Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri
Sapienza Univ. di Roma

Esponenziale e logaritmo

La funzione esponenziale in campo complesso

Definiamo la *funzione esponenziale in campo complesso*. Essa sarà una funzione olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ tale che la sua restrizione all'asse reale coincida con la funzione $f(x) = e^x$ in $\mathbb{R}$.

Definizione:

$$f(z) = e^z := e^x(\cos y + i \sin y), \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Esempi

$$e^2 = e^2(\cos 0 + i \sin 0) = e^2,$$

$$e^i = e^0(\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1,$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = e^0(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = e^0(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$e^{i\pi} = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = -1.$$

La funzione esponenziale in campo complesso

Definizione:

$$f(z) = e^z := e^x(\cos y + i \sin y), \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Si ha che se $y \in (-\pi, \pi]$, allora $\operatorname{Arg} e^z = \mathrm{Im}(z) = y$.

Si ha che $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x > 0$, che implica che $e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Attenzione: non si può parlare di positività di e^z poichè in $\mathbb{C}$ non c'è una relazione d'ordine naturale.

Inoltre per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $|e^{iy}| = e^0 = 1$ e vale la cosiddetta *formula di Eulero*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Forma esponenziale dei numeri complessi

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Al posto di y metto $\operatorname{Arg} z$, quindi

$$e^{i \operatorname{Arg} z} = \cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

da cui si ha

$$|z| e^{i \operatorname{Arg} z} = |z| (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Quindi si ha che ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ (avente modulo ρ e argomento θ) si può scrivere nella forma *esponenziale*

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

Dunque i punti del tipo $\rho e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, sono tutti e soli i punti della circonferenza $|z| = \rho$ di centro 0 e raggio ρ.

Appello del 17 settembre 2012

Domanda a risposta multipla

Calcolando $e^{5\frac{\pi}{2}i}$ si ottiene

a) $5i$ b) -5 c) $-i$ d) i .

Soluzione : d)

Esercizio

Usando la forma esponenziale dei numeri complessi, si verifichi che

$$\operatorname{Arg}\frac{1}{z} + \operatorname{Arg} z = 0, \quad z \neq 0.$$

Utilizzando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi

$$z = \rho e^{i\theta},$$

si ha che

$$\operatorname{Arg}\frac{1}{z} = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\rho e^{i\theta}}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\rho} e^{-i\theta}\right) = -\theta = -\operatorname{Arg} z.$$

Si osservi che

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{|z|}.$$

La funzione esponenziale in campo complesso

Si verifica facilmente che

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

La seconda, riscritta nella forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

dà un legame fondamentale fra i cinque numeri $0, 1, e, i, \pi$ più importanti della matematica.

La funzione esponenziale in campo complesso

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

La funzione esponenziale gode delle seguenti proprietà:

1) Per ogni $z = x + iy$ con $y = 0$ si ha che $f(z) = e^x$, ossia è un'estensione della funzione esponenziale in campo reale.

2) La funzione e^z è continua in tutto $\mathbb{C}$ poiché la sua parte reale $u(x, y) = e^x \cos y$ e la sua parte immaginaria $v(x, y) = e^x \sin y$ sono continue in $\mathbb{R}^2$.

3) La funzione e^z è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ poiché ammette le derivate parziali continue e vale **(CR1)**.

Inoltre ammette come derivata se stessa, poiché dalla **(CR1)** si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

La funzione esponenziale in campo complesso

4) La funzione e^z è periodica di periodo $2\pi i$, poiché per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^z,$$

dove si è usata la periodicità del seno e del coseno.

Quindi, essendo periodica, e^z non si può invertire in tutto $\mathbb{C}$.

5) Per la funzione e^z vale la formula usuale

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$$

che si dimostra usando le formule della somma per il seno e il coseno.

