Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri
Sapienza Univ. di Roma

Singolarità e residui

Singolarità

Definizione di punto singolare isolato.

Data $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica sull'aperto $A \subseteq \mathbb{C}$,

un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice un *punto singolare isolato* o una *singolarità isolata* per f

se $z_0 \notin A$ (che equivale a dire che z_0 non è un punto di olomorfia di f),

ma esiste un intorno forato

$$B_r^*(z_0) := B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

tutto contenuto in A (che equivale a dire che i punti $z \in B_r^*(z_0)$ sono tutti punti di olomorfia di f).

Singolarità

Si osservi che un punto singolare isolato è necessariamente un punto di frontiera per l'aperto A di definizione di $f(z)$.

Inoltre se f_1, f_2 sono funzioni analitiche in A, allora

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

è analitica in A privato degli zeri di f_2.

Poiché ogni zero z_0 di f_2 è isolato,

si ha che $f(z)$ è analitica in un intorno forato $B_r^*(z_0)$

e dunque gli zeri del denominatore sono singolarità isolate per $f(z)$.

Esempi

1) La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

ha due singolarità isolate nei punti i e $-i$.

2) La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ha una singolarità isolata nel punto 0.

3) La funzione

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

ha una singolarità isolata nel punto 0.

Classificazione delle singolarità

Andiamo ora a classificare le singolarità isolate.

Sia $f \colon A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ una singolarità isolata.

Primo caso: singolarità eliminabili.

Supponiamo che esista in $\mathbb{C}$ il limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}.$$

Quindi si ha che la funzione

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in A, \\ \lambda, & z = z_0, \end{cases}$$

è analitica in un intorno di z_0 (ed è il prolungamento analitico di f).

In tal caso z_0 si dice una *singolarità eliminabile*.

Singolarità

Nell'esempio $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ si ha che $z = 0$ è una singolarità eliminabile.

Infatti

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

e dunque

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Analogamente $f(z) = \frac{\sin(z-4)}{z-4}$ si ha che $z = 4$ è una singolarità eliminabile.
infatti

$$\lim_{z \to 4} \frac{\sin(z-4)}{z-4} = 1.$$

Singolarità

Secondo caso: poli.

Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la funzione

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z)$$

ammetta un limite $\lambda \neq 0$ per $z \to z_0$, cioè

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lambda.$$

In tal caso si dice che z_0 è un *polo di ordine n* per f.

Singolarità

Come esempio consideriamo

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

e sia z_0 uno zero (di ordine n) di f_2 tale che f_1 non si annulli in z_0. Allora f_2 si fattorizza come

$$f_2(z) = (z - z_0)^n f_3(z)$$

con $f_3(z_0) \neq 0$. Quindi

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^n f_3(z)}$$

da cui segue che

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_3(z)} = \frac{f_1(z_0)}{f_3(z_0)} = \lambda \neq 0$$

e quindi z_0 è un polo di ordine n per f.

Esempi

1) La funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ha due poli semplici: i e $-i$.

Vediamo $z_0 = i$.
Si ha $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lambda.$$

e quindi $n = 1$

$$\lim_{z \to i} g(z) = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} = \lambda.$$

Esempi

2) La funzione $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ ha due poli doppi: 1 e -1.

Vediamo $z_0 = 1$.
Si ha $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lambda.$$

e quindi $n = 2$

$$\lim_{z \to 1} g(z) = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{1}{4} = \lambda.$$

Esempi

3) La funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$ ha un polo di ordine 4: 0.

Quindi $z_0 = 0$.

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lambda.$$

e quindi $n = 4$

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} z^4 \frac{\sin z}{z^5} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 = \lambda.$$

Singolarità

Terzo caso: singolarità essenziali

Un punto singolare isolato z_0
che non sia né una singolarità eliminabile, né un polo,

si dice una *singolarità essenziale*.

In tal caso non esiste il limite di f per $z \to z_0$, anzi questa è una condizione necessaria e sufficiente perché z_0 sia una singolarità essenziale.

Esempi

1) La funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in 0.

Infatti non esiste il suo limite per $z \to 0$;
basta guardare il comportamento della sua restrizione all'asse delle x che ha limiti diversi per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

2) La funzione $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ ha una singolarità essenziale in 0, poiché non esiste il limite per $x \to 0$.

3) La funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ ha una singolarità essenziale in 0.
Infatti per $z = x$ si ha

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty\,,$$

mentre per $z = iy$ si ha

$$\lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{-y^2}} = 0\,.$$

Osservazione

Possono esserci punti singolari non isolati.

