یک سیستم مرتبه دوم چندعاملی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i \end{cases}$$

که در آن $x_i \in R$ ، حالت موقعیت عامل، $v_i \in R$ حالت سرعت عامل و u_i ورودی کنترل کنترلی آن می‌باشد. این دینامیک مسئله اجماع را حل می‌کند اگر: (به ازای هر شرایط اولیه $\left\{\begin{matrix} x(0) \\ v(0) \end{matrix}\right\}$)

$$\lim_{t \to \infty} |x_i - x_j| = 0 \qquad \lim_{t \to \infty} |v_i - v_j| = 0 \qquad \forall i \neq j$$

اگر ورودی کنترل کنترلی را به صورت زیر طراحی کنیم:

$$u_i = \sum_{j \in N} a_{ij}\left[\gamma_1 (x_j - x_i) + \gamma_2 (v_j - v_i)\right] \Big\} \longrightarrow \text{همسایه مرتبه اول}$$

$$+ \sum_{j \in N^2} a_{ij}\left[\gamma_1 (x_k - x_i) + \gamma_2 (v_k - v_i)\right] \Big\} \longrightarrow \text{همسایه مرتبه دوم}$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad \text{و} \quad v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T \quad \text{و}$$

$$y = [x^T \ v^T]^T \ ;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = \Gamma y & \longrightarrow \text{در ابتدا، حالتی که همسایان مرتبه دوم را در نظر نگیریم} \\ \dot{y} = \tilde{\Gamma} y & \longrightarrow \text{لحاظ کنیم.} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -\gamma_1 L & -\gamma_2 L \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -\gamma_1 \tilde{L} & -\gamma_2 \tilde{L} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \tilde{L} = L + \hat{L}$$

اگر $\hat{L}$ را ماتریس لاپلاسین گراف همسایان دوم هر عامل ($\hat{G}$) در نظر بگیریم:

$$\cancel{\det\{\Gamma\} = \det} \rightarrow \det\{\lambda I_{2n} - \Gamma\} = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -\gamma_1 L & -\gamma_2 L \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ \gamma_1 L & \lambda I_n + \gamma_2 L \end{pmatrix}\right\} = \det\left\{\lambda^2 I_n + \lambda \gamma_2 L + \gamma_1 L\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda^2 + (\gamma_1 + \lambda\gamma_2)\lambda_i(L)\right) = D_1$$

که در آن $\lambda_i(L)$ که یکی از مقادیر ویژه L است.

$$\rightarrow D_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{i1}(\Gamma) = \dfrac{-\gamma_2 \lambda_i(L) + \sqrt{\gamma_2^2 \lambda_i^2(L) - 4\gamma_1 \lambda_i(L)}}{2} \\ \lambda_{i2}(\Gamma) = \dfrac{-\gamma_2 \lambda_i(L) - \sqrt{\gamma_2^2 \lambda_i^2(L) - 4\gamma_1 \lambda_i(L)}}{2} \end{cases}$$ (مقادیر ویژه Γ)

به همین ترتیب، مقادیر ویژه $\tilde{\Gamma}$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \lambda_{i1}(\tilde{\Gamma}) = \dfrac{-\gamma_2 \lambda_i(\tilde{L}) + \sqrt{\gamma_2^2 \lambda_i^2(L) - 4\gamma_1 \lambda_i(\tilde{L})}}{2} \\ \lambda_{i2}(\tilde{\Gamma}) = \dfrac{-\gamma_2 \lambda_i(\tilde{L}) - \sqrt{\gamma_2^2 \lambda_i^2(L) - 4\gamma_1 \lambda_i(\tilde{L})}}{2} \end{cases}$$ (مقادیر ویژه $\tilde{\Gamma}$)

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به صورت زیر:

$$V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j a_{ij}\left[(x_i - x_j)^2 + (v_i - v_j)^2\right]$$

$$\rightarrow \dot{V} = \sum_i \sum_j a_{ij}\left[(x_i - x_j)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) + (v_i - v_j)(\dot{v}_i - \dot{v}_j)\right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i \end{cases} \Rightarrow \dot{V} = \sum_i \sum_j a_{ij}\left[(x_i - x_j)(v_i - v_j) + (v_i - v_j)(u_i - u_j)\right]$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sum\sum a_{ij}\Big[(x_i - x_j)(v_i - v_j) + (v_i - v_j)\Big(\sum_{k\in N} a_{ik}\left[\gamma_1(x_k - x_i) + \gamma_2(v_k - v_i)\right]$$

$$+ \sum_{l\in N^2} a_{il}\left[\gamma_1(x_l - x_i) + \gamma_2(v_l - v_i)\right] - \sum_{m\in N} a_{jm}\left[\gamma_1(x_m - x_j) + \gamma_2(v_m - v_j)\right]$$

$$-\sum_{r\in N^2} a_{jr}\left[\gamma_1(x_r - x_j) + \gamma_2(v_r - v_j)\right]\Big)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -\gamma_1 \sum_i \sum_{j\in N} a_{ij}(x_i - x_j)^2 - \gamma_2 \sum_i \sum_{j\in N^2} a_{ij}(v_i - v_j)^2$$

فایل‌های پیوستی نیز بر بستر بارگذاری شده است.