به نام خداوند بخشنده مهربان

کنترل سیستم های چند وسیله ای

کنترل مهار

تمرین سری دوم

دکتر عطریانفر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی برق

تاریخ تحویل

۱۸ اردیبهشت ۱۴۰۳

سوال اول

(اثبات) سیستم چند عاملی شامل m پیرو و $n-m$ رهبر ($n > m$) را در نظر بگیرید که با دینامیک زیر توصیف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= v_i(t) \\
\dot{v}_i(t) &= u_i(t) \\
i &= 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $x_i(t) \in \mathbb{R}^p$، $v_i(t) \in \mathbb{R}^p$ و $u_i(t) \in \mathbb{R}^p$ به ترتیب موقعیت، سرعت و ورودی کنترلی عامل iام هستند. الگوریتم کنترل مهار[۱] زیر را برای معادلات بالا پیشنهاد می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
v_i(t) &= 0, \qquad i \in \mathcal{R} \\
u_i(t) &= -\beta v_i(t) \\
&\qquad - \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij}(t) \times \{\beta[x_i(t) - x_j(t)] + [v_i(t) - v_j(t)]\}, \\
&\qquad i \in \mathcal{F}
\end{aligned} \tag{۲}$$

۱ Containment Control

که $\mathcal{R}$ و $\mathcal{F}$ به ترتیب مجموعه رهبرها و پیروها هستند و β یک ثابت مثبت است. فرض می‌کنیم که ماتریس مجاورت (وزن) $\mathcal{A}(t)$ در بازه زمانی $[\sum_{j=1}^{k}\Delta_j, \sum_{j=1}^{k+1}\Delta_j)$ ثابت است و در زمان $t = \sum_{j=1}^{k}\Delta_j$ که در آن $k = 0,1,\dots$ می‌باشد، سوئیچ می‌کند ($\Delta_j > 0$).

$\mathcal{G}_k$ و $\mathcal{A}[k]$ به ترتیب گراف جهت‌دار و ماتریس مجاورت n عامل برای بازه $t \in [\sum_{j=1}^{k}\Delta_j, \sum_{j=1}^{k+1}\Delta_j)$ نشان می‌دهند.

اثبات نمایید برای سیستم توصیف شده توسط (۱) و (۲) همه عامل‌های پیرو برای هر شرایط اولیه دلخواه $x_i(0), i \in \mathcal{F}$ به $Co\{x_j, j \in \mathbb{R}\}$ یعنی پوش محدب **ساکن** همگرا می‌شوند، اگر و تنها اگر عدد صحیح مثبت N_2 وجود داشته باشد که اجتماع $\mathcal{G}_i, i = N_1, \dots, N_1 + N_2$ شامل یک درخت پوشای جهت‌دار متحد باشد.

سوال دوم

(شبیه‌سازی) یک گروه شامل ۹ عامل با دینامیک یکسان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i \qquad i = 1,\dots,9 \tag{۱}$$

که ۶ عامل اول پیرو و ۳ عامل آخر رهبر می‌باشند. در این حالت، کنترل‌کننده مهار **استاتیک** توزیع‌یافته به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$u_i = cF\sum_{j\in\mathcal{F}\cup\mathcal{R}} a_{ij}(x_i - x_j) \qquad i \in \mathcal{F} \tag{۲}$$

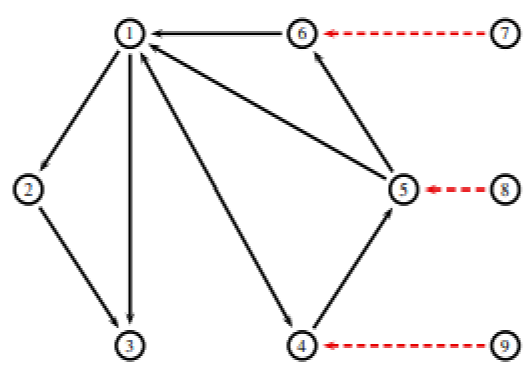
ماتریس‌های حالت و ورودی در این مثال به صورت زیر می‌باشند:

$$x_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}]^T$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&-0.2003&-0.2003&0&0\\0&0&0.2003&0&-0.2003&0\\0&0&0&0&0&-1.6129\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0.9441&0.9441\\0.9441&0.9441\\-28.7097&28.7097\end{bmatrix}$$

