Esercizio 1

I) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + \frac{3}{z} \longrightarrow \frac{3}{z} + \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!}$

RISPOSTA D

$= \frac{3}{z} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{2n}\, n!} = \frac{1}{1} + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \dots$

$c_1 = 3$

II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$-\log(1-x) = -\sum \frac{(-x)^n}{n} (-1)^{n+1} = \sum \frac{x^n}{n} \cancel{(-1)^{2n+1}}$

RISPOSTA A

III) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\sqrt{-2 + (\underbrace{|z-3|^2 - 1}_{\text{sempre } \mathbb{R}})i} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-2 + (|z-3|^2-1)i)}$

non è mai nullo

definito ovunque

NON OLOMORFO se

$\begin{cases} -2 < 0 & \text{sempre vero} \\ |z-3|^2 - 1 = 1 & \text{vero in } |z-3|^2 = 2 \end{cases}$

OLOMORFO IN $\mathbb{C} / \{|z-3| = +\sqrt{2}\}$ RISPOSTA D

IV) $f(t) = t^2 \sin((-2+i)t)$

RISPOSTA A (penso?)

Esercizio 2

i) $\mathrm{Log}\, z := \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$ definito in $\mathbb{C}^*$

olomorfo in $\mathbb{C}^{**}$

ii) $\mathrm{Log}(\mathrm{Arg}\, z) = \underbrace{\log|\mathrm{Arg}\, z|}_{\downarrow} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(\mathrm{Arg}\, z)}_{\downarrow}$

NON DEFINITO IN $\mathrm{Arg}\, z = 0$ ⇓

NON OLOMORFA IN

$\begin{cases} \mathrm{Im}(\mathrm{Arg}\, z) = 0 \text{ sempre vero} \\ \mathrm{Re}(\mathrm{Arg}(z)) < 0 \end{cases}$

↓

$\begin{cases} \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$

NON DEFINITO IN $\begin{cases} \mathrm{Im}(z) = 0 \\ \mathrm{Re}(z) \geq 0 \end{cases}$

DEFINITO IN $\mathbb{C} / \{x \geq 0, y = 0\}$

OLOMORFO IN $\mathbb{C} / \{x \geq 0, y = 0\} \cup \{y < 0\}$

Esercizio 3

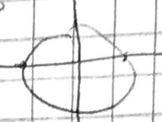
i) UNA SINGOLARITÀ ISOLATA DI UNA FUNZIONE È UN PUNTO z_0 PER IL QUALE: $f: A \to \mathbb{C}$, f ANALITICA E DEFINITA IN A

- $z_0 \notin A$
- $B^*_r(z_0) \subseteq A$

iii) Le singolarità isolate possono essere di tipo:

Eliminabile: se $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$

Poli di ordine m: se $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lambda$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$



Essenziali: altrimenti

iiii) $f(z) = \frac{\sin 2z}{\sin 4z}$ $\quad$ Ha singolarità in $\sin 4z = 0$

$\cancel{z = \frac{\pi}{4} \quad \frac{k\pi}{4}}$ $\quad 4z = k\pi$

$z = \frac{k}{4}\pi$

$\sin 2z$ si annulla in $z = \frac{k}{2}\pi$

$\frac{k_1}{2}\cancel{\pi} = \frac{k_2}{4}\cancel{\pi}$

per $z = \frac{k}{4}\pi$ k pari singolarità eliminabile $\quad k_2 = 2k_1$

per $z = \frac{k}{4}\pi$ k dispari polo semplice