

Analisi Matematica II

Successioni di funzioni

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Successioni di funzioni

Successioni di funzioni

In questa lezione introduciamo **le successioni di funzioni reali** di una variabile reale e le nozioni di **convergenza puntuale ed uniforme** per tali successioni.

Sia I un intervallo contenuto in \mathbb{R}

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita in I .

Consideriamo la successione di funzioni

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

che denoteremo anche con $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Osserviamo che $f_n(x)$ ha una doppia dipendenza: nella variabile $x \in \mathbb{R}$ e nell'indice $n \in \mathbb{N}$;

$n \in \mathbb{N}$ fissato si ha la funzione $x \mapsto f_n(x)$;

a $x \in I$ fissato si ha la successione numerica $f_n(x)$.

$$f_n(x) = n^x, \quad n \geq 1$$

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 2^x, \quad \dots$$

$$f_n(x) = x^n$$

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \dots$$

$$f_n(x) = e^{nx}$$

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{2x}, \quad f_3(x) = e^{3x}, \quad \dots$$

Esempi

$$f_n(x) = \text{sen}(nx)$$

$$f_n(x) = n^{nx}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\cos(n^2 x)}$$

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{1}{x^n}$$

$$f_n(x) = \frac{\text{arctg}(x^2 + n)}{x^n}$$

Vogliamo studiare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f'_n(x)$$

Convergenza puntuale

Data una successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definite in I e data $f : A \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che $f_n \rightarrow f$ *puntualmente in A* (o che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$) se

$$\forall x \in A \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ciò equivale a dire, ricordando la definizione di limite per una successione, che

$$\forall x \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_{x,\epsilon} \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_{x,\epsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Esempio

La successione

$$f_n(x) = x^n$$

converge puntualmente su $I = [0, \frac{1}{2}]$ alla funzione identicamente nulla $f(x) = 0$ per ogni x .

Infatti, fissato $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$x = \frac{1}{2} \text{ si ha } \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0,$$

$$x = \frac{1}{5} \text{ si ha } \left(\frac{1}{5}\right)^n \rightarrow 0,$$

$$x = \frac{3}{40} \text{ si ha } \left(\frac{3}{40}\right)^n \rightarrow 0, \dots$$

Esempio

Si studi la convergenza puntuale delle seguente successione di funzioni.

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{x^{n+1}} \quad x \in (0, +\infty)$$

$\forall x \in (0, 1)$ si ha che $x^n \rightarrow 0$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x^n)}{x^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n + o(x^n)}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}.$$

Se $x > 1$, $x^n \rightarrow +\infty$ ed essendo $\arctan(x^n)$ limitata $\forall n$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x^n)}{x^{n+1}} = 0.$$

Infine, se $x = 1$,

$$f_n(1) = \frac{\pi}{4}.$$

In definitiva

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \forall x \in (0, 1) \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Convergenza uniforme

Data una successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definite in I

e data $f : A \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$,

si dice che $f_n \rightarrow f$ *uniformemente in A* se

nella definizione precedente $\nu_{x,\epsilon}$ non dipende da $x \in A$, cioè se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\epsilon \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A.$$

Confrontiamo con la definizione di convergenza puntuale

$$\forall x \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_{x,\epsilon} \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_{x,\epsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Convergenza uniforme

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\epsilon \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A.$$

Utilizzando la definizione di estremo superiore, si ha che per dimostrare che $f_n \rightarrow f$ *uniformemente* in A basta verificare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_\epsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu_\epsilon \quad \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

o equivalentemente

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_\epsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \nu_\epsilon \quad g_n < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Operativamente, per dimostrare che una successione converge uniformemente, si considera, a $n \in \mathbb{N}$ fissato, l'estremo superiore $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ e poi si cerca il limite per $n \rightarrow +\infty$ della successione numerica

$$g_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Nell'esempio precedente
La successione

$$f_n(x) = x^n$$

converge puntualmente su $I = [0, \frac{1}{2}]$ alla funzione identicamente nulla $f(x) = 0$ per ogni x .

$$g_n := \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2^n}$$

che tende a 0.

