

# Analisi Matematica II

## **Analisi complessa**

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri  
Sapienza Univ. di Roma

## Serie di Laurent

# Serie bilatere e serie di Laurent

Introduciamo la nozione di corona circolare. Si definisce *corona circolare* di centro  $z_0$  un insieme del tipo

$$C_{R_1 R_2} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq +\infty\}.$$

Esempi di insiemi di questo tipo sono gli interni forati di raggio  $R_2$

$$B_{R_2}^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R_2 < +\infty\},$$

dove  $R_1 = 0$ ,

e l'insieme  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , dove  $R_1 = 0$  e  $R_2 = +\infty$ .

# Serie bilatera

È ovvio che se  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ha una singolarità non eliminabile (cioè un polo o una singolarità essenziale) non è esprimibile come serie di potenze in un intorno di  $z_0$  in quanto la somma di una serie di potenze è analitica.

In questa lezione vedremo che invece  $f$  si scriverà in termini di una serie cosiddetta bilatera.

## Definizione di serie bilatera

Una *serie bilatera* è un'espressione del tipo

$$\sum_{-\infty < n < +\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

dove i coefficienti  $c_n$  sono numeri complessi.

# Serie bilatera

Che senso ha la convergenza di tale serie?

Per convergenza della serie precedente si intende che convergono le due seguenti serie

$$S_1(z) = \sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^n = \sum_{k > 0} c_{-k} (z - z_0)^{-k} = \sum_{k > 0} c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k},$$

dove  $k = -n$ ;

$$S_2(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n;$$

e la sua somma  $S(z)$  è la somma delle due funzioni  $S_1(z)$  e  $S_2(z)$  che rappresentano rispettivamente la somma delle due serie precedenti.

La prima serie si dice *parte singolare* (o parte caratteristica) della serie.

La seconda, che è un'usuale serie di potenze, si dice *parte regolare* e ha un suo raggio di convergenza, che chiamiamo  $R_2$ .

# Serie bilatera

Facendo il cambiamento di variabili  $w := \frac{1}{z-z_0}$  la prima serie diventa una serie di potenze in  $w$ ,

$$\sum_{-\infty < n < 0} c_n (z - z_0)^n = \sum_{k > 0} c_{-k} (z - z_0)^{-k} = \sum_{k > 0} c_{-k} w^k,$$

che ammette un suo raggio di convergenza, che chiamiamo  $R_1^*$ .  
Supponiamo che  $R_1^* > 0$ . Quindi la serie

$$\sum_{k > 0} c_{-k} w^k,$$

converge se

$$|w| = \frac{1}{|z - z_0|} < R_1^*, \quad |z - z_0| > \frac{1}{R_1^*}.$$

Ponendo  $R_1 := \frac{1}{R_1^*}$ , si ha

$$|z - z_0| > R_1.$$

Dunque la serie converge all'esterno del cerchio di raggio  $R_1$  e la somma della serie è analitica su tale insieme.

Ne segue che, se  $R_1 < R_2$ , nella corona circolare  $C_{R_1 R_2}$  convergono entrambe le serie e hanno come somma una funzione analitica. Abbiamo così ottenuto che:

## **Teorema**

**La somma di una serie bilatera è una funzione analitica in una corona circolare (se  $R_1 < R_2$ ).**

**Vale anche il viceversa ed è il seguente teorema (che non dimostriamo).**

## Teorema di Laurent

Sia  $f$  una funzione analitica su una corona circolare  $C_{R_1 R_2}$  di centro  $z_0$ .

Allora  $f$  è la somma di una serie bilatera,

cioè vale il seguente *sviluppo di Laurent*

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n (z - z_0)^n,$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e  $\gamma$  è una circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$  con  $R_1 < r < R_2$ .



# Serie di Laurent

Osserviamo che, se  $f$  è analitica in tutta la palla  $B_{R_2}(z_0)$  oppure ha una singolarità eliminabile in  $z_0$ , allora lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor (cioè i coefficienti della parte singolare sono tutti nulli). Infatti se  $R_1 = 0$  ed  $f$  è analitica nella palla  $B_{R_2}(z_0)$ , allora

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0, \quad \forall n \leq -1,$$

poiché  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$  è analitica per  $n \leq -1$ . Inoltre i coefficienti della parte regolare  $c_n$ ,  $n \geq 0$ , coincidono con quelli di Taylor poiché si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e dunque

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall n \geq 0.$$

# Esempi di sviluppi di Laurent di funzioni fratte

Consideriamo ora alcuni esempi di funzioni razionali fratte e calcoliamo gli sviluppi di Laurent.

