Analisi Matematica II

Esercizi su successioni e serie

Virginia De Cicco

Sapienza Univ. di Roma

Esercizi su successioni e serie

(1) Si studi la convergenza puntuale e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(|x|-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Posto $|x|-1=t$, la serie diventa una serie di potenze nel campo reale,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}\, t^n\,, \quad |t|<1\,.$$

con raggio di convergenza 1, che diverge per $t=1$ e converge per $t=-1$ (è di Leibnitz). Inoltre, per il teorema di Abel, si ha convergenza uniforme per $-1 \le t \le 1-b$, con $0<b<1$ arbitrario.
Dunque, per la serie iniziale, si ha convergenza puntuale se

$$-1 \le |x|-1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le |x| < 2$$

e totale in $-2+a \le x \le 2-a$, con $0<a<1$ arbitrario. Inoltre, per il teorema di Abel, si ha convergenza uniforme per $0 \le |x| \le 2-b$, con $0<b<1$ arbitrario.

(2) Data la funzione $f(x)$, periodica di periodo π, definita da

$$f(x) = x^2 \quad x \in [0, \pi)\,,$$

si dica qual è la somma della serie di Fourier di $f(x)$ nel punto $x = \frac{3}{2}\pi$ e nel punto $x = 2\pi$.
In $x = \frac{3}{2}\pi$ che è un punto di continuità la somma vale

$$f(\frac{3}{2}\pi) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$$

In $x = 2\pi$ che è un punto di discontinuità viene la semisomma

$$\frac{1}{2}\left(\pi^2 + 0\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

(3) (i) Si studi la convergenza puntuale della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = x^n log(n^3 x + 1), \quad x \geq 0, \quad n \geq 1\,.$$

(ii) Si individui un intervallo di convergenza uniforme.
La successione converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0, 1)$.
Si ha convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[0, a]$ con $0 < a < 1$ in quanto, per ogni n fissato

$$\sup_{0 \leq x \leq a} x^n log(n^3 x + 1) = a^n log(n^3 a + 1)$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} a^n log(n^3 a + 1) = 0\,.$$

(4) Si individui la regione di convergenza puntuale, la funzione limite $f(x)$ ed almeno un insieme di convergenza uniforme per la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La successione converge in $(0, +\infty)$ alla funzione identicamente nulla (si noti che per $x \leq 0$ la successione tende a $+\infty$.)

La successione non converge uniformemente in tutto $(0, +\infty)$. Infatti

$$\sup_{x \in (0,+\infty)} f_n(x) = n$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty\,.$$

(Si osservi che la funzione $f_n(x)$ è decrescente.)
Converge uniformemente in ogni intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 0$. Infatti

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} f_n(x) = ne^{-na}$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} ne^{-na} = 0\,.$$

(5) Si calcoli tramite una serie

$$\int_0^1 cos(t^3)dt.$$

Si ha che

$$\int_0^1 cos(t^3)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{t^{6k}}{(2k)!}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{1}{6k+1}\,,$$

poiché una serie di potenze è sempre integrabile termine a termine in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto nel suo insieme di convergenza.

(6) Si determini il raggio di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}(x-2)^n\,,$$

se ne studi la convergenza assoluta, puntuale e totale e se ne calcoli la somma.
Il raggio di convergenza è $+\infty$, dunque la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) per ogni $x \in \mathbb{R}$ e totalmente in ogni intorno chiuso di centro $x = 2$ (cioè in tutti gli insiemi del tipo $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq a\}$, con $a > 0$).
La somma è $e^{e(x-2)} - 1$ (si ricordi lo sviluppo dell'esponenziale in campo complesso e si sottragga il primo termine, visto che la somma parte da $n = 1$).

(7) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni per $x > 0$

$$f_n(x) = \frac{sen\sqrt{nx}}{nx}.$$

La successione di funzioni converge in ogni punto $x \in (0, +\infty)$, poiché

$$\left|\frac{sen\sqrt{nx}}{nx}\right| \leq \frac{1}{nx},$$

e quindi il limite puntuale è la funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$ con $a > 0$; infatti

$$\left|\frac{sen\sqrt{nx}}{nx}\right| \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}\,,$$

e la successione numerica $\frac{1}{na}$ è infinitesima.

(8) Si diano tre esempi di serie di potenze aventi rispettivamente raggio di convergenza: 0, 17, $+\infty$.
Basta prendere per esempio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$$

che ha raggio 0,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{17^n} x^n$$

che ha raggio 17 e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

che ha raggio ∞.

