Analisi Matematica II

Serie di Taylor

Virginia De Cicco

Sapienza Univ. di Roma

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$
ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale x_0 convergente in (a, b) verso $f(x)$

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$
ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale x_0 convergente in (a, b) verso $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \ldots$$

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$
ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale x_0 convergente in (a, b) verso $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \dots$$

$$f(x) \tilde{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k$$

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$
ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale x_0 convergente in (a, b) verso $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_k(x - x_0)^k + \dots$$

$$f(x) \tilde{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_k(x - x_0)^k$$

con un errore

$$\sum_{m \geq k+1} a_m (x - x_0)^m$$

che si riduce a mano a mano che k aumenta.
In tal caso si dice che f è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale x_0 in (a, b).

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$
ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale x_0 convergente in (a, b) verso $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \dots$$

$$f(x) \widetilde{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k$$

con un errore

$$\sum_{m \geq k+1} a_m (x - x_0)^m$$

che si riduce a mano a mano che k aumenta.
In tal caso si dice che f è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale x_0 in (a, b).

Osservazione banale...ma non troppo

Osservazione banale...ma non troppo

Se $f(x)$ è essa stessa un polinomio, qual è il suo sviluppo di Taylor?

Osservazione banale...ma non troppo

Se $f(x)$ è essa stessa un polinomio, qual è il suo sviluppo di Taylor?

Lei stessa!!!

Osservazione banale...ma non troppo

Se $f(x)$ è essa stessa un polinomio, qual è il suo sviluppo di Taylor?

Lei stessa!!!

Esempio

$$f(x) = 5x^3 + 4x^9$$

Osservazione banale...ma non troppo

Se $f(x)$ è essa stessa un polinomio, qual è il suo sviluppo di Taylor?

Lei stessa!!!

Esempio

$$f(x) = 5x^3 + 4x^9$$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$$

con $a_3 = 5, \; a_9 = 4$ e tutti gli altri nulli.

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Il seguente teorema mostra che, se f è sviluppabile in serie di potenze in (a, b), allora possiede in (a, b) le derivate di ogni ordine.

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Teorema

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Teorema

Data la serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_k (x - x_0)^k$$

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Teorema

Data la serie di potenze

$$\sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$$

avente raggio di convergenza $\rho > 0$, sia $f(x)$ la sua somma, i.e.

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k \qquad \forall x : |x - x_0| < \rho \, .$$

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Teorema

Data la serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k$$

avente raggio di convergenza $\rho > 0$, sia $f(x)$ la sua somma, i.e.

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k \qquad \forall x : |x-x_0| < \rho\,.$$

Allora $f(x)$ è una funzione indefinitivamente derivabile (o C^∞) per $|x-x_0| < \rho$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ la derivata di ordine m vale

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Teorema
Data la serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_k (x-x_0)^k$$

avente raggio di convergenza $\rho > 0$, sia $f(x)$ la sua somma, i.e.

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k (x-x_0)^k \qquad \forall x : |x-x_0| < \rho\,.$$

Allora $f(x)$ è una funzione indefinitivamente derivabile (o C^∞) per $|x-x_0| < \rho$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ la derivata di ordine m vale

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1) a_k (x-x_0)^{k-m}.$$

Inoltre $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque f è sviluppabile in serie nella forma

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \qquad \forall x : |x-x_0| < \rho\,.$$

Dimostrazione

Dimostrazione

Si applica m volte il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze e si ottiene

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Dimostrazione

Si applica m volte il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze e si ottiene

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

$m = 1$ (serie derivata)

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-1+1)a_k(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$$

Dimostrazione

Si applica m volte il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze e si ottiene

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

$m = 1$ (serie derivata)

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-1+1)a_k(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$$

$m = 2$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-2+1)a_k(x-x_0)^{k-2} =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}$$

Dimostrazione

Per dimostrare la seconda parte

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

Dimostrazione

Per dimostrare la seconda parte

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots(m-m+1)a_m(x-x_0)^{m-m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

Dimostrazione

Per dimostrare la seconda parte

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots(m-m+1)a_m(x-x_0)^{m-m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots 1\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

Dimostrazione

Per dimostrare la seconda parte

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots(m-m+1)a_m(x-x_0)^{m-m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots 1\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Dimostrazione

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo, i.e. $k = m$; infatti

Dimostrazione

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo, i.e. $k = m$; infatti

$$f^{(m)}(x_0) = m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x_0 - x_0)^{k-m} = m!\ a_m$$