## Esempio 0

BANALE, MA NON TROPPO

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z^5$$

è già sviluppata in serie di Laurent in  $z_0 = 0$ .

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} + (z-2)^5$$

è già sviluppata in serie di Laurent in  $z_0 = 2$ .

# Esempi di sviluppi di Laurent di funzioni fratte

## Esempio 1

Sia  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  e  $z_0 = 0$ . La decomposizione in fratti semplici dà

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}.$$

Quindi si hanno le due serie geometriche:

$$(i) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, \quad \text{per } |z| < 1,$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \text{per } |z| < 2.$$

Dunque nel cerchio  $|z| < 1$ , valendo entrambe, si ha

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad \text{per } |z| < 1.$$

Invece nella corona circolare  $1 < |z| < 2$  vale solo (ii). Al posto di (i), scriviamo

$$(iii) \quad -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad \text{per } \frac{1}{|z|} < 1, \text{ cioè } |z| > 1.$$

Quindi nella corona  $1 < |z| < 2$  si ha lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \text{per } 1 < |z| < 2.$$

Nella corona esterna  $|z| > 2$  vale (iii) e al posto di (ii) scriviamo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad \text{per } \frac{2}{|z|} < 1, \quad \text{cioè } |z| > 2.$$

Quindi nella corona esterna  $|z| > 2$  si ha lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}, \quad \text{per } |z| > 2.$$

Osserviamo che in quest'ultimo caso la parte regolare è nulla.

**Esempio 2** Per la stessa funzione  $f$  consideriamo adesso lo sviluppo di Laurent in  $z_0 = 1$ . Si ha che

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1-1}$$

e se  $|z-1| < 1$

$$\frac{1}{z-1-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n \geq 0} (z-1)^n,$$

e quindi se  $0 < |z-1| < 1$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n \geq 0} (z-1)^n,$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1-1}.$$

Se  $|z-1| > 1$  (cioè  $\frac{1}{|z-1|} < 1$ ) invece si ha

$$\frac{1}{z-1-1} = \frac{1}{(z-1)\left(1 - \frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

e quindi

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}.$$

# Singularità e sviluppi di Laurent

Vediamo ora qual è il legame tra la natura di un punto singolare isolato  $z_0$  di  $f$  e il suo sviluppo di Laurent nell'intorno forato  $B_r^*(z_0)$  (con  $r$  strettamente minore della distanza di  $z_0$  dagli altri punti singolari).

Innanzitutto osserviamo che per  $n = -1$  si ha

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \, dz = \operatorname{res}(f, z_0),$$

dove  $c_{-1}$  è il coefficiente  $(-1)$ -esimo (quindi di  $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$ ) dello sviluppo di Laurent.



# Singularità e sviluppi di Laurent

## Proposizione

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica, sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  una singolarità isolata e sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

lo sviluppo di Laurent di  $f$  in un intorno forato di  $z_0$ . Allora

(i)  $z_0$  è eliminabile se e solo se la parte singolare è nulla, cioè  $c_{-n} = 0$  per ogni  $n > 0$ , e quindi

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

che è lo sviluppo di Taylor di  $f$ .

(ii)  $z_0$  è un polo di ordine  $n_0$  se e solo  $c_{-n_0} \neq 0$  e  $c_{-n} = 0$  per ogni  $n > n_0$ , e quindi

$$f(z) = \sum_{n \geq -n_0} c_n (z - z_0)^n.$$

(iii)  $z_0$  è una singolarità essenziale se e solo  $c_{-n} \neq 0$  per infiniti indici  $n > 0$ .

# Esempi

1) La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

presenta una singolarità eliminabile in  $z_0 = 0$ .

