

LEHRBUCH

Jürgen Dankert
Helga Dankert

Technische Mechanik

Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik

7. Auflage



Springer Vieweg

Technische Mechanik

Jürgen Dankert · Helga Dankert

Technische Mechanik

Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik

7., ergänzte Auflage

Mit 1102 Abbildungen, 128 Übungsaufgaben,
zahlreichen Beispielen und weiteren Abbildungen
im Internet



Springer Vieweg

Jürgen Dankert
Helga Dankert
HAW
Hamburg, Deutschland

Prof. Dr.-Ing. Helga Dankert, geb. 1939, von 1957 bis 1963 Studium des Maschinenbaus an der Technischen Hochschule Magdeburg, 1967 Promotion zum Dr.-Ing. Von 1971 bis 1981 Dozentin für Technische Mechanik an der TH Magdeburg, 1981 bis 1986 verschiedene Tätigkeiten in der Industrie (Vakoma, Hewlett-Packard). Ab 1986 Professorin für Technische Mechanik an der HAW Hamburg, seit 2002 im Ruhestand.

Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Dankert, geb. 1941, von 1961 bis 1966 Studium des Maschinenbaus an der Technischen Hochschule Magdeburg, 1971 Promotion zum Dr.-Ing., 1979 Habilitation. Von 1974 bis 1981 Leiter eines Entwicklungsteams eines FEM-Programmsystems, ab 1981 Industrietätigkeit (Takraf, Hewlett-Packard). Ab 1987 Professor für Technische Mechanik an der FH Frankfurt a. M., seit 1990 Professor für Informatik an der HAW Hamburg.

ISBN 978-3-8348-1809-6
DOI 10.1007/978-3-8348-2235-2

ISBN 978-3-8348-2235-2 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer Fachmedien Wiesbaden 1994, 1995, 2004, 2006, 2009, 2011, 2013
Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Lektorat: Thomas Zipsner, Ellen Klabunde

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-vieweg.de

Vorwort

Auf die Frage „Lehrbuch oder Internet?“ gibt es für die Technische Mechanik nur eine Antwort: „Beides, möglichst oft im Wechselspiel.“ Nach 15-jähriger Erfahrung mit der Kombination Lehrbuch/Internet hatten wir die 5. Auflage in vielen Passagen völlig neu geschrieben. Die 6. Auflage berücksichtigte alle Erkenntnisse, die damit speziell hinsichtlich der Frage „Was gehört ins Buch, was sollte man im Internet ansiedeln?“ zu gewinnen waren. Wir haben uns bemüht, den Umfang des gedruckten Buchs bei allen Veränderungen nicht zu vergrößern, das Internetangebot ist allerdings deutlich umfangreicher geworden (die Anzahl der Internetseiten übersteigt die Anzahl der Buchseiten erheblich). Die vorliegende 7. Auflage enthält wesentlich mehr Internet-Verweise als die Vorgänger, insbesondere ist der Bereich TM-interaktiv erheblich erweitert worden.

Die Zielgruppe sind nach wie vor die Studenten aller Ingenieur-Studiengänge an Universitäten und Fachhochschulen, die Kombination Lehrbuch/Internet gestattet jedoch auch, stets die meist anspruchsvolleren Probleme der Praktiker mit im Blick zu haben. Und die Ausgangslage ist auch ungeändert: In keinem anderen Fach muss dem Studenten so früh und so umfassend der gesamte schwierige Weg der Lösung von Ingenieur-Aufgaben zugemutet werden wie in der Technischen Mechanik. Er muss Probleme analysieren, das Wesentliche erkennen und ein reales Objekt in ein physikalisches Modell überführen. Das sich daraus ergebende mathematische Problem muss gelöst werden, und die Deutung der Ergebnisse, die wieder den Zusammenhang zum realen Objekt herstellt, schließt den Kreis.

Auf einem schwierigen Teilstück dieses Weges ist der Computer zu einem starken Helfer geworden. Die Zeit, die früher dem mühsamen Einüben von Lösungsalgorithmen geopfert werden musste, steht heute für die Problemanalyse und das Studium des Grundlagenwissens zur Verfügung, das Trainieren der (so eleganten wie aufwendigen) grafischen Verfahren gehört der Vergangenheit an. Den Bitten zahlreicher Fachkollegen folgend, die Verfahren nicht einfach nur aufzulisten, haben wir deutlich mehr Wertungen der Lösungsverfahren aufgenommen, Empfehlungen auch dann, wenn sie negativ ausfallen („... besonders geeignet“, „... nicht mehr zeitgemäß“, „... spielt praktisch keine Rolle mehr“, „Koppeltafeln haben ausgedient.“ ...).

Aber der Computer bleibt für den Ingenieur nur ein Werkzeug. Die eigentlichen Schwierigkeiten, die im Erfassen der Zusammenhänge, dem Beherrschen von Methoden zur Analyse und Lösung von Problemen liegen, kann er ihm nicht abnehmen. Er kann ihn aber von dem Ballast befreien, dessen Bewältigung früher häufig so dominierend war, dass der Lernende nicht mehr zum Kern des Problems vordringen konnte. Der Ingenieur in der Praxis mit den „nicht-akademischen Problemen“ stand sogar oft vor unüberwindlichen Schwierigkeiten.

Auf keinen Fall darf man das Verstehen der Zusammenhänge durch das Erlernen des Umgangs mit der Benutzeroberfläche eines Rechenprogramms ersetzen, im Gegenteil: Man sollte den Zeitgewinn, den der Computer verschafft, gerade für die intensive Auseinandersetzung mit den häufig nicht ganz einfachen Problemen nutzen. Dieser Zeitgewinn ergibt sich genau dort, wo nach der Analyse der mechanischen Probleme und der Formulierung des mathematischen Modells der aufwendige, aber formale Teil der mathematischen Lösung abgearbeitet werden muss. Ein angenehmer Nebeneffekt ist, dass der Zwang zur Beschränkung auf die einfachen Probleme, die

der Handrechnung zugänglich sind, entfällt. Der Student kann praxisnahe Probleme lösen, dem Ingenieur in der Praxis wird damit unmittelbar geholfen.

Weil es aber häufig sogar noch viel einfacher geht, wird eine Frage von Studenten immer öfter gestellt: „Warum muss ich das denn alles lernen, wenn es mit ein paar Mausklicks so bequem zu erledigen ist?“ Diese Frage wird von uns an verschiedenen Stellen beantwortet, und wir gehen sogar noch einen Schritt weiter und offerieren über die wesentlich erweiterte Internet-Site www.TM-interaktiv.de die Möglichkeit, Standardaufgaben der Technischen Mechanik genau auf diesem Weg zu erledigen, um auf ein in der Vergangenheit oft stark vernachlässigtes Problem aufmerksam zu machen: Dem Thema „Verifizieren von Computerrechnungen“ widmen wir ein eigenes Kapitel.

Wir versuchen, das Zusammenspiel „Lehrbuch und Internet“ auf eine neue Stufe zu heben. Das Lehrbuch enthält alle Themen, die üblicherweise im Grundkurs Technische Mechanik behandelt werden und geht an vielen Stellen auch darüber hinaus. Überall dort, wo sich Vertiefungen, Erweiterungen, Ergänzungen anbieten, bieten wir den „Abzweig ins Internet“ an. Der Leser findet jetzt noch deutlich mehr von solchen Verzweigungspunkten im Text, auch hier gilt: Es wird ständig erweitert und ergänzt. Den Studenten, die nach dem Grundkurs in Vertiefungsfächern oder bei Problemen aus der Praxis merken, dass sie noch tiefer in bestimmte Themen eindringen müssen, soll auf diesem Wege geholfen werden.

Technische Mechanik ist immer auch sehr viel Mathematik. Auch hier versuchen wir zu trennen: Was zum unmittelbaren Verständnis beiträgt, findet sich im Buch, und auf der Internet-Site „[Mathematik für die Technische Mechanik](#)“ werden die mathematischen Grundlagen, Ergänzungen und Vertiefungen im Sinne der Ingenieur-Mathematik behandelt.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung, die leider nach wie vor auf dem Papier nur sehr schwierig demonstriert werden kann. Deshalb finden sich zu fast allen Mechanismen, die in diesem Buch beschrieben werden, die passenden Animationen im Internet. Damit wird die Vorstellung der Bewegung erleichtert, die mathematisch zu formulierenden Bewegungsgesetze, Diagramme und Differenzialbeziehungen vereinfachen sich dadurch allerdings nicht.

Weil es inzwischen durchaus sinnvoll ist, auch das Smartphone neben dem Lehrbuch liegen zu haben, findet man von den 215 Internet-Verweisen nun 151 auch als QR-Codes (wir akzeptieren die Abneigung, Adressen über die Tastatur einzugeben). Einen kompakten Überblick aller Internetangebote findet man unter facebook.com/TechnischeMechanik (QR-Code auf Seite X).

Die im Vorwort übliche Danksagung kann auch für diese Auflage kurz ausfallen. Der Inhalt entstammt unseren eigenen Vorlesungen, wir haben Text und Zeichnungen eigenhändig in den Computer gebracht, jede Internetseite selbst erzeugt und jede Programmzeile der bereitgestellten Programme selbst geschrieben. Bleibt eigentlich nur ein herzlicher Dank an die Studenten und die Fachkollegen, die sich mit zahlreichen Hinweisen zu den früheren Auflagen geäußert haben, und an Herrn Thomas Zipsner vom Verlag Springer Vieweg für sein Engagement, dass das Buch in dieser Form erscheinen kann.



WWW - Internet-Service zum Buch - WWW



Internet-Service für die Auflagen 5 bis 7 des Lehrbuchs
Dankert/Dankert: Technische Mechanik



TM-
interaktiv
TM-
Mathe
Ergänzungen,
Vertiefungen
Lösungen der
Aufgaben
Service für
Auflagen 5 u. 6
Service für
Auflagen 1...4

Dieser Service bezieht sich auf die Auflagen 5 bis 7. Für Leser älterer Auflagen wird auf den Link im Menü oben rechts verwiesen. Man kann die passenden Ergänzungen (inhaltliche Vertiefungen und Erweiterungen, ausführliche Rechnungen, Scripts für die Mathematik-Programme, Animationen, ...) auf zwei Wegen finden:

- Über die Seitennummer in der 5. bis 7. Auflage kommt man direkt zu der passenden Internet-Seite:

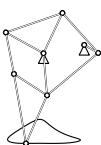
Seite 112 (Stabwerk, "anschaulicher Weg") ▼

- Über ein geeignetes Stichwort wird man zu der passenden Seite oder eventuell zu einer weiteren Auswahl geführt:

Freie gedämpfte Schwingung ▼

Über die Menüangebote oben links erreicht man zusätzliche Internet-Services zum Lehrbuch: „Interaktive Lösung von Aufgaben“, „Mathematik für die Technische Mechanik“, „Ergänzungen, Vertiefungen“ und die Lösungen der Übungsaufgaben aus dem Buch.

Bewegungssimulationen, auf die im Buch verwiesen wird, findet man über diesen Link:



Animationen

Über folgende Links findet man Aufgabensammlungen ...

... zur Statik
... zur Festigkeitslehre
... zur Kinematik und Kinetik

Für Studenten, die sich auf eine Klausur vorbereiten, gibt es eine Sammlung von 147 Aufgaben, die die Autoren des Lehrbuchs ihren eigenen Studenten zugemutet haben, es sind also typische Klausuraufgaben für die ...

... TM1-Klausur (Statik)
... TM2-Klausur (Festigkeitslehre)
... TM3-Klausur (Kinematik/Kinetik)

Die Internet-Site **www.TM-aktuell.de**

ist die zentrale Drehscheibe für alle Online-Services zu diesem Buch. Der Bildschirm-Schnappschuss der Homepage zeigt die wichtigsten Links:

- Ein Verteiler verzweigt direkt über die Seitennummer im Buch zu der zugehörigen Internetseite (in der Regel wird im Buch darauf verwiesen, dass eine solche Seite existiert).
- Man kann auch über einfache Stichwortsuche zu den entsprechenden Seiten kommen.
- Die kleine Animation am rechten Rand führt zu bewegten Bildern von Mechanismen, die sich in der Papierversion des Buches leider (noch) nicht bewegen können.
- Darunter findet man die Links zu den drei ergänzenden Aufgabensammlungen.
- Es gibt "ganz typische Klausuraufgaben": Mit der Lösung der Aufgaben muss der Student nachweisen können, die wesentlichen Probleme verstanden zu haben (Aufgaben dürfen nicht



zu leicht sein), andererseits müssen sie unter Klausurbedingungen erledigt werden können (sie dürfen auch nicht zu schwierig sein). Deshalb werden im unteren Teil der Homepage Links zu solchen Aufgaben angeboten.

In der oberen Menüleiste findet man u. a. Links zu weiteren Online-Services zu diesem Buch:

- Die Homepages von **TM-Interaktiv** und **TM-Mathe** werden nachfolgend vorgestellt.
- Unter „Ergänzungen, Vertiefungen“ findet man Erweiterungen zu dem im Buch behandelten Stoff, zusätzlich werden Themen behandelt, die im Buch keinen Platz gefunden haben.
- Unter „Lösungen der Aufgaben“ findet man alle Ergebnisse zu den Übungsaufgaben, die im Buch am Ende der einzelnen Kapitel zusammengestellt wurden.

Die Internet-Site **www.TM-interaktiv.de**

(nebenstehend sieht man die Homepage) bietet die Möglichkeit, typische Aufgaben der Technischen Mechanik interaktiv zu lösen. Dieser Bereich ist erheblich erweitert worden, was dem Grundauftrag dieses Lehrbuchs in hohem Maße entspricht:



Der Lernende soll möglichst seine Zeit dem Studium des Grundlagenwissens und der Problem-analyse der wahrlich nicht immer leichten Aufgaben widmen können und vom Ballast des Trai-nierens von Lösungsalgorithmen befreit werden. Deshalb findet man in den Internetergänzun-gen viele Beispiele mit detaillierten Hinweisen zur Nutzung leistungsfähiger Software-Produkte (Matlab, Maple, Derive, Excel, ...). Das hat sich nicht geändert.

Aber nun können fast alle mit Computerunterstützung zu lösenden Probleme auch interaktiv erledigt werden. Ein vielfach (nicht ganz zu Unrecht) skeptisch gesehener Download einer Soft-ware ist nicht erforderlich. Alle unter www.TM-interaktiv.de verfügbaren Programme können interaktiv direkt aus dem Browser bedient werden.

Die verfügbaren Programme können grob in zwei Gruppen unterteilt werden:

- Die eher der Ingenieurmathematik zuzuordnenden Programme (Lösen von Gleichungssys-temen, Matrizeigenwertproblemen, Funktionsanalyse, numerische Integration von An-fangswertproblemen, ...) sollten benutzt werden, wenn ein Problem der Technischen Mecha-nik analysiert und in ein mathematisches Modell überführt worden ist, das man mit Compu-terunterstützung lösen sollte.
- Die Programme, denen man das Mechanikproblem interaktiv beschreibt, sollten der Nach-rechnung und Bestätigung eigener Lösungen dienen (Flächenschwerpunkte, Flächenträg-heitsmomente, Fachwerke, Biegeträger, Rahmen, ...).



Dankert/Dankert: Technische Mechanik

Ingenieurmathematik und Technische Mechanik interaktiv

Dies ist ein Service zum Buch „Dankert/Dankert: Technische Mechanik“. Es sind Angebote, Grundaufgaben der Technischen Mechanik direkt interaktiv zu lösen (Maus auf ein Bildchen legen, um genauere Informationen zu erhalten).

 Flächenschwerpunkte	 Flächenschwerpunkte für Polygonflächen	 Gleichungssystem, Matrixinversion
 Gleichungssystem mit Bandmatrix	 Überbestimmtes Gleichungssystem	 Cholesky-Verfahren
 Statisch bestimmte ebene Fachwerke	 Starrkörpersysteme als Fachwerke	 Gerade Biegeträger
 Flächenträgheitsmomente	 Flächenträgheitsmomente (Polygonflächen)	 Statisch unbestimmte Fachwerke
 Biege- und dehnsteife ebene Rahmen	 Elastisch gebettete Biegeträger	 Symm. Matrizeneigenwertproblem
 Funktionen analysieren	 Anfangswertprobleme (numerisch)	 Ausgleichspolynom
 Natürliche Splines, Bézier-Splines	<p>Wenn Sie die grau unterlegten Angebote nutzen wollen, muss auf Ihrem Computer Java installiert sein („Java Runtime Environment“ JRE).</p> <p>Java kann kostenlos bezogen werden von http://www.java.com.</p>	



WWW - Internet-Service zum Buch - WWW



Dankert/Dankert: Technische Mechanik
Ingenieurmathematik, speziell für die Technische Mechanik



Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, denn in ihr zeitigt man die Früchte der Mathematik.
Leonardo da Vinci

Dies ist ein Service zum Lehrbuch „Dankert/Dankert: Technische Mechanik“. Das Verständnis für die mathematischen Verfahren, die in der Technischen Mechanik verwendet werden, ist für die erfolgreiche Anwendung wichtig und hilfreich. In einem Lehrbuch der Technischen Mechanik kann auf diese Themen nur in begrenztem Umfang eingegangen werden, weil sonst leicht das Verständnis für die Probleme der Mechanik, die im Allgemeinen für sich schwierig genug sind, verlorengehen kann. Deshalb wird in dem Buch „Technische Mechanik“ an zahlreichen Stellen auf dieses Internet-Angebot verwiesen.

- Grundregeln der Matrizenrechnung
- Lineare Gleichungssysteme, Matrixinversion
- Matrizeneigenwertprobleme
- Analyse von Funktionen
- Numerische Integration
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Differenzenverfahren
- Numerische Integration von Anfangswertproblemen
- „Bugs and Traps“ in Matlab
- Spaß an der Mathematik

Die hier aufgeführten Themen aus der Mathematik werden im Sinne der Ingenieurmathematik behandelt. Im Vordergrund stehen Aussagen, Anwendungsempfehlungen, Beispiele.

Herleitungen der Aussagen und Beweise wurden nur dann aufgenommen, wenn aus ihnen Vorteile für das Verständnis der Aussagen und Anwendungsempfehlungen gezogen werden können.

Der Zugang ist auch über die Auswahl eines Stichworts aus dem folgenden Angebot möglich:

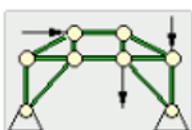
Bitte Stichwort auswählen →

Die Internet-Site www.TM-Mathe.de

erklärt auf ihrer Homepage die Ziele und Inhalte selbst. Die Themen, die im Sinne der Ingenieurmathematik behandelt werden und auch für andere Ingenieurzweige und Naturwissenschaftler interessant sein dürften, werden in der Regel an Beispielen aus der Mechanik veranschaulicht, die mit den anderen Internetsites kommunizieren.



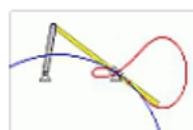
<http://www.facebook.com/TechnischeMechanik>
bietet einen umfassenden Überblick über alle ergänzenden Internetangebote, die zum Lehrbuch „Technische Mechanik“ existieren:



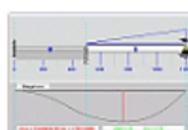
Willkommen



Animationen



TM-Mathe



TM-interaktiv



Klausurentraining

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Statik	1
1.1	Die Kraft	1
1.2	Axiome der Statik	3
1.3	Das Schnittpunktprinzip	5
2	Das zentrale ebene Kraftsystem	9
2.1	Äquivalenz	9
2.2	Gleichgewicht	13
2.3	Aufgaben	16
3	Das allgemeine ebene Kraftsystem (Äquivalenz)	17
3.1	Grafische Ermittlung der Resultierenden	17
3.2	Parallele Kräfte	19
3.3	Kräftepaar und Moment	19
3.4	Das Moment einer Kraft	23
3.5	Äquivalenz	24
3.5.1	Versetzungsmoment	24
3.5.2	Analytische Ermittlung der Resultierenden	25
3.6	Fazit zum Thema Äquivalenz	28
4	Schwerpunkte	29
4.1	Schwerpunkte von Körpern	30
4.2	Flächenschwerpunkte	31
4.3	Linienschwerpunkte	36
4.4	Experimentelle Schwerpunkttermittlung	37
4.5	Flächenschwerpunkte, Computer-Verfahren	38
4.5.1	Eine durch einen Polygonzug begrenzte ebene Fläche	38
4.5.2	Durch zwei Funktionen begrenzte Fläche	41
4.6	Volumen-, Flächen- und Linienlasten	43
4.7	Aufgaben	45
5	Gleichgewicht des ebenen Kraftsystems	47
5.1	Die Gleichgewichtsbedingungen	47
5.2	Lager und Lagerreaktionen in der Ebene	49
5.3	Statisch bestimmte Lagerung	52
5.4	Aufgaben	59

6 Ebene Systeme starrer Körper	61
6.1 Statisch bestimmte Systeme	61
6.2 Stäbe und Seile als Verbindungselemente	70
6.3 Lineare Gleichungssysteme	73
6.4 Fachwerke	80
6.4.1 Statisch bestimmte Fachwerke	80
6.4.2 Berechnungsverfahren	82
6.4.3 Komplizierte Fachwerke, Computerrechnung	85
6.4.4 Starrkörpersysteme als Fachwerke, Leichtbau	89
6.5 Aufgaben	91
7 Schnittgrößen	93
7.1 Definitionen	93
7.2 Differenzielle Zusammenhänge	99
7.3 Ergänzende Aussagen zu den Schnittgrößen	103
7.4 Aufgaben	107
8 Räumliche Probleme	109
8.1 Zentrales Kraftsystem	109
8.2 Räumliche Fachwerke	115
8.3 Allgemeines Kraftsystem	119
8.3.1 Momente	119
8.3.2 Das Moment einer Kraft	123
8.3.3 Äquivalenz und Gleichgewicht	126
8.4 Schnittgrößen	129
8.5 Aufgaben	131
9 Haftung	133
9.1 Coulombsches Haftungsgesetz	133
9.2 Seilhaftung	137
9.3 Aufgaben	141
10 Elastische Lager	143
10.1 Lineare Federn	143
10.2 Gleichgewicht bei steifen Federn	145
10.3 Gleichgewicht bei weichen Federn	148
10.4 Beurteilung der Gleichgewichtslagen	151
10.5 Aufgaben	155
11 Seilstatik, Kettenlinien, Stützlinien	157
11.1 Das Seil unter Eigengewicht	158
11.2 Das Seil unter konstanter Linienlast	163
12 Grundlagen der Festigkeitslehre	167
12.1 Beanspruchungsarten	167

12.2 Spannungen und Verzerrungen	168
12.3 Der Zugversuch	170
12.4 Hookesches Gesetz, Querkontraktion	172
13 Festigkeitsnachweis	173
13.1 Belastungsarten	174
13.2 Dauerfestigkeit	175
13.3 Gestaltfestigkeit	177
13.4 Zeitfestigkeit	179
13.4.1 Spannungskollektive	179
13.4.2 Palmgren-Miner, Gaßner-Kurven	181
14 Zug und Druck	183
14.1 Spannung, Dehnung	183
14.2 Statisch unbestimmte Probleme	186
14.3 Temperatureinfluss, Fehlmaße	188
14.4 Aufgaben	194
15 Der Stab als finites Element	195
15.1 Die Finite-Elemente-Methode (FEM)	195
15.2 Fluchtende Stabelemente	196
15.3 Ebene Fachwerk-Elemente	203
15.4 Temperaturdehnung, Anfangsdehnung	207
15.5 Physikalische und mathematische Modelle, Nutzung von FEM-Programmen	210
15.6 Aufgaben	214
16 Biegung	215
16.1 Biegemoment und Biegespannung	215
16.2 Flächenträgheitsmomente	220
16.2.1 Definitionen	220
16.2.2 Einige wichtige Formeln	222
16.2.3 Der Satz von Steiner	223
16.2.4 Zusammengesetzte Flächen	224
16.2.5 Hauptträgheitsmomente, Hauptzentralachsen	227
16.2.6 Formalisierung der Berechnung	230
16.2.7 Durch Polygonzüge begrenzte Flächen, beliebig berandete Flächen	235
16.3 Gültigkeit der Biegespannungsformel, Widerstandsmomente, Beispiele	238
16.4 Aufgaben	246
17 Verformungen durch Biegemomente	249
17.1 Differenzialgleichung der Biegelinie	249
17.2 Integration der Differenzialgleichung	251
17.3 Rand- und Übergangsbedingungen	257
17.4 Einige einfache Biegelinien	260

17.5 Statisch unbestimmte Systeme	262
17.6 Superposition	268
17.7 Aufgaben	271
18 Computer-Verfahren für Biegeprobleme	273
18.1 Das Differenzenverfahren	273
18.1.1 Differenzenformeln	274
18.1.2 Biegelinie bei konstanter Biegsteifigkeit	275
18.1.3 Biegelinie bei veränderlicher Biegsteifigkeit	279
18.1.4 Vermeiden von Übergangsbedingungen	282
18.1.5 Einige spezielle Randbedingungen	284
18.2 Der Biegeträger als finites Element	288
18.2.1 Element-Steifigkeitsmatrix für Biegeträger	288
18.2.2 Element-Belastungen (Linienlasten)	293
18.2.3 Exakte Lösungen, Näherungslösungen	296
18.2.4 Biegesteife Rahmentragwerke	299
18.3 Aufgaben	305
19 Spezielle Biegeprobleme	307
19.1 Schiefe Biegung	307
19.2 Der elastisch gebettete Träger	312
19.2.1 Differenzialgleichung für den elastisch gebetteten Träger	312
19.2.2 Lösung der Differenzialgleichung der Biegelinie	313
19.2.3 Lösung mit dem Differenzenverfahren	317
19.2.4 Lösung mit der Finite-Elemente-Methode	321
19.3 Der gekrümmte Träger	323
19.3.1 Schnittgrößen	323
19.3.2 Spannungen infolge Biegemoment und Normalkraft	327
19.3.3 Verformungen des Kreisbogenträgers	332
19.3.4 Numerische Berechnung der Verformungen	338
19.4 Aufgaben	341
20 Querkraftschub	343
20.1 Ermittlung der Schubspannungen	343
20.2 Dünnewandige offene Profile, Schubmittelpunkt	349
20.3 Schubspannungen in Verbindungsmitteln	354
20.4 Verformungen durch Querkräfte	356
20.5 Aufgaben	360
21 Torsion	361
21.1 Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten	361
21.2 St.-Venantsche Torsion beliebiger Querschnitte	366
21.3 St.-Venantsche Torsion dünnewandiger Querschnitte	369
21.3.1 Dünnewandige geschlossene Querschnitte	369

21.3.2 Dünnwandige offene Querschnitte	376
21.4 Formeln für die St.-Venantsche Torsion	381
21.5 Numerische Lösungen	382
21.6 Aufgaben	383
22 Zusammengesetzte Beanspruchung	385
22.1 Modelle der Festigkeitsberechnung	385
22.2 Der einachsige Spannungszustand	387
22.3 Der ebene Spannungszustand	389
22.4 Der räumliche Spannungszustand	396
22.5 Festigkeitshypothesen	399
22.5.1 Normalspannungs- und Schubspannungshypothese	400
22.5.2 Gestaltänderungshypothese	401
22.5.3 Berechnung von Wellen	402
22.6 Aufgaben	404
23 Knickung	405
23.1 Stabilitätsprobleme der Elastostatik	405
23.2 Stab-Knickung	406
23.3 Differenzialgleichung 4. Ordnung	414
23.4 Numerische Lösung von Knickproblemen	416
23.5 Aufgaben	420
24 Formänderungsenergie	421
24.1 Arbeitssatz	421
24.2 Formänderungsenergie für Grundbeanspruchungen	423
24.3 Satz von MAXWELL und BETTI	425
24.4 Verfahren auf der Basis der Formänderungsenergie	427
24.5 Statisch bestimmte Probleme	434
24.6 Statisch unbestimmte Probleme	437
24.7 Aufgaben	443
25 Rotationssymmetrische Modelle	445
25.1 Rotationssymmetrische Scheiben	445
25.2 Spezielle Anwendungsbeispiele	450
25.3 Dünnwandige Behälter (Membranspannungen)	455
25.4 Aufgaben	456
26 Kinematik des Punktes	457
26.1 Geradlinige Bewegung des Punktes	457
26.1.1 Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung	457
26.1.2 Kinematische Diagramme	462
26.2 Allgemeine Bewegung des Punktes	463
26.2.1 Allgemeine Bewegung in einer Ebene	463

26.2.2	Beschleunigungsvektor, Bahn- und Normalbeschleunigung	466
26.2.3	Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung	470
26.2.4	Koppelgetriebe	472
26.2.5	Darstellung der Bewegung mit Polarkoordinaten	477
26.2.6	Allgemeine Bewegung im Raum	480
26.3	Aufgaben	481
27	Kinematik starrer Körper	483
27.1	Die ebene Bewegung des starren Körpers	483
27.1.1	Reine Rotation	483
27.1.2	Translation und Rotation	486
27.1.3	Der Momentanpol	488
27.1.4	Geschwindigkeit und Beschleunigung	491
27.2	Ebene Relativbewegung eines Punktes	496
27.3	Bewegung des starren Körpers im Raum	501
27.3.1	Reine Rotation	501
27.3.2	Allgemeine Bewegung	503
27.3.3	Relativbewegung eines Punktes	504
27.4	Systeme starrer Körper	506
27.5	Aufgaben	513
28	Kinetik des Massenpunktes	515
28.1	Dynamisches Grundgesetz	515
28.2	Kräfte am Massenpunkt	518
28.2.1	Geschwindigkeitsabhängige Bewegungswiderstände	518
28.2.2	Massenkraft, das Prinzip von d'Alembert	520
28.3	Lösungen für Bewegungs-Differenzialgleichungen	525
28.3.1	Problemstellung	525
28.3.2	Numerische Integration von Anfangswertproblemen	526
28.3.3	Schrittweiten, Fehler, Kontrollen	528
28.4	Integration des dynamischen Grundgesetzes	532
28.4.1	Arbeit, Energie, Leistung	532
28.4.2	Der Impulssatz	534
28.4.3	Der Energiesatz	535
28.5	Aufgaben	539
29	Kinetik starrer Körper	541
29.1	Reine Translation	541
29.2	Rotation um eine feste Achse	541
29.3	Massenträgheitsmomente	547
29.3.1	Massenträgheitsmomente einfacher Körper	547
29.3.2	Der Satz von Steiner	550
29.3.3	Deviationsmomente, Hauptachsen	552
29.4	Beispiele zur Rotation um eine feste Achse	559

29.4.1 Allgemeine Beispiele	559
29.4.2 Auswuchten von Rotoren	564
29.5 Ebene Bewegung starrer Körper	568
29.5.1 Schwerpunktsatz, Drallsatz	568
29.5.2 Das Prinzip von d'Alembert	571
29.5.3 Energiesatz	576
29.5.4 Beispiele	577
29.6 Räumliche Bewegung starrer Körper	585
29.6.1 Schwerpunktsatz, Drallsatz	585
29.6.2 Körperfeste Koordinaten, Eulersche Gleichungen, Kreiselbewegung	588
29.6.3 Das Kreiselmoment	592
29.7 Aufgaben	595
30 Kinetik des Massenpunktsystems	597
30.1 Schwerpunktsatz, Impulssatz, Drallsatz	597
30.2 Stoß	601
30.2.1 Der gerade zentrische Stoß	601
30.2.2 Der schiefe zentrische Stoß	605
30.2.3 Der exzentrische Stoß	607
30.3 Aufgaben	610
31 Schwingungen	611
31.1 Harmonische Schwingungen	611
31.2 Freie ungedämpfte Schwingungen	613
31.2.1 Schwingungen mit kleinen Ausschlägen	614
31.2.2 Elastische Systeme	616
31.2.3 Nichtlineare Schwingungen	619
31.3 Freie gedämpfte Schwingungen	620
31.4 Erzwungene Schwingungen	623
31.4.1 Schwingungen mit harmonischer Erregung der Masse	623
31.4.2 Erregung über Feder und Dämpfer	626
31.4.3 Unwuchterregung	628
31.4.4 Biegekritische Drehzahlen	629
31.5 Aufgaben	631
32 Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	633
32.1 Freie ungedämpfte Schwingungen	633
32.2 Torsionsschwingungen	637
32.3 Eigenschwingungen linear-elastischer Systeme	640
32.4 Biegekritische Drehzahlen	643
32.5 Zwangsschwingungen, Schwingungstilgung	644
32.6 Kontinuierliche Massebelegung, unendlich viele Freiheitsgrade	648
32.6.1 Biegenschwingungen gerader Träger	648
32.6.2 Analytische Lösung für Träger mit konstantem Querschnitt	649

32.7 Aufgaben	653
33 Prinzipien der Mechanik	655
33.1 Prinzip der virtuellen Arbeit	655
33.2 Prinzip der virtuellen Arbeit für Potenzialkräfte, Stabilität des Gleichgewichts	659
33.3 Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange	665
33.4 Lagrangesche Bewegungsgleichungen	668
33.4.1 Generalisierte Kräfte, Potenzialkräfte	668
33.4.2 Virtuelle Arbeit der Massenkräfte	669
33.4.3 Lagrangesche Gleichungen 2. Art	670
33.5 Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials	676
33.5.1 Das Verfahren von Ritz	679
33.5.2 Randwertproblem und Variationsproblem	683
33.5.3 Verfahren von Ritz mit bereichsweise geltenden Ansatzfunktionen	687
33.5.4 Verfahren von Ritz und Finite-Elemente-Methode	689
33.6 Aufgaben	693
34 Methode der finiten Elemente	695
34.1 Zugang zur Theorie	695
34.2 Ein- bzw. zweidimensionale FEM-Modelle	698
34.2.1 Elementauswahl, Vernetzung	699
34.2.2 Reduktion der Elementlasten, Realisierung der Lagerung	701
34.2.3 Die Element-Steifigkeitsmatrix	702
34.3 Weitere Elementtypen, Testrechnungen	705
34.3.1 Scheibenelement mit 16 Freiheitsgraden	705
34.3.2 Konische Welle	709
34.3.3 St.-Venantsche Torsion	712
34.4 Aufgaben	714
35 Verifizieren von Computerrechnungen	715
35.1 Allgemeine Empfehlungen	716
35.2 Beispiele	719
Sachwortverzeichnis	747

QR-Codes in einem Lehrbuch ...

... sind sicher noch etwas gewöhnungsbedürftig. Sie sind allerdings nicht nur ein Zugeständnis an die junge Generation, die mit ihren „Scheibenwischer-Computern“ eine starke Abneigung gegen das Eintippen von Adressen entwickelt hat. Sie sollen vor allen Dingen auffordern, immer mal zu den vielen Ergänzungen in das Internet zu wechseln.



Lieber Leser, probieren Sie es doch gleich einmal aus mit dem hier abgebildeten QR-Code, der Sie zur Internetseite „Willkommen bei der Technischen Mechanik“ führt.

1 Grundlagen der Statik

Die *Statik* ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte.

1.1 Die Kraft

Der Begriff *Kraft* wird aus der Erfahrung gewonnen: Die „Muskelkraft“, mit der man der *Gewichtskraft* einer *Masse* entgegenwirkt, um sie am Herabfallen zu hindern - sie im *Gleichgewicht* zu halten - gibt ein „Gefühl“ für diesen Begriff. Jede Größe, die mit einer Gewichtskraft ins Gleichgewicht gesetzt werden kann, ist eine Kraft.

Nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz übt eine Masse auf eine andere Masse eine *Anziehungs kraft* aus. Dies bewirkt, dass eine auf einer Unterlage ruhende Masse m auf diese infolge der Anziehungskraft der Erdmasse eine Kraft (Gewichtskraft) ausübt. Die Unterlage reagiert auf die Gewichtskraft mit einer gleich großen Gegenkraft und stellt auf diese Weise einen *Gleichgewichtszustand* her. Wenn keine solche Gegenkraft wirkt, bewegt sich die Masse m infolge ihrer Gewichtskraft F_G mit einer Beschleunigung, die in der Nähe der Erdoberfläche den Wert $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ (Erdbeschleunigung) hat. Nach dem 2. NEWTONschen Axiom gilt:

$$F_G = mg$$

(Kraft = Masse · Beschleunigung, hier: Gewichtskraft = Masse · Erdbeschleunigung).

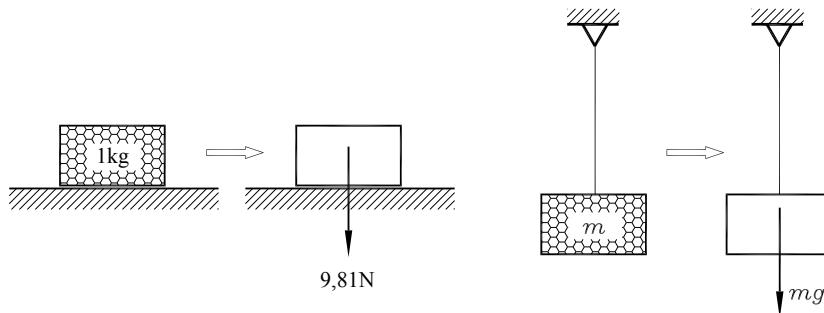
Die physikalische Einheit für die Masse ist das Kilogramm (kg), festgelegt durch das in Paris aufbewahrte „Urkilogramm“. Die Einheit für die Kraft ist das Newton (N), es gilt

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$$

- ⇒ Einer Masse $m = 1 \text{ kg}$ ist also eine Gewichtskraft $F = 9,81 \text{ kgm/s}^2 = 9,81 \text{ N}$ zuzuordnen. Wenn bei einem Statikproblem die Masse m gegeben und die Gewichtskraft F_G zu berücksichtigen ist, so gilt (auf der Erdoberfläche): $F_G = mg$.
- ⇒ Die Gewichtskraft ist ein Spezialfall der Gravitationskraft. Nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz gilt für die Anziehungs kraft zweier Massen m_1 und m_2 , deren Mittelpunkte sich im Abstand r voneinander befinden:

$$F_G = \frac{m_1 m_2}{r^2} G \quad (1.1)$$

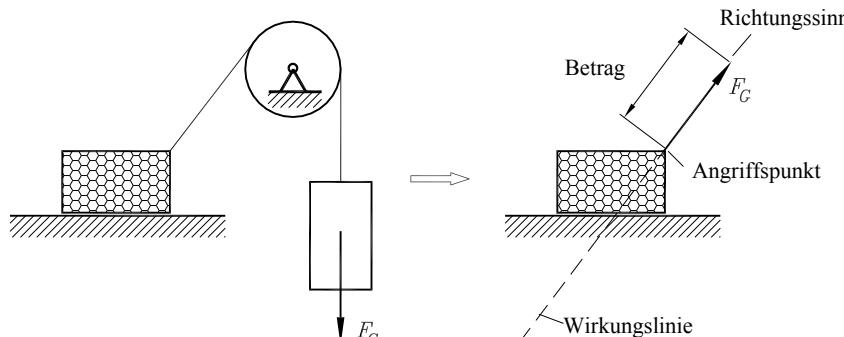
mit der Gravitationskonstanten $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/(\text{kg})^2$.

Abbildung 1.1: Gewichtskraft der Masse m **Beispiel:**

Für eine Masse m_1 auf der Erdoberfläche (der Abstand zum Erdmittelpunkt beträgt $R = 6373 \text{ km}$, die Erdmasse ist $m_2 = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) errechnet man

$$F_G = \frac{m_1 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2}{6373^2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 (\text{kg})^2} = m_1 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.2)$$

Die Wirkung der stets zum Erdmittelpunkt gerichteten Gewichtskraft kann durch eine Umlenkrille beeinflusst werden, so dass sie an einem anderen Körper in beliebiger Richtung angreift:

Abbildung 1.2: Eine Kraft wird durch vier Attribute beschrieben (eine Bemerkung zu diesem Bild findet man unter www.TM-aktuell.de)

Die *Masse* ist eine skalare Größe, die durch die Angabe eines *skalaren Wertes* (einschließlich physikalischer Einheit) ausreichend bestimmt ist.

Die *Kraft* ist eine *gerichtete Größe* (ein Vektor), die erst ausreichend bestimmt ist durch Angabe

- eines *skalaren Wertes* (einschließlich physikalischer Einheit),
- einer *Richtung*, gekennzeichnet durch die so genannte *Wirkungslinie*,
- eines *Richtungssinns*, gekennzeichnet durch die Pfeilspitze,
- eines *Angriffspunktes*.

1.2 Axiome der Statik

Axiome sind Lehrsätze, die eine Theorie begründen, ohne bewiesen werden zu müssen. Mit ihnen wird die theoretische Basis eines Wissenschaftszweiges gelegt. Ein praxisorientiertes Gebiet wie die Technische Mechanik muss seine Axiome natürlich an der Übereinstimmung mit der Realität messen lassen.

Die Statik kommt mit den nachfolgenden vier Axiomen aus, die die gesamte theoretische Grundlage für dieses Gebiet darstellen. Ob die Probleme der technischen Praxis damit ausreichend genau erfasst werden, muss im Einzelfall an der Übereinstimmung mit den Idealisierungen, die der Theorie zugrunde liegen, überprüft werden. Die wichtigste Idealisierung, auf der die Axiome der Statik aufbauen, ist die

Definition des starren Körpers:

Ein *starrer Körper* ist ein fiktives Gebilde, das sich unter der Einwirkung von Kräften nicht verformt.

Damit ist auch der Rahmen der Gültigkeit für alle Untersuchungen abgesteckt, die nach den Regeln der Statik angestellt werden. Wenn für ein Problem die Idealisierung „Starrer Körper“ nicht zu rechtfertigen ist (und in der Realität gibt es ein solches Gebilde ja nicht), können die Fragestellungen nicht mehr allein nach den Regeln der Statik behandelt werden. Für sehr viele praktisch sehr wichtige Aufgaben kann man jedoch (bei ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Realität) die zu untersuchenden Körper als starr ansehen. Die folgenden vier Axiome sind die Basis für die Statik der starren Körper, wozu bemerkt werden muss, dass in der technischen Literatur weder die Anzahl noch die Reihenfolge (im Gegensatz zu den NEWTONschen Axiomen der Mechanik) einheitlich gehandhabt werden.

1. Axiom (Linienflüchtigkeit der Kräfte):

Die Wirkung einer Kraft auf einen starren Körper bleibt unverändert, wenn man sie entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt.

Es ist leicht einzusehen, dass dieses Axiom nur für den starren Körper gelten kann: In der **Abbildung 1.3** (auf der Seite 4) sei der Hebel ohne Belastung im Gleichgewicht. Werden nun zwei Kräfte F_1 und F_2 aufgebracht, so dass

$$F_1 a = F_2 b$$

gilt, bleibt der Hebel im Gleichgewicht, unabhängig davon, ob beide am oberen Holm angreifen (Fall *a*) oder aber die Kraft F_1 entlang ihrer Wirkungslinie verschoben ist und am unteren Holm angreift (Fall *b*). Aus der Sicht der Statik unter der Annahme, dass der Hebel starr ist, sind die beiden Fälle äquivalent. Ein deformierbarer Hebel würde sich aber in beiden Fällen unterschiedlich verformen (für eine Verformungsuntersuchung darf eine Kraft also nicht verschoben werden), sogar das Gleichgewicht könnte (durch Veränderung der Hebelarme bei großer Verformung) gestört werden.

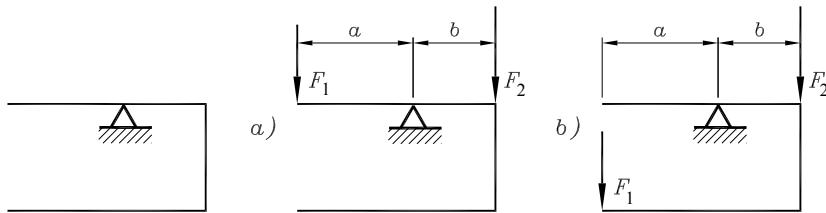
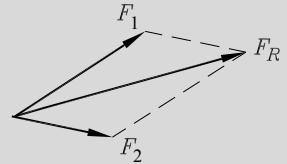


Abbildung 1.3: Bei Verschiebung einer Kraft entlang ihrer Wirkungslinie bleibt das Gleichgewicht erhalten

2. Axiom (Kräfteparallelogramm):

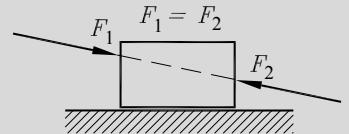
Die Wirkung zweier Kräfte F_1 und F_2 , die an einem gemeinsamen Punkt angreifen, ist gleich einer Kraft F_R , die sich als Diagonale eines mit den Seiten F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms ergibt.



Sonderfall: Wenn F_1 und F_2 auf der gleichen Wirkungslinie liegen, entartet das Parallelogramm, und der Betrag von F_R ergibt sich aus der Summe bzw. der Differenz der Beträge von F_1 und F_2 .

3. Axiom (Gleichgewicht):

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht (und heben damit ihre Wirkung auf den starren Körper auf), wenn sie auf der gleichen Wirkungslinie liegen, den gleichen Betrag haben und entgegengesetzt gerichtet sind.



Man beachte, dass das 3. Axiom auch nur für den starren Körper gelten kann, weil deformierbare Körper sich natürlich auch bei Einwirkung einer Gleichgewichtsgruppe verformen und außerdem durch die Verformung die Voraussetzung für den Gleichgewichtszustand zweier Kräfte (gleiche Wirkungslinie) verloren gehen kann.

4. Axiom (Wechselwirkungsgesetz):

Wird von einem Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft ausgeübt, so reagiert dieser mit einer gleich großen, auf gleicher Wirkungslinie liegenden, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft (NEWTON: **actio = reactio**).

Das 2. und das 4. Axiom sind nicht an die Voraussetzung des starren Körpers gebunden und sind auch über die Statik starrer Körper hinaus gültig.

Obwohl Kräfte Vektoren sind, wird in der Technischen Mechanik im Allgemeinen nur mit den Beträgen der Vektoren gerechnet, wobei natürlich die in der Vektorendarstellung enthaltenen Informationen (Richtung und Richtungssinn) bei Addition und Subtraktion von Kräften beachtet werden müssen. Die Richtung wird durch das (im Kapitel 2 erstmalig behandelte) Arbeiten mit Komponenten, der Richtungssinn durch das Vorzeichen berücksichtigt.

Beispiel:

Beim 3. Axiom wird die Gleichheit der Beträge von F_1 und F_2 bei entgegengesetztem Richtungssinn gefordert:

$$F_1 = F_2 \quad , \quad \text{aber vektoriell:} \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad .$$

Bei Rechnung mit den Beträgen muss bei der Addition der unterschiedliche Richtungssinn berücksichtigt werden:

$$F_1 + (-F_2) = F_1 - F_2 = 0 \quad (\text{Gleichgewicht}).$$

1.3 Das Schnittpinzip

Um die zwischen zwei Körpern wirkenden Kräfte sichtbar zu machen, führt man (gedanklich) an der Berührungsstelle einen Schnitt und trägt an den beiden *Schnittufern* unter Beachtung des Wechselwirkungsgesetzes (4.Axiom) die *Schnittkräfte* an, die dadurch von inneren zu äußeren Kräften werden.



Nur durch konsequente Anwendung solcher Schnittführungen (konsequent heißt, wirklich **alle** äußeren Bindungen eines Körpers zu lösen → **Schnittpinzip**) kann erreicht werden,

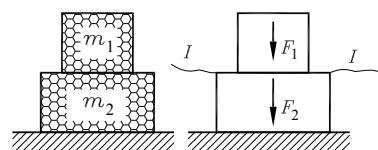
- dass **alle** am Körper angreifenden Kräfte sichtbar werden und
- komplizierte Probleme auf überschaubare Teilprobleme reduziert werden können.

Die an den beiden Schnittufern anzutragenden Kräfte treten stets **paarweise** auf (an jedem Schnittufer eine Kraft), liegen auf der gleichen Wirkungslinie, haben den gleichen Betrag, sind aber **entgegengesetzt** gerichtet.

Dabei repräsentiert die an einem Körper anzutragende Kraft immer die Wirkung, die der **weggeschneidene Teil** auf den Körper ausübt. Vielfach wird der Richtungssinn dieser Schnittkräfte nicht mit Sicherheit vorauszusagen sein. In diesen Fällen darf man den Richtungssinn willkürlich festlegen. Die anschließende Rechnung korrigiert ihn gegebenenfalls über das Vorzeichen des Ergebnisses. Das äußerst wichtige Thema „Schnittpinzip“ zieht sich wie ein roter Faden durch die Teilgebiete der Technischen Mechanik. Deshalb ist ihm eine ausführliche Ergänzung unter www.TM-aktuell.de gewidmet.

Beispiel 1:

Die beiden auf einer Unterlage gestapelten Massen m_1 und m_2 belasten diese durch ihre Gewichtskräfte F_1 und F_2 . Um die Frage nach den zwischen m_1 und m_2 bzw. zwischen m_2 und der Unterlage wirkenden Kräften zu beantworten, wird zunächst der Schnitt $I-I$ geführt.



An den beiden Schnittufern werden die Kräfte F_I angetragen (entgegengesetzt gerichtet, jedoch gleicher Betrag und gleiche Wirkungslinie).

Damit ist die Masse m_1 von allen äußeren Bindungen gelöst, alle an ihr angreifenden Kräfte (F_1 und F_I) sind angetragen, das „Teilsystem 1“ kann nach dem 3. Axiom nur bei

$$F_I = F_1$$

im Gleichgewicht sein, womit die Frage nach der Kraft, die zwischen den beiden Massen wirkt, beantwortet ist.

Um die Kraft zwischen m_2 und der Unterlage zu ermitteln, wird Schnitt $II-II$ gelegt, die beiden Schnittkräfte F_{II} werden angetragen, und damit ist auch Teilsystem 2 von äußeren Bindungen befreit.

Die gegebene Kraft F_2 und die am System 1 berechnete Kraft $F_I = F_1$ können (2. Axiom) zu $(F_I + F_2)$ zusammengefasst werden, und diese resultierende Kraft kann mit F_{II} nur im Gleichgewicht sein (3. Axiom), wenn die folgende Beziehung gilt:

$$F_{II} = F_I + F_2 = F_1 + F_2.$$

Wäre nur die Frage nach der Kraft F_{II} zu beantworten gewesen, hätte der nebenstehend skizzierte Schnitt genügt, um das „System m_1 und m_2 “ von allen äußeren Bindungen zu lösen, und man wäre mit entsprechenden Überlegungen wie oben zum gleichen Ergebnis gekommen (Zusammenfassen von F_1 und F_2 nach dem 2. Axiom, Gleichgewicht, wenn $F_{II} = F_1 + F_2$ entsprechend Axiom 3).

In diesem Fall wären die zwischen den Massen m_1 und m_2 wirkenden Kräfte nicht in die Betrachtung einzubeziehen, weil sie „innere Kräfte des Systems“ sind und als solche paarweise auftreten und sich in ihrer Wirkung aufheben. Die Art einer sinnvollen Schnittführung ist also auch von der Fragestellung abhängig. Von besonderer Wichtigkeit ist aber die Beachtung der folgenden Regel:

Wenn Gleichgewichtsbetrachtungen angestellt werden, müssen alle an einem System (oder Teilsystem) wirkenden Kräfte einbezogen werden. Dazu ist das Freischneiden von allen äußeren Bindungen und das Antragen der Schnittkräfte erforderlich.

Es ist sinnvoll, zwischen *eingeprägten Kräften* (vorgegebene Belastung, Gewichtskräfte) und den durch sie hervorgerufenen (und mit dem Schnittprinzip sichtbar gemachten) *Reaktionskräften* zu unterscheiden, obwohl eigentlich auch die eingeprägten Kräfte als Schnittkräfte interpretierbar sind: Wenn man das Schnittprinzip auch auf die so genannten „Fernkräfte“ (z. B. die Gravitationskräfte) ausdehnt, kann die Gewichtskraft einer Masse als Schnittkraft interpretiert werden, die erst durch das „Wegschneiden der Erde“ sichtbar wird. An die von der Masse gelösten Erde muss dann die entsprechende Gegenkraft angetragen werden. Eine solche (durchaus korrekte) Betrachtungsweise ist in der Technischen Mechanik allerdings nicht üblich.

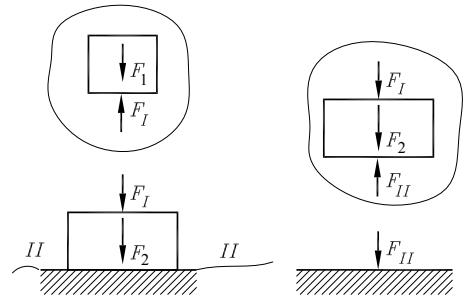


Abbildung 1.4: Freischneiden der Einzelmasse (zwei Gleichgewichtsbedingungen)

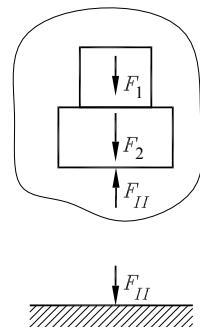


Abbildung 1.5: Alternative Schnittführung

Bemerkungen zu dem behandelten Demonstrationsbeispiel:

- Der Weg, auf dem die Ergebnisse unter konsequenter Anwendung des Schnittpunktprinzips gefunden wurden, erscheint dem Anfänger möglicherweise recht umständlich: „Dass die obere Masse auf die untere mit ihrer Gewichtskraft drückt und beide gemeinsam auf die Unterlage mit der Summe ihrer Gewichtskräfte, kann man sich ja wohl auch ohne Schnittpunktprinzip vorstellen.“ Diese Aussage ist richtig. Wenn die Probleme jedoch auch nur etwas komplizierter werden (folgendes Beispiel), kommt man ohne Anwendung des Schnittpunktprinzips nicht mehr aus.
- Die Anwendung des Gleichgewichtsaxioms nach vorheriger Zusammenfassung der Kräfte mit Hilfe des Kräfteparallelogramms, so dass nur zwei Kräfte auf einer Wirkungslinie übrig sind, ist tatsächlich umständlich. In den nächsten Kapiteln werden dafür effektivere Verfahren behandelt. Da es in diesem Abschnitt aber auf das Verständnis des so wichtigen Schnittpunktprinzips ankommt, soll auch die folgende Aufgabe ausschließlich unter formaler Anwendung der Axiome gelöst werden.

Beispiel 2:

Auf einer Palette mit der Masse m_2 (einschließlich des Bügels) liegt die Masse m_3 . Die Palette ist über den Bügel an dem Seil 1 aufgehängt, das über zwei Rollen geführt wird und an der Masse m_3 befestigt ist.

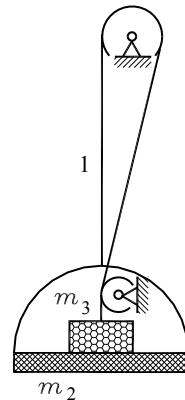
Gegeben: $m_2 = 20\text{ kg}$; $m_3 = 50\text{ kg}$.

Die Gewichtskraft des Seils kann vernachlässigt werden.

Man ermittle:

- die Seilkraft F_S im Seil 1,
- die Kraft F_N zwischen den Massen m_2 und m_3 .

Hinweis: Man beachte, dass die Seilkraft durch die beiden Rollen nur umgelenkt wird und in gleicher Größe auch an der Masse m_3 angreift (siehe auch die Bemerkung zur festen Rolle unter www.TM-aktuell.de).



Wäre nur die Seilkraft gefragt, würde die Betrachtung des „Gesamtsystems m_2 und m_3 “ genügen (**Abbildung 1.6**).

Unter Nutzung sämtlicher Axiome (Wechselwirkungsgesetz für das Freischneiden, Verschieben von Kräften entlang ihrer Wirkungslinien, Zusammenfassen der Kräfte und Gleichgewicht) kommt man zu

$$2F_S = m_2g + m_3g .$$

Zur Beantwortung beider Fragestellungen müssen in jedem Fall zwei Systeme bei einer zusätzlichen Schnittführung (zwischen m_2 und m_3) betrachtet werden (**Abbildung 1.7**). Dann untersucht man entweder das Gesamtsystem zur Berechnung von F_S und eines der beiden Teilsysteme zur Bestimmung von F_N bei dann bekanntem F_S , oder man betrachtet nur die beiden Teilsysteme mit den beiden Unbekannten F_S und F_N , die die beiden folgenden Gleichungen liefern:

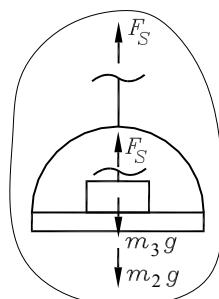


Abbildung 1.6: Gesamtsystem m_2 und m_3

$$F_S + F_N = m_3 g ,$$

$$F_N + m_2 g = F_S .$$

Das sich daraus ergebende allgemeine Ergebnis für die Kraft zwischen m_2 und m_3

$$F_N = \frac{1}{2}(m_3 - m_2)g$$

liefert nur für $m_3 > m_2$ positive Werte für F_N (nach der in der Schnittskizze angenommenen positiven Richtung für F_N : Masse m_3 drückt auf die Palette, da die Schnittkraft immer die Wirkung des weggeschnittenen Teils repräsentiert).

Für $m_3 < m_2$ würde das Minuszeichen im Ergebnis auf eine Kraftrichtung entgegen der angenommenen hinweisen, was praktisch nur möglich wäre, wenn m_3 auf der Palette nicht nur aufliegen würde, sondern in irgendeiner Weise befestigt wäre.

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man das Ergebnis:

$$F_S = 343\text{ N} ; F_N = 147\text{ N} .$$

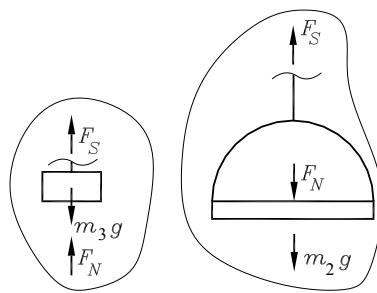


Abbildung 1.7: Zwei Teilsysteme

Lieber Leser, wenn Sie sich als Anfänger auf dem Gebiet der Technischen Mechanik bis hierher durchgearbeitet haben, spricht das für Sie. Wenn Sie darüber hinaus sogar der Meinung sind, alles verstanden zu haben, spricht dies für Gründlichkeit, Selbstbewusstsein (oder Leichtfertigkeit). **Leider ist Ihr Eindruck, dass es bis hierher gar nicht so schwierig war, vermutlich nicht richtig.**

Nach den Erfahrungen der Autoren wird das so wichtige Schnittprinzip zu schnell (und damit sehr leichtfertig) „als verstanden abgehakt“. Deshalb noch einmal zur Erinnerung:

- Erst nach dem *Lösen sämtlicher äußerer Bindungen* und dem Antragen aller Schnittkräfte dürfen Gleichgewichtsbetrachtungen angestellt werden! Haben Sie die schwungvollen „Kringel“ um die freigeschnittenen Systeme in den Beispielen registriert? Vielleicht sollten Sie sich das zur Sicherheit auch (zumindest für einige Zeit) angewöhnen, um zu sichern, dass ringsherum wirklich keine Bindung mehr besteht.
- Alle *Schnittkräfte* tauchen *paarweise* auf (sichtbar erst nach dem Schneiden). Sie haben an den beiden Schnittufern der beiden Teilsysteme gleiche Wirkungslinie, gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Richtungssinn. Solange nicht geschnitten wird (und es muss wirklich nicht jeder mögliche Schnitt geführt werden), heben sich ihre Wirkungen gegenseitig auf. Leider können Ihnen, lieber TM-Anfänger, die Autoren versprechen, dass Sie den Fehler, auch eine innere Kraft in das Gleichgewicht mit aufzunehmen, vermutlich noch mehrmals machen werden.

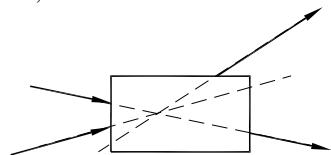
Versuchen Sie doch einmal die Lösung der zur Seite 8 gehörenden Aufgabe, die Sie unter www.TM-aktuell.de finden. Das sollte Ihnen am Ende dieses Kapitels gelingen (und wenn nicht, finden Sie dort eine detaillierte „Schritt-für-Schritt-Anleitung“).



2 Das zentrale ebene Kraftsystem

Eine Kräftegruppe wird als *zentrales ebenes Kraftsystem* bezeichnet, wenn

- alle Kräfte in einer Ebene liegen und
- alle Wirkungslinien dieser Kräfte sich in einem Punkt schneiden.



2.1 Äquivalenz

Definition:

Zwei Kräftegruppen sind *äquivalent*, wenn ihre Wirkungen gleich sind. Eine einzige Kraft, die in diesem Sinne einer Kräftegruppe äquivalent ist, nennt man *Resultierende der Kräftegruppe*.

Aus dieser Definition (und den Axiomen der Statik) leiten sich alle benötigten Aussagen ab, die zunächst für einen wichtigen Spezialfall, das *Zentrale ebene Kraftsystem mit nur zwei Kräften*, formuliert werden:

- ⇒ Die Resultierende zweier Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, wird nach dem Parallelogrammgesetz (2. Axiom) gefunden, gegebenenfalls nach Verschieben der Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien (1. Axiom) bis zum Schnittpunkt. Man ermittelt so auf grafischem Wege Betrag und Richtung der Resultierenden.
- ⇒ Umkehrung der vorigen Aussage: Eine gegebene Kraft F kann durch eine äquivalente Kräftegruppe zweier Kräfte F_I und F_{II} eindeutig ersetzt werden, wenn deren Wirkungslinien I und II vorgegeben sind und sich mit der Wirkungslinie von F in einem Punkt schneiden (*Kraftzerlegung*).

Die Kraft F ist die Diagonale im Kräfteparallelogramm. Man nennt die beiden Kräfte F_I und F_{II} , die bei der Zerlegung einer Kraft F in eine äquivalente Kräftegruppe zweier Kräfte entstehen, *Komponenten von F in den Richtungen I und II*.

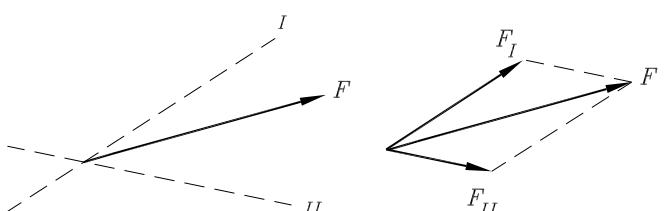


Abbildung 2.1: Zerlegung einer Kraft in 2 Komponenten

Ein wichtiger Sonderfall ist die Zerlegung einer gegebenen Kraft F in zwei Komponenten, deren Wirkungslinien senkrecht zueinander sind (**Abbildung 2.2**).

Für diesen Spezialfall liest man bei gegebener Kraft F und gegebenem Winkel α aus der Skizze ab:

$$\begin{aligned} F_I &= F \cos \alpha & ; \\ F_{II} &= F \sin \alpha & . \end{aligned} \quad (2.1)$$

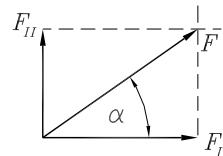


Abbildung 2.2: Zerlegung einer Kraft in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten

- ⇒ Zwei Kräfte, die in einer Ebene liegen, bilden immer ein zentrales Kraftsystem, wenn ihre Wirkungslinien nicht parallel sind.
- ⇒ Zwei Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, sind immer ein ebenes zentrales Kraftsystem, weil zwei sich schneidende Geraden immer eine Ebene aufspannen.

Hinweise für die Lösung von Aufgaben:

- ⇒ Bei der grafischen Lösung ist vorab ein geeigneter Maßstab zu wählen.
- ⇒ Zur Ermittlung der Resultierenden kann vereinfachend eine Kraft an die Spitze der anderen gesetzt werden (Krafteck), die Resultierende ergibt sich dann als „Schlusslinie“ (Verbindungsgerade von Anfangs- und Endpunkt des Kraftecks):

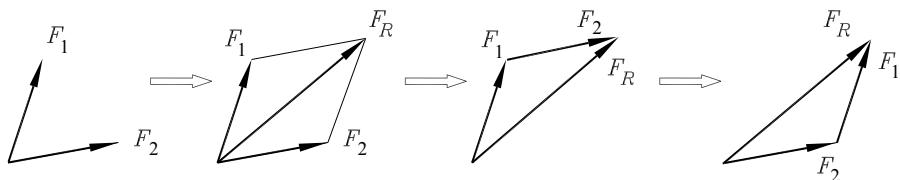


Abbildung 2.3: Krafteck ersetzt das Kräfteparallelogramm

Natürlich ist dies nur zur Vereinfachung der Zeichnung erlaubt, weil eine Parallelverschiebung einer Kraft nicht gestattet ist.

- ⇒ Bei der Kraftzerlegung müssen die Komponenten F_I und F_{II} zusammen mit der gegebenen Kraft F die Figur des Kräfteparallelogramms so ergeben, dass die drei Pfeilspitzen entweder

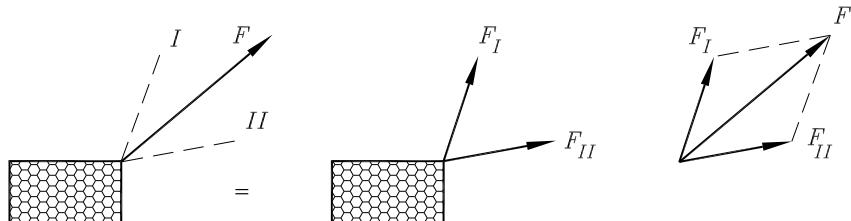


Abbildung 2.4: Kraftzerlegung (Variante 1)

alle von einem Punkt wegweisen (Variante 1: **Abbildung 2.4**) oder alle zu einem Punkt hinweisen (Variante 2: **Abbildung 2.5**).