Dimostrazione

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo, i.e. $k = m$; infatti

$$f^{(m)}(x_0) = m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x_0-x_0)^{k-m} = m!\ a_m$$

da cui si ha

$$f^{(k)}(x_0) = k!\ a_k.$$

Dimostrazione

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo, i.e. $k = m$; infatti

$$f^{(m)}(x_0) = m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x_0-x_0)^{k-m} = m!\ a_m$$

da cui si ha

$$f^{(k)}(x_0) = k!\ a_k .$$

Ne segue che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Dimostrazione

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo, i.e. $k = m$; infatti

$$f^{(m)}(x_0) = m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x_0 - x_0)^{k-m} = m!\ a_m$$

da cui si ha

$$f^{(k)}(x_0) = k!\ a_k.$$

Ne segue che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

e dunque f è sviluppabile in serie nella forma

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \forall x : |x - x_0| < \rho\,.$$

□

È importante notare che dal teorema precedente segue l'unicità dello sviluppo in serie di potenze.

È importante notare che dal teorema precedente segue l'unicità dello sviluppo in serie di potenze.

Data $f(x)$ una funzione C^∞ in (a, b), si può considerare la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

È importante notare che dal teorema precedente segue l'unicità dello sviluppo in serie di potenze.

Data $f(x)$ una funzione C^∞ in (a, b), si può considerare la serie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

che prende il nome di serie di Taylor di f ed i coefficienti

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

sono detti coefficienti di Taylor di f.

È importante notare che dal teorema precedente segue l'unicità dello sviluppo in serie di potenze.

Data $f(x)$ una funzione C^∞ in (a, b), si può considerare la serie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

che prende il nome di serie di Taylor di f ed i coefficienti

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

sono detti coefficienti di Taylor di f.

Nel caso in cui $x_0 = 0$, la serie di Taylor prende il nome di serie di Mac Laurin.

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b),

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b),

ci chiediamo se f coincide sempre in (a, b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

i.e. se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a, b).

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b),

ci chiediamo se f coincide sempre in (a, b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

i.e. se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a, b).

La risposta, in generale, è negativa come mostra il seguente esempio:

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b),

ci chiediamo se f coincide sempre in (a, b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

i.e. se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a, b).

La risposta, in generale, è negativa come mostra il seguente esempio:

la funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a,b),

ci chiediamo se f coincide sempre in (a,b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

i.e. se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a,b).

La risposta, in generale, è negativa come mostra il seguente esempio:

la funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

è una funzione C^∞ in $\mathbb{R}$ e si ha

$$f(0) = 0, \ f'(0) = 0, \ f''(0) = 0, \ \ldots, \ f^{(k)}(0) = 0, \ldots$$

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a,b),

ci chiediamo se f coincide sempre in (a,b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

i.e. se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a,b).

La risposta, in generale, è negativa come mostra il seguente esempio:

la funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

è una funzione C^∞ in $\mathbb{R}$ e si ha

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ \ldots,\ f^{(k)}(0) = 0, \ldots$$

Quindi la serie di Taylor di f di punto iniziale $x_0 = 0$ converge verso la funzione identicamente nulla e non verso f.

Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Teorema

Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Teorema

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b), supponiamo che esistano delle costanti positive $M, L \geq 0$ tali che

$$|f^{(k)}(x)| \leq M\ L^k \quad \forall x \in (a, b).$$

Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Teorema

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b), supponiamo che esistano delle costanti positive $M, L \geq 0$ tali che

$$|f^{(k)}(x)| \leq M\ L^k \quad \forall x \in (a, b).$$

Allora, per ogni $x_0 \in (a, b)$, la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a, b).

Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Teorema

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a,b), supponiamo che esistano delle costanti positive $M, L \geq 0$ tali che

$$|f^{(k)}(x)| \leq M\ L^k \quad \forall x \in (a,b).$$

Allora, per ogni $x_0 \in (a,b)$, la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a,b).

In particolare, basta che le derivate di f siano equilimitate in (a,b) (è il caso $L = 1$).

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

Applicando il teorema precedente ed i teoremi di derivazione e di integrazione termine a termine si possono provare i seguenti sviluppi di Mac Laurin delle principali funzioni elementari.

