Analisi Matematica II

Serie di funzioni

Virginia De Cicco

Sapienza Univ. di Roma

Serie di funzioni

In questa lezione introduciamo le serie di funzioni reali di una variabile reale e le nozioni di convergenza per tali serie.

Sia I un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in I.

Consideriamo la successione di funzioni

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

che denoteremo anche con $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Serie di funzioni

Sia $S_n(x)$ la successione delle somme parziali, cioè la successione di funzioni così definita:

$$S_0(x) = f_0(x), \qquad S_1(x) = f_0(x) + f_1(x),$$

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) = S_{n-1}(x) + f_n(x).$$

Tale successione di funzioni S_n si chiama *serie di funzioni* di termine generale f_n e si indica con l'espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots \,, \tag{1}$$

o equivalentemente con

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x)\,.$$

Se fisso x si ha una serie numerica.

Esempi

Consideriamo la serie

$$\sum_{n\geq 1} n^x.$$

Se fisso x si ha una serie numerica: $\sum_{n\geq 1} n^2, \quad \sum_{n\geq 1} n^{-2}$

Per $x = 0$ si ha la serie $\sum_{n\geq 1} 1$ che diverge,
per $x = 1$ si ha la serie $\sum_{n\geq 1} n$ che diverge,
per $x = -1$ si ha la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ che diverge,
per $x = -2$ si ha la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ che converge.
per $x = -\frac{3}{2}$ si ha la serie $\sum_{n\geq 1} n^{-\frac{3}{2}}$ che converge.

Si ha che converge se $x < -1$ e diverge per $x \geq -1$.

Diversi tipi di convergenza

Convergenza puntuale

Supponiamo che per ogni $x \in A \subseteq I$ la successione di funzioni $S_n(x)$ ammetta limite finito $S(x)$ per $n \to +\infty$, cioè

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

In tal caso la *serie di funzioni* di termine generale $f_n(x)$ converge puntualmente ad $S(x)$ in A e $S(x)$ è la somma della serie e si scrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x).$$

L'insieme A è l' insieme di convergenza puntuale.

Esempio: serie geometrica

Consideriamo la serie

$$\sum_{n\geq 0} x^n.$$

Se fisso la ragione x si ha una serie numerica.

Per $x = 1$ diverge,
per $x = -1$ è indeterminata, per $x = -2$ è indeterminata,
per $x = \frac{1}{2}$ converge,
per $x = -\frac{1}{2}$ converge (Leibnitz).

La serie

$$\sum_{n\geq 0} x^n$$

converge puntualmente sse $|x| < 1$,
diverge se $x \geq 1$ ed è irregolare per $x \leq -1$.

Attenzione: la successione geometrica $f_n(x) = x^n$ converge per $x = 1$, mentre la serie geometrica non converge per $x = 1$.
Si ha inoltre

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Esempio

Consideriamo la serie

$$\sum_{n\geq 0} e^{nx}$$

.

La serie

$$\sum_{n\geq 0} e^{nx} = \sum_{n\geq 0} (e^x)^n$$

converge puntualmente sse $e^x < 1$ sse $x < 0$.

Si ha

$$\sum_{n\geq 0} e^{nx} = \frac{1}{1-e^x}, \quad x < 0.$$

Esempio

Consideriamo la serie

$$\sum_{n\geq 0} (sen\, x)^n, \quad x \in [0, 2\pi[$$

e la serie

$$\sum_{n\geq 0} (sen\, x)^n$$

converge puntualmente sse $|sen\, x| < 1$ sse $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$.

Si ha

$$\sum_{n\geq 0} (sen\, x)^n = \frac{1}{1 - sen\, x}$$

$x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$.

Convergenza assoluta Si dice che la serie (1) *converge assolutamente* in $x \in A$ se

per ogni $x \in A$ converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|.$$

La convergenza assoluta implica la convergenza puntuale, ma non viceversa come vedremo col seguente esempio.

Esempio

Consideriamo la serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^x}$$

.

Per il criterio di Leibnitz, questa serie oscillante converge se $x > 0$.

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}.$$

La serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$$

converge puntualmente sse $x > 1$. Quindi la serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^x}$$

converge assolutamente se $x > 1$.