گراف ارتباطی میان عامل‌ها به صورت شکل زیر است:



شکل ۱: گراف ارتباطی میان عامل‌ها

کنترل‌کننده مهار استاتیک به فرم (۲) را طراحی کنید و نتایج شبیه‌سازی با استفاده از کنترل‌کننده طراحی شده باید نشان دهند که عامل‌های پیرو به پوش محدب ساکن رهبرها همگرا شوند.

راهنمایی: برای حل این مسئله از الگوریتم زیر استفاده کنید:

۱) گین فیدبک ماتریس $F=-B^TP^{-1}$ را محاسبه کنید؛ که $P>0$ پاسخ LMI زیر است:

$$AP+PA^T-2BB^T<0$$

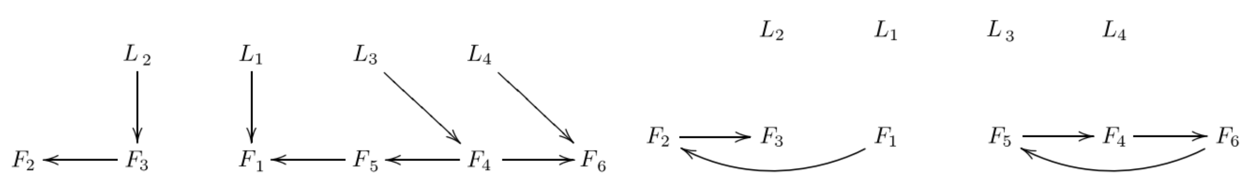
۲) ضریب $c \geq c_{th}$ را با توجه به $c_{th} = \frac{1}{\min\{Re(\lambda_i)\}}$ که $\lambda_i, i = 1, \dots, M$ مقادیر ویژه $\mathcal{L}_1$ هستند به دست آورید.

راهنمایی: برای حل LMI، تولباکس cvx را نصب کنید و سپس از دستور زیر استفاده کنید:

```
cvx_begin
    variable P(6,6) symmetric
    A*P + P*A' - 2*B*B' < 0
cvx_end
```

سوال سوم

(شبیه‌سازی) یک گروه از عامل‌ها با ۴ رهبر و ۶ پیرو با توپولوژی سوئیچینگ در نظر بگیرید که در هر ۱ ثانیه سوئیچ انجام می‌شود.



(a) Graph $\mathcal{G}_1$. (b) Graph $\mathcal{G}_2$.

شکل ۲: گراف‌های ارتباطی میان عامل‌ها

دینامیک تمامی عامل‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{x}_i = u_i$$

$$u_i = 0 \qquad i \in \mathcal{V}_L$$

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_F \cup \mathcal{V}_L} a_{ij}(t)\left(x_j - x_i\right) \qquad i \in \mathcal{V}_F$$

با استفاده از ورودی کنترلی بالا در شبیه‌سازی نشان دهید که تمامی عامل‌های پیرو به پوش محدب ساکن رهبرها همگرا می‌شوند.

سوال چهارم

سیستم چند عاملی شامل M پیرو و $N-M$ رهبر در نظر بگیرید ($M<N$). دینامیک هر کدام از عامل‌ها توسط رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t)$$

$$\dot{v}_i(t) = f\big(t, x_i(t), v_i(t)\big) + u_i(t) \qquad i \in \mathcal{F}$$

$$\dot{v}_i(t) = f\big(t, x_i(t), v_i(t)\big) \qquad i \in \mathcal{R}$$

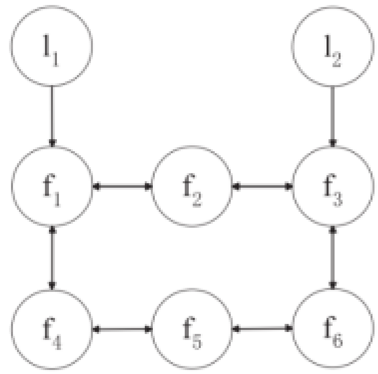
که در آن $x_i(t), v_i(t), u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب موقعیت، سرعت و ورودی کنترلی عامل iام هستند. همچنین $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ تابع برداری مقداردهی شده، پیوسته مشتق پذیر است.