Basta considerare la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

che ha come punti singolari i punti $z = 0$ e $z_k = \frac{1}{k\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}$;

poiché si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k\pi} = 0\,,$$

$z = 0$ non è isolato, ma punto di accumulazione di altri punti singolari.

Appello del 21 settembre 2011

Domanda a risposta multipla

La funzione $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^2}$ ha in $z = 0$

a) un polo di ordine 2

b) un polo semplice

c) una singolarità eliminabile

d) una singolarità essenziale

Soluzione: c)

Appello del 16 luglio 2013

(i) Si dia la definizione di singolarità isolata per una funzione $f(z)$ complessa di variabile complessa.

(ii) Si dia un esempio di singolarità non isolata.

(iii) Si dia la classificazione delle singolarità isolate.

(iv) Si cerchino e si classifichino le singolarità della seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(\sin z)^3} \, .$$

Appello del 16 luglio 2013

Soluzione: (iv) La funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(\sin z)^3}$$

ha le singolarità coincidenti con gli zeri del denominatore, cioè $z_k = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Per $k = 0$, la singolarità $z_0 = 0$ è un polo doppio, infatti

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} z^2 \frac{e^z - 1}{(\sin z)^3} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \frac{z}{\sin z} \frac{z^2}{(\sin z)^2} = 1.$$

Per $k \neq 0$, il punto $z_k = k\pi$ è un polo triplo; infatti in tale punto non si annulla il numeratore.
D'altra parte, usando che $\sin z = (-1)^k \sin(z - k\pi)$, si ha anche

$$\lim_{z\to z_k} (z - z_k)^3 \frac{e^z - 1}{(\sin z)^3} = (-1)^k \lim_{z\to z_k} \frac{(z - k\pi)^3}{(\sin(z - k\pi))^3} (e^z - 1) = (-1)^k (e^{k\pi} - 1) \in \mathbb{C},$$

(si osservi che $(-1)^k = (-1)^{3k}$).

Residui

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ una singolarità isolata.

Definizione di residuo

Si definisce *residuo di f in z_0* il numero

$$\mathrm{res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz,$$

dove γ è un circuito contenuto in A e contenente z_0 e nessuna altra singolarità di f.

Si noti che la definizione è ben posta poiché abbiamo visto che $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz$ non dipende dalla scelta del circuito. Si osservi che se z_0 è una singolarità eliminabile, allora per il teorema integrale di Cauchy si ha che $\mathrm{res}(f, z_0) = 0$.

Residui

La seguente proposizione dà una formula molto utile per calcolare il residuo *nel caso di un polo* e che non richiede integrazioni:

Proposizione

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo di ordine n. Allora

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big((z - z_0)^n f(z) \Big).$$

Residui

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big((z - z_0)^n f(z) \Big).$$

Osservazione

Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è un polo di ordine 1 (polo semplice) si ha

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Esempi

1) Sia

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

allora $z_0 = 0$ è un polo semplice perché $g(z) = z\frac{1}{\sin z}$ e

$$\lim_{z \to 0} g(z) = 1.$$

Inoltre

$$\text{res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z\frac{1}{\sin z} = 1.$$

Anche i punti $z_k = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ sono poli semplici con $\text{res}(f, k\pi) = (-1)^k$.
Infatti vale la seguente formula (verificarla per esercizio):

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - k\pi)$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$\text{res}(f, k\pi) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi)\frac{1}{\sin z} = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi)\frac{1}{(-1)^k \sin(z - k\pi)} = (-1)^k.$$

Residui

2) Sia

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

allora $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile e $\text{res}(f, 0) = 0$.

3) Sia

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2}$$

allora $z = \pi$ e $z = -\pi$ sono singolarità eliminabili. Infatti

$$\lim_{z \to \pi} \frac{\sin z}{(z-\pi)(z+\pi)} = -\lim_{z \to \pi} \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)(z+\pi)} = -\frac{1}{2\pi}$$

e

$$\lim_{z \to -\pi} \frac{\sin z}{(z-\pi)(z+\pi)} = -\lim_{z \to -\pi} \frac{\sin(z+\pi)}{(z-\pi)(z+\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Inoltre

$$\text{res}(f, \pi) = 0$$

e

$$\text{res}(f, -\pi) = 0.$$

Residui

Più in generale, data $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ sia z_0 uno zero semplice di f_2;
dunque $f_2(z_0) = 0$ e $f_2'(z_0) \neq 0$.
Supponiamo inoltre che $f_1(z_0) \neq 0$, allora f ha un polo semplice in z_0 (l'esempio 1 era il caso particolare con $f_1(z) = 1$ ed $f_2(z) = \sin z$).
In tal caso si ha