(9) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della seguente serie di funzioni in campo reale

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(5n+1)^{-\log x}.$$

Tale serie è definita per $x > 0$, è una serie a termini positivi e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(5n+1)^{-\log x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(5n+1)^{\log x}}.$$

Per ogni $x > 0$ fissato, questa è dunque una serie armonica con esponente $\alpha = \log x$ dipendente da x. Essa converge puntualmente (ed assolutamente) se $\alpha = \log x > 1$, cioè per ogni $x > e$.

Esercizi su successioni e serie

Inoltre converge totalmente (ed uniformemente) su ogni insieme del tipo $[a, +\infty[$, con $a > e$. Infatti su tale insieme si ha $log\, x \geq log\, a > 1$ e quindi

$$M_n = \sup_{x \in [a, +\infty[} \frac{1}{(5n+1)^{log\, x}} \leq \frac{1}{(5n+1)^{log\, a}}$$

e la serie numerica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(5n+1)^{log\, a}}$$

converge poiché è armonica con esponente $log\, a > 1$.

Esercizi su successioni e serie

(10) (i) Si dia la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni.
(ii) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni in campo reale

$$f_n(x) = \frac{1}{(e^{\sqrt{x}} - 1)^n}.$$

L'insieme di definizione della successione di funzioni è $]0, +\infty[$. La successione di funzioni diverge per $0 < x < (\log 2)^2$ e converge per $x \geq (\log 2)^2$. La funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > (\log 2)^2 \\ 1 & \text{se } x = (\log 2)^2 . \end{cases}$$

Infatti

$$|e^{\sqrt{x}} - 1| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{x}} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} > log\, 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > (log\, 2)^2$$

La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > (\log 2)^2$.
Infatti

$$g_n = \sup_{x \in [a, +\infty[} \frac{1}{(e^{\sqrt{x}} - 1)^n} = \frac{1}{(e^{\sqrt{a}} - 1)^n} \to 0.$$

(11) Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(sen\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)+1\right)dx\,.$$

La successione $f_n(x)=sen\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)+1$ converge alla funzione costante 1. Inoltre, siccome la funzione $sen\,x$ è crescente e positiva nell'intervallo $[0,1]$, si ha

$$g_n=\sup_{x\in[0,1]}\left|sen\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)+1-1\right|=\sup_{x\in[0,1]}\left|sen\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|=sen\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right).$$

Poichè $\lim_{n\to+\infty}g_n=0$, la convergenza è uniforme nell'intervallo $[0,1]$.
Applicando allora il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(sen\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)+1\right)dx=1\,.$$

Esercizi su successioni e serie

(12) Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\left(\frac{x^2}{n}\right)\, dx\,.$$

La successione di funzioni

$$f_n(x) = sen\left(\frac{x^2}{n}\right)$$

converge uniformemente sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ alla funzione identicamente nulla in quanto

$$g_n = \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left| sen\left(\frac{x^2}{n}\right)\right| \leq \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left|\frac{x^2}{n}\right| = \frac{\pi^2}{4n}$$

e $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$; quindi per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\left(\frac{x^2}{n}\right)\, dx = 0\,.$$

(13) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni in campo complesso

$$f_n(x) = \frac{x^n}{2^n n^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Studiamo la convergenza puntuale della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n n^2}$ per $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = \begin{cases} 0 & |x| \leq 2 \\ +\infty & |x| > 2. \end{cases}$$

La successione converge uniformemente alla funzione nulla nell'insieme di convergenza puntuale

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}\,.$$

Infatti

$$\sup_{|x|\leq 2} \frac{|x|^n}{2^n n^2} = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

(14) Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 e^{\frac{x^2+1}{n}}\,dx.$$

La successione $e^{\frac{x^2+1}{n}}$ converge alla funzione identicamente 1 in tutto $\mathbb{R}$. Tale convergenza è uniforme nell'intervallo $[0,2]$ in quanto

$$g_n = \sup_{x\in[0,2]} \left| e^{\frac{x^2+1}{n}} - 1 \right| = \sup_{x\in[0,2]} \left(e^{\frac{x^2+1}{n}} - 1 \right) = e^{\frac{5}{n}} - 1$$

e $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$. Quindi, grazie al teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 e^{\frac{x^2+1}{n}}\,dx = \int_0^2 \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{x^2+1}{n}}\,dx = 2\,.$$

(15) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione:

$$f_n(x) = e^{-n(x+1)} \; , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_2^3 \; e^{-n(x+1)} \, dx \, .$$

La successione di funzioni $f_n(x) = e^{-n(x+1)}$ converge alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = -1 \\ 0 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$$

e non converge per $x < -1$. Pertanto l'insieme di convergenza puntuale è $[-1, +\infty[$. Tale convergenza è uniforme sui sottoinsiemi del tipo $[a, +\infty[$, con $a > -1$.