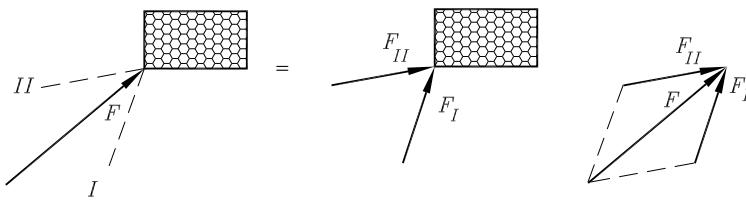


Abbildung 2.5: Kraftzerlegung (Variante 2)

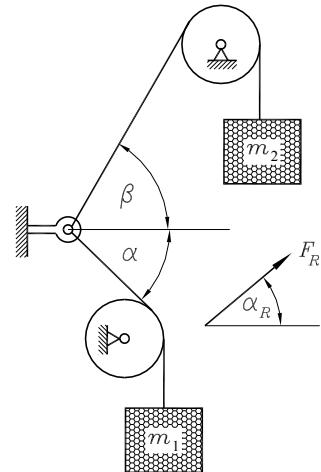
- ⇒ Bei der analytischen Lösung zur Ermittlung der Resultierenden wählt man zunächst ein rechtwinkliges Koordinatensystem und zerlegt die gegebenen Kräfte in jeweils zwei Komponenten in Richtung der Achsen. Die Teilresultierenden in Richtung der beiden Achsen kann man dann durch Addition der Komponenten aufschreiben (Richtungssinn durch Vorzeichen berücksichtigen!) und den Betrag der Gesamtresultierenden aus dem Kräftraparallelogramm der senkrecht aufeinander stehenden Teilresultierenden (Pythagoras) berechnen.

Beispiel: An einer Öse sind über Umlenkrollen die Massen m_1 und m_2 befestigt.

$$\text{Gegeben: } m_1 = 50 \text{ kg} ; \quad \alpha = 45^\circ ; \\ m_2 = 60 \text{ kg} ; \quad \beta = 60^\circ .$$

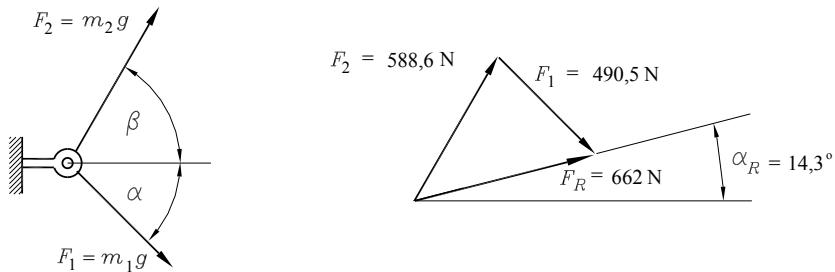
Es sind die Gesamtbelastung F_R der Öse und die Richtung der Kraft F_R grafisch und analytisch zu ermitteln (Angabe der Richtung durch den Winkel α_R wie skizziert).

Da die beiden Rollen die Gewichtskräfte m_1g und m_2g nur in ihrer Richtung umlenken, kann die Resultierende F_R aus der Kraft m_1g unter dem Winkel α zur Horizontalen und der Kraft m_2g unter β zur Horizontalen bestimmt werden.



Die Demonstration grafischer Lösungen (hier und bei einigen nachfolgenden Beispielen) dient dem Verständnis. Grafische Lösungen dieser Art haben in der Ingenieurpraxis jedoch keine Bedeutung mehr.

Die grafische Lösung ist im Allgemeinen etwas ungenauer als die analytische Lösung. Die Genauigkeit kann durch eine entsprechend große Zeichnung verbessert werden.

Grafische Lösung:**Abbildung 2.6:** Die beiden Kräfte werden mit Hilfe des Kraftecks addiert.

Analytische Lösung: Die gewählten Koordinatenrichtungen werden symbolisch durch Pfeile angedeutet. Dann ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} = m_1 g \cos \alpha + m_2 g \cos \beta = 641,14 \text{ N} ; \\ \uparrow \quad F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} = -m_1 g \sin \alpha + m_2 g \sin \beta = 162,92 \text{ N} ; \\ F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 662 \text{ N} ; \quad \tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = 0,2541 ; \quad \alpha_R = 14,3^\circ . \end{aligned}$$

Bei *zentralen ebenen Kraftsystemen mit mehr als zwei Kräften* werden die für zwei Kräfte formulierten Aussagen sinnvoll erweitert:

- ⇒ Die *Ermittlung der Resultierenden* von n Kräften kann durch mehrfache Anwendung des Parallelogrammgesetzes realisiert werden.
- ⇒ Bei der *analytischen Lösung* werden die gegebenen Kräfte F_i in jeweils zwei Komponenten F_{ix} bzw. F_{iy} in Richtung der Achsen eines geeigneten zu wählenden kartesischen Koordinatensystems zerlegt, und unter Beachtung der Vorzeichen werden die Komponenten der Resultierenden F_{Rx} und F_{Ry} ermittelt. Aus den Komponenten ergeben sich dann die Resultierende F_R und der Winkel α_R , den die Resultierende mit der x -Achse einschließt:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} , \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} , \\ F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} , \quad \tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bei der Berechnung von α_R bestimmen die Vorzeichen der Komponenten von F_{Rx} und F_{Ry} , in welchem Quadranten des Koordinatensystems die Resultierende liegt.

- ⇒ Bei der *grafischen Lösung* zeichnet man zweckmäßig das Krafteck aller Kräfte, indem man (in beliebiger Reihenfolge, mit einer beliebigen Kraft beginnend) jeweils eine Kraft an die Pfeilspitze der vorhergehenden setzt. Man findet (wie beim Krafteck mit zwei Kräften) die Resultierende als Schlusslinie (Verbindungsgerade vom Anfangspunkt der ersten zur Pfeilspitze der letzten Kraft, **Abbildung 2.7**):

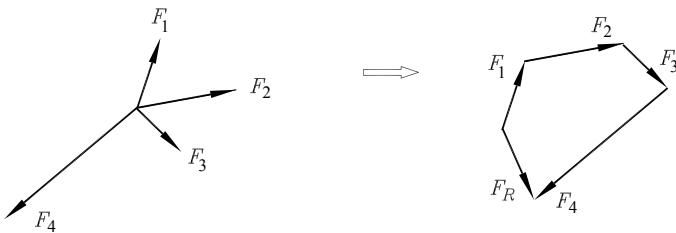


Abbildung 2.7: Resultierende als Schlusslinie eines Kraftecks mit vier Kräften

Auch hier muss darauf hingewiesen werden, dass das Krafteck nur zur Vereinfachung der Zeichenarbeit gedacht ist. Der Angriffspunkt der Resultierenden ist natürlich der gemeinsame Schnittpunkt aller Wirkungslinien.

- ⇒ Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Komponenten, deren Wirkungslinien sich alle in einem Punkt schneiden (Ersetzen einer Kraft durch ein äquivalentes zentrales Kraftsystem mit mehr als zwei Kräften) ist nicht eindeutig und deshalb im Allgemeinen praktisch bedeutungslos.

2.2 Gleichgewicht

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn sich die Wirkungen aller an ihm angreifenden Kräfte aufheben. Für das zentrale ebene Kraftsystem leitet sich aus dieser Definition die Bedingung ab, dass die Resultierende aller Kräfte verschwinden muss:

$$F_R = 0 \quad .$$

Diese Bedingung muss nicht vektoriell formuliert werden, weil ein Vektor nur dann gleich Null ist, wenn sein Betrag gleich Null ist. Der Betrag eines Vektors ist wiederum nur dann gleich Null, wenn jede einzelne Komponente verschwindet. Mit diesen Überlegungen ergeben sich die

Gleichgewichtsbedingungen für das zentrale ebene Kraftsystem:

$$F_{Rx} = 0 \quad , \quad F_{Ry} = 0 \quad . \quad (2.3)$$

Das Gleichgewicht der Kräftegruppe drückt sich grafisch durch ein geschlossenes Krafteck aus.

Man beachte:

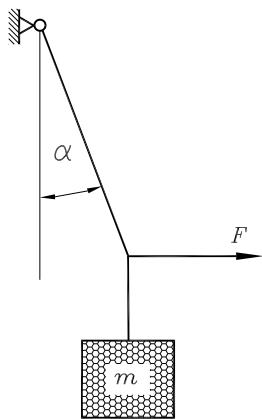
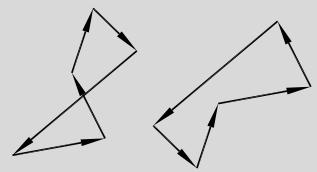
- ⇒ Die durch die Indizes x und y angedeuteten Richtungen können selbstverständlich beliebig gewählt werden. Es ist nicht erforderlich, dass die beiden Richtungen senkrecht zueinander sind. Damit lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen für das zentrale ebene Kraftsystem auch so formulieren:

Die Summe aller Kraftkomponenten in jeder beliebigen Richtung muss gleich Null sein (generelle notwendige Bedingung für Gleichgewicht, gilt nicht nur für das zentrale ebene Kraftsystem).

- ⇒ Es ist trotzdem nicht sinnvoll, mehr als zwei Gleichgewichtsbedingungen aufzuschreiben: Wenn sich die Wirkungen aller Kraftkomponenten (beim ebenen Problem) in zwei unterschiedlichen Richtungen aufheben, dann gilt dies zwangsläufig auch für jede andere Richtung.
- ⇒ Aus der Tatsache, dass ein Körper im Gleichgewicht ist, folgt: Es müssen *zwei Gleichgewichtsbedingungen* erfüllt sein, also können gegebenenfalls *zwei unbekannte Größen* berechnet werden.
- ⇒ Gleichgewichtsbetrachtungen sind natürlich nur sinnvoll, wenn *alle wirkenden Kräfte* einbezogen werden. Dies sind neben den eingeprägten Kräften (gegebene Belastungen, Gewichtskräfte) die durch *Freischneiden* sichtbar werdenden Kräfte. Prinzipiell sollten die Gleichgewichtsbedingungen erst aufgeschrieben werden, nachdem
 - der betrachtete Körper von *allen äußeren Bindungen gelöst* und
 - *alle Kräfte angetragen* wurden.

Zur grafischen Lösung:

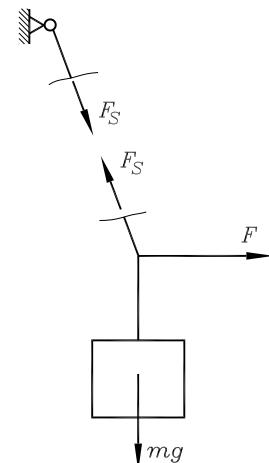
In einem *geschlossenen Krafteck* sind die Kraftpfeile so angeordnet, dass man das Krafteck in Pfeilrichtung umfahren kann und zum Anfangspunkt zurückkehrt, ohne sich einmal gegen die Pfeilrichtung bewegt zu haben.



Beispiel: Wie groß muss die an dem masselosen Seil horizontal angreifende Kraft F sein, um das durch die Masse m belastete Seil in der skizzierten Lage zu halten (Skizze links)?

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$; $\alpha = 30^\circ$.

Freischneiden: Das System wird von äußeren Bindungen gelöst, indem das schräge Seil geschnitten wird (rechte Skizze). Da Seile nur Zugkräfte in Seilrichtung übertragen können, werden die Seilkräfte als Zugkräfte (von den Schnittufern wegweisende Pfeilspitzen) angetragen.



Am freigeschnittenen System wirkt mit der Seilkraft F_S und den beiden Kräften F und mg ein zentrales Kraftsystem, das im Gleichgewicht sein muss.

Grafische Lösung: Das ebene zentrale Kraftsystem mit gegebenem mg und den unbekannten Kräften F und F_S , deren Wirkungslinien jedoch bekannt sind, darf keine Resultierende ergeben: Das Krafteck aus mg , F und F_S muss sich schließen (**Abbildung 2.8**).

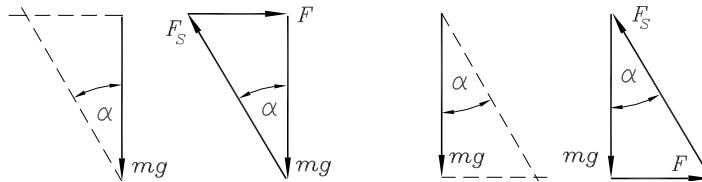


Abbildung 2.8: Varianten 1 (links) und 2 (rechts) des sich schließenden Kraftecks

- **Variante 1:** Man zeichnet mg in einem geeigneten Maßstab (z. B.: 1 cm $\hat{=} 100$ N), trägt an der Pfeilspitze die Richtung von F_S und am anderen Ende von mg die Richtung von F an. Danach ist eindeutig, wie das geschlossene Krafteck aussehen muss.
- **Variante 2:** Die Wirkungslinien der unbekannten Kräfte werden in geänderter Reihenfolge angetragen. Das Krafteck liefert für F und F_S die Längen wie bei Variante 1.

Aus den maßstäblichen Skizzen kann eine Länge für die gesuchte Kraft F abgemessen und mit dem Maßstabsfaktor in eine Kraft umgerechnet werden. Besser ist eine Kombination der grafischen Lösung mit einer analytischen Auswertung: Aus dem rechtwinkligen Dreieck liest man folgendes Ergebnis ab:

$$F = mg \tan \alpha = 20 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 30^\circ = 113 \text{ N}.$$

Analytische Lösung: Man wählt zwei beliebige Richtungen mit jeweils ebenfalls beliebigem positivem Richtungssinn. Auch dies soll für zwei Varianten gezeigt werden:

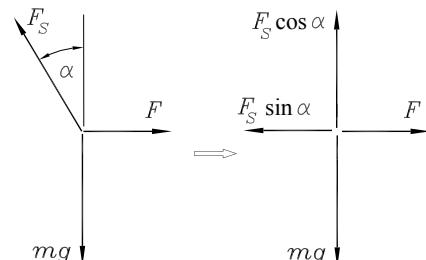
- **Variante 1:** Es werden die Richtungen „horizontal, positiv nach rechts“ und „vertikal, positiv nach unten“ gewählt. Die Summe aller Kraftkomponenten in diesen Richtungen muss gleich Null sein (dabei müssen Kräfte, die nicht in dieser Richtungen haben, in zwei Komponenten zerlegt werden, hier F_S):

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow & F - F_S \sin \alpha = 0 & , \\ \downarrow & mg - F_S \cos \alpha = 0 & . \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung errechnet man

$$F_S = \frac{mg}{\cos \alpha} .$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert das bereits angegebene Ergebnis für F .



- **Variante 2:** Es wird die Gleichgewichtsbedingung für die skizzierte Richtung I-I (senkrecht zum schrägen Seil, **Abbildung 2.9**) formuliert:

$$\rightarrow F \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0 .$$

Dem Nachteil, dass in diesem Fall zwei Kräfte (F und mg) in Komponenten zerlegt werden müssen, steht der Vorteil gegenüber, dass die (nicht gesuchte) Kraft F_S gar nicht in die Rechnung hineinkommt, weil aus der einen Gleichgewichtsbedingung direkt die gesuchte Kraft zu errechnen ist:

$$F = mg \tan \alpha .$$

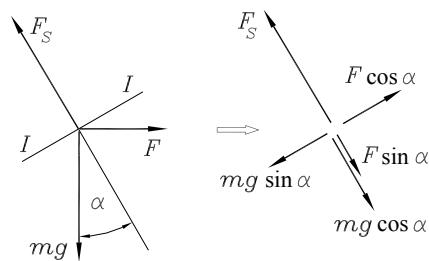


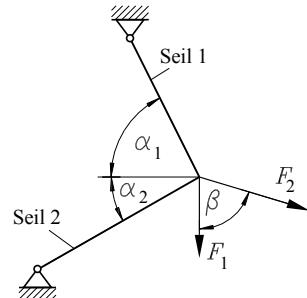
Abbildung 2.9: Richtung $I - I$ senkrecht zum Seil

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1: Die Seile 1 und 2 sind wie skizziert durch die beiden Kräfte F_1 und F_2 belastet.

Gegeben: $F_1 = 80\text{ N}$; $\alpha_1 = 70^\circ$; $\alpha_2 = 40^\circ$; $\beta = 70^\circ$.

- Man ermittle für $F_2 = 120\text{ N}$ die Kräfte in den beiden Seilen.
- Wie groß muss F_2 mindestens sein, damit die Konstruktion nicht versagt?

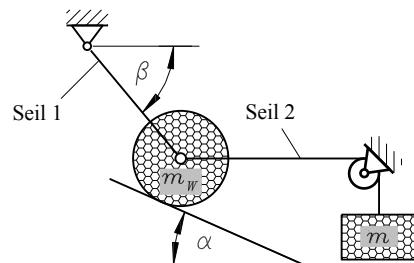


Aufgabe 2.2: Eine Walze mit der Masse m_W liegt auf einer schießen Ebene und wird durch ein Seil 1 gehalten. Sie ist durch ihr Eigengewicht und über das Seil 2 durch die Gewichtskraft der Masse m belastet.

Gegeben: $m_W = 120\text{ kg}$; $m = 40\text{ kg}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 50^\circ$.

Man ermittle die Seilkräfte in den Seilen 1 und 2.

Hinweis: Von der schießen Ebene kann auf die Walze m_W nur eine Kraft senkrecht zur Auflagefläche übertragen werden.



Das Schnittprinzip ...

... wurde im Abschnitt 1.3 ausführlich behandelt, auch im aktuellen Kapitel wurde auf der Seite 14 auf dieses besonders wichtige Thema hingewiesen, und für die Lösung der Aufgaben ist es ohnehin unverzichtbar. Empfehlenswert ist auch das ausführlich kommentierte Beispiel für das zentrale ebene Kraftsystem unter www.TM-aktuell.de.



3 Das allgemeine ebene Kraftsystem (Äquivalenz)

Bei einem allgemeinen ebenen Kraftsystem schneiden sich die Wirkungslinien der Kräfte nicht mehr sämtlich in einem Punkt, unter Umständen (parallele Kräfte) schneiden sie sich überhaupt nicht.

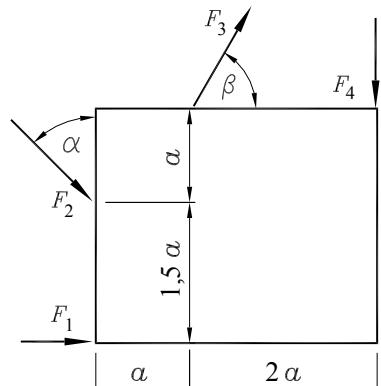
3.1 Grafische Ermittlung der Resultierenden

Da Kräfte am starren Körper entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden dürfen, kann man die Resultierende jeweils zweier Kräfte (nach vorheriger Verschiebung bis zum Schnittpunkt der Wirkungslinien) ermitteln und durch Wiederholen dieses Vorgangs schließlich die Gesamtresultierende des allgemeinen ebenen Kraftsystems nach Größe und Lage ihrer Wirkungslinie finden (der Fall paralleler Wirkungslinien wird im folgenden Abschnitt behandelt).

Beispiel: An einem starren Körper greifen wie skizziert vier Kräfte an. Man ermittle grafisch die Resultierende und die Lage und Richtung ihrer Wirkungslinie.

Gegeben: $F_1 = 1 \text{ kN}$; $F_2 = 2 \text{ kN}$;
 $F_3 = 2 \text{ kN}$; $F_4 = 1,5 \text{ kN}$;
 $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $a = 2 \text{ m}$.

Nach Wahl eines Längenmaßstabs (z. B.: 1 cm $\hat{=} 2 \text{ m}$) und eines Kraftmaßstabs (z. B.: 1 cm $\hat{=} 1 \text{ kN}$), beide Maßstäbe sind natürlich für eine genauere Lösung ungeeignet, werden nur Operationen ausgeführt, die sich streng an die Axiome der Statik halten:



- Die Kräfte F_2 und F_3 werden entlang ihrer Wirkungslinien bis zu deren Schnittpunkt verschoben, ebenso die Kräfte F_1 und F_4 bis zum Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien.
- Die Kräfte F_2 und F_3 werden nach dem Parallelogrammgesetz zur Resultierenden F_{23} zusammengefasst, die Kräfte F_1 und F_4 zur Resultierenden F_{14} .
- Die Resultierenden F_{14} und F_{23} werden entlang ihrer Wirkungslinien bis zu deren Schnittpunkt verschoben.
- F_{14} und F_{23} werden nach dem Parallelogrammgesetz zur Resultierenden F_R des gesamten Kraftsystems zusammengefasst. Aus der Skizze ergeben sich der Betrag $F_R \approx 3,6 \text{ kN}$,

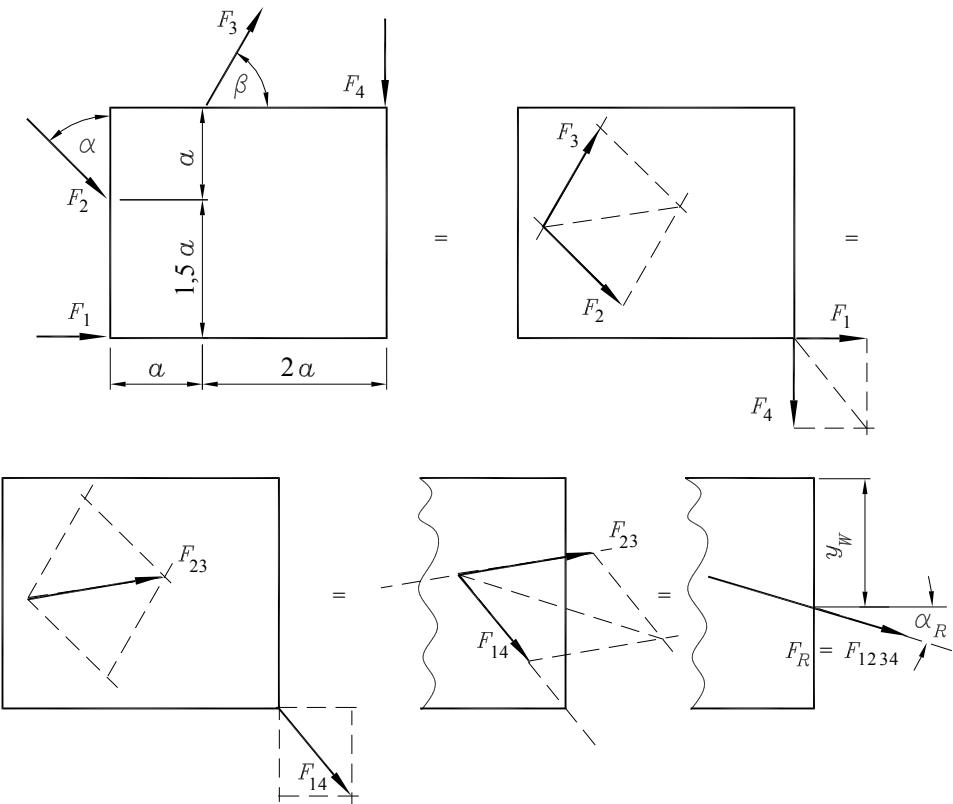


Abbildung 3.1: Ermittlung der Resultierenden eines allgemeinen ebenen Kraftsystems

der Winkel $\alpha_R \approx 19^\circ$ und die Lage der Wirkungslinie (z. B. durch Angabe der Strecke $y_W \approx 2,7\text{m}$).

- Den Betrag der Resultierenden F_R und den Winkel α_R (aber nicht die Lage der Wirkungslinie der Resultierenden!) hätte man auch mit Hilfe des Kraftecks wie beim zentralen Kraftsystem finden können.
- Man gelangt zur gleichen Resultierenden, wenn man eine andere Reihenfolge der Zusammenfassung zu Teilresultierenden wählt.

Die grafische Ermittlung der Resultierenden eines allgemeinen ebenen Kraftsystems auf diese Weise ist recht mühsam. Es gibt Verfahren, die den Zeichenaufwand vermindern (früher war z. B. das so genannte „Seileckverfahren“ sehr beliebt), denen aber **keine praktische Bedeutung** mehr zukommt. Die grafische Behandlung des allgemeinen ebenen Kraftsystems wird deshalb auch in den folgenden Abschnitten nur in dem Umfang vorgestellt, wie für das Verständnis daraus Nutzen zu ziehen ist.

3.2 Parallele Kräfte

Zwei Kräfte auf parallelen Wirkungslinien lassen sich nicht nur durch Verschieben und Anwendung des Parallelogrammgesetzes zu einer Resultierenden zusammenfassen. Hier hilft ein Trick: Nach dem 3. Axiom heben zwei Kräfte, die sich im Gleichgewicht befinden, ihre Wirkung auf den starren Körper auf. Durch Hinzufügen einer (beliebigen) Gleichgewichtsgruppe ändert sich die Wirkung des gesamten Kraftsystems also nicht, es gelingt aber, das so erweiterte Kraftsystem zu einer Resultierenden zusammenzufassen.

Beispiel:

Auf einen starren Körper wirken wie skizziert zwei Kräfte. Es ist die Resultierende der beiden Kräfte (einschließlich der Lage ihrer Wirkungslinie) zu ermitteln.

Als hinzuzufügende Gleichgewichtsgruppe werden entsprechend nebenstehender Skizze zwei beliebige Horizontalkräfte mit gleichem Betrag gewählt, die auf gleicher Wirkungslinie liegen, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Jeweils zwei Kräfte werden zu Teilresultierenden und diese (nach Verschieben) zur Gesamtresultierenden zusammengefasst. Diese hat den erwarteten Betrag (Summe der Beträge von F_1 und F_2) und die erwartete Richtung, durch die Konstruktion wurde zusätzlich ihre Lage bestimmt.

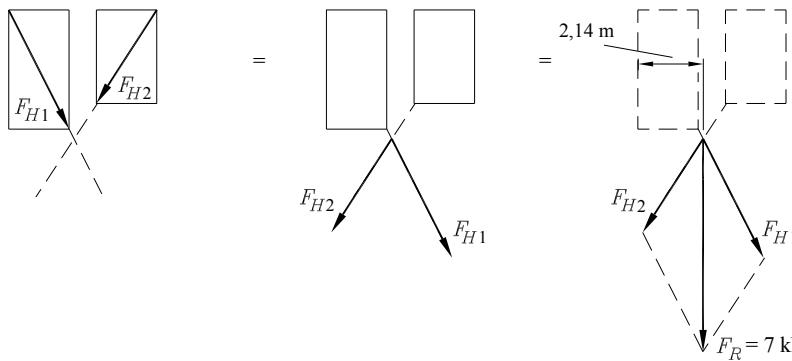


Abbildung 3.2: Ermittlung der Resultierenden zweier paralleler Kräfte

3.3 Kräftepaar und Moment

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 wurde gezeigt, wie beliebige allgemeine ebene Kraftsysteme auf eine Resultierende reduziert werden können. Der am Beispiel des Abschnitts 3.2 demonstrierte Trick funktioniert auch für *Kräfte auf parallelen Wirkungslinien mit entgegengesetztem Richtungssinn*:

Man ermittle die Resultierende für dieses Beispiel, indem man für eine der beiden Kräfte F_1 oder F_2 den Richtungssinn umkehrt (die Strategie bleibt gleich, eventuell benötigt man ein etwas größeres Blatt Papier). Der Betrag der Resultierenden ergibt sich wie erwartet als Differenz der Beträge von F_1 und F_2 ($F_R = 1\text{ kN}$), ihre Wirkungslinie ist wieder parallel zu den Wirkungslinien der gegebenen Kräfte, die Lage der Wirkungslinie (weit links von F_1) ist wohl etwas überraschend.

Wenn man allerdings diese (für das Verständnis recht nützliche) Konstruktion ausgeführt hat, darf man sich darüber freuen, dass auch diese grafische Lösung keine praktische Bedeutung mehr hat (die analytische Lösung findet man im Abschnitt 3.5.2).

In einem ganz speziellen Fall gelingt es jedoch nicht, das Kraftsystem durch eine resultierende Kraft zu ersetzen: Der Versuch, zwei Kräfte mit gleichem Betrag und entgegengesetztem Richtungssinn auf parallelen Wirkungslinien zu einer Resultierenden zusammenzufassen, misslingt. Der im Abschnitt 3.2 erfolgreich angewandte Trick mit den Hilfskräften führt nur auf ein anderes Kräftepaar mit den gleichen Eigenschaften:

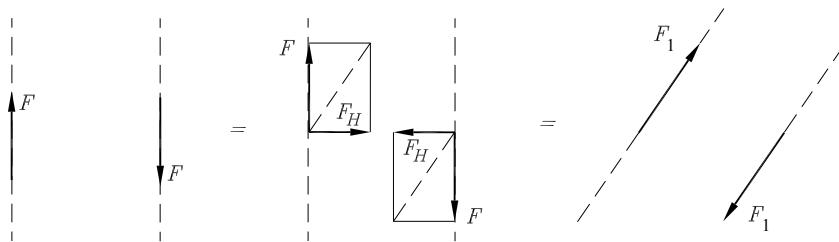


Abbildung 3.3: Versuch, zwei gleich große parallele Kräfte zu einer Resultierenden zusammenzufassen

Die Beträge der Kräfte haben sich geändert, auch die Lage und der Abstand der beiden Wirkungslinien, die aber nach wie vor parallel sind.

Man nennt zwei auf parallelen Wirkungslinien liegende, gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte ein *Kräftepaar*.

- ⇒ Ein Kräftepaar lässt sich nicht zu einer Resultierenden zusammenfassen und hat keine resultierende Kraftwirkung.
- ⇒ Ein Kräftepaar versucht, den Körper, an dem es angreift, zu drehen. Ein Maß der Stärke dieser Drehwirkung ist das Produkt $F \cdot a$, wobei a der Abstand der beiden Wirkungslinien ist.

Das Produkt aus dem Betrag der Kräfte und dem Abstand a der Wirkungslinien $M = Fa$ heißt *Moment* des von den zwei Kräften F gebildeten Kräftepaars.

- ⇒ Ein Kräftepaar lässt sich in ein anderes überführen (siehe Abbildung 3.3), wobei sich die Beträge der Kräfte und der Abstand der Wirkungslinien ändern. Das Moment der beiden Kräftepaare bleibt dabei jedoch unverändert, wie aus der folgenden Skizze (Abbildung 3.4) abzulesen ist:

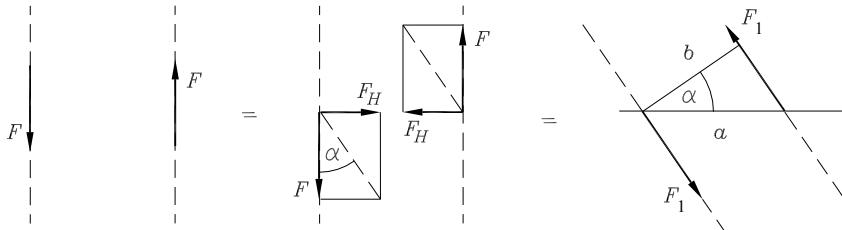


Abbildung 3.4: Zwei gleichwertige Kräftepaare

Durch Anbringen der beiden Kräfte F_H wird aus dem „Kräftepaar F “ das um den Winkel α geneigte „Kräftepaar F_1 “, wobei sich der Abstand der Wirkungslinien auf den Wert

$$b = a \cos \alpha$$

ändert. Man liest aus der Skizze außerdem ab:

$$F_1 = \frac{F}{\cos \alpha} ,$$

und es gilt

$$M = Fa = F_1 b .$$

Man kann also ein Kräftepaar nicht nur entlang der Wirkungslinien der beiden Kräfte verschieben, sondern durch Drehung der Wirkungslinien (ohne Änderung des Momentes des Kräftepaars) die Kräfte an jeden beliebigen Punkt eines starren Körpers bringen. Es ist daher sinnvoll, ein Kräftepaar durch sein statisch gleichwertiges Moment zu ersetzen:

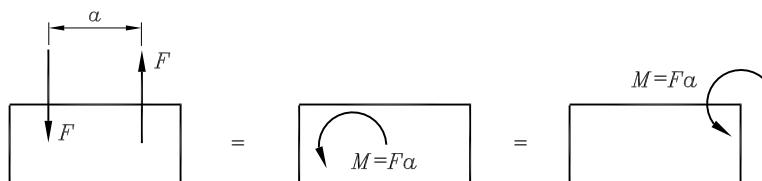


Abbildung 3.5: Ein Moment kann am starren Körper beliebig in der Ebene verschoben werden.

Ein an einem starren Körper angreifendes Moment darf beliebig in der Ebene verschoben werden (im Gegensatz zu Kräften, die nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden dürfen).

Mehrere an einem starren Körper angreifende Momente dürfen zu einem resultierenden Moment addiert werden (bzw. subtrahiert bei entgegengesetztem Drehsinn).

Beispiel:

Mit Hilfe eines Schraubenziehers soll eine in einem Gewindeloch steckende Schraube festgezogen werden. Als Fall *a* ist (in der Draufsicht) skizziert, wie der Schraubenzieher angesetzt wird. Die Schraube kann sich um ihre Längsachse drehen, die durch den Mittelpunkt des Schraubenkopfes (senkrecht zur Zeichenebene) verläuft. Das auf den Schraubenkopf aufgebrachte Kräftepaar hat ein Moment $M = Fb$:

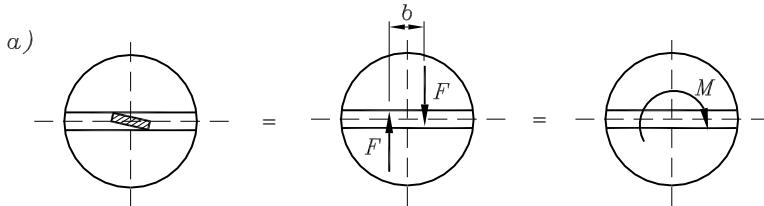


Abbildung 3.6: So wird der Schraubenzieher sauber angesetzt, ...

Im Fall *b* wird der Schraubenzieher nicht exakt zentrisch angesetzt, es wird aber das gleiche Kräftepaar aufgebracht. Da das Moment M beliebig in der Ebene verschoben werden kann, ändert sich an der Drehwirkung um den Mittelpunkt nichts:

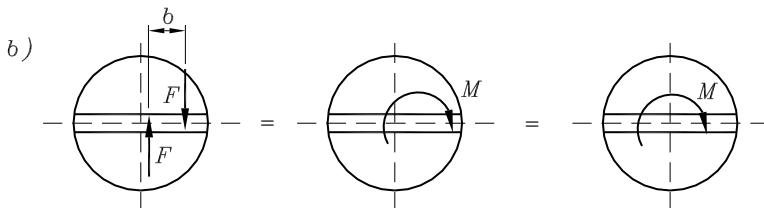


Abbildung 3.7: ... doch auch das außermittig angesetzte Werkzeug liefert das gleiche Moment, ...

Auch wenn die Schraube wie im Fall *c* ungenau gefertigt wurde (Schlitz ist nicht zentrisch, doch auch dann, wenn die Längsachsen von Kopf und Schaft nicht fluchten) und darüber hinaus der Schraubenzieher nicht in der Mitte des außermittigen Schlitzes angesetzt wird, ändert sich nichts an der Momentwirkung um die Drehachse, sofern das aufgebrachte Kräftepaar unverändert gleich $M = Fb$ ist:

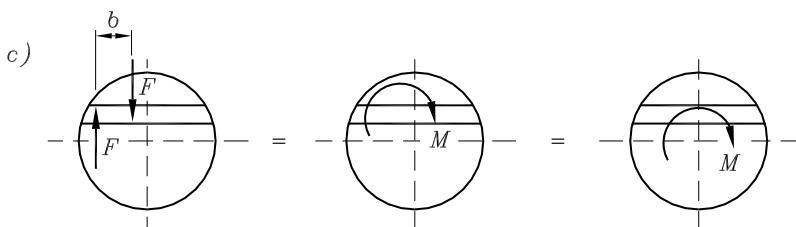
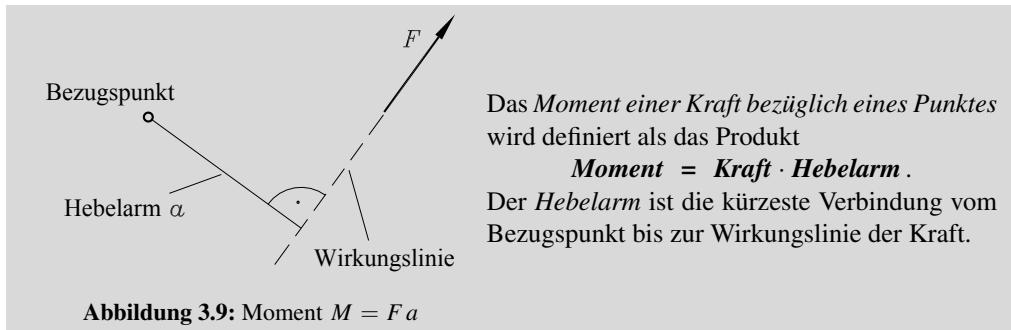


Abbildung 3.8: ... und daran ändert sich auch bei einer Ausschuss-Schraube nichts.

3.4 Das Moment einer Kraft



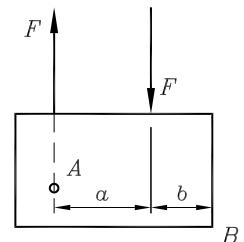
Entsprechend dem Richtungssinn einer Kraft hat das Moment einen *Drehsinn*, der durch das Vorzeichen des Moments berücksichtigt wird. Dabei kann ein positiver Drehsinn (wie der positive Richtungssinn für Kräfte) beliebig festgelegt werden.

Die Definition des Momentes einer Kraft bezüglich eines Punktes ist völlig gleichwertig mit dem im vorigen Abschnitt behandelten Moment eines Kräftepaars, wie an nachfolgendem Beispiel deutlich wird:

Beispiel: Ein auf einen starren Körper wirkendes Kräftepaar habe das Moment

$$M = Fa \quad (\text{rechtsdrehend}) .$$

Bezüglich des Punktes A hat die linke Kraft nach der oben gegebenen Definition keine Momentwirkung, weil der Hebelarm gleich Null ist (Wirkungslinie geht durch den Punkt), während die rechte Kraft am Hebelarm a wirkt. Das gesamte Moment der beiden Kräfte ist also



$$M = F \cdot 0 + F \cdot a = F \cdot a .$$

Da sich das *Moment eines Kräftepaars* auf keinen speziellen Punkt bezieht, ist auch für den Punkt B dieselbe Momentwirkung zu erwarten. Während die linke Kraft bezüglich des Punktes B eine rechtsdrehende Wirkung (ein „rechtsdrehendes Moment“) hat, ist die Wirkung der rechten Kraft bezüglich B linksdrehend, was in der folgenden Gleichung durch ein Minuszeichen berücksichtigt wird („rechtsdrehende Momente werden - bei diesem Beispiel - als positiv angenommen“). Die linke Kraft hat nach der oben gegebenen Definition den Hebelarm $(a+b)$, die rechte Kraft den Hebelarm b , so dass man mit B als Bezugspunkt erhält:

$$M = F(a+b) - Fb = Fa .$$

3.5 Äquivalenz

Aus den Überlegungen, die in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 angestellt wurden, ergibt sich folgende sinnvolle Definition für die Äquivalenzbetrachtungen:

Zwei allgemeine ebene Kraftsysteme sind in ihrer Wirkung auf den starren Körper äquivalent, wenn

- sie die gleiche *Kraftwirkung* (gleiche Resultierende nach Betrag, Richtung und Richtungssinn) haben
- **und** ihre *Drehwirkungen* bezüglich eines *beliebigen Punktes* gleich sind.

Äquivalenz bedeutet also jeweils gleiche Drehwirkung der beiden Kraftsysteme um *jeden* Punkt der Ebene, Intensität und Drehrichtung sind natürlich von Punkt zu Punkt verschieden.

Das allgemeine ebene Kraftsystem kann in jedem Fall auf eine *resultierende Kraft oder ein resultierendes Moment* reduziert werden.

3.5.1 Versetzungsmoment

Wenn bei der Reduktion eines allgemeinen ebenen Kraftsystems ein resultierendes Moment übrig bleibt, darf dieses beliebig in der Ebene verschoben werden. Wenn sich eine resultierende Kraft ergibt, darf diese nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Es ist jedoch auch eine Parallelverschiebung einer Kraft möglich, wenn die sich dadurch ändernde Wirkung auf den starren Körper durch Antragen eines Momentes ausgeglichen wird (Versetzungsmoment).

Allgemein gilt (für eine beliebige Kraft):

Wenn eine Kraft F parallel zu ihrer Wirkungslinie um die Strecke a verschoben wird, ändert sich die Gesamtwirkung auf den starren Körper nicht, wenn zusätzlich das *Versetzungsmoment* $F \cdot a$ angebracht wird.

Die **Abbildung 3.10** verdeutlicht dies. Eine Kraft F wird durch eine Gleichgewichtsgruppe auf paralleler Wirkungslinie ergänzt. Zwei der drei Kräfte F bilden das Kräftepaar $F \cdot a$:

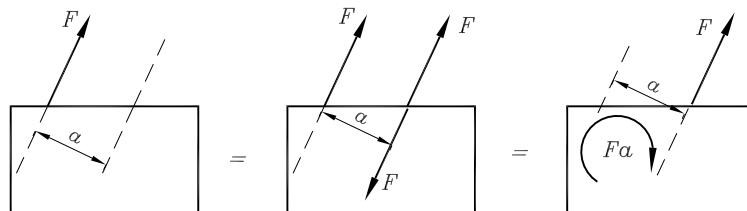


Abbildung 3.10: Parallelverschiebung einer Kraft muss durch Versetzungsmoment ausgeglichen werden.

3.5.2 Analytische Ermittlung der Resultierenden

Bei der grafischen Ermittlung der Resultierenden des allgemeinen ebenen Kraftsystems (Abschnitt 3.1) wurde deutlich, dass Betrag, Richtung und Richtungssinn auch mit Hilfe des Kraftvektors (wie beim zentralen ebenen Kraftsystem) ermittelt werden können. Nur die Lage der Wirkungslinie in der Ebene ist auf diesem Wege nicht zu bestimmen.

Diese Erkenntnis lässt sich auf das Problem der analytischen Ermittlung der Resultierenden des allgemeinen ebenen Kraftsystems übertragen. Betrag, Richtung und Richtungssinn ergeben sich nach den aus dem Abschnitt 2.1 bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad , \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad , \\ F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad , \quad \tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Damit fehlt für die Bestimmung der Lage der Wirkungslinie (ihr Anstieg ist mit α_R bekannt) nur noch ein Punkt. Diesen ermittelt man aus der Forderung, dass ein äquivalentes ebenes Kraftsystem neben der gleichen Kraftwirkung auch die gleiche Drehwirkung (bezüglich eines beliebigen Punktes) haben muss:

Die Summe aller Momente der Kräfte F_i muss gleich der Momentwirkung der Resultierenden sein. In der Bedingungsgleichung

$$\sum_{i=1}^n F_i a_i = F_R a_R \quad (3.2)$$

sind dementsprechend die a_i die Hebelarme der Kräfte F_i , a_R ist der Hebelarm der Resultierenden, jeweils also der senkrechte Abstand der Wirkungslinie vom frei zu wählenden Bezugspunkt (das Lot vom Bezugspunkt auf die Wirkungslinie).

Häufig ist es ratsam, die Kräfte F_i , deren Richtungen nicht den bevorzugten (im Allgemeinen senkrecht aufeinander stehenden) Bemaßungsrichtungen einer technischen Zeichnung folgen, in zwei Komponenten zu zerlegen und mit den Komponenten zu rechnen. Man vermeidet so die unter Umständen etwas schwierigen geometrischen Überlegungen zur Ermittlung der Hebelarme. Der Mehraufwand (doppelte Anzahl von Momentwirkungen) ist unerheblich, weil die Komponentenzerlegung ohnehin für die Ermittlung des Betrages der Resultierenden erforderlich ist.

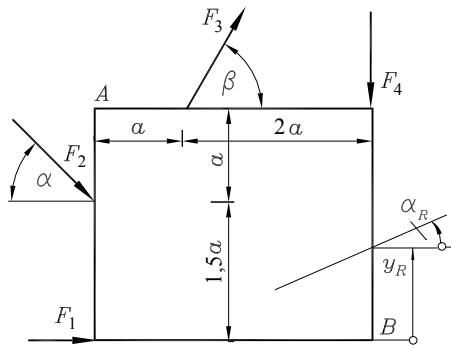
Ein entsprechendes Vorgehen bietet sich für die Behandlung der Resultierenden F_R in der Momentenbeziehung an: Man verschiebt sie entlang ihrer Wirkungslinie, bis sie direkt über oder unter dem Bezugspunkt (oder auch rechts oder links vom Bezugspunkt) liegt. Dafür muss die Lage der Wirkungslinie irgendwie angenommen werden, weil man ja nur ihre Richtung kennt. Nun werden auf der rechten Seite der Momentenbeziehung anstelle des Momentes der Resultierenden die beiden Momente ihrer Komponenten eingesetzt, wobei nur eine Komponente (infolge der Art der Verschiebung der Resultierenden) einen von Null verschiedenen Hebelarm hat. Dieser Hebelarm ist die einzige Unbekannte in der Momentenbeziehung, nach deren Berechnung dann auch die Lage der Wirkungslinie von F_R bekannt ist. Am nachfolgenden Beispiel (durch vier Kräfte belastete Scheibe aus dem Abschnitt 3.1) wird dieses Vorgehen demonstriert.

Wenn die Resultierende eines allgemeinen ebenen Kraftsystems den Betrag $F_R = 0$ hat (keine resultierende Kraftwirkung), können die Kräfte F_i natürlich immer noch eine resultierende Momentwirkung haben. Man kann das resultierende Moment aus der Summe der Momentwirkungen aller F_i bezüglich eines *beliebigen* Punktes der Ebene berechnen.

Beispiel 1: An einem starren Körper greifen wie skizziert vier Kräfte an.

a) Es ist das resultierende Moment der vier Kräfte bezüglich des Punktes A zu ermitteln.

b) Es sind analytisch Betrag, Richtung und Lage der Wirkungslinie der Resultierenden F_R zu ermitteln. Dabei ist als Bezugspunkt für die Momentenbeziehung der Punkt B zu wählen. Die Lage der Wirkungslinie ist durch Angabe von α_R und y_R zu beschreiben.



Gegeben: $F_1 = 1 \text{ kN}$; $F_2 = 2 \text{ kN}$; $F_3 = 2 \text{ kN}$; $F_4 = 1,5 \text{ kN}$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $a = 2 \text{ m}$.

- Bei der Fragestellung a sind die Hebelarme für die Kräfte F_1 und F_4 unmittelbar aus der Skizze abzulesen. Bei den Kräften F_2 und F_3 kann man die Hebelarme entweder aus geometrischen Überlegungen ermitteln oder die Kräfte in jeweils zwei Komponenten zerlegen und dann mit den Komponenten rechnen: Das Moment der Kraft F_3 wird entweder aus dem Produkt $F_3 \cdot a_3$ (**Abbildung 3.11**, linkes Bild) oder aus der Summe der Momente der beiden Komponenten $F_3 \cdot \sin \beta$ (am Hebelarm a) und $F_3 \cdot \cos \beta$ (am Hebelarm „Null“) ermittelt (**Abbildung 3.11**, rechtes Bild). Beide Varianten führen wegen $a_3 = a \cdot \sin \beta$ auf das gleiche Ergebnis.

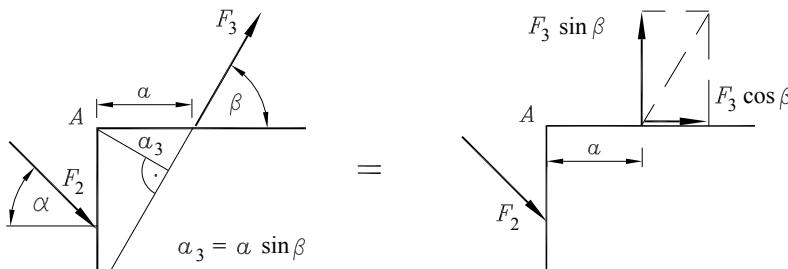


Abbildung 3.11: Hebelarm aus geometrischen Überlegungen oder Zerlegung der Kraft

- Die Rechnung liefert:
 - $M_A = 2,29 \text{ kNm}$ (linksdrehend),
 - $F_R = 3,61 \text{ kN}$; $\alpha_R = -19,1^\circ$; $y_R = 2,25 \text{ m}$.

Zur Beschreibung der Lage der Wirkungslinie der Resultierenden kann natürlich eine beliebige Strecke gewählt werden. Wäre der Punkt A als Momentenbezugspunkt gewählt worden, hätte man - wie nebenstehend skizziert - z. B. die Strecke x_A errechnen können: F_R wird bis zum Punkt C verschoben und in zwei Komponenten zerlegt, so dass die Horizontalkomponente keine Momentwirkung um A hat. Das *linksdrehende* Gesamtmoment der Kräfte F_1 bis F_4 muss gleich dem Moment $F_R \cdot \sin 19,1^\circ \cdot x_A$ sein, das *rechtsdrehend* ist:

Aus $x_A \cdot F_R \sin 19,1^\circ = -2,29 \text{ kNm}$ ergibt sich $x_A = -1,94 \text{ m}$, wobei das Minuszeichen anzeigt, dass die Wirkungslinie von F_R (entgegen der Annahme) links von A liegt.

Beispiel 2:

Für die skizzierten Kräfte F_1 und F_2 ist die Lage der Resultierenden F_R zu bestimmen (Ergebnis durch Angabe der Koordinate x_R).

Wenn nach unten gerichtete Kräfte als positiv angenommen werden, kann man mit $F_R = F_1 - F_2 = 1 \text{ kN}$ zum Beispiel die Äquivalenzbeziehung für die Momente um den (willkürlich gewählten) Angriffspunkt von F_1 aufschreiben. Dann geht F_1 in die Beziehung gar nicht ein (Hebelarm „Null“), und man erhält bei (willkürlich) rechtsdrehend positiv angenommenen Momenten aus

$$-F_2 \cdot 5 \text{ m} = F_R \cdot x_R$$

mit $x_R = -15 \text{ m}$ ein Ergebnis, das durch das Minuszeichen anzeigt, dass die Wirkungslinie der Resultierenden weit links von F_1 liegt. Weil dies etwas schwierig vorstellbar sein mag, zeigt Abbildung 3.14 zwei Systeme mit diesen äquivalenten Lasten. Die Lager würden, wenn das Eigengewicht der Träger unberücksichtigt bleiben darf, in beiden Systemen gleiche Kräfte aufzunehmen haben (wie solche Lagerreaktionen berechnet werden, wird im Kapitel 5 behandelt).

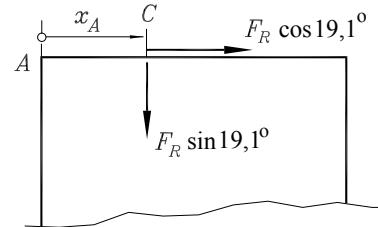


Abbildung 3.12: Komponenten der Resultierenden

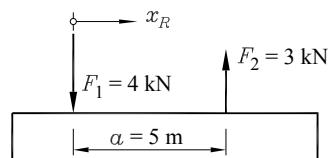


Abbildung 3.13: Kräfte mit entgegengesetztem Richtungssinn auf parallelen Wirkungslinien

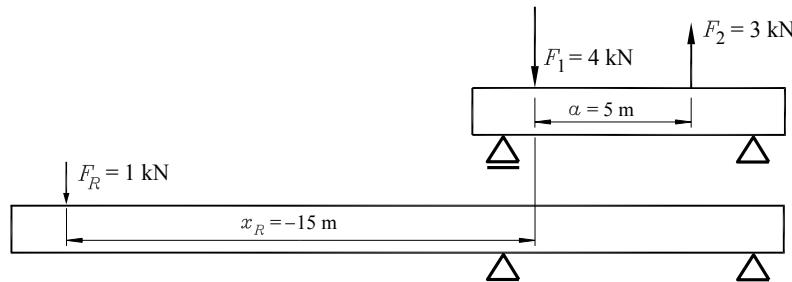


Abbildung 3.14: Zwei Systeme mit statisch äquivalenten Belastungen

3.6 Fazit zum Thema Äquivalenz

Lieber Leser, Sie haben in diesem Kapitel einige wichtige Grundlagen der Technischen Mechanik kennengelernt. Trotzdem finden Sie hier anstelle von Übungsaufgaben ein Fazit.

Das hat seinen Grund: Es ist (bis auf wenige Ausnahmen) nicht sinnvoll, Probleme auf der Basis der Äquivalenz von Kräftesystemen zu lösen. Fast ausschließlich sollte das Gleichgewicht von Kraftsystemen die Grundlage für die Lösung von Aufgaben sein. Deshalb gab es am Ende des Kapitels 2 auch nur Aufgaben, die sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen lösen ließen.

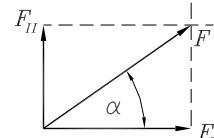
Die Erfahrung der Autoren hat gezeigt, dass der Anfänger (weil das Thema Äquivalenz immer am Anfang behandelt wird) die Neigung hat, bei Aufgaben zunächst die gegebenen Kräfte zu einer Resultierenden zusammenzufassen, um erst danach die unbekannten Kräfte und Momente zu berechnen. Das ist nicht sinnvoll (im gerade behandelten Beispiel 2 wird man zur Berechnung der Lagerreaktionen nicht erst die Resultierende ermitteln), und deshalb wird an dieser Stelle das Üben (Lösen von Aufgaben) durch das Rekapitulieren der wichtigsten Erkenntnisse zum Thema Äquivalenz aus den Kapiteln 2 und 3 ersetzt.

Es gibt allerdings eine wichtige Ausnahme zu den gerade getroffenen Aussagen: Die *Berechnung von Schwerpunkten* basiert auf den in diesem Kapitel erarbeiteten Grundlagen. Dieses Thema wird deshalb im folgenden Kapitel behandelt. Danach aber gilt: Die Gleichgewichtsbedingungen sind die Grundlage zur Lösung fast aller Probleme der Technischen Mechanik.

Die folgenden „wichtigsten Erkenntnisse“ zum Thema Äquivalenz mögen eher banal erscheinen und sind in dem Sinne zu verstehen, dass sie ständig als Nebenrechnungen und -überlegungen bei den Aufgaben der Technischen Mechanik auftreten:

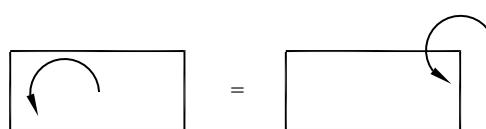
- ⇒ Die Zerlegung einer Kraft F bei gegebenem Winkel α in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten wurde im Abschnitt 2.1 auf Seite 10 behandelt:

$$F_I = F \cos \alpha \quad ; \quad F_{II} = F \sin \alpha .$$



- ⇒ Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes ist definiert als Produkt *Kraft · Hebelarm* (Abschnitt 3.4). Der *Hebelarm* ist die *kürzeste* Verbindung vom Bezugspunkt zur *Wirkungslinie* der Kraft. In der Regel ist es günstiger, unter einem Winkel angreifende Kräfte zunächst in Komponenten zu zerlegen und dann die Momentwirkungen der beiden Komponenten aufzuschreiben (siehe Beispiel 1 im Abschnitt 3.5.2).

- ⇒ Ein Moment, das an einem starren Körper angreift, ist (im Gegensatz zu den angreifenden Kräften) frei in der Ebene verschiebbar (siehe Seite 21).



4 Schwerpunkte

Jeder Körper besteht aus Masseteilen, die der Anziehungskraft (der Erde) unterworfen sind, so dass Gewichtskräfte wirken.

Der Punkt eines Körpers, durch den die Resultierende aller Gewichtskräfte bei beliebiger Lage des Körpers hindurchgeht, ist der *Schwerpunkt*.

Die Berechnung der Lage des Schwerpunktes ist damit identisch mit der Ermittlung der Lage der Resultierenden eines allgemeinen Kraftsystems mit parallelen Kräften. Andererseits kann die Gewichtskraft eines Körpers bei Statikproblemen durch eben diese Resultierende berücksichtigt werden, wenn die Lage des Schwerpunkts (und damit die Lage der Wirkungslinie dieser Resultierenden) bekannt ist.

Beispiel: Drei Quader mit den Massen m_1 , m_2 und m_3 sind wie skizziert zu einem Körper zusammengefügt. Es ist die Schwerpunktkoordinate x_S zu ermitteln.

Es ist wohl einzusehen (und mit den Integralformeln des folgenden Abschnitts natürlich auch zu berechnen), dass der Schwerpunkt eines Quaders im Symmetrieschnitt (in der „Mitte“ des Körpers) liegt, so dass die drei Gewichtskräfte mit den nachfolgend skizzierten Abständen anzusetzen sind.

Die Resultierende der drei Gewichtskräfte

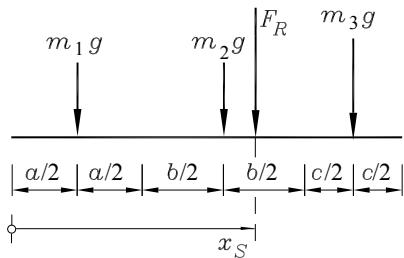
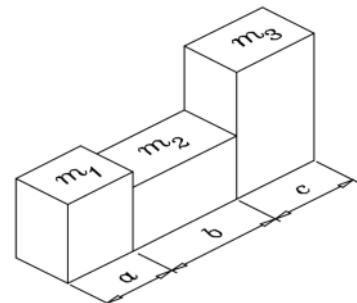
$$F_R = (m_1 + m_2 + m_3) g$$

muss die gleiche Momentwirkung bezüglich eines beliebigen Punktes haben wie die drei Gewichtskräfte zusammen (Moment der Resultierenden = Summe der Momente der Einzelkräfte):

$$(m_1 + m_2 + m_3) g x_S = m_1 g \frac{a}{2} + m_2 g \left(a + \frac{b}{2} \right) + m_3 g \left(a + b + \frac{c}{2} \right).$$

Aus dieser Gleichung kann die Schwerpunktkoordinate x_S berechnet werden. Mit einer solchen Äquivalenzbetrachtung erhält man natürlich immer nur eine Schwerpunktkoordinate.

Man kann die Rechnung in den beiden anderen Koordinatenrichtungen entsprechend durchführen, wobei man sich den Körper gegebenenfalls (wegen der Richtung der Gewichtskräfte) ge-



dreht denken muss. Das Bezugskoordinatensystems kann (wie der Momentenbezugspunkt bei Äquivalenzbetrachtungen) beliebig gewählt werden.

4.1 Schwerpunkte von Körpern

Das behandelte Beispiel hat die Analogie der Schwerpunktberechnung zum Problem der Ermittlung der Resultierenden eines Systems paralleler Kräfte verdeutlicht, so dass man daraus die Formeln für den aus n Teilmassen zusammengesetzten Körper ableiten kann: In einem beliebigen kartesischen Koordinatensystem haben die Teilmassen m_i die Schwerpunktkoordinaten x_i , y_i und z_i . Dann gelten folgende Formeln zur Berechnung der

Koordinaten des Gesamtschwerpunkts eines Körpers:

$$x_S = \frac{1}{m_{ges}} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad , \quad y_S = \frac{1}{m_{ges}} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad , \quad z_S = \frac{1}{m_{ges}} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad . \quad (4.1)$$

Die Gesamtmasse des Körpers m_{ges} ist die Summe der Teilmassen m_i :

$$m_{ges} = \sum_{i=1}^n m_i \quad . \quad (4.2)$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Formeln ist natürlich die Kenntnis der Schwerpunktkoordinaten der Teilmassen.

Wenn die Schwerpunktkoordinaten einer Masse nicht bekannt sind, muss diese gegebenenfalls in sehr viele Teilmassen Δm_i unterteilt werden, im Grenzfall ($\Delta m_i \rightarrow dm$, unendlich viele unendlich kleine Massen) wird die Summe zum bestimmten Integral:

$$x_S = \frac{1}{m_{ges}} \int_V x \, dm \quad , \quad y_S = \frac{1}{m_{ges}} \int_V y \, dm \quad , \quad z_S = \frac{1}{m_{ges}} \int_V z \, dm \quad . \quad (4.3)$$

Das Symbol V unter dem Integralzeichen bedeutet „Integral über das gesamte Volumen“, was im ungünstigsten Fall auf ein dreifaches Integral führt.

Für homogenes Material (Dichte $\rho = \text{konst.}$) kürzt sich die Dichte aus den Formeln heraus, und man berechnet ausschließlich mit dem Volumen der Körper die

Koordinaten des Gesamtschwerpunkts eines Körpers aus homogenem Material:

$$x_S = \frac{1}{V_{ges}} \sum_{i=1}^n V_i x_i \quad , \quad y_S = \frac{1}{V_{ges}} \sum_{i=1}^n V_i y_i \quad , \quad z_S = \frac{1}{V_{ges}} \sum_{i=1}^n V_i z_i \quad . \quad (4.4)$$

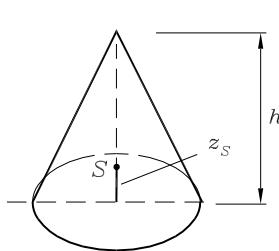
Entsprechend modifizieren sich die Integralformeln für Körper aus homogenem Material:

$$x_S = \frac{1}{V_{ges}} \int_V x \, dV \quad , \quad y_S = \frac{1}{V_{ges}} \int_V y \, dV \quad , \quad z_S = \frac{1}{V_{ges}} \int_V z \, dV \quad . \quad (4.5)$$

Wenn man bei einem homogenen Körper den Koordinatenursprung in eine Symmetrieebene legen kann, so ergibt sich für die Koordinatenrichtung senkrecht zur Symmetrieebene die Schwerpunktkoordinate Null, weil zu jedem Volumenteil an einem positiven „Hebelarm“ ein entsprechendes mit negativem Hebelarm vorhanden ist:

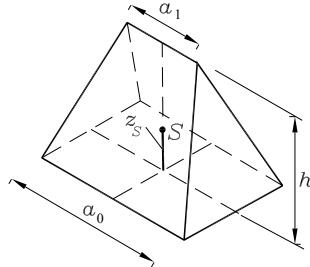
Wenn Symmetrieebenen in einem homogenen Körper vorhanden sind, dann liegt der Schwerpunkt in diesen Ebenen.

Schwerpunkte einiger homogener Körper:



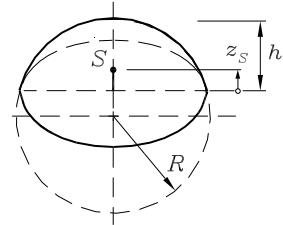
Kegel

$$z_S = \frac{1}{4} h$$



Keil

$$z_S = \frac{a_0 + a_1}{2a_0 + a_1} \frac{h}{2}$$



Kugelabschnitt

$$z_S = \frac{4R - h}{3R - h} \frac{h}{4} \quad (4.6)$$

4.2 Flächenschwerpunkte

Für den speziellen Fall eines homogenen flächenhaften Körpers (sehr dünnes Blech mit konstanter Dicke) kann das Volumen aus dem Produkt „Fläche · Dicke“ ermittelt werden. Aus den Schwerpunktformeln kürzt sich die Dicke dann heraus, und es verbleiben die

Formeln zur Berechnung des Flächenschwerpunkts:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^n A_i x_i \quad , \quad y_S = \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^n A_i y_i \quad , \quad z_S = \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^n A_i z_i \quad , \\ x_S &= \frac{1}{A_{ges}} \int_A x \, dA \quad , \quad y_S = \frac{1}{A_{ges}} \int_A y \, dA \quad , \quad z_S = \frac{1}{A_{ges}} \int_A z \, dA \quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

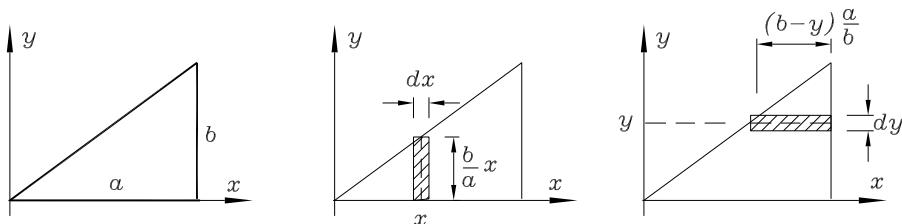
Die Formeln 4.7 gelten für beliebige Flächen im Raum. Besonders wichtig in der Technischen Mechanik ist jedoch die Ermittlung von Flächenschwerpunkten ebener Flächen, für die dann natürlich nur zwei Koordinaten bestimmt werden müssen.

Die Ausdrücke in den Zählern der Schwerpunktformeln, die in den Formeln für die Körperschwerpunkte Momente (*Gewichtskraft · Hebelarm*) sind, werden analog dazu als „statische Momente der Teilflächen“ bezeichnet, die Integrale sind die „statischen Momente der Fläche“.

Statisches Moment einer Fläche: Das statische Moment bezieht sich immer auf eine bestimmte Achse, als S_x wird z. B. das auf die x -Achse bezogene statische Moment bezeichnet:

$$S_x = \int_A y \, dA \quad . \quad (4.8)$$

Beispiel: Für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b sind die Schwerpunktkoordinaten zu ermitteln.

