

Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri
Sapienza Univ. di Roma

Serie di potenze in campo complesso

Successioni in campo complesso

In maniera analoga a quanto fatto nei numeri reali si può dare la nozione di successione di numeri complessi $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Sia $z_n = x_n + iy_n$ una successione di numeri complessi, allora

$$z_n \rightarrow \lambda = u + iv \quad \text{sse} \quad x_n \rightarrow u \text{ e } y_n \rightarrow v.$$

1 Esempio: sia $z_n = \frac{1}{n} + \frac{2n-1}{n}i$, allora $z_n \rightarrow 2i$.

2 Esempio: sia $z_n = \frac{1-3n}{n} + \frac{5n^2-1}{3n^2-n}i$, allora $z_n \rightarrow -3 + \frac{5}{3}i$.

Serie in campo complesso

In maniera analoga a quanto fatto nei numeri reali si può dare la nozione di serie di numeri complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Sia $z_n = x_n + iy_n$ una successione di numeri complessi, allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n \text{ converge} \quad \text{sse} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \text{ e } \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \text{ convergono.}$$

1 Esempio: sia $z_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n}i$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge.

2 Esempio: sia $z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}i$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ non converge.

Serie di funzioni in campo complesso

In maniera analoga a quanto fatto nei numeri reali si possono dare le nozioni:

- di successioni di funzioni $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in campo complesso;

Esempio: $f_n(z) = (iz)^n$

tende a 0 se $|iz| = |z| < 1$,

tende a 1 se $z = -i$

non converge negli altri punti.

- di serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ in campo complesso;

Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (iz)^n$

converge se $|iz| = |z| < 1$

non converge negli altri punti.

- dei diversi tipi di convergenza.

Serie di potenze in campo complesso

Data una successione a_n di numeri complessi e fissato $z_0 \in \mathbb{C}$

si definisce *serie di potenze in campo complesso di punto iniziale z_0* una serie del tipo

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

I numeri complessi a_n sono detti coefficienti della serie.

Se i coefficienti a_n sono definitivamente nulli (cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = 0$ per ogni $n > n_0$) la serie si riduce al polinomio

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots + a_{n_0} (z - z_0)^{n_0}.$$

Serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Si osservi che in $z = z_0$ la serie converge e la sua somma è a_0 .

Ricordiamo che per le serie di potenze in campo reale, l'insieme di convergenza è un intervallo di centro il punto iniziale e raggio R .

Nel caso di serie di potenze in campo complesso, l'insieme di convergenza è una palla di centro z_0 e raggio R .

Serie di potenze in campo complesso

Tale R si dice *raggio di convergenza* della serie e si calcola in maniera analoga al caso reale.

Inoltre

1) se $R = 0$, la serie converge solo per $z = z_0$;

2) se $0 < R < +\infty$,

la serie converge (assolutamente) per $|z - z_0| < R$,

converge totalmente per $|z - z_0| \leq r$, per ogni r tale che $0 < r < R$,

e non converge per $|z - z_0| > R$;

3) se $R = +\infty$,

la serie converge (assolutamente) in tutto \mathbb{C}

e totalmente per $|z - z_0| \leq r$, per ogni $r > 0$.

Esempi

1) La serie

$$\sum_{n \geq 0} n! z^n$$

converge solo in $z = 0$ ($R = 0$).

2) La serie

$$\sum_{n \geq 0} z^n$$

converge nella palla $|z| < 1$ ($R = 1$),

converge totalmente per $|z| \leq r$, per ogni r tale che $0 < r < 1$,

e in nessun punto della sua frontiera (che è la circonferenza $|z| = 1$).

Esempi

3) La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$$

converge nella palla $|z| < 1$ ($R = 1$),

converge totalmente per $|z| \leq r$, per ogni r tale che $0 < r < 1$,

e in alcuni punti della circonferenza $|z| = 1$ (per esempio nel punto $z = -1$),

ma non in tutti (non converge per esempio in $z = 1$).

4) La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

converge totalmente nella palla $|z| \leq 1$ ($R = 1$)

e dunque in tutti i punti della circonferenza $|z| = 1$.

5) La serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

converge in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ ($R = +\infty$)

e totalmente per $|z| \leq r$, per ogni $r > 0$.

