Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri
Sapienza Univ. di Roma

Analisi complessa

Potenze e funzioni trigonometriche

La funzione potenza in campo complesso

Definiamo la *funzione potenza in campo complesso*.

La funzione potenza in campo complesso

Definiamo la *funzione potenza in campo complesso*.

Si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

La funzione potenza in campo complesso

Definiamo la *funzione potenza in campo complesso*.

Si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

Per ogni coppia $\beta \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^*$ (ossia $z \neq 0$) si definisce

$$\underline{z}^{\beta} := e^{\beta \log z}.$$

La funzione potenza in campo complesso

Definiamo la *funzione potenza in campo complesso*.

Si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

Per ogni coppia $\beta \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^*$ (ossia $z \neq 0$) si definisce

$$\underline{z}^{\beta} := e^{\beta \log z}.$$

In generale ci sono infinite determinazioni (come per il logaritmo). La determinazione principale è

$$z^{\beta} := e^{\beta \operatorname{Log} z}$$

e si chiama *potenza principale*.

La funzione potenza in campo complesso

Definiamo la *funzione potenza in campo complesso*.

Si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

Per ogni coppia $\beta \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^*$ (ossia $z \neq 0$) si definisce

$$\underline{z}^{\beta} := e^{\beta \log z}.$$

In generale ci sono infinite determinazioni (come per il logaritmo). La determinazione principale è

$$z^{\beta} := e^{\beta \operatorname{Log} z}$$

e si chiama *potenza principale*.

Tale funzione è definita in $\mathbb{C}^*$ ed è continua e olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

Esempi

1) $\underline{1}^{i} =$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log |1| + i \arg 1)} =$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z},$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z}$,

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

2) $\underline{i}^i =$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi},\ k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

2) $\underline{i}^i = e^{i \log i} =$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

2) $\underline{i}^i = e^{i \log i} = e^{i(\log|i| + i \arg i)} =$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

2) $\underline{i}^i = e^{i \log i} = e^{i(\log|i| + i \arg i)} = e^{-\arg i} =$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log|1| + i \arg 1)} = e^{-2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

2) $\underline{i}^i = e^{i \log i} = e^{i(\log|i| + i \arg i)} = e^{-\arg i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \ k \in \mathbb{Z},$

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i\log 1} = e^{i(\log|1| + i\arg 1)} = e^{-2k\pi},\ k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1$;

2) $\underline{i}^i = e^{i\log i} = e^{i(\log|i| + i\arg i)} = e^{-\arg i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Sorpresa!

Appello del 17 gennaio 2013

Domanda a risposta multipla

Uno solo dei seguenti numeri è reale. Quale?

a) π^i
b) i^π
c) e^i
d) i^i

Appello del 17 gennaio 2013

Domanda a risposta multipla

Uno solo dei seguenti numeri è reale. Quale?

a) π^i
b) i^π
c) e^i
d) i^i

Soluzione: d)

Appello del 19 novembre 2013

Domanda a risposta multipla

Uno dei seguenti numeri non è reale. Quale?

a) π^{π}
b) $(-\pi)^{\pi}$
c) $\pi^{-\pi}$
d) $(2\pi)^{\pi}$

Appello del 19 novembre 2013

Domanda a risposta multipla

Uno dei seguenti numeri non è reale. Quale?

a) π^π
b) $(-\pi)^\pi$
c) $\pi^{-\pi}$
d) $(2\pi)^\pi$

Soluzione: b)

Vediamo ora dei casi particolari:

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z \to 0} z^\beta =$$

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z \to 0} z^\beta = \lim_{z \to 0} e^{\beta(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} =$$

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z \to 0} z^\beta = \lim_{z \to 0} e^{\beta(\log |z| + i \operatorname{Arg} z)} = \lim_{z \to 0} e^{i\beta \operatorname{Arg} z} \lim_{z \to 0} e^{\beta \log |z|} =$$

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z\to 0} z^\beta = \lim_{z\to 0} e^{\beta(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = \lim_{z\to 0} e^{i\beta \operatorname{Arg} z} \lim_{z\to 0} e^{\beta \log|z|} = 0$$

