Prova di Analisi Matematica II - 22 Giugno 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta.

1) Sola una delle seguenti identità è vera. Quale?

a) $|z^2| = z^2$ b) $|z^2| = \frac{1}{2}|z|^2$ c) $|z^{1/2}| = z^{1/2}$ d) $|z^{1/2}| = |z|^{1/2}$.
Soluzione: d)

2) Sola una delle seguenti identità è vera. Quale?

a) $Log(Im\, z) = Arg\, z$ b) $Im(Log\, z) = Arg\, z$
c) $Arg(Log\, z) = Arg\, z$ d) $Log(Arg\, z) = Arg\, z$.
Soluzione: b)

3) Il coefficiente a_1 dello sviluppo di Fourier della funzione definita su $[-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = 3cos\, x - x^3,$$

ed estesa ad $\mathbb{R}$ per periodicità, vale

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 .
Soluzione: d)

4) La singolarità $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \frac{e^z-1}{sen^2\, z}$ è
a) una singolarità eliminabile b) una singolarità essenziale
c) un polo semplice d) un polo doppio.
Soluzione: c)

ESERCIZIO 2. (i) Si studi la convergenza puntuale della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(sen\, x)^n}{arctg(x^n)}\,, \qquad x \in [1, \pi/2].$$

(ii) Tale convergenza è uniforme in $[1, \pi/2]$?

Soluzione:

$$f_n(x) = \frac{(sen\, x)^n}{arctg(x^n)} \to 0 \qquad x \in [1, \pi/2[$$

$$f_n(\pi/2) = \frac{(sen\,(\pi/2))^n}{arctg((\pi/2)^n)} \to \frac{2}{\pi}.$$

ESERCIZIO 3. (i) Si dia la formula integrale di Cauchy per una funzione olomorfa e la formula per le sue derivate successive.

(ii) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{2}}\, dz \qquad \int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{4}}\, dz \qquad \int_\gamma \frac{cos\, z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

dove γ è una circonferenza di centro 0 e raggio 1.

Soluzione: Usando il Teorema di Cauchy, poichè la circonferenza non circuita $\frac{\pi}{2}$, si ha

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{2}}\, dz = 0.$$

Usando la formula integrale di Cauchy, poichè la circonferenza circuita $\frac{\pi}{4}$, si ha

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{4}}\, dz = 2\pi\, i\, cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\pi\, i\,.$$

Usando la formula di Cauchy per le derivate, poichè la circonferenza circuita $\frac{\pi}{4}$, si ha

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz = 2\pi\, i\, \frac{1}{2}(cos)''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\, i\,.$$