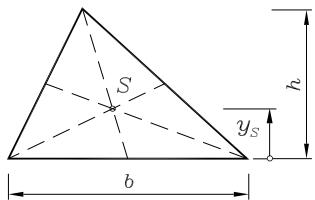


Für die Berechnung der x -Koordinate des Schwerpunkts müssen die differenziell kleinen statischen Momente $x \cdot dA$ integriert werden. Da in einem vertikalen Rechteck an der Stelle x jedes Flächenelement den gleichen „Hebelarm“ x hat, darf als Flächenelement dA ein Rechteck mit der Breite dx und der Höhe bx/a (Strahlensatz, mittlere Skizze) verwendet werden. Man erfasst die gesamte Fläche bei Integration von $x = 0$ bis $x = a$. Eine entsprechende Überlegung gilt für die Berechnung von y_S . Mit der Gesamtfläche $A_{ges} = ab/2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A_{ges}} \int_A x \, dA = \frac{2}{ab} \int_{x=0}^a x \frac{b}{a} x \, dx = \frac{2}{ab} \left[\frac{b}{a} \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^a = \frac{2}{3} a \quad , \\ y_S &= \frac{1}{A_{ges}} \int_A y \, dA = \frac{2}{ab} \int_{y=0}^b y (b-y) \frac{a}{b} dy = \frac{2}{ab} \left[a \frac{y^2}{2} - \frac{a}{b} \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^b = \frac{b}{3} \quad . \end{aligned} \quad (4.9)$$

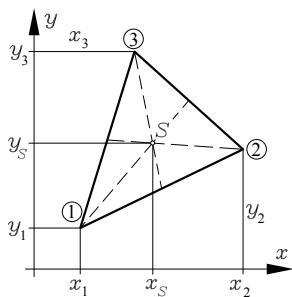
Auf gleichem Wege kommt man zu den Schwerpunktformeln für andere ebene Flächen. Für besonders häufig vorkommende Teilflächen sind die Ergebnisse (Flächeninhalt und Koordinaten des Schwerpunkts) nachfolgend zusammengestellt.

Schwerpunktkoordinaten x_S , y_S und Flächeninhalt A ausgewählter ebener Flächen



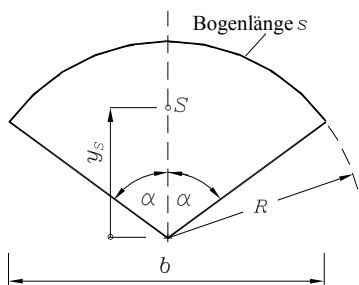
Dreieck:

$$y_S = \frac{h}{3} \quad A = b \frac{h}{2} \quad (4.10)$$



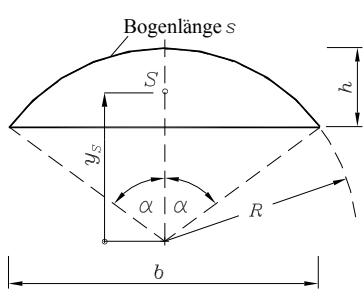
Dreieck in beliebiger Lage:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) & y_S &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \\ A &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)| \end{aligned} \quad (4.11)$$



Kreissektor:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{2Rb}{3s} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} \\ A &= R \frac{s}{2} = R^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.12)$$



Kreisabschnitt:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{b^3}{6(Rs - Rb + bh)} \\ &= \frac{2R \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \\ A &= \frac{1}{2} (Rs - Rb + bh) \\ &= R^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mit diesen Formeln kommt man im Allgemeinen aus, so dass die Anwendung der Integralformeln für die Schwerpunktberechnung vermieden werden kann. Allgemeine Polygonflächen

(kompliziert berandete Flächen lassen sich durch Polygone annähern) werden im Abschnitt 4.5 behandelt.

Die in der Praxis wohl häufigste Aufgabe ist die Ermittlung des Schwerpunkts einer Fläche, die sich aus Teilflächen zusammensetzt, deren Schwerpunkte bekannt sind. Dafür wird folgendes Vorgehen empfohlen:

- ⇒ Die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems kann den Aufwand verringern. Wenn der Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt einer Teilfläche gelegt wird, verschwinden die statischen Momente für diese Teilfläche. Eine andere Empfehlung ist, das Koordinatensystem so zu legen, dass alle Teilflächenschwerpunkte im ersten Quadranten liegen (und damit positive Koordinaten haben).
- ⇒ Die Gesamtfläche sollte in möglichst wenige Teilflächen so zerlegt werden, dass die Schwerpunkte dieser Teilflächen bekannt sind.
- ⇒ Wenn eine Fläche symmetrisch ist, liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse. Es genügt aber auch, wenn die statischen Momente der Teilflächen auf den beiden Seiten einer Achse gleiche Beträge haben. So können die Schwerpunkte der beiden skizzierten Flächen ohne Rechnung angegeben werden (**Abbildung 4.1**).
- ⇒ Vielfach ist es sinnvoll, aus einer größeren Teilfläche eine kleinere auszuschneiden. Solche Ausschnittsfächen gehen mit negativem Vorzeichen in die Formeln ein.
- ⇒ Für eine größere Anzahl von Teilflächen empfiehlt sich die Berechnung nach folgendem Tabellschema:

i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
	ΣA_i			$\Sigma A_i x_i$	$\Sigma A_i y_i$



$$x_S = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad , \quad y_S = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} . \quad (4.14)$$

Für die Tabelle sind nur die Werte A_i , x_i und y_i der Aufgabe zu entnehmen (die grau unterlegten Zellen sind die „Eingabewerte“ für die Rechnung), die Ermittlung aller übrigen Werte folgt einem formalen Algorithmus (unter www.TM-aktuell.de findet man hierzu eine Ergänzung).

- ⇒ Zu beachten ist (natürlich nicht nur bei der Tabellenrechnung), dass sich die Koordinaten der Teilflächenschwerpunkte immer auf das gemeinsame Koordinatensystem beziehen.

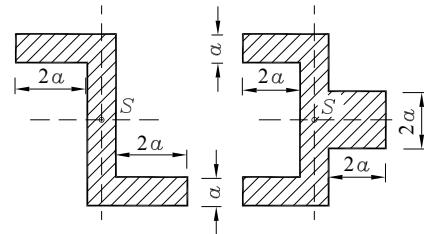


Abbildung 4.1: Die Lage des Schwerpunkts ist bei bestimmten Flächen auch ohne Rechnung bekannt.

Beispiel:

Für die skizzierte schraffierte Fläche ist die Lage des Flächenschwerpunktes zu berechnen.

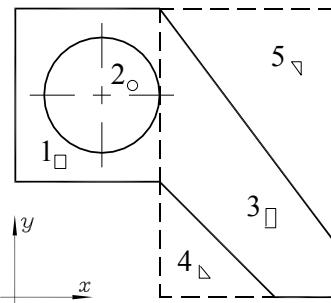
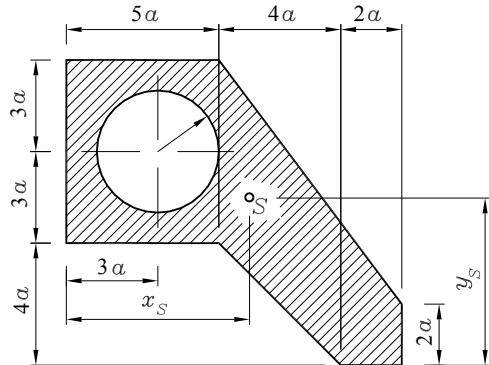


Abbildung 4.2: Einteilung in 5 Teilflächen

Die Fläche wird in Standardflächen (Rechtecke, Dreiecke, Kreis) unterteilt. Bei der als **Abbildung 4.2** skizzierten möglichen Einteilung wurden zwei Rechteckflächen (1 und 3) und drei Ausschnittsflächen (der Kreis 2 und die Dreiecke 4 und 5) gewählt. Für diese Einteilung ergeben sich unter Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems die Schwerpunktkoordinaten der Teilflächen, die in der folgenden Tabelle (**Abbildung 4.3**) zu sehen sind.

Es bietet sich natürlich an, die Zahlenrechnung einem geeigneten Programm zu übertragen. Nebenstehend sieht man die Realisierung der Berechnung mit MS-Excel. Die Excel-Datei, die auf der Seite 34 zu sehende Tabelle einschließlich der Formeln 4.14 realisiert, steht unter www.TM-aktuell.de zum Download zur Verfügung.

In der Tabellenrechnung wurde der Faktor a , mit dem jede Abmessung zu multiplizieren wäre, weggelassen. Dementsprechend muss man sich alle Ergebnisse und Zwischenergebnisse mit den Faktoren a (Längen), a^2 (Flächen) bzw. a^3 (statische Momente) multipliziert denken.

Es soll hier schon darauf hingewiesen werden, dass die Berechnung des Flächenschwerpunkts die Voraussetzung sein wird für die Ermittlung der Querschnittswerte in der Festigkeitslehre (wird im Kapitel 16 behandelt). Deshalb sind auch das dafür verfügbare Rechenprogramm und die Internet-Seite für die Online-Berechnung für die Berechnung von Flächenschwerpunkten geeignet (beides zu erreichen über www.TM-interaktiv.de).

i	A _i	x _i	y _i	A _i x _i	A _i y _i
1	30,000	2,500	7,000	75,000	210,000
2	-12,566	3,000	7,000	-37,699	-87,965
3	60,000	8,000	5,000	480,000	300,000
4	-8,000	6,333	1,333	-50,667	-10,667
5	-24,000	9,000	7,333	-216,000	-176,000
6				0,000	0,000
7				0,000	0,000
8				0,000	0,000
9				0,000	0,000
10				0,000	0,000
Summe	45,434			250,634	235,369

$$X_s = 5,516$$

$$Y_s = 5,180$$

Abbildung 4.3: Berechnung des Flächenschwerpunkts mit MS-Excel

4.3 Linienschwerpunkte

Analog zur Definition des Schwerpunkts einer Fläche wird auch der Schwerpunkt einer Linie definiert. Man kann sich diese Linie als unendlich dünnen massebelegten Draht mit konstantem Querschnitt vorstellen (Volumen = Länge · Querschnittsfläche), so dass sich die Querschnittsfläche aus den allgemeinen Schwerpunktformeln herauskürzt, und man erhält die

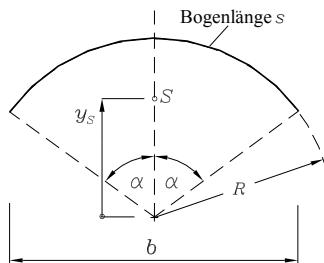
Formeln zur Berechnung des Linienschwerpunkts:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{l_{ges}} \sum_{i=1}^n l_i x_i \quad , \quad y_S = \frac{1}{l_{ges}} \sum_{i=1}^n l_i y_i \quad , \quad z_S = \frac{1}{l_{ges}} \sum_{i=1}^n l_i z_i \quad , \\ x_S &= \frac{1}{l_{ges}} \int_s x \, ds \quad , \quad y_S = \frac{1}{l_{ges}} \int_s y \, ds \quad , \quad z_S = \frac{1}{l_{ges}} \int_s z \, ds \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Besondere praktische Bedeutung hat der *Linienschwerpunkt einer ebenen Kurve*: Bei einem Stanzvorgang zum Beispiel (ein Werkstück wird entlang einer Linie, seiner Berandung, aus einem Blech herausgetrennt) sollte die Krafteinleitung in das Werkzeug im Linienschwerpunkt der Berandung des Werkstücks erfolgen, um eine gleichmäßige Scherwirkung zu erzielen.

Natürlich liegt auch der Linienschwerpunkt symmetrischer Kurven auf der Symmetriechse (auf einem Geradenstück in der Mitte, im Mittelpunkt eines Kreises usw.).

Mit Hilfe der Integralformel errechnet man die Formel für den



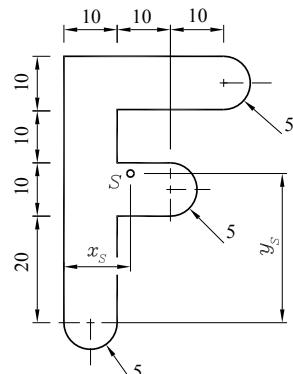
Linienschwerpunkt eines Kreisbogens:

$$y_S = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = R \frac{b}{s} \quad , \quad s = 2R\alpha \quad . \quad (4.16)$$

Beispiel: Es ist der Linienschwerpunkt der skizzierten geschlossenen Linie zu bestimmen (angegebene Abmessungen in mm).

Der Linienzug setzt sich aus Geradenstücken und Halbkreisbögen zusammen, seine Gesamtlänge beträgt

$$l_{ges} = (150 + 3 \cdot \pi \cdot 5) \text{ mm} = 197,1 \text{ mm} \quad .$$



Aus der Formel 4.16 für einen Kreisbogen mit beliebigem Öffnungswinkel 2α folgt für den speziellen Fall $\alpha = \pi/2$ (Halbkreis):

$$y_S = 2 \frac{r}{\pi} ,$$

so dass z. B. für die Kreisbögen 7 und 10 (gewählte Nummerierung siehe nebenstehende Abbildung 4.4) folgende Teil-schwerpunkte in die Rechnung eingehen:

$$x_7 = \left(20 + 2 \cdot \frac{5}{\pi} \right) \text{ mm} = 23,183 \text{ mm} ; \quad y_7 = 25 \text{ mm} ;$$

$$x_{10} = 5 \text{ mm} ; \quad y_{10} = -2 \cdot \frac{5}{\pi} \text{ mm} = -3,183 \text{ mm} .$$

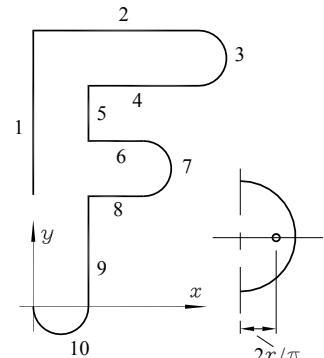


Abbildung 4.4: Nummerierung der Linien, Koordinatensystem

Mit dem in Abbildung 4.4 skizzierten Koordinatensystem erhält man schließlich die Koordinaten des Linienschwergewichtes aus den Längen l_1 bis l_{10} der Linienstücke 1 bis 10 und deren Schwerpunktkoordinaten x_1 bis x_{10} bzw. y_1 bis y_{10} (alle bezüglich des einheitlichen Koordinatensystems!):

$$x_S = \frac{1}{l_{ges}} \sum_{i=1}^{10} l_i x_i = 12,25 \text{ mm} ; \quad y_S = \frac{1}{l_{ges}} \sum_{i=1}^{10} l_i y_i = 28,66 \text{ mm} .$$

4.4 Experimentelle Schwerpunktermittlung

Von den zahlreichen Möglichkeiten, für komplizierte Gebilde den Schwerpunkt experimentell zu bestimmen, sollen hier nur zwei besonders einfache Verfahren vorgestellt werden.

Ein an einem Faden aufgehängtes Bauteil stellt sich so ein, dass sein Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt. Man kann auf diese Weise eine Gerade ermitteln, auf der der Schwerpunkt liegt. Nach Wiederholung des Versuchs mit einem anderen Aufhängepunkt ist der Schwerpunkt als Schnittpunkt beider Geraden bestimmt.

So wird der Schwerpunkt des in Abbildung 4.5 dargestellten flächenhaften Körpers experimentell ermittelt, indem das aus einem möglichst schweren Material ausgeschnittene Modell einmal im Punkt B, zum anderen am Punkt C aufgehängt wird. Die beiden auf das Modell aufgezeichneten Geraden (Verlängerungen der Fäden AB bzw. AC) bestimmen durch ihren Schnittpunkt den Schwerpunkt der Fläche.

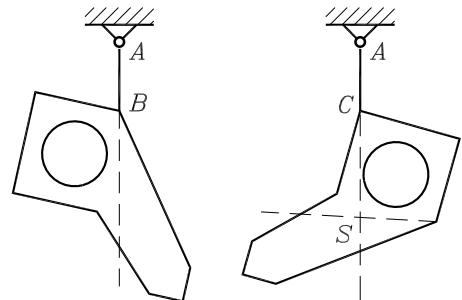


Abbildung 4.5: Der Schwerpunkt liegt immer senkrecht unter dem Aufhängepunkt

Eine sehr effektive Methode auch für komplizierte Bauteile ist die Ermittlung des Schwerpunkts durch „Auswiegen“. Dabei nutzt man die Tatsache aus, dass die Wirkungslinie der Resultierenden aller Gewichtskräfte durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft.

Beispiel:

Für das in **Abbildung 4.6** skizzierte Pleuel soll die Schwerpunktermittlung durch Auswiegen erläutert werden.

Die Pleuelstange wird an den Punkten A und B an zwei Federwaagen aufgehängt, so dass anstelle der Gesamtgewichtskraft die beiden Teilkräfte F_A und F_B gemessen werden. Dieses Kraftsystem muss nun der Gesamtgewichtskraft äquivalent sein. Neben

$$F_R = F_A + F_B$$

muss auch die Momentwirkung bezüglich eines beliebigen Punktes gleich sein. Bei Wahl des Punktes A als Bezugspunkt muss gelten:

$$F_R x_S = F_B l \quad .$$

Daraus errechnet sich der Schwerpunktabstand:

$$x_S = \frac{F_B}{F_A + F_B} l \quad .$$

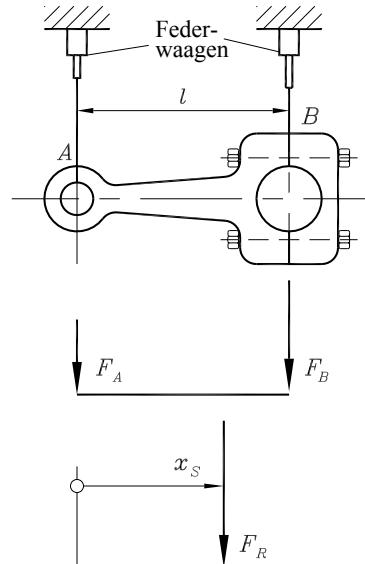


Abbildung 4.6: Experimentelle Ermittlung des Schwerpunkts durch „Auswiegen“ mit zwei Federwaagen

4.5 Flächenschwerpunkte, Computer-Verfahren

Am Beispiel der besonders wichtigen Flächenschwerpunkt-Berechnung werden im Folgenden einige Empfehlungen gegeben, wie auch komplizierte Gebilde zu behandeln sind. Natürlich lässt sich die im Abschnitt 4.2 demonstrierte Tabellenrechnung, die sowohl für Körper- als auch für Linienschwerpunkt-Berechnungen leicht zu modifizieren ist, recht einfach programmieren, so dass aufwendige Berechnungen möglich sind, wenn die Aufteilung der Fläche (des Körpers, des Linienzuges) in Teile mit bekannten Schwerpunktkoordinaten möglich und sinnvoll ist.

4.5.1 Eine durch einen Polygonzug begrenzte ebene Fläche

Eine ebene Fläche sei durch einen geschlossenen Polygonzug mit n Punkten und damit durch n Geradenstücke begrenzt. Die Punkte werden von 1 bis n so fortlaufend nummeriert, dass bei einem Umlauf in dieser Reihenfolge die Fläche immer links liegt (**Abbildung 4.7**).

Die Fläche des Trapezes unter dem Geradenstück 1-2 errechnet sich nach der Formel

$$\Delta A_{12} = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) ,$$

für die Trapezfläche unter einem beliebigen Geradenstück $i-j$ erhält man

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} (x_i - x_j)(y_i + y_j) , \quad (4.17)$$

wobei sich positive Werte für $x_i > x_j$ und dementsprechend für $x_i < x_j$ negative Werte ergeben.

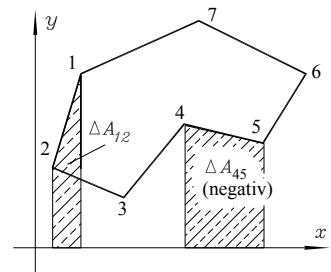


Abbildung 4.7: Polygon

Es ist leicht nachzuvollziehen, dass deshalb die Summe aller vorzeichenbehafteten Trapezflächen die von dem Polygonzug eingeschlossene Fläche ergibt. In dieser Summe heben sich alle Produkte der Punktkoordinaten mit gleichen Indizes heraus, und man erhält die Formel

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) , \quad (4.18)$$

wobei als Punkt $(n+1)$ noch einmal Punkt 1 zu verwenden ist (skizziertes Beispiel mit $n = 7$: Punkt 8 = Punkt 1).

Eine entsprechende Überlegung liefert die Formeln für die statischen Momente:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i + y_{i+1}) , \\ S_y &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (x_i + x_{i+1}) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Damit können die Schwerpunktkoordinaten der von dem Polygon umschlossenen Fläche nach den bekannten Formeln ermittelt werden:

$$x_S = \frac{S_y}{A} , \quad y_S = \frac{S_x}{A} . \quad (4.20)$$

Dieser Formelsatz eignet sich hervorragend für die Programmierung selbst auf programmierbaren Taschenrechnern, weil die Koordinaten nicht gespeichert werden müssen. Die drei Summen können gebildet werden, wenn dem Programm bei jeder Eingabe eines Punktes nur noch die Koordinaten des vorhergehenden Punktes zur Verfügung stehen.

Der Formelsatz ist auch anwendbar auf *Flächen, die aus mehreren nicht miteinander verbundenen Teilflächen bestehen*, wenn man nach Umfahren der ersten Teilfläche mit einem beliebigen Punkt der zweiten Teilfläche fortsetzt und nach Umfahren dieser Fläche zum Ausgangspunkt der ersten Teilfläche zurückkehrt. Auf diese Weise wird die nicht zum Polygonzug gehörende Verbindungslinie zweimal durchlaufen, so dass sich ihre Anteile zu der Summenformel wegen

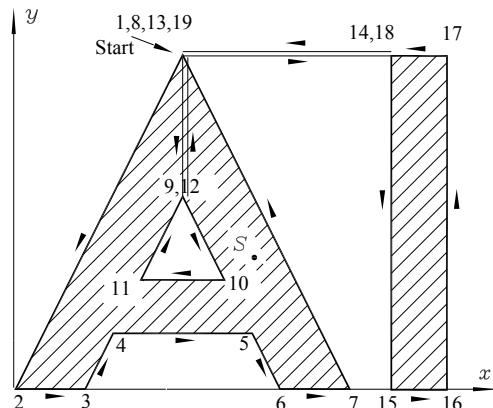
des unterschiedlichen Durchlaufsinns (und damit unterschiedlichen Vorzeichens) aufheben. Danach kann man vom Ausgangspunkt der ersten Teilfläche zu einem beliebigem Punkt der dritten Teilfläche gehen und so weiter.

Eine entsprechende Strategie verfolgt man bei *Flächen mit Ausschnitten*: Nach dem kompletten Umlauf um die Außenkontur entgegen dem Uhrzeigersinn geht man zu einem beliebigen Punkt auf der Ausschnittskontur, um diese dann im Uhrzeigersinn zu durchlaufen, so dass sich diese Anteile insgesamt subtrahieren. Wichtig ist, dass auch nach dem Umlauf um die Ausschnittskontur wieder zum Startpunkt auf der Außenkontur zurückgekehrt wird.

Die Reihenfolge lässt sich also durch eine recht einfache Regel beschreiben: Die gesamte Kontur ist so zu durchlaufen, dass die *Fläche immer links von der Laufrichtung* liegt und der Endpunkt gleich dem Startpunkt ist.

Beispiel: Die skizzierte Fläche (Koordinaten der Punkte entsprechend nachstehender Tabelle) besteht aus zwei nicht miteinander verbundenen Teilflächen, von denen die linke einen dreieckigen Ausschnitt hat. Man ermittle die Schwerpunktkoordinaten.

In der Skizze sind der gewählte Startpunkt (gleich Endpunkt) und der Umlaufsinn angegedeutet. Die Tabelle enthält die Punkte in dieser Reihenfolge, mehrfach anzufahrende Punkte sind auch mehrmals aufgeführt.



Pkt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x; y$	12;24	0;0	5;0	7;4	17;4	19;0	24;0	12;24	12;14	15;8
Pkt.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$x; y$	9;8	12;14	12;24	27;24	27;0	31;0	31;24	27;24	12;24	

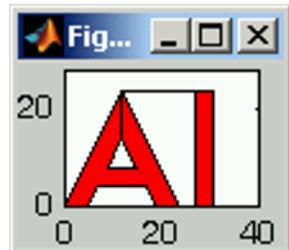


Abbildung 4.8: Die Matlab-Grafik „versteht“ auch diese Art der Beschreibung von Flächen, ...

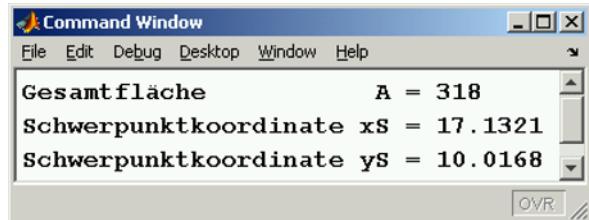


Abbildung 4.9: ... und die Rechnung nach den Formeln 4.18 bis 4.20 liefert die Ergebnisse (siehe www.TM-aktuell.de)

4.5.2 Durch zwei Funktionen begrenzte Fläche

Eine Fläche ist wie skizziert oben und unten durch die beiden Funktionen $y_o(x)$ bzw. $y_u(x)$ und seitlich durch die vertikalen Linien bei a und b begrenzt. Unter der Voraussetzung, dass in diesem Bereich

$$y_o(x) \geq y_u(x)$$

gilt, kann die Fläche berechnet werden nach

$$A = \int_{x=a}^{x=b} (y_o - y_u) dx . \quad (4.21)$$

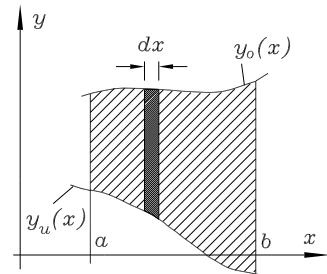


Abbildung 4.10: Fläche, begrenzt durch zwei Funktionen und zwei vertikale Linien

Das hervorgehobene unendlich kleine Flächenelement $dA = (y_o - y_u) dx$ hat seinen Schwerpunkt bei x und $(y_o + y_u)/2$ (in der Mitte zwischen den beiden Funktionen), so dass sich die statischen Momente der Gesamtfläche folgendermaßen aufschreiben lassen:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{x=a}^{x=b} (y_o + y_u)(y_o - y_u) dx , \quad S_y = \int_{x=a}^{x=b} x(y_o - y_u) dx . \quad (4.22)$$

Mit der Formel 4.21 für die Gesamtfläche A erhält man die für diesen speziellen Fall sehr nützlichen Formeln für den

Flächenschwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Funktionen:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{x=b} x(y_o - y_u) dx , \quad y_S = \frac{1}{2A} \int_{x=a}^{x=b} (y_o^2 - y_u^2) dx . \quad (4.23)$$

Natürlich kann die Integration manchmal etwas mühsam (und für zahlreiche Funktionen in geschlossener Form sogar unmöglich) sein. Der Wert der Formeln 4.23 besteht vor allen Dingen darin, dass man sie auch für komplizierte Funktionen aufschreiben kann, um dann (ausgesprochen mühelos) das Ergebnis durch numerische Integration mit dem Computer zu ermitteln (siehe hierzu www.TM-aktuell.de).



Beispiel:

Eine Fläche wird oben durch die Sinus-Kurve $y = \sin x$ und unten durch eine Gerade begrenzt, die die Sinus-Kurve im Nullpunkt und im ersten Scheitelpunkt schneidet. Da dieser Scheitelpunkt bei $x = \frac{\pi}{2}$ liegt, wird die Gerade durch

$$y = \frac{2}{\pi} x$$

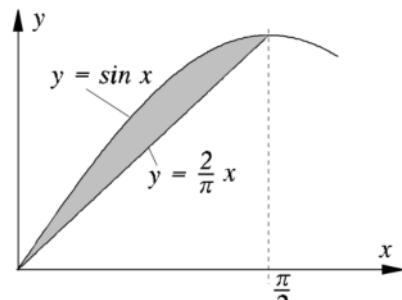
beschrieben. Für die eingeschlossene Fläche sind die Schwerpunktkoordinaten zu berechnen.

Die nebenstehende Skizze zeigt die Fläche. Die Integrale sind mit erträglichem Aufwand exakt lösbar, z. B. berechnet man nach Formel 4.21:

$$A = \int_{x=0}^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx = 1 - \frac{\pi}{4} = 0,2146 \quad .$$

Mit etwas mehr Mühe liefern die Formeln 4.23:

$$x_S = \frac{12 - \pi^2}{12 - 3\pi} = 0,8273; y_S = \frac{\pi}{24 - 6\pi} = 0,6100.$$



Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Lösung bestimmter Integrale:

⇒ Die exakte Lösung ist dann sinnvoll, wenn Problemparameter nicht durch Zahlen ersetzt werden, so dass man deren Einfluss auf das Ergebnis erkennen kann. In den Fällen, in denen die exakte Lösung gewünscht wird, sollte man sich der erstaunlichen Fähigkeiten der mathematischen Software-Produkte bedienen, die symbolische Berechnungen ausführen können. Solche Programme sind sogar auf Tisch- und Taschenrechnern verfügbar (siehe Abbildung 4.11 und www.TM-aktuell.de)

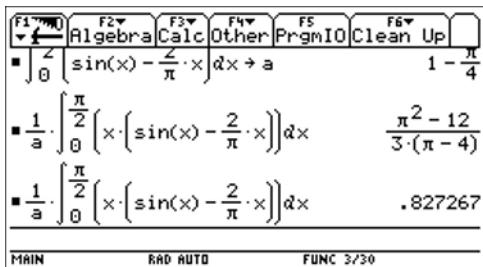


Abbildung 4.11: Lösung der Integrale mit einem Taschenrechner, hier: Display des TI92

⇒ In der Regel genügt die numerische Integration, die auch dann möglich ist, wenn eine analytische Lösung gar nicht existiert. Die Ergebnisse sind beliebig genau, und man sollte im Zweifelsfall keine Zeit darauf verschwenden, eine exakte Lösung zu erzwingen.



Und was bedeutet das für denjenigen, der sich bemüht, die Grundbegriffe der Technischen Mechanik zu erlernen?

Konzentrieren Sie sich auf die Probleme der Technischen Mechanik, die sind schwierig genug. Das Mechanik-Problem darf als gelöst gelten, wenn das bestimmte Integral korrekt aufgeschrieben ist. Für die (in der Praxis natürlich sehr wichtige) Lösung darf man auf die Verfügbarkeit starker Hilfsmittel vertrauen.

Bemerkungen dieser Art werden Sie an verschiedenen Stellen in diesem Buch antreffen, immer verknüpft mit dem Verweis auf die Internet-Site „**Mathematik für die Technische Mechanik**“ (www.TM-Mathe.de). Dort gibt es z. B. auch einen Bereich „Numerische Integration“.

4.6 Volumen-, Flächen- und Linienlasten

In der Realität sind alle Lasten, die ein Bauteil trägt, über eine Fläche verteilt (oder gar - wie z. B. das Eigengewicht - über das Volumen).

Bei der Behandlung des starren Körpers kann man stets mit Einzelkräften rechnen, die den verteilten Lasten statisch äquivalent sind (Einzelkräfte als Resultierende für verteilte Kräfte). Dafür werden Körper- bzw. Flächenschwerpunkte benötigt:

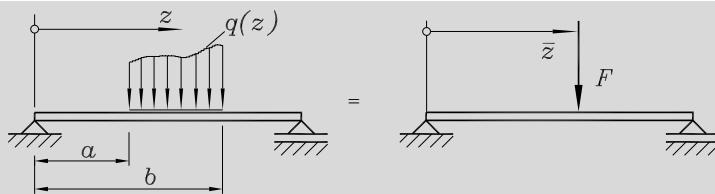
- ⇒ *Volumenlasten* (das Eigengewicht) werden durch die Gesamtgewichtskraft ersetzt, die im Schwerpunkt des Körpers angetragen wird.
- ⇒ *Flächenlasten* (Dimension: Kraft/Fläche) werden durch Integration über die Fläche zu Einzelkräften. Hier soll nur der praktisch wichtigste Fall des *konstanten Drucks* p_0 auf eine Fläche A behandelt werden: Die Resultierende

$$F = p_0 A$$

greift in diesem Fall im Schwerpunkt der Fläche A an.

- ⇒ *Linienlasten* (es ist auch der Ausdruck *Streckenlasten* gebräuchlich) werden mit dem Symbol q bezeichnet und haben die Dimension Kraft/Länge. Sie können über die Länge, auf der sie wirken, veränderlich sein und müssen also im allgemeinen Fall durch eine Funktion $q(z)$ mit der Längskoordinate z dargestellt werden.

Die Resultierende F einer Linienlast ergibt sich aus der Integration über die Länge, ihr Angriffspunkt \bar{z} mit der Forderung nach Momentenequivalenz aus der Schwerpunktformel:



$$F = \int_{z=a}^b q \, dz \quad , \quad \bar{z} = \frac{1}{F} \int_{z=a}^b q z \, dz \quad . \quad (4.24)$$

Als Faustregel darf gelten: Die Resultierende F repräsentiert genau die Fläche, mit der die Linienlast $q(z)$ symbolisch dargestellt wird, und F greift im Schwerpunkt dieser Fläche an.

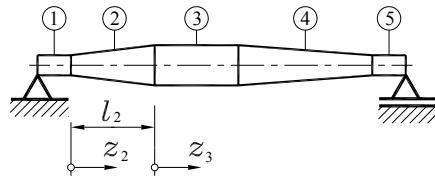
Unter anderem werden Linienlasten zur Erfassung der Eigengewichtsbelastung gerader Träger verwendet. Für den Fall, dass der Querschnitt des Trägers entsprechend $A(z)$ veränderlich ist, erhält man mit der Dichte ρ und der Erdbeschleunigung g aus der folgenden Formel die

Linienlast eines geraden Trägers, verursacht durch sein Eigengewicht:

$$q(z) = \rho g A(z) \quad . \quad (4.25)$$

Beispiel 1:

Der Durchmesser der skizzierten Welle wächst im konischen Abschnitt 2 von D_2 auf D_3 und ist im Abschnitt 3 konstant. Für diese beiden Abschnitte sind die Funktionen der Linienlasten $q_2(z_2)$ und $q_3(z_3)$ infolge des Eigengewichts zu berechnen (Dichte des Materials: ρ).



Für die Durchmesser in den beiden Abschnitten gilt:

$$d_2(z_2) = D_2 + (D_3 - D_2) \frac{z_2}{l_2} \quad , \quad d_3(z_3) = D_3 \quad .$$

Damit gilt für die Querschnittsflächen der Kreisquerschnitte:

$$A_2(z_2) = \pi \frac{d_2^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left[D_2 + (D_3 - D_2) \frac{z_2}{l_2} \right]^2 \quad , \quad A_3(z_3) = \frac{\pi}{4} D_3^2 \quad ,$$

und nach Formel 4.25 ergeben sich die Linienlasten

$$q_2(z_2) = \frac{\pi \rho g}{4} \left[D_2 + (D_3 - D_2) \frac{z_2}{l_2} \right]^2 \quad , \quad q_3(z_3) = \frac{\pi \rho g}{4} D_3^2 \quad .$$

Beispiel 2:

Für einige besonders häufige Linienlastverläufe sollen Größe und Lage der Resultierenden (**Abbildung 4.12**) berechnet werden.

Für die skizzierte Dreiecks last mit der Maximalintensität q_1 ist der Verlauf der Linienlast mit der gewählten Koordinate durch

$$q(z) = q_1 \frac{z}{l} \quad (4.26)$$

gegeben. Die Integration nach den Formeln 4.24 liefert die Größe der Resultierenden und ihren Angriffspunkt im Schwerpunkt des von der Streckenlast aufgespannten Dreiecks:

$$F = \frac{1}{2} q_1 l \quad , \quad \bar{z} = \frac{2}{3} l \quad . \quad (4.27)$$

Es ist leicht einzusehen, dass für eine konstante Linienlast bzw. eine Trapezlast die angegebenen Ergebnisse gelten. Dabei ist es sinnvoll, die Trapezlast durch zwei Einzelkräfte (aus konstanter Linienlast und Dreieckslast) zu ersetzen.

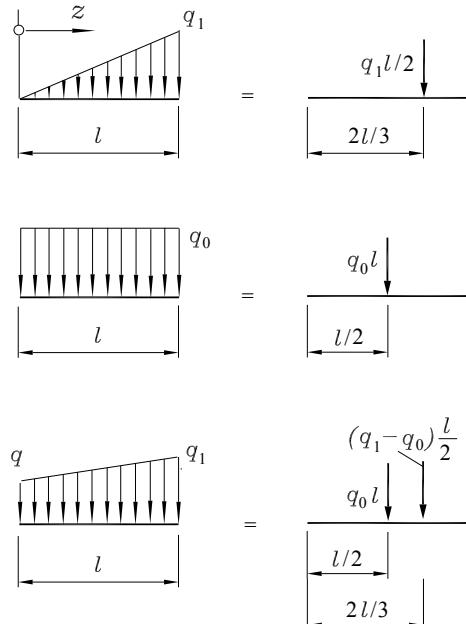


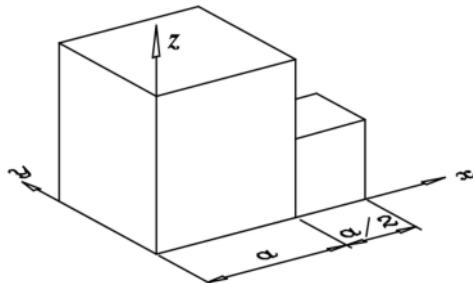
Abbildung 4.12: Dreiecks last, konstante Linienlast und Trapezlast

4.7 Aufgaben

Aufgabe 4.1:

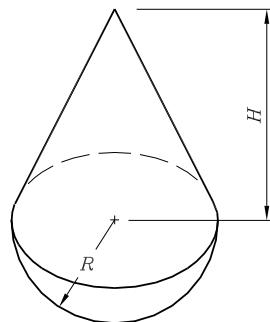
Ein Würfel aus Aluminium (Dichte: $\rho_{Al} = 2,70 \text{ g/cm}^3$) mit einer Kantenlänge $a = 200 \text{ mm}$ ist mit einem kleineren Würfel (Kantenlänge $\frac{a}{2}$) aus Eisen (Dichte: $\rho_{Fe} = 7,85 \text{ g/cm}^3$) verbunden.

Man ermitte die Koordinaten des Gesamtschwerpunkts bezüglich des eingezeichneten Koordinatensystems.

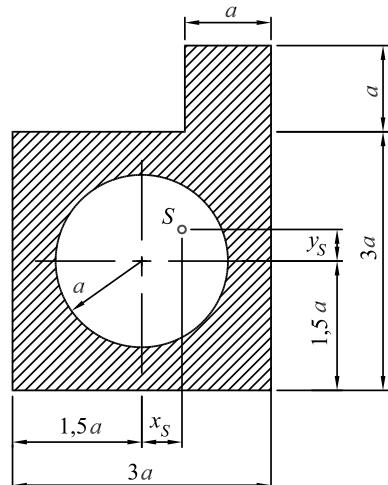
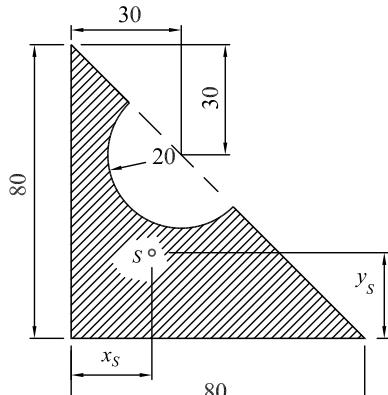

Aufgabe 4.2:

Der skizzierte homogene Körper besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel.

Für einen gegebenen Radius R ist die Höhe H des Kegels zu ermitteln, für die der Gesamtschwerpunkt des Körpers in die Verbindungsfläche von Halbkugel und Kegel fällt.


Aufgabe 4.3:

Für die skizzierten Flächen sind die Koordinaten der Flächenschwerpunkte zu berechnen.



Liebe Studenten, liebe Schüler, Sie haben natürlich recht mit der Frage, die sich gera-
dezu aufdrängt. Sie haben sich möglicherweise eine Software heruntergeladen oder die
Online-Berechnung von Schwerpunkten getestet (beides wird über www.TM-aktuell.de bzw.
www.TM-interaktiv.de angeboten) und fragen nun: „Warum muss ich das denn alles lernen,
wenn es so bequem mit ein paar Mausklicks zu erledigen ist?“

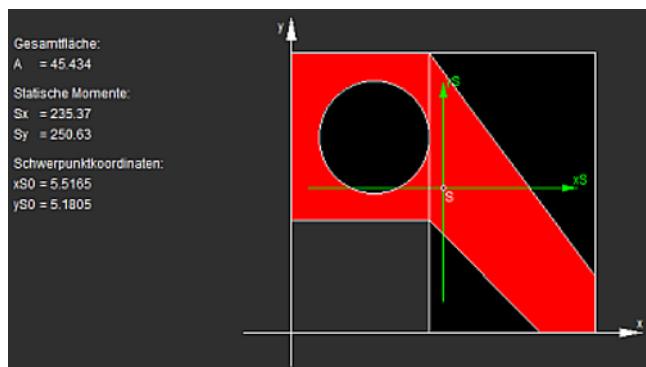
Sie müssten es auch nicht lernen, wenn Sie „Schwerpunkt-Berechner“ werden wollten (den
Beruf gibt es allerdings nicht). Auch der Auto-Mechaniker, der Pkw-Räder auswuchtet, muss
die im Abschnitt 29.4.2 behandelte Theorie des Auswuchtens nicht beherrschen. Es genügt,
dass seine Maschine „weiß, wie es geht.“

Sie aber wollen einen technischen Beruf erlernen. Wahrscheinlich wollen Sie Ingenieur wer-
den. Und dann gibt es mindestens die beiden folgenden Gründe als Antwort auf die oben
gestellte Frage:

- Sie müssen das Herangehen an Probleme und die Strategien zu ihrer Lösung trainieren,
um später für die Probleme, für die es noch keine Lösung gibt, gerüstet zu sein. Das muss
an ganz einfachen Dingen (wie z. B. Schwerpunktberechnung) geübt werden.
- Man kann bei der Nutzung von Software zur Lösung von Problemen beliebig viel falsch
machen. Deshalb zieht sich auch das schwierige Thema „Verifizieren von Computer-
rechnungen“ wie ein roter Faden durch dieses Buch. Natürlich rechnet der Ingenieur die
Lösungen, die der Computer ab liefert, nicht „von Hand“ nach (das geht meistens auch
gar nicht). Aber er braucht ein Gefühl dafür, ob die Lösung richtig sein könnte, und er
muss in der Lage sein, offensichtlich falsche Ergebnisse möglichst sofort zu erkennen.
Von den zahlreichen Strategien dafür ist das Verständnis für die Theorie, die hinter den
Computer-Algorithmen steckt, eine besonders erfolgreiche Methode.

Sie werden bemerkt haben, die typische Motivation für Studenten und Schüler - „Ich muss
das lernen, weil es in der Prüfung dran kommt.“ - ist eigentlich nur für diejenigen wichtig, die
die rationalen Argumente nicht einsehen. Zu denen gehören Sie, lieber Leser, ja aber nicht.

Online-Berechnung eines Flächen-
schwerpunktes (Beispiel von Sei-
te 35) mit einem der beiden
Programme, die unter [www.TM-
interaktiv.de](http://www.TM-
interaktiv.de) angeboten werden.



5 Gleichgewicht des ebenen Kraftsystems

5.1 Die Gleichgewichtsbedingungen

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn sich die Wirkungen aller an ihm angreifenden Kräfte und Momente aufheben. Aus dieser Forderung ergeben sich die

Gleichgewichtsbedingungen für das allgemeine ebene Kraftsystem:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad , \quad \sum_i M_i = 0 \quad . \quad (5.1)$$

Man beachte:

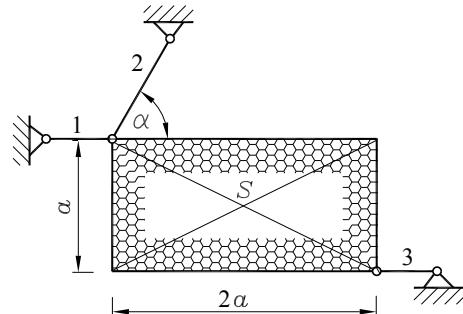
- ⇒ Die durch die Indizes x und y angedeuteten Richtungen in den Kraft-Gleichgewichtsbedingungen können selbstverständlich beliebig gewählt werden. Es ist nicht erforderlich, dass die beiden Richtungen senkrecht zueinander sind.
- ⇒ Der Bezugspunkt für die Momenten-Gleichgewichtsbedingung kann beliebig in der Ebene festgelegt werden.
- ⇒ Es ist möglich (und vielfach zweckmäßig), eine oder beide Kraft-Gleichgewichtsbedingungen durch zusätzliche Momenten-Gleichgewichtsbedingungen mit anderen Bezugspunkten zu ersetzen, die bei drei Momenten-Gleichgewichtsbedingungen allerdings nicht auf einer Geraden liegen dürfen. Bei zwei Momenten-Gleichgewichtsbedingungen dürfen die beiden Bezugspunkte nicht auf einer gemeinsamen Senkrechten zur Kraft-Gleichgewichts-Richtung liegen.
- ⇒ Da drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden müssen, dürfen drei Größen unbekannt sein, die dann mit Hilfe dieser Bedingungen ermittelt werden können.
- ⇒ Obwohl theoretisch beliebig viele Gleichgewichtsbedingungen aufgeschrieben werden können (z. B. durch Wahl immer neuer Bezugspunkte für das Momenten-Gleichgewicht), können doch niemals mehr als drei Unbekannte aus diesen Gleichungen errechnet werden. Zusätzliche Gleichungen können zur Kontrolle der Rechnung nützlich sein.
- ⇒ Neben der Freiheit, beliebige Richtungen für die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen festzulegen, kann auch jeweils der positive Richtungssinn für die Kräfte und der positive Drehsinn für die Momente für eine Gleichgewichtsbedingung beliebig gewählt werden.
- ⇒ In die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen gehen alle Einzelkräfte einschließlich der resultierenden Kräfte ein, auf die verteilte Belastungen (z. B.: Linienlasten) vorher reduziert werden

müssen. In die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen gehen diese Kräfte mit ihren Hebelarmen und eventuell vorhandene Einzelmomente ein. Letztere werden einfach summiert (oder subtrahiert, abhängig vom Drehsinn), unabhängig vom gewählten Bezugspunkt (Momente sind in der Ebene frei verschiebbar, vgl. das Beispiel im Abschnitt 3.3). Momente haben keinen Einfluss auf das Kraft-Gleichgewicht.

Beispiel: Eine rechteckige Scheibe (Gewichtskraft F_G) ist wie skizziert an drei Seilen aufgehängt.

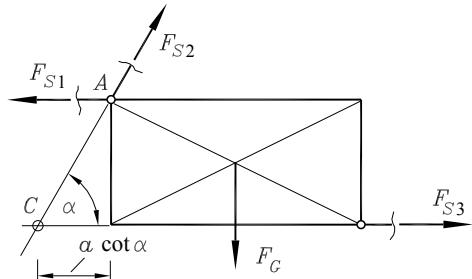
Gegeben: $F_G = 2 \text{ kN}$; $\alpha = 60^\circ$.

Man ermittle die Kräfte in den Seilen 1 bis 3.



Es ist im Allgemeinen vorteilhaft, wenn man die Gleichgewichtsbedingungen so formulieren kann, dass jeweils nur eine Unbekannte in einer Gleichung auftaucht: In diesem Beispiel ist dies für die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“, in der nur die Unbekannte F_{S2} vorkommt, gegeben:

$$\uparrow \quad F_{S2} \sin \alpha - F_G = 0 \quad .$$



Für eine zweite Kraft-Gleichgewichtsbedingung kann man jedoch keine Richtung finden, die zwei Unbekannte aus der Gleichung heraushält. Im Gegensatz dazu lässt sich die Momentengleichgewichtsbedingung immer so formulieren, dass nur eine Unbekannte in der Gleichung erscheint, indem als Bezugspunkt der Schnittpunkt der Wirkungslinien zweier unbekannter Kräfte gewählt wird. Für die vorliegende Aufgabe drängt sich der Punkt A in dieser Hinsicht geradezu auf, und es empfiehlt sich dann durchaus, als dritte Gleichgewichtsbedingung das Momentengleichgewicht um den Punkt C aufzuschreiben, so dass alle Gleichungen jeweils nur eine Unbekannte enthalten (und Rechenfehler sich nicht fortpflanzen!)¹. Aus den Momentenbeziehungen

$$A2 \quad F_G a - F_{S3} a = 0 \quad , \quad C2 \quad F_G (a + a \cot \alpha) - F_{S1} a = 0$$

und dem Kraftgleichgewicht ermittelt man die Ergebnisse:

$$F_{S1} = F_G (1 + \cot \alpha) = 3,15 \text{ kN} \quad ; \quad F_{S2} = \frac{F_G}{\sin \alpha} = 2,31 \text{ kN} \quad ; \quad F_{S3} = F_G = 2 \text{ kN} \quad .$$

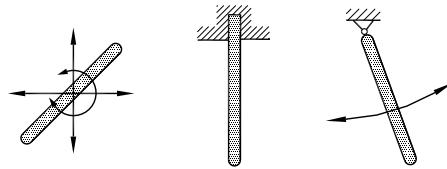
¹ Die drei Gleichgewichtsbedingungen stellen aus der Sicht der Mathematik ein *Lineares Gleichungssystem* dar, das durch den beschriebenen „Trick“ entkoppelt wird (und damit leicht „von Hand“ lösbar ist). Es sei schon hier darauf hingewiesen, dass für kompliziertere Probleme - wenn die Lösung des Gleichungssystems dem Computer übertragen wird - diese Strategie nicht mehr zu empfehlen ist (siehe dazu Abschnitt 6.3).

5.2 Lager und Lagerreaktionen in der Ebene

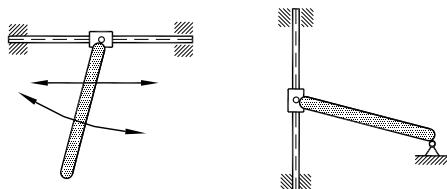
Ein Körper, der sich in einer Ebene frei bewegen kann, hat drei *Freiheitsgrade*: Translatorische Bewegung (alle Punkte des Körpers bewegen sich auf kongruenten Bahnkurven) ist in zwei Richtungen möglich, der dritte Freiheitsgrad ist eine Rotation um eine Achse senkrecht zur Ebene.

Durch *Lager* werden die Bewegungsmöglichkeiten des Körpers eingeschränkt. Man unterscheidet in der Ebene *ein-, zwei- und dreiwertige Lager*. Die Wertigkeit eines Lagers gibt an, wie viele Freiheitsgrade es einschränkt. Dies soll am Beispiel der Lagerung eines starren Körpers verdeutlicht werden:

Beispiel 1: Der ungebundene starre Körper hat in der Ebene drei Freiheitsgrade. Eine starre Bindung (dreiwertiges Lager) bindet drei Freiheitsgrade. Eine gelenkige Lagerung (zweiwertiges Lager) bindet zwei Freiheitsgrade (Rotation ist möglich).



Beispiel 2: Wenn die gelenkige Aufhängung sich in einer Richtung bewegen kann, wird nur ein Freiheitsgrad gebunden (einwertiges Lager). Die Kombination eines einwertigen mit einem zweiwertigen Lager bindet auch drei Freiheitsgrade, und der Körper hat wie bei der Lagerung mit einem dreiwertigen Lager keine Bewegungsmöglichkeit mehr.



Beispiele für einwertige Lager:

Das *Seil* kann nur eine Kraft in seiner Längsrichtung aufnehmen. Diese wird (wie in der Abbildung 5.1) als *Zugkraft* angetragen und darf nicht negativ werden ($F_S \geq 0$).

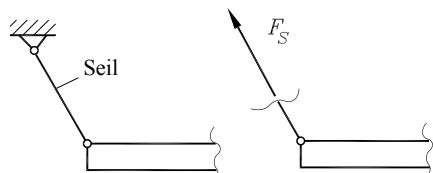


Abbildung 5.1: Ein *Seil* kann nur eine Zugkraft in seiner Längsrichtung aufnehmen.

Der *Stab* ist sowohl mit dem Körper als auch mit einem Festpunkt gelenkig verbunden und kann nur eine Kraft in seiner Längsrichtung aufnehmen. Diese wird (wie in der Abbildung 5.2) als *Zugkraft* angetragen und darf auch negativ werden.



Abbildung 5.2: Ein *Stab* kann eine Zug- oder eine Druckkraft aufnehmen.

Ein *loses Lager* (**Abbildung 5.3**) lässt Translation in einer Richtung und Rotation zu. Es nimmt eine Kraft senkrecht zur Unterlage auf (das aus dem Bauwesen entlehnte *Rollenlager* ist symbolisch zu verstehen, F_A darf auch negativ werden). Die Rollen werden im Loslager-Symbol \triangle in der Regel weggelassen.

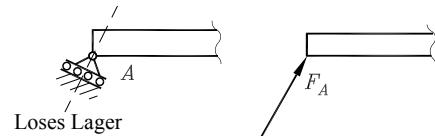


Abbildung 5.3: Ein *Loslager* entspricht dem Stab (Aufnahme einer Zug- oder Druckkraft).

Wenn sich der Körper auf einer *glatten Oberfläche reibungfrei* abstützt (**Abbildung 5.4**), kann nur eine Kraft F_N senkrecht zur Oberfläche übertragen werden, die natürlich nicht negativ werden darf ($F_N \geq 0$).

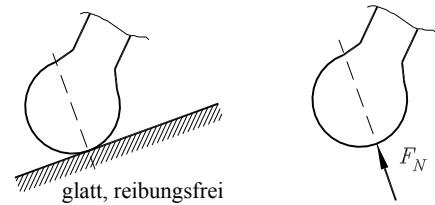


Abbildung 5.4: Eine *ideal glatte Oberfläche* kann nur eine Druckkraft aufnehmen.

Eine *verschiebbare Hülse* (**Abbildung 5.5**) behindert keine Verschiebung und kann deshalb auch keine Kraft aufnehmen. Sie verhindert aber die Drehung in der Zeichenebene und nimmt dementsprechend ein Moment auf.

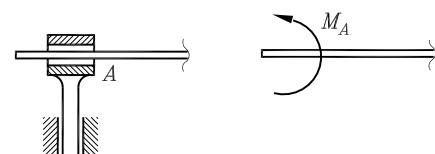


Abbildung 5.5: Die *verschiebbare Hülse* kann nur ein Moment aufnehmen.

Beispiele für zweiwertige Lager:

Ein *Festlager* \bowtie (auch *gelenkiges Lager* genannt, **Abbildung 5.6**) bindet die beiden translatorischen Freiheitsgrade und kann eine Kraft in beliebiger Richtung aufnehmen: Man trägt zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten als Lagerreaktionen an.

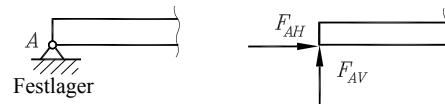


Abbildung 5.6: Ein *Festlager* kann eine beliebig gerichtete Kraft aufnehmen.

Ist der Körper über eine Hülse auf einer Schiene gelagert (**Abbildung 5.7**), so werden eine Kraft senkrecht zur Schiene und ein Moment, das die Rotation verhindert, übertragen.

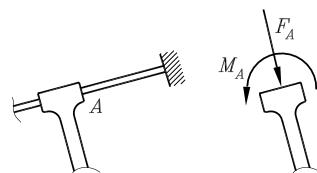
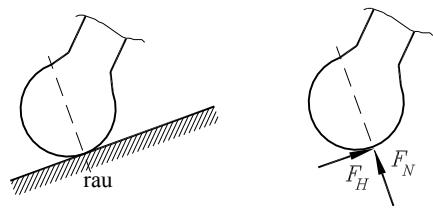


Abbildung 5.7: Eine *Hülse auf einer Schiene* kann eine Kraft und ein Moment aufnehmen.



Wenn sich der Körper auf einer *rauen Oberfläche* abstützt (**Abbildung 5.8**), kann neben der Normalkraft F_N (senkrecht zur Oberfläche) noch eine Haftkraft F_H übertragen werden (dieses Problem wird im Kapitel 9 gesondert behandelt).

Abbildung 5.8: Eine *raue Oberfläche* erfordert spezielle Überlegungen (siehe Kapitel 9).

Beispiel für ein dreiwertiges Lager:

Eine *starre Einspannung* (**Abbildung 5.9**) verhindert alle drei Bewegungsmöglichkeiten des Körpers und muss dementsprechend drei Lagerreaktionen aufnehmen, zwei Kraftkomponenten und (zur Verhinderung der Rotation) ein Moment (*Einspannmoment*). Praktisch realisiert wird eine Einspannung durch eine beliebige feste Verbindung eines Körpers (verschweißt, geklebt, verschraubt, ...) mit der übrigen Konstruktion.

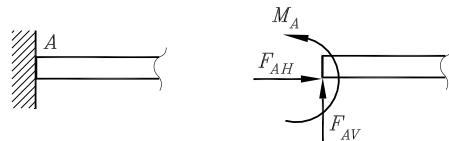


Abbildung 5.9: Eine *starre Einspannung* kann drei Lagerreaktionen aufnehmen.

In der technischen Praxis kommen natürlich die verschiedensten Realisierungen für Lagerungen vor, die bei ebenen Problemen dann immer als ein-, zwei- oder dreiwertiges Lager idealisiert werden müssen, z. B.:

- ⇒ Gleitlager und Wälzlager werden im Allgemeinen als Loslager angesehen; wenn sie auch axiale Kräfte aufnehmen können, als Festlager. Diese Idealisierung geht also davon aus, dass sie keine Momente aufnehmen, was exakt natürlich nur für Pendellager gilt. Bei der Lagerung einer Welle muss allerdings immer auch für die Aufnahme axialer Lasten gesorgt werden. Dies geschieht durch Auswahl entsprechender Lager oder andere konstruktive Maßnahmen, die in der Regel nur Kräfte mit einem Richtungssinn aufnehmen können. Bei zwei Lagerungen dieser Art wird dann eines der beiden Lager als Festlager modelliert.
- ⇒ Abhängig vom Ziel der Berechnung, können auch komplizierte Gebilde durch einen starren Körper mit ein- und zweiwertigen Lagern modelliert werden. Ein stehendes Auto mit angezogener Handbremse (auf die Hinterräder wirkend) wird (zum Beispiel zur Berechnung der Achslasten) als starrer Körper angesehen, dessen Bewegungsmöglichkeiten durch ein Festlager und ein Loslager behindert sind. Die Gesamt-Gewichtskraft des Fahrzeugs muss im Schwerpunkt angetragen werden.

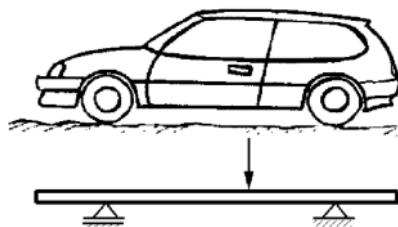


Abbildung 5.10: Kompliziertes Gebilde
→ einfaches Berechnungsmodell

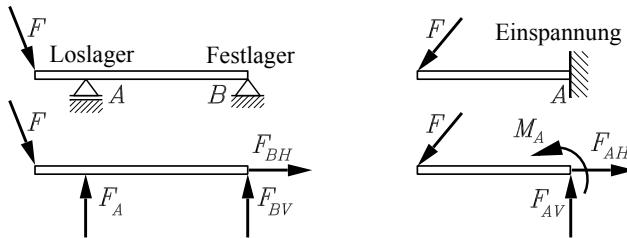


Abbildung 5.11: Typische Lagerungen eines starren Körpers in der Ebene (oben) und die zugehörigen Schnittskizzen zur Berechnung der Lagerreaktionen (unten)

Für die ein-, zwei- und dreiwertigen Lager werden (unabhängig von der technischen Realisierung) die in der **Abbildung 5.11** verwendeten Symbole vereinbart.

Die Kräfte und Momente, die von den Lagern auf den starren Körper aufgebracht werden (*Lagerreaktionen*), sind im Allgemeinen zunächst unbekannt und werden mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen berechnet. Dafür sollten unbedingt Schnittskizzen angefertigt werden, in denen die weggeschnittenen Lager durch die Lagerreaktionen ersetzt werden (siehe **Abbildung 5.11**).

Da der Richtungssinn der zu berechnenden Lagerreaktionen häufig nicht vorausgesagt werden kann, wird er willkürlich festgelegt (durch Einzeichnen der Pfeilspitzen in die Schnittskizze). Die Rechnung korrigiert die Annahme gegebenenfalls über das Vorzeichen des Ergebnisses.

5.3 Statisch bestimmte Lagerung

Wenn durch die Lagerung eines starren Körpers in der Ebene seine drei Bewegungsmöglichkeiten behindert werden, so bleibt er auch unter Belastung in Ruhe. Dafür ist mindestens eine der drei folgenden Kombinationen von Lagern erforderlich:

- Ein dreiwertiges Lager oder
- ein einwertiges und ein zweiwertiges Lager oder
- drei einwertige Lager.

Bei gegebener Belastung können für diese drei Kombinationen von Lagern für den starren Körper die Lagerreaktionen aus den drei Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Dieser Fall hat besondere praktische Bedeutung:

Ein Körper ist *statisch bestimmt gelagert*, wenn alle Lagerreaktionen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

Ist der starre Körper durch mehr als drei Bindungen gefesselt, so liegt ein *statisch unbestimmtes Problem* vor, das mit den für die Statik getroffenen Annahmen (starrer Körper) nicht zu lösen ist. Unter Einbeziehung der Verformbarkeit der Körper (wird in der Festigkeitslehre behandelt) können auch für statisch unbestimmt gelagerte Körper die Lagerreaktionen berechnet werden.

Beispiel 1:

Die in Abbildung 5.12 skizzierten Tragwerke mit statisch bestimmter Lagerung gestatten die Berechnung sämtlicher (drei) Lagerreaktionen ausschließlich über Gleichgewichtsbetrachtungen.

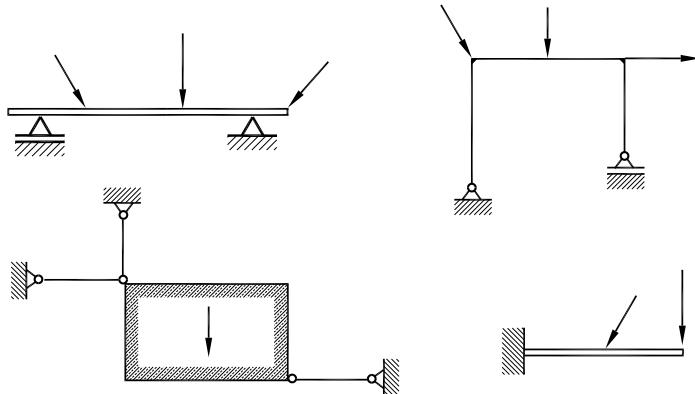


Abbildung 5.12: Beispiele statisch bestimmt gelagerter Tragwerke

Beispiel 2:

Tragwerke mit statisch unbestimmter (überbestimmter) Lagerung (Abbildung 5.13) können nicht mit den Mitteln der Statik allein berechnet werden:

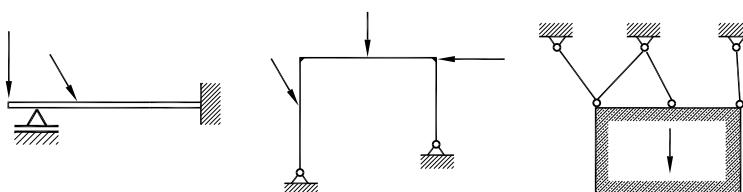


Abbildung 5.13: Beispiele statisch unbestimmt gelagerter Tragwerke

Beispiel 3:

Eine *statisch unterbestimmte Lagerung* (Abbildung 5.14) nimmt dem Körper nicht sämtliche Bewegungsmöglichkeiten:

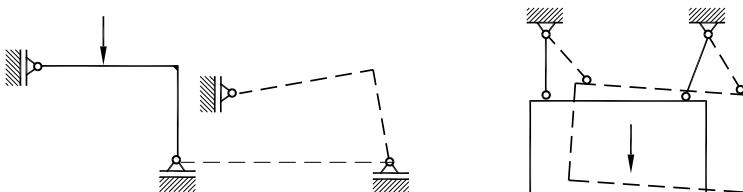


Abbildung 5.14: Statisch unbestimmte Lagerung. Mit den gestrichelt gezeichneten Lagen wird ange deutet, dass trotz der Lagerung eine Starrkörperbewegung möglich ist (Bewegung ohne Verformung).

Aus der Tatsache, dass eine der eingangs (auf Seite 52) genannten Lagerkombinationen (ein dreiwertiges, ein ein- und ein zweiwertiges oder drei einwertige Lager) den starren Körper bindet, kann noch nicht zwingend auf die statische Bestimmtheit der Lagerung geschlossen werden (drei Bindungen sind dafür notwendige, nicht auch hinreichende Bedingung, siehe nachfolgendes Beispiel).