Nei punti $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ la serie converge puntualmente, ma non assolutamente.

Convergenza uniforme

Si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente ad $S(x)$ in A se la successione di funzioni $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente alla funzione $S(x)$ in A nel senso delle successioni.

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, ma non viceversa come vedremo in seguito.

Convergenza totale

Si dice che la serie (1) *converge totalmente* in $x \in A$ se esiste una successione numerica M_n tale che

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A \quad \forall n \in N$$

e se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ risulta convergente.

Vedremo che la convergenza totale implica tutte le altre.

Esempio

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} cos(nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$, poiché

$$\left| \frac{1}{n^2} cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N$$

e la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

è convergente.

Quindi converge anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in tutto $\mathbb{R}$.

Legame tra i diversi tipi di convergenza

Questi tipi di convergenza sono legati nel seguente modo:

la convergenza assoluta e la convergenza uniforme implicano quella puntuale,

la convergenza totale implica l'assoluta.

Si potrebbe dimostrare che la convergenza totale implica l'uniforme.

Tutte queste implicazioni non si possono invertire (come si potrebbe mostrare con degli esempi).

Inoltre la convergenza uniforme non implica quella assoluta e neanche il viceversa vale.

Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme

Teorema sulla continuità della somma di una serie

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $S : I \to \mathbb{R}$ la somma della serie avente f_n come termine generale, i.e.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{2}$$

Supponiamo inoltre che tale serie converga uniformemente ad $S(x)$.

Allora la funzione $S(x)$ è continua.

Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme

Teorema di integrazione per serie (o integrazione termine a termine)

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

e sia $S : I \to \mathbb{R}$ la somma della serie avente f_n come termine generale, i.e.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{3}$$

Supponiamo inoltre che tale serie converga uniformemente ad $S(x)$.

Allora vale la seguente formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Dimostrazione

Essendo $S(x)$ il limite uniforme della successione $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_k(x)$ delle somme parziali (che sono funzioni continue),

allora essa è continua in $[a, b]$ e quindi integrabile.

Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{k} f_n(x)dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(x)dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

dove si è usato il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per la successione di funzioni $S_k(x)$ che converge uniformemente ad $S(x)$. □

Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme

Teorema di derivazione per serie (o derivazione termine a termine)

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni di classe C^1 (cioè derivabili e con derivata continua) definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

e sia $S : I \to \mathbb{R}$ la somma della serie avente f_n come termine generale, i.e.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{4}$$

Consideriamo la serie derivata

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \tag{5}$$

e supponiamo che quest'ultima serie converga uniformemente.

Allora la funzione S è anch'essa di classe C^1 e vale la seguente formula:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Testo d'esame

Esame del 19 novembre 2012

(i) Si dia la definizione di convergenza puntuale e di convergenza totale per una serie di funzioni.

(ii) Si studi la convergenza puntuale e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+1}} \,.$$

(ii) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+1}}$$

è una serie armonica oscillante. Per il criterio di Leibnitz essa converge puntualmente se $x+1>0$ e quindi per $x>-1$. Per la convergenza totale basta osservare che

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^{x+1}} \right| = \frac{1}{n^{x+1}} \leq \frac{1}{n^A}$$

se $x+1 \geq A > 1$; quindi essa converge totalmente sugli insiemi del tipo $x \geq B$ con $B > 0$.

Testo d'esame

Esame del 17 Gennaio 2014

(i) Si diano le definizioni di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per una serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

e si illustrino i loro legami.

(ii) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx^3}.$$

Testo d′esame

Esame del 17 Gennaio 2014

(ii) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx^3}.$$

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx^3}$$

è una serie geometrica di ragione e^{x^3}. Essa converge puntualmente e assolutamente per $x < 0$ e converge uniformemente e totalmente sugli insiemi del tipo $]-\infty, A]$, con $A < 0$.

