Analisi Matematica II

Serie di potenze

Virginia De Cicco

Sapienza Univ. di Roma

Serie di potenze

In questa lezione introduciamo le serie di potenze e cominciamo col considerare serie di potenze centrate nell'origine.

Sia a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ un successione di numeri reali e sia $f_k(x) = a_k x^k$.
$f_0(x) = a_0$
$f_1(x) = a_1 x$
$f_2(x) = a_2 x^2$
$f_k(x) = a_k x^k$

La serie di funzioni

$$\sum_{k\geq 0} f_k(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \tag{1}$$

prende il nome di *serie di potenze* di coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$

Esempi

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} x^k \qquad \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} x^k \qquad \sum_{k\geq 0} k! x^k$$

Serie di potenze centrata in un punto x_0

Una serie di potenze centrata in un punto x_0

$$\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_k(x-x_0)^k + \dots \tag{2}$$

Esempi

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}(x-x_0)^k \qquad \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}(x-x_0)^k \qquad \sum_{k\geq 0} k!(x-x_0)^k$$

Presentiamo la teoria nel caso $x_0 = 0$, quella generale è del tutto analoga.

$$S(x) = \sum_{k\geq 0} f_k(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \ldots \qquad (3)$$

Si osservi che per ogni $k \geq 1$ si ha $f_k(0) = 0$ e quindi $S(0) = a_0$.

Quindi in $x = 0$ (o in generale in $x = x_0$) la serie converge.

Ne segue che l'insieme di convergenza puntuale (ICP) non può essere vuoto!

La serie (non è di potenze)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{x^n}$$

ha l'insieme di convergenza vuoto!

Raggio di convergenza

Per una serie di potenze si dimostra che ICP è un intorno di 0
avente raggio generalizzato ρ nullo, oppure infinito, oppure finito.

Quindi si verifica una delle seguenti circostanze:

i) la serie converge per $x = 0$;

ii) la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$;

iii) esiste un numero $\rho > 0$ tale che la serie converge se $|x| < \rho$ e non converge se $|x| > \rho$.

Raggio di convergenza

Si definisce il *raggio di convergenza* della serie di potenze (1) come l'estremo superiore $\rho \in [0, +\infty]$ dell'insieme X dei numeri reali x nei quali essa converge, cioè

$$\rho = \sup X, \qquad \text{dove} \quad X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k \geq 0} a_k x^k \quad \text{converge} \right\}.$$

Questo estremo superiore esiste sempre e, siccome $0 \in X$, si ha che $\rho \geq 0$.

Si verifica facilmente che il raggio di convergenza

$\rho = 0$ se e solo se $x = 0$, i.e. $X = \{0\}$

$\rho = +\infty$ se e solo se $X = \mathbb{R}$.

Inoltre vale il seguente teorema:

Teorema

Sia $0 < \rho < +\infty$.

Allora la serie di potenze (1) ha raggio di convergenza ρ se e solo se essa converge per $|x| < \rho$ e non converge per $|x| > \rho$.

Inoltre, se $0 < \rho$, essa converge assolutamente per $|x| < \rho$.

Infine converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo chiuso e limitato $[-a, a] \subset (-\rho, \rho)$.

Nulla si può dire, in generale, sulla convergenza della serie di potenze nei punti $x = -\rho$ e $x = \rho$.

Ricerca del raggio di convergenza

Vediamo ora dei criteri utili per trovare il raggio di convergenza.

Criterio di Cauchy-Hadamard Data la serie di potenze (1), se esiste il limite

$$l = \lim_{k \to +\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}},$$

allora il raggio di convergenza della serie (1) è

$$\rho = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \dfrac{1}{l} & 0 < l < +\infty \\ 0 & l = +\infty\,. \end{cases} \tag{4}$$

Criterio di D'Alembert

Data la serie di potenze (1), con $a_k \neq 0$ definitivamente, se esiste il limite

$$l = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

allora il raggio di convergenza della serie (1) è

$$\rho = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \dfrac{1}{l} & 0 < l < +\infty \\ 0 & l = +\infty . \end{cases} \tag{5}$$

Esempi

1) La serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} x^k$$

ha raggio di convergenza $\rho = 1$ (e quindi converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$). Inoltre non converge né in $x = -1$, né in $x = 1$.

Esempi

2) La serie di potenze

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} x^k$$

ha raggio di convergenza $\rho = 1$ (e quindi converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$). Inoltre converge in $x = -1$ (perché è una serie di Leibnitz) e diverge in $x = 1$.