Convergenza uniforme

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Infatti per ogni $x \in A$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Il viceversa non vale; basta considerare, come controesempio, la stessa successione $f_n(x) = x^n$ definita in $I = [0, 1]$ che converge puntualmente in I alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1, \end{cases} \quad (1)$$

ma non converge uniformemente in I . Infatti

$$g_n := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 1 \neq 0.$$

Come si vede già in questo esempio, il fatto che la convergenza sia uniforme o meno può dipendere dall'insieme che si sceglie. Spesso negli esercizi si chiede di individuare un insieme opportuno dove la convergenza sia uniforme.

Esempi

1) La successione

$$f_n(x) = (x(1-x))^n$$

converge puntualmente su $I = [0, 1]$ alla funzione identicamente nulla. Inoltre tale convergenza è uniforme in I ; infatti

$$g_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0,1]} (x(1-x))^n = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4^n}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = 0.$$

Per calcolare tale massimo si è fatta la derivata:

$$f'_n(x) = n(x(1-x))^{n-1}(1-2x)$$

e si è visto che l'unico punto interno in cui questa si annulla è $x = 1/2$ (che è punto di massimo) e $f_n(1/2) = \frac{1}{4^n}$, mentre in 0 e 1 vale 0 e inoltre f_n è sempre positiva.

Esempi

2) La successione

$$f_n(x) = \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^n$$

converge puntualmente in $I = [0, +\infty[$ alla funzione identicamente nulla.

Tale convergenza non è uniforme in $I = [0, +\infty[$; infatti

$$g_n = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^n = 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 1 \neq 0.$$

In questo caso per calcolare l'estremo superiore si è calcolata la derivata

$$f'_n(x) = n \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{n-1} \frac{1}{(2+x)^2} > 0$$

e da ciò si è visto che la funzione $f_n(x)$ è strettamente crescente e che l'estremo superiore è il limite per $x \rightarrow +\infty$.

3) Consideriamo la successione

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per le gerarchie degli infiniti, se $x > 1$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3}} = +\infty,$$

mentre se $x < -1$, x^n non ammette limite. In entrambi i casi non esiste limite puntuale per la $f_n(x)$. Se invece $|x| \leq 1$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3}} = 0$$

e dunque, per la continuità della funzione seno, $f_n(x) \rightarrow 0$. In definitiva $f_n(x)$ converge alla funzione nulla $\forall x \in [-1, 1]$.

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

In tale intervallo, utilizzando il fatto che $\left|\sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right)\right|$ è una funzione pari e che il seno è una funzione crescente in un intorno destro dell'origine contenuto in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha che

$$g_n = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right) \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right) \right| = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

da cui si ricava che la convergenza è anche uniforme.

Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme

Diamo ora l'enunciato di alcuni teoremi in cui la convergenza uniforme è un'ipotesi essenziale.

Teorema sulla continuità del limite

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in I . Allora la funzione f è continua.

La successione $f_n(x) = x^n$ definita in $I = [0, 1]$ che converge puntualmente in I alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1, \end{cases} \quad (2)$$

non converge uniformemente in I poichè la funzione limite non è continua.

Esempio

Si studi la convergenza **uniforme** delle seguente successione di funzioni.

