

شناسایی سیستم

تمرین سری دوم

مهلت تحویل: ۱۴۰۲/۰۸/۱۹

استاد درس: دکتر کراری

تدریس‌یار: مهندس لطفی



سؤال اول) برای مجموعه داده‌های x و y ارائه شده در جدول ۱، میانگین و ماتریس کوواریانس را حساب کنید.

جدول ۱. مجموعه داده‌های ارائه شده برای سؤال اول

x	2.72	4.53	2.75	1.94	4.60	4.23	2.77	1.49	2.56
y	0.84	1.28	0.74	1.44	1.39	-0.25	0.05	0.26	0.49

سؤال دوم) متغیر تصادفی X با چگالی احتمال نرمال زیر را در نظر بگیرید:

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma^2}}$$

که μ_x و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس متغیر تصادفی X هستند. در این صورت، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = 5X + 3$ را به دست آورید.

سؤال سوم) می‌دانیم که ماتریس کوواریانس برای یک بردار تصادفی مانند X در فضای \mathbb{R}^n که متشکل از n متغیر تصادفی بوده و میانگین آن برابر μ_x است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{cov}(X) = E\{(X - \mu_x)(X - \mu_x)^T\}$$

با این توضیح، ثابت کنید که ماتریس کوواریانس متناظر با بردار تصادفی $Y = AX + b$ در فضای \mathbb{R}^m با ثابت‌های معلوم $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^m$ برابر است با:

$$\text{cov}(Y) = A \text{cov}(X) A^T$$

سؤال چهارم) فرض کنید که فرآیند تصادفی $X(t)$ دارای مقدار میانگین برابر m بوده و تابع خودهمبستگی آن به فرم زیر باشد:

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

فرایند تصادفی دیگر $Y(t)$ نیز وجود دارد که توسط رابطه یقینی زیر به فرایند تصادفی $X(t)$ مرتبط می‌شود:

$$Y(t) = aX(t) + b$$

به‌طوری‌که a و b ثابت‌های معلومی هستند. مطلوب است:

الف) تابع خودهمبستگی $Y(t)$ ، یعنی $R_y(\tau)$ ، را به دست آورید.

ب) تابع همبستگی عرضی $X(t)$ و $Y(t)$ ، یعنی $R_{xy}(\tau)$ ، را به دست آورید.

سؤال پنجم) دو فرایند تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$Y(t) = B \sin(\omega t + \theta)$$

که θ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و 2π بوده و ω یک ثابت معلوم است. ضرایب A و B هر دو متغیرهای تصادفی نرمال با توزیع $N(0, \sigma^2)$ بوده و با ضریب ρ که ضریب همبستگی نام دارد، با یکدیگر مرتبط می‌شوند. نشان دهید که تابع همبستگی عرضی $R_{xy}(\tau)$ برای این دو فرایند تصادفی به‌صورت زیر است:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \rho \sigma^2 \cos(\omega \tau)$$

سؤال ششم) فرایند تصادفی MA (Moving Average) تعریف شده به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$y_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1}), \quad -\infty < t < +\infty$$

که x_t یک نویز سفید گوسی (Independent and Identically Distributed) I.I.D با واریانس σ^2 است. مطلوب است:

الف) با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB*، y_t را رسم کنید.

ب) تابع کوواریانس $C_y(t, l)$ را تعیین کنید:

$$C_y(t, l) = E\{(y_t - E\{y_t\})(y_l - E\{y_l\})\}$$

سؤال هفتم) فرض کنید که x_t یک فرایند تصادفی AR (Auto-Regressive) و WSS با میانگین صفر بوده و مطابق زیر تعریف شده باشد:

$$x_t = ax_{t-1} + e_t$$

که $|a| < 1$ بوده و e_t یک نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس σ_e^2 برای همه t ها است. مطلوب است:

الف) با استفاده از نرم افزار *MATLAB*، x_t را به ازای $a = 0.3$ و $a = 0.9$ ترسیم کنید.

ب) تابع خودهمبستگی $R_x(\tau)$ را تعیین کنید.