Esempio di prima

Si studi la convergenza puntuale e totale per la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin\, x)^n, \quad x \in [0, 2\pi[.$$

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\sin x$. Essa converge puntualmente se e soltanto se $|\sin x| < 1$ e dunque se $x \in D \equiv \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

Restringendosi poi in qualunque intervallo compatto $I \subset D$ si ha che

$$\sup_{x \in I} |\sin x|^n = A^n \equiv M_n, \quad A < 1$$

e poiché $\sum A^n$ è una serie geometrica convergente, si avrà convergenza totale in I.

Esempio

Si studi la convergenza puntuale e totale per la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3x^n}, \quad x \in [0,+\infty).$$

Per $x = 0$ la serie non converge perché $f_n(0) = \frac{1}{n}$.

Per $x > 0$, utilizzando la gerarchia degli infiniti, si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3x^n} \sim \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

la quale converge puntualmente se e soltanto se $\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Se ci si restringe in un intervallo del tipo $[a,+\infty)$ con $a > 1$ si ha poi che

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n+3x^n} = \frac{1}{n+3a^n} \equiv M_n$$

con $\sum M_n < +\infty$ e si ha dunque convergenza totale $\forall x \in [a,+\infty)$, $a > 1$.

Esercizi

Si studi la convergenza puntuale e totale delle seguenti serie di funzioni.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(2^n x^n)$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+1}}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\cos x}}$ $\qquad x \in [-\pi, \pi)$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$ $\qquad x \in [0, 2\pi]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^3+n^2)}{2+n^2x^2}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx^3}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tan x}$ $\qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3x^n}$ $\qquad x \in [0, +\infty)$

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(2^n x^n) \quad x \in \mathbb{R}$$

La condizione necessaria è verificata se e soltanto se

$$(2x)^n \to 0 \Leftrightarrow |2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Per tali valori, quando $n \to +\infty$, $\sin((2x)^n) \sim (2x)^n$ e la serie è convergente perchè asintotica ad una serie geometrica di ragione in modulo minore di 1.
Pertanto la serie converge puntualmente se $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
Preso poi un qualunque intervallo $[-a, a] \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ si ha che

$$|\sin((2x)^n)| \leq |2x|^n \leq |2a|^n \equiv M_n$$

e

$$\sum M_n < +\infty$$

da cui segue che si ha convergenza totale e quindi uniforme sugli intervalli della forma $[-a, a]$ con $0 < a < \frac{1}{2}$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+1}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Poichè la serie è a segno alterno, è conveniente studiare dapprima la convergenza assoluta. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{x+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$$

che è una serie armonica generalizzata. Essa converge se $x+1>1 \Leftrightarrow \forall x>0$. In tale intervallo si ha quindi convergenza assoluta e dunque puntuale.
Se $x<0$, applicando il criterio di Leibnitz, si ha convergenza semplice se $\frac{1}{n^{x+1}}$ è una successione monotona decrescente infinitesima. Ciò è vero se e soltanto se $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. In definitiva la serie assegnata converge puntualmente $\forall x>-1$.
Restringendosi poi nei sottoinsiemi $[a,+\infty)$ contenuti in $(-1,+\infty)$ si ha che

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} \left| \frac{(-1)^n}{n^{x+1}} \right| = \sup_{x \in [a,+\infty)} \frac{1}{n^{x+1}} = \frac{1}{n^{a+1}} \equiv M_n$$

e $\sum M_n$ converge se e soltanto se $a+1>1 \Leftrightarrow a>0$. Si ha dunque convergenza totale sull'intervallo $(0,+\infty)$.

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\cos x}} \quad x \in [-\pi, \pi)$$

Poiché la serie è a segno alterno, è conveniente studiare dapprima la convergenza assoluta. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\cos x}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\cos x}}$$

che è una serie armonica generalizzata. Essa converge se $\cos x > 1$ e dunque per nessun valore di x: la serie non converge assolutamente. Applicando dunque il criterio di Leibnitz si ha che $\frac{1}{n^{\cos x}}$ decresce in modo monotono a 0 se e soltanto se $\cos x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e quindi si ha convergenza puntuale solo in tale intervallo.
Restringendosi in un insieme compatto $[-a, a] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha, vista la parità del coseno, che

$$\sup_{x \in [-a,a]} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\cos x}} \right| = \sup_{x \in [0,a]} \frac{1}{n^{\cos x}} = \frac{1}{n^{\cos a}} \equiv M_n$$

e $\sum M_n$ diverge $\forall a$ da cui segue che non esiste alcun intervallo di convergenza totale.

