Analisi Matematica II

Funzioni complesse

Virginia De Cicco, Pietro Mercuri
Sapienza Univ. di Roma

Analisi complessa

Richiami sui numeri complessi

Funzioni complesse

Struttura topologica

Il campo $\mathbb{C}$ eredita la struttura topologica di $\mathbb{R}^2$, cioè si possono dare, come già in $\mathbb{R}^2$, le seguenti nozioni per un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ e un punto $z \in \mathbb{C}$

z si dice interno ad A se $\exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A$,

z si dice esterno ad A se $\exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$ (A^c complementare di A),

z si dice punto di frontiera di A se $\forall r > 0 \quad B_r(z) \cap A \neq \varnothing \quad$ e $\quad B_r(z) \cap A^c \neq \varnothing$,

z si dice punto di accumulazione di A se $\forall r > 0$ l'intersezione $B_r(z) \cap A$ contiene infiniti punti.

Struttura topologica

Inoltre un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *aperto* se ogni suo punto è interno ad A stesso e si dice chiuso se il suo complementare A^c è aperto.

Se $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, allora A è aperto e la sua frontiera ∂A (cioè l'insieme dei suoi punti di frontiera) è l'insieme $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. In particolare se si definisce l'insieme

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

allora $\mathbb{C}^*$ è aperto e la sua frontiera è il singoletto $\{0\}$.

Inoltre si definisce *semiasse reale negativo* l'insieme

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\}.$$

Infine se si definisce $\mathbb{C}^{**}$ l'insieme dei complessi che non sono punti del semiasse reale negativo, cioè

$$\mathbb{C}^{**} := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\},$$

allora $\mathbb{C}^{**}$ è aperto e la sua frontiera è il semiasse reale negativo.

Funzioni di una variabile complessa

Un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *connesso* se comunque si fissano due punti in A esiste una poligonale che li congiunge, tutta contenuta in A.

In questa sezione consideriamo funzioni $f : A \to \mathbb{C}$, con A aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}$. Una tale funzione si dice *limitata* in A se esiste $C > 0$ (reale) tale che $|f(z)| \leq C$ per ogni $z \in A$.

Definizione di limite

Si dice che $\lambda \in \mathbb{C}$ è il *limite* di f per z che tende a z_0 (punto di accumulazione di A, non necessariamente appartenente ad A), e si scrive

$$\lambda = \lim_{z \to z_0} f(z),$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad \forall z \in A \cap B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \qquad |f(z) - \lambda| < \epsilon.$$

Si dice che $\lambda \in \mathbb{C}$ è il *limite* di f per $|z|$ che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lambda = \lim_{|z| \to +\infty} f(z),$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \qquad \forall z \in A \quad |z| \geq M \qquad |f(z) - \lambda| < \epsilon.$$

Funzioni continue

La funzione f si dice *continua* in $z_0 \in A$ se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

cioè se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad \forall z \in A \cap B_\delta(z_0) \qquad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Infine la funzione f si dice *continua* in A se lo è in ogni punto $z_0 \in A$.

Sia $z = x + iy$ e $w = f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, dove $u, v \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono dette funzioni *parte reale* e *parte immaginaria* di f, si verifica facilmente, che la continuità di f in $z_0 = x_0 + iy_0$ equivale alla continuità di u e v in (x_0, y_0).

Si osservi che, come per le funzioni $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, valgono i teoremi sulla continuità della somma, del prodotto e del quoziente.

Esempi

Sono continue su tutto $\mathbb{C}$:

le funzioni costanti: $f(z) = a$;

la funzione identità: $f(z) = z$;

la funzione modulo: $f(z) = |z|$;

la funzione quadrato: $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$;

la funzione coniugio: $f(z) = \overline{z} = x - iy$.

Le funzioni razionali fratte sono continue in $\mathbb{C}$ privato degli zeri del polinomio al denominatore.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 5}$$

In particolare $f(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è continua in $\mathbb{C}$

e $f(z) = \frac{1}{z^n}$ è continua in $\mathbb{C}^*$.

La funzione Arg(z)

Definiamo la funzione $f : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$

$$f(z) = \operatorname{Arg}(z)$$

Vogliamo definirla in funzione di (x, y).

$$\operatorname{Arg}(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

Per tale funzione si ha che la parte immaginaria è nulla,

$$v(x, y) = 0$$

Vedremo che sarà continua in $\mathbb{C}^{**}$.

