با در نظر گرفتن :

$$x = \left[\bar{x}_1^T , \bar{x}_2^T , \dots , \bar{x}_n^T\right] \quad ؛$$

$$\bar{x}_i = \left[(x_i^0)^T , (x_i^1)^T , \dots , (x_i^{L-1})^T\right] , \quad i = 1, 2, \dots , n$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{x}}_i = (A \otimes I_m)\bar{x}_i + (B \otimes I_m) \sum c_{ij}(\bar{x}_j - \bar{x}_i)$$

در نتیجه سیستم کلی بصورت زیر بدست می آید:

$$\dot{x} = \left[I_n \otimes (A \otimes I_m) - L \otimes (B \otimes I_m)\right] x$$

if $\Phi = I_n \otimes A - L \otimes B$

و w_L و w_r بردارهای ویژه سمت چپ و راست Φ باشند (متناظر با مقدار ویژه صفر)

$$\Rightarrow \Phi \frac{1}{\sqrt{n}} 1_n \otimes [1\ 0\ 0\ \dots\ 0]^T_{L\times 1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (I_n \otimes A - L \otimes B) 1_n \otimes [1\ 0\ \dots\ 0]^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} (I_n 1_n) \otimes (A[1\ 0\ \dots\ 0]^T) - \frac{1}{\sqrt{n}} (L I_n) \otimes (B[1\ 0\ \dots\ 0]^T) = 0_{Ln}$$

(۳)

$$\Rightarrow \frac{1}{b\sqrt{n}} 1_n^T \otimes [-b \ \cdots \ -b \ 1]_{1\times L} \Phi = \frac{1}{-b\sqrt{n}} 1_n^T \otimes [-b \ \cdots \ -b \ 1] \otimes (I_n \otimes A - L \otimes B)$$

$$= \frac{1}{-b\sqrt{n}} (1_n^T I_n) \otimes ([-b \ \cdots \ -b \ 1] A) - \frac{1}{-b\sqrt{n}} (1_n^T L) \otimes ([-b \ \cdots \ -b \ 1] B)$$

$$= 0_{Ln}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{left} = \left(\frac{1}{-b\sqrt{n}}\right) 1_n \otimes [-b \ \cdots \ -b \ 1]^T \\ w_{right} = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_n \otimes [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \end{cases} \longrightarrow w_{left}^T w_{right} = 1 \quad \text{و}$$

ماتریس P وجود دارد:

$$P^{-1} L P = \mathrm{diag}\{[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\}$$

$$\Rightarrow (P^{-1} \otimes I_1) \Phi (P \otimes I) = I_n \otimes A - \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \otimes B$$

$$= \mathrm{diag}\{A, A - \lambda_2 B, \ldots A - \lambda_i B\}$$

$$\det\{A - \lambda_i B\} = (-1)^{L-1} \lambda_i \gamma_0 \neq 0 \quad , \quad i = 2, \ldots, n \quad \text{در}$$

مقادیر ویژه $A - \lambda_i B$ غیرصفر هستند. $b \neq 0$ می‌باشد و A نیز تنها یک مقدار ویژه صفر دارد. همچنین همه مقادیر ویژه غیرصفر $A - \lambda_i B$، مقدار حقیقی منفی دارند.

$\Leftarrow$ Φ تنها یک مقدار ویژه صفر داشت و بخش حقیقی بقیه مقادیر ویژه نیز منفی می‌باشد.

ب) اگر ماتریس جردن متناظر با Φ باشد، ماتریس غیرسینگولار S وجود دارد بطوریکه:

$$J = S^{-1}(P^{-1}\otimes I)\mathcal{A}(P\otimes I)S = \mathrm{diag}\{0, J^*\}$$

⇐ همه مقادیر ویژه J^* بخش حقیقی منفی دارند.

$$\exp(\mathcal{A}t) = (P\otimes I)S\exp(Jt)S^{-1}(P^{-1}\otimes I)$$

$$\lim_{t\to\infty} \exp(Jt) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \lim_{t\to\infty} \exp(\mathcal{A}t) = (P\otimes I)S \lim_{t\to\infty} \exp(Jt) S^{-1}(P^{-1}\otimes I)$$

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\mathcal{A}t) = w_r w_l^T \Longleftarrow \begin{cases} w_r = (P\otimes I)S & \text{ستون اول} \\ w_l^T = S^{-1}(P^{-1}\otimes I) & \text{سطر اول} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \exp(\mathcal{A}t)x(0) = w_r w_l^T x(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} w_l^T x(0)\, 1_n \otimes [1\ 0\ 0 \ldots 0]^T$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} w_l^T x(0) = \frac{1}{n} 1_n^T \otimes [1 \cdots 1\ \ -\tfrac{1}{b}]\,[x_1^T(0), x_2^T(0), \ldots, x_n^T(0)]^T$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^0(0) + \sum_{k=1}^{L-2} x_i^k(0) - \frac{1}{b} x_i^{L-1}(0)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{t\to\infty} x_i^0(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^0(0) + \sum_{k=1}^{L-2} x_i^k(0) - \frac{1}{b} x_i^{L-1}(0)\right) \\ \lim_{t\to\infty} x_i^k = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, n \quad k = 1, 2, \ldots, L-1 \end{cases}$$

⇐ که همان مقادیر اجماع را نشان می‌دهد.

$$\rightarrow (P^{-1} \otimes I)\, \Phi\, (P \otimes I) = \mathrm{diag}\{A, A - \lambda_1 B, \dots, A - \lambda_n B\}$$

$$\rightarrow \det\{sI - A\} = s(s^2 - bs - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{2} \\ s_3 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4b}}{2} \end{cases} ;$$

$b < 0$; $\mathrm{Re}\{s_{2,3}\} < 0$;

$$\det\{sI - (A - \lambda_i B)\} = s^3 - bs^2 + (\gamma_1 \lambda_i - b)s + \gamma_0 \lambda_i$$

$\lambda_i > 0$; $\gamma_0, \gamma_1 > 0$; $b < 0$ $\Rightarrow$ if $b(b - \gamma_1 \lambda_i) > \gamma_0 \lambda_i$ $\Rightarrow$ Hurwitz .

$$\rightarrow b < \gamma_1 \lambda_i - \sqrt{(\gamma_1 \lambda_i)^2 + 4\gamma_0 \lambda_i}/2 \Rightarrow b(b - \gamma_1 \lambda_i) > \gamma_0 \lambda_i , \ i = 2, \dots, n ;$$