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f_2(z) - f_2(z_0)} f_1(z) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

Quindi si ha

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

Appello del 10 novembre 2017

Domanda a risposta multipla
Il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{1}{-1 - z^2}$$

in $z_0 = -i$ vale

(a i

(b 0

(c $-\frac{i}{2}$

(d $\frac{i}{2}$

Soluzione: c)
Infatti

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{-1 - z^2}, -i\right) = \frac{1}{-2z}\Big|_{z=-i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Calcolo di integrali per mezzo dei residui

Dalla definizione di residuo si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, z_0)$$

e questa formula viene spesso usata per calcolare l'integrale.

Questa formula può essere usata per calcolare l'integrale, se si sa calcolare il residuo, per esempio, come appena visto, nel caso di un polo ("derivare è meglio che integrare"!).

Appello del 3 febbraio 2010

Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2}\,dz,$$

dove γ è il bordo dell'insieme A definito da $A = \{z = x + iy : x^2 - 4x \leq y \leq 2\}$.

Soluzione:
Il punto π è un polo semplice per la funzione integranda con residuo uguale a 1 e cade all'interno dell'insieme A. Si ha che l'integrale è pari a $2\pi i$.

Appello del 11 novembre 2011

(i) Si dia la formula integrale di Cauchy per una funzione olomorfa e la formula delle sue derivate successive.
(ii) Usando il punto (i) si calcolino i seguenti integrali

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}}\ dz, \qquad \int_\gamma \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3}\ dz,$$

dove γ è una curva chiusa contenente il punto $\frac{\pi}{2}$.

Soluzione: Si ha

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}}\ dz = 2\pi i \sin\frac{\pi}{2} = 2\pi i$$

e

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3}\ dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = -\pi i.$$

Appello 20 febbraio 2013

(i) Data una funzione $f(z)$ definita in $\mathbb{C}$ si dia la definizione di residuo di f in un punto z_0.

(ii) Si individuino le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1},$$

se ne dia la classificazione e si calcoli il residuo in tali punti.

Soluzione: (ii) Le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

sono $i, -i$;

si tratta di due poli semplici e i residui di f in tali punti sono

$$\text{res}(f, i) = \frac{1}{2i}, \qquad \text{res}(f, -i) = -\frac{1}{2i}.$$

Appello del 10 settembre 2008

(i) Si dia la definizione di residuo e si illustrino i diversi metodi per calcolarlo.

(ii) Si calcolino i residui della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z(z + \frac{\sqrt{2}}{4})}$$

nelle sue singolarità isolate.

Appello del 10 settembre 2008

Soluzione;
(ii) La singolarità $z = 0$ è eliminabile; infatti

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(2z)}{z} = \lim_{z\to 0} 2\frac{\sin(2z)}{2z} = 2,$$

e quindi

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(2z)}{z(z+\frac{\sqrt{2}}{4})} = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

Ne segue che $\operatorname{res}(f,0) = 0$.

La singolarità $z = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ è un polo semplice e

$$\operatorname{res}(f, -\frac{\sqrt{2}}{4}) = \lim_{z\to -\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{\sin(2z)}{z} = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Il teorema dei residui

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ e sia γ un circuito in A.
Siano $z_1, \ldots, z_r$ dei punti singolari isolati di f appartenenti all'aperto D interno a γ.
Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \mathrm{res}(f, z_k).$$

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}dz, \quad \gamma(t) = 3e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione:
La curva γ è la circonferenza di centro l'origine e di raggio 3. La funzione integranda è il rapporto di due funzioni intere e quindi le sue singolarità coincidono con i numeri complessi che ne annullano il denominatore:

$$(\sin z)^3(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \vee z = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le uniche singolarità racchiuse da γ sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Quest'ultima è un polo semplice per $f(z)$.

Da Casalvieri-De Cicco

Per quanto riguarda la prima, si osservi che

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} z = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{-z^3} = -1$$

e quindi anche $z_0 = 0$ è un polo semplice. Pertanto per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz = 2\pi i \left[\text{res}\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 0 \right) + \text{res}\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 1 \right) \right]$$

e poiché

$$\text{res}\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 0 \right) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} z = -1$$

$$\text{res}\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 1 \right) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} (z-1) = \frac{1}{(\sin 1)^3}$$

allora

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(\sin 1)^3} - 1 \right).$$