{N_w}$ ⇒ largeur $\frac{4}{N_w}$

2. $W_x(\lambda, b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)\, w(n-b)\, e^{-2j\pi\lambda n}$

$u(n) = x(n)\, e^{-2j\pi\lambda n}$ $\qquad w(n)$

$W_u(\lambda, b) = u * w$

STFT ⇔ filtrer par une fenêtre

filtre = passe-bas $\qquad$ ici de type 1 (impaire et symétrique)

3. $\tilde{X}(\lambda, b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n+b)\, w(n)\, e^{-2j\pi \lambda n}$

$$\underset{k = n+b}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\, w(k-b)\, e^{-2j\pi \lambda k}\, e^{2j\pi \lambda b}$$

$$= W_x(\lambda, b)\, e^{2j\pi \lambda b}$$

On translate un passe-bas $\Rightarrow$ On forme un passe bande.

On utilisera la convention passe bande.

4. Le signal est complexe (partie imaginaire non nulle).

5. $y(n) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} y_s(u, n - uR)$

$$= \sum_{u \in \mathbb{Z}} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k, u)\, e^{2j\pi \frac{k(n-uR)}{N}} \times w_s(n - uR)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR) \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k,u)\, e^{2j\pi \frac{k(n-uR)}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR) \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x(p+uR)\, w(p)\, e^{-2j\pi \frac{kp}{N}} \right) e^{2j\pi \frac{k(n-uR)}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR) \sum_{p=0}^{N-1} w(p)\, x(p+uR) \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{k(n-uR-p)}{N}}}_{= \begin{cases} N & \text{if } n-uR-p=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}}$$

$$= \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR) \sum_{p=0}^{N-1} w(p)\, x(p+uR)\, \mathbb{1}_{n-uR-p}$$

$$= \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR)\, w(n-uR)\, x(n)$$

$$= x(n) \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR)\, w(n-uR)$$

if $\sum_{u \in \mathbb{Z}} w_s(n-uR)\, w(n-uR) = 1$ then $y(n) = x(n)$

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \frac{h(n-uR)^2}{\|h\|_2^2} = 1$$

On doit donc normaliser avec la norme $\|\cdot\|_2 : h \mapsto \sqrt{\sum_{u \in \mathbb{Z}} h(uR)}$

$$\Rightarrow \|h\|_2^2 = \sum_{u \in \mathbb{Z}} h(n-uR)^2$$

$$\Rightarrow \|h\|_2 = \sqrt{\sum_{u \in \mathbb{Z}} h(n-uR)^2}$$

On choisit $n=0$ arbitrairement.

$$= \sqrt{\sum_{u \in \mathbb{Z}} h(uR)}$$

par symétrie de hanning