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

Cominciamo dalla serie geometrica.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1,$$

Esercizi:

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n\geq 0} x^{3n}, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n\geq 0} (-x)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

Integrando per serie si ha

$$log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+y} dy = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n\geq 0}(-x)^{2n} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}, \quad |x|<1,$$

Integrando per serie si ha

$$arctg\, x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,dy = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1,$$

Derivando per serie si ha

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}, \quad |x|<1.$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1,$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$arctg\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$arctg\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$arctg\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(x) = e^x\,, \qquad f^{(n)}(0) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 \qquad e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = 2{,}7182\ldots$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$f(x) = sen\, x$$

$$f^{(0)}(x) = sen\, x \qquad f'(x) = cos\, x \qquad f''(x) = -sen\, x \qquad f'''(x) = -cos\, x$$

$$f^{(0)}(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(x) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = sen\, x \qquad f^{(5)}(x) = cos\, x \qquad f^{(6)}(x) = -sen\, x \qquad f^{(7)}(x) = -cos\, x$$

$$k \in \mathbb{N},\ \ pari \quad k = 2n \qquad f^{(k)}(0) = 0$$

$$k \in \mathbb{N},\ \ dispari \quad k = 2n+1 \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^n$$

$$sen\, x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$sen\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$cos\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$senhx = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$cosh\, x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esame del 22 febbraio 2011

Domanda a risposta multipla

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{4+x}$ è

$$a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+2}} x^n \qquad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} x^n \quad c)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} x^n \quad d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2n+2}} x^n.$$

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{4+x}$ è

$$a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+2}} x^n \qquad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} x^n \qquad c)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} x^n \qquad d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2n+2}} x^n.$$

Soluzione: c) Infatti

$$f(x) = \frac{1}{4+x} = \frac{1}{4(1+\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} x^n.$$

Esame dell'11 novembre 2011

Esame dell'11 novembre 2011

Domanda a risposta multipla

Esame dell'11 novembre 2011

Domanda a risposta multipla

Il coefficiente di Taylor a_2 della funzione $f(x) = 9 + x + 3x^2 + 5x^8$ è

a) $a_2 = 1$

b) $a_2 = 3$

c) $a_2 = 8$

d) $a_2 = 0$.

Esame dell'11 novembre 2011

Domanda a risposta multipla

Il coefficiente di Taylor a_2 della funzione $f(x) = 9 + x + 3x^2 + 5x^8$ è

a) $a_2 = 1$

b) $a_2 = 3$

c) $a_2 = 8$

d) $a_2 = 0$.

Soluzione: b)

Esame del 24 luglio 2012

Esame del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

Esame del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \log(1 - x^2)$ è

$$a) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{2n+2} \qquad b) \quad -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}x^{2n+2}$$

$$c) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{2n} \qquad d) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}x^{2n+2}\,.$$

Esame del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \log(1 - x^2)$ è

$$a) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n+2} \qquad b) \quad -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}$$

$$c) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n} \qquad d) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}\,.$$

Soluzione: b) GIUSTA Infatti da $\frac{1}{1-w} = \sum_{n\geq 0} w^n$ si ha, integrando termine a termine che

$$log(1-w) = -\int_0^w \frac{1}{1-s} ds = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} w^{n+1}$$

da cui

$$log(1-x^2) = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}$$

Esame del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla
Lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \log(1 - x^2)$ è

$$a) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n+2} \qquad b) \quad -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}$$

$$c) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n} \qquad d) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}\,.$$

Soluzione: b) GIUSTA
ALTRO MODO Parto dallo sviluppo del logaritmo e si ha

$$log(1+y) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad |y| < 1.$$

Quindi se $y = -x^2$

$$log(1-x^2) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(-x^2)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}$$

dove si è usato che $(-1)^n(-1)^{n+1} = -1$.

Esame del 16 luglio 2013

Esame del 16 luglio 2013

(i) Si introducano le serie di potenze.
(ii) Si definisca il raggio di convergenza per una serie di potenze e si diano le formule per calcolarlo.
(iii) Usando gli sviluppi noti, si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k-1}}{k!} \qquad 0 < x < 1\,.$$

Esame del 16 luglio 2013

(i) Si introducano le serie di potenze.
(ii) Si definisca il raggio di convergenza per una serie di potenze e si diano le formule per calcolarlo.
(iii) Usando gli sviluppi noti, si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k-1}}{k!} \qquad 0 < x < 1\,.$$