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z \to 0} z^\beta = \lim_{z \to 0} e^{\beta(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = \lim_{z \to 0} e^{i\beta \operatorname{Arg} z} \lim_{z \to 0} e^{\beta \log|z|} = 0$$

poiché $\lim_{z \to 0} e^{\beta \log|z|} = 0 \quad$ e $\quad \left| e^{i\beta \operatorname{Arg} z} \right| = 1.$

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z\to 0} z^\beta = \lim_{z\to 0} e^{\beta(\log|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z)} = \lim_{z\to 0} e^{i\beta\,\mathrm{Arg}\,z} \lim_{z\to 0} e^{\beta\log|z|} = 0$$

poiché $\lim_{z\to 0} e^{\beta\log|z|} = 0 \quad$ e $\quad \left|e^{i\beta\,\mathrm{Arg}\,z}\right| = 1$.

Quindi in questo caso z^β è definita in tutto $\mathbb{C}$ e continua in $\mathbb{C}^{**} \cup \{0\}$.

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^β coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^\beta =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^{\beta} = e^{n \operatorname{Log} z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^{\beta} = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n \log|z| + in \operatorname{Arg} z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^{\beta} = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n \log|z| + in \operatorname{Arg} z} = e^{log|z|^n} e^{in \operatorname{Arg} z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^{\beta} = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n \log|z| + in \operatorname{Arg} z} = e^{log|z|^n} e^{in \operatorname{Arg} z} =$$

$$|z|^n(\cos(n \operatorname{Arg} z) + i \sin(n \operatorname{Arg} z)) =$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^{\beta} = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n \log|z| + in \operatorname{Arg} z} = e^{log|z|^n} e^{in \operatorname{Arg} z} =$$

$$|z|^n(\cos(n \operatorname{Arg} z) + i \sin(n \operatorname{Arg} z)) = z^n.$$

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta = n \in \mathbb{N}$.
In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$\underline{z}^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} = e^{n(\log |z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}},$$

definita in campo complesso, poiché

$$z^{\beta} = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{n \log |z| + in \operatorname{Arg} z} = e^{log |z|^n} e^{in \operatorname{Arg} z} =$$

$$|z|^n (\cos(n \operatorname{Arg} z) + i \sin(n \operatorname{Arg} z)) = z^n.$$

Si noti che in tal caso z^{β} è definita, continua e olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.
Analogamente, nel caso $\beta = m \in \mathbb{Z}$, z^{β} è definita, continua e olomorfa in tutto $\mathbb{C}^*$.

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta =$$

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta = e^{\frac{1}{n}\log z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} =$$

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} =$$

$$= e^{\log|z|^{\frac{1}{n}}} e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)} =$$

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta = e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n}(\log |z| + i(\text{Arg}\, z + 2k\pi))} =$$

$$= e^{\log |z|^{\frac{1}{n}}} e^{i\left(\frac{\text{Arg}\, z + 2k\pi}{n}\right)} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\text{Arg}\, z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg}\, z + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} =$$

$$= e^{\log|z|^{\frac{1}{n}}} e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

ma solo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ danno luogo a valori distinti (infatti a causa della periodicità del seno e del coseno di periodo 2π, per $k = n$ si ottiene lo stesso valore che si ottiene per $k = 0$ e così via).

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^\beta = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} =$$

$$= e^{\log|z|^{\frac{1}{n}}} e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

ma solo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ danno luogo a valori distinti (infatti a causa della periodicità del seno e del coseno di periodo 2π, per $k = n$ si ottiene lo stesso valore che si ottiene per $k = 0$ e così via).

Quindi per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ la formula precedente ridà gli n valori della radice n-esima di z.

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

Basta considerare le n radici n-esime del numero z^m.

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

Basta considerare le n radici n-esime del numero z^m.

Si osservi infine che grazie alle usuali regole di derivazione e alle formule viste si ha per ogni $z \in \mathbb{C}^{**}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dz} z^\beta =$$

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

Basta considerare le n radici n-esime del numero z^m.

