Prova di Analisi Matematica II - 9 Aprile 2018
Ing. Informatica
Prof.ssa V. DE CICCO

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) L'antitrasformata di Laplace della funzione $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2-1}$ è

$(s-1)^2 - 1 = 0$
$s^2 \cancel{+1} - 2s \cancel{-1}$
$s(s-2) = 0$
$[\, s = 2 \quad s = 0$ POLI SEMPLICI

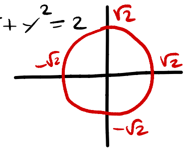
(a) $f(t) = \sinh(t)$
(b) $f(t) = \cosh t$
(c) $f(t) = e^t \cosh t$
(d) $f(t) = e^t \sinh t$.

$\sum_{1}^{2} \mathrm{RES}(f, s_k)$

$$f(s) = \lim_{s\to 2} e^{st}\cancel{(s-2)}\frac{1}{s\cancel{(s-2)}} + \lim_{s\to 0} e^{st}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}(s-2)}$$
$$= \frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^t \cdot e^t - 1}{2} = e^t\frac{e^t - e^{-t}}{2} = e^t \sinh t$$

2) Sia γ la frontiera del dominio $\{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Si indichi l'unico integrale non nullo tra i seguenti:

$\gamma: x^2 + y^2 = 2$



(a) $\int_\gamma \frac{1}{z-1}dz$ $\quad z = 1$ POLO SEMPLICE $\quad 2\pi i\left(\lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}\frac{1}{\cancel{z-1}}\right) = 2\pi i \quad r = \sqrt{2}$

(b) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^2}dz$ $\quad z = 1$ POLO DOPPIO $\quad 2\pi i\left(\lim_{z\to 1} D'\left(\cancel{(z-1)^2}\frac{1}{\cancel{(z-1)^2}}\right)\right) = 0$

(c) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^3}dz$ $\quad z = 1$ POLO TRIPLO $\quad 2\pi i\left(\frac{1}{2}\lim_{z\to 1} D''\left(\cancel{(z-1)^3}\frac{1}{\cancel{(z-1)^3}}\right)\right) = 0$

(d) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^4}dz$. $\quad z = 1$ POLO QUADRUPLO $\quad 2\pi i\left(\frac{1}{6}\lim_{z\to 1} D'''\left(\cancel{(z-1)^4}\frac{1}{\cancel{(z-1)^4}}\right)\right) = 0$

SE LE SINGOLARITÀ NON SONO CONTENUTE NELLA CIRCONFERENZA ASSEGNATA

$\rightarrow$ INTEGRALE NULLO

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2}$$

3) La funzione $f(z) = \sin(iz)$, $z \in \mathbb{C}$ è

(a) intera NON HA SINGOLARITÀ

(b) a valori immaginari

(c) a valori reali

(d) limitata. IN CAMPO COMPLESSO È ILLIMITATA

OLOMORFA IN TUTTI I PUNTI DEL PIANO COMPLESSO

4) La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x-3)^n$$

è lo sviluppo di Taylor in $x = 3$ della funzione

(a) e^x

(b) e^{x^2}

(c) $e^{(x-3)^2}$

(d) e^{3-x}.

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{(x-3)^n}{n!} \qquad e^{x^2} = \sum_0^\infty \frac{(x^2-3)^n}{n!}$$

$$e^{(x-3)^2} = \sum_0^\infty \frac{((x-3)^2-3)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{(x^2+9-6x-3)^n}{n!}$$

$$e^{3-x} = \sum_0^\infty \frac{(\cancel{3}-x-\cancel{3})^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

5) L'insieme di definizione della funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}(|z^2+1|)\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