Beispiel 4:

Es ist sofort zu sehen (**Abbildung 5.15**), dass der durch drei Loslager gebundene Träger sich noch horizontal bewegen kann. Die Kraft-Gleichgewichtsbedingung in horizontaler Richtung ist statisch nicht erfüllbar.

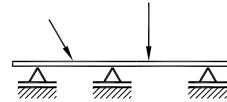


Abbildung 5.15: Drei einwertige Lager sind keine Garantie für statisch bestimmte Lagerung

Beispiel 5:

Schwieriger zu erkennen ist, dass dem durch ein Festlager und ein Loslager gefesselten Rahmen (**Abbildung 5.16**) noch eine (unendlich kleine) Rotation um den Punkt A möglich ist, weil keine der Lagerreaktionen ein Moment um diesen Punkt erzeugen kann. Aber auch dieser Sonderfall äußert sich durch unerfüllbare Gleichungen. Die Summe aller Momente um Punkt A z. B. führt auf

$$A \nabla F a = 0 \quad .$$

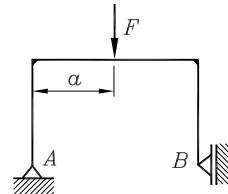


Abbildung 5.16: Schwierig zu erkennen: Statisch unbestimmtes System, weil unendlich kleine Drehungen um den Punkt A möglich sind

Der statisch bestimmt gelagerte Körper ist in der technischen Praxis nicht etwa die zufällige Ausnahme (unter den unendlich vielen Möglichkeiten, einen Körper zu lagern). Zahlreiche Vorteile sprechen dafür, statisch bestimmte Lagerungen zu bevorzugen, z. B.:

- Die Lagerreaktionen statisch bestimmt gelageter Körper sind mit den Mitteln der Statik (und damit besonders einfach) zu berechnen.
- Fertigungsungenauigkeiten führen bei statisch bestimmter Lagerung weder zu Spannungen im Bauteil noch zu einem völlig veränderten Tragverhalten (dies demonstrieren die beiden nachfolgenden Beispiele).
- Thermische Dehnungen (z. B. durch Temperaturerhöhung) können sich bei statisch bestimmter Lagerung frei ausbilden und führen nicht zu inneren Spannungen im Bauteil (dies wird ausführlich im Abschnitt 14.3 behandelt).

Beispiel 6:

Der zweifach gelagerte gerade Träger der **Abbildung 5.17** stellt sich bei geringer Absenkung einer Stütze etwas schräg, was zu keiner nennenswerten Änderung der Lagerreaktionen führt, während der dreifach gelagerte Träger einer Stützenabsenkung nur durch Verbiegung (verbunden mit inneren Spannungen) folgen kann:

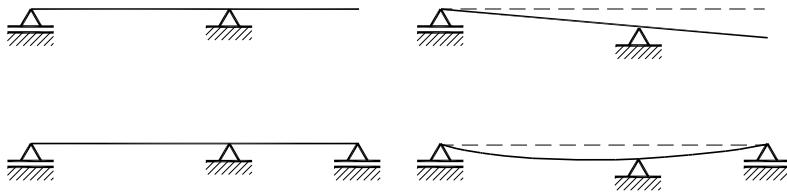
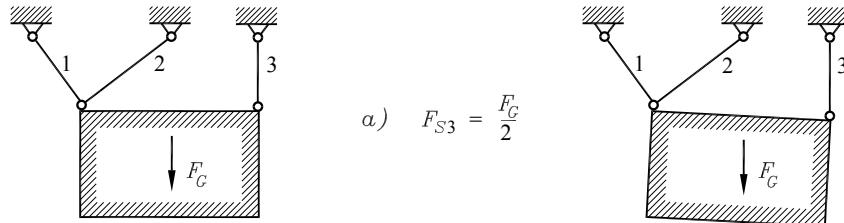


Abbildung 5.17: Fertigungsungenauigkeit bei statisch bestimmter Lagerung (oben) → kein Problem, bei statisch unbestimmter Lagerung (unten) → Verformung und innere Spannungen

Beispiel 7:

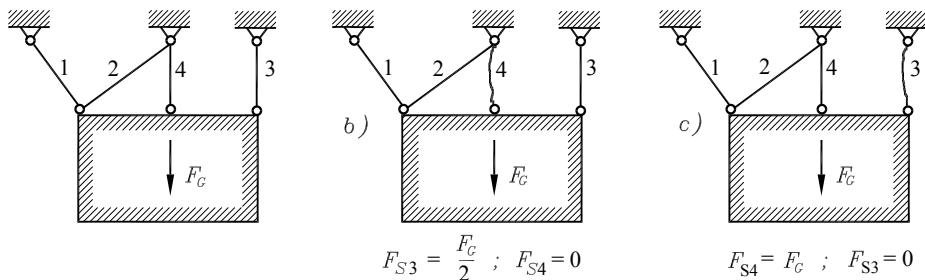
Ein an drei Seilen aufgehängter Körper (**Abbildung 5.18**) belastet die Seile eindeutig (z. B. errechnet man: $F_{S3} = \frac{F_G}{2}$). Die Seilkräfte ändern sich kaum, wenn eines der Seile etwas länger (oder kürzer) ist und der Körper etwas schräg hängt (in **Abbildung 5.18** als Fall *a* rechts dargestellt).



$$a) \quad F_{S3} = \frac{F_G}{2}$$

Abbildung 5.18: Statisch bestimmte Aufhängung: Die Seilkräfte sind weitgehend unabhängig von kleinen Ungenauigkeiten der Seillängen.

Durch Anbringen eines vierten Seiles (**Abbildung 5.19**) ändert sich das Tragverhalten grundlegend, wenn eines der Seile nicht exakt die vorgeschriebene Länge hat, weil der Körper der Längenänderung nicht durch Schrägstellung folgen kann, beispielsweise: Wenn Seil 4 etwas zu lang ist (Fall *b*), trägt es nicht mit, und die Seilkräfte 1 bis 3 haben die gleichen Werte wie im Fall *a*. Ist dagegen Seil 3 etwas zu lang (Fall *c*), muss Seil 4 die gesamte Gewichtskraft aufnehmen:



$$F_{S3} = \frac{F_G}{2} ; \quad F_{S4} = 0$$

$$F_{S4} = F_G ; \quad F_{S3} = 0$$

Abbildung 5.19: Statisch unbestimmte Aufhängung: Keine (Fall *b*) bzw. drastische Änderung (Fall *c*) der Seilkräfte (im Vergleich mit der Aufhängung an drei Seilen) bei kleinen Ungenauigkeiten der Seillängen.

Beispiel 8:

Wenn zwei Menschen einen Gegenstand (z. B. eine Leiter, Abbildung 5.20) tragen, hat jeder eindeutig eine anteilige Last zu bewältigen. Ein dritter „Träger“ könnte schummeln (oder es schummeln sogar zwei auf Kosten des dritten).

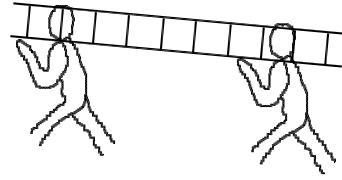


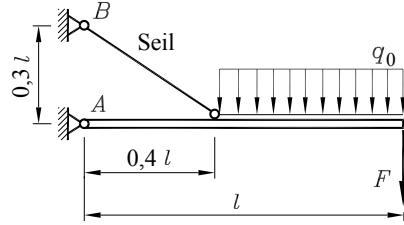
Abbildung 5.20: Eindeutige Lastverteilung

Beispiel 9:

Der skizzierte gerade Träger ist durch die Linienlast q_0 und die Einzelkraft F belastet. Er ist bei A gelenkig gelagert und wird zusätzlich durch ein Seil gehalten.

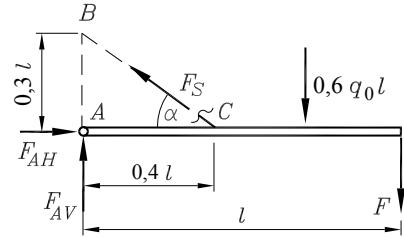
Gegeben: $l, q_0, F = 3q_0 l$.

Man berechne die Lagerreaktionen bei A und die Seilkraft.



Nach dem Freischneiden des Trägers können die Unbekannten z. B. durch Momenten-Gleichgewicht um die Punkte A , B und C unabhängig voneinander berechnet und könnten durch eine weitere Gleichgewichtsbeziehung (z. B.: Summe aller Vertikalkräfte) kontrolliert werden:

$$\begin{aligned} A\vartheta \quad & q_0 \cdot 0,6l \cdot 0,7l + Fl - F_S \cdot 0,4l \sin \alpha = 0 \\ B\vartheta \quad & q_0 \cdot 0,6l \cdot 0,7l + Fl - F_{AH} \cdot 0,3l = 0 \\ C\vartheta \quad & q_0 \cdot 0,6l \cdot 0,3l + F \cdot 0,6l + F_{AV} \cdot 0,4l = 0 \end{aligned}$$



Die benötigte Winkelfunktion kann unmittelbar aus der Geometrie abgelesen werden:

$$\sin \alpha = \frac{0,3l}{\sqrt{0,09l^2 + 0,16l^2}} = \frac{3}{5},$$

und aus den Momenten-Gleichungen ergeben sich die gesuchten Kräfte:

$$F_S = 14,25 q_0 l \quad ; \quad F_{AH} = 11,4 q_0 l \quad ; \quad F_{AV} = -4,95 q_0 l \quad .$$

Beispiel 10:

Das in Abbildung 5.21 skizzierte Modell eines Krans ist durch seine Eigengewichtskraft F_K und die Last F_G belastet. Es ist bei A durch ein Festlager, bei B durch ein Loslager abgestützt. Das Seil, an dem die Last F_G hängt, ist im Fall a am Kran befestigt, im Fall b außerhalb des Krans am Boden (technische Realisierung z. B.: Die Winde, die die Last hebt, befindet sich im Kran bzw. außerhalb des Krans).

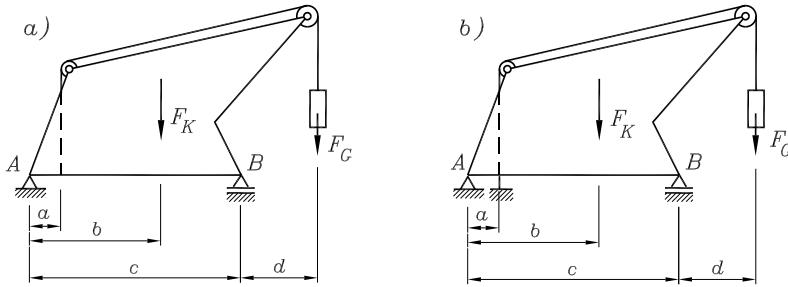


Abbildung 5.21: Modell eines Krans mit unterschiedlicher Befestigung der Last

Gegeben: $F_K = 2\text{ kN}$; $F_G = 1\text{ kN}$; $a = 0,2c$; $b = 0,7c$; $d = 0,5c$.

Man bestimme für beide Varianten die Lagerreaktionen bei A und B.

Die unterschiedlichen Befestigungen des Seils zwingen zu unterschiedlichen Schnittführungen (**Abbildung 5.22**). Um ein „von äußeren Bindungen freies System“ zu erreichen, muss bei der Variante a) das Seil überhaupt nicht geschnitten werden. Bei der Variante b) dagegen muss auch das Seil von der Unterlage gelöst werden, so dass eine zusätzliche Belastung durch $F_S = F_G$ entsteht.

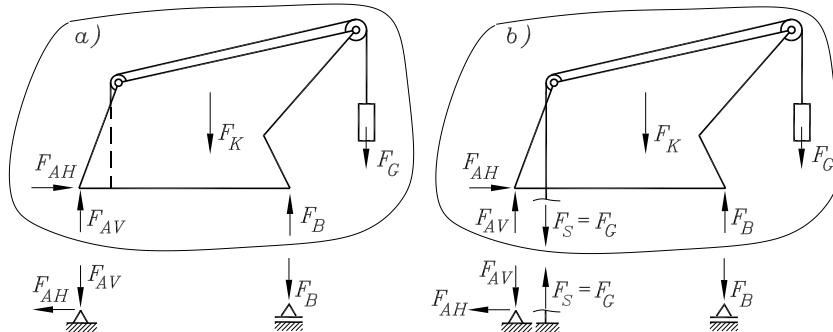


Abbildung 5.22: In Abhängigkeit von der Befestigung des Seils muss unterschiedlich geschnitten werden.

Die Auflagerreaktionen ergeben sich unmittelbar aus den Momenten-Gleichgewichtsbeziehungen um die Punkte A und B und das Kräfte-Gleichgewicht in horizontaler Richtung.

	$A \varnothing \quad F_K b + F_G(c + d) - F_B c = 0$	$\rightarrow \quad F_B = 2,9\text{ kN}$
Fall a	$B \varnothing \quad F_{AV}c - F_K(c - b) + F_G d = 0$	$\rightarrow \quad F_{AV} = 0,1\text{ kN}$
	\rightarrow	$\rightarrow \quad F_{AH} = 0$
	$A \varnothing \quad F_K b + F_G(a + c + d) - F_B c = 0$	$\rightarrow \quad F_B = 3,1\text{ kN}$
Fall b	$B \varnothing \quad F_{AV}c + F_G(d - c + a) - F_K(c - b) = 0$	$\rightarrow \quad F_{AV} = 0,9\text{ kN}$
	\rightarrow	$\rightarrow \quad F_{AH} = 0$

Beispiel 11:

Ein Motor und eine Arbeitsmaschine sind auf einem gemeinsamen Fundament (Fundamentmasse: m_F) gelagert und belasten dieses durch die Momente M_1 und M_2 und die Gewichtskräfte ihrer Massen m_1 und m_2 .

$$\begin{aligned} \text{Gegeben: } & \alpha = 45^\circ \quad ; \quad \beta = 20^\circ \quad ; \\ & m_2 = 2m_1 \quad ; \quad m_F = 4m_1 \quad ; \\ & M_1 = m_1 g a \quad ; \quad M_2 = 3m_1 g a \quad . \end{aligned}$$

Gesucht: Kräfte in den Stäben 1, 2 und 3.

Die Angriffspunkte der Momente werden nicht benötigt, weil Momente am starren Körper in der Ebene beliebig verschoben und zusammengefasst werden können. Deshalb wurde in der Schnittskizze gleich die Differenz $M_1 - M_2$ eingetragen.

An dem freigeschnittenen System gelingt es nur mit Mühe, die Gleichgewichtsbeziehungen so aufzuschreiben, dass jeweils nur eine Unbekannte eingeht (man müsste die Schnittpunkte der Wirkungslinien von jeweils zwei Stabkräften ermitteln und diese als Momentenbezugspunkte wählen).

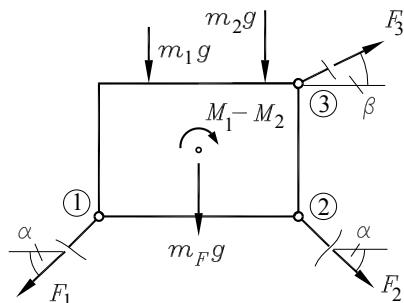
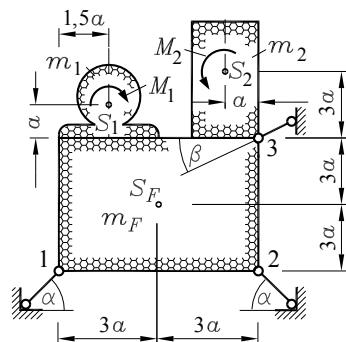
Da der dafür erforderliche Rechenaufwand nicht kleiner ist als das Auflösen gekoppelter linearer Gleichungen², werden die beiden Kraft-Gleichgewichtsbeziehungen in horizontaler und vertikaler Richtung und das Momenten-Gleichgewicht um den Befestigungspunkt des Stabes 2 formuliert. Für das Aufschreiben des Momenten-Gleichgewichts verschiebt man die Kräfte F_1 und F_3 bis in die Punkte ① bzw. ③ und zerlegt sie in zwei Komponenten, von denen jeweils nur eine einen Anteil liefert. Aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & F_3 \cos \beta + F_2 \cos \alpha - F_1 \cos \alpha = 0 \quad , \\ \uparrow \quad & F_3 \sin \beta - (F_1 + F_2) \sin \alpha - (m_1 + m_2 + m_F)g = 0 \quad , \\ \textcircled{2} \quad & F_3 4a \cos \beta - F_1 6a \sin \alpha - (4,5m_1 + m_2 + 3m_F)ga + M_1 - M_2 = 0 \end{aligned}$$

errechnet man z. B. durch Umstellen der ersten Gleichung nach F_2 , Einsetzen in die zweite Gleichung, die dann nach F_1 umgestellt und in die dritte Gleichung eingesetzt wird:

$$F_3 = \frac{1}{2} \frac{m_1 g \cot \alpha}{\cos \beta (3 - 4 \cot \alpha) + 3 \sin \beta \cot \alpha} = 5,789 m_1 g$$

und damit: $F_1 = 0,297 m_1 g \quad ; \quad F_2 = -7,396 m_1 g \quad .$



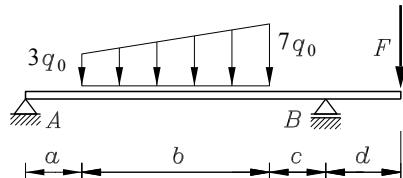
²Auch wenn die Lösung „von Hand“ für dieses Problem durchaus noch zumutbar ist, soll schon hier auf Abschnitt 6.3 (Lineare Gleichungssysteme) verwiesen werden. Unter www.TM-aktuell.de findet man außerdem die Lösung des Gleichungssystems für das hier behandelte Beispiel 11 mit Hilfe unterschiedlicher Software-Produkte.

5.4 Aufgaben

Aufgabe 5.1:

Für den skizzierten Träger sind die Lagerreaktionen bei A und B zu ermitteln.

Gegeben: $a = 220 \text{ mm}$; $b = 800 \text{ mm}$;
 $c = 210 \text{ mm}$; $d = 270 \text{ mm}$;
 $q_0 = 1 \text{ N/mm}$; $F = 2 \text{ kN}$.

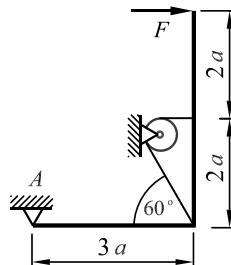


Aufgabe 5.2:

Der skizzierte Hebel ist bei A gelenkig gelagert und wird zusätzlich durch ein über eine Umlenkrolle geführtes Seil gehalten (die Hinweise auf Seite 60 können sicher hilfreich sein).

Gegeben: a , F .

Gesucht: Komponenten der Lagerkraft bei A.

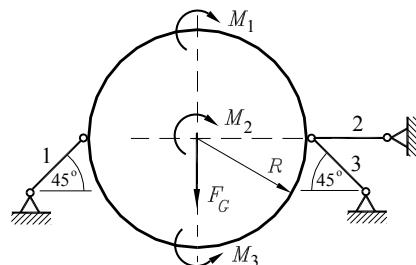


Aufgabe 5.3:

Eine starre Kreisscheibe ist durch ihre im Mittelpunkt angreifende Eigengewichtskraft und die Momente M_1 , M_2 und M_3 belastet.

Gegeben: $M_1 = 120 \text{ Nm}$; $M_2 = 180 \text{ Nm}$;
 $M_3 = 200 \text{ Nm}$; $F_G = 200 \text{ N}$;
 $R = 0,3 \text{ m}$.

Gesucht: Stabkräfte in den Stäben 1, 2 und 3.



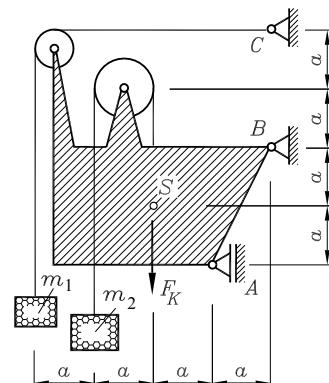
Aufgabe 5.4:

Das skizzierte statische Modell eines Hubwerks ist durch seine Eigengewichtskraft F_K und die Massen m_1 und m_2 belastet.

Die Masse m_2 hängt an einem Seil, das am Hubwerk befestigt ist, m_1 ist über ein Seil an einer Wand außerhalb des Hubwerks befestigt.

Gegeben: $F_K = 3 \text{ kN}$;
 $m_1 = 50 \text{ kg}$; $m_2 = 150 \text{ kg}$.

Gesucht: Lagerreaktionen bei A und B.



Lieber Leser, das war ein ganz wichtiges Kapitel, hoffentlich haben Sie es bemerkt. Mit dem Verständnis des gerade behandelten Stoffs (und besonders der Beispiele und Aufgaben) entscheidet sich für den Anfänger nach der Erfahrung der Autoren der zukünftige Erfolg (bzw. Misserfolg) im Umgang mit der Technischen Mechanik.

Das Problem besteht nicht in dem durch die Kapitelüberschrift vorgegebenen Thema (die Theorie zum *Gleichgewicht des ebenen Kraftsystems* wurde schließlich komplett auf der einen Seite 47 behandelt), es sind die daraus zu ziehenden Schlussfolgerungen und das Zusammenspiel der Theorie mit dem bereits in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Stoff. Die Vorteile statisch bestimmter Systeme sollten Ihnen deutlich geworden sein. Dieses Thema wird allerdings im folgenden Kapitel noch einmal ausführlich aufgegriffen.

Viel wichtiger ist das Verständnis für die Anwendung des Schnittprinzips, unabdingbare Voraussetzung auch für die Lösung der vier Aufgaben dieses Abschnitts. Es gibt ein ausführlich kommentiertes Beispiel zu diesem Thema im Internet unter www.TM-aktuell.de. Auf die wichtigsten Besonderheiten wird nachfolgend noch einmal hingewiesen werden.



⇒ Bei der Lösung der Aufgabe 5.1 schneidet man einfach die beiden Lager weg, trägt die insgesamt drei Komponenten der Lagerreaktionen an und schreibt die drei Gleichgewichtsbedingungen auf. Bei der Aufgabe 5.3 dagegen bringt das Wegschneiden der drei Festlager keinen Erfolg, denn dann hat man insgesamt sechs Unbekannte. Hier muss man durch die Stäbe schneiden, um nur drei unbekannte Stabkräfte zu bekommen.

Beides wurde im Beispiel 9 demonstriert, wo das mit dem starren Körper verbundene Festlager A weggeschnitten wurde, zum anderen wurde das Seil geschnitten (und nicht etwa das Festlager B gelöst), so dass sich 3 Unbekannte ergaben.

⇒ Um zielführende Schnitte für die Aufgaben 5.2 und 5.4 zu finden, muss man das Beispiel 10 verstanden haben. Weil dieses Beispiel exemplarischen Charakter hat, wurde auf Seite 57 eine „komplette“ Schnittskizze angegeben (dies ist nicht üblich und wird auch bei folgenden Aufgaben nicht mehr praktiziert). Man sieht nicht nur die freigeschnittenen Systeme, sondern auch die weggeschnittenen Lager, an denen die Lagerreaktionen mit jeweils umgekehrtem Richtungssinn als Lagerkräfte wirken. So wird deutlich, dass die Seilkraft als Belastung des Systems ein geht, wenn das Seil „an der Außenwelt“ befestigt ist.

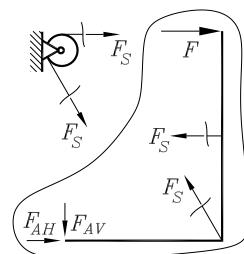


Abbildung 5.23: Schnittskizze für die Aufgabe 5.2

- ⇒ Feste Rollen lenken Seilkräfte nur um. Deshalb ist die Seilkraft F_S im Beispiel 10 gleich der Gewichtskraft F_G , und die Schnittskizze für Aufgabe 5.2 (**Abbildung 5.23**) zeigt, dass am starren Körper die Seilkraft F_S zweimal in gleicher Größe angetragen werden muss.
- ⇒ Die immer wieder auftauchende Frage, ob man denn nicht auch beim Fall a des Beispiels 10 das Seil zerschneiden könnte, kann durchaus mit „Ja“ beantwortet werden. Allerdings muss man dann auch die (gleich große) Gegenkraft antragen, und dann wirken am Kran zwei Kräfte F_S , die im Gleichgewicht sind und summarisch also keine Wirkung haben.

6 Ebene Systeme starrer Körper

6.1 Statisch bestimmte Systeme

Den erheblichen Vorteilen statisch bestimmter Lagerung steht oft der Nachteil gegenüber, nur eine sehr begrenzte Anzahl von Lagern anbringen zu können. Wie dieser Mangel behoben werden kann, soll zunächst an einem Beispiel erläutert werden.

Beispiel 1: Bei einer statisch bestimmt gelagerten Brücke größerer Spannweite soll durch Anbringen einer zusätzlichen Stütze die Tragfähigkeit erhöht werden. Natürlich scheidet die in **Abbildung 6.1** gestrichelt eingezeichnete Variante eines dritten Lagers aus, weil die Lagerung dann statisch unbestimmt wäre (jede geringfügige Absenkung einer Stütze würde das Tragverhalten grundsätzlich verändern).

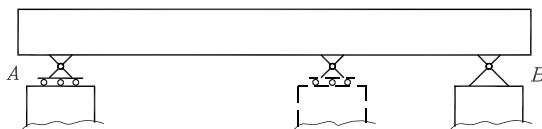


Abbildung 6.1: Das Anbringen einer zusätzlichen (gestrichelt gezeichneten) Stütze würde zu einer statisch unbestimmten Lagerung führen und verbietet dich deshalb.

Wenn man nun zwei Brückenteile baut (**Abbildung 6.2**), das rechte Teilstück bei B und C lagert und für das linke Teilstück eine zusätzliche Stütze G vorsieht, entstehen zwei statisch bestimmt gelagerte Teilsysteme.

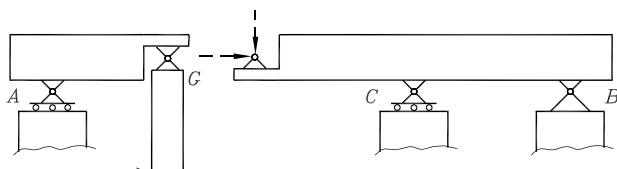


Abbildung 6.2: Zwei jeweils statisch bestimmt gelagerte Teilbrücken.

Es ist sicher einzusehen, dass die Teilsysteme auch dann noch statisch bestimmt gelagert sind, wenn der linke Teil nicht mehr auf der Zusatzstütze, sondern auf einem auf dem rechten Teil angebrachten Festlager (in der **Abbildung 6.2** bereits eingezeichnet) gestützt wird, denn

- für den linken Teil ändert sich damit nichts und

- der rechte Brückenteil wird zwar durch zusätzliche Kräfte bei G belastet (in der **Abbildung 6.2** bereits gestrichelt angedeutet), aber zusätzliche Kräfte ändern an der statischen Bestimmtheit nichts, da diese nur durch die Lagerung beeinflusst wird.

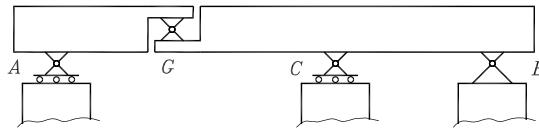


Abbildung 6.3: Eine Brücke mit drei Stützen und einem Gelenk ist ein statisch bestimmt gelagertes System.

Fazit: Das in der **Abbildung 6.3** dargestellte Gesamtsystem mit einem Festlager, zwei Loslagern und dem *Gelenk G* ist statisch bestimmt.

Träger auf mehreren Stützen, die durch Einfügen von Gelenken zu statisch bestimmten Trägern wurden, werden *Gerber-Träger* genannt (nach G. H. GERBER, 1832 - 1912, auf den diese Idee zurückgeht).

Gerber-Träger haben alle im Abschnitt 5.3 diskutierten Vorteile. An dem in **Abbildung 6.3** skizzierten Beispiel wird deutlich, dass z. B. eine Absenkung der Mittelstütze nicht zu einer Verbiegung der Träger führt, weil die beiden Trägerteile der Absenkung folgen können, indem sie eine etwas schräge Lage einnehmen.

Es ist üblich, einen Gerber-Träger mit Hilfe der bereits vereinbarten Lagersymbole und einem kleinen Kreis als Symbol für ein Gelenk darzustellen (**Abbildung 6.4**).

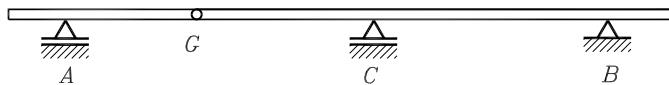


Abbildung 6.4: Symbolische Darstellung eines Gerber-Trägers

Natürlich können auch mehrere zusätzliche Lager durch weitere Gelenke ausgeglichen werden. Die beiden in der **Abbildung 6.5** skizzierten Systeme sind wie das bereits betrachtete Beispiel statisch bestimmte Tragwerke.

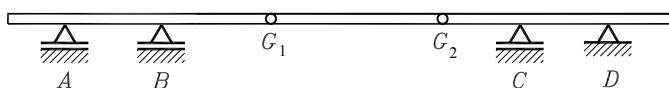
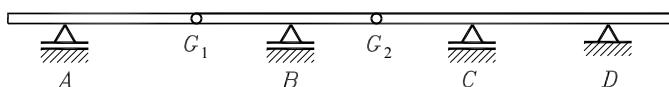


Abbildung 6.5: Zwei Varianten von Gerber-Trägern: Das unten zu sehende Beispiel hat im Brückenbau den Vorteil, dass das Mittelstück erst am Ende der Bauarbeiten eingehängt werden muss.

Der Gerber-Träger ist ein einfaches Beispiel für ein *System starrer Körper*. Die einzelnen Teile eines Starrkörpersystems können im Allgemeinen auf unterschiedlichste Weise angeordnet sein (die Art ihrer Anordnung wird meist von der Funktion des Bauteils bestimmt, zwei Beispiele zeigt Abbildung 6.6).

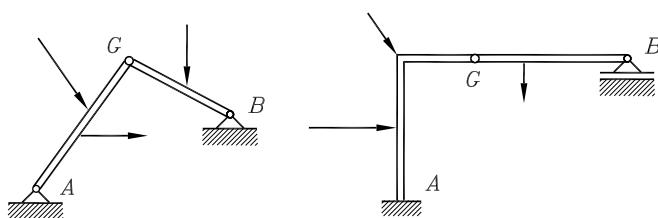


Abbildung 6.6: Beispiele für Systeme starrer Körper

Fast immer aber spielt das Gelenk als Verbindungselement eine wesentliche Rolle, häufig (z. B. im Maschinenbau) auch aus funktionalen Gründen.

Zur Berechnung der Lagerreaktionen von Starrkörpersystemen ist die Betrachtung des Gesamtsystems (Lösen von den Lagern und Antragen der Lagerreaktionen) im Allgemeinen nicht ausreichend: Den drei Gleichgewichtsbedingungen stehen mehr als drei unbekannte Lagerreaktionen gegenüber. Es soll jedoch schon hier ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die so zu gewinnenden drei Gleichungen richtig (und bei vielen Aufgaben auch nützlich) sind. Man kann nur allein aus diesen Gleichungen nicht sämtliche Lagerreaktionen ermitteln.

An dem einleitenden Beispiel 1 eines einfachen Gerber-Trägers wurde deutlich, dass man ein Gelenk als ein an einem Teil angebrachtes Festlager auffassen kann, auf dem ein anderer Teil gelagert ist. Ein Gelenk kann also wie ein Festlager zwei Kraftkomponenten übertragen. Aus dieser Tatsache ergibt sich folgende

Strategie für die Berechnung von Gelenksystemen:

Das System wird von allen äußeren Bindungen (Lagern) gelöst (Freischneiden) und zusätzlich an den Gelenken zerschnitten, so dass mehrere Teilsysteme entstehen. An den beiden Schnittufern eines zerschnittenen Gelenks werden jeweils zwei Kraftkomponenten angetragen (gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet: Schnittprinzip!). Danach können für jedes Teilsystem drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden.

Zu den unbekannten Lagerreaktionen kommen für jedes zerschnittene Gelenk noch zwei unbekannte Gelenkkraftkomponenten hinzu, für die nun aber auch eine größere Anzahl von Gleichungen zur Verfügung steht. Ein solches System kann nur statisch bestimmt sein, wenn die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt.

Notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit von Gelenksystemen:

Gesamtanzahl der Gelenkkräfte (zwei pro Gelenk)

+

Gesamtanzahl der Lagerreaktionen

=

Gesamtanzahl der Gleichgewichtsbedingungen (drei pro Teilsystem)

Diese Bedingung ist für alle bisher betrachteten Systeme erfüllt. Es ist eine *notwendige Bedingung* (wenn sie nicht erfüllt ist, kann das System nicht statisch bestimmt sein), sie ist aber *nicht hinreichend*.

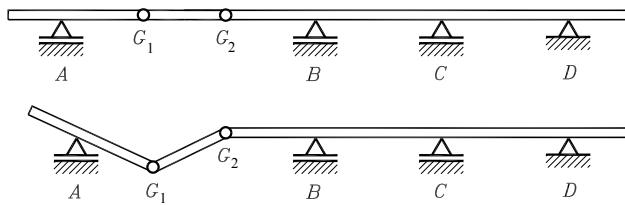


Abbildung 6.7: Ein Gerber-Träger, der die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit erfüllt, ist durchaus nicht immer tragfähig.

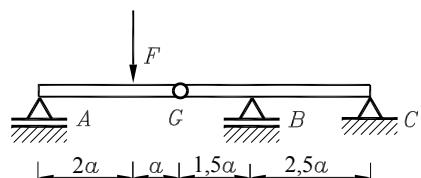
Für den in **Abbildung 6.7** oben skizzierten Gerber-Träger ist die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit erfüllt, dieses Gelenksystem ist aber als Tragwerk untauglich. Das rechte Teilsystem ist statisch unbestimmt gelagert (als starrer Körper kann es zum Beispiel einer Stützenabsenkung nicht folgen), während die beiden linken Teile statisch unterbestimmt gelagert (und damit als Starrkörper beweglich) sind. Schon durch sein Eigengewicht würde ein solches Gelenksystem als Tragwerk versagen.

Es kommt also (wie beim einzelnen starren Körper) nicht nur auf die Anzahl der Bindungen an. Die Sonderfälle, bei denen trotz Erfüllung des notwendigen Kriteriums (gleiche Anzahl unbekannter Kräfte und Gleichgewichtsbedingungen) das System nicht statisch bestimmt ist, äußern sich durch Widersprüche in den Gleichungen. Diese Aussage ist leider nicht umkehrbar: Die meisten Widersprüche in Gleichgewichtsbedingungen werden nicht vom mechanischen System, sondern von dem, der es berechnen will, verursacht.

Hinweis zur Wortwahl: Bei Aufgabenstellungen der Praxis sind häufig Lager- oder Gelenkkräfte vorgegeben und gefragt sind zulässige Belastungen oder Abmessungen, so dass die vorgegebenen Werte nicht überschritten werden. Es ist deshalb nicht ganz korrekt, von den „unbekannten Lager- und Gelenkkräften“ zu reden, genauer ist die dafür übliche Bezeichnung *Zwangskräfte*. Für denjenigen, dem die hier angestellten Überlegungen neu sind, ist aber sicher die „nicht ganz saubere“ Bezeichnungsweise zunächst verständlicher.

Beispiel 2: Für den skizzierten einfachen Gerber-Träger sind die Lager- und Gelenkkräfte zu bestimmen.

Gegeben: F .



Das System wird von den Lagern gelöst und am Gelenk G zerschnitten. Es entstehen die beiden Teilsysteme I und II mit insgesamt 6 unbekannten Kräften. Der Richtungssinn der Kräfte kann beliebig angenommen werden, es ist aber unbedingt darauf zu achten, dass die beiden Komponenten der Gelenkkraft F_{GH} und F_{GV} an den beiden Schnittufern des Gelenks (in den Teilsystemen I und II) in entgegengesetzte Richtungen angetragen werden müssen (Schnittprinzip!).

An jedem Teilsystem können 3 Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden, so dass 6 Gleichungen für die Berechnung der 6 Unbekannten zur Verfügung stehen. Gewählt werden jeweils das Kraft-Gleichgewicht in horizontaler Richtung und zwei Momentengleichgewichtsbedingungen, so dass am System I (mit 3 Unbekannten) die Lagerkraft F_A und die beiden Gelenkkraftkomponenten sofort zu bestimmen sind. Am Teilsystem II (mit zunächst 5 Unbekannten) sind dann die beiden Gelenkkräfte bereits bekannt, und die restlichen Lagerreaktionen sind leicht zu ermitteln:

$$\begin{array}{llll}
 \rightarrow & F_{GH} = 0 & \Rightarrow & F_{GH} = 0 \\
 I: \quad A\varnothing & F \cdot 2a - F_{GV} \cdot 3a = 0 & \Rightarrow & F_{GV} = \frac{2}{3}F \\
 G\varnothing & F_A \cdot 3a - F \cdot a = 0 & \Rightarrow & F_A = \frac{1}{3}F \\
 \leftarrow & F_{GH} + F_{CH} = 0 & \Rightarrow & F_{CH} = 0 \\
 II: \quad C\varnothing & F_B \cdot 2,5a - F_{GV} \cdot 4a = 0 & \Rightarrow & F_B = \frac{16}{15}F \\
 B \Leftarrow & F_{GV} \cdot 1,5a + F_{CV} \cdot 2,5a = 0 & \Rightarrow & F_{CV} = -\frac{2}{5}F
 \end{array}$$

Das Minuszeichen im Ergebnis für F_{CV} deutet an, dass diese Kraft (im Gegensatz zur willkürlichen Annahme) nach unten gerichtet ist.

Beispiel 3:

Als statisches Modell für die Berechnung von Achslasten und der Belastung der Kupplung dient für den in der Abbildung 6.8 skizzierten Pkw mit einachsigem Anhänger der Gerber-Träger. Das System ist statisch bestimmt, wenn die auf die Hinterräder wirkende Handbremse angezogen ist, wodurch eines der drei Lager zum Festlager wird (auf die Achslasten, die nur durch vertikal gerichtete Kräfte verursacht werden, hat dies ohnehin keinen Einfluss).

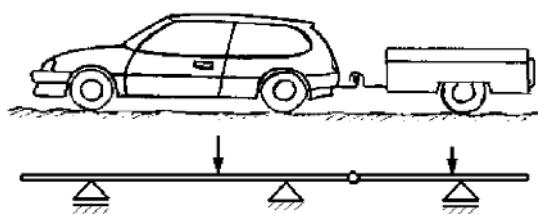
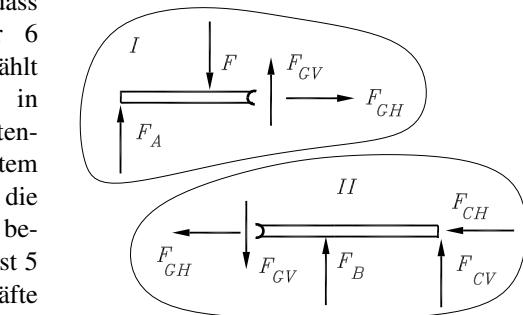


Abbildung 6.8: Gerber-Träger als statisches Modell für die Berechnung von Achslasten und Belastung der Anhänger-Kupplung

Die Betrachtung beschränkt sich in diesem Kapitel natürlich auf das ebene Problem, womit Achslasten (und nicht die Kräfte an einem Rad) berechnet werden können.

Beispiel 4:

Während ein zweiachsiges Fahrzeug statisch bestimmt gelagert ist, ist für die drei Achsen eines Gespanns (Beispiel 3) ein Gelenk erforderlich, um Fahrbahnunebenheiten auszugleichen. Für den Lkw mit einem zweiachsigen Anhänger (**Abbildung 6.9**) wird die statische Bestimmtheit erst durch zwei Gelenke hergestellt.

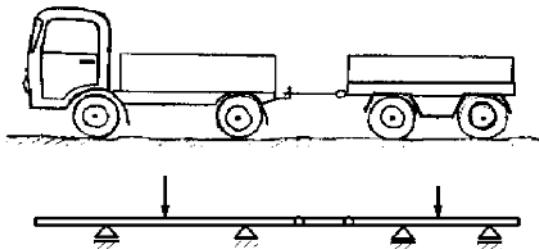


Abbildung 6.9: Vier Achsen erfordern zwei Gelenke, um Bodenunebenheiten auszugleichen.

Beispiel 5:

Schienenfahrwerke von Kranen und Förderanlagen werden häufig mit sehr vielen Rädern (manchmal mehr als 100 pro Schiene) ausgestattet, um die großen Lasten möglichst gleichmäßig zu verteilen. Das in **Abbildung 6.10** skizzierte statische Modell eines solchen Fahrwerks mit 8 Rädern verdeutlicht, wie die Last F jeweils über eine Traverse (gleichmäßig) auf zwei darunter liegende Traversen verteilt wird.

Für die Bestimmung der 12 Gelenkkraftkomponenten (6 Gelenke G_1 bis G_6) und 8 Lagerreaktionen (8 ungebremste Räder \rightarrow 8 Loslager) stehen an 7 Teilsystemen I bis VII insgesamt $7 \cdot 3 = 21$ Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung (eine mehr als erforderlich¹, weil das Modell in horizontaler Richtung beweglich ist).

Wegen der Symmetrie verteilt sich die Kraft F gleichmäßig (jeweils $\frac{F}{8}$) auf die Räder. Solche Fahrwerke werden deshalb gern mit einer Radanzahl ausgestattet, die eine Zweierpotenz ist, weil die Traversen dann die Kräfte über jeweils gleiche Abmessungen links und rechts in gleicher Größe übertragen.

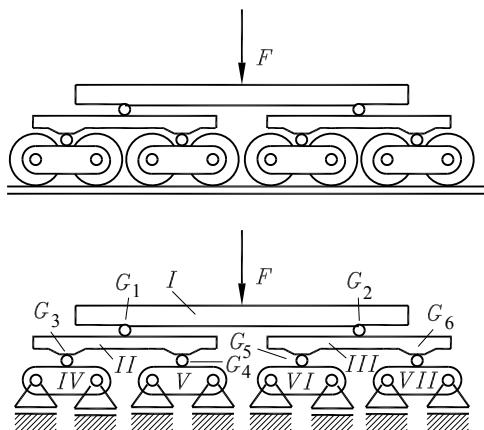


Abbildung 6.10: Die Last F wird über insgesamt 7 Traversen so verteilt, dass jedes Rad eine Kraft $F/8$ auf die Schiene überträgt.



Dass das Ziel, gleichen Lastanteil für jedes Rad zu erzielen, auch erreicht werden kann, wenn die Radanzahl keine Zweierpotenz ist, wird an einem Beispiel aus der Praxis im Internet gezeigt (www.TM-aktuell.de).

¹ Wenn formal die Anzahl verfügbarer Gleichgewichtsbedingungen größer ist als die Anzahl der Unbekannten, ändert sich an der statischen Bestimmtheit des Systems dann nichts, wenn die gleiche Anzahl von Gleichgewichtsbedingungen von vornherein erfüllt ist (hier ist es das Horizontalkraft-Gleichgewicht am Gesamtsystem). Dieser Fall wird am Beispiel 8 noch einmal ausführlich erläutert.

Beispiel 6:

Das in der Abbildung 6.11 skizzierte Modell des Zuggeschriffs für einen von zwei Pferden gezogenen Wagen demonstriert die mittels Gelenksystem erzwungene gleichmäßige Belastung (ähnlich dem Prinzip des Kranfahrwerks im Beispiel 5): Beide Pferde müssen exakt die gleiche Zugkraft aufbringen und jedes Pferd wird „symmetrisch“ belastet.

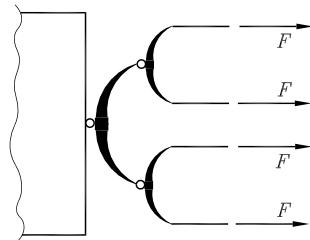


Abbildung 6.11: Zuggeschriff eines „Zweispänners“ in der Draufsicht

Beispiel 7:

Wellen, die mehr als zweifach gelagert werden müssen, sollten durch Gelenke geometrische Ausgleichsmöglichkeiten (von Montagegenauigkeiten, Verschleiß, ...) gegeben werden, dreifach gelagerten Wellen z. B. durch eine elastische Kupplung, vierfach gelagerten Wellen durch Zwischenschaltung einer Kardanwelle.

Dies ist aus konstruktiven Gründen nicht immer möglich. Die Kurbelwelle eines Sechszylinder-Kolbenmotors z. B. muss mehrfach gelagert werden, und ausgleichende Gelenke können nicht vorgesehen werden. In diesen Fällen sind die Anforderungen an die Fertigungsgenauigkeit extrem hoch.

Beispiel 8:

Die Abbildung 6.12 zeigt eine handelsübliche Gripzange. Die spezielle Konstruktion dieser Zange ermöglicht das Zusammenhalten von Montageteilen, ohne ständig äußere Kräfte aufbringen zu müssen. Diese Eigenschaft spielt aber für die hier anzustellenden Betrachtungen keine Rolle.

Die Zange ist durch die beiden Kräfte F belastet. Man bestimme für die in der Darstellung angegebenen Abmessungen die Kraft F_W , die auf das Werkstück aufgebracht wird.

Gegeben: F .

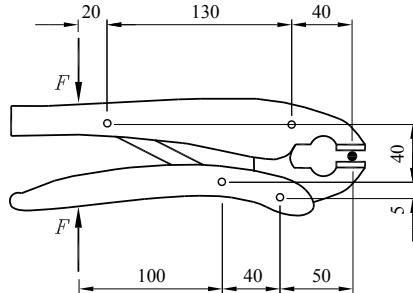


Abbildung 6.12: Handelsübliche Gripzange

- Bei der Untersuchung der statischen Bestimmtheit der Zange stellt man fest, dass für die vier Teile der Zange (siehe Schnittskizze in Abbildung 6.13) insgesamt zwölf Gleichgewichtsbeziehungen aufgeschrieben werden können, denen nur neun Unbekannte (8 Gelenkkraftkomponenten an vier Gelenken und die gesuchte Kraft F_W) gegenüberstehen. Das liegt daran, dass die Zange selbst nicht gelagert ist (also in der Ebene noch drei Freiheitsgrade hat). In der Aufgabenstellung ist dies bereits berücksichtigt, da die beiden Kräfte, die die Zange belasten, ein Gleichgewichtssystem bilden: Die drei Gleichgewichtsbeziehungen am Gesamtsystem sind bereits erfüllt.

Wenn man die Aufgabe abändert, indem man eine der beiden Kräfte durch eine Einspannung (mit drei unbekannten Lagerreaktionen) ersetzt, wäre das Defizit an Unbekannten beseitigt (siehe **Abbildungen 6.17 und 6.18** auf der Seite 79). Als Ergebnis dieser Aufgabe würde man als vertikale Lagerreaktion wieder F erhalten, während die beiden übrigen Lagerreaktionen (Horizontalkomponente und Einspannmoment) gleich Null wären.

- Mit einem Geschick lässt es sich vermeiden, dass bei der Berechnung der Zange sämtliche neun Unbekannten in die Rechnung eingehen. Es kommt darauf an, einen Satz von Gleichgewichtsbedingungen zu finden, so dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt. Vier Gleichungen mit vier Unbekannten sind nach dem bisher behandelten Berechnungsverfahren möglich, im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass sogar zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten genügen.

Mit dem Momentengleichgewicht um das Gelenk 3 des Teilsystems I

$$130F_{1V} - 150F - 40F_W = 0 ,$$

dem Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung am Teilsystem II

$$F_{2V} - F_{1V} = 0 ,$$

dem Momentengleichgewicht um das Gelenk 1 am Teilsystem II

$$40F_{2H} - 80F_{2V} = 0$$

und dem Momentengleichgewicht um das Gelenk 4 des Teilsystems III

$$140F + 5F_{2H} - 40F_{2V} = 0$$

stehen 4 Gleichungen mit 4 unbekannten Kräften zur Verfügung.

Die nicht gefragten Kräfte F_{1V} , F_{2V} und F_{2H} werden eliminiert, indem sie aus den letzten drei Gleichungen (in Abhängigkeit von F) berechnet und in die erste Gleichung eingesetzt werden. Man erhält für die auf das Werkstück ausgeübte Kraft

$$F_W = 11,4F .$$

Dieses Beispiel mag schwierig erscheinen. Deshalb wird es noch mehrmals aufgegriffen, um einerseits mit dem vorteilhaften Ausnutzen der Eigenschaften eines speziellen Teils der Zange die Rechnung erheblich zu vereinfachen, andererseits eine Strategie vorzustellen, um für Aufgaben dieser Art eine möglichst sichere Lösung mit dem Computer zu erreichen.

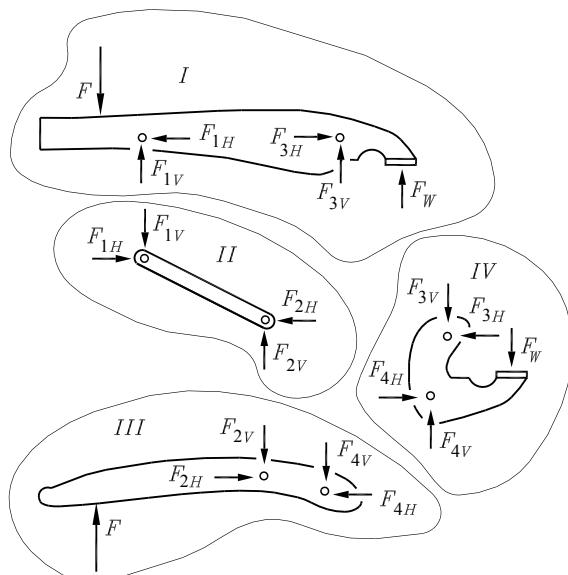


Abbildung 6.13: An allen Gelenken der Gripzange werden Schnitte gelegt, so dass vier Teilsysteme entstehen.

Beispiel 9:

Das skizzierte zusammengesetzte System ist durch die Gewichtskraft F_G der an einem Seil hängenden Masse belastet. Man ermittle die Lagerreaktionen bei A und B und die Gelenkkraftkomponenten am Gelenk G.

Gegeben: a , F_G .

Um bei dieser Aufgabe die Teilsysteme freizuschneiden, muss auch das Seil geschnitten werden. Da eine Rolle eine Kraft nur umlenkt, wird als Seilkraft auch im horizontalen Teil des Seils die Gewichtskraft F_G angesetzt. Man könnte natürlich auch die Rolle selbst noch freischneiden (Schneiden im Lagerzapfen, einem „Gelenk“). Das Momentengleichgewicht um den Rollenmittelpunkt würde dann auch die Seilkraft $F_S = F_G$ ergeben.

Bei ungeschickter Auswahl der sechs Gleichgewichtsbeziehungen an den Teilsystemen I und II kann das Auflösen der Gleichungen aufwendig werden. Deshalb gilt folgende Empfehlung für Systeme mit zwei Festlagern und einem Gelenk (so genannten Dreigelenksystemen): Man schreibt zunächst die Momentengleichgewichtsbedingungen um die Lager A und B (an den beiden Teilsystemen) auf und erhält ein Gleichungssystem mit nur zwei Unbekannten, aus dem die Gelenkkraftkomponenten berechnet werden können. Hier errechnet man aus

$$I : B \rightarrow F_G \cdot 6a - F_G \cdot 3a + F_{GV} \cdot 2a - F_{GH} \cdot 2a = 0,$$

$$II : A \rightarrow F_G \cdot a - F_{GH} \cdot 5a - F_{GV} \cdot 3a = 0$$

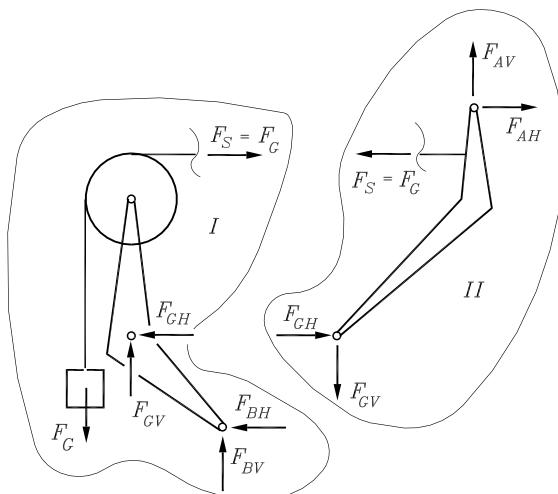
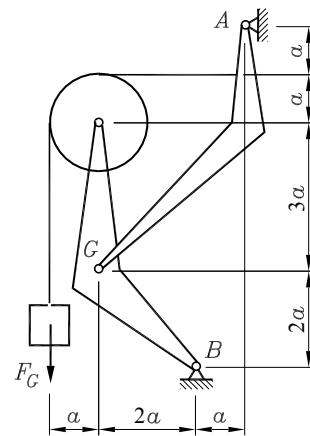
die Gelenkkraftkomponenten

$$F_{GH} = \frac{11}{16} F_G, \quad F_{GV} = -\frac{13}{16} F_G$$

und aus den Kraft-Gleichgewichtsbedingungen die Lagerreaktionen

$$F_{AH} = \frac{5}{16} F_G, \quad F_{AV} = -\frac{13}{16} F_G, \quad F_{BH} = \frac{5}{16} F_G, \quad F_{BV} = \frac{29}{16} F_G.$$

Zum extrem wichtigen Thema „Anwendung des Schnittprinzips bei Systemen starrer Körper“ findet man unter www.TM-aktuell.de ein ausführlich kommentiertes Beispiel.



6.2 Stäbe und Seile als Verbindungselemente

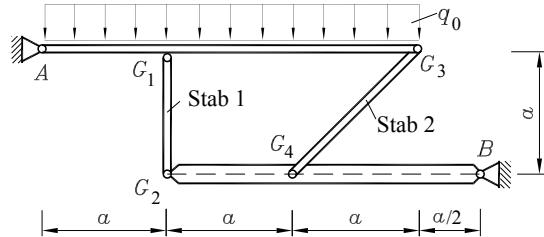
Definition:

Ein *Stab* ist in einem System starrer Körper mit genau zwei Gelenken mit den anderen Teilen des Systems verbunden. Nur über diese Gelenke werden Kräfte in den Stab eingeleitet.

Beispiel 1:

Für das zusammengesetzte System, das zwei Stäbe als Verbindungelemente enthält, sind die Lagerreaktionen in den Lagern *A* und *B* zu ermitteln.

Gegeben: a , q_0 .



Für die Berechnung der 12 unbekannten Lager- und Gelenkkräfte (4 Lagerreaktionen der beiden Festlager, 8 Gelenkkraftkomponenten in den 4 Gelenken) stehen bei 4 Teilsystemen insgesamt 12 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung: Das System ist statisch bestimmt.

Die Rechnung vereinfacht sich wesentlich, wenn man berücksichtigt, dass zwei Teile des Systems die Kriterien erfüllen, die sie nach der eingangs gegebenen Definition als Stab ausweisen. Dies soll am Beispiel des Stabes 1 (**Abbildung 6.14**) erläutert werden. Nach Herausschneiden aus dem Gesamtsystem und Antragen der Gelenkkräfte erkennt man, dass das vertikale Kraft-Gleichgewicht

$$F_{G1,V} = F_{G2,V}$$

liefert. Die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen um die Gelenkpunkte führen auf:

$$F_{G1,H} = 0 \quad ; \quad F_{G2,H} = 0 \quad .$$

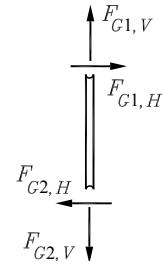


Abbildung 6.14:
Stab 1

Entsprechende Ergebnisse würde man auch für den Stab 2 erhalten, wenn man die Gelenkkraftkomponenten in Stablängsrichtung bzw. senkrecht dazu anträgt. Allgemein gilt:

Ein *Stab* kann nur eine Kraft in Richtung der Verbindungsgeraden seiner beiden Gelenke übertragen (diese Aussage gilt auch für das *Seil*, siehe Bemerkung auf Seite 72).

Man nutzt diese Erkenntnis, indem man den Stab nicht als Teilsystem, sondern als Verbindungelement behandelt: Der Stab wird geschnitten, und die Stabkraft wird (in Stablängsrichtung) als Schnittkraft angetragen (anstelle von vier Gelenkkraftkomponenten). Es ist üblich, *Stabkräfte stets als Zugkräfte* (Pfeilspitze weist vom Schnittufer weg) anzutragen (siehe Schnittskizze in der **Abbildung 6.15**).

Das Gleichungssystem für dieses Beispiel lässt sich auch bei geschickter Wahl der Momentenbezugspunkte nicht so aufschreiben, dass an einem Teilsystem eine Unbekannte direkt berechnet werden kann, weil an jedem Teilsystem vier Kräfte unbekannt sind.

Um ein Gleichungssystem mit sechs Unbekannten zu vermeiden, sollte man zunächst das Momentengleichgewicht um den Punkt *A* (am System *I*) und das Momentengleichgewicht um den Punkt *B* (am System *II*) aufschreiben. Aus diesen beiden Gleichungen errechnet man die Stabkräfte

$$F_{S1} = 1,125 q_0 a; F_{S2} = -2,652 q_0 a$$

(das Minuszeichen weist den Stab 2 als Druckstab aus). Danach erhält man aus den 4 Kraft-Gleichgewichtsbedingungen die Lagerreaktionen:

$$F_{AH} = -1,875 q_0 a; F_{AV} = 2,250 q_0 a;$$

$$F_{BH} = -1,875 q_0 a; F_{BV} = 0,750 q_0 a.$$

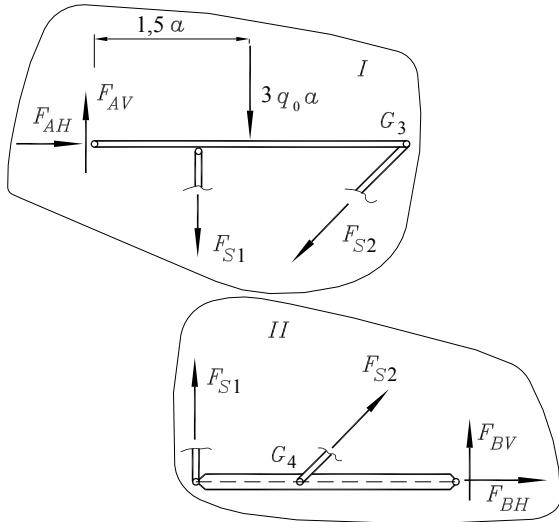


Abbildung 6.15: Schnittskizze: Nicht die Gelenke werden geschnitten, sondern die Stäbe

Beispiel 2:

Beispiel 2: Das Problem der bereits im vorigen Abschnitt behandelten Gripzange ist unter Ausnutzung der Tatsache zu lösen, dass ein Element der Zange ein Stab ist. Man untersuche außerdem den Einfluss der einzelnen Abmessungen auf das Ergebnis.

Gegeben: F, b, c, d, e, f, g, h .

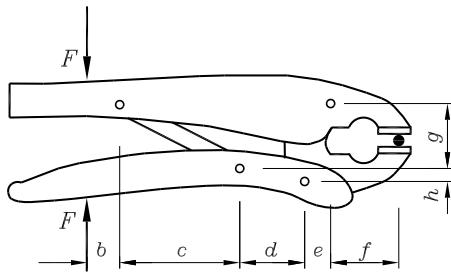
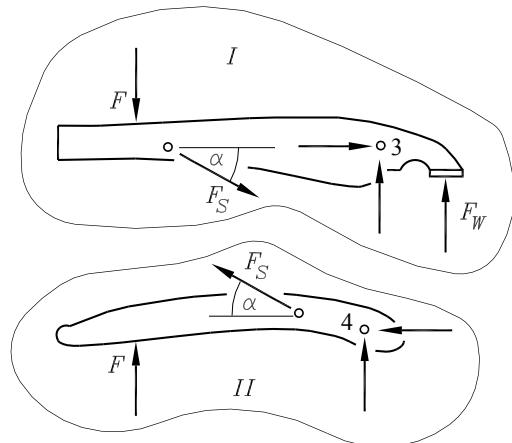


Abbildung 6.16: Gripzange mit allgemeinen Abmessungen und die zugehörige Schnittskizze unter Ausnutzung der „Stab-Eigenschaft“ des Verbindungsstabes zwischen dem oberen und dem unteren Griff



Betrachtet werden nur der obere und der untere Zangenhebel. Beide sind durch einen Stab verbunden und über je ein Gelenk mit dem vierten Teilsystem. An den beiden Verbindungsgelenken 3 und 4 treten je zwei unbekannte Gelenkkräfte auf, die dann nicht in die Rechnung gelangen,

wenn Momentengleichgewicht um diese Punkte gebildet wird. Das Momentengleichgewicht um den Punkt 4 am Teilsystem II

$$F(b+c+d) + F_S d \sin \alpha - F_S h \cos \alpha = 0$$

liefert die Stabkraft

$$F_S = -\frac{b+c+d}{d \sin \alpha - h \cos \alpha} F,$$

die in das Momentengleichgewicht um den Punkt 3 am Teilsystem I

$$F(b+c+d+e) + F_S \sin \alpha(c+d+e) + F_W f = 0$$

eingesetzt wird, und man erhält

$$F_W = \frac{F}{f} \left[\frac{(b+c+d)(c+d+e)}{d - h \cot \alpha} - (b+c+d+e) \right].$$

Mit $\cot \alpha = \frac{c}{g}$ (aus der Geometrie der Zange ablesbar) kann die auf das Werkstück ausgeübte Kraft durch die gegebenen Größen (Kraft F und die Abmessungen) ausgedrückt werden:

$$F_W = \frac{F}{f} \left[\frac{(b+c+d)(c+d+e)}{d - h \frac{c}{g}} - (b+c+d+e) \right].$$

Mit den im Beispiel 8 des Abschnitts 6.1 gegebenen Abmessungen der Zange erhält man wieder das dort bereits angegebene Ergebnis $F_W = 11,4F$. Das jetzt gefundene allgemeine Ergebnis gestattet folgende Überlegungen:

- Der Nenner des Bruchs in der Klammer kann beliebig klein und damit F_W beliebig groß gemacht werden. Wenn die Anschlussgelenke des Verbindungsstabes und das Gelenk 4 auf einer Geraden liegen, gilt $\frac{c}{g} = \frac{d}{h}$, und der Nenner des Bruchs wird Null (dann bewegt sich das Zangenmaul allerdings nicht mehr). F_W wird umso größer, je näher das Gelenk 4 an dieser Geraden liegt.
- Interessant ist, dass die Abmessung b keinen nennenswerten Einfluss auf das Ergebnis hat und sogar negativ werden könnte, so dass es weitgehend egal ist, wo die Kräfte F angreifen (wie die Zange gegriffen wird).

Praktisch realisiert man die Regulierung der Kraft F_W durch eine Stellschraube, die das linke obere Gelenk horizontal verschiebt, wodurch sich der Quotient $\frac{c}{g}$ ändert.

Die in diesem Abschnitt für den Stab angestellten Überlegungen gelten sinngemäß auch für Seile unter Beachtung folgender Besonderheit:

Ein Seil als Verbindungselement in einem System starrer Körper wird genauso wie ein Stab behandelt. Da Seile jedoch nur auf Zug belastet werden können, dürfen die Seilkräfte nicht negativ werden ($F_S \geq 0$). Eine negative Seilkraft ist ein sicheres Indiz für einen Fehler (in der Konstruktion oder in der Rechnung).

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Bei der Berechnung von Systemen starrer Körper kann die Anzahl der aufzuschreibenden Gleichgewichtsbedingungen sehr groß werden. Durch geschickte Wahl der Momenten-Bezugspunkte und strategisch günstiges Vorgehen kann man das Gleichungssystem oft so entkoppeln, dass auch bei komplizierten Systemen die Handrechnung zum Ziel führt.

Wenn die Rechnung zu aufwendig (und damit natürlich auch fehleranfälliger) wird, sollte man die Hilfe des Computers in Anspruch nehmen. Dann sind für das Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen andere Strategien empfehlenswert, die nachfolgend behandelt werden.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind linear in den unbekannten Größen (Lagerreaktionen, Gelenkkräfte, Stabkräfte, ...), aus mathematischer Sicht also ein *lineares Gleichungssystem*.

Hier soll nur demonstriert werden, wie man die Gleichgewichtsbedingungen für die Computerrechnung vorbereitet (man beachte die Informationen in der Box unten).

Ordnung schaffen → Matrix-Formulierung

Ein lineares Gleichungssystem wird in geordneter Form so aufgeschrieben, dass auf der linken Seite die Unbekannten und auf der rechten Seite die bekannten Werte stehen, z. B.:

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + x_2 & = & 11 \\ 8x_1 + 5x_2 - 6x_3 & = & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A \mathbf{x} = \mathbf{b} .$$



Eine Einführung in die Benutzung verschiedener Software-Produkte wird an Hand dieses kleinen Beispiels auf www.TM-aktuell gegeben.