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n \quad x \in [0, 2\pi]$$

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\sin x$. Essa converge puntualmente se e soltanto se $|\sin x| < 1$ e dunque se $x \in D \equiv \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.
Restringendosi poi in qualunque intervallo compatto $I \subset D$ si ha che

$$\sup_{x \in I} |\sin x|^n = A^n \equiv M_n, \quad A = \max_{x \in I} |\sin x| < 1$$

e poiché $\sum M_n$ è una serie geometrica convergente, si avrà convergenza totale su I.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^3+n^2)}{2+n^2x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Per $x = 0$ non è verificata la condizione necessaria, visto che $\frac{\arctan n^2}{2}$ non è infinitesima.

Per $x \neq 0$ la successione $f_n(x)$ non è a segno definito. Conviene allora studiare la convergenza assoluta. Si ha che $|\arctan(x^3+n^2)|$ è una successione positiva limitata. Si ha dunque che

$$\left|\frac{\arctan(x^3+n^2)}{2+n^2x^2}\right| \leq \frac{A}{2+n^2x^2}, \quad A = \frac{\pi}{2}.$$

Per il criterio del confronto asintotico

$$\sum \frac{A}{2+n^2x^2} \sim \sum \frac{A}{n^2x^2} < +\infty \quad \forall x \neq 0.$$

In definitiva si ha convergenza assoluta e quindi puntuale $\forall x \neq 0$.

Se ci si restringe sull'insieme $|x| > a$ con $a > 0$ si ottiene

$$\left|\frac{\arctan(x^3+n^2)}{2+n^2x^2}\right| \leq \frac{\pi/2}{2+n^2a^2} \equiv M_n$$

e siccome la serie $\sum M_n < +\infty$ si ha convergenza totale in $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, $a > 0$.

(f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx^3} \quad x \in \mathbb{R}$$

Poiché

$$e^{nx^3} = \left(e^{x^3}\right)^n$$

si ha che la serie assegnata è una serie geometrica che converge puntualmente se e soltanto se

$$|e^{x^3}| < 1 \Leftrightarrow e^{x^3} < 1 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Se ci si restringe in un intervallo della forma $(-\infty, a]$ con $a < 0$, si ha che

$$\sup_{x \in (-\infty, a]} e^{nx^3} = e^{na^3} \equiv M_n$$

con $\sum M_n < +\infty$. Pertanto la serie assegnata converge totalmente in $(-\infty, a]$, $a < 0$.

(g)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tan x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché

$$e^{-n\tan x} = \left(e^{-\tan x}\right)^n$$

si ha che la serie assegnata è una serie geometrica che converge puntualmente se e soltanto se

$$\left|e^{-\tan x}\right| < 1 \Leftrightarrow e^{-\tan x} < 1 \Leftrightarrow -\tan x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Se ci si restringe in un intervallo della forma $\left[a, \frac{\pi}{2}\right)$ con $0 < a < \frac{\pi}{2}$, si ha che

$$\sup_{x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right)} e^{-n\tan x} = e^{-n\tan a} \equiv M_n$$

con $\sum M_n < +\infty$. Pertanto la serie assegnata converge totalmente in $\left[a, \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

(h)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3x^n} \quad x \in [0,+\infty)$$

Per $x=0$ la serie non converge perché $f_n(0)=\frac{1}{n}$.
Per $0<x\leq 1$ la serie non converge perché $f_n(x)\tilde{=}\frac{1}{n}$.
Per $x>1$, utilizzando la gerarchia degli infiniti, si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3x^n} \sim \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

la quale converge puntualmente se e soltanto se $\frac{1}{x}<1 \Leftrightarrow x>1$.
Se ci si restringe in un intervallo del tipo $[a,+\infty)$ con $a>1$ si ha poi che

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n+3x^n} = \frac{1}{n+3a^n} \equiv M_n$$

con $\sum M_n < +\infty$ e si ha dunque convergenza totale negli intervalli $[a,+\infty)$, $a>1$.