Analisi Matematica II

Serie di Fourier

Virginia De Cicco

Sapienza Univ. di Roma

In questa lezione introduciamo le serie di Fourier.

Dapprima introduciamo le funzioni *generalmente continue* e *sommabili*.

Diciamo che una funzione f è *generalmente continua* in un intervallo $[a, b]$ se ha al più un numero finito di discontinuità in $[a, b]$.

Notiamo che esistono funzioni che non sono generalmente continue: basta considerare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{sen \frac{1}{x}}$$

che è discontinua in 0 e nei punti del tipo $x = \frac{1}{k\pi}$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme degli interi relativi.

Diciamo che una funzione f generalmente continua è *sommabile* in un intervallo $[a, b]$ se

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty. \tag{1}$$

Osserviamo che una funzione generalmente continua potrebbe non essere sommabile. Basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\beta} & x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 1 & x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

che non è sommabile per $\beta \geq 1$ (si noti che per $\beta < 1$ tale funzione è invece sommabile).

Funzioni periodiche

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T (o T-periodica) se per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x+T) = f(x). \tag{3}$$

Ovviamente se una funzione è periodica con periodo $T > 0$, allora è anche periodica con periodo $2T, 3T, \dots, kT$, con $k \in \mathbb{N}$.

Nel seguito intenderemo per *periodo* il più piccolo numero T tale che (3) valga.

Monomi trigonometrici

Fissati $k \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione seguente ottenuta come combinazione di $cos\, kx$ e $sen\, kx$

$$f(x) = a\, cos\, kx + b\, sen\, kx$$

è periodica di periodo 2π.

In realtà il suo periodo minimo è $\frac{2\pi}{k}$, essendo

$$cos\Big(k\Big(x + \frac{2\pi}{k}\Big)\Big) = cos\big(kx + 2\pi\big) = cos\, kx$$

e

$$sen\Big(k\Big(x + \frac{2\pi}{k}\Big)\Big) = sen\big(kx + 2\pi\big) = sen\, kx.$$

Polinomi trigonometrici

Le somme finite

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \,, \quad a_0\,,\, a_k\,,\, b_k \in \mathbb{R}\,.$$

di funzioni del tipo precedente si dicono *polinomi trigonometrici di ordine n* e sono funzioni 2π-periodiche.

Esempi di tali funzioni sono:

$$\cos\, x + \operatorname{sen} x, \qquad 2\operatorname{sen} 8x - 3\cos\, 5x + 4\operatorname{sen} 2x.$$

Serie trigonometriche

Supponiamo che la successione di funzioni $S_n(x)$ converga per ogni $x \in \mathbb{R}$ ad una funzione $S(x)$.

Ciò equivale a dire che la serie seguente

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, cos \, kx + b_k \, sen \, kx$$

converge puntualmente e ha per somma la funzione $S(x)$.

Tale somma è necessariamente una funzione 2π-periodica.

Tale serie è detta *serie trigonometrica di coefficienti* $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Serie trigonometriche e sviluppabilità in serie di Fourier

Ci si può chiedere il viceversa:

data una funzione $f(x)$ 2π-periodica, essa è *sviluppabile in serie trigonometrica*, i.e. è possibile costruire una serie trigonometrica che converga ad $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

O equivalentemente, è possibile determinare dei coefficienti a_0, a_k, b_k in modo che la serie trigonometrica con essi costruita converga ad $f(x)$?

Vedremo successivamente delle condizioni sufficienti per la sviluppabilità in serie trigonometrica. Cominciamo con le condizioni necessarie.

Coefficienti di Fourier

Nella seguente proposizione diamo la forma che i coefficienti devono necessariamente avere perché tale sviluppo possa valere.

Proposizione

Sia f sviluppabile in serie trigonometrica, i.e.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, cos \, kx + b_k \, sen \, kx \, .$$

Supponiamo inoltre che la serie converga uniformemente in $[-\pi, \pi]$.

Allora necessariamente i coefficienti hanno la seguente forma:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, cos \, kx \, dx \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, sen \, kx \, dx \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Coefficienti di Fourier

I coefficienti a_k e b_k della precedente proposizione prendono il nome di coefficienti di Fourier e la serie con essi costruita è detta serie di Fourier di f.

Perchè tali coefficienti siano ben definiti basta che f sia 2π-periodica e *sommabile* in $[-\pi, \pi]$.