Es ist üblich (und als Vorbereitung für die **Computerrechnung** empfehlenswert), das Gleichungssystem in Matrixschreibweise (mit der *Koeffizientenmatrix A*, dem *Vektor der Unbekannten x* und

WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Lineare Gleichungssysteme auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) bietet u. a. folgende Themen:



- Lösbarkeit, Determinanten, Singularität, Rang einer Matrix
- Direkte Lösungsverfahren (Gauß, Pivotisierung, verketteter Algorithmus, Gauß-Jordan, Matrixinversion, Cholesky, homogene Gleichungssysteme, ...)
- Iterationsverfahren (Tests mit verschiedenen Verfahren, Präkonditionierung, ...)
- Nutzung von Standardsoftware (numerische und symbolische Mathematik)
- Rundungsfehler, Kondition einer Matrix, Skalierung, Ursachen für Singularität
- Große Gleichungssysteme, dünn besetzte Matrix („Sparse“, „Band“, „Skyline“)
- Überbestimmte Gleichungssysteme (mehr Gleichungen als Unbekannte)

dem *Vektor der rechten Seite **b***) zu formulieren. Die Information, die ein solches Gleichungssystem beschreibt (und einem Rechenprogramm eingegeben werden muss), besteht aus

- der Anzahl der Gleichungen n (hier: $n = 3$),
- den $n \cdot n$ Koeffizienten der Unbekannten (wenn Unbekannte in einer Gleichung nicht vorkommen, haben die zugehörigen Koeffizienten den Wert Null),
- den n bekannten Werten auf der *rechten Seite* (natürlich könnte man diese auch links vom Gleichheitszeichen anordnen, aber der Begriff „rechte Seite“ ist gebräuchlich).

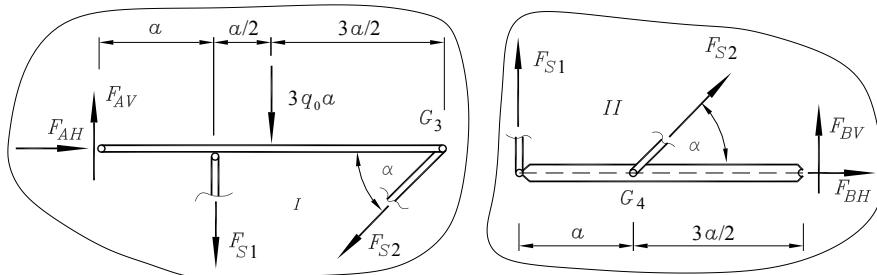
Das Ziel der Berechnung ist der Vektor der Unbekannten \mathbf{x} . Für das betrachtete Beispiel ergibt sich das nebenstehend angegebene Ergebnis.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Neue Strategie: Einfache Gleichgewichtsbedingungen bevorzugen

Wenn die Gleichgewichtsbedingungen für die Computerrechnung aufbereitet werden, braucht man natürlich nicht auf die Entkopplung der Gleichungen (Bevorzugung der Momenten-Gleichgewichtsbedingungen, sorgfältige Wahl der Bezugspunkte, ...) zu achten, im Gegenteil: Man sollte in diesem Fall die im Allgemeinen einfacher zu formulierenden Kraft-Gleichgewichtsbedingungen bevorzugen und Momenten-Bezugspunkte so wählen, dass z. B. unter einem Winkel angreifende Kräfte nicht in die Gleichgewichtsbedingung eingehen.

Beispiel 1: Für das im Abschnitt 6.2 einleitend behandelte Beispiel 1 soll das Gleichungssystem für die Computerrechnung aufbereitet werden.



Im Gegensatz zu der für die Handrechnung empfohlenen Strategie werden jetzt die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen für beide Teile und die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen um die Gelenkpunkte G_3 bzw. G_4 aufgeschrieben, und man erhält das nebenstehende Gleichungssystem mit sechs Unbekannten.

$$\begin{aligned}
 I: & \quad \rightarrow \quad F_{AH} - F_{S2} \cos \alpha = 0 \\
 & \quad \uparrow \quad F_{AV} - F_{S1} - F_{S2} \sin \alpha - 3q_0a = 0 \\
 & \quad G_3 \curvearrowright \quad F_{AV}3a - F_{S1}2a - 3q_0a1,5a = 0 \\
 & \quad \rightarrow \quad F_{BH} + F_{S2} \cos \alpha = 0 \\
 II: & \quad \uparrow \quad F_{BV} + F_{S1} + F_{S2} \sin \alpha = 0 \\
 & \quad G_4 \curvearrowright \quad -F_{BV}1,5a + F_{S1}a = 0
 \end{aligned}$$

Dieses (für die Handrechnung ungünstige) Gleichungssystem wird nun in Matrixform aufgeschrieben. Vorab werden die beiden Momenten-Gleichgewichtsbedingungen durch a dividiert.

Die Anteile, die mit keiner Unbekannten gekoppelt sind (enthalten alle den Faktor q_0a), werden auf die rechte Seite gebracht, und man erhält (Lösung siehe www.TM-aktuell.de):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\sin \alpha \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1,5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{AH} \\ F_{AV} \\ F_{BH} \\ F_{BV} \\ F_{S1} \\ F_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_0a.$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 F_{AH} F_{AV} F_{BH} F_{BV} F_{S1} F_{S2}



- ⇒ Die Reihenfolge der Kräfte im Vektor der Unbekannten und die Reihenfolge der Gleichungen können beliebig gewählt werden. Nach der Festlegung der Reihenfolge korrespondieren die Elemente der *i-ten Spalte der Koeffizientenmatrix* mit dem *i-ten Element im Vektor der Unbekannten* (wie in der Matrixbeziehung durch die Pfeile angedeutet).
- ⇒ Die Elemente der Koeffizientenmatrix sind Zahlenwerte, weil die beiden Momenten-Gleichgewichtsbedingungen durch a dividiert wurden und der Winkel α aus der Skizze der Aufgabenstellung entnommen werden kann ($\alpha = 45^\circ$).
- ⇒ Auch der Vektor der rechten Seite enthält nur noch Zahlenwerte, nachdem q_0a als gemeinsamer Faktor aller Elemente ausgeklammert wurde. Damit stehen die 36 Zahlenwerte der Koeffizientenmatrix und die 6 Zahlenwerte des Vektors der rechten Seite als Eingabewerte für eine rein numerische Rechnung bereit. Man beachte, dass dann trotz reiner Zahlenrechnung das Problem (zum Teil) parametrisiert wurde: Das Ergebnis gilt für beliebiges q_0a . Natürlich müssen die 6 Zahlenwerte, die die Computerrechnung als Ergebnis (Vektor der Unbekannten) liefert, noch mit dem Faktor q_0a multipliziert werden.
- ⇒ Typisch für Probleme der Statik ist, dass die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems die Geometrie des Systems widerspiegelt (sie ändert sich, wenn man die Abmessungen oder Winkel ändert). Der Vektor der rechten Seite dagegen enthält die gegebene Belastung.
- ⇒ Bei mehreren Lasten ist es empfehlenswert, für jede Last eine eigene rechte Seite vorzusehen. Der Vorbereitungsaufwand wird dadurch kaum größer, der Mehraufwand für die Berechnung (ohnehin für den Computer) ist minimal, aber es ergibt sich ein wichtiger Vorteil: Im Ergebnis ist sichtbar, welche Anteile die einzelnen Lasten an den errechneten Größen haben. Unter www.TM-aktuell.de findet man dafür ein Beispiel.



Numerische oder symbolische Rechnung?

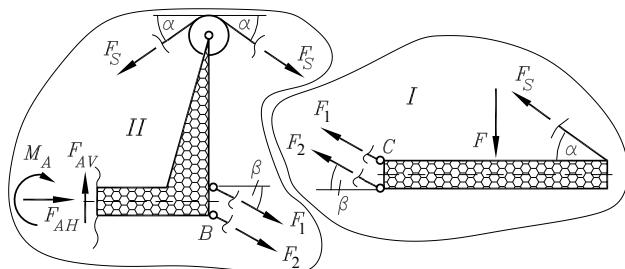
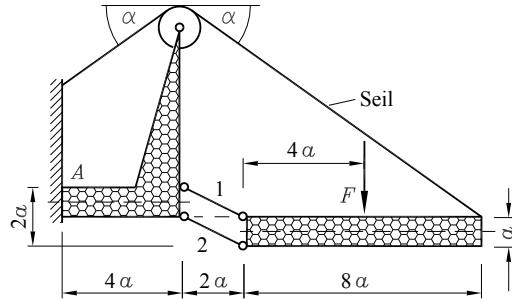
Um den Einfluss auch der geometrischen Problemparameter (Abmessungen, Winkel) im Ergebnis sichtbar werden zu lassen, muss „symbolisch gerechnet“ werden. Eine Parametrisierung des Ergebnisses für das Beispiel 1 hinsichtlich des Winkels α ist z. B. nur auf diese Weise möglich (Lösung mit mehreren Software-Produkten siehe Link oben auf dieser Seite).

Programme mit den Fähigkeiten zur symbolischen Mathematik erledigen Probleme der Art von Beispiel 1 mühelos. Die Grenzen, die sich dabei ergeben, werden einerseits von der Größe des Gleichungssystems, andererseits aber auch von der Überschaubarkeit (für den Menschen) von komplizierten Ergebnissen mit mehreren Parametern gesetzt.

Beispiel 2: Die skizzierte Arbeitsbühne ist durch die Kraft F belastet. Man ermittle die durch F hervorgerufenen Lagerreaktionen bei A , die Kräfte in den Stäben 1 und 2 und die Seilkraft F_S .

Gegeben: $a, F, \alpha = 50^\circ$.

Entsprechend nebenstehender Schnittskizze lassen sich die 6 Gleichgewichtsbedingungen an den beiden Teilsystemen formulieren. Zur Vereinfachung wurde der (durch die gegebenen Abmessungen bekannte) Winkel β eingeführt.



Aufgeschrieben werden an beiden Teilsystemen jeweils das Kräfte-Gleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung und am Teilsystem I das Momenten-Gleichgewicht um den Punkt C , am Teilsystem II um den Punkt B :

$$\begin{array}{l} I: \quad \left[\begin{array}{cccccc} \leftarrow & \cos\beta & \cos\beta & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow & \sin\beta & \sin\beta & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ C \curvearrowright & 0 & a\cos\beta & -8a\sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \rightarrow & \cos\beta & \cos\beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \downarrow & \sin\beta & \sin\beta & 2\sin\alpha & 0 & -1 & 0 \\ B \curvearrowright & a\cos\beta & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 4a & a \end{array} \right] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_S \\ F_{AH} \\ F_{AV} \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ -4Fa \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.1) \end{array}$$

In der Matrix-Form 6.1 kann das Gleichungssystem einem Programm mit der Fähigkeit zur symbolischen Rechnung angeboten werden. Das Ergebnis erscheint dann in Abhängigkeit von den vier Parametern α, β, F und a .

Für ein Programm, das nur numerisch rechnen kann, sollten folgende Veränderungen vorgenommen werden:

- Auf der rechten Seite wird der Faktor F ausgeklammert.
- Die dritte und die letzte Gleichung werden durch a dividiert, so dass in der Koeffizientenmatrix nur Zahlenwerte verbleiben und im Vektor der Unbekannten auf der letzten Position $\frac{M_A}{a}$ steht.

Auf diese Weise ist die Lösung dann immerhin noch teilweise parametrisiert (gilt für beliebiges F und beliebiges a). Die Winkel allerdings müssen vor der numerischen Rechnung als Zahlenwerte vorgegeben werden:

$$\alpha = 50 \frac{\pi}{180} ; \quad \beta = \arctan 0,5 ;$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \cos \beta & \cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & \sin \beta & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -8 \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta & \cos \beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & \sin \beta & 2 \sin \alpha & 0 & -1 & 0 \\ \cos \beta & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_S \\ F_{AH} \\ F_{AV} \\ \frac{M_A}{a} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] F . \quad (6.2)$$

Nebenstehend ist der Lösungsvektor zu sehen, den das Programm *Maple* nach symbolischer Berechnung des Systems 6.1 erzeugt. Man sieht, dass alle Lagerreaktionen linear von F abhängig sind und dass die Abmessung a nur das Einspannmoment bei A (letzte Zeile im Lösungsvektor) beeinflusst.

$$\left[\begin{array}{c} \frac{F (4 \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) + 4 \sin(\beta) \cos(\alpha))}{(-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)) \cos(\beta)} \\ -\frac{4F (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha))}{(-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)) \cos(\beta)} \\ -\frac{\cos(\beta) F}{-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)} \\ -\frac{F \cos(\alpha) \cos(\beta)}{-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)} \\ -\frac{(-2 \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)) F}{-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)} \\ -\frac{1}{2} \frac{a F (-8 \sin(\alpha) \cos(\beta) + 16 \sin(\beta) \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cos(\beta))}{-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)} \end{array} \right]$$

Der Einfluss der Winkel auf die Ergebnisse kann der allgemeinen Darstellung nur schwer entnommen werden. Wenn man beide Winkel als Zahlenwerte eingibt, bekommt die symbolische Lösung die nebenstehend zu sehende Form. Diese unterscheidet sich von einer rein numerischen Rechnung nach 6.2 nur dadurch, dass man hier die Symbole F und a im Ergebnis sieht.



$$\left[\begin{array}{c} -12.55329375 F \\ 10.93706220 F \\ 2.248956628 F \\ 1.445601455 F \\ 2.722800729 F \\ -0.3859963649 F a \end{array} \right]$$

Fazit: Die symbolische Berechnung liefert allgemeine Ergebnisse, die allerdings recht unübersichtlich werden können. Sie eignen sich jedoch sehr gut für eine Auswertung spezieller Abhängigkeiten, z. B. für die Darstellung einer Funktion $F_S(\alpha, \beta)$. Im Allgemeinen genügt die numerische Berechnung, bei der eine teilweise Parametrisierung der Ergebnisse in der Regel möglich ist. Für sehr große Gleichungssysteme ist sie ohnehin die einzige praktikable Alternative.

Die Lösung des Beispiels 2 und eine Reihe weiterer Beispiele sowohl mit symbolischer als auch numerischer Berechnung findet man unter www.TM-aktuell.de. Dort wird auch gezeigt, dass alle

Aussagen auch schon für kleinere Probleme gelten (z. B.: Beispiel 11 auf Seite 58), andererseits die symbolische Berechnung durchaus auch für größere Systeme noch funktioniert.

Lösbarkeit, Fehlersuche, Kontrolle

Voraussetzungen für eine eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems:

- Die Anzahl der Gleichungen muss mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmen (Koeffizientenmatrix hat gleiche Zeilen- und Spaltenanzahl, sie ist *quadratisch*).
- Die Koeffizientenmatrix muss *regulär* sein (der Wert der Determinante der Matrix muss ungleich Null sein), was immer dann der Fall ist, wenn zwischen den einzelnen Gleichungen keine *linearen Abhängigkeiten* bestehen.

Diese Bedingungen sind für *korrekt aufgeschriebene Gleichgewichtsbedingungen eines statisch bestimmten Systems* immer erfüllt. Wenn Probleme bei der Lösung des Gleichungssystems auftreten (Computerprogramm äußert sich z. B. mit der Bemerkung: „Koeffizientenmatrix ist singulär“, d. h. *nicht regulär*), ist entweder das mechanische System nicht statisch bestimmt gelagert (es liegt z. B. einer der auf den Seiten 54 bzw. 64 diskutierten Sonderfälle vor, die noch eine Bewegungsmöglichkeit zulassen), oder die Gleichgewichtsbedingungen wurden nicht korrekt formuliert (z. B. vier an einem Teilsystem, an einem anderen dafür nur zwei), oder aber man ist in irgendeine andere Falle gestolpert (z. B. falsche Eingabe der Zahlenwerte in den Computer).

Unter www.TM-aktuell.de findet man zahlreiche Beispiele für Systeme und Fehler, die auf nicht lösbare Gleichungssysteme führen, und Hinweise, wie man durch Einbau von Kontrollmöglichkeiten Fehler erkennen kann.

Die Benutzung des Computers kann dazu verleiten, das Nachdenken über günstige Möglichkeiten beim Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen durch Mehraufwand bei der Berechnung zu ersetzen. Ob dies vernünftig ist oder nicht, kann nicht generell entschieden werden. Vernünftig ist es jedenfalls, möglichst schnell zu einem (richtigen) Ergebnis zu kommen.



Beispiel 3: Für die in den Abschnitten 6.1 und 6.2 untersuchte Gripzange wurde dort mit 4 bzw. 2 Gleichgewichtsbedingungen die Kraft am Zangenmaul berechnet. Dafür musste man sehr geschickt vorgehen, was leider nicht immer gelingt. Glücklicherweise kann man bei solchen Aufgaben „Geschicklichkeit durch Aufwand ersetzen“ und letzteren weitgehend dem Computer übertragen. Dies soll an einer neuen Schnittskizze (**Abbildung 6.17**) diskutiert werden:

- Diese Schnittskizze berücksichtigt nicht, dass Teil II ein Stab ist. Natürlich ist es eigentlich nicht sinnvoll, an diesem Teilsystem mit 4 Unbekannten zu operieren, wenn eine (Stabkraft F_S) genügen würde. Beim Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen zeigt sich aber der Vorteil dieser Variante: Alle Kraftkomponenten haben Horizontal- oder Vertikalrichtung, und in die Gleichgewichtsbedingungen gehen keine Winkelfunktionen ein.
- Wenn man auch nicht darüber nachdenken möchte, wie man die Anzahl der Gleichungen möglichst gering halten kann, muss man für die 9 Unbekannten 9 Gleichgewichtsbedingungen bereitstellen, z. B. je drei Bedingungen für die Teile I, II und IV (von den maximal

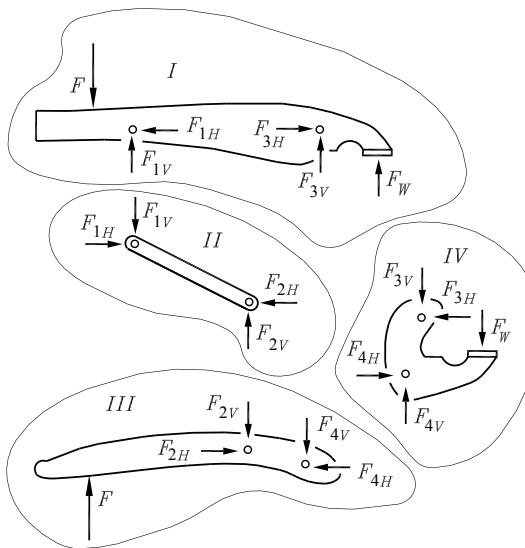


Abbildung 6.17: Schnittskizze für „Denkfaule“

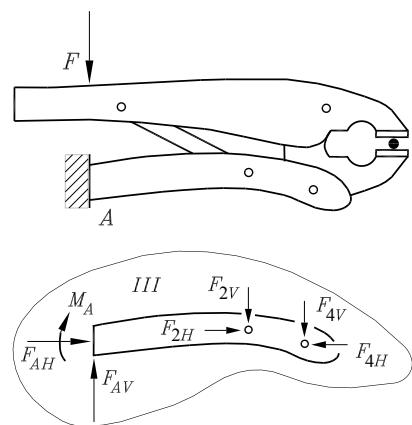


Abbildung 6.18: Die Gegenkraft am unteren Griff wird durch eine starre Einspannung ersetzt. Die drei Lagerreaktionen werden als zusätzliche „Unbekannte“ betrachtet, deren Ergebnisse bekannt sind (Kontrollmöglichkeit!).

12 möglichen Gleichgewichtsbedingungen an vier Teilsystemen werden drei nicht benötigt, weil das Gleichgewicht am Gesamtsystem per Aufgabenstellung schon erfüllt ist, vgl. die diesbezügliche Diskussion im Abschnitt 6.1 auf Seite 67).

Weil an dieser Stelle die Gefahr einer falschen Auswahl (9 aus 12) besteht, die zu einer singulären Matrix führen kann, sollte man sogar noch einen Schritt weitergehen:

- Man ersetzt die äußere Gegenkraft am unteren Zangengriff durch eine starre Einspannung (**Abbildung 6.18** oben) und behandelt die drei Lagerreaktionen wie zusätzliche Unbekannte. Dann hat man an den 4 Teilsystemen insgesamt 12 Unbekannte, für die 12 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen. Für die „unbekannten Lagerreaktionen“ kennt man natürlich die korrekten Ergebnisse ($F_{AH} = 0$, $F_{AV} = F$, $M_A = 0$), so dass man eine Kontrollmöglichkeit für die Rechnung hat.
- Alternativ dazu kann man auch auf der Basis der Schnittskizze **6.17** für 9 Unbekannte 12 Gleichgewichtsbedingungen formulieren. Ein solches *überbestimmtes Gleichungssystem* muss man dann mit einer Software lösen, die dies nach den Prinzipien der *Ausgleichsrechnung* erledigt. Da die Gleichungen (im Gegensatz zu einem typischen System der Ausgleichsrechnung) keine Widersprüche enthalten dürfen, kann man durch Weglassen einzelner Gleichungen und entsprechende zusätzliche Rechnungen recht wirkungsvoll die Korrektheit der Gleichgewichtsbedingungen überprüfen.

Die ausführlich kommentierten Lösungsvarianten für dieses und weitere Beispiele findet man unter www.TM-aktuell.de.



6.4 Fachwerke

Der beidseitig gelenkig gelagerte Stab, in den die Belastung allein über die Gelenke eingeht, kann nur eine Zug- bzw. Druckkraft (Kraft in Stablängsrichtung) übertragen (vgl. Abschnitt 6.2).

Diese Eigenschaft gestattet ein materialsparendes (gewichtsparendes) Konstruieren, weil ein Stab gegen die reine Längsbelastung sehr widerstandsfähig ist. Es ist deshalb naheliegend, Konstruktionen ausschließlich aus Stäben zusammenzusetzen.

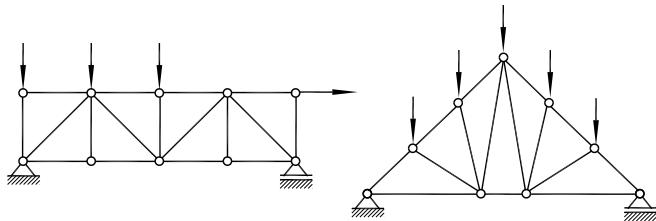


Abbildung 6.19: Fachwerke mit einfachem Aufbau

Man nennt solche Konstruktionen *Fachwerke*. Die Gelenkpunkte, an denen die Stäbe eines Fachwerks zusammenstoßen, heißen *Knoten*.

Das *ideale Fachwerk*

- besitzt reibungsfreie Gelenke als Knoten und
- wird ausschließlich über die Knoten belastet.

Beide Voraussetzungen sind praktisch nicht erfüllbar. Die Knoten werden sogar meist durch starre Knotenbleche realisiert, mit denen die Stäbe fest verbunden sind (verschweißt, verschraubt, ...). Das Eigengewicht der Stäbe verhindert in jedem Fall, dass die Belastung des Fachwerks nur über die Knoten erfolgt.

Aber auch die realen Fachwerke haben im Allgemeinen die eingangs beschriebenen vorteilhaften Eigenschaften, und sie dürfen bei guter Annäherung an die Realität so berechnet werden, als würden sie die Kriterien des idealen Fachwerks erfüllen.

6.4.1 Statisch bestimmte Fachwerke

Fachwerke mit einfachem Aufbau werden konstruiert, indem man ein Basisdreieck jeweils durch *zwei neue Stäbe* und *einen neuen Knoten* um ein Dreieck erweitert. Auf diese Weise entsteht ein starres (und damit tragfähiges) ebenes Gebilde. Wenn ein so entstandenes Fachwerk statisch bestimmt gelagert wird (z. B. durch ein Festlager und ein Loslager), erhält man ein statisch bestimmtes Fachwerk.

Die beiden in der **Abbildung 6.19** skizzierten Fachwerke sind nach dieser Bildungsvorschrift entstanden. Es sind statisch bestimmte Fachwerke.

Da im Abschnitt 6.2 die Berücksichtigung von Stäben bereits behandelt wurde, stehen die Grundlagen für die Berechnung von Fachwerken zur Verfügung. Da diese ausschließlich aus (möglicherweise sehr vielen) Stäben bestehen, empfiehlt sich eine Systematisierung. Die einfachste Methode, Stabkräfte und Lagerreaktionen eines Fachwerks zu berechnen, ist das

Knotenschnittverfahren:

- Alle an einen Knoten angrenzenden Stäbe werden geschnitten (*Rundumschnitt*).
- Die Stabkräfte werden angetragen (als *Zugkräfte*, Pfeilspitzen weisen vom Schnittufer weg).
- Für das so entstandene zentrale ebene Kraftsystem werden die beiden Gleichgewichtsbedingungen formuliert.

Bei einem Fachwerk mit k Knoten ergeben sich $2 \cdot k$ Gleichungen. Nur dann, wenn die Anzahl der Unbekannten (Stabkräfte und Lagerreaktionen) mit der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen übereinstimmt, kann das Fachwerk statisch bestimmt sein.

Notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit von Fachwerken:

$$\text{Anzahl der Stäbe} + \text{Anzahl der Lagerreaktionen} = 2 \cdot \text{Anzahl der Knoten}$$

Es ist ein notwendiges (für die Feststellung der statischen Bestimmtheit nicht hinreichendes) Kriterium, weil es Sonderfälle, wie sie in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert wurden, nicht ausschließen kann. Für die beiden in der **Abbildung 6.19** skizzierten Fachwerke mit einfachem Aufbau ist dieses Kriterium selbstverständlich erfüllt.

Fachwerke können statisch unbestimmt sein (und sich damit der Berechnung im Rahmen der Statik entziehen), obwohl sie äußerlich statisch bestimmt gelagert sind: Man sieht sofort, dass das Kriterium für die statische Bestimmtheit für die in der **Abbildung 6.20** skizzierten Fachwerke nicht erfüllt ist (beim linken Fachwerk stehen z. B. für 6 Stabkräfte und 3 Lagerreaktionen nur 8 Gleichgewichtsbedingungen an den 4 Knoten zur Verfügung). Beide Fachwerke können auch nicht nach dem Bildungsgesetz für Fachwerke mit einfachem Aufbau entstanden sein.

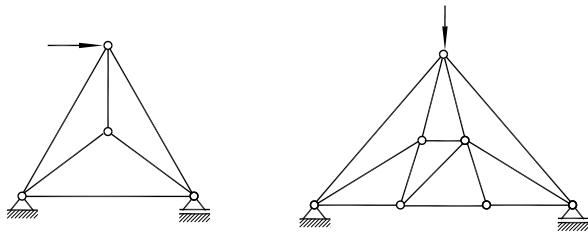


Abbildung 6.20: Statisch unbestimmte Fachwerke

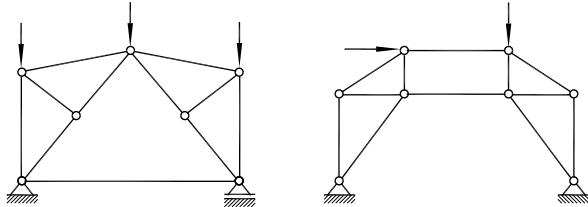


Abbildung 6.21: Fachwerke mit nicht einfachem Aufbau

Im Gegensatz dazu gibt es *Fachwerke mit nicht einfachem Aufbau*, die statisch bestimmt sind: Während das linke Fachwerk in der **Abbildung 6.21** auch ohne die Lager ein starres System ist (und dementsprechend äußerlich statisch bestimmt gelagert werden muss), ist das rechte Fachwerk ohne die Lager in sich beweglich, was durch eine entsprechende Lagerung ausgeglichen werden muss (man nennt diese Lagerung *äußerlich statisch unbestimmt*). Ohne Berechnung der Stabkräfte wäre für dieses Fachwerk die Ermittlung der Lagerreaktionen unmöglich.

6.4.2 Berechnungsverfahren

Das wichtigste (und für alle statisch bestimmten Fachwerke anwendbare) Berechnungsverfahren ist das bereits beschriebene *Knotenschnittverfahren*. Dabei kann die Anzahl der Gleichungen für die Bestimmung der Stabkräfte und Lagerreaktionen sehr groß werden.

Deshalb sollten folgende Möglichkeiten der Verringerung des Gesamtaufwands beachtet werden:

- Bei *äußerlich statisch bestimmter Lagerung* können die Lagerreaktionen unabhängig von den Stabkräften bestimmt werden: Nach dem Freischneiden von den äußeren Bindungen werden die drei Gleichgewichtsbedingungen des allgemeinen ebenen Kraftsystems formuliert.
- Bei *Fachwerken mit einfacherem Aufbau* ist es (nach vorheriger Ermittlung der Lagerreaktionen) möglich, so von Knoten zu Knoten voranzugehen, dass an dem gerade betrachteten Knoten nur zwei Stabkräfte unbekannt sind, die aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen direkt berechnet werden können.
- Vielfach befinden sich in Fachwerken so genannte *Nullstäbe* (*Blindstäbe* → Stäbe, die keine Stabkräfte aufnehmen). Wenn diese nach den folgenden so genannten *Nullstab-Kriterien* erkannt werden können, wird ihnen sofort die Stabkraft $F_S = 0$ zugeordnet:

Eine *unbelastete Ecke* (genau zwei Stäbe, keine äußere Kraft, auch kein Lager) besteht immer aus zwei Nullstäben, weil in die Gleichgewichtsbedingung senkrecht zu einem Stab nur die entsprechende Komponente der anderen Stabkraft eingehen würde.

An einer *belasteten Ecke* (genau zwei Stäbe, äußere Kraft in Richtung eines Stabes) ist der nicht in Richtung der äußeren Kraft verlaufende Stab ein Nullstab, weil in die Gleichgewichtsbedingung senkrecht zur äußeren Kraft nur die entsprechende Komponente dieses Stabes eingehen würde.

An einem *Knoten mit genau drei Stäben ohne äußere Kraft* (auch kein Lager) ist dann, wenn *zwei Stäbe die gleiche Richtung haben*, der dritte Stab ein Nullstab.

Obwohl Nullstäbe keine Kräfte aufnehmen, dürfen sie nicht aus der Konstruktion entfernt werden, da sie für die Stabilität (und die statische Bestimmtheit) mitverantwortlich sein können.

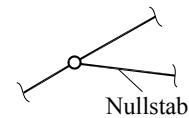
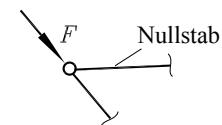
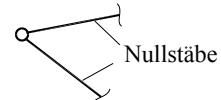


Abbildung 6.22: Nullstab-Kriterien

Neben dem Knotenschnittverfahren gibt es zahlreiche andere Verfahren zur Ermittlung der Stabkräfte von Fachwerken. Die früher sehr beliebten grafischen Verfahren (insbesondere der so genannte CREMONA-Plan) haben heute keine praktische Bedeutung mehr. Auch andere Berechnungsverfahren werden kaum noch verwendet, weil der einzige Nachteil des Knotenschnittverfahrens, das unter Umständen sehr große lineare Gleichungssysteme, bei Verwendung des Computers unbedeutend geworden ist.

Für spezielle Fragestellungen (Berechnung nur weniger Stabkräfte eines größeren Fachwerks) kann allerdings das so genannte *Rittersche Schnittverfahren* (nach A. RITTER, 1826 - 1908) nützlich sein: Wenn ein Fachwerk durch einen *Schnitt, der genau drei Stäbe schneidet*, in zwei Teilsysteme zerfällt, können die Stabkräfte der geschnittenen Stäbe berechnet werden, wenn

- die drei geschnittenen Stäbe nicht alle parallel liegen und sich die Wirkungslinien ihrer Stabkräfte nicht alle in einem Punkt schneiden und
 - an mindestens einem der beiden Teilsysteme alle äußereren Kräfte bekannt sind (Lagerreaktionen z. B. vorab berechnet werden konnten).

Für die Berechnung der Stabkräfte an einem Teilsystem stehen dann die drei Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Kraftsystems zur Verfügung. Durch geschickte Wahl der Momenten-Bezugspunkte (Schnittpunkt der Richtungen von zwei geschnittenen Stäben) entstehen besonders einfache Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Stabkräfte (nachfolgendes Beispiel 2).

Beispiel 1:

Beispiel 1: Für das skizzierte Fachwerk sind die Stabkräfte der Stäbe 1 bis 13 nur durch Anwendung der Kriterien für Nullstäbe zu ermitteln.

Gegeben: F .

Die zahlreichen Nullstäbe dieses Fachwerks sind alle ohne Rechnung allein durch Auswertung der behandelten drei Nullstab-Kriterien zu erkennen. Dabei sind die Bedingungen zum Teil erst dann erfüllt, wenn bereits andere Stäbe als Nullstäbe erkannt wurden:

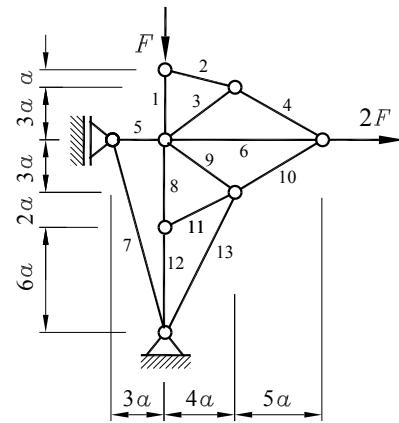
Stab 2 ist (ebenso wie Stab 7) nach dem zweiten der drei angegebenen Kriterien ein Nullstab. Deshalb (und nur deshalb) bilden die Stäbe 3 und 4 eine *unbelastete Ecke*, also sind auch 3 und 4 Nullstäbe.

Nur weil Stab 4 ein Nullstab ist, ist auch Stab 10 ein Nullstab (die Kraft $2F$ hat die gleiche Richtung wie Stab 6). Die Stäbe 8 und 12 haben die gleiche Richtung, also ist der dritte Stab am Knoten (Stab 11) ein Nullstab. Nur weil 10 und 11 Nullstäbe sind, bilden 9 und 13 eine unbelastete Ecke.

Das Fachwerk verdeutlicht, warum man Nullstäbe nicht einfach „weglassen“ kann: Stab 2 fixiert den Kraftangriffspunkt der Kraft F , die Stäbe 3 und 4 hingegen bilden den zweiten Knotenpunkt für Stab 2.

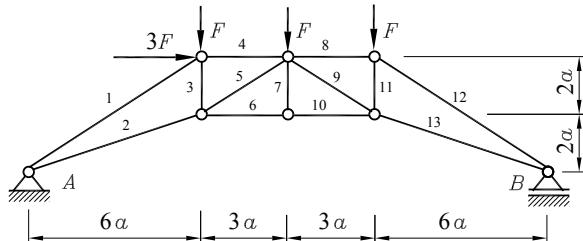
Wenn man Nullstäbe erkennen kann, liegen oft auch die Belastungen der Nachbarstäbe fest. So wird bei diesem Beispiel die vertikale Kraft F als Druckkraft durch die Stäbe 1, 8 und 12 zum unteren Lager geleitet und die horizontale Kraft $2F$ als Zugkraft durch die Stäbe 6 und 5 zum anderen Lager, so dass sämtliche Stabkräfte ohne Rechnung bekannt sind:

$$F_{S2} = F_{S3} = F_{S4} = F_{S7} = F_{S9} = F_{S10} = F_{S11} = F_{S13} = 0 ; \\ F_{S1} = F_{S8} = F_{S12} = -F ; \quad F_{S5} = F_{S6} = 2F .$$



Beispiel 2: Man ermittle die Stabkräfte in den Stäben 8, 9, 10, 11, 13.

Gegeben: F .



Die günstigste Lösungsvariante ist ein Ritterscher Schnitt durch die Stäbe 8, 9 und 10, nachdem man vorher am Gesamtsystem die Lagerreaktionen mindestens eines der beiden Lager ermittelt hat. Anschließend werden die Kräfte in den Stäben 11 und 13 durch einen Knotenschnitt sichtbar gemacht und berechnet.

Aus dem Momenten-Gleichgewicht am Gesamtsystem um den Punkt A berechnet man die Lagerkraft F_B :

$$3F \cdot 4a + F \cdot (6a + 9a + 12a) - F_B \cdot 18a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{13}{6}F .$$

Am nebenstehend abgebildeten Teilsystem soll verdeutlicht werden, dass die drei Stabkräfte des Ritterschen Schnitts aus drei voneinander unabhängigen Gleichungen berechnet werden können.

In das Vertikalkraft-Gleichgewicht geht nur die Unbekannte F_{S9} ein, und für die Momentengleichgewichtsbedingungen werden die Bezugspunkte C bzw. D gewählt, so dass jede Gleichgewichtsbedingung nur eine Unbekannte enthält:

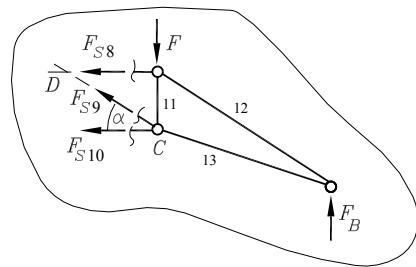


Abbildung 6.23: Ritterscher Schnitt

$$\begin{array}{lclclclclcl} \uparrow & F_{S9} \sin \alpha & + F_B & - F & = & 0 \\ C \zeta & F_{S8} \cdot 2a & + F_B \cdot 6a & = & 0 \\ D \vartheta & F \cdot 3a & + F_{S10} \cdot 2a & - F_B \cdot 9a & = & 0 \end{array}$$

Mit $\sin \alpha = \frac{2a}{\sqrt{4a^2+9a^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ erhält man die drei Stabkräfte

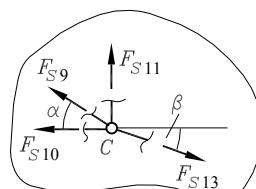
$$F_{S8} = -6,50F ; \quad F_{S9} = -2,10F ; \quad F_{S10} = 8,25F .$$

Der nebenstehend skizzierte Knotenrundschnitt am Punkt C liefert aus den Kraft-Gleichgewichtsbeziehungen

$$\begin{array}{lclclclclcl} \rightarrow & -F_{S9} \cos \alpha & -F_{S10} & + F_{S13} \cos \beta & = & 0 \\ \uparrow & F_{S9} \sin \alpha & + F_{S11} & - F_{S13} \sin \beta & = & 0 \end{array}$$

die Stabkräfte

$$F_{S11} = 3,33F ; \quad F_{S13} = 6,85F .$$



6.4.3 Komplizierte Fachwerke, Computerrechnung

Beispiel:

Am Beispiel des nebenstehend skizzierten Modells eines Krans sollen einige Probleme diskutiert werden, die für die Berechnung komplizierterer Fachwerke typisch sind.

Mit 29 Knoten und 55 Stäben (das Seil, das den Ausleger hält, wird wie ein Stab betrachtet) ist es im Vergleich mit entsprechenden Problemen der technischen Praxis ein relativ einfaches Modell.

- Das Fachwerk ist statisch bestimmt: Den 58 Unbekannten (55 Stabkräfte und 3 Lagerreaktionen) stehen $2 \cdot 29$ Gleichungen gegenüber.
- Da das Fachwerk auch äußerlich statisch bestimmt gelagert ist, können vorab die Lagerreaktionen am Gesamtsystem berechnet werden. Drei Gleichgewichtsbedingungen am nebenstehenden System liefern

$$F_{AH} = F \quad ; \quad F_{AV} = \frac{5}{6}F \quad ; \quad F_B = \frac{1}{6}F \quad .$$

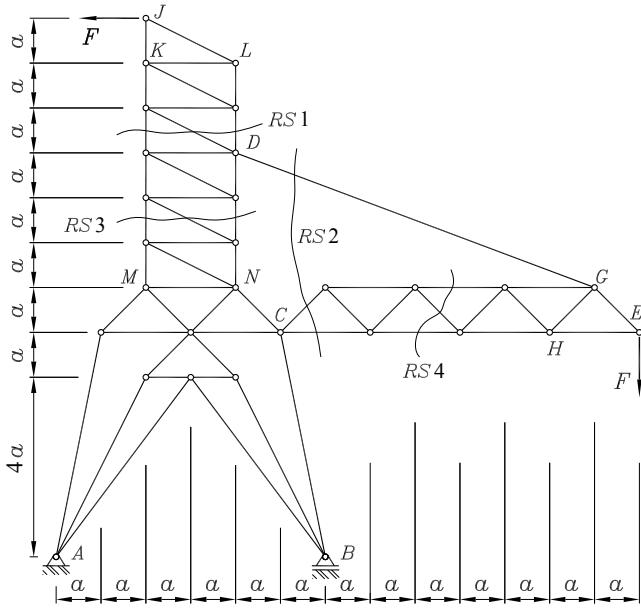
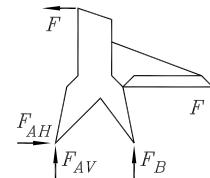
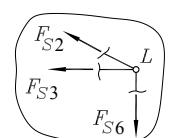
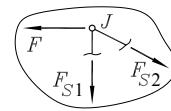


Abbildung 6.24: Fachwerk mit 29 Knoten und 55 Stäben



- Die Berechnung der Stabkräfte kann z. B. an der Spitze des Turms starten: Ein Rundumschnitt um den Knoten J gestattet die Berechnung der Stabkräfte F_{S1} und F_{S2} .

Mit der dann bekannten Stabkraft F_{S2} können am Knoten L die Stabkräfte F_{S3} und F_{S6} berechnet werden. Anschließend findet man am Knoten K mit 4 angeschlossenen Stäben wieder nur zwei unbekannte Kräfte, und dieses Vorgehen wird erst am Knoten D gestoppt, weil dort 3 unbekannte Kräfte auftreten.

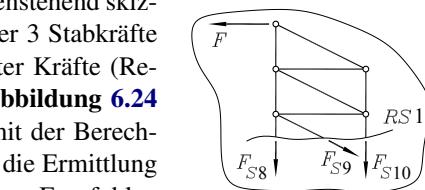


- Am Ausleger kann man auf diesem Wege nur die beiden Stabkräfte an der Spitze (Knoten E) berechnen, an den Knoten G und H tauchen dann 3 Unbekannte auf.
- Mit Ritterschen Schnitten kommt man weiter. In der Abbildung 6.24 sind die Vorschläge RS1 bis RS4 für sinnvolle Schnittführungen eingezeichnet.

- Am Turm können alternativ zu den beschriebenen Rundumschnitten auch Ritter-Schnitte verwendet werden, der nebenstehend skizzierte Schnitt RS1 gestattet z. B. die Berechnung der 3 Stabkräfte F_{S8} , F_{S9} und F_{S10} ohne Benutzung vorab errechneter Kräfte (Rechenfehler pflanzen sich nicht fort!). Der in der Abbildung 6.24 angedeutete Ritter-Schnitt RS2 räumt schließlich mit der Berechnung der Seilkraft das entscheidende Hindernis für die Ermittlung der restlichen Stabkräfte von Turm und Ausleger weg. Empfohlen werden auch dafür Ritter-Schnitte (wie z. B. RS3 und RS4).

- Im Allgemeinen ist man gut beraten, wenn man komplizierte Systeme in mehrere Teilsysteme zu zerlegen versucht: Der Ausleger ist bei C am Portal gelenkig (zweiwertig) gelagert und zusätzlich durch ein einwertiges Lager (Seil) am Turm gefesselt. Entsprechend nebenstehender Skizze können die „Lagerreaktionen“ berechnet werden:

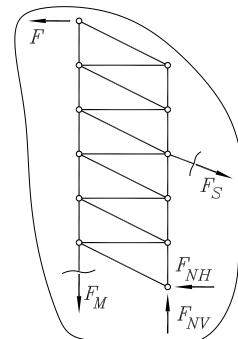
$$F_S = \frac{8}{29}\sqrt{73}F \quad ; \quad F_{CH} = \frac{64}{29}F \quad ; \quad F_{CV} = \frac{5}{29}F \quad .$$



- Nun kann der Ausleger völlig eigenständig behandelt werden (z. B. mit Rundumschnitten oder - besser - mit Ritterschen Schnitten wie RS4). Die errechneten Anschlusskräfte sind an Portal und Turm mit entgegengesetztem Richtungssinn anzubringen.

Dies zeigt die nebenstehende Skizze exemplarisch für den Turm. Auch der Turm ist auf dem Portal durch ein zweiwertiges Lager (Gelenk bei N) und ein einwertiges Lager (Stab bei M) befestigt. Mit der nun bekannten Seilkraft F_S können auch diese „Lagerreaktionen“ ermittelt werden:

$$F_M = \frac{9}{29}F \quad ; \quad F_{NH} = \frac{35}{29}F \quad ; \quad F_{NV} = \frac{33}{29}F \quad .$$



- Schließlich bleibt aber doch mit dem durch die 5 Anschlusskräfte belasteten Portal ein für die Berechnung der Stabkräfte höchst unangenehmes Gebilde übrig, obwohl auch die Lagerreaktionen bei A und B bekannt sind. An keinem Knoten stoßen weniger als 3 Stäbe mit noch unbekannten Stabkräften zusammen, und es lässt sich kein Ritter-Schnitt so legen, dass die geschnittenen Stabkräfte berechnet werden könnten.

Natürlich stehen insgesamt genügend Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Stabkräfte zur Verfügung, aber die Lösung des Gleichungssystems sollte wohl doch dem Computer übertragen werden.

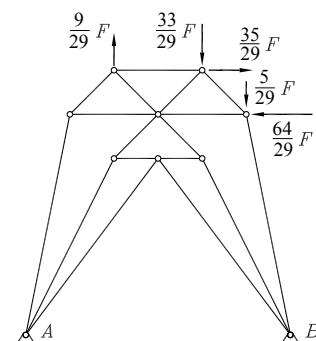


Abbildung 6.25: Portal

Empfehlenswert für die Berechnung der Stabkräfte des in **Abbildung 6.25** dargestellten Portals ist folgende Strategie:

Neben den 17 Stabkräften werden auch die 3 Lagerreaktionen als „Unbekannte“ in die Berechnung einbezogen. Dafür sind an den 10 Knoten (einschließlich der beiden Knoten bei A und B) insgesamt 20 Gleichgewichtsbedingungen zu formulieren. Die Lösung kann dann recht wirksam durch den Vergleich mit den bereits bekannten Lagerreaktionen kontrolliert werden.

Dem Leser wird empfohlen, die besprochenen Schritte nachzuvollziehen und schließlich für das Portal das Gleichungssystem zu formulieren und mit einem geeigneten Programm zu lösen (unter www.TM-aktuell.de findet man diese Lösung Schritt für Schritt). Dabei taucht ein hier gerade noch beherrschbares neues Problem auf:

Die Lösung eines umfangreichen Gleichungssystems mit einem Rechenprogramm setzt die richtige Eingabe der Werte voraus. Dies kann bei großen Systemen nicht nur sehr mühsam sein, es ist auch sehr fehleranfällig.



Ein System mit 20 Gleichungen (Portal in **Abbildung 6.25**) wird durch 420 Werte beschrieben. Wer die oben angestellten Überlegungen (Zerlegung in Teilprobleme) nicht nachvollziehen möchte und das gesamte System nach dem Knotenschnittverfahren behandeln will (Nachdenken durch Aufwand ersetzen!), muss sich für das Gleichungssystem mit 58 Unbekannten um insgesamt 3422 Werte kümmern.

Diese Schwierigkeit kann nur umgangen werden, wenn auch das Aufstellen des Gleichungssystems im Computer durchgeführt wird. Dafür ist ein spezielles Programm erforderlich, in das die Information eingegeben wird, die die Aufgabe eindeutig beschreibt. Allgemein gilt:

Ein **Statik-Problem** wird beschrieben durch

- *Geometrie-Information* (vorzugeben als ein Satz von Punkten, bezogen auf ein beliebig festzulegendes Koordinatensystem, für ein Fachwerk z. B. die Koordinaten aller Knoten),
- *Topologie-Information* (beschreibt die Lage der einzelnen Teile des Systems zueinander, für ein Fachwerk ist das z. B. die Information, welche Knoten durch Stäbe miteinander verbunden sind),
- Information über die *Belastung* (für ein Fachwerk die Angaben, an welchen Knoten welche Kräfte angreifen),
- Information über die *Lagerung* (für ein Fachwerk die Angaben, welche Knoten wie gelagert sind).

Dafür findet man unter www.TM-aktuell.de neben dem in diesem Abschnitt behandelten Fachwerk noch zahlreiche andere Beispiele, die mit unterschiedlichen Software-Produkten gelöst werden. Die Abbildung auf der folgenden Seite zeigt ein Beispiel.



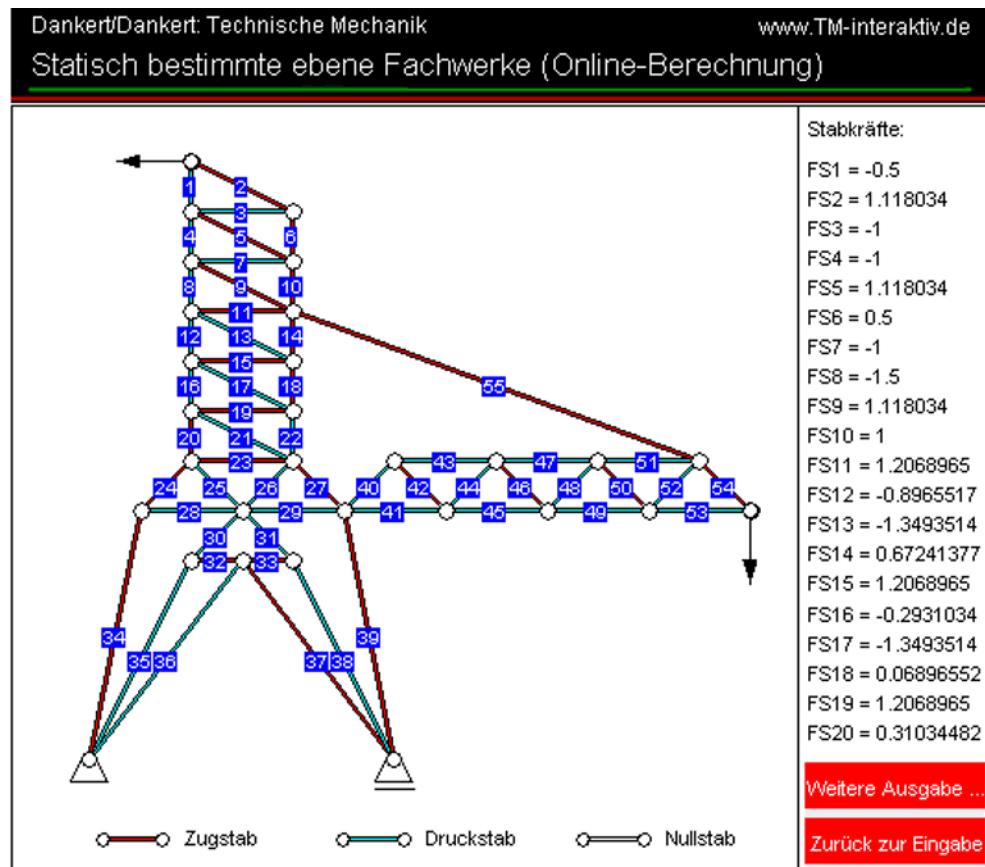


Abbildung 6.26: Auch bei Nutzung komfortabler Software immer zwingend: Verifikation der Ergebnisse

Der Bildschirm-Schnappschuss (**Abbildung 6.26**) zeigt einen Teil der Ergebnisse, die mit dem unter www.TM-interaktiv.de verfügbaren Programm berechnet wurden. Es ist verführerisch bequem: Ein paar Mausklicks im WWW, und das System ist beschrieben und wird berechnet. Wie aus den Eingabe-Informationen programmintern das Gleichungssystem erzeugt wird, braucht den Benutzer des Programms nicht zu interessieren.



Verifizieren von Computerrechnungen

Die Beschreibung des Problems durch einzugebende Daten ist ein außerordentlich fehleranfälliger Prozess. Für die Kontrolle der Ergebnisse bietet die Theorie der Fachwerke viele Möglichkeiten, z. B.: *Nullstab-Kriterien* auswerten, einzelne Stabkräfte mit *Ritter-Schnitten* nachzurechnen. Besonders effektiv ist es, neben einem komfortablen Fachwerk-Programm zusätzlich ein Programm zur Lösung von Gleichungssystemen zu nutzen, für das man für zulässige Teilsysteme die Gleichgewichtsbedingungen „von Hand“ formuliert.

6.4.4 Starrkörpersysteme als Fachwerke, Leichtbau

Ein aus drei (starren) Fachwerkstäben gebildetes Dreieck ist ein starrer Körper (**Abbildung 6.27**). Wenn an ein solches Dreieck ein weiteres Dreieck aus genau zwei neuen Stäben und einem neuen Knoten angefügt wird (**Abbildung 6.28**), entsteht ein neuer starrer Körper („Fachwerk mit einfachem Aufbau“, vgl. Abschnitt 6.4.1).

Es ist also möglich, jedes statisch bestimmte Starrkörpersystem als Fachwerk zu modellieren, indem jeder einzelne starre Körper durch ein Fachwerk mit einfachem Aufbau ersetzt wird. Diese Aussage kann sowohl für die Auslegung der Konstruktion als auch für die Berechnung mit Vorteil genutzt werden:

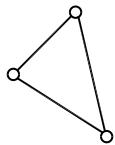


Abbildung 6.27: Ein Dreieck, das aus drei (starren) Fachwerkstäben gebildet wird, ist ein starrer Körper

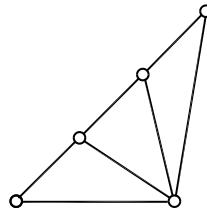


Abbildung 6.28: Jedes weitere Dreieck muss genau einen neuen Knoten und zwei neue Stäbe erzeugen

- ⇒ Wenn ein Programm zur Berechnung statisch bestimmter Fachwerke verfügbar ist (wie z. B. auf der Seite 88 demonstriert), kann das Starrkörpersystem sehr einfach modelliert und berechnet werden.
- ⇒ Die Modellierung starrer Körper als Fachwerke gibt den Kraftfluss vor, wie die belastenden Kräfte durch das System auf die Lager übertragen werden. Durch Variantenrechnungen (und Vergleich der sich ergebenden Stabkräfte) kann nach günstigen Geometrien gesucht werden. Gegebenenfalls kann dann das System tatsächlich als Fachwerk gebaut werden, oder die starren Körper werden gewichtsparend konstruiert und durch Rippen nur dort verstärkt, wo im Modell die Fachwerkstäbe liegen. Beides führt zu leichteren Konstruktionen.

Dies wird nachfolgend an zwei Beispielen demonstriert (weitere Beispiele findet man unter www.TM-aktuell.de). Dabei wird allgemein folgende Vorgehensweise empfohlen:

- Eventuell vorhandene Linienlasten werden durch statisch äquivalente Einzellasten ersetzt.
- An jedem Starrkörper werden an allen markanten Punkten (Lastangriffspunkte, Lager, Gelenke, ...) Knoten vorgesehen.
- Die Knoten werden durch Stäbe verbunden, die für jeden Starrkörper ein „Fachwerk mit einfachem Aufbau“ ergeben.

Beispiel 1: Die **Abbildung 6.29** zeigt das Starrkörpersystem, das als Beispiel 1 im Abschnitt 6.2 berechnet wurde, und die **Abbildung 6.30** zeigt das zugehörige Fachwerk-Modell: Die beiden Stäbe des Starrkörpersystems sind Stäbe geblieben, die beiden Festlager haben sich auch nicht verändert. Der obere Träger hat vier markante Punkte (Festlager, zwei Anschlussstellen der Stäbe und den Angriffspunkt der Resultierenden der Linienlast), der untere Träger nur drei markante Punkte. Diese sind jeweils die Ausgangspunkte für die zu erzeugenden Dreiecke.

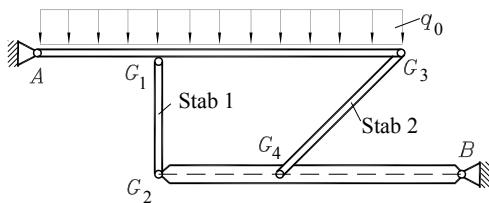


Abbildung 6.29: Starrkörpersystem

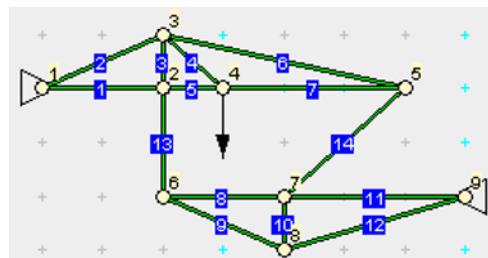


Abbildung 6.30: Fachwerk-Modell

Der in der Abbildung 6.31 zu sehende Ausschnitt des Bildschirm-Schnappschusses mit den Ergebnissen zeigt, dass man genau die Werte der Starrkörperberechnung aus dem Abschnitt 6.2 erhält.

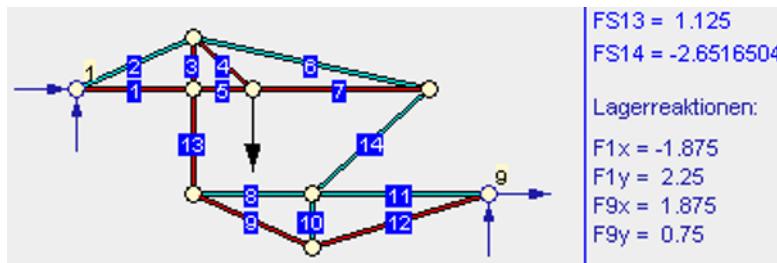
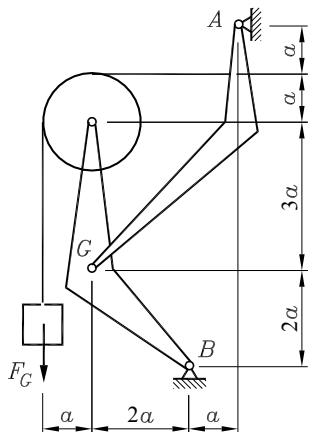
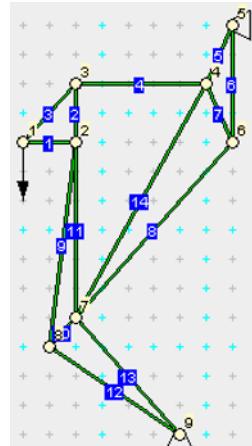


Abbildung 6.31: Ergebnis der Berechnung des Systems der Abbildung 6.30

**Beispiel 2:**

Das links dargestellte Starrkörpersystem (Rechnung siehe Seite 69) soll als Fachwerk modelliert werden. Rechts sieht man das Ergebnis: Die Umlenkrolle wurde als ein Stab-Dreieck modelliert, die beiden anderen Starrkörper mit jeweils zwei Dreiecken. Das horizontale Seil ist ein Stab, an den Lagern ändert sich nichts.



Die beiden hier gezeigten Beispiele und weitere (zum Teil wesentlich kompliziertere) Starrkörpersysteme, die als Fachwerke berechnet werden, findet man unter www.TM-interaktiv.de.

6.5 Aufgaben

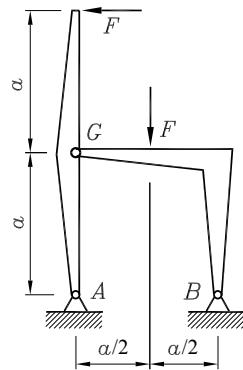
Aufgabe 6.1:

Man ermittle für das nebenstehend abgebildete zusammengesetzte System die Auflager- und Gelenkkraftkomponenten.

Gegeben: F .

Hinweis: Die Vertikalkomponenten der Lagerkräfte lassen sich auch ohne Zerschneiden des Verbindungsgelenkes am Gesamtsystem ermitteln, die Horizontalkomponenten allerdings nicht.

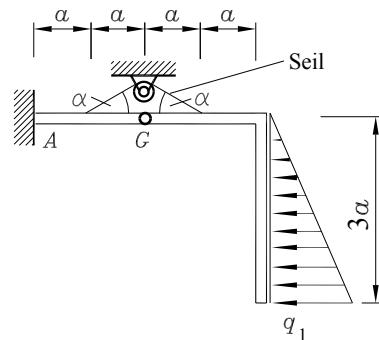
Die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem sind meist besonders einfach aufzuschreiben und immer eine recht wirksame Kontrolle für die errechneten Ergebnisse.


Aufgabe 6.2:

Das skizzierte Tragwerk ist bei A starr eingespannt und wird außerdem von einem Seil gehalten, das über eine Rolle geführt ist. Es ist durch eine Dreieckslast mit der Maximalintensität q_1 belastet.

Gegeben: $a = 5\text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$; $q_1 = 3\text{ N/cm}$.

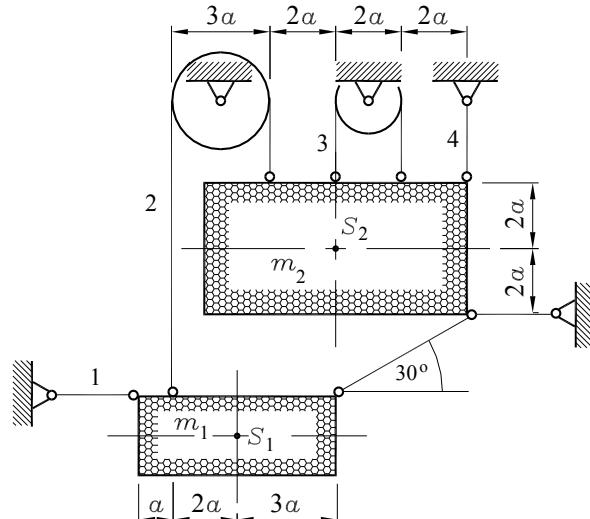
Man berechne die Lagerreaktionen bei A und die Kräfte in dem Gelenk G .


Aufgabe 6.3:

Zwei Massen m_1 und m_2 sind wie skizziert an Seilen aufgehängt. Die Seilmassen können vernachlässigt werden, so dass das System nur durch die in den Schwerpunkten S_1 und S_2 angreifenden Gewichtskräfte von m_1 und m_2 belastet ist.

Gegeben: m_1 ; $m_2 = 3m_1$.

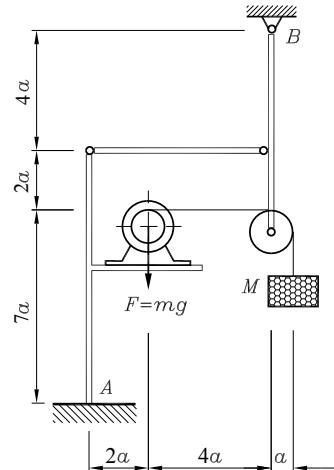
Es sind die Kräfte in den Seilen 1, 2, 3 und 4 zu ermitteln.



Aufgabe 6.4:

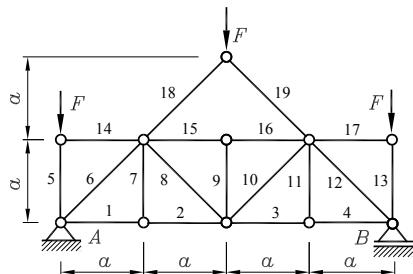
Das nebenstehend skizzierte Hubwerk ist durch die Gewichtskraft des Motors $F = mg$ und die Gewichtskraft der Masse M belastet. Es sind die Lagerreaktionen bei A und B zu berechnen.

$$\text{Gegeben: } a; \quad M; \quad m = \frac{M}{8} .$$

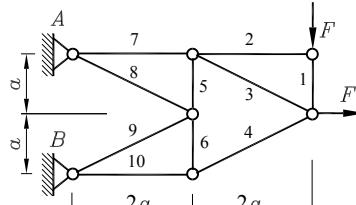
**Aufgabe 6.5:**

Für die nachstehend skizzierten Fachwerke sind für alle Stäbe, die mit Ziffern bezeichnet sind, die Stabkräfte zu berechnen.

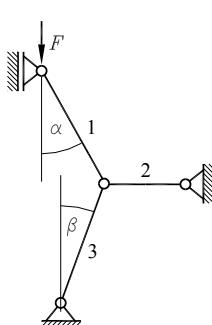
Für die Fachwerke 2 und 4 sind zusätzlich die für die Computerrechnung aufbereiteten Gleichungssysteme zur Berechnung sämtlicher Stabkräfte aufzustellen.



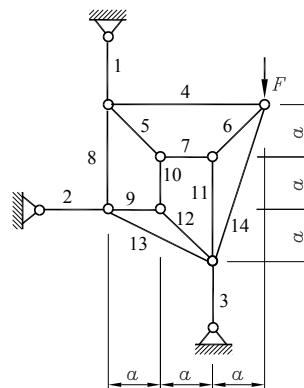
Fachwerk 1
Gegeben: $F = 10\text{kN}$



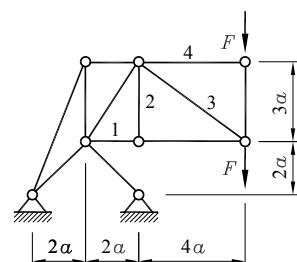
Fachwerk 2 (www.TM-aktuell.de)
Gegeben: F



Fachwerk 3
Gegeben: $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 20^\circ$;
 $F = 5\text{kN}$.



Fachwerk 4 (www.TM-aktuell.de)
Gegeben: F



Fachwerk 5
Gegeben: $F = 3\text{kN}$

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

7 Schnittgrößen

7.1 Definitionen

Im Folgenden werden ausschließlich Tragelemente betrachtet, bei denen eine der drei Abmessungen deutlich größer ist als die beiden anderen (Stäbe, Balken, Rahmen, ...), gefragt wird nach den inneren Beanspruchungen. Dies dient der Vorbereitung der Verformungsberechnung und der Untersuchung der Tragfähigkeit in der Festigkeitslehre. In diesem Kapitel wird das ebene Problem behandelt.