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{x^{n+1}} \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \forall x \in (0, 1) \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Si può solo sperare che ci sia in $[a, b] \subset (0, 1)$ oppure in $[c, +\infty[$, con $c > 1$.

$$g_n = \sup_{x \in [c, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [c, +\infty[} \frac{\arctan(x^n)}{x^{n+1}} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{c^{n+1}}$$

Teorema dei carabinieri implica che $g_n \rightarrow 0$

$$0 \leq g_n \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{c^{n+1}}$$

Teorema sull'inversione dei limiti

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in I . Supponiamo inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Allora esistono e coincidono i due limiti seguenti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right).$$

Esempio

La successione

$$f_n(x) = \left(\frac{\arctg x}{2} \right)^n$$

converge uniformemente a 0 in \mathbb{R} ; infatti Teorema dei carabinieri implica che $g_n \rightarrow 0$

$$0 \leq g_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{\arctg x}{2} \right)^n \right| \leq \left(\frac{\pi}{4} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\arctg x}{2} \right)^n \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\arctg x}{2} \right)^n \right).$$

Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme

Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I = [a, b]$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in I .

Allora vale la seguente formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Dimostrazione

Essendo f limite uniforme di funzioni continue, allora essa è continua in $[a, b]$ e quindi integrabile. Per avere la tesi, grazie alla definizione di limite, basta mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_\epsilon$ si abbia

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon.$$

D'altra parte, poichè $f_n \rightarrow f$ uniformemente, per ogni $\epsilon' > 0$ esiste $\nu_{\epsilon'} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_{\epsilon'}$ si ha

$$g_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon'.$$

Quindi, fissato $\epsilon > 0$, se si sceglie $\epsilon' < \frac{\epsilon}{b-a}$ si ottiene per ogni $n \geq \nu_{\epsilon'}$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \\ &\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| (b-a) < \epsilon' (b-a) < \epsilon. \end{aligned}$$

QED

Esame del 21 gennaio 2010

- (i) Si enunci il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
- (ii) Si dimostri tale teorema.
- (iii) Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{n} \right) dx .$$

La successione di funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{n} \right)$$

converge uniformemente sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ alla funzione identicamente nulla in quanto

$$g_n = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{n} \right) \right| \leq \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \frac{x^2}{n} \right| = \frac{\pi^2}{4n}$$

e $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0$; quindi per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{n} \right) dx = 0 .$$

Un controesempio

Il seguente esempio mostra che, se manca la convergenza uniforme della successione, allora può non valere la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Data la successione $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ che converge puntualmente a $f(x) = 0$ in tutto \mathbb{R} , per essa non vale la formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale poichè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2},$$

mentre

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

In effetti, non c'è convergenza uniforme in tutto \mathbb{R} , poichè (essendo f una funzione dispari la cui derivata in $[0, +\infty)$ si annulla solo nel punto $\frac{1}{\sqrt{2n}}$) si ha

$$g_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n} e^{-\frac{1}{2}}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n} e^{-\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Analogamente, non si ha convergenza uniforme negli intervalli del tipo $[-\alpha, \alpha]$ o del tipo $[0, \alpha]$, con $\alpha > 0$, poichè da un certo n in poi i punti di massimo $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ cadono in questi intervalli.

Al contrario, la convergenza è uniforme sugli intervalli del tipo $[\alpha, +\infty)$, (e anche $(-\infty, -\alpha]$) con $\alpha > 0$, poichè da un certo n in poi i punti di massimo $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ (rispettivamente $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$) non cadono in questi intervalli e quindi

$$g_n = \sup_{x \in [\alpha, +\infty)} f_n(x) = f_n(\alpha) = n\alpha e^{-n\alpha^2}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha e^{-n\alpha^2} = 0.$$

Teoremi sulla convergenza uniforme

Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di classe C^1 (cioè *derivabili e con derivate continue*) definite in un intervallo $I = [a, b]$

e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I .

Supponiamo inoltre che la successione f'_n delle derivate converga uniformemente verso una funzione g .