Notiamo che grazie all'ipotesi di sommabilità i coefficienti sono ben definiti.
Infatti per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ si ha

$$|a_k| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||cos\, kx|\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$$

e per ogni $k = 1, 2, \dots$ si ha

$$|b_k| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||sen\, kx|\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

Coefficienti di Fourier

Si osservi che il coefficiente

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

è il valor medio di f sull'intervallo di periodicità .

Infine si noti che, grazie alla periodicità di f, nella definizione di tali coefficienti si potrebbe prendere, anzichè l'intervallo $[-\pi, \pi]$, un qualunque altro intervallo di ampiezza 2π (spesso negli esercizi useremo per esempio l'intervallo $[0, 2\pi]$).

Banale, ... ma non troppo

Esame del 21 - 9 - 2011

Domanda a risposta multipla

Il coefficiente di Fourier a_2 della funzione $f(x) = 9 + \cos 4x + 3 \sin 2x$ è
a) $a_2 = 1$ b) $a_2 = 3$ c) $a_2 = 2$ d) $a_2 = 0$.

Soluzione: d)

Esercizio

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier delle seguenti funzioni periodiche.

(a) $f(x) = \sin(3x) - 5\cos(7x)$

(b) $f(x) = 5\sin(7x)\cos(7x) - 8$

Soluzioni

(a) La funzione assegnata

$$f(x) = \sin(3x) - 5\cos(7x)$$

coincide con il suo sviluppo in serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

Infatti, basta osservare che

$$a_7 = -5, \qquad a_n = 0 \qquad \forall n \neq 7$$

$$b_3 = 1, \qquad b_n = 0 \qquad \forall n \neq 3.$$

(b) La funzione assegnata

$$f(x) = 5\sin(7x)\cos(7x) - 8$$

coincide con il suo sviluppo in serie di Fourier. Infatti, utilizzando le proprietà delle funzioni trigonometriche, $f(x)$ può essere riscritta come

$$f(x) = \frac{5}{2} \cdot 2\sin(7x)\cos(7x) - \frac{16}{2} = \frac{5}{2}\sin(14x) - \frac{16}{2}$$

da cui segue che

$$a_0 = -16, \qquad a_n = 0 \qquad \forall n > 0$$

$$b_{14} = \tfrac{5}{2}, \qquad b_n = 0 \qquad \forall n \neq 14.$$

Coefficienti di Fourier di funzioni pari e dispari

Andiamo a considerare due casi particolari: quello in cui f sia una *funzione pari* e quello in cui f sia una *funzione dispari*.

Supponiamo che f sia 2π-periodica e pari (i.e. $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Allora ricordando che anche il coseno è pari, mentre il seno è dispari, si ha che $f(x)\, cos\, kx$ risulta una funzione pari e $f(x)\, sen\, kx$ dispari e quindi

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen\, kx\, dx = 0 \qquad k = 1, 2, \dots \quad .$$

Coefficienti di Fourier di funzioni pari e dispari

In maniera analoga, supponiamo che f sia 2π-periodica e dispari (i.e. $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Allora si ha che $f(x)\, cos\, kx$ risulta una funzione dispari e $f(x)\, sen\, kx$ pari e quindi

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen\, kx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, sen\, kx\, dx \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Esercizi

Delle seguenti funzioni definite in $(-\pi, \pi]$ e prolungate per periodicità in tutto $\mathbb{R}$, si calcolino i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier a fianco indicati.

(a) $f(x) = 2\sin(3x) - |x|, \quad x \in (-\pi, \pi]$ — b_3

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\cos x} & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{se } -\pi \le x \le -\frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \end{cases}$ — a_1

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi) \\ -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ — a_2

(d) $f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$ — $a_0,\ b_0\ , b_1,\ b_2$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{se } -\pi \le x \le -\frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \end{cases}$ — $a_0,\ b_0\ , b_1,\ b_2$

Soluzioni

(a)

$$f(x) = 2\sin(3x) - |x|, \quad x \in (-\pi, \pi] \qquad b_3$$

Si ha che $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, dove $f_1(x) = 2\sin(3x)$ e $f_2(x) = -|x|$ e dunque, per linearità , il coefficiente b_3 di f è dato dalla somma dei coefficienti $b_3^{(1)}$ di f_1 e $b_3^{(2)}$ di f_2. Si ha, per definizione, che $b_3^{(1)} = 2$, mentre $b_3^{(2)} = 0$ perché f_2 è pari.
Pertanto

$$b_3 = 2 + 0 = 2.$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\cos x} & \text{se } \ |x| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{se } \ -\pi \le x \le -\frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \end{cases} \qquad a_1$$