So wie an einer Einspannung als Lagerreaktionen zwei Kraftkomponenten und ein Einspannmoment auftreten, sind auch bei einem Schnitt an beliebiger anderer Stelle des Trägers zwei Kraftkomponenten und ein Moment erforderlich, um Gleichgewicht für den abgeschnittenen Teil zu ermöglichen: Man kann sich am starren Träger jedes Teilstück als *starr eingespannt am Restsystem* vorstellen. Diese „Einspannreaktionen“ an einer Schnittstelle heißen

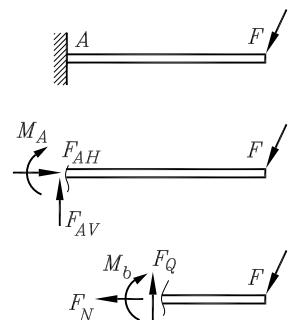
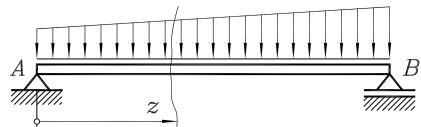


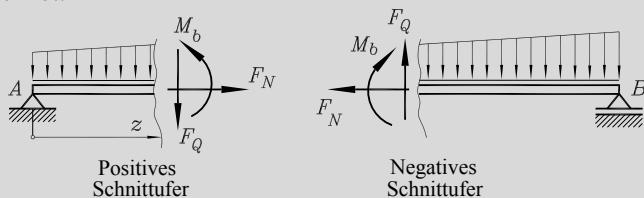
Abbildung 7.1: Schnittgrößen darf man sich wie Lagerreaktionen an einer starren Einspannung vorstellen.

- Schnittgrößen:**
- Die *Normalkraft* F_N steht senkrecht auf der Schnittebene,
 - die *Querkraft* F_Q liegt in der Schnittebene,
 - das Schnittmoment wird als *Biegemoment* M_b bezeichnet.

Weil die Schnittgrößen über die Länge des Trägers veränderlich sind, wird die Schnittstelle durch eine Koordinate z gekennzeichnet (nebenstehende Abbildung), und es wird folgende Vereinbarung getroffen:



Das Schnittufer auf der Koordinatenseite wird als *positives Schnittufer*, das andere als *negatives Schnittufer* bezeichnet.



- Die *Normalkraft* F_N wird immer als *Zugkraft* angetragen.
- Die *Querkraft* F_Q zeigt am positiven Schnittufer „nach unten“, am negativen Schnittufer „nach oben“.
- Das *Biegemoment* M_b wird so angetragen, dass die „untere“ Faser des Trägers auf Zug beansprucht wird.
- Um bei Rahmenkonstruktionen mit dem Begriff „unten“ keine Probleme zu bekommen, wird immer eine *Bezugsfaser* definiert, die für horizontale Trägerteile üblicherweise auf der Unterseite gezeichnet wird. In den gerade getroffenen Vereinbarungen kann der Begriff „unten“ durch „Bezugsfaserseite“ ersetzt werden.

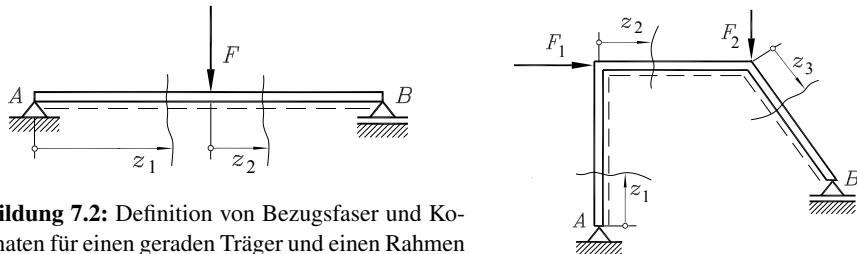


Abbildung 7.2: Definition von Bezugsfaser und Koordinaten für einen geraden Träger und einen Rahmen

Die Schnittgrößen ergeben sich wie die Lagerreaktionen aus Gleichgewichtsbedingungen am freigeschnittenen Teilsystem. Da der Träger durch den Schnitt in zwei Teile zerfällt, sollte man die Gleichgewichtsbedingungen an dem Trägerteil formulieren, für den dies mit dem geringeren Aufwand verbunden ist. Empfehlenswert sind

- eine Kraft-Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Normalkraft,
- eine Kraft-Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Querkraft,
- eine Momenten-Gleichgewichtsbedingung mit der Schnittstelle als Bezugspunkt.

Die Schnittgrößen sind Funktionen der Koordinate z . Schon bei relativ einfachen Problemen weisen diese Funktionen Unstetigkeitsstellen auf (Unstetigkeiten des Funktionswertes bzw. der Ableitung des Funktionswertes nach z), so dass sie bei Verwendung der elementaren mathematischen Funktionen nur bereichsweise aufgeschrieben werden können. Es wird empfohlen, einen neuen Bereich für die Formulierung der Schnittgrößen beginnen zu lassen

- am Trägeranfang,
- an den Einleitungsstellen von Einzelkräften und -momenten,
- an den Punkten, an denen eine Linienlast beginnt bzw. endet,
- an Punkten, an denen eine Linienlast die mathematische Funktion, die ihre Intensität definiert, ändert (z. B.: Übergang von konstanter zu linear veränderlicher Linienlast),
- an einem Lager,
- an einer Ecke,
- an einer Verzweigung.

Natürlich muss in jedem Bereich ein Schnitt gelegt werden, und nach dem Antragen aller Kräfte und Momente an einem der beiden Teilsysteme sind dann die drei Gleichgewichtsbedingungen aufzuschreiben. Die daraus gewonnenen Funktionen für die Schnittgrößen gelten immer nur innerhalb des betrachteten Bereichs.

Es ist meist bequemer, für jeden Bereich eine eigene Koordinate zu definieren. Viele der nachfolgend angestellten Überlegungen zu den Schnittgrößenverläufen und auch mehrere Anwendungen in der Festigkeitslehre vereinfachen sich erheblich, wenn man folgende Empfehlungen beachten kann:

- ⇒ Bei Definition mehrerer Koordinaten sollten diese vom Beginn bis zum Ende des Tragwerks alle (in Trägerlängsrichtung) gleichsinnig gerichtet sein:

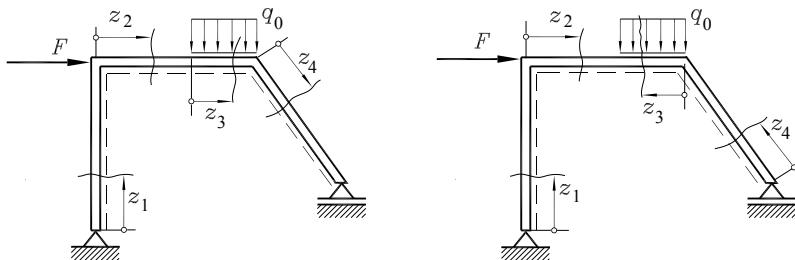


Abbildung 7.3: Empfohlene Koordinatendefinition (links) und mögliche Koordinatendefinition (rechts), die aber zu schwierigen Überlegungen zwingen kann (und deshalb vermieden werden sollte)

- ⇒ Die Bezugsfaser sollte in allen Bereichen auf der gleichen Seite des Tragwerks liegen (das Tragwerk „nicht schneiden“).

Bei einem Rahmen (nebenstehende **Abbildung**) folgt man dieser Empfehlung, indem man die Bezugsfaser auf die Innenseite legt, so dass sie für die beiden vertikalen Teile einmal rechts und einmal links liegt.

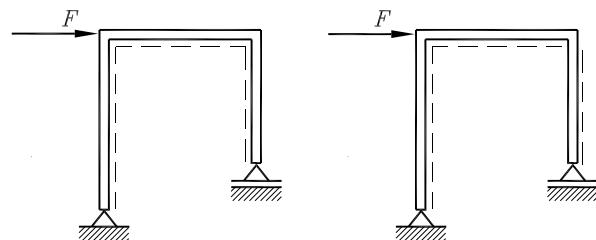


Abbildung 7.4: Empfohlene Lage der Bezugsfaser (links) und mögliche Lage (rechts), die aber nicht empfehlenswert ist

- ⇒ Der wesentliche Grund für die beiden Empfehlungen ist, dass für die Schnittgrößen, die an den Übergangsstellen ein (noch zu besprechendes) ganz bestimmtes Verhalten zeigen, dies auch durch ihre mathematische Beschreibung widergespiegelt wird. Die Empfehlungen können bei Tragwerken mit Zweigungen jedoch nicht konsequent eingehalten werden, wie es das nebenstehend skizzierte Beispiel zeigt.

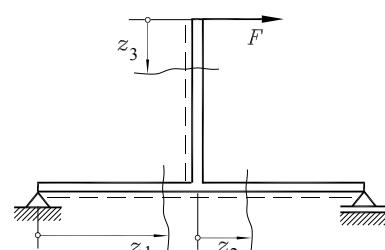


Abbildung 7.5: Verzweigtes System

Die Gleichgewichtsbedingungen dürfen natürlich nur an einem Teilsystem formuliert werden, an dem sämtliche Kräfte und Momente angetragen wurden. In dem nachfolgend skizzierten Beispiel könnte man für die Ermittlung der Schnittgrößen im Bereich $0 \leq z_3 \leq c$ wahlweise den linken oder den rechten Trägerteil betrachten. Hier bietet sich der rechte Trägerteil für das Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen an:

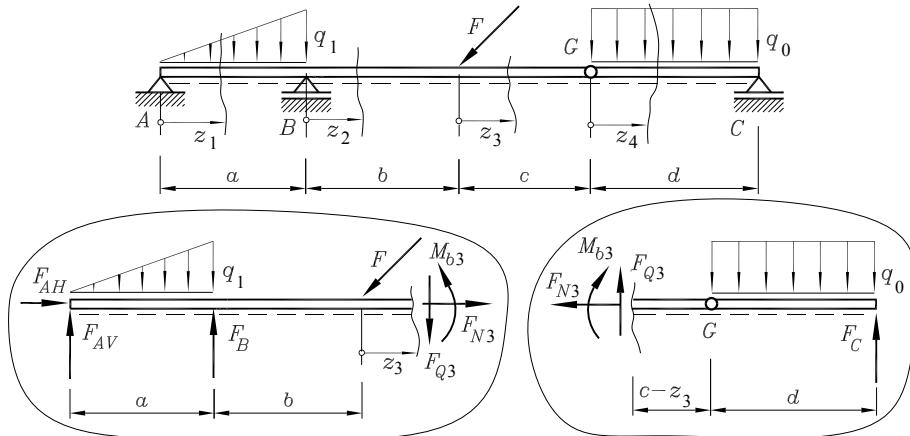


Abbildung 7.6: Immer das einfachere Teilsystem betrachten. Für den Bereich $0 \leq z_3 \leq c$ empfiehlt sich das rechte Teilsystem (das Gelenk muss dabei als nicht existent angesehen werden).

Wenn nur der aktuelle Bereich in die Gleichgewichtsbetrachtungen einbezogen werden soll, müssen unbedingt die Schnittgrößen am Bereichsanfang bzw. -ende angetragen werden:

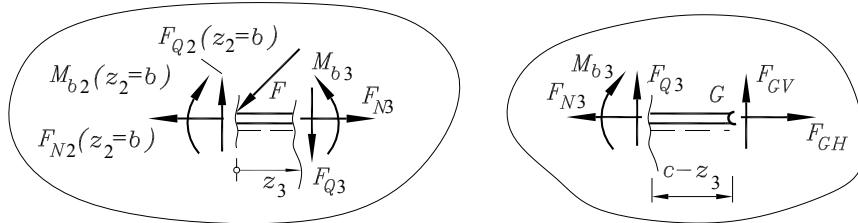


Abbildung 7.7: Vorsicht bei Betrachtung nur des aktuellen Bereichs, denn dann wurden zwei Schnitte gelegt! Hier kann man das mit Vorteil nutzen, wenn die Gelenkkräfte bekannt sind.

Während am rechten Teil in diesem Fall (bei vorher ohnehin zu berechnenden Gelenkkräften) die Schnittgrößen besonders einfach zu ermitteln sind, wird von der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am linken Teilsystem, an dem die Schnittgrößen am Ende des Bereichs $0 \leq z_2 \leq b$ zu berücksichtigen sind, abgeraten.

Einen sehr guten Überblick über die innere Beanspruchung eines Tragwerks liefert die grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe. Dazu wird vereinbart, dass die Funktionswerte direkt über der geometrischen Darstellung des Tragwerks gezeichnet werden, positive Werte werden

„nach oben“ angetragen (bzw. auf der der Bezugsfaser gegenüberliegenden Seite). Dies ergibt beispielsweise die folgenden Darstellungen (Hinweis: Nach Durcharbeitung des Abschnitts 7.3 sollte man in der Lage sein, die Darstellung der Schnittgrößenverläufe für beide Beispiele ohne größere Rechnung zu bestätigen):

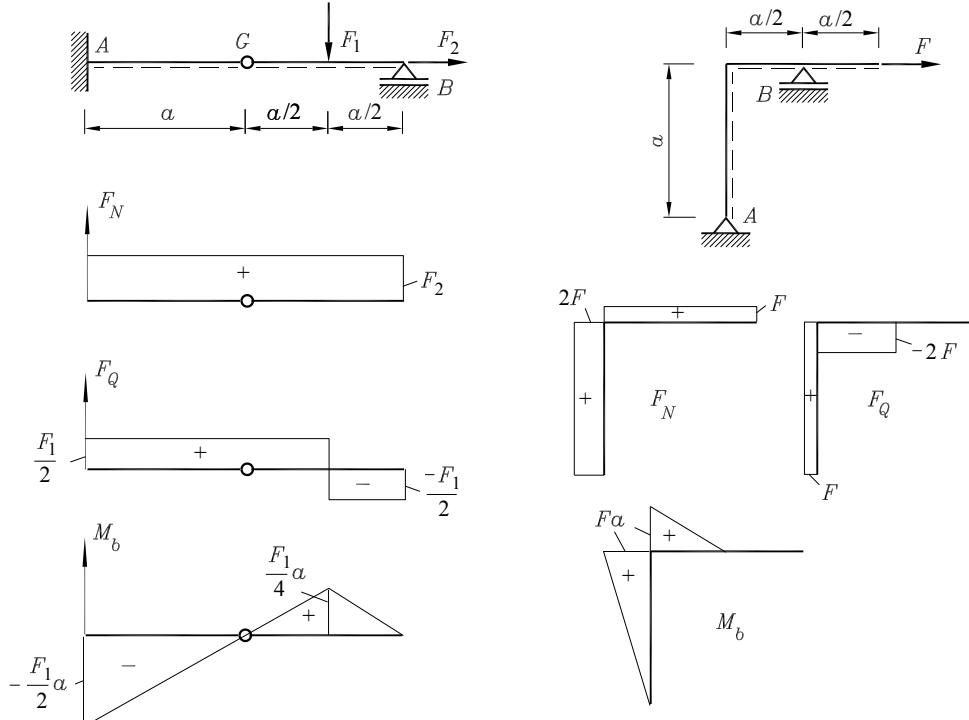
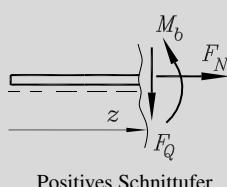


Abbildung 7.8: Zwei Beispiele für die grafische Darstellung von Schnittgrößen

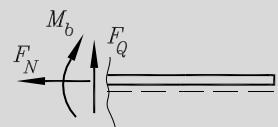
Die in den linken drei Skizzen der **Abbildung 7.8** eingetragenen Koordinatenpfeile für F_N , F_Q und M_b werden im Allgemeinen nicht gezeichnet und zukünftig stets weggelassen.

Unter Beachtung aller Vereinbarungen können die Schnittgrößen nach dem Festlegen von Koordinaten und Bezugsfaser immer entsprechend der Darstellung einer der beiden folgenden Varianten an einem Schnittufer angetragen werden (auf ein beliebiges Schnittufer kann immer eines der beiden Bilder so gelegt werden, dass Koordinate und Bezugsfaser „passen“):

Die nebenstehend zu sehende Definition positiver Schnittgrößen ist die Basis für alle ebenen Biegeprobleme gerader Träger.



Positives Schnittufer



Negatives Schnittufer

Beispiel:

Für den skizzierten Träger mit einer Einzellast ermittle man analytisch den Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentenverlauf und stelle die Verläufe grafisch dar.

Gegeben: $F = 60\text{ N}$; $\alpha = 30^\circ$; $l = 10\text{ cm}$.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen am freigeschnittenen Träger errechnet man die Lagerreaktionen:

$$F_{AH} = F \cos \alpha = 52,0\text{ N};$$

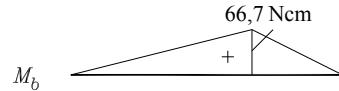
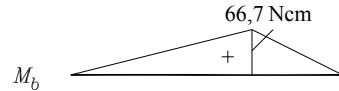
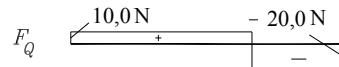
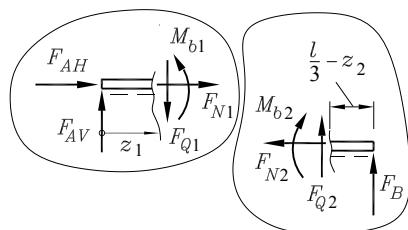
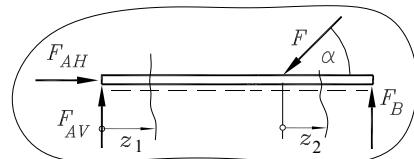
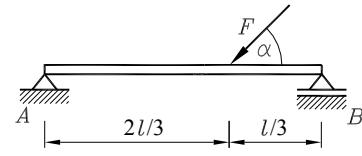
$$F_{AV} = \frac{1}{6}F = 10,0\text{ N};$$

$$F_B = \frac{1}{3}F = 20,0\text{ N}.$$

Für zwei Bereiche werden die beiden Koordinaten z_1 und z_2 eingeführt (vgl. Empfehlungen auf Seite 94). Die Schnittgrößen werden nach den Schnittführungen in beiden Bereichen entsprechend der Vorschrift auf Seite 97 angetragen.

Im linken Bereich werden die Bedingungen für das Gleichgewicht am linken Trägerteil, im rechten Bereich am rechten Trägerteil aufgeschrieben, wobei als Momenten-Bezugspunkt jeweils die Schnittstelle gewählt wird:

Linkes	\rightarrow	$F_{AH} + F_{N1}$	$= 0$
Teil-	\uparrow	$F_{AV} - F_{Q1}$	$= 0$
system	$S\ddot{o}$	$F_{AV}z_1 - M_{b1}$	$= 0$
Rechtes	\leftarrow	F_{N2}	$= 0$
Teil-	\uparrow	$F_B + F_{Q2}$	$= 0$
system	$S\ddot{o}$	$M_{b2} - F_B(\frac{l}{3} - z_2)$	$= 0$



Daraus ergeben sich die Schnittgrößenverläufe in analytischer Darstellung, die in den Skizzen grafisch dargestellt sind (die Formeln gelten jeweils für den Bereich, den die entsprechende Koordinate erfasst: $0 \leq z_1 \leq 2l/3$ bzw. $0 \leq z_2 \leq l/3$):

$$\begin{aligned} F_{N1} &= -52,0\text{ N}; & F_{Q1} &= 10,0\text{ N}; & M_{b1} &= \frac{1}{6}Fz_1; \\ F_{N2} &= 0; & F_{Q2} &= -20,0\text{ N}; & M_{b2} &= \frac{1}{3}F(\frac{l}{3} - z_2). \end{aligned}$$

Für F_N und F_Q ergeben sich an der Übergangsstelle Sprünge im Verlauf, der Biegemomentenverlauf M_b hat dort in diesem Fall sein Maximum, das man wie folgt berechnen kann:

$$M_{b,max} = M_{b1}(z_1 = \frac{2}{3}l) = M_{b2}(z_2 = 0) = \frac{1}{9}Fl = 66,7\text{ Ncm}.$$

7.2 Differenzielle Zusammenhänge

Zunächst wird ein Träger betrachtet, der nur durch eine Linienlast belastet ist (Einzelkräfte verursachen Unstetigkeiten und müssen gesondert untersucht werden). Aus dem Träger wird an der Stelle z ein sehr kleines Element (Länge Δz) herausgeschnitten:

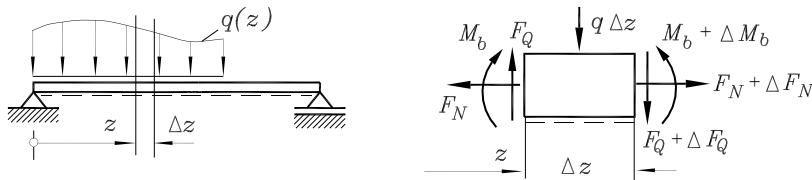


Abbildung 7.9: Änderungen der Schnittgrößen am Element der Länge Δz

Die Schnittgrößen verändern sich von der Stelle z bis zur Stelle $(z + \Delta z)$ um ΔF_N , ΔF_Q bzw. ΔM_b . Das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung und das Momentengleichgewicht um den Mittelpunkt des Elements liefern:

$$\begin{aligned} &\downarrow && q\Delta z + \Delta F_Q = 0, \\ M\Omega & -\Delta M_b + F_Q \Delta z + \Delta F_Q \frac{\Delta z}{2} = 0. \end{aligned}$$

Nach Division beider Gleichungen durch Δz ergibt der Grenzübergang

$$\Delta z \rightarrow 0 \quad \text{und damit} \quad \frac{\Delta F_Q}{\Delta z} \rightarrow \frac{dF_Q}{dz}, \quad \frac{\Delta M_b}{\Delta z} \rightarrow \frac{dM_b}{dz} \quad \text{und} \quad \Delta F_Q \rightarrow 0$$

die

Differenzial-Beziehungen für die Schnittgrößen:

$$\frac{dF_Q}{dz} = -q \quad , \quad \frac{dM_b}{dz} = F_Q \quad . \quad (7.1)$$

Diese beiden Formeln können zur Kontrolle der aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelten Querkraft- und Momentenverläufe benutzt werden. Darüber hinaus lassen sich aus ihnen folgende Aussagen ableiten:

Da die Ableitung von F_Q der Intensität der Linienlast proportional ist, ist der Querkraftverlauf innerhalb eines Bereichs ohne Linienlast konstant (an den Bereichsgrenzen, an denen Einzelkräfte eingeleitet werden, ändert sich die Querkraft sprunghaft).

Die Größe der Querkraft ist an jeder Stelle gleich dem Anstieg der Kurve des Momentenverlaufs:

- Positive Querkraft \rightarrow positiver Anstieg der M_b -Kurve,
- negative Querkraft \rightarrow negativer Anstieg der M_b -Kurve,
- konstante Querkraft \rightarrow linearer Verlauf der M_b -Kurve.

Beispiel 1: Für den nebenstehend skizzierten Träger ermittle man

- den Querkraftverlauf und den Biegemomentenverlauf analytisch,
- die grafische Darstellung des Querkraftverlaufs und des Biegemomentenverlaufs,
- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.

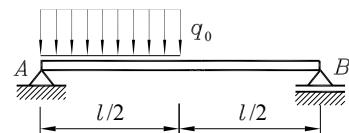
Vor der Ermittlung der Schnittgrößen ist die Berechnung der Lagerkräfte erforderlich (eine wird unbedingt benötigt, die andere vereinfacht die Schnittgrößen-Berechnung). Nebenstehend sind die Ergebnisse der Lagerkraft-Berechnung und die für die nachfolgende Schnittgrößen-Berechnung gewählten beiden Koordinaten eingetragen.

Es wird jeweils das einfachere Teilsystem zur Berechnung der Schnittgrößen benutzt (im ersten Bereich das linke, im zweiten Bereich das rechte), und die Gleichgewichtsbedingungen liefern (nach Einsetzen der vorab berechneten Lagerreaktionen):

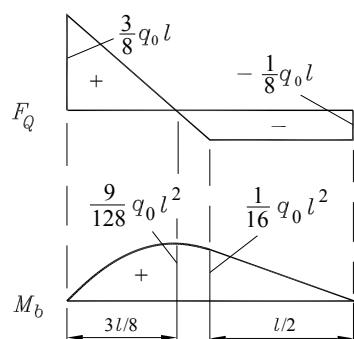
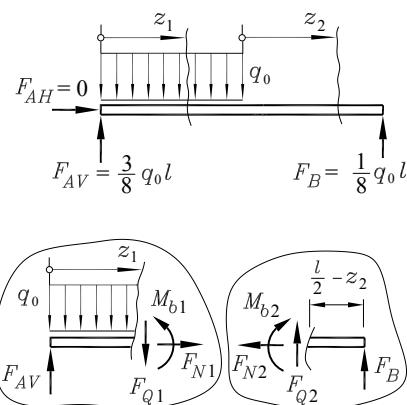
$$\begin{aligned} F_{Q1} &= \frac{3}{8} q_0 l - q_0 z_1 & M_{b1} &= \frac{3}{8} q_0 l z_1 - \frac{1}{2} q_0 z_1^2 \\ F_{Q2} &= -\frac{1}{8} q_0 l & M_{b2} &= \frac{1}{8} q_0 l \left(\frac{l}{2} - z_2 \right) \end{aligned}$$

Die Funktionen erfüllen selbstverständlich in beiden Bereichen die differenziellen Beziehungen 7.1. Die nebenstehend skizzierten Funktionsverläufe bestätigen folgende *verallgemeinerungsfähigen Aussagen*:

- Im Bereich konstanter Linienlast ist die Querkraft linear veränderlich, das Biegemoment ist quadratisch veränderlich mit der Koordinate z_1 .
- Im (rechten) unbelasteten Bereich bleibt die Querkraft konstant, und das Moment ist linear veränderlich.
- An den Enden des Trägers sind die Biegemomente gleich Null, und die Größe der Querkräfte entspricht den dort eingeleiteten Lagerkräften.
- Zwischen den Lagern treten keine Querkraft- bzw. Momentensprünge auf, wenn keine Einzelkräfte bzw. -momente in das System eingeleitet werden.
- Das Moment hat an der Stelle einen relativen Extremwert, an der die Querkraft einen Null-durchgang hat.



Gegeben: l, q_0 .



- Der Momentenverlauf hat keinen Knick (auch nicht am Übergang vom quadratischen zum linearen Funktionsverlauf), wenn die Querkraft sich nicht sprunghaft ändert.

Die beiden letzten Aussagen folgen daraus, dass die Querkraft die erste Ableitung des Biegemoments ist.

Zur Beantwortung der Frage nach dem absolut größten Biegemoment müssen sowohl die relativen Extremwerte des Moments in den Bereichen mit Linienlast als auch die Momente an den Bereichsgrenzen bereitgestellt und miteinander verglichen werden. Im vorliegenden Fall ist der relative Extremwert betragsmäßig größer als das Moment am Übergang vom ersten zum zweiten Bereich. Den Ort des relativen Extremwertes ermittelt man durch das Nullsetzen der ersten Ableitung von $M_{b1}(z_1)$. Es ist also die Nullstelle der Querkraft:

$$F_{Q1}(\bar{z}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{8}l - \bar{z}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 = \frac{3}{8}l \quad .$$

Einsetzen in die Momentenfunktion liefert das relative (hier gleichzeitig absolute) Extremum:

$$M_{b,max} = M_{b1}(\bar{z}_1) = \frac{9}{128}q_0l^2 \quad .$$

Beispiel 2: Für den nebenstehend skizzierten Rahmen sind zu ermitteln:

- Schnittgrößenverläufe (F_N , F_Q und M_b) analytisch,
- grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe,
- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.

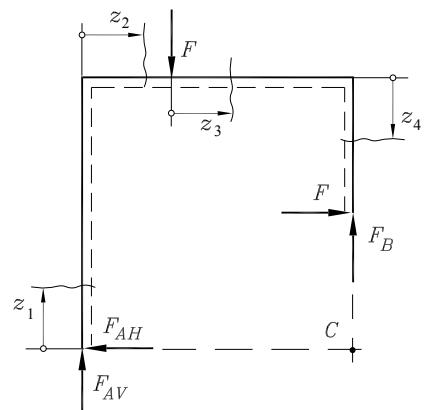
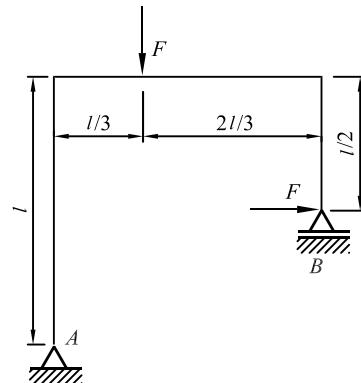
Gegeben: l , F .

Am Gesamtsystem werden die Lagerreaktionen berechnet und die vier Koordinaten zur Ermittlung der Schnittgrößen festgelegt. Die Bezugsfaser wird auf die Innenseite des Rahmens gelegt.

Die nebenstehende Skizze zeigt die Definition der Lagerreaktionen. Das Kraftgleichgewicht in horizontaler Richtung und die Momentengleichgewichtsbedingungen um A und C liefern die Lagerreaktionen:

$$F_{AH} = F ; \quad F_{AV} = \frac{1}{6}F ; \quad F_B = \frac{5}{6}F \quad .$$

Die Schnittgrößen werden an möglichst einfachen Teilsystemen ermittelt: Für die ersten beiden Bereiche werden jeweils die linken Teilsysteme mit positiven Schnittufern und für den dritten und vierten Bereich jeweils die rechten Teilsysteme mit negativen Schnittufern gewählt.



- a) Im Bereich $0 \leq z_1 \leq l$ (**Abbildung 7.10**) ergibt sich:

$$F_{N1} = -F_{AV} = -\frac{1}{6}F ;$$

$$F_{Q1} = F_{AH} = F ;$$

$$M_{b1} = F_{AH}z_1 = Fz_1 .$$

Die Lagerkraftkomponente, die im ersten Bereich die Größe der Normalkraft bestimmt, verursacht im zweiten Bereich die Querkraft (und umgekehrt):

$$F_{N2} = F_{AH} = F ;$$

$$F_{Q2} = F_{AV} = \frac{1}{6}F .$$

Für das Biegemoment liefert die Momenten-Gleichgewichtsbedingung um die Schnittstelle des zweiten Bereichs $0 \leq z_2 \leq l/3$:

$$M_{b2} = F_{AV}z_2 + F_{AH}l = Fl \left(\frac{z_2}{6l} + 1 \right) .$$

Die Normalkraft bleibt im horizontalen Teil (**Abbildung 7.11**, linke Skizze) konstant (es wird keine Horizontalkraft eingeleitet), die Querkraft ändert sich sprunghaft an der Einleitungsstelle der Kraft F :

$$F_{N3} = F ;$$

$$F_{Q3} = -F_B = -\frac{5}{6}F .$$

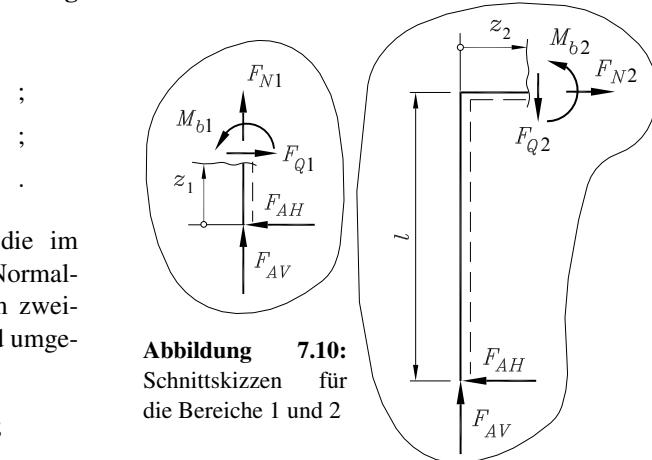


Abbildung 7.10:
Schnittskizzen für die Bereiche 1 und 2

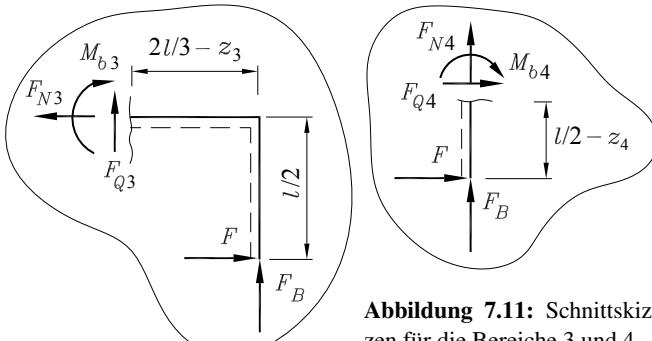


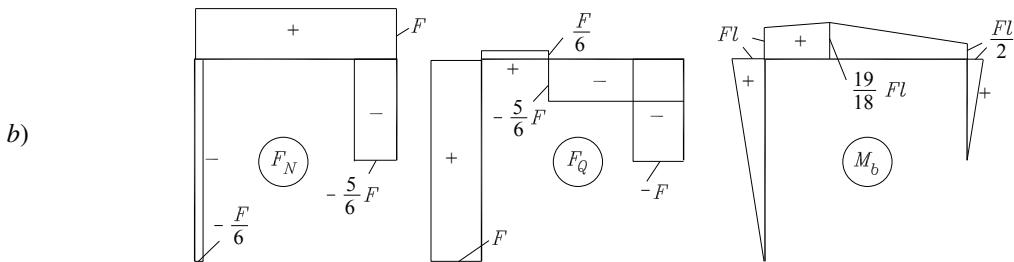
Abbildung 7.11:
Schnittskizzen für die Bereiche 3 und 4

Der Biegemomentenverlauf für diesen Bereich $0 \leq z_3 \leq 2l/3$ ergibt sich zu:

$$M_{b3} = F_B \left(\frac{2}{3}l - z_3 \right) + F \frac{l}{2} = \frac{1}{6}Fl \left(\frac{19}{3} - 5 \frac{z_3}{l} \right) .$$

Schließlich erhält man für den vierten Bereich $0 \leq z_4 \leq l/2$ (**Abbildung 7.11**, rechte Skizze):

$$F_{N4} = -F_B = -\frac{5}{6}F ; \quad F_{Q4} = -F ; \quad M_{b4} = F \left(\frac{l}{2} - z_4 \right) = Fl \left(\frac{1}{2} - \frac{z_4}{l} \right) .$$



- c) Für die Bestimmung des absolut größten Biegemoments ist keine Extremwertbetrachtung erforderlich. Da nur linear veränderliche Momentenverläufe vorliegen, genügt der Vergleich aller Momente an den Bereichsgrenzen. Das absolut größte Moment tritt im horizontalen Bereich des Rahmens unter der Kraft F (bei $z_3 = 0$) auf und beträgt $M_{b,max} = 1,06Fl$.

7.3 Ergänzende Aussagen zu den Schnittgrößen

Aus den im Abschnitt 7.1 behandelten Definitionen der Schnittgrößen und den im Abschnitt 7.2 hergeleiteten differenziellen Beziehungen lassen sich Aussagen ableiten, die für die Kontrolle der ermittelten Schnittgrößenverläufe nützlich sind und zum Teil sogar eine aufwendige Rechnung ersparen können:

- ⇒ Die *Normalkraft* ist bereichsweise konstant, wenn keine Linienlast in Längsrichtung des Trägers wirkt (wie zum Beispiel die Eigengewichtsbelastung eines vertikalen Trägerabschnitts). Bei allen im vorigen Abschnitt behandelten Aufgaben war diese Bedingung erfüllt. Man beachte außerdem, dass an rechtwinkligen Ecken die Querkraft des einen Bereichs zur Normalkraft im Anschlussbereich wird und umgekehrt.
- ⇒ Die *Querkraft* ist in Bereichen ohne Linienlast konstant. Eine Einzelkraft senkrecht zur Trägerlängsachse (bzw. diese Komponente einer Kraft) verursacht einen Sprung im Querkraftverlauf, der (bei gleichsinnig gerichteten Koordinaten und gleicher Lage der Bezugsfaser in den angrenzenden Bereichen) in Größe und Richtung der äußeren Kraft folgt (Abbildung 7.12 zeigt dies für Beispiel 2 aus Abschnitt 7.2).

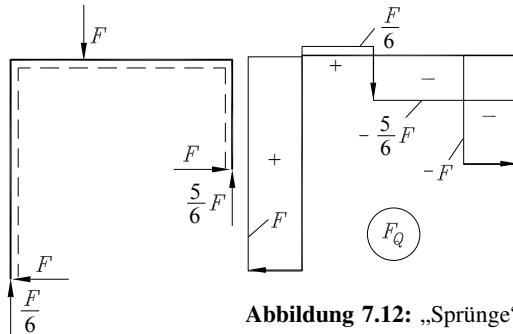


Abbildung 7.12: „Sprünge“ im Querkraftverlauf

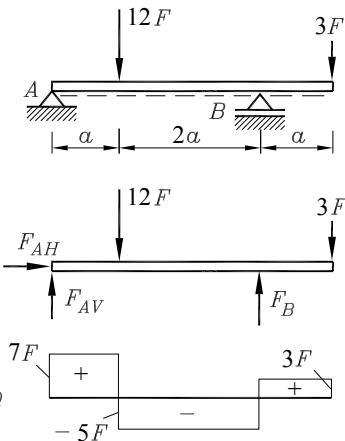
Eine Einzelkraft am Trägeranfang bewirkt einen Sprung „von Null auf die Größe dieser Kraft“, eine Einzelkraft am Trägerende einen entsprechenden Sprung „auf den Wert Null“. In Bereichen mit konstanter Linienlast ist die Querkraft linear veränderlich.

Diese Aussagen gestatten es häufig, den Querkraftverlauf ohne Rechnung zu ermitteln, was mit den beiden folgenden Beispielen demonstriert wird.

Beispiel 1: Die vertikalen Lagerreaktionen des skizzierten Trägers errechnen sich zu

$$F_{AV} = 7F \quad ; \quad F_B = 8F \quad .$$

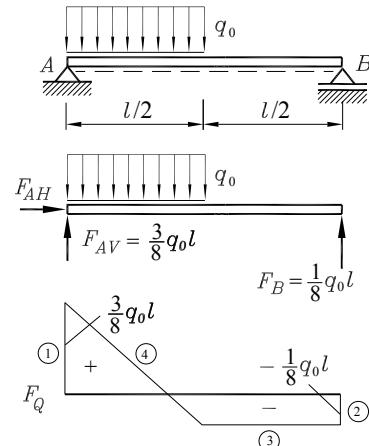
Dementsprechend beginnt der Querkraftverlauf am linken Rand mit $F_Q = 7F$, positiv, weil der „Sprung von Null“ der Richtung von F_{AV} folgt, bleibt konstant bis zum Sprung um $12F$ nach unten auf den Wert $-5F$, bleibt konstant, bis er um den Betrag von F_B auf $3F$ springt, um schließlich am rechten Rand, der dort angreifenden Kraft $3F$ folgend, „auf Null zu springen“. Der Querkraftverlauf kann ohne Rechnung gezeichnet werden, am rechten Rand ergibt sich sogar noch eine Kontrolle des Kräfte-Gleichgewichts.



Beispiel 2: Für den nebenstehend dargestellten Träger führen nach Berechnung der Lagerreaktionen folgende Überlegungen zur grafischen Darstellung des Querkraftverlaufs:

- ① Am linken Rand „Sprung von Null“ auf $\frac{3}{8}q_0l$,
- ② am rechten Rand „Rücksprung“ um $\frac{1}{8}q_0l$ auf Null,
- ③ im rechten Abschnitt konstanter Verlauf,
- ④ im linken Abschnitt linear veränderlicher Verlauf.

Diese vier Aussagen gemeinsam genügen, um den kompletten Querkraftverlauf zu zeichnen.



⇒ Der Verlauf des Biegemoments ist in Bereichen ohne Linienlast linear veränderlich, an den Angriffspunkten von Einzelkräften hat der Momentenverlauf einen Knick.

Der Momentenverlauf kann Sprungstellen nur dort haben, wo äußere Momente eingeleitet werden (Einzelmoment, Einspannung, Verzweigung des Trägers). Ansonsten ist der Momentenverlauf (auch an Trägerecken) stetig ([Abbildung 7.13](#)).

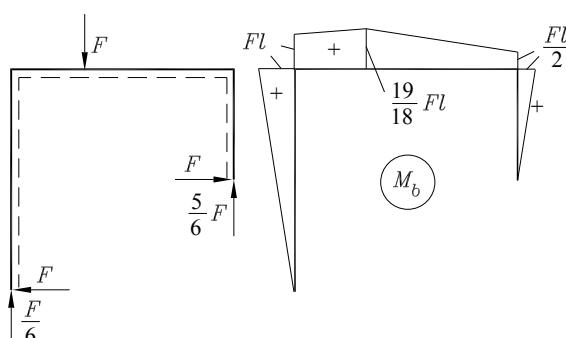
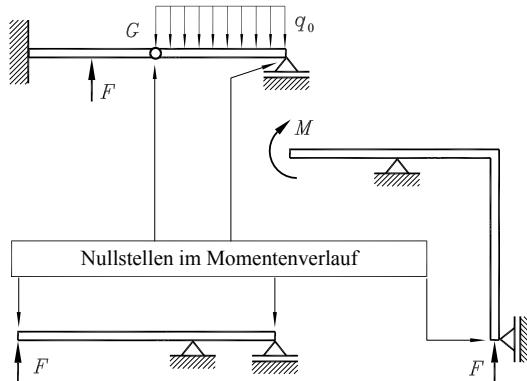


Abbildung 7.13: Verhalten des Momentenverlaufs an Eingleitungsstellen von Einzelkräften und an Ecken

⇒ Das Biegemoment hat den Wert Null ($M_b = 0$)

- an Gelenken,
- am Trägerrand, wenn dort kein äußeres Moment eingeleitet wird. Festlager oder Loslager am Trägerrand beeinflussen diese Aussage nicht, weil sie kein Moment einleiten, am eingespannten Trägerrand ist das Biegemoment im Allgemeinen jedoch ungleich Null.



Beispiel 3:

Da die Biegemomente an den Ecken des nachstehend skizzierten Rahmens (ohne vorherige Ermittlung der Lagerreaktionen) berechnet werden können, wenn die vertikalen Abschnitte an den Ecken geschnitten werden, kann man den Momentenverlauf sofort zeichnen: Der lineare Verlauf im horizontalen Teil ist durch die bekannten Werte an den Ecken (Biegemoment ändert seinen Wert dort nicht!) eindeutig bestimmt.

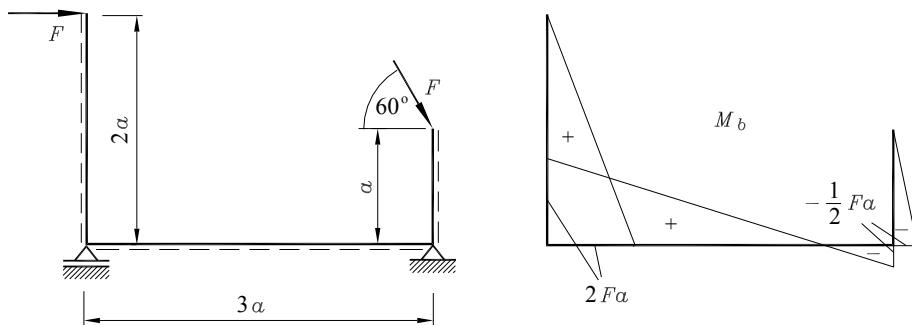


Abbildung 7.14: Zeichnen des Momentenverlaufs ohne Rechnung und ohne Kenntnis der Lagerreaktionen

Der Biegemomentenverlauf hat *relative Extremwerte* an allen Punkten, an denen der Querkraftverlauf das Vorzeichen wechselt.

⇒ Für die Beurteilung der Haltbarkeit eines Trägers hat das *absolute Maximum des Biegemoments* $|M_b|_{max}$ eine besondere Bedeutung. Dies kann nur auftreten

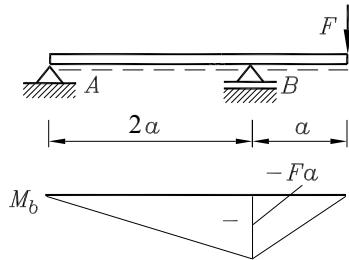
- in Bereichen, in denen eine Linienlast wirkt oder
- an den Bereichsgrenzen.

Wenn *keine Linienlast* vorhanden ist, kann $|M_b|_{max}$ nur auftreten an

- Einleitungsstellen von Einzelkräften oder Einzelmomenten,
- Lagerpunkten, Trägerecken und -verzweigungen.

Beispiel 4:

Für den nebenstehend dargestellten Träger ist das Biegemoment am freien Trägerende und am Lager A jeweils Null. In den beiden Bereichen muss wegen des Fehlens einer Linienlast ein linearer Verlauf vorliegen, das Moment am Punkt B ist $M_{b,B} = -Fa$, wobei das Vorzeichen aus der Anschauung gewonnen werden kann (die untere Faser wird offensichtlich gedrückt).

**Beispiel 5:**

In beiden Bereichen hat der skizzierte Träger einen linearen Momentenverlauf. Am freien Ende ist das Biegemoment Null. Wenn das auf den Träger wirkende Einspannmoment bei A rechtsdrehend positiv gewählt wird (wie das Biegemoment vereinbarungsgemäß gewählt werden muss), ergibt es sich zu

$$M_A = 2Fa - F \cdot 3a = -Fa .$$

Mit diesem Wert startet der Verlauf bei A, verläuft linear bis zur Einleitungsstelle des Moments und nach dem dadurch bedingten Sprung wieder linear bis zum Wert Null am Trägerende und kann also nur den skizzierten Verlauf haben.

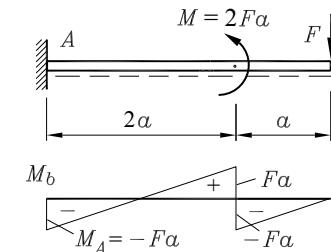


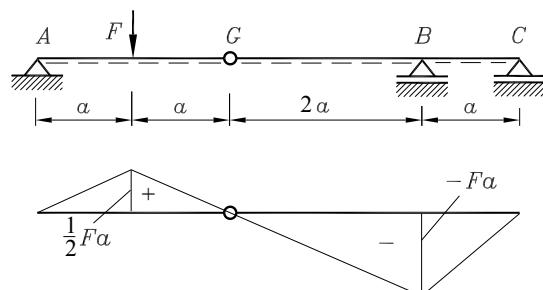
Abbildung 7.15: Sprünge im Momentenverlauf sind nur an Einleitungsstellen von Momenten möglich.

- ⇒ Die freie Verschiebbarkeit eines am starren Körper angreifenden Moments darf selbstverständlich erst nach dem Freischneiden genutzt werden. Es ist sicher klar, dass für den Verlauf des Biegemoments der Angriffspunkt des äußeren Moments einen wesentlichen Einfluss hat.

Beispiel 6:

Zur Darstellung des Momentenverlaufs für den skizzierten Gerberträger werden folgende Erkenntnisse genutzt:

- Das Biegemoment ist an den Punkten A, G und C gleich Null.
- Die vertikale Lagerkraftkomponente bei A hat den Wert $F_{AV} = F/2$, weil F in der Mitte von AG angreift. Mit dieser Lagerkraft ist das Moment unter der Last F bekannt.
- Die Verbindungsgerade von diesem Wert durch das Gelenk G bis zum Lager B (erst hier darf ein Knick im Momentenverlauf auftreten) liefert das Moment an dieser Stelle, und es kann die letzte Verbindungsgerade zum Punkt C gezeichnet werden.



Beispiel 7:

Als Beispiel 2 (auf Seite 104) wurde für einen Träger mit einer Linienlast der Querkraftverlauf ermittelt. Da die Querkraft-Funktion als Ableitung der Funktion des Biegemoments in jedem Punkt ein Maß für den Anstieg der Biegemomenten-Funktion ist, kann diese vielfach (zumindest qualitativ) bei bekanntem Querkraftverlauf unter Ausnutzung der übrigen bereits benutzten Aussagen gezeichnet werden. Im Einzelnen werden für dieses Beispiel folgende Erkenntnisse herangezogen (realisiert in Abbildung 7.16):

- Das Biegemoment ist an den Trägerrändern (Punkte ①) gleich Null.
- Die Kurve des Momentenverlaufs ist im linken Bereich (linearer Querkraftverlauf) eine quadratische Parabel ②, im rechten Bereich hat M_b einen linearen Verlauf ③.
- An der Übergangsstelle vom linken zum rechten Bereich ④ hat die Momentenlinie keinen Knick (keine Einzelkraft → Querkraftverlauf ändert sich nicht sprunghaft).
- Der Anstieg der Parabel ist zunächst positiv, wird aber immer flacher (Querkraft wird kleiner) bis zum Maximum von M_b ⑤ beim Nulldurchgang der Querkraft, danach immer stärker negativ bis zur Mitte des Trägers. Bei danach konstanter Querkraft ändert sich der Anstieg nicht mehr ③.

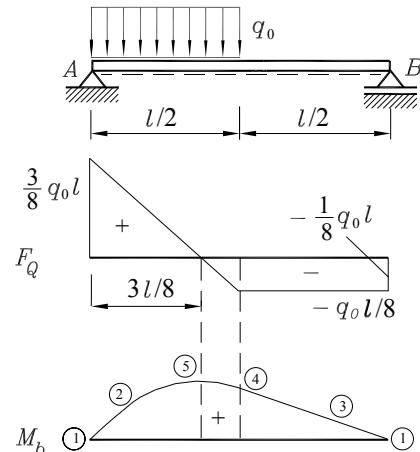


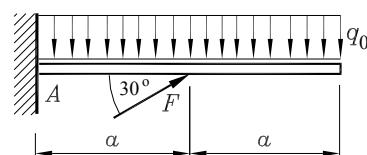
Abbildung 7.16: Die Größe der Querkraft ist in jedem Punkt proportional zum Anstieg des Momentenverlaufs.

7.4 Aufgaben

Aufgabe 7.1:

Der skizzierte Träger ist durch eine konstante Linienlast mit der Intensität q_0 und eine Einzelkraft $F = 4q_0a$ belastet. Man ermittle

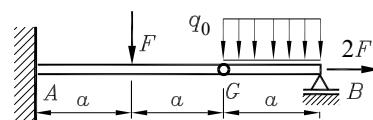
- die Lagerreaktionen bei A,
- die Schnittgrößenverläufe analytisch,
- die grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe.

**Aufgabe 7.2:**

Für den Gerber-Träger ermittle man:

- Schnittgrößenverläufe (Normalkraft, Querkraft, Biegemoment) analytisch,
- grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe,
- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.

Gegeben: a ; q_0 ; $F = q_0a$.

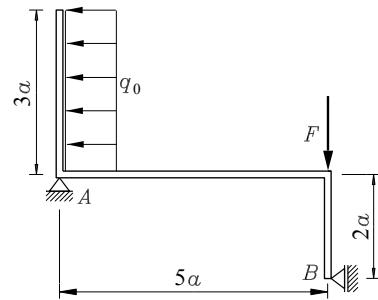


Aufgabe 7.3:

Für den skizzierten Rahmen ermittle man:

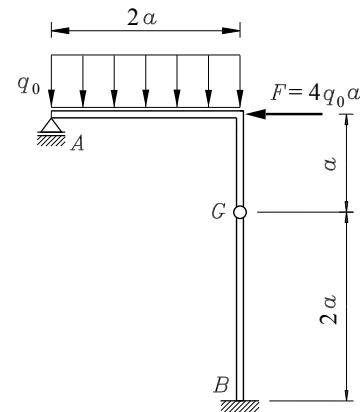
- Lagerreaktionen bei A und B,
- Schnittgrößenverläufe (Normalkraft, Querkraft, Biegemoment) analytisch,
- grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe,
- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.

Gegeben: a ; q_0 ; $F = 2q_0a$.

**Aufgabe 7.4:**

Ein Tragwerk mit einem Gelenk G ist bei A durch ein Loslager gestützt und bei B starr eingespannt. Es trägt die Linienlast q_0 und die Kraft $F = 4q_0a$. Man ermittle:

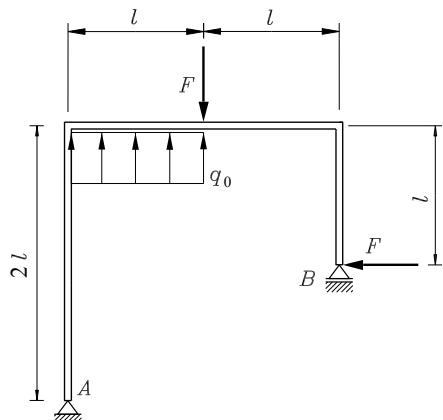
- Lagerreaktionen bei A und B,
- Schnittgrößenverläufe (Normalkraft, Querkraft, Biegemoment) analytisch,
- grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe,
- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.

**Aufgabe 7.5:**

Der skizzierte Rahmen ist durch eine konstante Linienlast und zwei Einzelkräfte belastet. Man ermittle:

- Lagerreaktionen bei A und B,
- Schnittgrößenverläufe (Normalkraft, Querkraft, Biegemoment) im Bereich der Linienlast analytisch,
- grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe für den gesamten Rahmen,
- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.

Gegeben: l ; q_0 ; $F = \frac{1}{2}q_0l$.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

8 Räumliche Probleme

Wenn die Wirkungslinien der Kräfte nicht mehr alle in einer Ebene liegen oder die Drehachsen der Momente nicht alle senkrecht zur Ebene der Kräfte gerichtet sind, liegt ein räumliches Problem vor. In solchen Fällen sollte zunächst überprüft werden, ob die Betrachtung in mehreren Ebenen (und damit die Lösung mehrerer Teilaufgaben) möglich ist. Erst dann, wenn dies nicht gelingt, sollte man die Aufgabe als räumliches Problem auffassen.

8.1 Zentrales Kraftsystem

Eine Kräftegruppe wird als zentrales Kraftsystem bezeichnet, wenn sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden.

Da durch zwei sich schneidende Geraden eine Ebene aufgespannt wird, kann man für jeweils zwei Kräfte in dieser Ebene nach den Regeln des zentralen ebenen Kraftsystems verfahren (z. B. ein Kräfteparallelogramm konstruieren). Aus dieser Überlegung folgt, dass zur Ermittlung der Resultierenden auch die Vereinfachung der Konstruktion in Form des Kraftecks auf das räumliche Problem übertragen werden kann. Allerdings lässt sich ein „räumliches Krafteck“ in der Zeichenebene nur schwierig darstellen.

Die Formeln des ebenen Problems 2.2 müssen nur um die dritte Komponente erweitert werden, und man gewinnt die Formeln zur

Berechnung der Resultierenden des zentralen räumlichen Kraftsystems:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad , \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad , \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad , \\ F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} \quad . \quad (8.1)$$

Die Richtung der Resultierenden lässt sich zum Beispiel durch die Angabe der Winkel, die sie mit den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bildet, beschreiben:

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{Rx}}{F_R} \quad , \quad \cos \alpha_y = \frac{F_{Ry}}{F_R} \quad , \quad \cos \alpha_z = \frac{F_{Rz}}{F_R} \quad , \quad (8.2)$$

wobei gilt:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 \quad . \quad (8.3)$$

Die Winkel α_x , α_y und α_z werden in den von der x -, y -, bzw. z -Achse und der Kraft F_R aufgespannten Ebenen gemessen. Obwohl immer Gleichung 8.3 gilt, ist die Lage eines Vektors im Raum erst eindeutig bestimmt durch die Angabe der drei cos-Werte (Richtungskosinus - schreibt sich tatsächlich mit k , und der lustig klingende Plural ist auch richtig), weil aus 8.3 die für die Lage des Vektors wichtigen Vorzeichen der cos-Werte nicht zu entnehmen sind.

Die Abbildung 8.1 verdeutlicht am Beispiel, wie diese Winkel gemessen werden: Der Winkel α_x liegt in der Ebene, die von der x -Achse und F_R aufgespannt wird. Man verwendet zweckmäßig diese Winkel auch für die Zerlegung einer Kraft in ihre drei Komponenten.

Ein zentrales Kraftsystem befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Resultierende aller Kräfte gleich Null ist. Da ein Vektor im Raum nur verschwindet, wenn jede Komponente Null ist, folgen daraus die drei

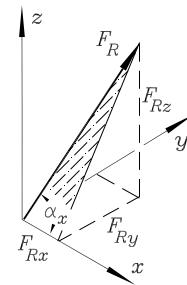


Abbildung 8.1: Beispiel für einen Winkel, für den der Richtungskosinus angegeben wird

Gleichgewichtsbedingungen des zentralen räumlichen Kraftsystems:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad . \quad (8.4)$$

- ⇒ Aus der Forderung nach Gleichgewicht können also beim zentralen räumlichen Kraftsystem drei Unbekannte ermittelt werden.
- ⇒ Die Schwierigkeit, schon einfache räumliche Konstruktionen anschaulich zu erfassen, legt es nahe, wesentlich formaler als beim ebenen Problem vorzugehen: Man ermittelt eine Komponente eines räumlichen Kraftvektors aus dem Produkt „Betrag des Vektors · Richtungskosinus“, wobei der Richtungskosinus im Allgemeinen aus der Geometrie des Systems folgt.
- ⇒ Typisches Vorgehen bei der Lösung von Aufgaben: Man schreibt einen beliebigen Vektor auf, der aber die Richtung der Kraft haben muss. Dieser Vektor wird durch seine Länge (seinen Betrag) dividiert und man erhält den Vektor der Richtungskosinusse. Da dieser wegen 8.3 ein Einheitsvektor ist, wird er nach Multiplikation mit dem (bekannten oder unbekannten) Betrag der in diese Richtung wirkenden Kraft zum Kraftvektor. Die Gleichgewichtsbedingungen 8.4 beziehen sich dann jeweils auf die Komponenten der so ermittelten Kraftvektoren.
- ⇒ Wenn man sich auf ein einmal festgelegtes Koordinatensystem bezieht, ergeben sich die Richtungskosinusse eines Vektors (formal und vorzeichensicher) aus der Vorschrift „Komponente dividiert durch Betrag des Vektors“.

Beispiel 1: Zwei Stäbe 1 und 2 sind an einer Wand befestigt und werden durch den vertikalen Stab 3 gehalten (Abbildung 8.2). Man berechne die Stabkräfte F_{S1} , F_{S2} und F_{S3} .

Die vier Kräfte F , F_{S1} , F_{S2} und F_{S3} müssen ein Gleichgewichtssystem bilden (natürlich können auch Stäbe im Raum nur Kräfte in Stablängsrichtung aufnehmen, vgl. die Definition des Stabs im Abschnitt 6.2 auf Seite 70).

Bezüglich des gewählten Koordinatensystems werden für die Stäbe 1 und 2 die Geometrievektoren \vec{s}_1 und \vec{s}_2 aufgeschrieben (**Abbildung 8.3**).

Aus den Geometrievektoren können die Vektoren der Richtungskosinusse \vec{c}_1 und \vec{c}_2 durch Division durch die Stablängen

$$\begin{aligned}s_1 &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \text{ m} = \sqrt{14} \text{ m} \\ s_2 &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} \text{ m} = \sqrt{17} \text{ m}\end{aligned}$$

berechnet werden, aus denen sich nach Multiplikation mit den (noch unbekannten) Beträgen der Stabkräfte F_{S1} und F_{S2} die Stabkraftvektoren ergeben.

Für den Stab 3 und die Kraft F , deren Richtungen jeweils mit einer der gewählten Koordinatenrichtungen zusammenfallen, können die Kraftvektoren direkt aufgeschrieben werden. Die vier Kräfte müssen ein Gleichgewichtssystem bilden. In vektorieller Form lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\vec{F}_{S1} + \vec{F}_{S2} + \vec{F}_{S3} + \vec{F} = \vec{0}.$$

Entsprechend der Komponentenformulierung nach 8.4 ergibt sich daraus folgendes Gleichungssystem (eine Vektorgleichung entspricht drei skalaren Gleichungen) für die Stabkräfte:

$$\begin{aligned}x \searrow -\frac{2}{\sqrt{14}} F_{S1} - \frac{2}{\sqrt{17}} F_{S2} &= -F \\ y \nearrow -\frac{1}{\sqrt{14}} F_{S1} + \frac{2}{\sqrt{17}} F_{S2} &= 0 \\ z \uparrow -\frac{3}{\sqrt{14}} F_{S1} - \frac{3}{\sqrt{17}} F_{S2} + F_{S3} &= 0\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert:

$$F_{S1} = \frac{\sqrt{14}}{3} F, \quad F_{S2} = \frac{\sqrt{17}}{6} F, \quad F_{S3} = \frac{3}{2} F.$$

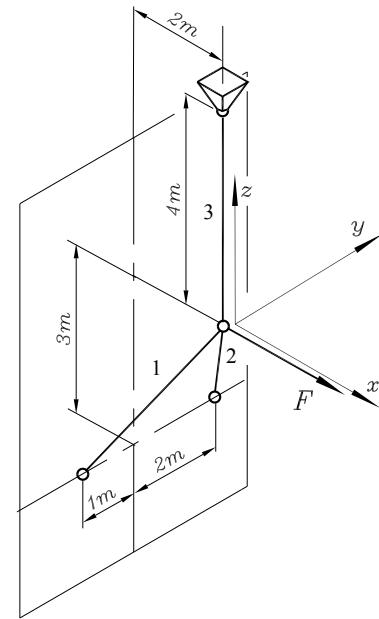


Abbildung 8.2: Gegeben sind die Kraft F und die eingezeichneten Abmessungen

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= \begin{bmatrix} -2 \text{ m} \\ -1 \text{ m} \\ -3 \text{ m} \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{bmatrix} -2 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \\ -3 \text{ m} \end{bmatrix} \\ \vec{c}_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} \\ -\frac{3}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \\ \vec{F}_{S1} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} F_{S1}, \quad \vec{F}_{S2} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} \\ -\frac{3}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} F_{S2}\end{aligned}$$

Abbildung 8.3: Geometrievektoren → Richtungskosinusse → Kraftvektoren

- ⇒ Auch wenn die vektorielle Behandlung des Problems schließlich doch auf die Lösung eines Gleichungssystems der Komponenten-Gleichungen führt, sollte man den formalen Weg über die Richtungskosinusse immer dann gehen, wenn man an die Grenze seines räumlichen Vorstellungsvermögens gelangt.

Bei dieser einfachen Aufgabe könnte man natürlich noch den „anschaulichen Weg“ dem formalen Weg vorziehen. Dieser führt vielfach über die Betrachtung des Problems in unterschiedlichen Ebenen sehr schnell zu Teillösungen.

Die Lösung des Beispiels 1 mit dem „anschaulichen Weg“, bei dem nacheinander in drei Ebenen gearbeitet wird, findet man mit ausführlicher Diskussion unter www.TM-aktuell.de. Das verallgemeinerungsfähige Fazit ist:

⇒ Die Berechnung räumlicher Probleme durch Betrachten in unterschiedlichen Ebenen (der Versuch, den „anschaulichen Weg“ zu gehen) ist häufig unübersichtlich, schlecht formalisierbar und damit auch fehleranfällig. Formaler und damit weniger fehleranfällig ist das Rechnen mit Vektoren, zumindest die formale Ermittlung der Richtungskosinusse ist empfehlenswert. Zwei Gründe können jedoch für eine Abweichung von dieser Empfehlung sprechen:

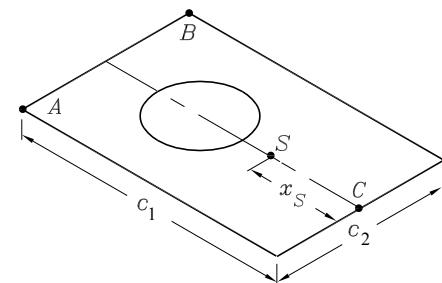
- Für den (konservativen) Konstrukteur, der mit seiner technischen Zeichnung ohnehin „zweidimensional in verschiedenen Ebenen denkt“, kann auch die Berechnung auf diese Art einfacher sein.
- *Quasiebene Probleme* (wie das folgende Beispiel 2) sind in jedem Falle Kandidaten für eine Betrachtung in mehreren Ebenen.



Beispiel 2:

Ein flächenhafter Körper (Blech) mit einer Symmetrieachse soll an den Punkten A, B und C an gleich langen Seilen mit Hilfe eines Krans transportiert werden. Die Seile werden jeweils an den Punkten A, B und C und am Kranhaken befestigt.

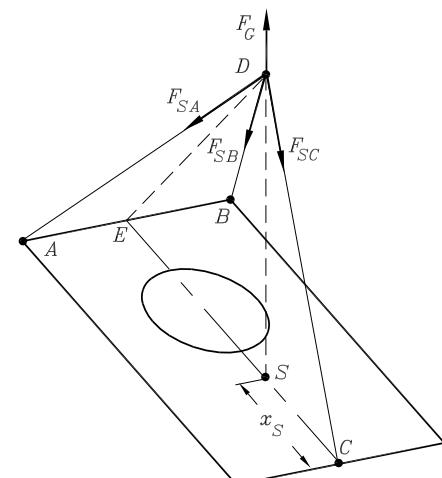
Gegeben: F_G (Gewicht des Blechs),
 l (Länge eines Seils),
 c_1, c_2 (Blechabmessungen),
 x_S (Lage des Schwerpunkts),



Man ermittle die Seilkräfte F_{SA} , F_{SB} und F_{SC} , die sich beim Anheben des Blechs einstellen.