Olomorfia di una somma di una serie di potenze

Vediamo ora che le serie di potenze sono derivabili termine a termine.

Teorema

La somma

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

di una serie di potenze è una funzione olomorfa dove è definita

(cioè nel suo cerchio di convergenza $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$)

e per ogni $z \in B_R(z_0)$ si ha

$$S'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Olomorfia di una somma di una serie di potenze

Iterando il procedimento, dal teorema precedente si ha

$$S''(z) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

e per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

da cui ponendo $z = z_0$ si ha

$$S^{(k)}(z_0) = k!a_k$$

e quindi

$$a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Olomorfia di una somma di una serie di potenze

Ne segue *l'unicità dello sviluppo in serie di potenze*, ossia:

se

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

è la somma di una serie convergente definita in $B_R(z_0)$,

allora necessariamente si ha che

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

e dunque

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R,$$

cioè *la serie di potenze coincide con la serie di Taylor associata alla sua funzione somma $S(z)$.*

Sviluppi

Ricordiamo infine che alcuni sviluppi classici noti per le funzioni reali valgono ancora in ambito complesso:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sinh z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cosh z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\arctan z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1,$$

$$\operatorname{Log}(z+1) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1.$$

- (i) Sia dia la definizione di convergenza puntuale per una serie di funzioni.
- (ii) Sia assegnata la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(z+i)^n}.$$

Se ne determini l'insieme di convergenza E , fornendone una rappresentazione grafica sul piano complesso.

Se ne calcoli la somma $\forall z \in E$.

(ii) Sia assegnata la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(z+i)^n}.$$

Se ne determini l'insieme di convergenza E , fornendone una rappresentazione grafica sul piano complesso.

Se ne calcoli la somma $\forall z \in E$.

Soluzione:

$$\left| \frac{2^2}{z+i} \right| < 1 \quad \text{sse} \quad |z+i| > 4$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(z+i)^n} = \frac{1}{1 - \frac{4}{z+i}} = \frac{z+i}{z+i-4}$$

Esercizi

Si sviluppi la seguente funzione in serie di Taylor centrata nel punto $z_0 = 1$, specificandone l'insieme di convergenza:

$$f(z) = e^{(z-1)^2}.$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale in campo complesso si ha che

$$e^{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n!}.$$

Tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$ e dunque lo sviluppo in serie di Taylor vale $\forall z \in \mathbb{C}$.

Esercizi

Si sviluppi la seguente funzione in serie di Taylor centrata nel punto $z_0 = 3$, specificandone l'insieme di convergenza:

$$f(z) = \frac{1}{z - 2i}.$$

Soluzione:

Utilizzando lo sviluppo della serie geometrica si ha che

$$\begin{aligned}\frac{1}{z - 2i} &= \frac{1}{z - 3 + 3 - 2i} = \frac{1}{3 - 2i} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-3}{3-2i}\right)} = \\ &= \frac{1}{3 - 2i} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^n}{(3-2i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^n}{(3-2i)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Esso converge se

$$\left| \frac{z-3}{3-2i} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-3| < |3-2i| = \sqrt{13},$$

cioè nel cerchio di centro $z_0 = 3$ e di raggio $\sqrt{13}$.

Esercizi

Si sviluppi la seguente funzione in serie di Taylor centrata nel punto $z_0 = -2$, specificandone l'insieme di convergenza:

$$f(z) = \frac{2}{z}.$$

Soluzione:

Utilizzando la serie geometrica si ha che

$$f(z) = \frac{2}{z} = \frac{2}{z+2-2} = -\frac{2}{2\left(1 - \frac{z+2}{2}\right)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2)^n}{2^n}.$$

Esso converge se

$$\left| \frac{z+2}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |z+2| < 2,$$

cioè nel cerchio di centro $z_0 = -2$ e di raggio 2.

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor in $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \frac{1}{4+z}$ è

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+2}} z^n$$

$$b) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} z^n$$

$$c) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} z^n$$

$$d) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n+2}} z^n$$

Soluzione: c)

Domanda a risposta multipla

L'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{-|e^z|}}, \quad z \in \mathbb{C}$$

è

- a) tutto \mathbb{C} b) l'insieme vuoto c) un semipiano d) un cerchio

Soluzione: b)