Poiché $\frac{(-x)^3}{\cos(-x)} = -\frac{x^3}{\cos x}$ la funzione assegnata è una funzione dispari. Ne segue che

$$a_1 = 0.$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x \in [0, \pi) \\ -1 & \text{se } \ x \in [-\pi, 0) \end{cases} \qquad a_2$$

La funzione assegnata è una funzione dispari. Ne segue che

$$a_2 = 0.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{se } \; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \; -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad a_0, \; b_0 \,, b_1, \; b_2$$

Poiché $|\sin(-x)| = |\sin x|$ la funzione assegnata è una funzione pari. Ne segue che

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0.$$

Infine, per definizione,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } \; |x| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{se } \; -\pi \le x \le -\frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \end{cases} \qquad a_0, \; b_0 \; , b_1, \; b_2$$

Poiché $(-x)^4 = x^4$ la funzione assegnata è una funzione pari. Ne segue che

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0.$$

Infine, per definizione,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5 \cdot 2^9} = \frac{\pi^4}{2\,560}.$$

Domanda d'esame

Domanda a risposta multipla

Il coefficiente di Fourier b_2 della funzione $f(x) = |sen\, x|$ è

a) $b_2 = 1$ b) $b_2 = 3$ c) $b_2 = 22$ d) $b_2 = 0$.

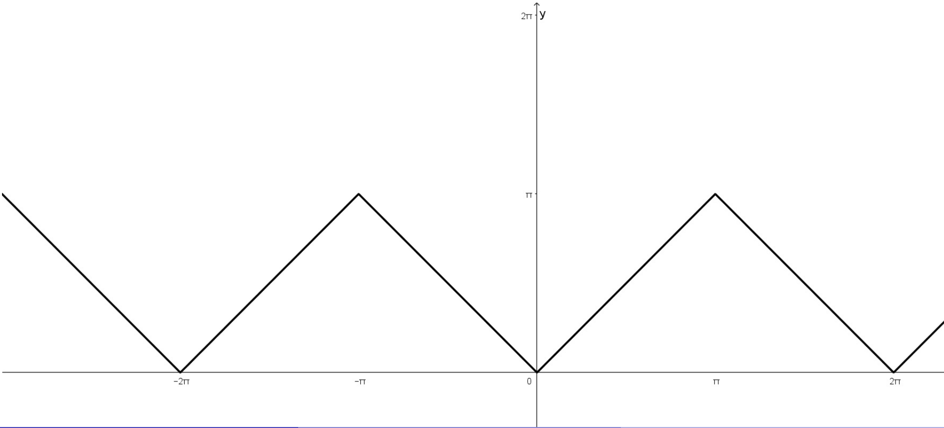
Soluzione: d) poichè tale funzione è pari.

Esame del 17 - 9 - 2012

Si scriva la serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = |x|$$

calcolandone esplicitamente i coefficienti. La funzione assegnata è illustrata in figura.



Essa ha periodo $T = 2\pi$ ed è una funzione pari. Quindi $b_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, mentre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right] = \frac{2}{\pi n^2} \cos(nx)|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \\ &= \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{se } \; n = 2k+1 \\ 0 & \text{se } \; n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier è

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).$$

Alcune classi di funzioni

Definiamo ora alcune classi di funzioni che useremo in seguito.

Diciamo che una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$ è continua a tratti in $[a, b]$ se esiste una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ del tipo

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

tale che

- per ogni $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ la funzione $f(x)$ è continua negli intervalli aperti (x_i, x_{i+1})

- nei punti x_i ha al più discontinuità eliminabili o di tipo salto.

Alcune classi di funzioni

Diciamo che una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$ è C^1 a tratti in $[a, b]$ (o *regolare a tratti in* $[a, b]$) se esiste una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ del tipo

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

tale che

• per ogni $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ la funzione $f(x)$ è C^1 (i.e. derivabile e con derivata continua) negli intervalli aperti (x_i, x_{i+1})

• nei punti x_i ha al più discontinuità eliminabili o di tipo salto

• in tali punti ha derivata destra e sinistra finita.