è

LOGARITMO È DEFINITO IN C^*
È CONTINUO E OLOMORFO IN C^{**}

(a) $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

(b) $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

(c) $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, -i, i\}$

(d) $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

$$C \setminus \{z = 0\}$$

$$|z^2+1| \neq 0 \qquad z \neq \pm i$$

ESERCIZIO 2. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

PUNTUALE

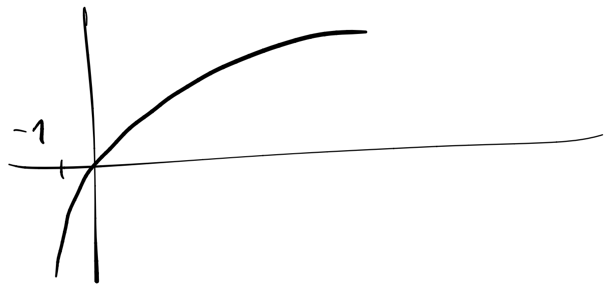
$$f_n(x) = (\log(x+1))^n, \quad x > -1.$$

$$-1 < x < 0 \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (\log(x+1))^n = 0$$

$$x > 0 \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (\log(x+1))^n = +\infty$$

UNIFORME IN $]-1;0[$ IL SUP DOVREBBE TROVARSI SU $x=0$ IN TAL CASO

$$g(x) = \sup_{]-1;0[} \left|(\log(x+1))^n\right| = 0$$



$$\lim_{n\to+\infty} g(x) = 0$$

È ANCHE UNIFORME IN $]-1;0[$

ESERCIZIO 3.

(i) Si dia la definizione di $\operatorname{Log} z$ per $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, e si discuta la sua continuità e la sua olomorfia.

(ii) Si studi la continuità e l'olomorfia della funzione

$$f(z) = z^{\sqrt{3}}.$$

PER DEFINIZIONE LA FUNZIONE È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{C}$
STUDIAMO LE CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN PER VERIFICARE L'OLOMORFIA

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -i \frac{\delta f}{\delta y}$$

$$f(z) = (\underbrace{x+iy}_{\mathbb{C}})^{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \sqrt{3}(x+iy)^{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = i\sqrt{3}(x+iy)^{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{df}{dy} \cdot i = -\sqrt{3}(x+iy)^{\sqrt{3}-1}$$

$$\sqrt{3}(x+iy)^{\sqrt{3}-1} = -\left(-\sqrt{3}(x+iy)^{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -i \frac{\delta f}{dy}$$ È OLOMORFA PER $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

ESERCIZIO 4.

(i) Sia dia la definizione di convergenza puntuale per una serie di funzioni.

(ii) Sia assegnata la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z+i)^n}.$$

(iii) Se ne determini l'insieme di convergenza E.

(iv) Se ne calcoli la somma $\forall z \in E$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z+i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+i)^{-n}$$

au z^n

CALCOLO IL RAGGIO CRITERIO DI D'ALAMBERT

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \right| = \frac{1}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} = \frac{1}{n+1} = 0 \quad \ell$$

$$\rho = \frac{1}{\ell} = +\infty$$

QUINDI LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE IN TUTTO $\mathbb{C}$

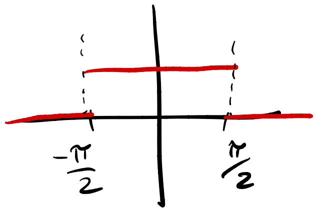
E TOTALMENTE $|z - z_0| < n \quad \forall n > 0$

SOMMA $\rightarrow \frac{1}{e^{(z+i)}}$?

ESERCIZIO 5.

(i) Si scriva la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2π che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$



calcolandone esplicitamente i coefficienti.

(ii) Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$. Si tracci il grafico di $S(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ precisandone il valore nei punti di salto.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 = \frac{1}{2\pi} \left[2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$$

LA FUNZIONE È PARI $\rightsquigarrow$ $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos nx = \frac{2}{\pi} 2 \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi} \overbrace{\left(\sin n\pi - \sin 0\right)}^{0} = 0$$

NEI PUNTI DI SALTO LA FUNZIONE È UGUALE A 0 COME SPECIFICATO DAL DOMINIO