Quindi lo sviluppo di Laurent è

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

che coincide con quello di Taylor (cioè manca la parte singolare). Si osservi inoltre che

$$\operatorname{res}(f, 0) = c_{-1} = 0.$$

2) La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^m},$$

$m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq 0$ , ha in  $z_0 = 0$  un polo di ordine  $m$

e si ha che  $\text{res}(f, 0) = c_{-1}$  è 0 se  $m \neq 1$  ed è 1 se  $m = 1$ .

3) La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^{24}} + \frac{3}{z^{17}} + 1 + z^4$$

ha in  $z_0 = 0$  un polo di ordine 24

e si ha che  $\text{res}(f, 0) = c_{-1} = 0$ .

Inoltre  $1 + z^4$  è la parte regolare, mentre  $\frac{1}{z^{24}} + \frac{3}{z^{17}}$  è la parte singolare.

4) La funzione  $f(z) = e^{-\frac{1}{2z^4}}$  ha in  $z_0 = 0$  il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( -\frac{1}{2z^4} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n z^{4n}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2} \frac{1}{4z^8} - \dots$$

Quindi ha parte regolare uguale a 1, mentre  $-\frac{1}{2} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2} \frac{1}{4z^8} - \dots$  è la parte singolare, e

$$\operatorname{res}(f, 0) = c_{-1} = 0.$$

Si osservi che la parte singolare consta di infiniti termini:  $z_0 = 0$  è una singolarità essenziale.

# Esempi

5) La funzione

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

ha in  $z_0 = 0$  il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots$$

Quindi non ha parte regolare, mentre  $\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots$  è la parte singolare, e

$$\operatorname{res}(f, 0) = c_{-1} = 1.$$

Si osservi anche qui che la parte singolare consta di infiniti termini:  $z_0 = 0$  è una singolarità essenziale.

## Riepilogo

Come calcolare il residuo?

Se si conosce lo sviluppo di Laurent nel punto  $z_0$  in un intorno forato  $B_r^*(z_0)$ , allora basta prendere il coefficiente  $c_{-1}$ .

Se il punto  $z_0$  è una singolarità eliminabile, allora  $\text{res}(f, 0) = c_{-1} = 0$ .

Se il punto  $z_0$  è un polo, allora il residuo si può calcolare con la formula che abbiamo visto, anche senza conoscere lo sviluppo di Laurent nel punto.



# Appello del 22 febbraio 2011

Domanda a risposta multipla

La serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n-1}}$$

è lo sviluppo di Laurent in  $z_0 = 0$  di

a)  $z^2 \sin \frac{1}{z^3}$

b)  $z \sin \frac{1}{z^3}$

c)  $z^3 \sin \frac{1}{z}$

d)  $z^3 \sin \frac{1}{z^2}$

Soluzione: d)

## Appello del 21 settembre 2011

Si scriva lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = (z + 4)^2 e^{\frac{1}{z+4}},$$

intorno al punto  $z = -4$ , specificando in quale regione vale e di che tipo di singolarità si tratta. Si calcoli infine il residuo in tale punto.

Soluzione:

Lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = (z + 4)^2 e^{\frac{1}{z+4}},$$

intorno al punto  $z = -4$ , è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z + 4)^{n-2}}$$

nella regione  $|z + 4| > 0$ , o equivalentemente  $\mathbb{C} \setminus \{-4\}$ . Il punto  $z = -4$  è una singolarità essenziale e il residuo in tale punto è

$$\operatorname{res}(f(z), -4) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

# Appello del 21 settembre 2011

Si calcoli l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z^2)}{z^3} dz,$$

dove  $\gamma$  è la circonferenza di centro 1 e raggio 2.

Soluzione:

La funzione  $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^3}$  ha una singolarità di tipo polo in  $z = 0$  ed ha il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{4n-1}.$$

Quindi si ha che  $\text{res}(f(z), 0) = 1$  e, dal momento che la circonferenza  $\gamma$  di centro 1 e raggio 2 contiene l'origine, ne segue che

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z^2)}{z^3} dz = 2\pi i \text{res}(f(z), 0) = 2\pi i.$$

# Appello del 17 settembre 2012

Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2},$$

si calcolino i seguenti residui

$$\operatorname{res}(f, 0), \quad \operatorname{res}(f, 1).$$

Soluzione:

Si ha che  $\operatorname{res}(f, 0) = 0$ , essendo olomorfa in  $z = 0$  e  $\operatorname{res}(f, 1) = -\frac{1}{2}$ , in quanto essa ha il seguente sviluppo di Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - z^2} = \frac{-1}{z - 1} \frac{1}{z + 1} = \frac{-1}{z - 1} \frac{1}{2 + (z - 1)} = \frac{-1}{z - 1} \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{z-1}{2}\right)} = \\ &= \frac{-1}{z - 1} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z - 1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Per  $n = 0$  si ha  $c_{-1} = -\frac{1}{2}$ .