La funzione Arg(z)

Partiamo dalla formula di cambio di variabili

$$x = \rho\cos(\theta) = |z|\cos(\mathrm{Arg}(z)), \qquad y = \rho\sin(\theta) = |z|\sin(Arg(z))$$

da essa si ricava che

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vorremmo una formula analoga per $\mathrm{Arg}(z) = g(x, y)$. Si ha

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta,$$

da cui si ha

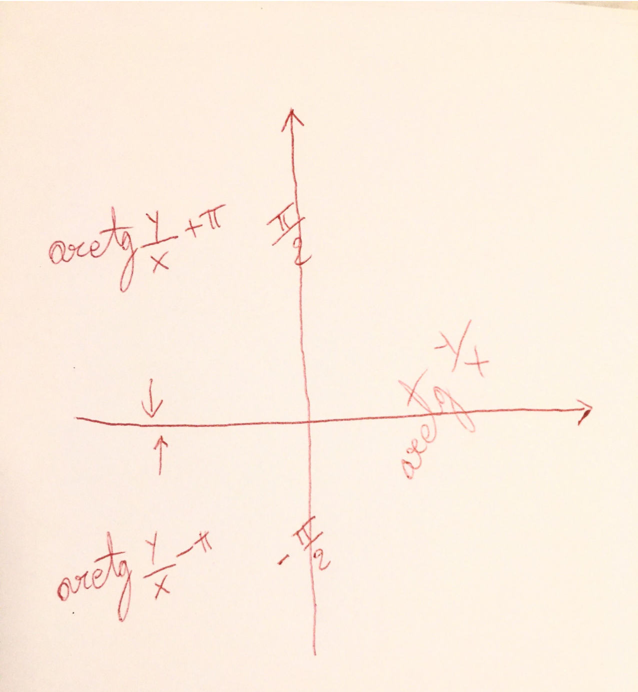
$$\mathrm{Arg}(z) = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

In realtà ho commesso un errore perché nel dividere per x devo supporre che $x \neq 0$, che vuol dire che (x, y) non deve appartenere all'asse delle y.

La funzione Arg(z)

$$u(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0, \end{cases}$$

che è continua su $\mathbb{C}^{**} = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x < 0, y = 0\}$.


arctg $\frac{y}{x}+\pi$
$\frac{\pi}{2}$
arctg y/x
arctg $\frac{y}{x}-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$

La funzione radice *n*-esima principale

Ricordiamo le radici n-esime

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

La funzione radice n-esima PRINCIPALE, si ha per $k = 0$ ed è definita da

$$f(z) = |z|^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}\right) \right].$$

è definita in $\mathbb{C}$ e continua in $\mathbb{C}^{**}$.

Infatti la discontinuità della funzione $\mathrm{Arg}(z)$ sul semiasse reale negativo produce la stessa discontinuità per la funzione radice n-esima principale.

Appello dell'11 novembre 2011

1) Si dia la definizione di Arg z per $z \neq 0$ e si discuta la sua continuità e la sua olomorfia.

2) Una delle seguenti identità è falsa. Quale?

a) $\mathrm{Arg}(2z) = 2\,\mathrm{Arg}\ z$

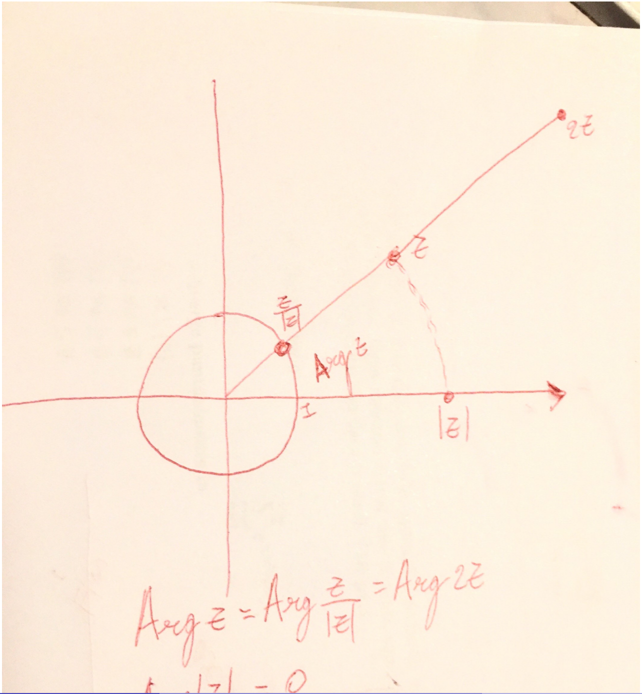
b) $\mathrm{Arg}(2z) = \mathrm{Arg}\ z$

c) $\mathrm{Arg}\,|z| = 0$

d) $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right)$.