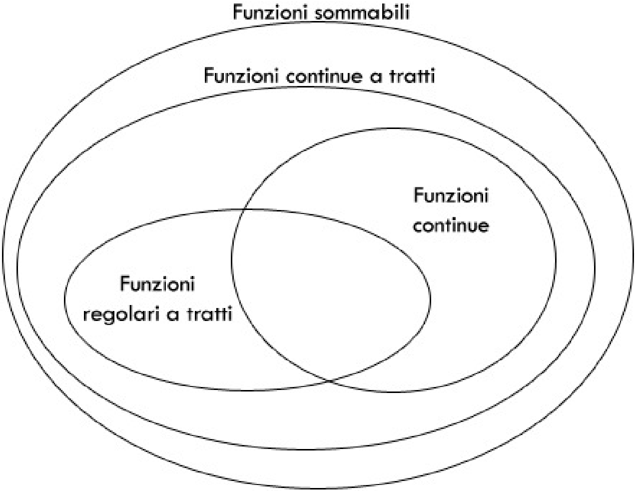
Alcune classi di funzioni

Diciamo che una funzione f definita in $\mathbb{R}$ è continua a tratti in $\mathbb{R}$ (o C^1 a tratti in $\mathbb{R}$) se lo è in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Osserviamo che

- Le funzioni continue sono anche continue a tratti.
- Le funzioni C^1 sono anche C^1 a tratti.
- Le funzioni continue a tratti in $[-\pi, \pi]$ (e quindi in particolare le continue e anche le C^1 a tratti) sono sommabili.
- Ma non vale il viceversa (si veda l'esempio $\frac{1}{|x|^\beta}$ con $\beta < 1$, funzione sommabile, ma non continua a tratti).

Classi di funzioni



Convergenza della serie di Fourier

Poter scrivere la serie di Fourier di f, basta che f sia sommabile e periodica.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

Per ottenere la convergenza

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx = f(x)$$

di tale serie a f bisogna richiedere delle ipotesi più forti.

Nei seguenti teoremi daremo delle condizioni sufficienti ad assicurare la convergenza puntuale, uniforme e totale.

Convergenza della serie di Fourier

Teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier

Sia f una funzione 2π-periodica e regolare a tratti in $\mathbb{R}$.

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

cioè alla media tra il limite destro e sinistro in x

$$f(x+) = \lim_{y \to x^+} f(y) \qquad f(x-) = \lim_{y \to x^-} f(y).$$

In particolare converge a $f(x)$ nei punti di continuità , cioè dove $f(x+) = f(x-)$.

Proposizione

Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente, la serie di Fourier di f converge uniformemente in ogni sottointervallo $[a, b]$ in cui $f(x)$ è continua.

Teorema sulla convergenza totale della serie di Fourier

Sia f una funzione 2π-periodica, continua e regolare a tratti in $\mathbb{R}$. Allora la serie di Fourier di f converge totalmente in $\mathbb{R}$ (e quindi uniformemente) alla funzione f.

Teorema sull'integrazione termine a termine per una serie di Fourier

Sia f una funzione 2π-periodica e regolare a tratti in $\mathbb{R}$. Allora fissati $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt)\, dt.$$

Questo teorema afferma che una serie di Fourier di una funzione regolare a tratti in $\mathbb{R}$ si può integrare termine a termine anche senza la convergenza uniforme della serie stessa.

Esame del 21 - 6 - 2012

Domanda a risposta multipla

(i) Si dia la definizione dei coefficienti di Fourier e di serie di Fourier.

(ii) Si enuncino i teoremi sulla convergenza puntuale ed uniforme per una serie di Fourier.

Data la funzione

$$f(x) = \sin(3x) - 5\cos(7x)\,,$$

(iii) si calcolino i suoi coefficienti di Fourier;

(iv) la serie di Fourier ad essa associata converge puntualmente? converge uniformemente?

Soluzione: (iii) $b_3 = 1\,, \quad b_k = 0$ per ogni $k \neq 3 \quad$ e $\quad a_7 = -5\,, \quad a_k = 0$ per ogni $k \neq 7\,.$ Converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$, poichè è C^1.