Allora si ha che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in I ,

f è derivabile e $f' = g$,

cioè vale la seguente formula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

Un controesempio

Il seguente esempio mostra che, se manca la convergenza uniforme della successione delle derivate, allora può non valere la formula di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

Data la successione

$$f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$$

che converge puntualmente a $f(x) = 0$ in tutto \mathbb{R} , si ha che

$$g_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}n} e^{-\frac{1}{2}}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} e^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Quindi la successione converge uniformemente a $f(x) = 0$ in tutto \mathbb{R} . Tuttavia per essa non vale la formula di passaggio al limite sotto il segno di derivata poichè

$$f'_n(x) = e^{-n^2 x^2} (1 - 2n^2 x^2)$$

tende alla funzione che vale 1 per $x = 0$ e 0 per $x \neq 0$, mentre la derivata di f è nulla.

Si osservi che la successione $f'_n(x)$ delle derivate (ognuna della quali è continua) converge ad una funzione discontinua e pertanto tale convergenza non può essere uniforme.

Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme

Diamo ora due enunciati sulla convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia.

Nel primo teorema (detto teorema del Dini) si assume la monotonia rispetto all'indice $n \in \mathbb{N}$ della successione $f_n(x)$ ad x fissato,

mentre nel secondo si assume la monotonia rispetto alla variabile x della funzione $f_n(x)$ ad $n \in \mathbb{N}$ fissato.

Teorema 1

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I = [a, b]$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua* tale che $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I .

Assumiamo inoltre che tale successione sia monotona crescente rispetto ad $n \in \mathbb{N}$, i.e. per ogni $x \in [a, b]$ si ha che

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Allora la successione $f_n \rightarrow f$ converge uniformemente in I .

Il teorema vale analogamente se si assume che la successione sia monotona decrescente rispetto ad $n \in \mathbb{N}$, i.e. per ogni $x \in [a, b]$ si ha che

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$

Esempio

$$f_n(x) = e^{-(n+x)^2}, \quad x > 0$$

tende a 0 in \mathbb{R}^+ uniformemente, essendo decrescente rispetto ad n , per x fissato.

Teorema 2

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni *non necessariamente continue* definite in un intervallo $I = [a, b]$

e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua* tale che $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I .

Assumiamo inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x)$ sia monotona crescente rispetto ad x , i.e. si ha che, se $x_1 \leq x_2$, allora

$$f_n(x_1) \leq f_n(x_2).$$

Allora la successione $f_n \rightarrow f$ converge uniformemente in I .

Il teorema vale analogamente se si assume che la funzione sia monotona decrescente rispetto ad x , i.e. si ha che, se $x_1 \leq x_2$, allora

$$f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Esempio

$$f_n(x) = \log \left(\frac{x+n}{n} \right), \quad x > 0$$

tende a 0 in \mathbb{R}^+ uniformemente, essendo crescente rispetto ad x , per n fissato.

Esercizio 1

La successione

$$f_n(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

è una successione geometrica che converge puntualmente a 0 se

$$\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1,$$

mentre converge puntualmente ad 1 se

$$\frac{x+1}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Pertanto

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -3 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Poiché $f_n(x)$ è una successione di funzioni continue mentre $f(x)$ è discontinua in $x = 1$ segue, dal teorema della continuità del limite, che la convergenza non può essere uniforme in tutto l'intervallo $(-3, 1]$.

Tuttavia, restringendosi in un intervallo di continuità della $f(x)$, cioè in un intervallo della forma $[-3 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ si ha che

$$g_n = \sup_{x \in [-3 + \epsilon, 1 - \epsilon]} \left| \left(\frac{x+1}{2} \right)^n \right| = \left| \frac{\epsilon}{2} - 1 \right|^n = \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si osservi che il massimo della funzione $h(x) = \left| \frac{x+1}{2} \right|$ nell'intervallo $[-3 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ è raggiunto nei due estremi $x = -3 + \epsilon$ e $1 - \epsilon$. Quindi anche la funzione $h^n(x) = \left| \frac{x+1}{2} \right|^n$ ha il massimo nell'intervallo $[-3 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ nei punti $x = -3 + \epsilon$ e $1 - \epsilon$. In tali punti la funzione vale $\left| \frac{\epsilon}{2} - 1 \right|^n = \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right)^n$.
E dunque la convergenza è ivi uniforme.