Soluzione:

a)


2z
z
z/|z|
Arg z
1
|z|
Arg z = Arg z/|z| = Arg 2z

Derivabilità in senso complesso

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$. Per ogni $z \in A$ si definisce *rapporto incrementale* di f in z la funzione

$$z \mapsto \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

dove $\Delta z \in \mathbb{C}^*$ ed è tale che $z + \Delta z \in A$.

La funzione f si dice *derivabile* in un punto $z \in A$ se esiste in $\mathbb{C}$ il limite λ del rapporto incrementale per $\Delta z \to 0$

$$\lambda = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Derivabilità in senso complesso

Il numero complesso λ (se esiste) si chiama la *derivata* di f in z e si denota con $f'(z)$ oppure $Df(z)$.

Per la derivata in senso complesso valgono gli stessi teoremi (della somma, del prodotto, della composta) della derivata delle funzioni reali; in effetti la definizione è formalmente la stessa.

Come in campo reale, la derivabilità implica la continuità; basta osservare che

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) - f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = 0.$$

Quindi

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Differenziabilità rispetto a (x, y)

Sia $f(z) = f(x, y)$, dove $z = x + iy$.

La funzione f si dice *differenziabile rispetto a (x, y)* nel punto (x_0, y_0) se, per ogni coppia di incrementi Δx e Δy, si ha che

$$\begin{aligned}\Delta f &:= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),\end{aligned}$$

dove l'ultimo termine $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla distanza euclidea dei punti (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Cioè f è differenziabile se

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{|\Delta z|} = 0.$$

Si ricordi che condizione sufficiente perché f sia differenziabile rispetto a (x, y) è che esistano le derivate parziali prime di f e siano continue in un intorno di (x_0, y_0).

Condizioni di Cauchy-Riemann

La differenziabilità di $f(x, y)$ rispetto a (x, y) equivale alla differenziabilità di $f(z)$ rispetto a z?

La risposta è NO!

Infatti vale la seguente proposizione.

Proposizione

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ differenziabile rispetto a (x, y).

Allora $f(z)$ è differenziabile (come funzione di variabile complessa) se e solo se si ha

$$(\mathbf{CR1}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Inoltre se vale l'ultima uguaglianza, allora

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Esempi

$$1) \quad f(z) = z^3 = (x+iy)^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+iy)^2,$$

$$-i\frac{\partial f}{\partial y} = -i \cdot 3i(x+iy)^2,$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

Esempi

$$2) \quad f(z) = z^n = (x + iy)^n,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = n(x + iy)^{n-1},$$

$$-i\frac{\partial f}{\partial y} = -i \cdot i\, n(x + iy)^{n-1},$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = n(x + iy)^{n-1} = nz^{n-1}.$$

Condizioni di Cauchy-Riemann

Dalla

$$\textbf{(CR1)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y},$$

scrivendo $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

da cui eguagliando parte reale e parte immaginaria si ha

$$\textbf{(CR2)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Le uguaglianze **(CR2)** (o equivalentemente **(CR1)**) sono dette *condizioni di Cauchy-Riemann*.

Condizioni di Cauchy-Riemann

Ricordando che

$$grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad grad\ v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

si verifica facilmente che da **(CR2)** segue che il loro prodotto scalare

$$grad\ u \cdot grad\ v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

cioè che i vettori gradienti sono ortogonali fra di loro.

Inoltre segue che

$$\|grad\ u\| = \|grad\ v\|,$$

dove per ogni $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}\,.$$

Olomorfia

Si dice che $f : A \to \mathbb{C}$ è *olomorfa* in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ se per ogni $z_0 \in A$ la funzione f è derivabile in z_0.

Una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ si dice *intera*.

Per la somma, il prodotto, la composizione e il quoziente di funzioni olomorfe valgono gli stessi teoremi già noti per le funzioni derivabili in campo reale.

Esempio 1 Sia $f(z) := \overline{z} = x - iy$.

Si ha che $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ e $-i\frac{\partial f}{\partial y} = -1$. Quindi non esiste un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ tale che f è olomorfa in A.