Beim Anheben des Blechs stellt sich die Gleichgewichtslage so ein, dass der Schwerpunkt S des Blechs senkrecht unter dem Aufhängepunkt liegt. Man beachte den Unterschied zu allen bisher behandelten Aufgaben: Die Geometrie des Gleichgewichtszustandes ist nicht direkt vorgegeben, ihre Ermittlung macht sogar einen nicht unerheblichen Aufwand bei der Lösung der Aufgabe aus.

Wegen der Symmetrie sind die Seilkräfte F_{SA} und F_{SB} gleich, alle übrigen Kräfte liegen in der Ebene ECD. Es empfiehlt sich also, zunächst die Ebene ABD zu betrachten, um die Komponenten zu berechnen, die F_{SA} und F_{SB} in der Ebene ECD haben, um anschließend ein rein ebenes Problem in dieser Ebene behandeln zu können.



Die Abbildung 8.4 zeigt die Abmessungen in der Ebene ABD. Wenn die Symmetrie nicht vorab erkannt wird, liefert die Kraft-Gleichgewichtsbedingung in Richtung I – I die Gleichheit der beiden Seilkräfte

$$F_{SA} = F_{SB}.$$

Beide Seilkräfte haben je eine Komponente in Richtung II – II:

$$F_{SA} \cos \delta \quad \text{und} \quad F_{SB} \cos \delta$$

können zu $2F_{SA} \cos \delta$ zusammengefasst werden. Diese Kraft liegt in der Ebene ECD, gerichtet von D nach E.

Damit wurde das Problem auf ein zentrales ebenes Kraftsystem reduziert. Die Abbildung 8.5 zeigt das Dreieck ECD in Skizze a) vor dem Anheben und in Skizze b) nach dem Anheben der Last. Skizze c) zeigt das zentrale ebene Kraftsystem am Punkt D. Es müssen noch einige geometrische Betrachtungen angestellt werden:

Das Dreieck ECD ist durch seine Seiten c_1 , l und l_1 gegeben, wobei l_1 (siehe Abbildung 8.4) durch l und c_2 ausgedrückt werden kann. Nach dem Anheben der Last stellt sich dieses Dreieck so ein, dass der Schwerpunkt S unter dem Anhängepunkt D liegt. Neben dem Winkel δ , dessen Winkelfunktionen auch aus der Abbildung 8.4 abzulesen sind, werden für die beiden Gleichgewichtsbedingungen am Punkt D noch die beiden Winkel α und β benötigt.

Von den verschiedenen Möglichkeiten, mit elementargeometrischen Überlegungen zu diesen Winkeln zu kommen, soll hier eine Variante vorgestellt werden, die direkt die erforderlichen Winkelfunktionen ergibt. Dabei wird nicht angestrebt, die Winkelfunktionen in einer Formel durch gegebene Größen auszudrücken. Das Beispiel macht deutlich, dass dies nicht immer sinnvoll sein kann, bei nur etwas komplizierteren Problemen ist es ohnehin unmöglich.

Empfehlenswert ist die Formulierung eines *Formelsatzes*, bei dem jede Formel nach Berechnung aller vorherigen ausgewertet werden kann, die erste Formel darf natürlich nur gegebene Größen enthalten. Um Rechenfehler weitgehend zu vermeiden, sollten möglichst einfache Beziehungen aufgeschrieben werden.

Dies wird mit dem nachfolgend zusammengestellten Formelsatz realisiert. Für die Auswertung solcher Formelsätze eignen sich fast alle Mathematik-Programme vorzüglich. Einmal definiert (und für spätere Verwendung gesichert), können die Formelsätze automatisch immer wieder mit unterschiedlichen gegebenen Größen ausgewertet werden (siehe Link auf Seite 114).

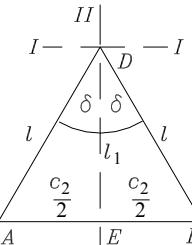


Abbildung 8.4: Ebene ABD

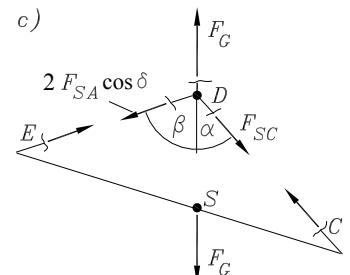
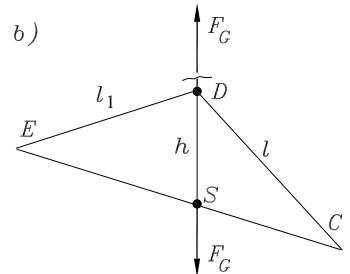
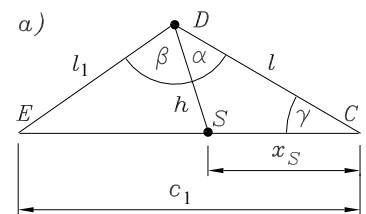


Abbildung 8.5: Dreieck ECD

Am rechtwinkligen Dreieck in der Ebene *ABD* (**Abbildung 8.4**) liest man die Formeln für l_1 und $\cos \delta$ ab.

Da α und β nicht direkt aufgeschrieben werden können, werden als Hilfsgrößen entsprechend der Skizze *a* in **Abbildung 8.5** der Winkel γ und die Strecke h (Höhe des Aufhängepunktes über dem Schwerpunkt nach dem Anheben der Last) eingeführt. Der Winkel γ kann mit dem Kosinussatz für das Dreieck *ECD* berechnet werden, und der Kosinussatz für das Dreieck *SCD* liefert h .

Am gleichen Dreieck wird der Kosinussatz noch einmal angewendet, und man erhält eine Beziehung für α . Am Nachbardreieck *ESD* liefert dann der Kosinussatz eine Beziehung für β .

Um die Berechnung der Winkel völlig zu vermeiden, komplettiert man schließlich die benötigten Winkelfunktion durch den „trigonometrischen Pythagoras“.

Empfehlenswert ist es natürlich, in die Auswertung des Formelsatzes gleich die Berechnung der gesuchten Seilkräfte mit einzubeziehen. Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen am Punkt *D* (**Abbildung 8.5**, Skizze *c*)

$$\begin{aligned}\downarrow \quad & 2F_{SA} \cos \delta \cos \beta + F_{SC} \cos \alpha = F_G , \\ \rightarrow \quad & -2F_{SA} \cos \delta \sin \beta + F_{SC} \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

errechnen sich die Seilkräfte

$$\begin{aligned}F_{SA} &= \frac{\sin \alpha}{2 \cos \delta (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)} F_G , \\ F_{SC} &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} F_G ,\end{aligned}$$

die den oben angegebenen Formelsatz komplettieren.

Unter www.TM-aktuell.de findet man die Auswertung des kompletten Formelsatzes (einschließlich Seilkraftberechnung) mit verschiedenen Software-Produkten.

Selbst Tabellenkalkulationsprogramme eignen sich dafür. Der nebenstehende Bildschirm-Schnappschuss zeigt das Ergebnis einer Berechnung mit MS-Excel. Nur die fünf gegebenen Größen (in den Zeilen 2 bis 6) müssen mit Zahlen belegt werden.



$$\begin{aligned}l_1 &= \sqrt{l^2 - \frac{c_2^2}{4}} \\ \cos \delta &= \frac{l_1}{l} \\ \cos \gamma &= \frac{l^2 + c_1^2 - l_1^2}{2lc_1} \\ h &= \sqrt{l^2 + x_S^2 - 2lx_S \cos \gamma} \\ \cos \alpha &= \frac{l^2 + h^2 - x_S^2}{2lh} \\ \cos \beta &= \frac{l_1^2 + h^2 - (c_1 - x_S)^2}{2l_1 h} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta}\end{aligned}$$

Beispiel_2_Abschnitt_8...	
1	Anhängeproblem
2	c_1
3	c_2
4	l
5	xS
6	FG
7	l_1
8	cosDelta
9	cosGamma
10	h
11	cosAlpha
12	cosBeta
13	sinAlpha
14	sinBeta
15	FSA
16	FSB

Nachdem einmal der angegebene Formelsatz definiert wurde, können automatisch sämtliche Formeln immer wieder für beliebige Eingabewerte ausgewertet werden.

8.2 Räumliche Fachwerke

Räumliche Fachwerke bestehen aus räumlich angeordneten Stäben, die über Gelenke miteinander verbunden sind. Nur über diese Gelenke werden Kräfte eingeleitet (ideales Fachwerk, vgl. Seite 80). Für reale Fachwerke gilt, was schon für ebene Fachwerke gesagt wurde: Sie dürfen im Allgemeinen bei sehr guter Annäherung an die Realität trotz nicht gelenkiger Verbindungen der Stäbe nach der Theorie der idealen Fachwerke berechnet werden.

Auch ein räumliches Fachwerk ist dann statisch bestimmt, wenn die Stabkräfte und Lagerkräfte ausschließlich aus Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen sind.

Notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit räumlicher Fachwerke:

$$\text{Anzahl der Stäbe} + \text{Anzahl der Lagerreaktionen} = 3 \cdot \text{Anzahl der Knoten}$$

Auch hier gilt: Die Erfüllung dieser notwendigen Bedingung ist keine Garantie für die Tragfähigkeit des Fachwerks. Untaugliche Konstruktionen äußern sich durch Widersprüche in den Gleichgewichtsbedingungen.

Das schon für ebene Fachwerke universell einsetzbare Knotenschnittverfahren (siehe Seite 81) muss für die räumlichen Fachwerke nur leicht modifiziert werden: Rundumschnitte um sämtliche Knoten, so dass alle an den Knoten angrenzenden Stäbe geschnitten werden, liefern zentrale räumliche Kraftsysteme, und für jeden Knoten können drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Dabei sollte man konsequent an jedem Knoten für jeden Stab nach folgendem Algorithmus vorgehen:

Die Lage eines Stabes S im Fachwerk und seine Länge l_S werden eindeutig durch die Koordinaten seiner beiden Knoten festgelegt (**Abbildung 8.6**). Das kartesische Koordinatensystem, auf das sich diese Angaben beziehen, kann beliebig gewählt werden. Die in Stablängsrichtung wirkende Stabkraft (mit dem Betrag F_S) wird an beiden Knoten als Zugkraft angetragen (Pfeilspitze weist vom Knoten weg). Der Kraftvektor am Knoten i kann dann mit Hilfe der Richtungskosinusse aufgeschrieben werden:

$$\vec{F}_S = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix} \frac{F_S}{l_S} \quad \text{mit} \quad l_S = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (8.5)$$

Man beachte: Die Richtungskosinusse (Quotient aus Koordinatendifferenz und Stablänge) werden ausschließlich aus den geometrischen Informationen (Knotenkoordinaten) gewonnen. Am Knoten j hat die Stabkraft gerade die entgegengesetzte Richtung, was sich durch Umkehrung der Koordinatendifferenzen bei der Berechnung der Richtungskosinusse automatisch ergibt, so dass man folgende einfache Regel für das Aufschreiben des Stabkraft-Vektors des Stabes S am Knoten i formulieren kann:

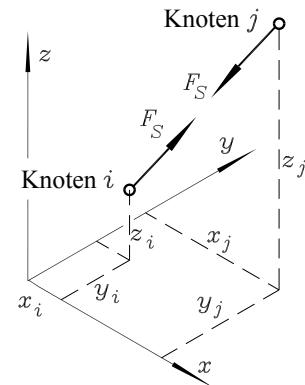


Abbildung 8.6: Stab S mit den Knoten i und j

- ⇒ Für jeden Stab S am Knoten i kann der Stabkraft-Vektor nach 8.5 aufgeschrieben werden, wenn der andere zum Stab S gehörende Knoten als Knoten j betrachtet wird.

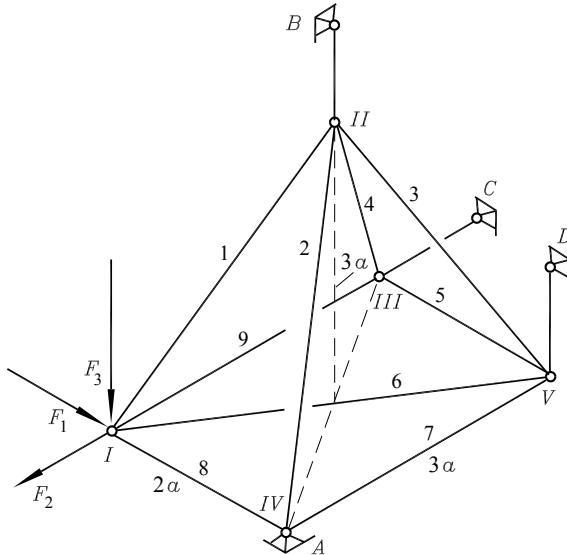
Mit dem Stabkraft-Vektor sind die drei Komponenten in Richtung der gewählten Koordinaten gegeben, und mit allen an einem Knoten angreifenden Stabkräften können die drei Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten formuliert werden.

Beispiel

Das abgebildete Fachwerk besteht aus fünf Stäben, die in der Horizontalebene als Rechteck mit einer Diagonalen angeordnet sind, und vier weiteren Stäben, die zu einem Knoten zusammenlaufen, der senkrecht über dem Mittelpunkt des Rechtecks in der Horizontalebene liegt.

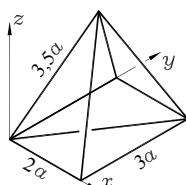
Das Fachwerk ist durch drei Stäbe (einwertige Lager) bei B , C und D gelagert und im Punkt A durch ein räumliches Festlager (kann drei Kraftkomponenten aufnehmen) abgestützt. An einer Ecke des Fachwerkes werden die Kräfte F_1 , F_2 und F_3 eingeleitet.

Gegeben: F_1 , F_2 , F_3 , a .



Man berechne die Stabkräfte der Stäbe 1 bis 9, die Kräfte in den Lagerstäben und die Lagerreaktionen bei A .

Für die 15 Unbekannten (9 Stabkräfte, 3 Kräfte in den Lagerstäben und 3 Kraftkomponenten am Lager A) stehen an jedem der Knoten I bis V drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung: Die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit ist erfüllt. Mit dem Koordinatensystem, dessen Ursprung im Knoten I liegt (Skizze neben der Tabelle), haben die 5 Knoten die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Koordinaten:



	I	II	III	IV	V
x	0	a	0	$2a$	$2a$
y	0	$1,5a$	$3a$	0	$3a$
z	0	$3a$	0	0	0

Die Abbildung 8.7 zeigt die Rundumschnitte um alle fünf Knoten. Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen soll am Beispiel des Knotens I erläutert werden:

Die drei äußeren Kräfte F_1, F_2 und F_3 und die Stabkräfte F_{S8} und F_{S9} liegen in Richtung einer der definierten Koordinatenachsen und müssen nicht in Komponenten zerlegt werden. Für die Stabkraft des Stabes 1 wird 8.5 aufgeschrieben (Knoten j ist hier Knoten II):

$$\vec{F}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{II} - x_I \\ y_{II} - y_I \\ z_{II} - z_I \end{bmatrix} \frac{F_{S1}}{l_1}$$

mit $l_1 = 3,5a$.

Für die Stabkraft des Stabs 6 muss 8.5 mit Knoten V als Knoten j und $l_6 = \sqrt{13}a$ formuliert werden. Mit den direkt aufzuschreibenden Vektoren der Stabkräfte der Stäbe 8 und 9 lauten also die Vektoren der 4 Stabkräfte am Knoten I:

$$\vec{F}_{S1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{F_{S1}}{3,5} , \quad \vec{F}_{S6} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{F_{S6}}{\sqrt{13}} , \quad \vec{F}_{S8} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{S8} , \quad \vec{F}_{S9} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_{S9} .$$

Nun können die drei Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten I aufgeschrieben werden:

$$\begin{array}{lll} x \searrow & \frac{1}{3,5} F_{S1} + \frac{2}{\sqrt{13}} F_{S6} + F_{S8} & = -F_1 \\ y \nearrow & \frac{1,5}{3,5} F_{S1} + \frac{3}{\sqrt{13}} F_{S6} & + F_{S9} = F_2 \\ z \uparrow & \frac{3}{3,5} F_{S1} & = F_3 \end{array}$$

Auf gleichem Wege kommt man zu den Gleichgewichtsbedingungen der übrigen Knoten. Für den Knoten II ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} x \searrow & -\frac{1}{3,5} F_{S1} + \frac{1}{3,5} F_{S2} + \frac{1}{3,5} F_{S3} - \frac{1}{3,5} F_{S4} & = 0 \\ y \nearrow & -\frac{1,5}{3,5} F_{S1} - \frac{1,5}{3,5} F_{S2} + \frac{1,5}{3,5} F_{S3} + \frac{1,5}{3,5} F_{S4} & = 0 \\ z \uparrow & -\frac{3}{3,5} F_{S1} - \frac{3}{3,5} F_{S2} - \frac{3}{3,5} F_{S3} - \frac{3}{3,5} F_{S4} + F_B & = 0 \end{array}$$

Die restlichen Gleichgewichtsbedingungen sind etwas einfacher:

$$\text{Knoten III: } \frac{1}{3,5} F_{S4} + F_{S5} = 0 ; \quad -F_{S9} + F_C - \frac{1,5}{3,5} F_{S4} = 0 ; \quad \frac{3}{3,5} F_{S4} = 0 .$$

$$\text{Knoten IV: } F_{A1} - F_{S8} - \frac{1}{3,5} F_{S2} = 0 ; \quad F_{S7} - F_{A2} + \frac{1,5}{3,5} F_{S2} = 0 ; \quad \frac{3}{3,5} F_{S2} - F_{A3} = 0 .$$

$$\text{Knoten V: } -F_{S5} - \frac{2}{\sqrt{13}} F_{S6} - \frac{1}{3,5} F_{S3} = 0 ; \quad -F_{S7} - \frac{3}{\sqrt{13}} F_{S6} - \frac{1,5}{3,5} F_{S3} = 0 ; \quad \frac{3}{3,5} F_{S3} + F_D = 0 .$$

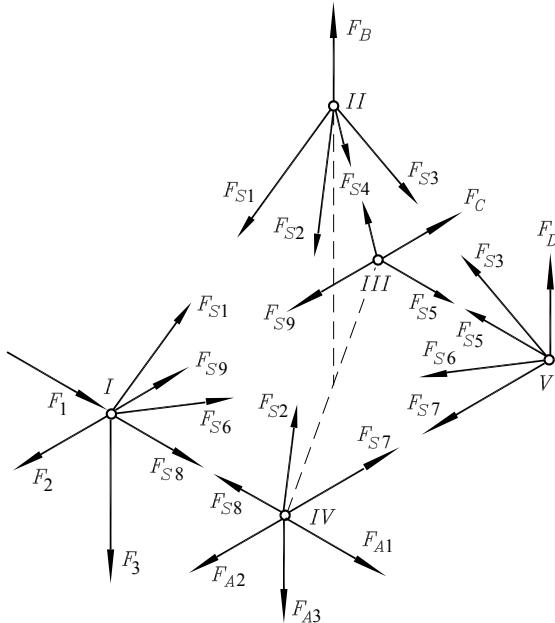


Abbildung 8.7: Rundumschnitte um die 5 Knoten

Diese fünfzehn Gleichungen lassen sich durchaus noch „per Handrechnung“ lösen: Stab 4 ist ein Nullstab (als einziger Stab am Knoten III, der nicht in der Horizontalebene liegt) und damit auch Stab 5. Das Ergebnis für F_{S1} ist aus dem „ z -Gleichgewicht“ des Knotens I abzulesen, und mit diesen bekannten Kräften entkoppeln sich die Gleichungen so, dass maximal 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten als „System“ zu behandeln sind.

Wenn die Aufgabe nur unwesentlich komplizierter wird, gilt das natürlich nicht mehr, und man sollte für die Lösung des Gleichungssystems den Computer bemühen. Für das behandelte Beispiel findet man unter www.TM-aktuell.de die Lösung mit verschiedenen Software-Produkten.

Bei Nutzung einer Software, die symbolisch rechnen kann, erscheint das Ergebnis in Abhängigkeit von den Kräften F_1 , F_2 und F_3 (Ergebnis mit Maple siehe Abbildung 8.8). Aber auch eine rein numerische Rechnung kann das Ergebnis ohne Vorgabe von Zahlenwerten für die Belastung erzeugen. Dafür muss die rechte Seite des Gleichungssystems wie folgt in drei Vektoren zerlegt werden (Ergebnis mit Matlab siehe Abbildung 8.9):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3,5} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{S1} \\ \vdots \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3,5} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{S1} \\ \vdots \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} F_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} F_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} F_3$$

$$\begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{S2} \\ F_{S3} \\ F_{S4} \\ F_{S5} \\ F_{S6} \\ F_{S7} \\ F_{S8} \\ F_{S9} \\ F_{A1} \\ F_{A2} \\ F_{A3} \\ F_B \\ F_C \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.166666667 F_3 \\ 0. \\ 1.166666667 F_3 \\ 0. \\ 0. \\ -0.6009252128 F_3 \\ 0.1219442305 10^{-9} F_3 \\ -1. F_1 \\ 0.1219442305 10^{-9} F_3 + F_2 \\ -1. F_1 \\ 0.1219442305 10^{-9} F_3 \\ 0. \\ 2. F_3 \\ 0.1219442305 10^{-9} F_3 + F_2 \\ -1. F_3 \end{bmatrix}$$

