Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri
Sapienza Univ. di Roma

Integrazione in campo complesso

Curve regolari

Definizione

Diremo che γ è una *curva regolare* in $\mathbb{C}$

i) se

$$\begin{aligned}\gamma\colon [a,b] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)\end{aligned}$$

è una funzione di classe C^1 (derivabile con derivata continua)

ii) $\gamma'(t) := \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$.

L'immagine $\gamma([a,b])$ di γ in $\mathbb{C}$

$$\gamma([a,b]) = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [a,b]\}$$

si dice *sostegno (o traccia) di* γ.

Curve regolari

Diremo che γ è contenuta in un aperto A se $\gamma([a,b]) \subseteq A$.

Il punto $\gamma(a)$ si dice *punto iniziale* e il punto $\gamma(b)$ si dice *punto finale* di γ.

La funzione γ è detta anche *legge oraria* con cui viene percorso il sostegno $\gamma([a,b])$.

Se $\gamma(a) = \gamma(b)$, la curva si dice *chiusa*.

Se γ, ristretta ad $[a,b)$, è iniettiva, cioè

$$t_1 \neq t_2 \in [a,b) \quad \text{implica} \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2),$$

allora γ si dice *semplice*.

Se γ è semplice e chiusa, viene detta *circuito*.

Si definisce la lunghezza di $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ nel seguente modo:

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b (\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2)^{1/2} dt.$$

Esempi

1) Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, e $t \in [0,1]$,

la curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := (1-t)z_1 + tz_2$ è una curva semplice e regolare con punto iniziale z_1 e punto finale z_2.

Il suo sostegno è il segmento di estremi z_1 e z_2 in $\mathbb{C}$ e la sua lunghezza è $|z_1 - z_2|$.

2) Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$,

la curva $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ è una curva semplice, chiusa e regolare,

il suo sostegno è la circonferenza di centro z_0 e raggio r e la sua lunghezza è $2\pi r$.

Appello del 17 gennaio 2013

(i) Si dia la definizione di curva regolare in $\mathbb{C}$.

(ii) Si calcoli la lunghezza della curva del piano complesso avente le seguenti equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} i$$

dove $t \in [-1, 1]$.

Soluzione: Si ha che

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\frac{1+t^2}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{1+t^2}$$

e quindi

$$l(\gamma) = \int_{-1}^{1} |\gamma'(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Cambiamento di parametro

Data $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare

e data $\phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ di classe C^1 su $[a,b]$

tale che $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ e $\phi'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in [\alpha,\beta]$ (tale ϕ viene detta *cambiamento di parametro* che conserva l'orientamento),

la nuova curva definita da

$$\begin{aligned} \gamma_1 := \gamma \circ \phi\colon [\alpha,\beta] &\to \mathbb{C} \\ \tau &\mapsto \gamma(\phi(\tau)) \end{aligned}$$

è una curva regolare che ha lo stesso sostegno di γ e lo stesso orientamento.

Cambiamento di parametro

Tutte le curve così ottenute formano una classe di equivalenza:

esse hanno in comune lo stesso sostegno,

ma è diversa la legge oraria con cui questo viene percorso.

Inoltre si possono considerare dei cambiamenti di parametro che cambiano l'orientamento:

per esempio, data $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare,

la curva $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ è ancora una curva regolare, ha la stessa traccia di γ,

ma è percorsa in senso opposto e dunque scambia i punti estremi.

Concatenamento di curve

Date due curve regolari γ_1, $\gamma_2 \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ tale che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

si possono *concatenare* le due curve per esempio definendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si ha $\gamma(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma(1) = \gamma_2(1)$, γ è continua, ma in generale non è C^1.

La concatenazione analoga di più segmenti dà una *poligonale*.

Definizione Una curva γ si dice *regolare a tratti* se è ottenuta concatenando due o più curve regolari.

Integrale curvilineo

Dati $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso, $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare (o regolare a tratti) la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$,

si definisce l'*integrale di* f *lungo* γ nel seguente modo:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si osservi che la funzione $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ è una funzione di variabile reale a valori complessi.

Integrale curvilineo

Esempi

1) Sia $f(z) = \frac{1}{z}$ per $z \in \mathbb{C}^*$ e sia γ la circonferenza di centro 0 e raggio r, cioè

$$\gamma_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},$$

$$\gamma_r(t) := re^{it}.$$

Allora

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i.$$

Si noti che non dipende da r.

Integrale curvilineo

Esempi

2) Sia $f(z) = z^k$, con $k \in \mathbb{Z}$, con $k \neq -1$ (si noti che $k = -1$ è il caso precedente) definita su tutto $\mathbb{C}$ per $k \geq 0$ e su $\mathbb{C}^*$ per $k < 0$.

Sia

$$\gamma_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},$$

$$\gamma_r(t) := re^{it}.$$

Allora

$$\int_\gamma z^k dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} ire^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = 0,$$

grazie alla periodicità di e^z in campo complesso con periodo $2\pi i$.

Integrale curvilineo

Elenchiamo ora alcune proprietà dell'integrale:

1) linearità : $\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_\gamma f_1 + c_2 \int_\gamma f_2$;

2) indipendenza dal cambiamento di parametro (che conserva l'orientamento):

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(\tau)))(\gamma \circ \phi)'(\tau)d\tau = \int_{\gamma\circ\phi} f;$$

3) cambio di segno nel passaggio a γ^-: $\int_\gamma f = -\int_{\gamma^-} f$;

Integrale curvilineo

4) additività rispetto alla curva: $\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1\gamma_2} f$, dove $\gamma_1\gamma_2$ denota la concatenazione di γ_1 e di γ_2;

5) se $M = \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$, allora $\left| \int_\gamma f \right| \leq M\, l(\gamma)$.

Vale inoltre il seguente teorema di passaggio al limite:

Teorema

Sia f_n una successione di funzioni continue definite in A. Supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in A. Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Esercizio

Si calcoli il seguente integrale in campo complesso

$$\int_\gamma \bar{z} dz, \qquad \gamma(t) = i + 2e^{it}, \qquad t \in [0, \pi].$$

Soluzione: Utilizzando la definizione di integrale in campo complesso si ha che

$$\int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^\pi \overline{i + 2e^{it}} \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(-i + 2e^{-it}\right) 2ie^{it} dt = \int_0^\pi 2e^{it} dt + \int_0^\pi 4i \, dt =$$

$$= -2i \, \left(e^{it}\right)\Big|_0^\pi + 4\pi i = -2i(-1-1) + 4\pi i = 4(\pi + 1)i.$$