Prova di Analisi Matematica II - 20 Luglio 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) Il residuo della funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + \frac{3}{z}$ in $z_0 = 0$ è

$$\lim_{z\to 0} z^2\left(e^{1/z^2} + \frac{3}{z}\right) = z^2\left(e^{1/z^2} + \frac{3}{z} + 1 - 1\right)$$

$$= \frac{e^{1/z^2}}{1/z^2} - z^2 + 3z + z^2 = \frac{e^{1/z^2} - 1}{1/z^2} + 3z + z^2 = 1$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

2) La somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1, \quad -1 < x < 1$$

è la funzione

(a) $-log(1-x)$
(b) $log(1-x)$
(c) $-log(1+x)$
(d) $log(1+x)$.

$$-\log(1-x) = -\sum -\frac{x^n}{n}$$
$$= \sum \frac{x^n}{n}$$

$$\log(x+1) = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

3) La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \sqrt{-2 + (|z-3|^2 - 1)i} = \sqrt{-2+(|x+iy-3|^2-1)i}$$

è olomorfa

CAUCHY-RIEMANN

$$\frac{2i(x+iy-3)}{\sqrt{-2+(|z-3|^2-1)i}} = -\frac{i\cdot i\, 2(x+iy-3)}{\sqrt{-2+(|x+iy-3|^2-1)i}}$$

(a) in $\mathbb{C}$
(b) in $\mathbb{C}^*$
(c) in $\mathbb{C}$ privato di un asse
(d) in $\mathbb{C}$ privato di una circonferenza.

4) L'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = t^2\, sen((\overset{\omega}{-2+i})t) =$$

è

$$\mathcal{L}[g(t)] = F(s) \longrightarrow \mathcal{L}[t \cdot g(t)] = -F(s)'$$

$$t \sin((-2+i)t) = \frac{2s(i-2)}{(s^2+(i-2)^2)^2}$$

$$\downarrow$$

$$t^2 \sin \omega t = -\left(\frac{2(i-2)(s^2+(i-2)^2)^2 - 8s^2(i-2)(s^2+(i-2)^2)}{(s^2+(i-2)^2)^4}\right)$$

$$\lim_{s\to\infty} -\left(\frac{2(i-2)(s^2+(i-2)^2)^2 - 8s^2(i-2)(s^2+(i-2)^2)}{(s^2+(i-2)^2)^4}\right) = \frac{2s^4(i-2)\left(1-\frac{(i-2)^2}{s^2}\right)^2 - 8s^4(i-2)\left(1+\frac{(i-2)^2}{s^2}\right)}{s^8\left(1+\frac{(i-2)}{s^2}\right)^4} = 0$$

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) -2.

ESERCIZIO 2. (**10 pt.**)

(i) Sia dia la definizione del logaritmo complesso specificandone l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia.

(ii) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = Log(Arg\ z),\ z \in \mathbb{C}.$$

ESERCIZIO 3. (**10 pt.**)

(i) Si dia la definizione di singolarità isolata per una funzione di variabile complessa.

(ii) Si classifichino le singolarità isolate.

(iii) Si classifichino le singolarità isolate della seguente funzione

$$f(z) = \frac{sen(2z)}{sen(4z)},\ z \in \mathbb{C}. \ =$$

ES 2

DEFINITO $Arg(z) = 0 \quad z \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{C} / \{z = x + iy;\ x = 0;\ y \neq 0\}$

$\hookrightarrow$ SSE Passo $|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \to \mathrm{sen}\,\theta = 0$

OLOMORFO

$Re(Arg(z)) = 0 \qquad Arg(z)$ per $x = 0$ e $y < 0$ è uguale a $-\pi/2$

$Im(Arg(z)) \leq 0 \qquad \mathbb{C} / \{0, -\pi/2\}$

ES 3

$\mathrm{sen}\,4z = 0 \qquad 4z = k\pi \qquad z = \frac{k\pi}{4}$

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{\mathrm{sen}(2z)}{\cos(4z)} \qquad k = 1 \quad \frac{\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{2}) \rightsquigarrow 1}{\mathrm{sen}(k\pi) \rightsquigarrow 0}$$

$$k = 2 \quad \frac{\mathrm{sen}(k\pi) \rightsquigarrow 0}{\mathrm{sen}(2k\pi) \rightsquigarrow 0}$$

SE K È PARI SINGOLARITÀ ELIMINABILE

SE K È DISPARI POLO-SEMPLICE