Si osservi infine che grazie alle usuali regole di derivazione e alle formule viste si ha per ogni $z \in \mathbb{C}^{**}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dz} z^\beta = \frac{d}{dz} e^{\beta \operatorname{Log} z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

Basta considerare le n radici n-esime del numero z^m.

Si osservi infine che grazie alle usuali regole di derivazione e alle formule viste si ha per ogni $z \in \mathbb{C}^{**}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dz} z^\beta = \frac{d}{dz} e^{\beta \operatorname{Log} z} = e^{\beta \operatorname{Log} z} \frac{\beta}{z} =$$

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

Basta considerare le n radici n-esime del numero z^m.

Si osservi infine che grazie alle usuali regole di derivazione e alle formule viste si ha per ogni $z \in \mathbb{C}^{**}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dz} z^\beta = \frac{d}{dz} e^{\beta \operatorname{Log} z} = e^{\beta \operatorname{Log} z} \frac{\beta}{z} = z^\beta \frac{\beta}{z} = \beta z^{\beta - 1}.$$

Funzioni circolari in campo complesso

Definiamo ora le *funzioni circolari e iperboliche in campo complesso*.

Funzioni circolari in campo complesso

Definiamo ora le *funzioni circolari e iperboliche in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la retta reale, la cui restrizione a tale retta coincida con le analoghe funzioni in $\mathbb{R}$.

Funzioni circolari in campo complesso

Definiamo ora le *funzioni circolari e iperboliche in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la retta reale, la cui restrizione a tale retta coincida con le analoghe funzioni in $\mathbb{R}$. Sia $z = ix$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Funzioni circolari in campo complesso

Definiamo ora le *funzioni circolari e iperboliche in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la retta reale, la cui restrizione a tale retta coincida con le analoghe funzioni in $\mathbb{R}$.
Sia $z = ix$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Sommando e sottraendo si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Funzioni circolari in campo complesso

Definiamo ora le *funzioni circolari e iperboliche in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la retta reale, la cui restrizione a tale retta coincida con le analoghe funzioni in $\mathbb{R}$. Sia $z = ix$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Sommando e sottraendo si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Quindi per definire un'estensione di coseno e seno al campo complesso si definiscono per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Funzioni circolari in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Funzioni circolari in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Dalla $2\pi i$-periodicità della funzione esponenziale si deduce la 2π-periodicità delle funzioni seno e coseno.

Funzioni circolari in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Dalla $2\pi i$-periodicità della funzione esponenziale si deduce la 2π-periodicità delle funzioni seno e coseno.

Si può dimostrare che le funzioni circolari non hanno altri zeri che quelli della loro restrizione all'asse dei numeri reali.

Funzioni circolari in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Dalla $2\pi i$-periodicità della funzione esponenziale si deduce la 2π-periodicità delle funzioni seno e coseno.

Si può dimostrare che le funzioni circolari non hanno altri zeri che quelli della loro restrizione all'asse dei numeri reali.

Infatti si verifica facilmente, dato $z = x + iy$, che

$$\cos z = 0 \qquad sse \qquad y = 0 \quad e \quad \cos x = 0$$

$(x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z})$

Funzioni circolari in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Dalla $2\pi i$-periodicità della funzione esponenziale si deduce la 2π-periodicità delle funzioni seno e coseno.

Si può dimostrare che le funzioni circolari non hanno altri zeri che quelli della loro restrizione all'asse dei numeri reali.

Infatti si verifica facilmente, dato $z = x + iy$, che

$$\cos z = 0 \qquad sse \qquad y = 0 \quad e \quad \cos x = 0$$

$(x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z})$

$$\sin z = 0 \qquad sse \qquad y = 0 \quad e \quad \sin x = 0$$

$(x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z})$.