Serie derivata e serie integrata

Data la serie di potenze (1), la serie ottenuta derivando la (1) termine a termine, cioè la serie

$$\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + k a_k x^{k-1} + \ldots \tag{6}$$

viene detta *serie derivata* della serie di potenze (1).

Analogamente, la serie ottenuta integrando la (1) termine a termine, cioè la serie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \ldots \tag{7}$$

viene detta *serie integrata* della serie di potenze (1).

Teorema

Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata e della sua serie integrata.

Teorema di derivazione e di integrazione delle serie di potenze

Se la serie di potenze (1) ha raggio di convergenza ρ non nullo e se $f(x)$ è la sua somma, cioè

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k, \qquad \forall x : |x| < \rho, \quad \text{con} \quad \rho > 0, \tag{8}$$

allora risulta anche

$$f'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}, \qquad \forall x : |x| < \rho, \tag{9}$$

e

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \qquad \forall x : |x| < \rho. \tag{10}$$

Serie di potenze di punto iniziale x_0

Più in generale si possono considerare serie di potenze *di punto iniziale* x_0, anche diverso da zero, cioè serie di potenze del tipo

$$\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k + \ldots$$

Lo studio di tali serie di potenze viene ricondotto a quelle di punto iniziale $x_0 = 0$ con il semplice cambio di variabile $y = x - x_0$;

se ρ è il suo raggio di convergenza e $0 < \rho < +\infty$, allora essa converge assolutamente per $|x - x_0| < \rho$ e non converge per $|x - x_0| > \rho$.

Inoltre converge totalmente negli intervalli del tipo $|x - x_0| \leq a$, con a arbitrario, $0 < a < \rho$.

Se $\rho = +\infty$, allora essa converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e converge totalmente negli intervalli del tipo $|x - x_0| \leq a$, con $a > 0$ arbitrario.

Gli stessi criteri precedenti forniscono metodi per calcolare il raggio di convergenza anche in questo caso.

Criterio di Abel

Sia data una serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_k (x - x_0)^k$$

avente raggio di convergenza $0 < \rho < +\infty$.

Se tale serie converge nel punto $x = x_0 + \rho$, i.e. se converge la serie numerica

$$\sum_{k\geq 0} a_k \rho^k,$$

allora la serie di potenze converge uniformemente in intervalli del tipo $[x_0 - \rho + \epsilon, x_0 + \rho]$, con $0 < \epsilon < \rho$. Lo stesso criterio vale nel punto $x = x_0 - \rho$.

Si osservi che tale convergenza è solo uniforme, mentre la convergenza totale, come già visto, è garantita solo negli intervalli del tipo $[x_0 - \rho + \epsilon, x_0 + \rho - \epsilon]$, con $0 < \epsilon < \rho$.

Esame del 19 aprile 2006

(i) Serie di potenze nel campo reale e complesso.

(ii) Si studi la convergenza assoluta e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n+1}\,.$$

Posto $w = e^{-x}$, la serie data diventa una serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n+1}$$

con raggio di convergenza unitario. Infatti

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{1}{l} = 1\,.$$

La regione di convergenza è data quindi da

$$e^{-x} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad x > 0\,.$$

Si ha convergenza totale per $x \geq a > 0$.

Esame del 12 settembre 2006

Si dica dove converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

e se ne calcoli la somma.

La serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$ e ha raggio di convergenza $\rho = 1$, quindi converge se $|x-1| < 1$ che equivale a $0 \leq x < 2$.

Per trovare la sua somma si osservi che tale serie è la serie integrata della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

che è una geometrica di ragione $x-1$. Quindi questa converge, se $|x-1| < 1$, a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}.$$

Si integra termine a termine la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$ nel suo intervallo di convergenza).

