Prova di Analisi Matematica II - 20 Settembre 2018
Ing. dell'informazione
Prof.ssa Virginia De Cicco

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) (I) Il valore del seguente integrale curvilineo in $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma cosh\, z\, dz, \qquad \gamma(t) = log(3+t) - \pi i t^2, \quad t \in [0,1]$$

$\hookrightarrow \int_\gamma f(z) = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

è

(a) $i\frac{77}{24}$
(b) $\frac{77}{24}$
(c) $-\frac{77}{24}$
(d) $-i\frac{77}{24}$.

$$\int_0^1 \cosh(\log(3+t) - \pi i t^2) \cdot \left(\frac{1}{3+t} - 2\pi i t\right) dz$$

$$= \left[\sinh(\log(3+t) - \pi i t^2)\right]_0^1 =$$

$$= \sinh(\log(4) - \pi i) - \sinh(\log(3))$$

$$\sinh \frac{e^z - e^{-z}}{2} \rightarrow \frac{e^{\log(4)-\pi i} - e^{\pi i - \log(4)}}{2} - \frac{e^{\log(3)} - e^{-\log(3)}}{2} \qquad e^{\pi i} = -1$$

$$= \frac{-4 + \frac{1}{4}}{2} - \frac{3 - 1/3}{2} = \frac{-\frac{4}{1} + \frac{1}{4} - 3 + 1/3}{2} = \frac{\frac{-48 - 3 - 36 + 4}{12}}{2}$$

$$= -\frac{77}{24}$$

(II) Sia

$$f(z) = \underbrace{\frac{3i}{1-z}}_{\text{SEMPLICE}} - \underbrace{\frac{1}{i-zi}}_{\text{SEMPLICE}} + \underbrace{\frac{2}{(z-1)^2}}_{\text{DOPPIO}} + \underbrace{\frac{3}{z-i}}_{\text{ELIMINABILE}},$$

RES = 0

allora il $Res(f,1)$ vale

(a) 3

(b) $3i$

(c) $-3i$

(d) $-4i$.

1) $\lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{-3i}{\cancel{(z-1)}} = -3i$

2) $\lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{+1}{i\cancel{(z-1)}} = 1/i = -i$

3) $\frac{1}{2-1!} \lim_{z\to 1} D'\left(\cancel{(z-1)^2} \frac{2}{\cancel{(z-1)^2}}\right) = 0$

$\sum \text{RES} = -3i - i = -4i$

(III) Il coefficiente a_0 dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = 3 - 6\sin(5x)\cos(7x)$ vale

(a) 1

(b) 4

(c) 6

(d) $\frac{3}{2}$.

$\frac{a_0}{2} = 3 \quad a_0 = 6$

(IV) La successione di funzioni $f_n(x) = e^{-n(x+2)}$

(a) converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) converge uniformemente per $x \in [-1, +\infty)$

(c) converge uniformemente per $x \geq -2$

(d) converge puntualmente per $x = -4$.

D) $\lim_{n\to+\infty} e^{-n(-2)} = e^{2n} = +\infty$

C) NO A) NO

CONVERGE PUNTUALMENTE PER $x \geq -1$

$\sup|e^{-n(x+2)}| = e^{-n}$

$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$

(V) L'equazione di Cauchy-Riemann in coordinate polari è

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{i}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

ESERCIZIO 2.

(i) Si enunci il Lemma di Jordan.

(ii) Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{x^2+3x+4}\,dx. \quad \rightsquigarrow \operatorname{Im} e^{2ix}$$

PROLUNGAMENTO

$$\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+3x+4} = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2iz}}{z^2+3z+4}$$

$$f(z) = e^{iz} g(z) \qquad g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+3z+4}$$

LEMMA DI JORDAN

↳ SE $\lim_{|z|\to+\infty} g(z) = 0 \longrightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma R} \frac{e^{2iz}}{z^2+3z+4} = 0$

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+3z+4} = 0$$

e^{iz} ⇝ È PERIODICA IN $\mathbb{C}$

TROVIAMO LE SINGOLARITÀ

$$z^2+3z+4 = 0 \qquad z = \frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$$