Condizioni di Cauchy-Riemann

Usando la forma esponenziale dei numeri complessi, le condizioni di Cauchy-Riemann in un aperto A non contenente l'origine si possono scrivere in modo equivalente in coordinate polari come segue:

$$(CR3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Infatti se f è derivabile, allora

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial(\rho e^{i\theta})}{\partial \rho} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}e^{i\theta}$$

e

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\rho i e^{i\theta}.$$

Inoltre si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{1}{e^{i\theta}}.$$

Appello del 9 gennaio 2008

Si studi l′insieme di definizione, l′aperto di continuità e di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

$$e^z - 1 = 0 \qquad sse \qquad e^{z+2k\pi i} - 1 = 0 \qquad sse \qquad z_k = 2k\pi i, k \in Z.$$

L′insieme di definizione, l′aperto di continuità e di olomorfia è l′insieme

$$\mathbb{C} \setminus \{z_k = 2k\pi i, k \in Z\}.$$

Esercizio

Si studi l'insieme di definizione, l'aperto di continuità e di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z}.$$

$$e^z = 0 \qquad sse \qquad MAI$$

L'insieme di definizione, l'aperto di continuità e di olomorfia è l'insieme

$$\mathbb{C}.$$

La funzione logaritmo in campo complesso

Definiamo ora la *funzione logaritmo in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la ben nota funzione $f(x) = \log x$ in campo reale.

Dato $z \in \mathbb{C}^*$ si definisce $\log z$ nel seguente modo:

$$w = \log z \qquad \text{se e solo se} \qquad z = e^w,$$

ossia si cerca di invertire la funzione esponenziale complessa.

Ma a causa della periodicità di e^w ci sono infiniti valori di $w = u + iv$ per cui $z = e^w$ e dunque infinite determinazioni del logaritmo (si dice che $\log z$ è una funzione *polidroma*).

La funzione logaritmo in campo complesso

Cerchiamo la parte reale u e la parte immaginaria v di $w = \log z$.

Da

$$w = \log z \qquad \text{se e solo se} \qquad z = e^w,$$

si ha che

$$|z|\big(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\big) = e^u(\cos v + i\sin v),$$

da cui segue che $v = \arg z$ e $u = \log|z|$ (si noti che questo logaritmo è quello nei numeri reali, poiché $|z| \in \mathbb{R}$).

Quindi

$$\log z = \log|z| + i\arg z.$$

Si vede ora chiaramente che $\log z$ è una funzione a più valori i quali differiscono per multipli interi relativi di $2\pi i$ (poiché $\arg z$ è definita a meno di multipli di 2π).

La funzione logaritmo in campo complesso

Si definisce allora la cosiddetta *determinazione principale* $\operatorname{Log} z$ del logaritmo,

usando la determinazione principale $\operatorname{Arg} z$ dell'argomento $\arg z$;

infatti si pone

$$\operatorname{Log} z := \log|z| + i \operatorname{Arg} z = \log\rho + i\theta.$$

Quindi $u = \mathrm{Re}(\operatorname{Log} z) = \log|z|$ e $v = \mathrm{Im}(\operatorname{Log} z) = \operatorname{Arg} z$.

La funzione logaritmo in campo complesso

Vediamo alcuni esempi:

Per $z = 1$ si ha $\mathrm{Log}(1) = 0$, poiché $|z| = 1$ e $\mathrm{Arg}(z) = 0$;

per $z = -1$ si ha $\mathrm{Log}(-1) = \log|-1| + i\pi = i\pi$, poiché $|z| = 1$ e $\mathrm{Arg}(z) = \pi$ (si ricordi che in campo reale non è definito il logaritmo dei numeri negativi);

per $z = -2$ si ha $\mathrm{Log}(-2) = \log|-2| + i\pi = \log 2 + i\pi$, poiché $|z| = 2$ e $Arg(z) = \pi$;

per $z = i$ si ha $\mathrm{Log}\, i = \log|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$, poiché $|z| = 1$ e $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$;

per $z = -i$ si ha $\mathrm{Log}(-i) = \log|-i| - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}$, poiché $|z| = 1$ e $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

La funzione logaritmo in campo complesso

La funzione logaritmo gode delle seguenti proprietà:

1) La funzione $\operatorname{Log} z$ è definita in $\mathbb{C}^*$, cioè per $z \neq 0$.