Esercizio 2

Consideriamo la successione

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3},$$

per $x \in [-1, 1]$.

Per $x = 1$ la successione di funzioni è identicamente nulla.

Inoltre, $x^{3n} \rightarrow 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$ e quindi $\frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \rightarrow 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$.

Infine, pur se per $x = -1$ si ha che x^{3n} non ammette limite, $\sqrt{1-x^{3n}}$ è una successione di funzioni limitata e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} = 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Dalla suddetta limitatezza segue anche che

$$g_n = \sup_{[-1,1]} \left| \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \right| = \sup_{[-1,1]} \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \leq \frac{\sqrt{2}}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

da cui si ricava che $f_n(x)$ converge uniformemente ad $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Esercizio 3

Il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{x^2} \sin \frac{x}{n}, \quad x \neq 0$$

è

a) 0 b) 1 c) x d) $\frac{1}{x}$.

La risposta giusta è d). Infatti

$$\sin \frac{x}{n} \approx \frac{x}{n}$$

e quindi

$$f_n(x) = \frac{n}{x^2} \sin \frac{x}{n} \approx \frac{n}{x^2} \frac{x}{n} = \frac{1}{x}.$$

Esercizio 4

La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{1}{1+2n^2x^2}$ tende a

- a) 1
- b) 0
- c) 0 per $x \neq 0$ e 1 in $x = 0$
- d) 0 per $x \neq 1$ e 1 in $x = 1$.

La risposta giusta è c). Infatti per $x = 0$ si ha $f_n(0) = 1 \rightarrow 1$
per $x \neq 0$ si ha che $f_n(x) = \frac{1}{1+2n^2x^2} \rightarrow 0$.

Esame del 19 novembre 2012

Esercizio 5

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^4 + 3n^2}.$$

Il limite puntuale della successione

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^4 + 3n^2}$$

è $\frac{1}{3}$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.

Tale convergenza è uniforme su ogni insieme limitato del tipo $|x| \leq A$, con A costante positiva. Infatti

$$\sup_{[-A,A]} \left| \frac{n^2}{x^4 + 3n^2} - \frac{1}{3} \right| = \sup_{[-A,A]} \frac{x^4}{3x^4 + 9n^2} \leq \sup_{[-A,A]} \frac{x^4}{9n^2} \leq \frac{A^4}{9n^2}$$

che tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizi Si studi la convergenza puntuale delle seguenti successioni di funzioni.

$$(a) \quad f_n(x) = e^{-n \tan x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(b) \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{2nx}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(c) \quad f_n(x) = \frac{1}{2+n^2 x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(d) \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(a) \quad f_n(x) = e^{-n \tan x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan x > 0$ da cui segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \tan x} = 0.$$

Per $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\tan x < 0$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \tan x} = +\infty.$$

Infine, per $x = 0$,

$$f_n(0) = 1.$$

In definitiva, si ha convergenza puntuale solo per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ e si ha

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

$$(b) \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{2nx}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

Per la gerarchia degli infiniti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2nx}}{(2n+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui segue che $f_n(x)$ converge puntualmente ad $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(c) \quad f_n(x) = \frac{1}{2 + n^2 x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Per $x \neq 0$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 x^2 (1 + o(1))} = 0,$$

mentre per $x = 0$

$$f_n(0) = \frac{1}{2}$$

da cui segue che

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$(d) \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x} \quad x \in \mathbb{R}$$

Se $x > 0$ allora $n^x \rightarrow +\infty$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = 0.$$

Se $x \leq 0$, allora

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } x = 0 \\ (-1)^n n^{|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e dunque $f_n(x)$ non ammette limite.