فرض کنید توپولوژی بین عامل‌ها بدون جهت باشد، از ورودی کنترلی زیر نیز استفاده شود:

$$u_i(t) = -\alpha \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij} \left[r_1 \left(x_i(t) - x_j(t) \right) + r_2 \left(v_i(t) - v_j(t) \right) \right] \qquad i \in \mathcal{F}$$

که در آن α یک ثابت غیرمنفی است، a_{ij} درایه (i,j) ماتریس مجاورت $\mathcal{A}$ مرتبط با گراف $\mathcal{G}$ می‌باشد. با توجه به دینامیک ذاتا غیرخطی، فرض می‌شود $r_1 = \lfloor \rho_1 \rfloor + 1$ و $r_2 = \lfloor \rho_2 \rfloor + 1$ باشد و $\lfloor \rho \rfloor$ بزرگترین عدد صحیحی است که از ρ بزرگتر نمی‌باشد. به علاوه ρ_1 و ρ_2 ثابت‌های لیپشیتز هستند که در رابطه (*) صدق می‌کنند.

۱) (شبیه‌سازی) برای $f(t,x,v) = [x_i \cos(t) + v_i \sin(t)]$ سیستم توصیف شده را شبیه‌سازی نمایید.



شکل ۳: گراف ارتباطی عامل‌ها

فرض کنید ثابت‌های لیپشیتز برابر ۱ هستند. تغییر دادن مقادیر ثابت‌ها چه نتیجه‌ای می‌دهد؟ تغییر پارامتر α چه تغییری ایجاد می‌کند؟ با شبیه‌سازی سیستم چندعاملی با گراف بالا صحت ادعای خود را نشان دهید.

۲) (امتیازی) اثبات کنید سیستم ذکر شده به کانتینمنت می‌رسد اگر شرط زیر برقرار شود:

$$\alpha > \frac{2r_2^2 + r_1}{r_2^2 \lambda_{min}(\mathcal{L}_1)}$$

راهنمایی: از تابع لیاپانوف زیر می‌توانید استفاده کنید:

$$V(t) = [r_1 \bar{x}^T(t) \quad r_2 \bar{v}^T(t)](H_1 \otimes I_m) \begin{bmatrix} r_1 \bar{x}(t) \\ r_2 \bar{v}(t) \end{bmatrix}$$

که

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha r_2}{r_1} \mathcal{L}_1 & \frac{1}{2r_2} I_M \\ \frac{1}{2m} I_M & \frac{1}{2m} I_M \end{bmatrix}$$

به علاوه فرض کنید برای ترم غیرخطی شرایط زیر برقرار است:

$$\bar{x}(t) = x_f(t) + (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_m) x_l(t)$$

$$\bar{v}(t) = v_f(t) + (\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2 \otimes I_m)v_l(t)$$

$$\begin{aligned}\|\bar{F}(t)\| &= \left\|F\left(t, x_f, v_f\right) + (\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2)F(t, x_l, v_l)\right\| \\ &= \left\|\begin{bmatrix} \left\|f(t, x_1, v_1) - \sum_{j=1}^{N-M} r_{1j} f\left(t, x_{M+j}, v_{M+j}\right)\right\| \\ \vdots \\ \left\|f(t, x_M, v_M) - \sum_{j=1}^{N-M} r_{Mj} f\left(t, x_{M+j}, v_{M+j}\right)\right\| \end{bmatrix}\right\| \\ &= \rho_1\left\|x_f(t) + (\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2 \otimes I_m)x_l(t)\right\| \\ &+ \rho_2\left\|v_f(t) + (\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2 \otimes I_m)v_l(t)\right\| = \rho_1\|\bar{x}(t)\| + \rho_2\|\bar{v}(t)\|\end{aligned} \quad (*)$$

موفق باشید