Funzioni circolari in campo complesso

Dimostriamo che

$$\cos z = 0 \qquad sse \qquad y = 0 \quad e \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'annullamento del coseno equivale a dire che $e^{iz} + e^{-iz} = 0$, quindi $e^{-y+ix} + e^{y-ix} = 0$

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x) = 0$$

$$(e^{y} + e^{-y}) \cos x = 0, \qquad (e^{-y} - e^{y}) \sin x = 0$$

Dalla prima (poiché $e^{y} + e^{-y} \neq 0$) si ha $\cos x = 0$ e quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Adesso usiamo la seconda. Mettendo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nella seconda equazione, poiché $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \neq 0$ si ha

$$e^{y} = e^{-y}$$

da cui $y = 0$.

Funzioni iperboliche in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Funzioni iperboliche in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Analogamente al campo reale, si definiscono le funzioni coseno e seno iperbolico nel seguente modo:

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Funzioni iperboliche in campo complesso

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Analogamente al campo reale, si definiscono le funzioni coseno e seno iperbolico nel seguente modo:

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Tutte queste funzioni sono intere (poiché l'esponenziale lo è), cioè definite e olomorfe in tutto $\mathbb{C}$.

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$D \cos z = -\sin z, \quad D \sin z = \cos z,$$

$$D \cosh z = \sinh z, \quad D \sinh z = \cosh z$$

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$D \cos z = -\sin z, \quad D \sin z = \cos z,$$

$$D \cosh z = \sinh z, \quad D \sinh z = \cosh z$$

e valgono le identità

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$D \cos z = -\sin z, \quad D \sin z = \cos z,$$

$$D \cosh z = \sinh z, \quad D \sinh z = \cosh z$$

e valgono le identità

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$D\cos z = -\sin z, \quad D\sin z = \cos z,$$

$$D\cosh z = \sinh z, \quad D\sinh z = \cosh z$$

e valgono le identità

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$D\cos z = -\sin z, \quad D\sin z = \cos z,$$

$$D\cosh z = \sinh z, \quad D\sinh z = \cosh z$$

e valgono le identità

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

In campo complesso non è vero che seno e coseno sono funzioni limitate.

Funzioni circolari e iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$D\cos z = -\sin z, \quad D\sin z = \cos z,$$

$$D\cosh z = \sinh z, \quad D\sinh z = \cosh z$$

e valgono le identità

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

In campo complesso non è vero che seno e coseno sono funzioni limitate. Infatti si noti che, considerata la restrizione della funzione $\cos z$ all'asse immaginario (cioè $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$), si ha

$$\lim_{y\to+\infty} \cos(iy) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = +\infty.$$

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Solo una delle seguenti affermazioni è vera

a) $|\sin(3i)| = 1$ b) $|\sin(3i)| > 1$

c) $|\sin(3i)| < 1$ d) $|\sin(3i)| = 3$.

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Solo una delle seguenti affermazioni è vera

a) $|\sin(3i)| = 1$ b) $|\sin(3i)| > 1$

c) $|\sin(3i)| < 1$ d) $|\sin(3i)| = 3$.

Soluzione : b)
Infatti

$$\sin(3i) = \frac{e^{-3} - e^{3}}{2i}$$

e quindi

$$|\sin(3i)| = \frac{e^{3} - e^{-3}}{2} > 1$$

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Solo una delle seguenti identità è vera

a) $\sin(iz) = i \sinh z$ b) $\sin(iz) = i \sinh(iz)$

c) $\sin(iz) = \sinh z$ d) $\sin(iz) = \sinh(iz)$

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Solo una delle seguenti identità è vera

a) $\sin(iz) = i \sinh z$ b) $\sin(iz) = i \sinh(iz)$

c) $\sin(iz) = \sinh z$ d) $\sin(iz) = \sinh(iz)$

Soluzione : a)
Infatti

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(-y+ix)} - e^{-i(-y+ix)}}{2i} = \frac{e^{-x-iy} - e^{x+iy}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

$$= i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \sinh(z).$$

Appello del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

Appello del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

1) La parte reale di $\sin z$ è
a) $\cosh y \sinh x$
b) $\sin x \cosh y$
c) $\sin x \sin y$
d) $\sinh x \cos y$

Appello del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

1) La parte reale di $\sin z$ è
a) $\cosh y \sinh x$
b) $\sin x \cosh y$
c) $\sin x \sin y$
d) $\sinh x \cos y$

Soluzione : b)