Soluzione
Per calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k-1}}{k!} \qquad 0 < x < 1\,,$$

usiamo lo sviluppo dell'esponenziale e si ha

Esame del 16 luglio 2013

(i) Si introducano le serie di potenze.
(ii) Si definisca il raggio di convergenza per una serie di potenze e si diano le formule per calcolarlo.
(iii) Usando gli sviluppi noti, si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k-1}}{k!} \qquad 0 < x < 1\,.$$

Soluzione
Per calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k-1}}{k!} \qquad 0 < x < 1\,,$$

usiamo lo sviluppo dell'esponenziale e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k-1}}{k!} = \frac{1}{\log x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{k}}{k!} = \frac{e^{\log x}}{\log x} = \frac{x}{\log x}\,.$$

Esame del 20 Settembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

Esame del 20 Settembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

Sia dato l'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 11\}$. Quale tra le seguenti serie converge in I?

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(11)!\, n} \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (11)^n x^n$$

$$c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (11)^{\frac{1}{n}} x^n \qquad d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(11)^n}.$$

Esame del 20 Settembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

Sia dato l'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 11\}$. Quale tra le seguenti serie converge in I?

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(11)!\, n} \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (11)^n x^n$$

$$c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (11)^{\frac{1}{n}} x^n \qquad d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(11)^n}.$$

Soluzione: d) Infatti il raggio di convergenza è $\rho = \frac{1}{l}$ dove

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(11)^{n+1}}}{\frac{1}{(11)^n}} = \frac{1}{11}.$$

Esame del 19 novembre 2013

Esame del 19 novembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

Esame del 19 novembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} x^n$$

ha raggio di convergenza

a) $R = 0$ b) $R = e/4$ c) $R = 1$ d) $R = 4$.

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} x^n$$

ha raggio di convergenza

a) $R = 0$ b) $R = e/4$ c) $R = 1$ d) $R = 4$.

Soluzione: b) Infatti il raggio di convergenza è $\rho = \frac{1}{l}$ dove

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{4^n n!}{n^n}} = 4(n+1) \frac{1}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = 4 \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{4}{e}.$$

Appello di 1 luglio 2008

Appello di 1 luglio 2008

(i) Si provi l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di una funzione $f(x)$.
(ii) Si calcoli $f^{(20)}(0)$, dove

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2}.$$

Appello di 1 luglio 2008

(i) Si provi l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di una funzione $f(x)$.
(ii) Si calcoli $f^{(20)}(0)$, dove

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2}.$$

Soluzione

Appello di 1 luglio 2008

(i) Si provi l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di una funzione $f(x)$.
(ii) Si calcoli $f^{(20)}(0)$, dove

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2}.$$

Soluzione
(ii) Poichè per $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

si ha che

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 7n x^{n+3}.$$

Appello di 1 luglio 2008

(i) Si provi l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di una funzione $f(x)$.
(ii) Si calcoli $f^{(20)}(0)$, dove

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2}.$$

Soluzione
(ii) Poichè per $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

si ha che

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 7nx^{n+3}.$$

D'altra parte per l'unicità dello sviluppo in serie si ha

$$\frac{f^{(20)}(0)}{(20)!} = a_{20} = 7 \cdot 17 \quad \to \quad f^{(20)}(0) = 119 \cdot (20)!\,.$$

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli la somma della seguente serie.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!x} (\log x)^{2n} \quad x > 0.$$

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli la somma della seguente serie.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!x} (\log x)^{2n} \quad x > 0.$$

Soluzione

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli la somma della seguente serie.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!x} (\log x)^{2n} \quad x > 0.$$

Soluzione
Utilizzando la sostituzione $t = \log x$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!x} (\log x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)! e^t}$$

$$= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = e^{-t} \cos t = \frac{\cos(\log x)}{x} \quad \forall x > 0.$$

Da Casalvieri-De Cicco

Sia $f(x) = \frac{1}{3+2x}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto x_0 a fianco indicato delle seguenti funzioni.