Esempio

Sia $f(x)$ la funzione, periodica di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & |x| < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcoliamo esplicitamente i coefficienti di Fourier di $f(x)$. Osservando che la funzione è pari, si ha

$$a_0 = -\frac{4}{\pi}\,,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cos\, kx\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2} cos\, kx\, dx = -\frac{2}{k\pi} sen\, 2k \qquad \forall k = 1, 2, \dots$$

e

$$b_k = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \dots .$$

Esempio

Quindi lo sviluppo di Fourier è

$$-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} sen\, 2k\ \ cos\, kx.$$

Usando il teorema sulla convergenza puntuale, si ha che la serie di Fourier di $f(x)$ converge nel punto di discontinuità $x = 2$ a

$$-\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} sen\, 2k\ \ cos\, 2k = \frac{1}{2}[f(2+) + f(2-)] = -\frac{1}{2}\,,$$

mentre nel punto di continuità $x = 3\pi$ la serie di Fourier di $f(x)$ converge a $f(3\pi) = 0\,.$

Esame del 17 gennaio 2013

Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π, definita per $t \in [0, 2\pi[$ da $f(t) = t - 2\pi$ (senza calcolare i suoi coefficienti di Fourier) la somma della sua serie di Fourier per $t = 2\pi$ vale uno dei seguenti valori

a) $-\pi$ b) π c) 2π d) -2π .

Soluzione: a)

Riepilogo sui diversi tipi di convergenza per la serie di Fourier

Data una funzione f 2π-periodica:

se f è continua e C^1 a tratti, allora la convergenza è totale (e quindi uniforme), la serie converge ad $f(x)$ e dunque f è sviluppabile in serie di Fourier;

se f è C^1 a tratti, allora la convergenza è puntuale, la somma della serie è $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ e la convergenza è uniforme in ogni intervallo in cui $f(x)$ è continua.

Testo d′esame

(i) Si dia la definizione di serie di Fourier di $f(x)$, con $f(x)$ periodica di periodo 2π e tale che

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < +\infty\,.$$

(ii) Data la funzione

$$f(x) = |cos(x/2)|\,,$$

si dica, senza calcolarne i coefficienti di Fourier, se la sua serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Soluzione

(ii) La serie converge totalmente perché la funzione è regolare a tratti e continua in $\mathbb{R}$.

Testo d'esame

(i) Data una funzione $f(t)$, regolare a tratti e periodica di periodo 2π, si definisca la serie di Fourier di $f(t)$, si dica quanto vale la sua somma $S(t)$ e dove converge uniformemente.
(ii) Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo π, definita da

$$f(t) = e^{2t}\,, \quad t \in [0, \pi[\,,$$

si calcoli $S(5\pi)$ (cioè il valore della somma della serie di Fourier nel punto $t = 5\pi$) e $f(5\pi)$.

Soluzione

(ii) Il punto $t = 5\pi$ è un punto di discontinuità per la funzione periodica $f(t)$ e dunque si ha

$$S(5\pi) = \frac{f(5\pi^-) + f(5\pi^+)}{2} = \frac{e^{2\pi} + 1}{2}.$$

Inoltre $f(5\pi) = f(0) = 1$.

Esercizio

Si scriva lo sviluppo in serie di Fourier delle seguenti funzioni prolungate per periodicità su tutto $\mathbb{R}$ e, ove a fianco indicata, utilizzare tale sviluppo per calcolare la somma della serie numerica.

(a) $f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi, \pi)$ $\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

(b) $f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$ $\qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x \in (0, \pi] \\ 0 & \text{se } \ x \in (-\pi, 0] \end{cases}$ $\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

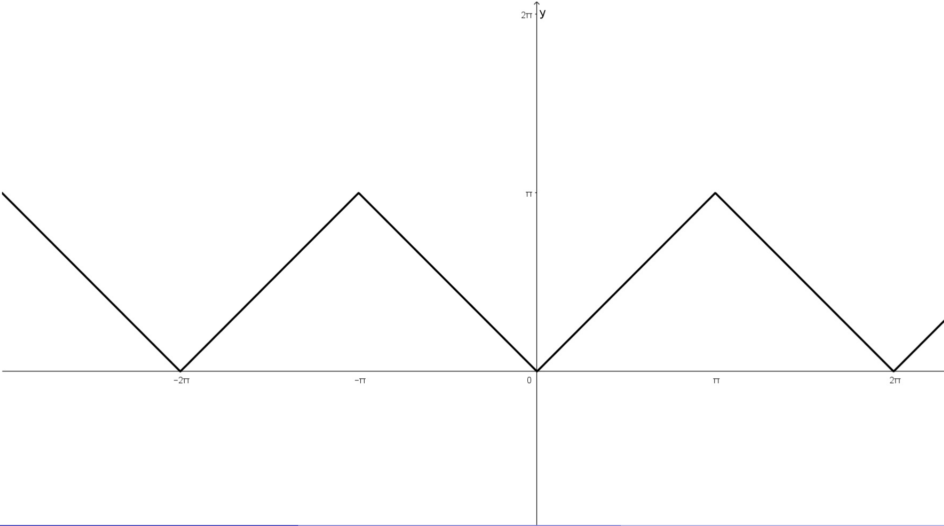
(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \ -\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

Soluzioni

(a)

$$f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

La funzione assegnata è illustrata in figura.