# Appello del 20 Settembre 2013

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Laurent in  $z_0 = -i$  della funzione

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z+i}\right) + \sin(z+i)$$

$$a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \left( \frac{1}{(z+i)^{2k+1}} + (z+i)^{2k+1} \right)$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left( \frac{1}{(z+i)^{2k}} + (z+i)^{2k} \right)$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left( \frac{1}{(z+i)^{2k+1}} + (z+i)^{2k+1} \right)$$

$$d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{1}{(z+i)^{2k+1}} + (z+i)^{2k+1} \right).$$

Soluzione: c)

# Il teorema dei residui

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica nell'aperto connesso  $A \subseteq \mathbb{C}$  e sia  $\gamma$  un circuito in  $A$ .

Siano  $z_1, \dots, z_r$  dei punti singolari isolati di  $f$  appartenenti all'aperto  $D$  interno a  $\gamma$ .

Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{res}(f, z_k).$$

# Il teorema dei residui

## Dimostrazione

Siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  delle circonferenze di centro  $z_1, \dots, z_r$  e raggi opportunamente piccoli in modo che ognuna sia interna a  $D$ , non si intersechino fra di loro e ognuna non contenga altre singolarità tranne il suo centro.

Consideriamo la curva

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_r^-$$

che è l'unione di curve non connesse tra di loro.

Dal teorema integrale di Cauchy (che vale anche per l'unione di curve) si ha

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^r \int_{\gamma_k^-} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^r \int_{\gamma_k} f(z) dz,$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

D'altra parte, per ogni  $k = 1, \dots, r$  si ha

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, z_k).$$

- (i) Si dia la definizione di residuo.
- (ii) Si enunci il Teorema dei residui.
- (iii) Si dimostri tale Teorema.
- (iv) Si calcolino i seguenti residui

$$\operatorname{res}(e^{z-1}, 0), \operatorname{res}(e^{z-1}, 1), \operatorname{res}(e^{\frac{1}{z-1}}, 1), \operatorname{res}(e^{\frac{1}{(z-1)^2}}, 1).$$



# Appello del 24 luglio 2012

Soluzione: (iv) Si ha che  $\text{res}(e^{z-1}, 0) = 0$ , essendo

$$e^{z-1} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n;$$

$\text{res}(e^{z-1}, 1) = 0$ , essendo

$$e^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^n;$$

$\text{res}(e^{\frac{1}{z-1}}, 1) = 1$ , essendo

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{z-1} \right)^n;$$

$\text{res}(e^{\frac{1}{(z-1)^2}}, 1) = 0$ , essendo

$$e^{\frac{1}{(z-1)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{z-1} \right)^{2n}.$$

Si calcoli

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz, \quad \gamma(t) = 3e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione:

La curva  $\gamma$  è la circonferenza di centro l'origine e di raggio 3. La funzione integranda è il rapporto di due funzioni intere e quindi le sue singolarità coincidono con i numeri complessi che ne annullano il denominatore:

$$(\sin z)^3(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \vee z = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le uniche singolarità circuitate da  $\gamma$  sono  $z_0 = 0$  e  $z_1 = 1$ . Quest'ultima è un polo semplice per  $f(z)$ .

Per quanto riguarda la prima, si osservi che

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{-z^3} = -1$$

e quindi anche  $z_0 = 0$  è un polo semplice. Pertanto per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz = 2\pi i \left[ \operatorname{res} \left( \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 0 \right) + \operatorname{res} \left( \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 1 \right) \right]$$

e poiché

$$\operatorname{res} \left( \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 0 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} z = -1$$

$$\operatorname{res} \left( \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 1 \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} (z-1) = \frac{1}{(\sin 1)^3}$$

allora

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{(\sin 1)^3} - 1 \right).$$