Esercizi Si studi la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni.

$$(a) \quad f_n(x) = \frac{n^2}{x^4 + 3n^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(b) \quad f_n(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(c) \quad f_n(x) = (\log x)^n \quad x > 0$$

$$(d) \quad f_n(x) = (e - x)^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(e) \quad f_n(x) = (x^2 - 1)^n \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(f) \quad f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \quad x \in [-1, 1]$$

$$(g) \quad f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \quad x \in [-1, 1]$$

(a)

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^4 + 3n^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3n^2 + x^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3n^2(1 + o(1))} = \frac{1}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e dunque

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \equiv \frac{1}{3}.$$

Notando che $f_n(x) < \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e che $f_n(x)$ è una successione di funzioni pari e decrescenti per valori di x positivi, si ottiene che

$$\begin{aligned} g_n &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{n^2}{3n^2 + x^4} - \frac{1}{3} \right| = \sup_{x \in [0, +\infty)} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2}{3n^2 + x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2}{3n^2 + x^4} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e dunque non c'è convergenza uniforme in tutto \mathbb{R} .

Tuttavia, restringendosi in un qualunque intervallo della forma $[-a, a]$ con $a > 0$, si ha che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-a, a]} \left| \frac{n^2}{3n^2 + x^4} - \frac{1}{3} \right| &= \sup_{x \in [0, a]} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2}{3n^2 + x^4} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{n^2}{3n^2 + x^4} = \frac{1}{3} - \frac{n^2}{3n^2 + a^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

e dunque la convergenza è ivi uniforme.

(b)

$$f_n(x) = \left(\frac{x+1}{2} \right)^n \quad x \in \mathbb{R}$$

Si tratta di una successione geometrica che converge puntualmente a 0 se

$$\left| \frac{x+1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1,$$

mentre converge puntualmente ad 1 se

$$\frac{x+1}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Pertanto

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -3 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Poiché $f_n(x)$ è una successione di funzioni continue mentre $f(x)$ è discontinua in $x = 1$ segue, dal teorema della continuità del limite, che la convergenza non può essere uniforme in tutto l'intervallo $(-3, 1]$. Tuttavia, restringendosi in un intervallo di continuità della $f(x)$, cioè in un intervallo della forma $(-3, a)$ con $-3 < a < 1$, si ha che

$$\sup_{x \in (-3, a]} \left| \left(\frac{x+1}{2} \right)^n \right| = \left(\frac{a+1}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e dunque la convergenza è ivi uniforme.

(c)

$$f_n(x) = (\log x)^n \quad x > 0$$

Si tratta di una successione geometrica che converge puntualmente a 0 se

$$|\log x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

mentre converge puntualmente ad 1 se

$$\log x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Pertanto

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{1}{e} < x < e \\ 1 & \text{se } x = e. \end{cases}$$

Poiché $f_n(x)$ è una successione di funzioni continue mentre $f(x)$ è discontinua in $x = 1$ segue, dal teorema della continuità del limite, che la convergenza non può essere uniforme in tutto l'intervallo $(\frac{1}{e}, e]$. Tuttavia, restringendosi in un intervallo di continuità della $f(x)$, cioè in un intervallo della forma $(\frac{1}{e}, a]$ con $\frac{1}{e} < a < e$ si ha

$$\sup_{x \in (\frac{1}{e}, a]} |(\log x)^n| = (\log a)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e dunque la convergenza è ivi uniforme.

(d)

$$f_n(x) = (e - x)^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

Si tratta di una successione geometrica che converge puntualmente a 0 se

$$(e - x)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq e - x \leq 1 \Leftrightarrow e - 1 \leq x \leq e + 1.$$

In tale intervallo si ha che

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } e - 1 < x < e + 1 \\ 1 & \text{se } x = e - 1 \vee x = e + 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme si avrà in tutti gli intervalli della forma

$$[e - 1 + a, e + 1 - a]$$

con $0 < a < 1$.