Esempio 2 Le funzioni (non costanti) che hanno valori solo puramente reali o solo puramente immaginari non sono olomorfe in alcun aperto del piano complesso, poiché non soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Funzioni di questo tipo sono $f(z) = \mathrm{Im}(z)$, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $f(z) = |z|$ e $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$.

Esempio 3 Sia $f(z) := \frac{1}{z}$, per $z \in \mathbb{C}^*$. Si ha che

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

e si può verificare facilmente che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann in $\mathbb{C}^*$.

Appello del 25 luglio 2010

Si determini una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che abbia come parte reale la funzione

$$u(x, y) = e^{-x-1} \cos y.$$

Soluzione:

Si cerca una funzione olomorfa del tipo

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)\,.$$

Sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann abbiamo

$$\begin{cases} u_x = -e^{-x-1} \cos y = v_y, \\ u_y = -e^{-x-1} \sin y = -v_x. \end{cases}$$

Integrando rispetto a y la prima espressione otteniamo

$$v(x, y) = \int -e^{-x-1} \cos y \, dy = -e^{-x-1} \sin y + h(x);$$

Appello del 25 luglio 2010

Sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann abbiamo

$$\begin{cases} u_x = -e^{-x-1}\cos y = v_y \\ u_y = -e^{-x-1}\sin y = -v_x. \end{cases}$$

$$v(x,y) = \int -e^{-x-1}\cos y \, dy = -e^{-x-1}\sin y + h(x);$$

integrando rispetto a x la seconda otteniamo

$$v(x,y) = \int e^{-x-1}\sin y \, dx = -e^{-x-1}\sin y + g(y).$$

Da cui ricaviamo $h(x) = g(y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$.
Concludiamo che la funzione $v(x,y)$ cercata è $v(x,y) = -e^{-x-1}\sin y + c$, $c \in \mathbb{R}$.
La funzione olomorfa richiesta è
$f(x,y) = u(x,y) + i\, v(x,y) = e^{-x-1}\cos y + i(-e^{-x-1}\sin y + c)$.

Esercizi

Si determini l'insieme di definizione, l'insieme di continuità e l'aperto di olomorfia delle seguenti funzioni di variabile complessa.

1)

$$f(z) = z|z| = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2}$$

L'insieme di definizione e l'insieme di continuità sono $\mathbb{C}$.
L'aperto di olomorfia è l'insieme vuoto. Infatti

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esercizi

Si determini l'insieme di definizione, l'insieme di continuità e l'aperto di olomorfia delle seguenti funzioni di variabile complessa.
2)

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

L'insieme di definizione e l'insieme di continuità sono $\mathbb{C}$.
L'aperto di olomorfia è $\mathbb{C}$. Infatti

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y) \end{cases}$$

da cui segue che $f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$.

Esercizi

Si determini l'insieme di definizione, l'insieme di continuità e l'aperto di olomorfia delle seguenti funzioni di variabile complessa.
3)

$$f(z) = |z^2| = x^2 + y^2$$

Attenzione $|z^2| = |z|^2 \neq z^2$
L'insieme di definizione e l'insieme di continuità sono $\mathbb{C}$.
L'aperto di olomorfia è l'insieme vuoto. Infatti

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x(x,y) = 2x \\ v_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

e poiché $u_x(x,y) \neq v_y(x,y)$ segue che $f(z)$ non è olomorfa in alcun aperto non vuoto di $\mathbb{C}$.

Si determini l'insieme di definizione, l'insieme di continuità e l'aperto di olomorfia delle seguenti funzioni di variabile complessa.
4)

$$f(z) = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$$

L'insieme di definizione e l'insieme di continuità sono $\mathbb{C}$.
L'aperto di olomorfia è l'insieme vuoto. Infatti

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-2y \neq -(-2y)$$

Esercizi

Si determini l'insieme di definizione, l'insieme di continuità e l'aperto di olomorfia delle seguenti funzioni di variabile complessa.
5)

$$f(z) = (\mathrm{Re}(z))^2 + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = x^2 + iy$$

L'insieme di definizione e l'insieme di continuità sono $\mathbb{C}$.
L'aperto di olomorfia è l'insieme vuoto.

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 \\ v(x,y) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x(x,y) = 2x \\ v_y(x,y) = 1 \end{cases}$$

e poiché $u_x(x,y) \neq v_y(x,y)$ segue che $f(z)$ non è olomorfa in alcun aperto non vuoto di $\mathbb{C}$.