2) Per ogni $z = x + iy$, con $y = 0$ e $x > 0$, si ha che $\operatorname{Log} z = \log x$, ossia è un'estensione della funzione logaritmo in campo reale.

3) La funzione $\operatorname{Log} z$ è continua in $\mathbb{C}^{**}$, poiché la sua parte immaginaria $\operatorname{Arg}(z)$ è continua solo in $\mathbb{C}^{**}$, cioè è discontinua sul semiasse reale negativo.

La funzione logaritmo in campo complesso

4) La funzione $\operatorname{Log} z$ è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$; infatti non può essere derivabile nei suoi punti di discontinuità, cioè sul semiasse reale negativo.

Altrove è olomorfa poiché ammette le derivate parziali continue e vale la condizione di Cauchy-Riemann in coordinate polari

$$(CR3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Infatti, se $f(z) = \operatorname{Log} z$, essendo $f(\rho, \theta) = \log(\rho) + i\theta$ si ha che

$$\frac{\partial f(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{1}{i\rho}\,\frac{\partial f(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{i\rho}\,i = \frac{1}{\rho}.$$

La funzione logaritmo in campo complesso

Dimostriamo che

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Infatti scrivendo z nella forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$ si ha

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = f'(z)\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = f'(z)e^{i\theta},$$

da cui segue che

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial f(z)}{\partial \rho},$$

e quindi

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial}{\partial \rho}(\log \rho + i\theta) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z}.$$

Appello del 9 marzo 2011

Domanda a risposta multipla
Una delle seguenti funzioni è derivabile in senso complesso nel punto $z = e$. Quale?

a) $\operatorname{Arg}(-z)$ b) $\operatorname{Log}(-z)$ c) $\operatorname{Log} z$ d) $|\operatorname{Log}(-z)|$.

Soluzione : c)

Appello del 17 gennaio 2013

(i) Si dia la definizione di $\operatorname{Log} z$, con $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Si studino gli insiemi di definizione, di continuità e di olomorfia della seguente funzione

$$f(z) = \operatorname{Log}(z + 2i).$$

Soluzione:
L'insieme di definizione è $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. L'aperto dove la funzione è continua e olomorfa è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = -2\} .$$

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla
La funzione $f(z) = \text{Log}(z - i)$ è olomorfa nell'insieme

a) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = -1\}$

b) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 1, y = 1\}$

c) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = 1\}$

d) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 1, y = -1\}$.

Soluzione: c)

Appello del 9 marzo 2011

Domande a risposta multipla
La funzione $f(z) = \frac{1}{\mathrm{Log}(z-2)}$ è definita in

a) $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$

b) $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$

c) $\mathbb{C} \setminus \{2\}$

d) $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$.

Soluzione : d)

Appello del 17 Gennaio 2014

Domande a risposta multipla
L'insieme di definizione di

$$f(z) = \mathrm{Log}(|e^z|)$$

è

a) $\mathbb{C}^*$ b) $\mathbb{C}^{**}$ c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C} \setminus \{e\}$.

Soluzione : c)

Appello del 20 Settembre 2013

(i) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}(-5 - 4i + |z|^2 i).$$

(ii) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = \mathrm{Log}(5 - 4i + |z|^2 i).$$

(iii) Si rappresentino graficamente ciascuno degli insiemi trovati.

Appello del 20 Settembre 2013

Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}(-5 - 4i + |z|^2 i).$$

Soluzione : (i) La funzione f è definita in tutto $\mathbb{C}$, in quanto il suo argomento non può annullarsi.

Essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 2\}$;

infatti $\mathrm{Re}(-5 - 4i + |z|^2\, i) = -5 \leq 0\,,$

$\mathrm{Im}(-5 - 4i + |z|^2\, i) = -4 + |z|^2$ e quest'ultima è uguale a 0 se e solo se z appartiene alla circonferenza $|z| = 2\,.$

Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = \mathrm{Log}(5 - 4i + |z|^2 i).$$

Soluzione :
(ii) La funzione g è definita in tutto $\mathbb{C}$, in quanto il suo argomento non può annullarsi.

Essa è olomorfa in $\mathbb{C}$ in quanto $\mathrm{Re}(5 - 4i + |z|^2 i) = 5 > 0\,.$

Appello del 20 luglio 2009

(i) Si dia la definizione di $\log z$.

(ii) Si dia la definizione di $\operatorname{Log} z$ (determinazione principale).

(iii) Utilizzando tale definizione si dimostri che

$$\operatorname{Arg} z = -i \operatorname{Log}\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Soluzione:
Siccome

$$\operatorname{Log}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \log\left|\frac{z}{|z|}\right| + i \operatorname{Arg} \frac{z}{|z|}$$

e poiché $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$ e $\operatorname{Arg} \frac{z}{|z|} = \operatorname{Arg} z$, si ha che

$$\operatorname{Log}\left(\frac{z}{|z|}\right) = i \operatorname{Arg} z$$

e quindi

$$\operatorname{Arg} z = -i \operatorname{Log}\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Appello del 9 marzo 2011

Si studino l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della seguente funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}(z^4 - 1).$$

Soluzione:
L'insieme di definizione è

$$\mathbb{C} \setminus \{1, -1, i, -i\}.$$

Essendo

$$\mathrm{Re}(z^4 - 1) = -1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

e

$$\mathrm{Im}(z^4 - 1) = 4xy(x^2 - y^2),$$

l'aperto di olomorfia è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : -1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \leq 0\,,\ 4xy(x^2 - y^2) = 0\}\,.$$

L'aperto di olomorfia è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : -1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \leq 0\,,\ 4xy(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Dalla condizione $xy(x^2 - y^2) = 0$ si hanno i tre casi: $x = 0$, $y = 0$ e $y = \pm x$.

Mettendo $x = 0$ nella condizione $-1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \leq 0$, si ha $-1 \leq y \leq 1$ e quindi si ha il segmento verticale compreso tra $-i$ e i.

Analogamente, per $y = 0$, si ha $-1 \leq x \leq 1$ e quindi si ha il segmento orizzontale compreso tra -1 e 1.

Per $y = \pm x$ la condizione $1 - x^4 - y^4 + 6x^2y^2 \geq 0$ è sempre soddisfatta. Quindi la funzione è olomorfa nel piano complesso privato delle 4 bisettrici e dei 2 segmenti descritti prima. Si osservi che essi hanno origine nei quattro punti $1, -1, i, -i$.

Appello del 10 settembre 2008

Si dia l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}(e + e^z).$$

Soluzione: la funzione non è definita nei punti z tali che $e^z = -e$.

Ciò equivale a dire

$$e^x(\cos y + i \sin y) = -e,$$

da cui si ha $x = 1$ e $y = \pi + 2k\pi = (1 + 2k)\pi$. Quindi l'insieme di definizione è

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{1 + (2k+1)\pi i\}.$$

Appello del 10 settembre 2008

L'aperto di olomorfia è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : e^x \sin y = 0, e + e^x \cos y \leq 0\}.$$

Si verifica facilmente che coincide con l'insieme

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big([1, +\infty) \times \{(1 + 2k)\pi\}\Big).$$

Infatti dall'equazione $e^x \sin y = 0$ si ha $y = m\pi$, da cui $\cos(m\pi) = (-1)^m$. Quindi nella seconda disequazione si ha $e + e^x(-1)^m \leq 0$. Distinguiamo i due casi:
m pari implica $e + e^x \leq 0$ che non è mai soddisfatta, quindi $m = 2k + 1$ e dunque

$$y = (1 + 2k)\pi.$$

Inoltre m dispari implica $e - e^x \leq 0$ da cui $x \in [1, +\infty)$.