(a) $f(x) \quad x_0 = 0$

(b) $f^2(x) \quad x_0 = 0$

(c) $f(x) \quad x_0 = -1$

Da Casalvieri-De Cicco

(a) Sia $f(x) = \frac{1}{3+2x}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto $x_0 = 0$.
Utilizzando lo sviluppo della serie geometrica si ha che

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^n,$$

Da Casalvieri-De Cicco

(a) Sia $f(x) = \frac{1}{3+2x}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto $x_0 = 0$.
Utilizzando lo sviluppo della serie geometrica si ha che

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^n,$$

la quale converge se

$$\left|-\frac{2}{3}x\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \forall x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Da Casalvieri-De Cicco

(b) Sia $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^2}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto $x_0 = 0$. Si ha che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3+2x}\right).$$

Da Casalvieri-De Cicco

(b) Sia $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^2}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto $x_0 = 0$. Si ha che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3+2x}\right).$$

Per il teorema di derivazione per serie si ricava dunque che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}x^n\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}nx^{n-1}$$

Da Casalvieri-De Cicco

(b) Sia $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^2}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto $x_0 = 0$. Si ha che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3+2x}\right).$$

Per il teorema di derivazione per serie si ricava dunque che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}x^n\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}nx^{n-1}$$

Da Casalvieri-De Cicco

(b) Sia $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^2}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto $x_0 = 0$. Si ha che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3+2x}\right).$$

Per il teorema di derivazione per serie si ricava dunque che

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}x^n\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}nx^{n-1}$$

Lo stesso teorema ci garantisce che l'insieme di convergenza è uguale a quello dello sviluppo in serie di f. Tale serie converge dunque $\forall x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Da Casalvieri-De Cicco

(c) In questo caso, conviene riscrivere f nel seguente modo

$$f(x) = \frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3+2(x+1)-2} = \frac{1}{1+2(x+1)} = \frac{1}{1-(-2(x+1))}$$

Da Casalvieri-De Cicco

(c) In questo caso, conviene riscrivere f nel seguente modo

$$f(x) = \frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3+2(x+1)-2} = \frac{1}{1+2(x+1)} = \frac{1}{1-(-2(x+1))}$$

ed utilizzando di nuovo lo sviluppo della serie geometrica di ragione $-2(x+1)$ si ottiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n (x+1)^n$$

la quale converge se

$$|-2(x+1)| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Si calcoli la somma delle seguenti serie.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{n-2}}{n!} \qquad x > 0$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!}(\cos x)^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} e^{2xn} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzioni

(a)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{n-2}}{n!} \quad x > 0$$

Utilizzando la sostituzione $t = \log x$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{n-2}}{n!} = \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t}{t^2} = \frac{e^{\log x}}{(\log x)^2} = \frac{x}{(\log x)^2} \quad \forall x > 0.$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

Utilizzando la sostituzione $t = (x-1)^2$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t = e^{(x-1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} (\cos x)^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

Si osservi anzitutto che per $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ allora la serie è a termini nulli e dunque converge a 0. Per tutti gli altri valori, utilizzando la sostituzione $t = \cos x$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} (\cos x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{1}{t} \sinh(4t) = \frac{1}{\cos x} \sinh(4 \cos x) \quad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

(d)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} e^{2xn} \quad x \in \mathbb{R}$$

Utilizzando la sostituzione $t = e^x$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} e^{2xn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{1}{t} \sin t = e^{-x} \sin(e^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si sviluppino in serie di McLaurin le seguenti funzioni e si indichi l'insieme di convergenza dello sviluppo.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \log(1 - x^2) \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \qquad x \neq 0$$

Soluzioni
(a)
$$f(x) = \log(1 - x^2) \quad x \in (-1, 1)$$
Utilizzando la sostituzione $t = -x^2$ si ottiene
$$\log(1 - x^2) = \log(1 + t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x^2)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

(b)

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \quad x \neq 0$$

Utilizzando la sostituzione $t = x^2$ si ottiene

$$\frac{\log(1+x^2)}{x^2} = \frac{\log(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n}$$

$$\overset{n-1=k}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k+1} \quad |x| \leq 1.$$

Si utilizzi il teorema di derivazione per serie per calcolare $f^{(9)}(0)$ della funzione $f(x) = 5xe^{x^2}$.

Soluzione

Lo sviluppo in serie di McLaurin di una funzione di classe C^∞ coincide, nel suo insieme di convergenza, con la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k,$$

dove

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Per calcolare $f^{(9)}(0)$ è allora sufficiente osservare che

$$f^{(9)}(0) = a_9 \cdot 9!$$

Poichè

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{2}e^{x^2}\right) = \frac{5}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = \frac{5}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right) \\
&= \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{d}{dx}\left(x^{2n}\right) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}2nx^{2n-1} = 5\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{2n-1}
\end{aligned}
$$

ed imponendo che $2n-1=9 \Leftrightarrow n=5$, si trova che

$$
a_9 = \frac{5}{4!} \Rightarrow f^{(9)}(0) = \frac{5}{4!}9! = 5^2\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 75\,600.
$$