Essa ha periodo $T = 2\pi$ ed è una funzione pari. Quindi $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, mentre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx) dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \\
&= \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{se} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 2k. \end{cases}
\end{aligned}$$

In definitiva

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)x\right].$$

Poiché f è continua la serie di Fourier converge puntualmente (ed anche uniformemente) ad f $\forall x \in \mathbb{R}$. In particolare, per $x = 0$, si ha che

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

da cui segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b)

$$f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Essa ha periodo $T = 2\pi$ ed è una funzione pari. Quindi $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, mentre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right] = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] = \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\cos(nx)|_0^{\pi} \right] \\
&= 4\frac{(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Poiché f è continua la serie di Fourier converge puntualmente (ed anche uniformemente) ad f $\forall x \in \mathbb{R}$. In definitiva, grazie al teorema sulla convergenza puntuale, abbiamo che

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\,.$$

In particolare, per $x = \pi$, si ha che

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$$

da cui, essendo $\cos(n\pi) = (-1)^n$, segue che

$$4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

In particolare, per $x = 0$, si ha che

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

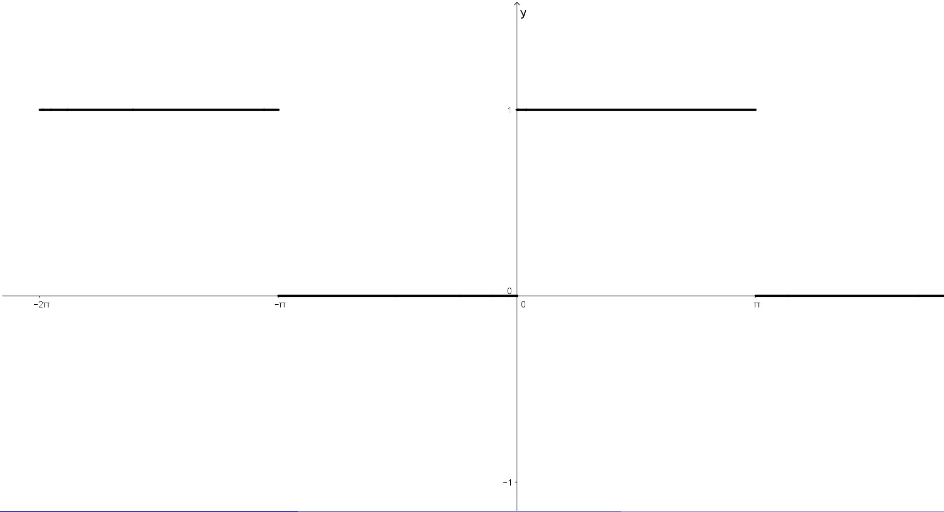
da cui segue che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in (0, \pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

La funzione assegnata è illustrata in figura.



Essa ha periodo $T = 2\pi$, ma non ha particolari simmetrie. È quindi comodo effettuare anticipatamente la traslazione $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, in modo tale che la nuova funzione $\tilde{f}(x)$ risulti ora dispari. Di conseguenza $\tilde{a}_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, mentre

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}(1-(-1)^n) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & \text{se} \ \ n = 2k+1 \\ 0 & \text{se} \ \ n = 2k, \end{cases}
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)x\right].$$

Di conseguenza

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)x\right].$$

La funzione è continua in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$, per cui la serie di Fourier converge puntualmente ad $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ in tale punto (ed anche uniformemente in tale intorno). Pertanto, osservando che

$$\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k,$$

si ha che

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

da cui segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \ -\pi \le x \le \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

Essa ha periodo $T = 2\pi$ ed è una funzione dispari. Da ciò segue che $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, mentre

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)|_0^{\pi/2}\right] \\
&= -\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Osservando che

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

e che

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \\ 0 & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

segue, in definitiva, che

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left[(2k+1)x\right] - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k}\sin\left(2kx\right).$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } \ |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \ -\pi \le x \le \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

La funzione assegnata è illustrata in figura.