Esame del 12 settembre 2006

Per trovare la sua somma si osservi che

$$\int_1^x (y-1)^n dy = \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

La serie data è quindi la serie integrata della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

che è una geometrica di ragione $x-1$. Quindi questa converge, se $|x-1|<1$, a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}.$$

Si integra termine a termine la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (y-1)^n dy = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} (y-1)^n dy = \int_1^x \frac{1}{2-y} dy = -log(2-x).$$

Esercizi

Si determini l'insieme di convergenza della seguente serie e, se possibile, la sua somma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^n} x^n$$

La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ con $a_n = \frac{(-1)^n 3^n}{2^n}$. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamard il suo raggio di convergenza ρ si ricava da

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n 3^n}{2^n} \right|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \rho = \frac{2}{3}.$$

La serie è anche una serie geometrica. Dunque l'insieme di convergenza è $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e la sua somma vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-3x}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{3x}{2}\right)} = \frac{2}{2+3x} \quad \forall x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Esercizi

Si determini l'insieme di convergenza della seguente serie e, se possibile, la sua somma.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n3^n}(x+2)^n$$

La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x_0 = -2$. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamard si ricava il raggio di convergenza

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3n^{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{2}.$$

Per $x+2 = \frac{3}{2}$ la serie è quella armonica e quindi divergente. Per $x+2 = -\frac{3}{2}$ la serie converge per il criterio di Leibnitz. In definitiva la serie converge se $-\frac{3}{2} \leq x+2 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \forall x \in \left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio

Si determini l'insieme di convergenza delle seguenti serie e, laddove possibile, la loro somma.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n} x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n} x^n$

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}n)^{\sqrt{2}}} x^n$

(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\tan x)^{2n}}{2n+1}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Esercizio

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^{4n}$

(g) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x-5)^n}$

(h) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3x)^{n+1}}, \qquad x \neq 0$

Soluzioni

(a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n} x^n$$

La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamard si ricava il suo raggio di convergenza:

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{2n}} = \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \Rightarrow R = 0,$$

da cui segue che la serie converge solo per $x = 0$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n} x^n$$

La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Utilizzando il criterio di D'Alembert si ricava il suo raggio di convergenza:

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{4^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{4}{e} \Rightarrow R = \frac{e}{4}.$$

Rimane da controllare come si comporta la serie per $x = \pm\frac{e}{4}$. Utilizzando la formula di Stirling si ha che, per $n \to +\infty$,

$$\frac{n! e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}$$

e dunque non è verificata la condizione necessaria. Pertanto la serie converge $\forall x \in \left(-\frac{e}{4}, \frac{e}{4}\right)$.

(c)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$$

La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamard si ricava il raggio di convergenza

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2.$$

Per $x = \pm 2$ non è verificata la condizione necessaria e dunque la serie converge $\forall x \in (-2, 2)$.

(d)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}n)^{\sqrt{2}}} x^n$$

La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamard si ricava il raggio di convergenza

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt{2}n)^{\sqrt{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}n)^{\frac{\sqrt{2}}{n}}} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Per $x = 1$ la serie è armonica generalizzata convergente, perché $\sqrt{2} > 1$. Per $x = -1$ la serie converge per il criterio di Leibnitz. In definitiva la serie converge $\forall x \in [-1, 1]$.

(e)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\tan x)^{2n}}{2n+1}, \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

Utilizzando la sostituzione $t=(\tan x)^2$ la serie assegnata può essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2n+1} \quad t\in[0,1]$$

che è una serie di potenze nella variabile t, centrata in $t_0=0$. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamard si ricava il raggio di convergenza

$$l=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|}=\lim_{n\to+\infty}(2n+1)^{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow R=1.$$

Per $t=(\tan x)^2=1$ la serie soddisfa il criterio di Leibnitz da cui segue che la serie converge $\forall t\in[0,1]\Leftrightarrow\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

(f)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^{4n}$$

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $t=-(x-1)^4$. Essa converge se

$$|t|<1 \Leftrightarrow (x-1)^4<1 \Leftrightarrow 0<x<2$$

alla seguente somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-(x-1)^4\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-(x-1)^4\right)^n-1$$
$$=\frac{1}{1+(x-1)^4}-1=-\frac{(x-1)^4}{1+(x-1)^4}\quad \forall x\in(0,2).$$

(g)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x-5)^n}$$

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $t = -\frac{1}{x-5}$. Essa converge se

$$|t| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x-5|} < 1 \Leftrightarrow |x-5| > 1 \Leftrightarrow x < 4 \vee x > 6$$

alla seguente somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{x-5}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{x-5}} = \frac{x-5}{x-4} \quad \forall x \in (-\infty, 4) \cup (6, +\infty).$$

(h)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3x)^{n+1}}$$

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $t = \frac{1}{3x}$. Essa converge se

$$|t| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|3x|} < 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{3}$$

alla seguente somma

$$\frac{1}{3x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3x}\right)^n = \frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3x}} = \frac{1}{3x-1} \quad \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$