ج) شدت طیف توان (Power Spectrum) این سیستم را محاسبه کنید.

د) شدت طیف توان این سیستم به ازای $a = 0.3$ و $a = 0.9$ را ترسیم کنید.

سؤال هشتم) هدف از این سؤال، شناسایی یک سیستم با استفاده از تابع همبستگی است. بدین منظور برای هر دانشجو، یک فایل شامل مجموعه داده‌های ورودی (u) و خروجی (y) اندازه‌گیری از سیستم و همچنین بردار زمان (t) آماده شده است. مجموعه داده‌های ورودی و خروجی مورد استفاده برای شناسایی در متغیر `id` ذخیره شده‌اند. توجه داشته باشید که این مجموعه داده‌ها در فرمت `iddata` بوده و با دستورات زیر می‌توانید داده‌های ورودی (u) و داده‌های خروجی (y) شناسایی را فراخوانی کنید:

`id`: مجموعه داده:

`y_id=id.y`

`u_id=id.u`

بردار زمان متناظر با این داده‌های شناسایی در متغیر `tid` ذخیره شده است. همچنین، به صورت مجزا یک مجموعه داده ورودی و خروجی با نام `val` جهت ارزیابی مدل به دست آمده با روش تابع همبستگی داده شده است که این مجموعه داده نیز در فرمت `iddata` است. یعنی:

`y_val=val.y`

`u_val=val.u`

بردار زمان متناظر با این داده‌های ارزیابی نیز در متغیر `tval` ذخیره شده است. مطلوب است:

الف) داده‌های ورودی و خروجی داده شده برای شناسایی را در شکل‌های مجزا ترسیم کنید.

ب) بررسی کنید که آیا داده‌های ورودی و خروجی داده شده برای شناسایی دارای میانگین صفر هستند یا خیر. در صورتی که میانگین این سیگنال‌ها صفر نباشد، به صورت دستی و یا با استفاده از دستور `detrend` در نرم‌افزار *MATLAB*، میانگین سیگنال‌ها را صفر کنید.

ج) بعد از اینکه مطمئن شدید میانگین داده‌های ورودی و خروجی شناسایی برابر صفر هستند، تابع خودهمبستگی ورودی، یعنی $R_{xx}(\tau)$ ، و تابع همبستگی عرضی ورودی و خروجی، یعنی $R_{yu}(\tau)$ ، را با استفاده از داده‌های شناسایی و طبق فرمول ارائه شده در مرجع درس (شناسایی سیستم، تألیف دکتر کراری) محاسبه کنید.

د) مدل *FIR* سیستم را به روش شناسایی با تابع همبستگی تعیین کنید.

ه) در فایل مجموعه داده‌های آماده شده برای هر دانشجو، یک متغیر با نام `imp` نیز وجود دارد که پاسخ ضربه واقعی سیستم است. توجه داشته باشید که در عمل، این پاسخ ضربه واقعی برای شناسایی سیستم در دسترس نیست و لذا تمامی بندهای قبلی باید بدون استفاده از این پاسخ ضربه واقعی انجام شوند. پس از انجام بند **د)** و بدست آوردن مدل *FIR* سیستم (پاسخ ضربه سیستم)، پاسخ ضربه واقعی و پاسخ ضربه به دست آمده از بند **د)** را در یک شکل ترسیم و مقایسه کنید.

توجه:

۱. جهت دریافت مجموعه داده‌های شناسایی خود برای سؤال هشتم، یک ایمیل خالی با عنوان زیر

"تمرین سری دوم - نام و نام خانوادگی - شماره دانشجویی"

به آدرس ایمیل sysidentification.2023@gmail.com ارسال نمایید.

۲. گزارش تایپ شده (با فرمت *PDF* و *WORD*) به همراه کدها و فایل‌های شبیه‌سازی خود را به صورت یک فایل زیپ شده (با پسوند .rar) تا روز جمعه مورخ ۱۹ آبان‌ماه ۱۴۰۲ (تا ساعت ۲۴:۰۰) به آدرس ایمیل sysidentification.2023@gmail.com ارسال نمایید.