Poichè la successione converge uniformemente su $[2, 3]$, usando il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \int_2^3 \; e^{-n(x+1)} \, dx = 0 \, .$$

(16)
Il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = nx^2 sen\frac{1}{nx}$$

è

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{x}$ d) x .
Soluzione: d)

(17)
La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi} arctg\, x \right)^n$$

converge assolutamente se

a) $-1 < x < 1$ b) $x \in \mathbb{R}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $x \in [0, +\infty[$.
Soluzione: a)

Esercizi su successioni e serie

(18)
Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, x\, sen\left(\frac{x}{n}\right) .$$

La successione $f_n(x) = \sqrt{n}\, x\, sen\left(\frac{x}{n}\right)$ converge alla funzione identicamente 0 in tutto $\mathbb{R}$, essendo

$$|\sqrt{n}\, x\, sen\left(\frac{x}{n}\right)| \leq \sqrt{n}\, x \frac{x}{n} = \frac{x^2}{\sqrt{n}}$$

e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{n}} = 0 .$$

Tale convergenza è uniforme negli intervalli limitati $A \subset \mathbb{R}$ in quanto

$$g_n = \sup_{x \in A} \left| \sqrt{n}\, x\, sen\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \frac{x^2}{\sqrt{n}} \leq \frac{M^2}{\sqrt{n}}$$

dove

$$M = max_{x \in A} |x|$$

e $\lim_{n \to +\infty} g_n = 0$.

ESERCITAZIONE

1

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2x^4 + 3n}.$$

2

Si studi la convergenza assoluta e totale della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^n}{\sqrt{n}}.$$

ESERCITAZIONE

3

Si calcoli $f^{(45)}(0)$, dove $f(x) = x^2 senx$.

4

Lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{8+x}$ è

$$a) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{3n+3}} x^n \qquad b) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{3n+3}} x^n$$

$$c) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} x^n \qquad d) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{3n+2}} x^n$$

ESERCITAZIONE
1
Si ha convergenza puntuale in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alla funzione $f(x) = \frac{1}{x^4}$. La convergenza non è uniforme in $]0, +\infty[$, né in $[-\infty, 0[$, mentre lo è negli intervalli del tipo $[a, +\infty[$ e $] - \infty, -a]$ con $a > 0$, in quanto

$$g_n = \sup_{x \in]0,+\infty[} \left| \frac{n^2}{n^2 x^4 + 3n} - \frac{1}{x^4} \right| = +\infty \,,$$

mentre

$$g_n = \sup_{x \in [a,+\infty[} \left| \frac{n^2}{n^2 x^4 + 3n} - \frac{1}{x^4} \right| = \frac{3n}{a^4(n^2 a^4 + 3n)}$$

e $\lim_{n \to +\infty} g_n = 0$.

ESERCITAZIONE (Svolgimento)

2

Poniamo $t = e^x - 1$. Poichè il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{\sqrt{n}}$$

è 1, si ha convergenza assoluta per $|e^x - 1| < 1$, che equivale a

$$0 < e^x < 2$$

e quindi $x < \log 2$. Si ha convergenza totale (ed uniforme) se

$$|e^x - 1| \leq A\,,$$

con $0 < A < 1$ arbitrario. Ciò equivale a

$$0 < 1 - A \leq e^x \leq A + 1 < 2$$

e quindi si ha convergenza totale (ed uniforme) su

$$\log(1 - A) \leq x \leq \log(A + 1) < \log 2$$

al variare di $0 < A < 1$.

ESERCITAZIONE
3
Si ha $f(x) = x^2 senx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}$. Si ha che $2n+3 = 45$ se $n = 21$, da cui

$$f^{(45)}(0) = (-1)^{21} \frac{(45)!}{(43)!} = -44 \cdot 45 = -1980.$$

4 Soluzione b).

$$f(x) = \frac{1}{8+x} = \frac{1}{8} \frac{1}{1+\frac{x}{8}} = \frac{1}{2^3} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{3n}} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{3n+3}} x^n$$