(e)

$$f_n(x) = (x^2 - 1)^n$$

Si tratta di una successione geometrica che converge puntualmente a 0 se

$$|x^2 - 1| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

mentre converge puntualmente ad 1 se $x = \pm\sqrt{2}$:

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{se } x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

La convergenza è uniforme in tutti gli intervalli della forma $[-a, a]$ con $0 < a < \sqrt{2}$.

(f)

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \quad x \in [-1, 1]$$

Per $x = 1$ la successione di funzioni è identicamente nulla.

Inoltre, $x^{3n} \rightarrow 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$.

Infine, pur se per $x = -1$ la successione $x^{3n} = (-1)^n$ non ammette limite, $\sqrt{1-x^{3n}}$ è una successione di funzioni limitata dal numero $\sqrt{2}$. Infatti $0 \leq 1 - |x^{3n}| \leq 1 + |x^{3n}|$ da cui $0 \leq 1 - |x^{3n}| \leq 1 + |x^{3n}| \leq 1 + 1 = 2$ e ne segue che

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \leq \frac{\sqrt{2}}{n^3}$$

Concludendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} = 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Dalla suddetta limitatezza segue anche che

$$\left| \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \right| = \frac{\sqrt{1-x^{3n}}}{n^3} \leq \frac{\sqrt{2}}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

da cui si ricava che $f_n(x)$ converge uniformemente ad $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$.

(g)

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \quad x \in [-1, 1]$$

Poichè $\frac{x^2}{n} \rightarrow 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2}{n}} - 1 = e^0 - 1 = 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Dal fatto poi che $e^{\frac{x^2}{n}} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e che $f_n(x)$ è una successione di funzioni pari crescente per $x \geq 0$, si ha

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right| = e^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e dunque la convergenza è anche uniforme.

Esercizi Si calcolino i seguenti limiti.

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) + 1 \right) dx$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x} dx$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-2}^2 \left(e^{\frac{x^2-1}{n^2}} + x \right) dx$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} x^n \right) dx$$

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) + 1 \right) dx$$

Per $x \in [0, 1]$ la successione $f_n(x) = \sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) + 1$ converge uniformemente ad $f(x) = 1$. Infatti

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) + 1 - 1 \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) \right| = \sin \left(\frac{1}{n^3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si può allora applicare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) + 1 \right) dx &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{\sqrt{x}}{n^3} \right) + 1 \right) dx \\ &= \int_0^1 1 dx = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x} dx$$

Per $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ la successione $f_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ converge uniformemente ad $f(x) = 0$. Infatti

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n} \right| \leq \left| \frac{x}{n^2} \right| = \frac{\pi}{3n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si può allora applicare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 0 dx = 0.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-2}^2 \left(e^{\frac{x^2-1}{n^2}} + x \right) dx$$

Per $x \in [-2, 2]$ la successione $f_n(x) = e^{\frac{x^2-1}{n^2}} + x$ converge uniformemente ad $f(x) = 1 + x$. Infatti, poichè $e^{\frac{x^2-1}{n^2}} > 1$ è una successione di funzioni pari, crescenti per $x \geq 0$, si ha che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-2, 2]} \left| e^{\frac{x^2-1}{n^2}} + x - 1 - x \right| &= \sup_{x \in [0, 2]} \left| e^{\frac{x^2-1}{n^2}} - 1 \right| \\ &= e^{\frac{4-1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{3}{n^2}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Si può allora applicare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-2}^2 \left(e^{\frac{x^2-1}{n^2}} + x \right) dx &= \int_{-2}^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x^2-1}{n^2}} + x \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 (1 + x) dx = x + \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 4. \end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}x^n\right) dx$$

Per $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$ la successione $f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x^n\right)$ converge uniformemente ad $f(x) = 0$. Infatti

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{4}x^n\right) \right| \leq \frac{\pi}{4}|x|^n \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si può allora applicare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}x^n\right) dx = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4}x^n\right) dx = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} 0 dx = 0.$$