POLI SEMPLICI

$$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \qquad z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

QUINDI POSSIAMO CONSIDERARE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+3x+4} = 2\pi i \sum_{1}^{2} \mathrm{RES}(f, z_k) = \frac{1}{3^{i+\sqrt{7}}} + e^{\sqrt{7}-3i}$$

$$\lim_{z\to\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}} \cancel{\left(z - \frac{-3+i\sqrt{7}}{2}\right)} \frac{e^{2iz}}{\cancel{\left(z-\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}\right)}\left(z-\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}\right)} = e^{i(-3+i\sqrt{7})} = \frac{1}{e^{3i+\sqrt{7}}}$$

$$\lim_{z\to\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}} \cancel{\left(z - \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}\right)} \frac{e^{2iz}}{\cancel{\left(z-\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}\right)}\left(z-\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}\right)} = e^{i(-3-i\sqrt{7})} = e^{\sqrt{7}-3i}$$

$$\sum (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

ESERCIZIO 3.

(i) Si dia la definizione di serie di Taylor centrata in $z_o \in \mathbb{C}$ per una funzione $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = (z-1)^3 Log(2-z), \qquad Log(2-z-1+1)$$

si calcoli la derivata $f^{(23)}(1)$ di ordine 23 nel punto $z = 1$. $Log(-(z-1)+1])$

$$2-z = z-1$$

$$f(z)^{23} = (z-1)^3 \cdot \sum_{n=0}^{20} - \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$$

LA FORMA SAREBBE $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$

NEL NOSTRO CASO HA IL SEGNO FISSO PERCHÈ È NELLA FORMA $log((-z)+1)$

ESERCIZIO 4.

(i) Si espongano i vari metodi per calcolare i residui.

(ii) Data la funzione

$$f(z) = \frac{z}{sen\, z(e^z - 1)}$$

si classifichino le sue singolarità isolate.

(iii) Si calcolino i residui in tali singolarità .

$$sen\, z(e^z - 1) \neq 0$$

$$z = 0 + \underline{k\pi}$$ VOGLIAMO LE SINGOLARITÀ ISOLATE

$\hookrightarrow$ NON LO CONSIDERIAMO

$$e^z - 1 = 0$$

$$e^x(\cos y + i\, sen\, y) = 1$$

$$\begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x\, sen\, y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos y = 1 \\ sen\, y = 0 \end{cases} \quad y = 0 + k\pi$$

$$e^x = 1 \longrightarrow x = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} z = 0$$

$$\lim_{z \to 0} z \frac{z}{sen\, z(e^z - 1)} = \underbrace{\frac{z}{sen\, z}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{z}{e^z - 1}}_{1} = 1$$ POLO SEMPLICE

RESIDUO

$$\hookrightarrow \lim_{z \to 0} z \frac{z}{sen\, z(e^z - 1)} = \underbrace{\frac{z}{sen\, z}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{z}{e^z - 1}}_{1} = 1$$ POLO SEMPLICE

ESERCIZIO 5.

(i) Si enunci il Teorema integrale di Cauchy.

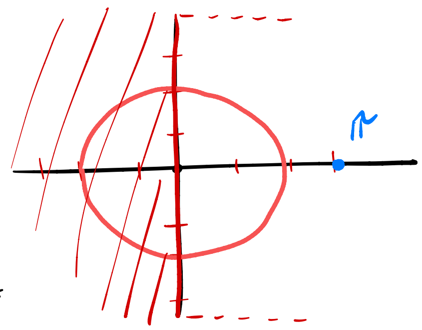
(ii) Si dimostri tale teorema.

(iii) Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{z^3-1}{z-\pi}dz,$$

dove $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi[$.

$\gamma(t) = 2e^{it}$



SINGOLARITÀ DI $\frac{z^3-1}{z-\pi}dz$

ESSENDO $\pi \notin \gamma(t)$ $\int_\gamma \frac{z^3-1}{z-\pi} = 0$