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
0 0 1.1667
0 0 -0.0000
0 0 1.1667
0 0 0
0 0 0
0 0 -0.6009
0 0 -0.0000
-1.0000 0 -0.0000
0 1.0000 -0.0000
-1.0000 0 -0.0000
0 0 -0.0000
0 0 -0.0000
0 0 2.0000
0 1.0000 -0.0000
0 0 -1.0000

```

Abbildung 8.8: Das Ergebnis der symbolischen Berechnung mit Maple enthält die Kräfte F_1 , F_2 und F_3 als Symbole (die sehr kleinen Zahlenwerte resultieren aus Rundungsfehlern).

Abbildung 8.9: Das Ergebnis der numerischen Berechnung mit Matlab besteht aus drei Vektoren, die mit F_1 , F_2 bzw. F_3 multipliziert und dann addiert werden müssen.



8.3 Allgemeines Kraftsystem

Kräfte dürfen im Raum (am starren Körper) wie in der Ebene nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden (1. Axiom), und zwei Kräfte dürfen nach dem Parallelogrammgesetz wie Vektoren addiert werden (2. Axiom). Die im Abschnitt 1.2 vorgestellten vier Axiome sind selbstverständlich die vollständige Basis auch für die dreidimensionalen Probleme der Statik.

Schon bei den Kräften aber kann eine zusätzliche Schwierigkeit auftreten: Die Wirkungslinien zweier Kräfte im Raum brauchen sich auch dann nicht zu schneiden, wenn sie nicht parallel sind („windschiefe“ Geraden). Noch etwas schwieriger sind die Überlegungen, die mit dem Verhalten von Momenten verknüpft sind. Ihnen wird deshalb ein gesonderter Abschnitt gewidmet.

8.3.1 Momente

An drei einfachen Beispielen wird die Verschiebbarkeit von Momenten und die Möglichkeit der Zusammenfassung von Momenten zu einem resultierenden Moment untersucht:

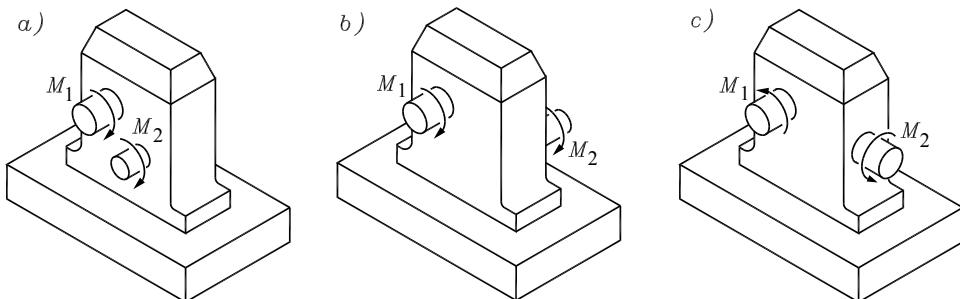


Abbildung 8.10: Getriebegehäuse als „Black box“, die Wirkungen an Antriebs- und Abtriebswelle werden durch Momente repräsentiert, über das „Innenleben“ des Getriebes ist nichts bekannt

Für die drei in **Abbildung 8.10** dargestellten Getriebegehäuse sollen jeweils die resultierenden Belastungen ermittelt werden, die von ihnen auf die Fundamente aufgebracht werden (benötigt z. B. für die Auslegung der Fundamentschrauben). Neben dem Eigengewicht, das hier nicht betrachtet werden soll, besteht die Belastung nur aus den Drehmomenten der beiden Wellen, die in das Getriebegehäuse hineingehen. Nach dem „Wegschneiden“ der Wellen müssen die (von den Wellen auf das Gehäuse wirkenden) Momente M_1 und M_2 angetragen werden (Erinnerung an das Schnittpunktprinzip: Was im Inneren des Getriebegehäuses passiert, ob und wie viel Stirnräder, Kegelräder, ob überhaupt Zahnräder oder Reibräder oder Keilriemen die Drehbewegung umformen, ist für diese Betrachtung völlig unerheblich).

Im Fall a liegen die beiden Momente in einer Ebene. Dieses Problem wurde bereits im Abschnitt 3.3 behandelt: Momente dürfen beliebig in der Ebene verschoben und damit natürlich auch addiert (bei entgegengesetztem Drehsinn subtrahiert) werden. Die resultierende Belastung ist das resultierende Moment

$$M_R = M_1 + M_2 \quad .$$

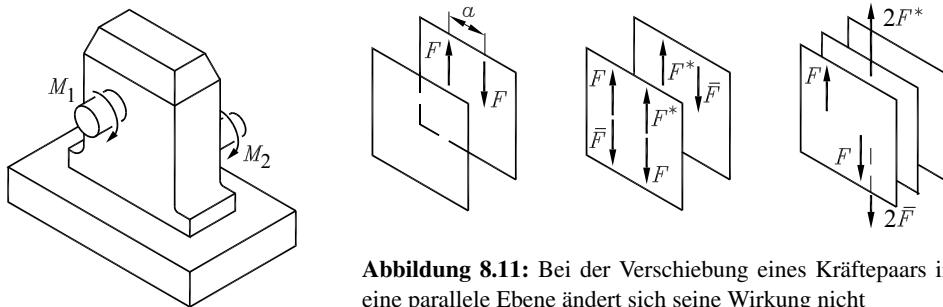


Abbildung 8.11: Bei der Verschiebung eines Kräftepaars in eine parallele Ebene ändert sich seine Wirkung nicht

Im Fall *b* liegen die beiden Momente in unterschiedlichen (aber parallelen) Ebenen. Es wird deshalb zunächst untersucht, ob und unter welchen Voraussetzungen z. B. das Moment M_2 in die Ebene des Moments M_1 verschoben werden darf. Dazu werden entsprechend **Abbildung 8.11** einige erlaubte Operationen (auf der Basis der Axiome der Statik) ausgeführt:

- Moment M_2 wird durch ein beliebiges (statisch äquivalentes) Kräftepaar ersetzt: $M_2 = Fa$.
- In einer parallelen Ebene wird ein Gleichgewichtssystem aus vier gleich großen Kräften F ergänzt, dessen Wirkung auf den starren Körper natürlich statisch neutral ist.
- Schließlich werden je zwei Kräfte der beiden Ebenen zu einer Resultierenden zusammengefasst: Die in der Skizze mit einem Stern gekennzeichneten Kräfte haben gleichen Richtungssinn und gleichen Betrag und liegen auf parallelen Wirkungslinien. Ihre Resultierende $2F^*$ liegt in einer Mittelebene zwischen den Ebenen, in denen die beiden Kräfte F^* liegen.

In gleicher Weise werden die beiden mit einem Querstrich gekennzeichneten Kräfte zusammengefasst. Die beiden neuen Resultierenden in der Mittelebene sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet, so dass sich ihre Wirkungen aufheben. Es bleibt ein Kräftepaar in der zur ursprünglichen Ebene parallelen Ebene übrig: M_2 darf in die Ebene des Moments M_1 verschoben werden, und das Ergebnis dieser Überlegungen darf verallgemeinert werden:

Am starren Körper darf ein Moment entlang der Drehachse und parallel zu dieser verschoben werden, die Richtung der Drehachse und die Drehrichtung bleiben jedoch erhalten.

Am starren Körper angreifende Momente sind also wesentlich „beweglicher“ als Kräfte. Da M_2 in die Ebene von M_1 und innerhalb dieser Ebene dann auch noch beliebig verschoben werden darf, ergibt sich die resultierende Belastung auch im Fall *b* zu

$$M_R = M_1 + M_2 \quad .$$

Festzuhalten ist, dass diese besonders einfache Art der Zusammenfassung zweier Momente zu einem resultierenden Moment die *Parallelität der Drehachsen* der Momente voraussetzt.

Diese Bedingung ist im Fall *c* nicht mehr erfüllt. Nach den bereits bekannten Aussagen ist die Frage, ob sich die beiden Drehachsen der Momente in einem Punkt schneiden, natürlich belanglos, weil die Momente ja innerhalb der Ebenen, in denen sie wirken, ohnehin beliebig verschoben werden dürfen. Die Möglichkeit, diese beiden Momente zu einem resultierenden Moment zusammenzufassen, wird mit nachfolgendem Gedankenexperiment untersucht:

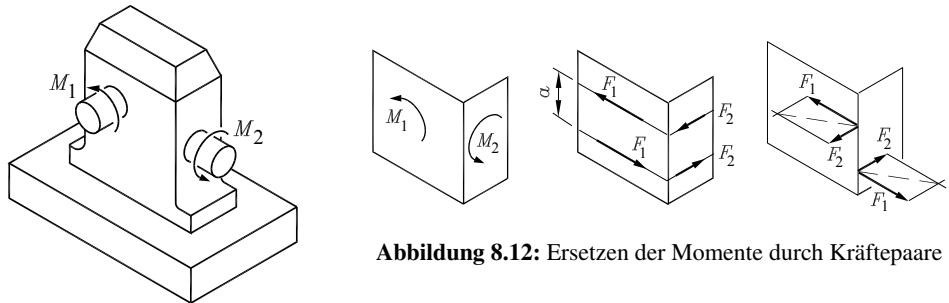


Abbildung 8.12: Ersetzen der Momente durch Kräftepaare

- Die Momente in beiden Ebenen werden durch Kräftepaare

$$M_1 = F_1 a, \quad M_2 = F_2 a$$

ersetzt. Dabei ist der Abstand a beliebig, aber für beide Kräftepaare gleich groß zu wählen. Die vier Kräfte werden (Abbildung 8.12, rechte Skizze) bis an die Schnittgerade der beiden Ebenen verschoben.

- Jeweils zwei Kräfte F_1 und F_2 können nach dem Parallelogrammgesetz zu einer Resultierenden F_R zusammengefasst werden. Die Resultierenden liegen in einer anderen, beide aber in der gleichen Ebene. Sie bilden ein neues Kräftepaar, das *resultierende Moment* der beiden Momente M_1 und M_2 .
- Unter der speziellen Annahme, dass die beiden Ebenen, in denen M_1 und M_2 wirken, senkrecht zueinander sind, kann der Betrag der Resultierenden berechnet werden:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Damit ist auch der Betrag des resultierenden Moments für den Fall c bekannt:

$$M_R = F_R a = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} a = \sqrt{F_1^2 a^2 + F_2^2 a^2} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} .$$

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass bei den vorangegangenen Überlegungen gar nicht vorausgesetzt werden musste, dass die beiden Ebenen senkrecht zueinander sind. Die Kräfte, die das resultierende Kräftepaar bilden, entstanden vielmehr nach dem bekannten Parallelogrammgesetz.

Da zwei Ebenen, die nicht parallel sind (der Spezialfall paralleler Ebenen ist ohnehin besonders einfach, siehe Fall b), als Schnittlinie immer eine Gerade haben, ist damit das Problem der Zusammenfassung von Momenten zu einem resultierenden Moment allgemein gelöst:

Momente addieren sich ganz ähnlich wie Kräfte, und es ist deshalb naheliegend, auch die *Momente als Vektoren* zu definieren, zumal sie alle Eigenschaften von Vektoren aufweisen. Wie eine Kraft ist ein Moment gekennzeichnet durch einen *Betrag* (gemessen z. B. in der Maßeinheit Nm), eine *Richtung* (Richtung der Drehachse) und einen *Richtungssinn* (Drehsinn).

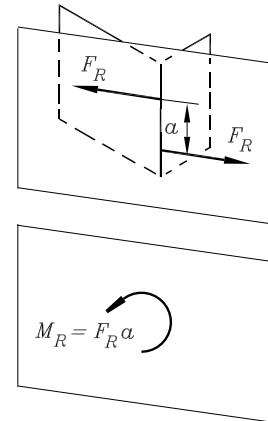


Abbildung 8.13: Zusammenfassen der Kräftepaare zu einem resultierenden Moment

Zur Unterscheidung von den Kraftvektoren werden bei Momentvektoren zwei Pfeilspitzen gezeichnet. Die Lage des Pfeils legt die Drehachse des Moments fest, die Richtung der Pfeilspitzen kennzeichnet die Drehrichtung (Drehsinn): Eine Rechtsschraube würde sich bei entsprechender Drehung in die Richtung bewegen, die die Pfeilspitzen andeuten.

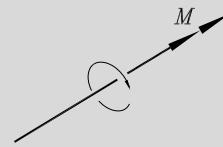


Abbildung 8.14: Das Moment als Vektor

Die *Rechtsschrauben-Regel* (für denjenigen, der mit der technischen Praxis noch nicht so vertraut ist: „Korkenzieher-Regel“) ist anschaulich auch als *Rechte-Faust-Regel* zu formulieren: Zeigt der abgespreizte Daumen der rechten Faust in Richtung der Pfeilspitzen, dann zeigen die übrigen Finger die Drehrichtung an.

Im Gegensatz zu den linienflüchtigen Kraftvektoren (Verschiebung ist nur entlang der Wirkungslinie erlaubt) sind die Momente *freie Vektoren*, die zusätzlich parallel verschoben werden dürfen. Im Unterschied zu den „Rundpfeilen“, mit denen bisher die Momente dargestellt wurden, gilt:

Der Momentvektor steht senkrecht auf der Ebene, in der das äquivalente Kräftepaar liegt.

Nach den Überlegungen, die zum Einführungsbeispiel c angestellt wurden, ist wohl einsehbar, dass man die beiden Momente besonders einfach (wie in **Abbildung 8.15** in den oberen drei Skizzen dargestellt) addieren kann.

Darunter sind noch einmal (in der „Draufsicht“) ein Kräfteparallelogramm, wie es bei der Betrachtung mit den Kräftepaaren auftrat, und das Momentenparallelogramm skizziert. Die Längen der Kräfte und Momente sind proportional (Proportionalitätsfaktor ist der gewählte Abstand a), das Momentenparallelogramm ist gegenüber dem Kräfteparallelogramm um 90° gedreht.

Da die Momente freie Vektoren sind, können alle an einem starren Körper angreifenden Momente zu einem resultierenden Moment zusammengefasst werden (im Gegensatz zu den Wirkungslinien der Kräfte sind „windschiefe“ Drehachsen kein Problem).

Weil Momente wie Vektoren addiert werden dürfen, können sie natürlich auch in Komponenten zerlegt werden. Für die analytische Lösung des Problems, ein resultierendes Moment zu ermitteln, wird dies genutzt: Man zerlegt zunächst jedes Moment in drei Komponenten (bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem), addiert die Komponenten, die in jeweils eine Richtung fallen, zu Teilresultierenden, die schließlich zum resultierenden Moment zusammengefasst werden (wie beim zentralen Kraftsystem).

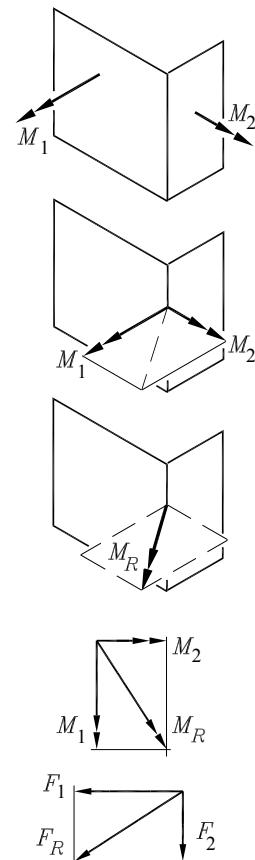


Abbildung 8.15: Momente werden wie Vektoren addiert.

8.3.2 Das Moment einer Kraft

Die im Abschnitt 3.4 eingeführte Definition für das *Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes* („Moment = Kraft · Hebelarm“) und der Begriff *Hebelarm* (kürzeste Verbindung vom Bezugspunkt zur Wirkungslinie der Kraft) bleiben auch bei dreidimensionaler Betrachtung gültig. Allerdings können die damit verbundenen geometrischen Überlegungen recht kompliziert werden, zumal eine Frage hinzukommt: In welcher Ebene wirkt das Moment bzw. welche Lage nimmt die Drehachse im Raum ein?

Bei ebenen Problemen ist die Antwort klar: Kraft, Hebelarm und das durch die Kraft hervorgerufene Moment liegen in der Ebene, die Drehachse des Moments steht senkrecht auf der Ebene (und ist deshalb auch in den Skizzen nicht zu sehen). Nach den Betrachtungen im vorigen Abschnitt ist einsehbar, dass auch diese Aussage auf das räumliche Problem übertragen werden kann:

Das Moment, das eine Kraft bezüglich eines Punktes hervorruft, wirkt in der Ebene, die von der Wirkungslinie der Kraft und dem Hebelarm aufgespannt wird. Seine Drehachse steht senkrecht zu dieser Ebene.

Der allgemeine Fall liegt vor, wenn eine beliebige Kraft im Raum (gegeben durch ihre drei Komponenten F_x , F_y und F_z) an einem beliebigen Punkt (gegeben durch seine drei Koordinaten r_x , r_y und r_z) angreift, gefragt wird nach der Momentwirkung bezüglich des Nullpunktes (**Abbildung 8.16**). Die Wahl des Nullpunktes als Bezugspunkt ist keine Einschränkung der Allgemeinheit: Man legt das Bezugskoordinatensystem (willkürlich) in den Bezugspunkt.

Zur Vereinfachung der Betrachtung wird zunächst nur die Momentwirkung einer Komponente untersucht: Die Kraftkomponente F_x wird entlang ihrer Wirkungslinie (von Punkt ① nach ②) verschoben, so dass ihr Angriffspunkt in der y - z -Ebene liegt, ihr Hebelarm bezüglich des Nullpunktes ist die Diagonale des Rechtecks mit den Seiten r_y und r_z . Die Drehachse steht senkrecht auf der Ebene, die diese Diagonale und F_x aufspannen.

Noch übersichtlicher wird die Betrachtung, wenn man F_x konsequent weiter parallel zu den Koordinatenachsen verschiebt: Bei *Parallelverschiebung* von ② nach ③ (um die Strecke r_z) muss natürlich das *Versetzungsmoment* $F_x r_z$ zusätzlich angetragen werden. Schließlich kommt bei der Parallelverschiebung in den Nullpunkt noch das *Versetzungsmoment* $F_x r_y$ hinzu.

Die Pfeilspitzen der Momentvektoren entsprechen der vereinbarten Rechtsschraubenregel.

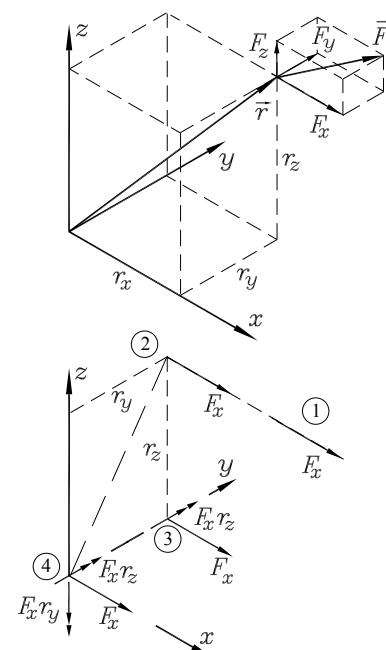


Abbildung 8.16: Moment einer Kraft bezüglich des Nullpunkts

Die Verschiebung einer Kraftkomponente, die zur x -Achse parallel ist, in den Nullpunkt erzeugt also zwei Komponenten des Versetzungsmoments um die beiden anderen Achsen. Die Momentwirkung der Komponente F_x bezüglich des Nullpunktes ist das aus diesen beiden Komponenten zu bildende Moment.

Entsprechende Ergebnisse erhält man bei der Untersuchung der Momentwirkung der beiden anderen Kraftkomponenten. Wenn die Momentkomponenten, deren Pfeilspitzen in Richtung der Koordinatenachsen zeigen, als positiv angenommen werden, können die Ergebnisse dieser Überlegungen zusammengefasst werden zu den

Komponenten der Momentwirkung einer Kraft bezüglich des Nullpunktes:

$$M_x = F_z r_y - F_y r_z \quad , \quad M_y = F_x r_z - F_z r_x \quad , \quad M_z = F_y r_x - F_x r_y \quad . \quad (8.6)$$

- ⇒ Das durch die drei Komponenten 8.6 definierte Moment (der Momentvektor) ist das *Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes*.
- ⇒ Eine einzelne Komponente (Momentvektor in Richtung einer Koordinatenachse) ist das *Moment einer Kraft bezüglich einer Achse*. Da die Lage der Bezugsachsen im Allgemeinen beliebig festgelegt werden darf, kann häufig ausgenutzt werden, dass eine *Kraft kein Moment bezüglich einer Achse hat, wenn*
 - die Wirkungslinie der Kraft parallel zur Achse verläuft (F_x hat z. B. keine Momentwirkung um die x -Achse) oder
 - die Wirkungslinie der Kraft die Achse schneidet, weil dann der Hebelarm Null ist.

Die durch 8.6 gegebenen Komponenten des Momentvektors lassen sich formal (und damit bei komplizierter Geometrie wesentlich übersichtlicher) mit Hilfe des Vektorprodukts ermitteln: Die drei Koordinaten des Kraftangriffspunktes werden zum Ortsvektor zusammengefasst. Dann erhält man das

Moment einer Kraft bezüglich des Nullpunktes:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad . \quad (8.7)$$

- ⇒ Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ (Reihenfolge der Faktoren darf nicht vertauscht werden). Wenn die in 8.7 angegebene Reihenfolge der Faktoren gewählt wird, ergibt sich der Momentvektor automatisch mit der durch die Rechtsschraubenregel definierten Richtung.
- ⇒ Das Vektorprodukt errechnet man z. B. nach der Determinantenregel. Mit den Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z in Richtung der drei Koordinatenachsen gilt (man erkennt, dass die Komponenten des Momentvektors identisch sind mit denen, die entsprechend 8.6 aus der Anschauung gewonnen wurden):

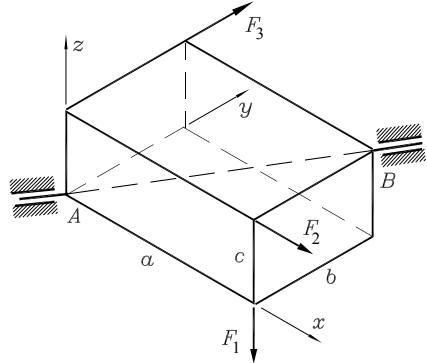
$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x(r_yF_z - r_zF_y) + \vec{e}_y(r_zF_x - r_xF_z) + \vec{e}_z(r_xF_y - r_yF_x) . \quad (8.8)$$

Beispiel 1: An einem Quader mit den Abmessungen a, b und c greifen wie skizziert drei Kräfte an.

Gegeben: a, b, c, F_1, F_2, F_3 .

- Man berechne das resultierende Moment der drei Kräfte bezüglich des Punktes A.
- Wie groß müsste F_3 sein, so dass kein resultierendes Moment um die Achse A-B wirkt?



- In dem gewählten (und in der Skizze angedeuteten) Koordinatensystem liegen alle Kräfte parallel zu den Achsen, so dass ihre Momentwirkungen aus der Anschauung aufgeschrieben werden könnten. Es wird trotzdem der formale Weg über das Vektorprodukt gewählt (und die Anschauung dient der Kontrolle):

$$\vec{M}_{res,A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & 0 & c \\ F_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & b & c \\ 0 & F_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_y a F_1 + \vec{e}_y c F_2 - \vec{e}_x c F_3 = \begin{bmatrix} -F_3 c \\ F_1 a + F_2 c \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Der resultierende Momentvektor hat keine z -Komponente, weil die Wirkungslinie von F_1 parallel zur z -Achse liegt und die Wirkungslinien von F_2 und F_3 die z -Achse schneiden.

- Die Momentwirkungen der drei Kräfte um die Achse A-B (Raumdiagonale des Quaders) sind anschaulich nur mühsam zu ermitteln. Auch hier empfiehlt sich die Vektorrechnung: Der resultierende Momentvektor hat dann keine Komponente in Richtung der Achse A-B, wenn er senkrecht auf ihr steht. Zwei Vektoren sind dann senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt (Summe der Produkte der Vektorkomponenten) verschwindet. Das Skalarprodukt aus dem Vektor der Raumdiagonalen \vec{d} und dem resultierenden Momentvektor liefert:

$$\vec{d}^T \cdot \vec{M}_{res,A} = [a \ b \ c]^T \cdot \begin{bmatrix} -F_3 c \\ F_1 a + F_2 c \\ 0 \end{bmatrix} = -F_3 c a + (F_1 a + F_2 c) b = 0 \rightarrow F_3 = \frac{b}{c} F_1 + \frac{b}{a} F_2 .$$

8.3.3 Äquivalenz und Gleichgewicht

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass am starren Körper jede Kraft in einen beliebigen Punkt verschoben werden darf, wenn das entsprechende Versetzungsmoment (Moment der Kraft bezüglich dieses Punktes) zusätzlich angetragen wird. So können alle Kräfte auf ein zentrales Kraftsystem reduziert und dieses durch eine Resultierende ersetzt werden.

Die am starren Körper angreifenden Momente können ohnehin frei verschoben und natürlich auch zu einem resultierenden Moment zusammengefasst werden, so dass ein beliebiges allgemeines räumliches Kraftsystem äquivalent ist mit einer resultierenden Kraft und einem resultierenden Moment. Eine weitere Reduktion ist im Allgemeinen nicht möglich.

Im Unterschied zum allgemeinen ebenen Kraftsystem, das immer auf eine resultierende Kraft **oder** ein resultierendes Moment reduziert werden kann (Abschnitt 3.5), lässt sich das allgemeine räumliche Kraftsystem im Allgemeinen nur auf eine resultierende Kraft **und** ein resultierendes Moment reduzieren.

Durch geeignete Parallelverschiebung der resultierenden Kraft kann man immer ein zusätzliches Versetzungsmoment so erzeugen, dass bei der Addition mit dem vorhandenen resultierenden Moment schließlich die resultierende Kraft und das resultierende Moment die gleiche vektorielle Richtung haben. Man nennt ein solches Paar *Dyname* (Kraftschraube). Diese Zusammenfassung liefert jedoch außer einer gewissen Anschaulichkeit der Gesamtwirkung einer Kräftegruppe auf den starren Körper im Allgemeinen kaum nennenswerte Vorteile.

Ein starrer Körper befindet sich unter der Wirkung eines allgemeinen räumlichen Kraftsystems im *Gleichgewicht*, wenn weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Moment auf ihn wirken. Da ein Vektor nur dann verschwindet, wenn jede Komponente für sich Null ist, können die *Gleichgewichtsbedingungen* zum Beispiel so formuliert werden:

- ⇒ Summe aller Kraftkomponenten in Richtung von drei zueinander orthogonalen Achsen gleich Null (3 Gleichungen) **und**
- ⇒ Summe aller Momente um drei zueinander orthogonale Achsen gleich Null (3 weitere Gleichungen).

Natürlich sind die Richtungen für die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen und die Achsen für die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen frei wählbar, sie müssen auch nicht unbedingt orthogonal zueinander sein. Auch darf man wie beim ebenen Problem die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen durch zusätzliche Momenten-Gleichgewichtsbedingungen ersetzen.

Es gibt aber wie beim ebenen Problem einige Einschränkungen dieser Freiheiten (z. B. dürfen nicht drei parallele Momenten-Bezugsachsen gewählt werden), deren Nichtbeachtung auf Gleichungssysteme mit singulärer Koeffizientenmatrix führen, die dann nicht eindeutig lösbar sind. Bei der Handrechnung ist dies unbedeutend: Wenn es bei der Lösung bemerkt wird, muss eine zusätzliche Gleichgewichtsbedingung formuliert werden. Für die Computerrechnung ist dies ein sehr unangenehmer Effekt. Ein absolut sicherer Weg, für ein statisch bestimmtes Problem ein lösbares Gleichungssystem zu erhalten, ist: Man wählt drei senkrecht aufeinander stehende Richtungen und formuliert die folgenden

Gleichgewichtsbedingungen für das allgemeine räumliche Kraftsystem:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{ix} &= 0 \quad , \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad , \quad \sum_i F_{iz} = 0 \quad , \\ \sum_i M_{ix} &= 0 \quad , \quad \sum_i M_{iy} = 0 \quad , \quad \sum_i M_{iz} = 0 \quad .\end{aligned}\quad (8.9)$$

- ⇒ Im allgemeinen Fall des räumlich belasteten und gelagerten Körpers können also sechs unbekannte Größen aus sechs Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.
- ⇒ Für die Formulierung der Momenten-Gleichgewichtsbedingungen bezüglich der drei Achsen wird auf die Formeln 8.6 verwiesen. Bei komplizierter Geometrie sollte man sogar das vektorielle Aufschreiben der Momente nach 8.7 bevorzugen.

Beispiel 2:

Das aus 9 Stäben gebildete Raumfachwerk (Rechteck mit einem Diagonalstab als Basisebene und vier Seitenstäbe) ist ein starrer Körper (vgl. das Beispiel im Abschnitt 8.2), der statisch bestimmt durch sechs Stützstäbe gelagert wird.

Gegeben: $F_1 = F_2 = F_3 = F$, a .

Zu berechnen sind die Kräfte in den Lagerstäben A bis F.

Durch das Schneiden der Stützstäbe wird der starre Körper von äußereren Bindungen getrennt. An den Schnittstellen werden die Stabkräfte als Zugkräfte angetragen. Da das Fachwerk bei der Berechnung der Lagerreaktionen wie ein starrer Körper behandelt wird, genügt es, seine Geometrie vereinfacht zu erfassen (**Abbildung 8.17**).

Es gelingt, die Stützkräfte nacheinander aus Gleichungen zu berechnen, die jeweils nur eine unbekannte Kraft enthalten.

Das Kräfte-Gleichgewicht in Richtung der Kraft F_F

$$F_F - F_1 = 0 \quad \text{liefert: } F_F = F.$$

Die Momentensumme um die Achse I-IV

$$F_C 3a - F_2 3a + F_3 1,5a = 0 \quad \text{liefert: } F_C = 0,5F.$$

Die Momentensumme um die Achse IV-V

$$-F_A 2a + F_1 3a - F_3 a = 0 \quad \text{liefert: } F_A = F.$$

Die Momentensumme um die Achse I-III

$$(F_B + F_C) 2a + F_1 3a + F_3 a = 0 \quad \text{liefert: } F_B = -2,5F.$$

Die Momentensumme um eine vertikale Achse durch V

$$F_E 2a - F_1 1,5a - F_2 a = 0 \quad \text{liefert: } F_E = 1,25F.$$

Die Momentensumme um eine vertikale Achse durch I

$$-F_F 3a - F_D 2a + F_1 1,5a + F_2 a = 0 \quad \text{liefert: } F_D = -0,25F.$$

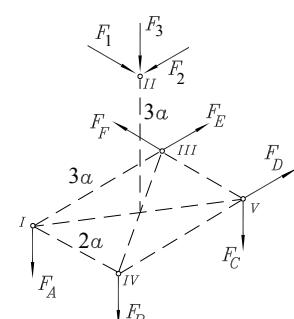
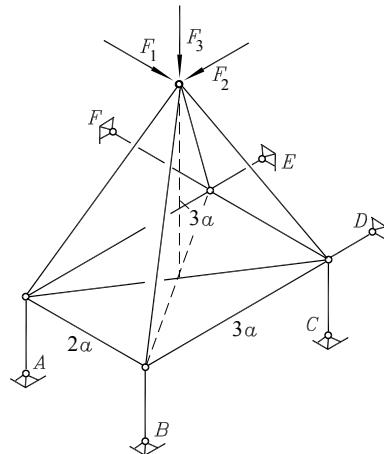


Abbildung 8.17: Informati-on für das Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen

Beispiel 3:

Die beiden Zahnräder mit den Teilkreisdurchmessern d_1 und d_2 des skizzierten Stirnradgetriebes besitzen eine Geradverzahnung. Das Verhältnis der radial zu übertragenen Kraft F_r zur tangential zu übertragenen Umfangskraft F_u ist durch

$$\frac{F_r}{F_u} = \tan 20^\circ$$

gegeben. Die Welle AB wird durch das Antriebsmoment M_1 belastet.

Gegeben: $d_1, d_2, M_1, \frac{a}{b} = 0,8$.

Man ermittle

- F_r und F_u ,
- das Abtriebsmoment M_2 ,
- die resultierende Lagerkraft bei B.

Die Getriebewellen werden freigeschnitten und sämtliche an ihnen wirkenden Kräfte und Momente angetragen (Skizze unten rechts).

Mindestens ein Lager pro Welle müsste drei Lagerkraftkomponenten aufnehmen können. Da keine Längsbelastung in Wellenrichtung wirkt, wird hier auf die dritte Komponente verzichtet.

- Das Momenten-Gleichgewicht um eine Achse, die durch die Mittellinie der oberen Welle verläuft, und die gegebene Beziehung zwischen Radial- und Umfangskraft liefern:

$$M_1 - F_u \frac{d_1}{2} = 0 \rightarrow F_u = 2 \frac{M_1}{d_1},$$

$$\frac{F_r}{F_u} = \tan 20^\circ \rightarrow F_r = 2 \frac{M_1}{d_1} \tan 20^\circ = 0,728 \frac{M_1}{d_1}.$$

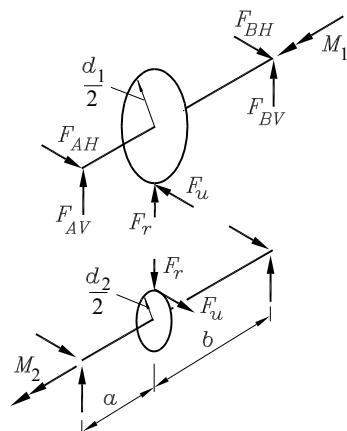
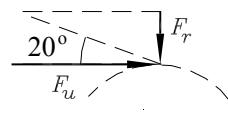
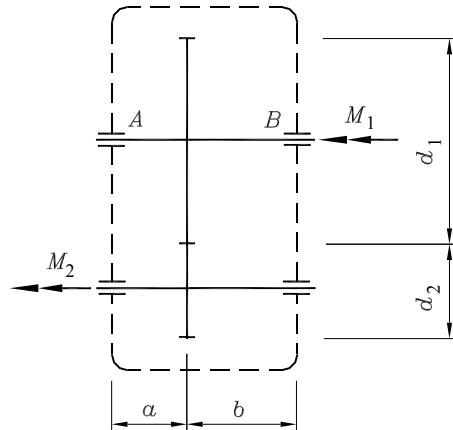
- Mit der bekannten Umfangskraft am unteren Zahnräder liefert das Momenten-Gleichgewicht um die Achse der unteren Welle das Abtriebsmoment:

$$M_2 - F_u \frac{d_2}{2} = 0 \rightarrow M_2 = M_1 \frac{d_2}{d_1}.$$

- Die Komponenten der Lagerkraft des Lagers B gewinnt man aus zwei Momenten-Gleichgewichtsbedingungen um eine horizontale bzw. vertikale Achse im Punkt A:

$$F_r a + F_{BV}(a+b) = 0, \quad F_u a - F_{BH}(a+b) = 0, \quad F_R = \sqrt{F_{BH}^2 + F_{BV}^2},$$

$$F_{BV} = -2 \frac{M_1}{d_1} \frac{a}{a+b} \tan 20^\circ, \quad F_{BH} = 2 \frac{M_1}{d_1} \frac{a}{a+b} \rightarrow F_B = 0,946 \frac{M_1}{d_1}.$$



8.4 Schnittgrößen

Da bei einem allgemeinen räumlichen Kraftsystem Gleichgewicht nur bei Erfüllung von sechs Gleichgewichtsbedingungen hergestellt werden kann, sind in einem beliebigen Schnitt sechs Schnittgrößen anzutragen, die mit dem Kraftsystem des abgeschnittenen Trägerseils wieder eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Es sind drei Schnittkräfte und drei Schnittmomente.

Ein Rechtssystem (x , y und z wie „Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand“) wird so eingeführt, dass die z -Achse (wie beim ebenen Problem) in Richtung der Trägerlängsachse liegt (Abbildung 8.18). Die Schnittgrößen werden nun so definiert, dass sie sowohl in der y - z -Ebene als auch in der x - z -Ebene mit der Definition für das ebene Problem übereinstimmen.

Dazu muss man sich die beim ebenen Problem eingeführte Bezugsfaser jeweils auf der Seite des Trägers vorstellen, zu der die y - bzw. die x -Achse zeigt (in der Skizze also „unten“ bzw. „vorn“).

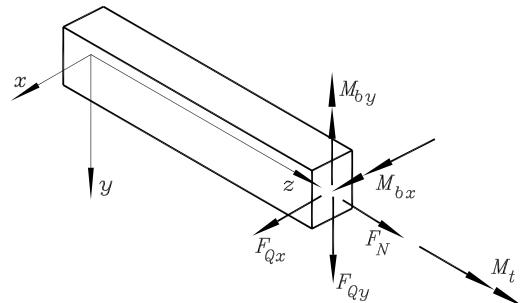


Abbildung 8.18: Schnittgrößen am Träger im Raum

- Die *Normalkraft* F_N wird positiv als Zugkraft definiert.
- Die positiven *Querkräfte* F_{Qx} bzw. F_{Qy} sind am positiven Schnittufer (Schnittufer auf der Seite, auf der das Koordinatensystem liegt) zur „Bezugsfaserseite“ gerichtet (Richtungen der x - bzw. y -Koordinate).
- Die *Biegemomente* M_{bx} bzw. M_{by} sind positiv, wenn sie die jeweilige Bezugsfaser strecken (auf Zug belasten).

Diese fünf Schnittgrößen sind vom ebenen Problem her bekannt. Ein um die Trägerlängsachse drehendes Moment ist jedoch neu:

- Als sechste Schnittgröße wird das *Torsionsmoment* M_t definiert, dessen Pfeilspitzen (wie die Pfeilspitze der Normalkraft) stets vom Schnittufer weg zeigen.

Bei der Definition der Schnittgrößen ist ein Kompromiss unumgänglich: Dem Nachteil der hier gewählten Vereinbarung, dass nur fünf Schnittgrößen am positiven Schnittufer mit ihren Pfeilspitzen den gewählten Koordinatenrichtungen folgen, während M_{by} der y -Achse entgegengerichtet ist, steht der Vorteil gegenüber, dass die Definition in den beiden Ebenen x - z und y - z gleiche Richtungen für die Schnittgrößen zeigt. Es ist deshalb oft ratsam, das räumliche Problem durch Betrachtung von zwei ebenen Problemen zu behandeln, wobei das im ebenen Fall nicht auftretende Torsionsmoment nicht vergessen werden darf.

Ein Vergleich der nachfolgend in den beiden Ebenen gezeichneten Schnittgrößen für das räumliche Problem mit der Definition für das zweidimensionale Problem auf Seite 97 zeigt die Übereinstimmung:

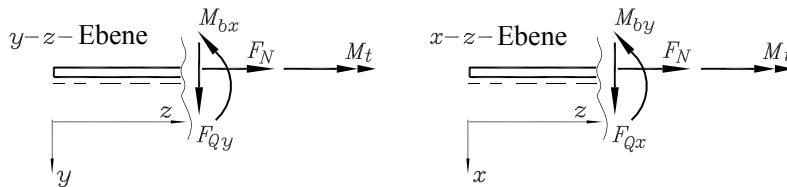
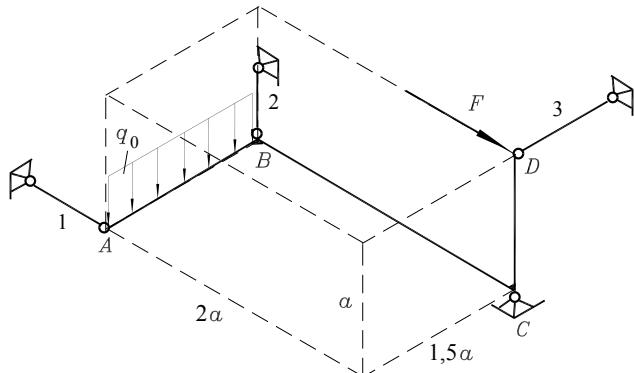


Abbildung 8.19: Die Definition der Schnittgrößen für den räumlich belasteten Träger stimmt in beiden Ebenen mit der Definition für das ebene Problem (Abschnitt 7.1) überein.

Beispiel:

Ein zweifach abgewinkeltes Tragwerk $ABCD$ ist bei C durch ein „räumliches Festlager“ (kann Kraftkomponenten in drei Richtungen aufnehmen) und die drei Stäbe 1, 2 und 3 gelagert. Die Teile AB und BC bzw. BC und CD stehen jeweils senkrecht aufeinander, ebenso die Ebenen ABC und BCD .

Gegeben: $a, q_0, F = q_0 a$.

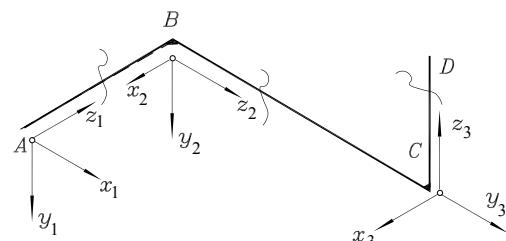


Man ermittle die Lagerkräfte bei C und die Stabkräfte F_{S1}, F_{S2} und F_{S3} sowie die Schnittgrößenverläufe in den Abschnitten AB, BC und CD .

Die sechs Lagerreaktionen (drei Kraftkomponenten am festen Lager und drei Stabkräfte) werden mit Hilfe von sechs Gleichgewichtsbeziehungen am Gesamttragwerk ermittelt. Für die Kräfte am Festlager deuten die Indizes die Raumrichtung eines Stabes an (z. B.: Index 1 - Lagerkraftkomponente des Lagers C parallel zu Stab 1). Die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} F_{C1} &= q_0 a & F_{C2} &= 0,5q_0 a & F_{C3} &= 1,125q_0 a \\ F_{S1} &= 0 & F_{S2} &= q_0 a & F_{S3} &= 1,125q_0 a \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Schnittgrößen sind drei Bereiche erforderlich, für die jeweils eigene Koordinatensysteme (nebenstehende Skizze) benutzt werden. Die Schnittgrößen werden in jedem Abschnitt wie vereinbart (**Abbildungen 8.18 bzw. 8.19**) an den Schnittstellen angetragen.



Am jeweils ausgewählten Teilsystem werden die Gleichgewichtsbeziehungen ausgewertet:

$$\begin{aligned}
 F_{N1} &= 0, & F_{N2} &= 0, & F_{N3} &= 0, \\
 F_{Qx1} &= 0, & F_{Qx2} &= 0, & F_{Qx3} &= -1,125q_0a, \\
 F_{Qy1} &= -q_0z_1, & F_{Qy2} &= -0,5q_0a, & F_{Qy3} &= q_0a, \\
 M_{bx1} &= -0,5q_0z_1^2, & M_{bx2} &= -0,5q_0az_2, & M_{bx3} &= -q_0a(a-z_3), \\
 M_{by1} &= 0, & M_{by2} &= 0, & M_{by3} &= 1,125q_0a(a-z_3), \\
 M_{t1} &= 0, & M_{t2} &= -1,125q_0a^2, & M_{t3} &= 0.
 \end{aligned}$$

8.5 Aufgaben

Aufgabe 8.1:

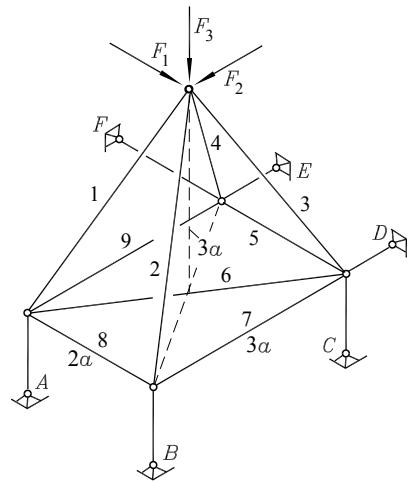
Für das skizzierte Fachwerk sind die Stabkräfte in den Stäben 1 bis 9 zu berechnen.



Gegeben: $F_1 = F_2 = F_3 = F$, a .

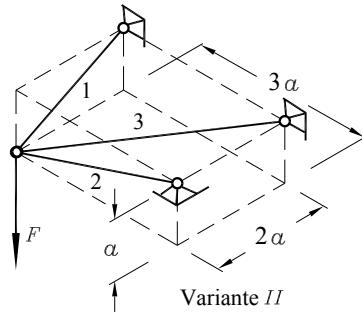
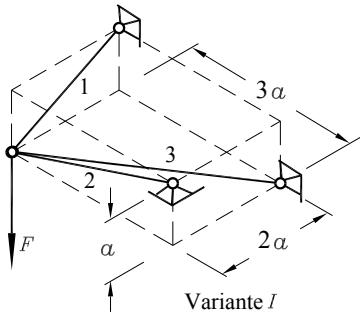
Die Kräfte in den Lagerstäben A bis F wurden bereits im Beispiel 2 des Abschnitts 8.3.3 ermittelt. Unter Benutzung der dort angegebenen Ergebnisse ist die Berechnung der Stabkräfte „von Hand“ durchaus zumutbar.

Alternativ dazu kann ein lineares Gleichungssystem formuliert und mit einem geeigneten Programm gelöst werden. In diesem Fall ist das Einbeziehen der Lagerstäbe in die Rechnung empfehlenswert (Gleichungssystem mit 15 Unbekannten), weil dann das Ergebnis sehr wirkungsvoll über die „bekannten Unbekannten“ kontrolliert werden kann (siehe www.TM-aktuell.de).



Aufgabe 8.2:

Es sind zwei Varianten eines räumlichen Fachwerkknottens zu untersuchen. Gegeben sind die Länge a und die Kraft F , zu bestimmen sind die Stabkräfte F_{S1} , F_{S2} und F_{S3} .



Aufgabe 8.3:

Man berechne für die Kurbelwellen I und II für die in den Abbildungen 8.20 bzw. 8.21 dargestellten Lagen

- das Abtriebsmoment M_A ,
- die Lagerreaktionen bei A und C (Kurbelwelle I) bzw. A und D (Kurbelwelle II),
- die Torsionsmomente in allen Abschnitten (mit grafischer Darstellung).

Gegeben: F , β , a , b .

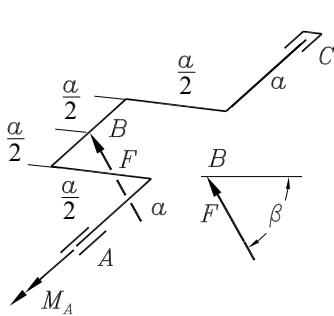


Abbildung 8.20: Kurbelwelle I

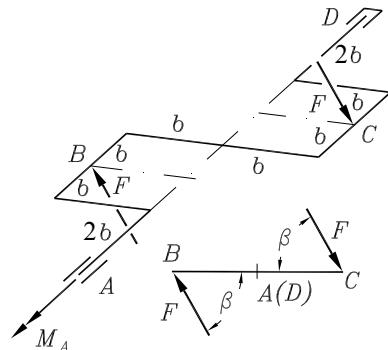


Abbildung 8.21: Kurbelwelle II

Aufgabe 8.4:

Eine Getriebewelle ist mit den geradverzahnten Rädern 1 und 2 besetzt. Zwischen radialem Zahnkraft F_r und Umfangskraft F_u besteht über den Zahneingriffswinkel $\alpha = 20^\circ$ der Zusammenhang

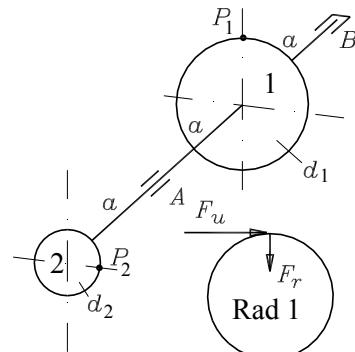
$$F_r = F_u \tan \alpha.$$

Am Antriebsrad wird im Punkt P_2 das entgegen dem Uhrzeigersinn drehende Moment M_0 eingeleitet und am Abtriebsrad im Punkt P_1 abgegeben.

Gegeben: $M_0 = 50 \text{ Nm}$, $d_1 = 200 \text{ mm}$,
 $a = 500 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$.

Man ermittle

- die Zahnkräfte F_{u1} , F_{r1} , F_{u2} und F_{r2} ,
- die resultierenden Lagerkräfte bei A und B,
- die Schnittgrößen in der Welle (mit grafischer Darstellung in zwei Ebenen).



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

9 Haftung

9.1 Coulombsches Haftungsgesetz

Wenn auf einen auf einer *rauen Unterlage* liegenden Körper eine Kraft parallel zur Unterlage wirkt, so tritt eine Reaktionskraft zwischen Körper und Unterlage auf, die einer möglichen Verschiebung des Körpers entgegenwirkt (**Abbildung 9.1**):

Die *Haftkraft* F_H kann wie die Lagerreaktion F_N aus einer Gleichgewichtsbedingung ermittelt werden:

$$F_N = mg \quad , \quad F_H = F \quad .$$

Die Haftkraft ist also eine Reaktionskraft. Sie ist in ihrer Größe begrenzt (wie die übrigen Lagerreaktionen durch die Grenzen der Tragfähigkeit der Lager natürlich auch), was man sich sehr anschaulich an einem Versuch mit einer schiefen Ebene verdeutlichen kann:

Eine nur durch ihre Gewichtskraft belastete Masse m wird auf eine schiefe Ebene gelegt (**Abbildung 9.2**). Nach dem Freischneiden und Antragen der Gewichtskraft und der Reaktionskräfte F_N und F_H liefern die Gleichgewichtsbedingungen:

$$F_N = mg \cos \alpha \quad , \quad F_H = mg \sin \alpha \quad .$$

Es gibt nun einen Grenzwinkel $\alpha = \rho_0$, bei dem die Masse zu rutschen beginnt. Aus den Ergebnissen für *die nur durch ihr Eigengewicht belastete Masse* liest man ab:

$$\frac{F_H}{F_N} = \tan \alpha \quad ,$$

und somit erhält man für den Grenzfall $\alpha = \rho_0$:

$$F_{H,max} = F_N \tan \rho_0 = \mu_0 F_N \quad (\text{mit } \mu_0 = \tan \rho_0) \quad .$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf Körper, die nicht nur durch ihr Eigengewicht belastet sind, erweitern, und man erhält (nach C. A. de COULOMB, 1736 - 1806) das

COULOMBSche Haftungsgesetz:

Die *maximale Haftkraft* zwischen zwei sich berührenden Flächen ist der zwischen diesen Flächen wirkenden Normalkraft (Druckkraft) proportional:

$$|F_{H,max}| = \mu_0 F_N \quad . \quad (9.1)$$

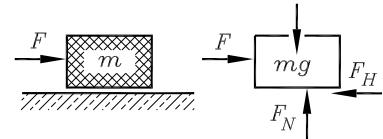


Abbildung 9.1: Normalkraft F_N und Haftkraft F_H

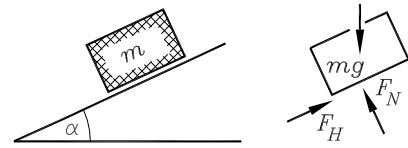


Abbildung 9.2: Auf der schießen Ebene kann die Haftkraft F_H die Masse m nur bis zu einem bestimmten Winkel α am Abrutschen hindern.

- ⇒ Die Absolutstriche bei $F_{H,max}$ im COULOMBSchen Haftungsgesetz deuten an, dass der Maximalwert natürlich für beliebige Richtungen gilt.
- ⇒ Der *Haftungskoeffizient* μ_0 ist sowohl vom Material der sich berührenden Flächen als auch von deren Oberflächenbeschaffenheit abhängig.

Man beachte unbedingt ganz genau, was das COULOMBSche Haftungsgesetz aussagt:

Mit $\mu_0 F_N$ ist die *obere Grenze* für die Haftkraft gegeben. Die *tatsächlich wirkende Haftkraft* F_H wird **immer aus einer Gleichgewichtsbedingung** berechnet, und es muss gelten:

$$F_H \leq F_{H,max} . \quad (9.2)$$

Da die Nichtbeachtung dieser Aussage einer der häufigsten Fehler bei der Behandlung von Haftungsproblemen ist, soll sie an dem folgenden kleinen Beispiel noch einmal verdeutlicht werden:

Beispiel 1: Eine Masse m wird von einer Kraft F so gegen eine vertikale Wand gedrückt, dass sie nicht abwärts rutscht. Unter dieser Voraussetzung (F ist groß genug, um ein Abrutschen zu verhindern!) gilt immer

$$F_H = mg ,$$

unabhängig davon, wie groß die Kraft F tatsächlich ist. F beeinflusst nur die Normalkraft F_N , und diese setzt (COULOMBSches Haftungsgesetz) das obere Limit für die Haftungskraft F_H .

Wenn F_H den maximal möglichen Wert überschreitet, beginnt der Körper zu rutschen, wobei in der Berührungsfläche *Gleitreibung* auftritt. Die Untersuchung der Bewegung mit der Reibungskraft F_R als Bewegungswiderstand ist nicht Gegenstand der Statik und wird in der Kinetik behandelt¹.

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass der Haftungskoeffizient μ_0 nur mit großer Vorsicht aus Tabellen entnommen werden sollte. Neben dem Material der sich berührenden Flächen und deren Oberflächenbeschaffenheit (Rauigkeit, trockene oder geschmierte Flächen) haben auch Temperatur, Feuchtigkeit, unter Umständen auch die Größe der Normalkraft einen nicht in jedem Fall zu vernachlässigenden Einfluss auf diesen Koeffizienten. So findet man zum Beispiel für die Reibpaarung Stahl-Stahl in verschiedenen Lehr- und Tabellenbüchern Werte im Bereich $\mu_0 = 0,1 \dots 0,8$. Der Praktiker sollte bei höheren Genauigkeitsanforderungen an die Rechnung μ_0 gegebenenfalls experimentell bestimmen.

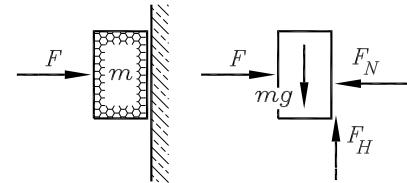


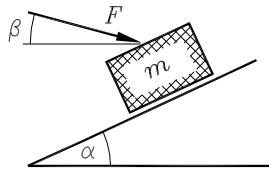
Abbildung 9.3: Im Ergebnis $F_H = mg$ kommen weder die Kraft F noch der Haftungskoeffizient μ_0 vor

¹Die Autoren sind ganz bewusst (aus didaktischen Gründen) von der speziell in Physik-Lehrbüchern (aber auch Lehrbüchern zur Technischen Mechanik) üblichen Behandlung von „Haft- und Gleitreibung“ in einem Kapitel abgewichen, weil für die beiden Phänomene sehr ähnliche Formeln gelten und beide mit dem Namen COULOMB verknüpft sind, aber die Berechnungsstrategien sich drastisch unterscheiden: Die Gleitreibungskraft wird nach einer Formel berechnet, die Haftungskraft aus einer Gleichgewichtsbedingung! Die Gleitreibungskraft ist ein Bewegungswiderstand, die Haftungskraft (das Wort „Haftreibung“ sollte man vermeiden) ist eine Lagerreaktion.

Beispiel 2:

Die Masse m auf einer schießen Ebene ist durch ihre Gewichtskraft und eine zusätzliche Kraft F belastet.

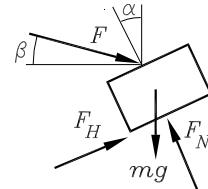
Gegeben: $m = 20\text{kg}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 15^\circ$; $\mu_0 = 0,2$.



- Für $F = 150\text{ N}$ ist die Haftkraft F_H zwischen der Masse und der schießen Ebene zu berechnen.
- Wie groß darf die Kraft F maximal werden, ohne dass die Masse m zu rutschen beginnt?
- Wie groß muss die Kraft F mindestens sein, damit die Masse m nicht rutscht?

Die Masse wird freigeschnitten (von der schießen Ebene gelöst, Normalkraft und Haftkraft werden angetragen), und das Kräftegleichgewicht wird in Richtung der Normalkraft und in Richtung der Haftkraft formuliert:

$$F_N - mg \cos \alpha - F \cos(90^\circ - \alpha - \beta) = 0 \quad , \\ F_H - mg \sin \alpha + F \sin(90^\circ - \alpha - \beta) = 0 \quad .$$



- Aus der zweiten Gleichung wird die Haftkraft berechnet:

$$F_H = mg \sin \alpha - F \cos(\alpha + \beta) = -7,97\text{ N} \quad .$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Haftkraft entgegen der in der Schnittskizze angenommenen Richtung wirkt und somit ein Aufwärtsrutschen der Masse verhindert. Es müsste nun noch überprüft werden, ob diese Kraft innerhalb des vom COULOMBSchen Haftungsgesetz vorgeschriebenen Limits liegt, aber Fragestellung b beantwortet dies natürlich ohnehin.

- Aus der ersten Gleichgewichtsbeziehung folgt für ein beliebiges F die Normalkraft:

$$F_N = mg \cos \alpha + F \sin(\alpha + \beta) \quad .$$

Diese Kraft bestimmt die absolute obere Grenze für F_H . Aufwärtsrutschen kann nur durch eine Haftkraft vermieden werden, die entgegen der in der Skizze getroffenen Annahme wirkt. Deshalb ist der Grenzfall durch

$$-F_{H,max} = \mu_0 F_N$$

gegeben. Einsetzen der für F_N und F_H bereits ermittelten Beziehungen ergibt:

$$F_{max} = \frac{\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta) - \mu_0 \sin(\alpha + \beta)} mg = 233\text{ N} \quad .$$

- Abwärtsrutschen wird durch eine Haftkraft vermieden, die den in der Skizze eingetragenen Richtungssinn hat. Also ist dafür der Grenzfall durch

$$F_{H,max} = \mu_0 F_N$$

gegeben, und man errechnet durch Einsetzen von F_N und F_H :

$$F_{min} = \frac{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta) + \mu_0 \sin(\alpha + \beta)} mg = 75,6\text{ N} \quad .$$

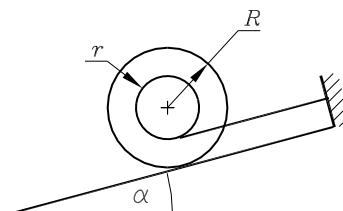
- ⇒ Man beachte, dass die bei gegebener Belastung (Fragestellung *a* des Beispiels 2) berechnete Haftkraft aus einer Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt wurde. Das COULOMBSche Haftungsgesetz wurde nur für die Grenzzustände (Fragestellungen *b* und *c*) herangezogen.
- ⇒ Der tatsächliche Richtungssinn der Haftkraft (wie bisher der Richtungssinn von Lagerreaktionen) ist selbst bei einer so einfachen Aufgabe nicht mit Sicherheit vorherzusagen. Wie bei den Lagerreaktionen wird eine „falsche“ Annahme durch das Vorzeichen des Ergebnisses korrigiert (Fragestellung *a*).
- ⇒ Die Absolutstriche für die Haftkraft im COULOMBSchen Haftungsgesetz 9.1 zwingen immer dann, wenn ein Verlassen der Ruhelage in unterschiedlichen Richtungen möglich ist, zur Untersuchung der Grenzzustände für jeden Richtungssinn, den die Haftkraft haben kann (im Beispiel 2 durch beide möglichen Vorzeichen von F_H realisiert).
- ⇒ Obwohl die an dem Körper angreifenden Kräfte ein allgemeines ebenes Kraftsystem darstellen, wurden nur zwei Gleichgewichtsbedingungen formuliert, weil nur zwei Unbekannte zu berechnen waren. Die dritte Unbekannte ist die Lage der Wirkungslinie der Normalkraft, die aus einer Momenten-Gleichgewichtsbedingung berechnet werden könnte, aber im Allgemeinen nicht interessiert (Normalkraft und Haftkraft sind ja ohnehin selbst Resultierende von Flächenkräften, die über die Haftfläche verteilt sind).

Beispiel 3:

Ein Seil hält eine Walze auf einer schießen Ebene. Man ermittle

- die Kräfte zwischen der Walze und der schießen Ebene und die Kraft im Seil,
- den minimalen Haftungskoeffizienten, der ein Rutschen der Walze vermeidet.

Gegeben: m ; $R = 1,5r$; $\alpha = 15^\circ$.



An der freigeschnittenen Walze liefert das Kräfte-Gleichgewicht in Richtung der Normalkraft:

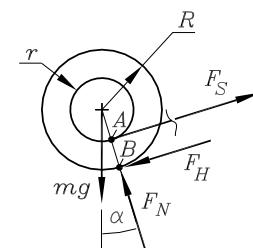
$$F_N = mg \cos \alpha = 0,966mg .$$

Aus dem Momenten-Gleichgewicht um den Punkt A errechnet man:

$$F_H = \frac{r}{R-r} mg \sin \alpha = 0,518mg .$$

Das Momenten-Gleichgewicht um den Punkt B liefert die Seilkraft:

$$F_S = \frac{R}{R-r} mg \sin \alpha = 0,776mg .$$



Der erforderliche Haftungskoeffizient, der gerade noch ein Rutschen verhindert², ergibt sich aus

² In den Vorlesungen der Autoren provozierte diese Aufgabe immer den Zwischenruf: „Aber die Walze rollt doch ohnehin einfach abwärts.“ Sie tut es nicht, wie sollte sie auch, es sei denn, sie rutscht. Rollen bedeutet ja Drehung um den Auflagepunkt, und gerade dies wird durch das Seil verhindert. Wer es trotzdem nicht einsieht, sollte in tiefes Nachdenken verfallen, ein Modell bauen, einfach den Gleichgewichtsbedingungen glauben oder sich trösten: Rollen wird in der Kinetik noch ausführlich behandelt werden.

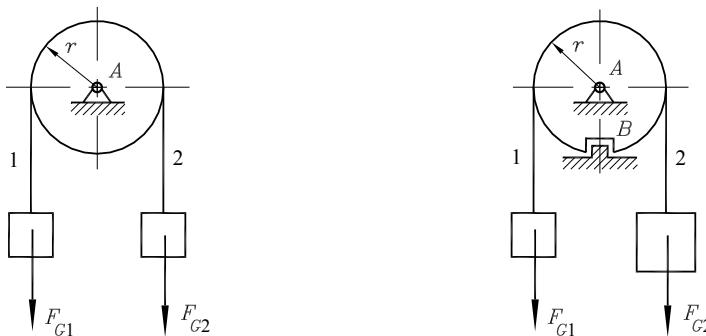
dem Grenzfall $F_H = \mu_0 F_N$ durch Einsetzen der ermittelten Beziehungen für F_H und F_N :

$$\mu_{0,\min} = \frac{r}{R-r} \tan \alpha = 0,536 \quad .$$

- ⇒ Ein letztes Mal soll auf den Unterschied aufmerksam gemacht werden: Wenn vorausgesetzt wird, dass kein Rutschen eintritt, werden die Kräfte ausschließlich aus Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Für die Fragestellung *a* ist es unwichtig, ob das Rutschen durch Haftung oder formschlüssig (z. B.: Zahnrad auf Zahnstange) verhindert wird. Das COULOMBSche Haftungsgesetz ist nur für den Grenzfall (Fragestellung *b*) zuständig.

9.2 Seilhaftung

An einer frei drehbar gelagerten Umlenkrolle, über die ein Seil geführt ist (**Abbildung 9.4**, linkes Bild), kann sich das statische Gleichgewicht nur einstellen, wenn die Seilkräfte in den beiden Seilabschnitten 1 und 2 gleich sind. Wird die Umlenkrolle jedoch arretiert (**Abbildung 9.4**, rechtes Bild), so kann das Momenten-Gleichgewicht auch bei unterschiedlichen Seilkräften erfüllt sein, da auch die Arretierung eine tangential gerichtete Kraft F_B auf die Rolle aufbringen kann.



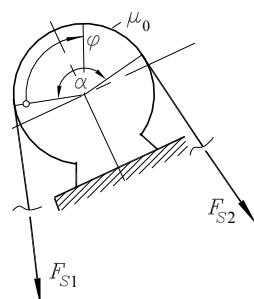
$$(F_{G2} - F_{G1})r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{G1} = F_{G2}$$

$$(F_{G2} - F_{G1} - F_B)r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{G1} \neq F_{G2}$$

Abbildung 9.4: Die Momentengleichgewichtsbedingungen um die Drehpunkte A erzwingen bei der frei drehbaren Rolle gleiche Seilkräfte, bei der arretierten Rolle sind unterschiedliche Seilkräfte möglich.

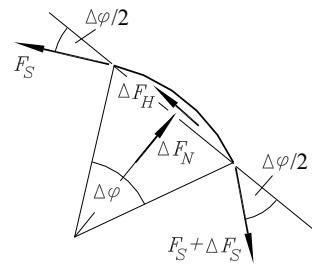
Damit bei unterschiedlichen Seilkräften das Seil nicht über die arretierte Rolle rutscht, müssen zwischen Seil und Rolle Haftkräfte übertragen werden. Der Ermittlung dieser Haftkräfte dient die nachfolgende Betrachtung (nebenstehende Skizze):

Über einen feststehenden Zylinder wird ein Seil geführt. Die Seilkraft F_{S1} sei bekannt. Bei einem gegebenen Umschlingungswinkel α und einem konstanten Haftungskoeffizienten μ_0 zwischen Seil und Zylinder soll die maximale Kraft F_{S2} ermittelt werden, bei der das Seil nicht über den Zylinder rutscht.



Innerhalb des Umschlingungsbereichs ändert die Seilkraft F_S ihre Richtung und Größe. Es wird deshalb an einer beliebigen Stelle (gekennzeichnet durch die Koordinate φ) ein sehr kleines Element (Öffnungswinkel $\Delta\varphi$) herausgeschnitten (nebenstehende Skizze).

Die an der Stelle φ vorhandene Seilkraft $F_S(\varphi)$ ändert sich vom linken Rand zum rechten Rand des Elements um den ebenfalls sehr kleinen Betrag ΔF_S . Die beiden Seilkräfte müssen mit den Kräften, die vom Zylinder auf das Seil (Normalkraft und Haftkraft) übertragen werden, im Gleichgewicht sein.



Auch diese Kräfte ändern sich mit dem Winkel φ , und an das herausgeschnittene Seilelement werden nur die auf dieses Stück wirkenden Anteile ΔF_N und ΔF_H angetragen. In Richtung dieser beiden Kräfte werden nun die Kraft-Gleichgewichtsbeziehungen formuliert:

$$\Delta F_N - 2F_S \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - \Delta F_S \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \quad ,$$

$$\Delta F_H - \Delta F_S \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \quad .$$

Da die maximal übertragbare Haftkraft wirken soll, darf in der zweiten Gleichung ΔF_H durch

$$\Delta F_H = \mu_0 \Delta F_N$$

ersetzt werden. Anschließend werden die erste Gleichung durch $\frac{\Delta\varphi}{2}$ und die zweite Gleichung durch ΔF_S dividiert. Dann liefert der Grenzübergang $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\Delta F_S \rightarrow 0$, $\Delta F_N \rightarrow 0$ und damit

$$\frac{\Delta F_N}{\Delta\varphi} \rightarrow \frac{dF_N}{d\varphi} \quad , \quad \frac{\Delta F_N}{\Delta F_S} \rightarrow \frac{dF_N}{dF_S} \quad , \quad \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow 1 \quad , \quad \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \rightarrow 1$$

die beiden Gleichungen

$$\frac{dF_N}{d\varphi} = F_S \quad , \quad \frac{dF_N}{dF_S} = \frac{1}{\mu_0} \quad ,$$

aus denen die Normalkraft eliminiert werden kann:

$$F_S = \frac{dF_N}{d\varphi} = \frac{dF_N}{dF_S} \frac{dF_S}{d\varphi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dF_S}{d\varphi} \quad .$$

Nach Trennung der Veränderlichen F_S und φ wird auf beiden Seiten über den gesamten Bereich der Seilumschlingung integriert. Die Integrale in der entstehenden Gleichung

$$\int_{F_{S1}}^{F_{S2}} \frac{dF_S}{F_S} = \int_{\varphi=0}^{\alpha} \mu_0 d\varphi$$

sind Grundintegrale. Nach einigen elementaren Umformungen erhält man:

$$F_{S2} = F_{S1} e^{\mu_0 \alpha} \quad .$$

Die so errechnete Kraft F_{S2} ist die *Maximalkraft*, die aufgebracht werden darf, um statisches Gleichgewicht zu garantieren. Sie ist (im Allgemeinen deutlich) größer als F_{S1} . Natürlich ist auch bei einer kleineren Kraft F_{S2} Gleichgewicht möglich. Wenn F_{S2} kleiner wird als F_{S1} , ändern sich die Richtungen der Haftkräfte zwischen Seil und Zylinder, und man ermittelt auf entsprechendem Wege die *Minimalkraft*, für die statisches Gleichgewicht noch möglich ist.

Bei konstantem Haftreibungskoeffizienten μ_0 kann ein Seil, das mit dem Umschlingungswinkel α um einen Zylinder gelegt ist, nur im statischen Gleichgewicht sein, wenn für die Seilkräfte folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$F_{S1}e^{-\mu_0\alpha} \leq F_{S2} \leq F_{S1}e^{\mu_0\alpha} \quad . \quad (9.3)$$

Beispiel 1:

Ein Lederriemen wird n -mal um eine runde Haltestange aus Holz geschlungen. Das frei herabhängende Ende ist nur durch die Gewichtskraft seiner Masse m_1 belastet. Am anderen Ende des Riemens greift horizontal die Kraft F an, so dass der gesamte Umschlingungswinkel $\alpha = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ beträgt.

Gegeben: $F = 4\text{kN}$; $m_1 = 200\text{g}$; $\mu_0 = 0,5$.

Wie viel Umschlingungen n sind erforderlich, um mit der geringen Gewichtskraft des frei herabhängenden Teils der Kraft F das Gleichgewicht zu halten?

Zwischen den beiden Kräften F und m_1g besteht bei größtmöglicher Haftungswirkung der Zusammenhang

$$F = m_1g e^{\mu_0\alpha} \quad .$$

Umstellen dieser Beziehung nach α (Division durch m_1g und Logarithmieren) liefert den erforderlichen Umschlingungswinkel und damit das gesuchte n :

$$\alpha = \frac{1}{\mu_0} \ln \left(\frac{F}{m_1g} \right) = 15,24 \quad ; \quad n = \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{4} = 2,18 \quad .$$

Da n ganzzahlig sein muss, würde man $n = 3$ (und damit $\alpha = 6,5\pi$) wählen. Damit kann dann sogar einer Kraft $F = 53\text{kN}$ das Gleichgewicht gehalten werden.

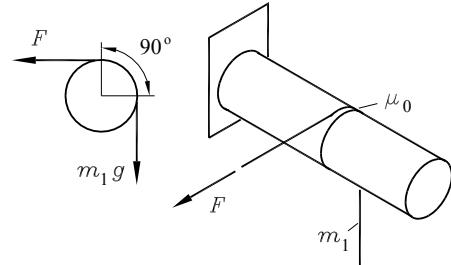


Abbildung 9.5: Western-Film: Das parkende Pferd vor dem Saloon versucht, sich mit F zu befreien, der zechende Cowboy vertraut auf m_1g und die Seilhaftung.

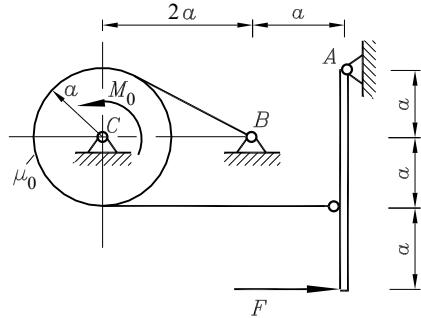
- ⇒ Durch das sehr starke Ansteigen der Exponentialfunktion mit größer werdendem Argument werden die schon bei wenigen Umschlingungen mit geringer Gegenkraft zu haltenden Kräfte außerordentlich groß ($F = 53\text{kN}$ im behandelten Beispiel ist mehr als das 27000-fache der Gegenkraft $m_1g = 200\text{g} \cdot 9,81\text{m/s}^2 = 1,962\text{N}$). Es ist also auch kein Kunststück, wenn ein Matrose einen Ozeanriesen am Tau festhält, wenn er dieses mehrmals um einen Poller geschlungen hat.

Beispiel 2:

Die Bremsscheibe einer Bandbremse wird durch das Drehmoment M_0 belastet (Haftungskoeffizient zwischen Bremsscheibe und Band ist μ_0). Durch die Kraft F soll die Scheibe im Ruhezustand gehalten werden.

Gegeben: $M_0 = 300 \text{ Nm}$; $a = 20 \text{ cm}$; $\mu_0 = 0,4$.

- Man ermittle die erforderliche Kraft $F = F_1$ für den eingezeichneten Drehsinn des Momentes und
- die erforderliche Kraft $F = F_2$ für den entgegengesetzten Drehsinn.



Am freigeschnittenen Bremshebel liefert das Momenten-Gleichgewicht um den Punkt A die Bandkraft $F_S = 1,5F$. Zwischen den beiden Bandkräften an der Scheibe besteht bei der eingezeichneten Richtung des Momentes im Grenzfall (maximal mögliche Haftung voll ausgenutzt) der Zusammenhang

$$F_S^* = F_S e^{\mu_0 \alpha} .$$

Der eingezeichnete Winkel β tritt auch am Punkt B (zwischen dem Band und der Horizontalen) auf und kann aus den Abmessungen ermittelt werden, so dass der Umschlingungswinkel α errechnet werden kann:

$$\sin \beta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad \alpha = \pi + \beta = \frac{7\pi}{6} .$$

Im Momenten-Gleichgewicht an der Scheibe um den Punkt C

$$F_S a + M_0 - F_S^* a = 0$$

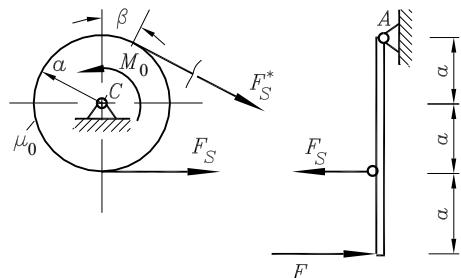
werden mit den bereits angegebenen Beziehungen alle Kräfte durch F ersetzt, und man erhält:

$$F = F_1 = \frac{2M_0}{3a} \frac{1}{e^{\mu_0 \frac{7}{6}\pi} - 1} = 300 \text{ N} .$$

Für diesen Drehsinn ist die Bremse besonders geeignet. Bei entgegengesetztem Drehsinn geht M_0 in das Momenten-Gleichgewicht mit anderem Vorzeichen ein, und für die Bandkräfte gilt:

$$F_S = F_S^* e^{\mu_0 \alpha} .$$

Es ist die wesentlich größere Kraft $F = F_2 = 1300 \text{ N}$ erforderlich.

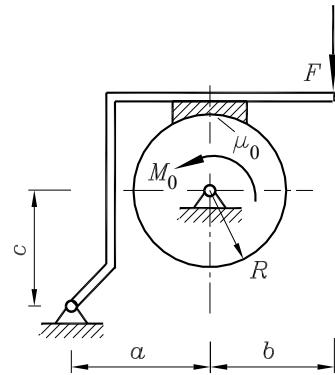


9.3 Aufgaben

Aufgabe 9.1: Für die skizzierte Bremse ist die Kraft F zu berechnen, die dem an der Scheibe angreifenden Moment M_0 das Gleichgewicht hält

- für die skizzierte Drehrichtung von M_0 ,
- bei entgegengesetzter Drehrichtung von M_0 .
- Man untersuche, ob Selbsthemmung möglich ist (ob bei bestimmten Parameterkombinationen das System auch bei $F = 0$ im Gleichgewicht sein kann).

Gegeben: a, b, c, R, M_0, μ_0 .

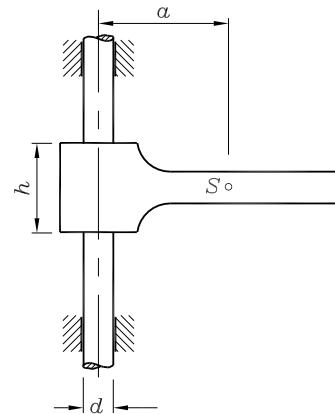


Aufgabe 9.2: Der skizzierte Riegel kann sich auf der vertikalen Stange bewegen, da der Durchmesser der Hülse geringfügig größer ist als der Durchmesser der Stange. Der Riegel ist nur durch seine im Schwerpunkt S angreifende Gewichtskraft belastet.

Gegeben: a, h, d .

Wie groß muss μ_0 mindestens sein, damit infolge der Selbsthemmung ein Abwärtsgleiten des Riegels vermieden wird?

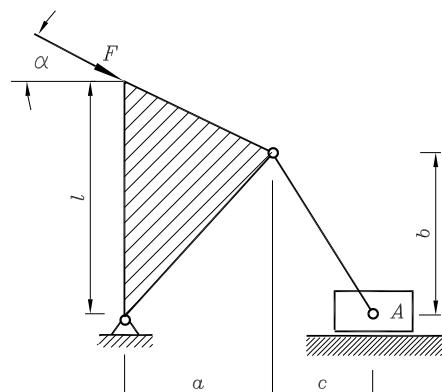
Hinweis: An der oberen und an der unteren Kante der Hülse liegt der Riegel an der Stange an. Dort treten Normalkräfte auf, die gegen eine Abwärtsbewegung Haftkräfte erzeugen. Die (nicht vorgegebene) Gewichtskraft des Riegels darf für die Rechnung in beliebiger Größe angenommen werden. Im Ergebnis wird sie nicht erscheinen.



Aufgabe 9.3: Das skizzierte System ist nur durch die Kraft F belastet.

Gegeben: a, b, c, l, α, F .

Wie groß muss der Haftungskoeffizient zwischen dem Gleitstein A und der Unterlage mindestens sein, damit das System in Ruhe bleibt?

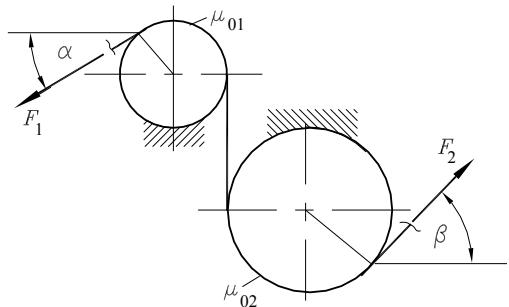


Aufgabe 9.4:

Ein Seil wird über zwei feststehende Zylinder mit unterschiedlicher Rauigkeit geführt. Es soll so belastet werden, dass es nicht über die Zylinder rutscht.

Wie groß muss die Kraft F_2 mindestens sein ($F_{2,min}$) und wie groß darf sie maximal sein ($F_{2,max}$), um ein Rutschen des Seils über die Zylinder zu vermeiden?

Gegeben: $F_1 = 100\text{N}$; $\mu_{01} = 0,4$; $\alpha = 25^\circ$;
 $\mu_{02} = 0,3$; $\beta = 40^\circ$.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

Lieber Leser, bei der Behandlung des Stoffs des Kapitels 9 haben die Autoren in ihren Vorlesungen immer wieder einige Irritationen bei den Studenten bemerkt, die offensichtlich dadurch verursacht wurden, dass das Thema „Haftung und Reibung“ auch im Physikunterricht in der Schule bereits (und möglicherweise ganz anders) behandelt wurde. Deshalb hier noch folgende Bemerkungen:

Auf der Seite 133 erschien zum ersten Mal eine schiefe Ebene, die in der Vorlesung regelmäßig den Zwischenruf auslöste: „In der Physik war da immer noch eine *Hangabtriebskraft*. Wo ist denn die geblieben?“ Die ist natürlich nicht verschwunden, es ist die in Hangrichtung wirkende Komponente der Gewichtskraft der Masse, und wenn man die Gewichtskraft angebringen hat, dann darf man keine zusätzliche Hangabtriebskraft berücksichtigen, und weil man die Gewichtskraft sowieso berücksichtigen muss, gilt der Vorschlag: Vergessen Sie einfach den Begriff „Hangabtriebskraft“.

In diesem Buch wurde bisher nur die Haftung behandelt, die Reibung (zwischen zwei Körpern, bei denen mindestens einer sich bewegt) kommt erst viel später (wenn sich die Körper tatsächlich bewegen). Warum das ganz anders als im Physikunterricht gehandhabt wird (dort wird sogar oft gleich die „Rollreibung“ mit behandelt, das ist allerdings wieder ganz was anderes), wurde in der Fußnote auf Seite 134 erklärt. Wenn Sie die überlesen haben, sollten Sie noch einmal zurückblättern. Manchmal stehen in Fußnoten ganz besonders wichtige Informationen.

10 Elastische Lager

10.1 Lineare Federn

Elastische Lager oder elastische Verbindungselemente geben im Gegensatz zu den bisher behandelten starren Elementen der Belastung nach. Im einfachsten Fall, der hier zunächst nur betrachtet werden soll, überträgt eine solche *Feder* eine Kraft nur in Richtung einer Wirkungslinie, die durch die beiden Federendpunkte verläuft. Man beachte die Analogie mit dem im Abschnitt 6.2 definierten Stab. Deshalb wird auch das Federsymbol (**Abbildung 10.1**) durch zwei Gelenke begrenzt.

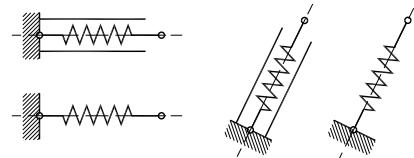


Abbildung 10.1: Das Federsymbol deutet an, dass eine Kraft nur entlang der Wirkungslinie durch die beiden Federendpunkte übertragen werden kann.

Im Gegensatz zum starren Stab können sich jedoch die Endpunkte einer Feder relativ zueinander verschieben (sehr häufig ist der skizzierte Fall, bei dem ein Endpunkt unverschiebbar ist). Diese Verschiebung erfolgt entlang der Wirkungslinie der übertragenen Kraft.

- ⇒ Das für die Feder verwendete Symbol ist der Schraubenfeder nachgebildet, die im Allgemeinen auch Querbelastungen übertragen kann. Deshalb ist die Modellvorstellung „Schraubenfeder“ nicht besonders gut. Man sollte das Symbol besser als „elastischen Stab“ interpretieren (selbst dann, wenn die technische Realisierung tatsächlich eine Schraubenfeder ist). Für Federn, die durch eine Zugkraft belastet sind, ist die Modellvorstellung „Gummiband“ besonders zutreffend. Da die Frage, wie die Feder die Kraft von einem Federendpunkt zum anderen überträgt, für die nachfolgenden Betrachtungen völlig unerheblich ist, sollte man sich schon deshalb nicht mit der Modellvorstellung „Schraubenfeder“ belasten, weil für diese die Kraftübertragung relativ kompliziert ist.

Der Zusammenhang zwischen der von der Feder übertragenen *Federkraft* F_c und der relativen Verschiebung der beiden Federendpunkte zueinander (*Federweg* f) heißt *Federgesetz* und kann mit der *Federzahl* c in der Form

$$F_c = c f \quad (10.1)$$

aufgeschrieben werden. Die Federzahl c hat die Dimension „Kraft/Länge“ und kann experimentell (Aufbringen definierter Lasten und Messen des Federweges) oder rechnerisch (mit den Mitteln der Festigkeitslehre) bestimmt werden.

Analog dazu wird der Widerstand gegen eine Verdrehung durch eine so genannte *Drehfeder* (auch: *Torsionsfeder*) symbolisiert. Das Federgesetz dafür verknüpft den *Verdrehwinkel* φ mit

dem von der Drehfeder aufgenommenen *Moment* M_c über die *Drehfederzahl* c_T (Dimension: „Kraft · Länge“):

$$M_c = c_T \varphi \quad . \quad (10.2)$$

Auch für die Drehfeder ist die praktische Realisierung durch einen Stab eine sinnvolle Vorstellung: Ein senkrecht zur Zeichenebene befestigter elastischer *Torsionsstab* (vgl. hierzu Kapitel 21), der an seinem anderen Ende starr eingespannt ist, entspricht auch den in der technischen Praxis gebräuchlichen Torsionsfedern.

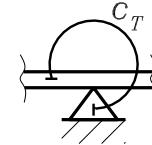


Abbildung 10.2: Drehfeder

Im Allgemeinen sind die Federzahlen vom Federweg abhängig (eine Feder wird bei Änderung des Federweges „weicher“ oder „steifer“). Der in der technischen Praxis mit Abstand wichtigste Sonderfall ist jedoch die so genannte

Lineare Feder:

Wenn in den Federgesetzen die Federzahl c bzw. die Drehfederzahl c_T konstant (unabhängig vom Federweg) sind, spricht man von *linearen Federn* bzw. *linearen Drehfedern* mit der *Federkonstanten* c bzw. der *Drehfederkonstanten* c_T .

Für lineare Federn gilt: Die Federkraft ist proportional zum Federweg. Analog dazu gilt für lineare Drehfedern: Das Federmoment ist proportional zum Verdrehwinkel.

Bei linearen Federn kann man die Federkraft mit beliebigem Richtungssinn antragen, wenn man den Federweg mit dem gleichen Richtungssinn als positiv betrachtet (**Abbildung 10.3**).

Häufig ist ein starrer Körper mit mehreren Federn gelagert. Unter der Voraussetzung eines linearen Federgesetzes können mehrere Federn, deren Federkräfte gleich groß (*Reihenschaltung*) oder deren Federwege gleich sind (*Parallelschaltung*), zu einer *Ersatzfeder* zusammengefasst werden. Dieser Ersatzfeder wird eine Federkonstante c_{ers} so zugeordnet, dass sich der gleiche Federweg wie bei den von ihr ersetzenen Federn ergibt.

Die **Abbildung 10.4** (auf der folgenden Seite) zeigt die beiden möglichen Anordnungen für zwei Federn. Bei einer *Reihenschaltung* sind die Federkräfte in beiden Federn gleich (Schnittprinzip: Bei Schnitt durch eine beliebige Feder muss deren Federkraft mit der äußeren Kraft F im Gleichgewicht sein).

Die beiden Federwege addieren sich zum Federweg der Ersatzfeder, deren Federkraft auch F ist:

$$f_{ers} = f_1 + f_2 = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} = \frac{F}{c_{ers}}$$

liefert die *Ersatzfederzahl* für die Reihenschaltung zweier linearer Federn:

$$\frac{1}{c_{ers}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad . \quad (10.3)$$

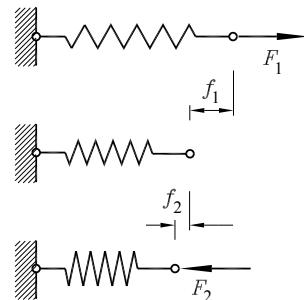


Abbildung 10.3: Das Federgesetz 10.1 setzt voraus, dass die angreifende Kraft und der Federweg in gleicher Richtung positiv angenommen werden.

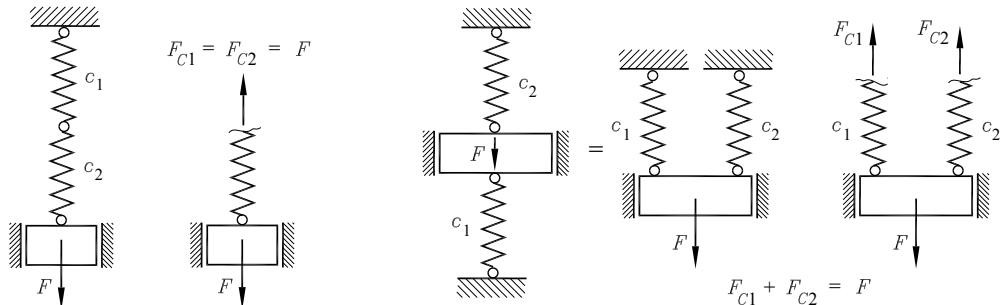


Abbildung 10.4: Reihenschaltung (links) und Parallelschaltung (rechts) zweier Federn

Bei der *Parallelschaltung* sind die Federwege gleich (und natürlich gleich dem der Ersatzfeder), die Federkräfte müssen mit der äußeren Belastung im Gleichgewicht sein:

$$F = F_{C1} + F_{C2} = c_1 f + c_2 f = c_{ers} f$$

liefert die *Ersatzfederzahl für die Parallelschaltung zweier linearer Federn*:

$$c_{ers} = c_1 + c_2 \quad . \quad (10.4)$$

Ohne weitere Begründung kann man wohl die folgenden Formeln akzeptieren.

Für Reihen- bzw. Parallelschaltung von \$n\$ Federn gilt:

$$\text{Reihenschaltung: } \frac{1}{c_{ers}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \quad , \quad \text{Parallelschaltung: } c_{ers} = \sum_{i=1}^n c_i \quad . \quad (10.5)$$

10.2 Gleichgewicht bei steifen Federn

Wenn die Belastung eines auf Federn gelagerten Systems starrer Körper nur sehr kleine Federwege hervorruft, so dass sich die geometrischen Verhältnisse durch die Verschiebungen nicht nennenswert ändern, dann dürfen die Gleichgewichtsbedingungen ohne Berücksichtigung dieser Änderungen aufgeschrieben werden. Der Begriff „Steife Federn“ ist also relativ zur Belastung zu definieren:

Federn gelten dann als steif, wenn die starren Körper sich unter der einwirkenden Belastung nur so geringfügig verschieben, dass die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert werden dürfen.

Für statisch bestimmt gelagerte Systeme starrer Körper ändert sich also für die Berechnung der Lagerreaktionen und der Federkräfte nichts gegenüber dem bisher praktizierten Verfahren (Freischneiden, Gleichgewichtsbedingungen), wenn diese Voraussetzung erfüllt ist.

Beispiel 1:

Der bei A durch ein Festlager und am anderen Ende durch eine Feder gestützte Träger trägt die konstante Linienlast q_0 .

In der Schnittskizze sind neben der Resultierenden der Linienlast die beiden Lagerkraftkomponenten bei A und die Federkraft eingezeichnet. Aus dem Momentengleichgewicht um den Punkt A errechnet man (wie eine Lagerreaktion) die Federkraft

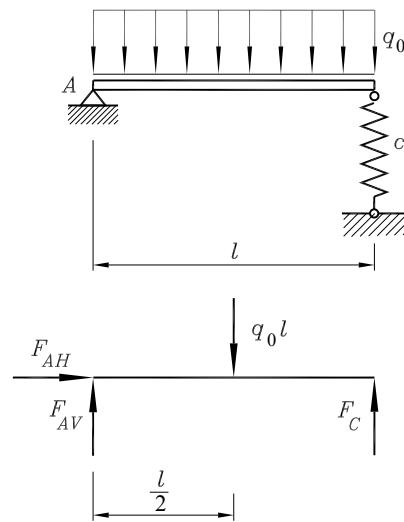
$$F_C = \frac{1}{2} q_0 l .$$

Für die Längenänderung der Feder gilt

$$f = \frac{F_C}{c} = \frac{q_0 l}{2c} ,$$

wobei bei gegebenen Größen überprüft werden muss, ob dieser Wert wirklich klein im Vergleich mit den übrigen Abmessungen (hier: Länge l) ist.

Man erkennt, dass das Verhältnis $\frac{f}{l}$ durch das Verhältnis „Belastung/Federzahl“ bestimmt wird (siehe oben: Der Begriff *steif* ist relativ zur Belastung zu verstehen).



Bei statisch bestimmten Federabstützungen mit steifen Federn können die Federkräfte wie Lagerkräfte bei starren Lagern ermittelt werden.

Es ist bei Systemen starrer Körper, die (wenigstens teilweise) auf Federn gelagert sind, auch möglich, die Lagerreaktionen und die Federkräfte zu berechnen, wenn die Lagerung insgesamt *statisch unbestimmt* ist. Da die Gleichgewichtsbedingungen dafür bekanntlich nicht ausreichen, müssen zusätzlich Verformungsbetrachtungen angestellt werden.

Dabei werden bei *steifen Federn* die Gleichgewichtsbedingungen nach wie vor am unverformten System formuliert. Diese für die weitaus meisten praktischen Probleme gerechtfertigte Vereinfachung ist die

Theorie 1. Ordnung:

Die Gleichgewichtsbedingungen werden am unverformten System formuliert. Bei den am verformten System anzustellenden Verformungsbetrachtungen dürfen die wegen der Kleinheit der Verformungen gerechtfertigten geometrischen Vereinfachungen genutzt werden.

Es wird sich zeigen, dass die Theorie 1. Ordnung im Regelfall völlig ausreichend ist. Es gibt im Wesentlichen zwei Gründe, die ein Abweichen von dieser Theorie erforderlich machen können: Wenn (z. B. bei Systemen mit weichen Federn) die Verformungen in die Größenordnung der Abmessungen des Systems kommen, ist eine genauere Rechnung geboten (Abschnitt 10.3), andererseits gibt es Phänomene, die auch bei kleinen Verformungen mit der Theorie 1. Ordnung nicht zu erfassen sind (Abschnitt 10.4).

Beispiel 2:

Der skizzierte Träger ist durch ein Festlager und zwei Federn gestützt und durch eine konstante Linienlast belastet. Man ermittle die Kräfte in den beiden Federn.

Die drei Gleichgewichtsbedingungen sind für die Berechnung der vier Unbekannten (zwei Lagerkraftkomponenten bei A und zwei Federkräfte) nicht ausreichend. Da die beiden Lagerkraftkomponenten nicht gefragt sind, wird auf das Aufschreiben der Kraft-Gleichgewichtsbedingungen verzichtet, und es wird nur das Momenten-Gleichgewicht um den Punkt A formuliert (Einsparen von zwei Gleichungen bei gleichzeitigem Heraushalten von zwei - nicht gefragten - Unbekannten aus der Rechnung):

$$A\vartheta \quad \frac{q_0 l^2}{2} - F_{C1} l_1 - F_{C2} l = 0 \quad .$$

Diese eine Gleichung enthält aber immer noch eine überzählige Unbekannte, für die entsprechend nebenstehender Skizze die Verformungsbedingung formuliert wird. Da der Träger starr ist, verhalten sich die Federwege f_1 und f_2 wie die Abstände der Federn vom Punkt A (Strahlensatz):

$$\frac{f_2}{l} = \frac{f_1}{l_1} \quad .$$

Dabei wurde die Kleinheit der Verschiebungen genutzt, denn eigentlich bewegen sich die beiden Angriffspunkte der Federn auf Kreisbögen, was in diesem Fall ohnehin zur gleichen Verformungsbedingung geführt hätte.

Nach dem Federgesetz

$$f_1 = \frac{F_{C1}}{c_1} \quad , \quad f_2 = \frac{F_{C2}}{c_2}$$

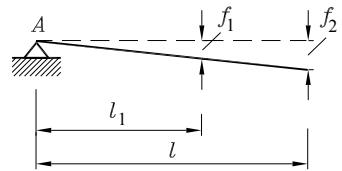
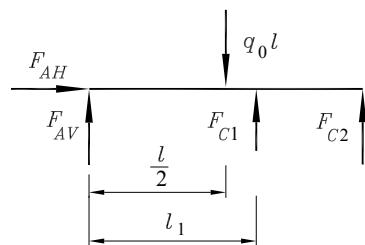
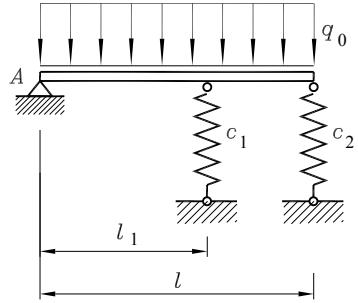
werden in der Verformungsbedingung die Federwege f_1 und f_2 durch die Federkräfte ersetzt:

$$\frac{F_{C2}}{l c_2} - \frac{F_{C1}}{l_1 c_1} = 0$$

ist neben der Momenten-Gleichgewichtsbedingung um den Punkt A die zweite Gleichung zur Berechnung der beiden Federkräfte. Die Auflösung dieser beiden Gleichungen liefert:

$$F_{C1} = \frac{q_0 l^2}{2} \frac{l_1 c_1}{l^2 c_2 + l_1^2 c_1} \quad , \quad F_{C2} = \frac{q_0 l^2}{2} \frac{l c_2}{l^2 c_2 + l_1^2 c_1} \quad .$$

Die Lösung des (statisch bestimmten) Beispiels 1 ist in diesem Ergebnis als Sonderfall (mit $c_1 = 0$, $c_2 = c$) enthalten.



- ⇒ Der in den Abschnitten 5.3 und 6.1 ausführlich diskutierte Nachteil statisch unbestimmter Lagerung, bei Fertigungsungenauigkeiten und Verschleiß zu völlig verändertem Tragverhalten führen zu können, kann durch Lagerung auf Federn beseitigt werden, wenn eine solche Lagerung der Funktion des Bauteils gerecht wird.
- ⇒ Es ist sicher einsehbar, dass auch eine größere Anzahl von Federn nicht zu prinzipiellen Schwierigkeiten bei der Berechnung der Federkräfte führt: Für jede zusätzliche Feder kann eine weitere Verformungsbedingung formuliert werden. Allgemein gilt als Strategie für die

Lösung statisch unbestimmter Probleme:

Zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen werden Verformungsbedingungen formuliert, deren Anzahl der Anzahl der überzähligen Unbekannten entspricht.

10.3 Gleichgewicht bei weichen Federn

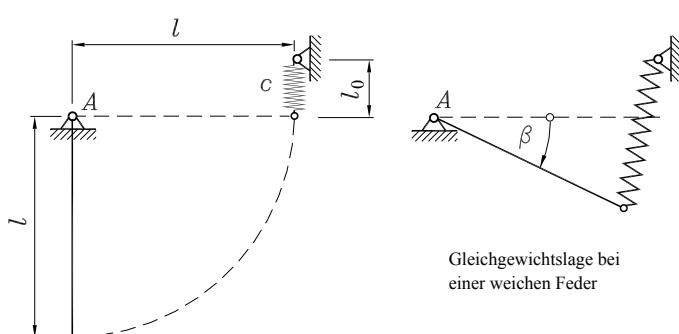
Bei Lagerung eines Systems starrer Körper mit weichen Federn dürfen die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr am unverformten System formuliert werden, weil die Gleichgewichtslage sich von der Lage des unbelasteten Systems erheblich unterscheiden kann. Ohne Verformungsbetrachtungen können solche Aufgaben (auch bei statisch bestimmter Lagerung) nicht gelöst werden, denn es kommt zu den unbekannten Lagerreaktionen und Federkräften noch die unbekannte Geometrie der Gleichgewichtslage hinzu.

Im einfachsten Fall kann die (unbekannte) Gleichgewichtslage durch eine einzige geometrische Größe beschrieben werden, so dass bei statisch bestimmter Lagerung vier Unbekannte zu ermitteln sind. Bei statisch unbestimmten Problemen gilt, was im vorigen Abschnitt bereits gesagt wurde: Für jede zusätzliche Feder kann eine weitere geometrische Beziehung formuliert werden.

Typisch für Probleme mit großen Verformungen ist, dass die mathematische Formulierung auf nichtlineare Gleichungen führt, deren Lösung dem Computer übertragen werden sollte.

Beispiel: Ein starrer Stab (Masse m , Länge l , Gewichtskraft greift im Mittelpunkt des Stabes an) ist bei A drehbar gelagert. Er wird in eine Feder (Federkonstante c) eingehängt, deren Länge l_0 (unbelastet) sich dadurch erheblich vergrößert.

Gegeben: m, l, c, l_0 .



Man ermittle die sich einstellende Gleichgewichtslage, die wie skizziert durch den Winkel β beschrieben werden kann.

Das System ist statisch bestimmt gelagert. Trotzdem taucht neben den beiden Lagerkraftkomponenten und der Federkraft als vierte Unbekannte der Winkel β auf.

Um die Erläuterung (und auch das Aufschreiben der Beziehungen) zu vereinfachen, sind in der nebenstehenden Schnittskizze zusätzlich die Längen a und b und der Winkel δ eingetragen, die aber durch die gegebenen Größen und die Unbekannte β ausgedrückt werden können. Für a und b entnimmt man der Skizze die folgenden Beziehungen und kann damit auch die Gesamtlänge der gedehnten Feder l^* aufschreiben:

$$a = l \cos \beta \quad , \quad b = l \sin \beta \quad , \quad l^* = \sqrt{(l - a)^2 + (l_0 + b)^2} \quad .$$

Für den Winkel δ lassen sich die beiden benötigten Winkelfunktionen angeben:

$$\sin \delta = \frac{l - a}{l^*} \quad , \quad \cos \delta = \frac{l_0 + b}{l^*} \quad .$$

Der Federweg ist die Differenz aus der Länge der gedehnten Feder l^* und ihrer Länge im unbelasteten Zustand l_0 , so dass die Federkraft als

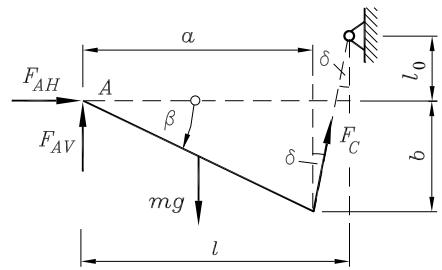
$$F_C = c(l^* - l_0)$$

aufgeschrieben werden kann.

Man beachte, dass als einzige Unbekannte β in diesem Formelsatz vorkommt und bei bekanntem β auch die Federkraft berechnet werden könnte. Die Lagerkraftkomponenten bei A sind nicht gefragt und werden aus der Rechnung durch Verzicht auf die beiden Kraft-Gleichgewichtsbedingungen herausgehalten. Als Bestimmungsgleichung für β wird das Momenten-Gleichgewicht um den Punkt A formuliert (F_C in zwei Komponenten zerlegen):

$$A\vartheta \quad mg \frac{a}{2} - F_C a \cos \delta - F_C b \sin \delta = 0 \quad .$$

Das Einsetzen der bereits angegebenen Beziehungen in die Gleichung, damit diese nur noch β als unbekannte Größe enthält, ist nicht erforderlich, da ihre Lösung ohnehin dem Computer übertragen wird, dem dann der Formelsatz (in der aufgeschriebenen Reihenfolge) eingegeben wird. Sinnvoll ist es dagegen, die Anzahl der vorzugebenden Parameter auf ein Minimum zu begrenzen. Wenn man die geometrischen Beziehungen durch die Länge l und die Federkraft durch mg dividiert (und die Momentengleichgewichtsbeziehung durch beide Größen), erhält man den nebenstehenden Formelsatz.



$$\frac{a}{l} = \cos \beta \quad , \quad \frac{b}{l} = \sin \beta \quad ,$$

$$\frac{l^*}{l} = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{l_0}{l} + \frac{b}{l}\right)^2} \quad ,$$

$$\sin \delta = \frac{1 - a/l}{l^*/l} \quad , \quad \cos \delta = \frac{l_0/l + b/l}{l^*/l} \quad ,$$

$$\frac{F_C}{mg} = \frac{cl}{mg} \left(\frac{l^*}{l} - \frac{l_0}{l} \right) \quad ,$$

$$\frac{1}{2} \frac{a}{l} - \frac{F_C}{mg} \left(\frac{a}{l} \cos \delta + \frac{b}{l} \sin \delta \right) = 0 \quad .$$

Abbildung 10.5: Gleichung als Formelsatz

Man beachte, dass der in **Abbildung 10.5** dargestellte Formelsatz nur eine Gleichung (die Bestimmungsgleichung für β) repräsentiert. Weil er ausschließlich dimensionslose Größen enthält, kommt man mit nur zwei Parametern ($\frac{cl}{mg}$ und $\frac{l_0}{l}$) anstelle der vier gegebenen Größen aus.

Für die Lösung der nichtlinearen Gleichung, die durch den Formelsatz beschrieben wird, bedient man sich natürlich eines geeigneten Programms, mit dem die Nullstellen einer Funktion bestimmt werden können (unter www.TM-aktuell.de findet man die Lösung mit verschiedenen Software-Produkten). Die letzte Gleichung wird als Funktion $f(\beta)$ eingegeben. Ihre Nullstellen sind die gesuchten Gleichgewichtslagen.



- ⇒ Schon dieses relativ einfache Problem führt auf eine Funktion, die sinnvollerweise nicht mehr in einer Zeile aufgeschrieben wird (obwohl es durchaus noch möglich wäre). Die Berechnung eines Funktionswertes für einen Wert β geschieht durch Auswerten des gesamten Formelsatzes (in der angegebenen Reihenfolge), bis $f(\beta)$ schließlich aus

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \frac{a}{l} - \frac{F_C}{mg} \left(\frac{a}{l} \cos \delta + \frac{b}{l} \sin \delta \right)$$

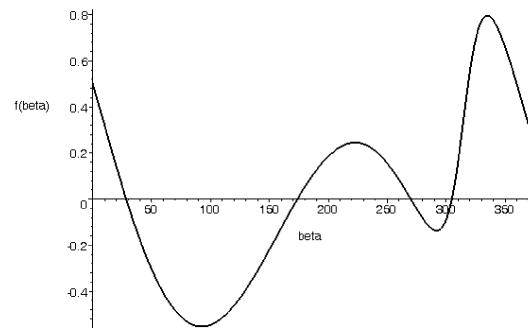
berechnet werden kann.

- ⇒ Ob eine nichtlineare Gleichung überhaupt eine (reelle) Lösung hat (ob $f(\beta)$ eine Nullstelle hat), wenn ja, wie viele Lösungen möglich und ob bei mehreren Lösungen alle von praktischem Interesse sind, kann allgemein nicht entschieden werden. Natürlich ist für das behandelte Problem unter der Voraussetzung, dass die Feder die Belastung ertragen kann (und nicht bricht), in jedem Fall eine Gleichgewichtslage im Bereich

$$0^\circ < \beta < 90^\circ$$

zu erwarten. Da β nur als Argument der periodischen Winkelfunktionen sin und cos auftritt, ist auch klar, dass die Funktion unendlich viele Nullstellen hat, von denen allenfalls die im Bereich $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$ interessant sind.

Die Nullstellensuche für nichtlineare Funktionen sollte vorsichtshalber immer mit der grafischen Darstellung des Funktionsverlaufs gekoppelt werden. Der nebenstehende Bildschirmschnappschuss (Maple) zeigt den Verlauf der Funktion $f(\beta)$ für die Parameterkombination $\frac{cl}{mg} = 1$ und $\frac{l_0}{l} = 1$ im Bereich $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$.



Die Funktion hat im untersuchten Bereich vier Nullstellen (mögliche Gleichgewichtslagen), auch die erwartete bei

$$\beta_0 = 28,4^\circ .$$

Eine Diskussion der drei übrigen Gleichgewichtslagen erfolgt im nachfolgenden Abschnitt.

10.4 Beurteilung der Gleichgewichtslagen

Ein System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Gleichgewichtsbeziehungen erfüllt sind. Damit ist jedoch noch nicht gesichert, dass das System auch bei einer *Störung* (Erschütterung, kleine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage, ...) in dieser Lage bleibt bzw. in diese Lage zurückkehrt. Tut es dies, dann ist die *Gleichgewichtslage stabil*, wenn nicht, dann ist sie *instabil* (Beispiele stabiler und instabiler Gleichgewichtslagen zeigt die Abbildung 10.6).

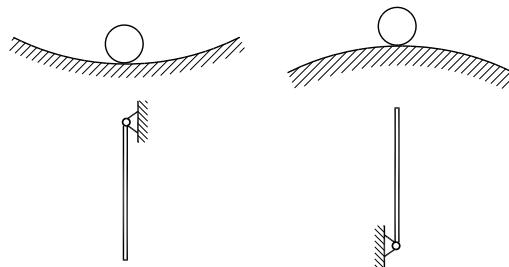


Abbildung 10.6: Stabile (linke Skizzen) und instabile Gleichgewichtslagen einer Kugel und eines Stabs

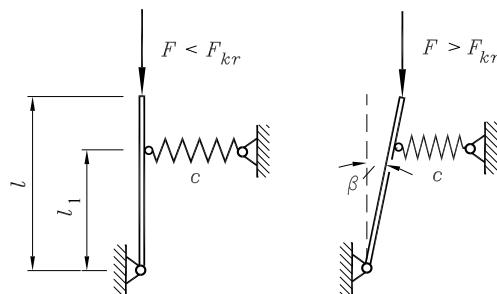
Das Phänomen instabiler Gleichgewichtslagen kann natürlich nur auftreten, wenn das System noch Bewegungsmöglichkeiten hat (z. B. dadurch, dass ein möglicher Freiheitsgrad nicht durch ausreichende Lagerung behindert ist).

Wenn ein *starres System mit starren Lagern* mindestens statisch bestimmt gelagert ist, hat es keine Bewegungsmöglichkeit mehr. Seine Gleichgewichtslage ist immer stabil.

Bei elastischen Lagern muss also auch bei Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen stets überlegt werden, ob die Gleichgewichtslage stabil ist. Instabile Gleichgewichtslagen von Konstruktionen sind im Allgemeinen nicht akzeptabel.

Beispiel 1: Der skizzierte vertikale Stab ist in einem Festlager gelagert und wird durch eine Feder gestützt. Er trägt nur die vertikal gerichtete Kraft F .

In der skizzierten (nicht ausgelenkt) Lage sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Die Belastung wird durch das Festlager aufgenommen, die Feder ist lastfrei und hat ausschließlich eine stabilisierende Funktion:



Bei einer Störung der Gleichgewichtslage wird sie gedehnt oder gestaucht und versucht, den Stab wieder in die vertikale Gleichgewichtslage zurückzubringen, indem sie dem Moment der Kraft F um den Lagerpunkt ein entsprechendes Moment entgegenbringt.

Wenn die Kraft F einen bestimmten Wert (die *kritische Kraft* F_{kr}) übersteigt, wird die Feder dazu nicht mehr in der Lage sein. Dann stellt sich eine Gleichgewichtslage (rechte Skizze) ein, bei der die Feder nicht mehr lastfrei ist. Auch in dieser „ausgelenkten Lage“ müssen natürlich die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein.

Zu jeder Kraft $F > F_{kr}$ wird also mindestens eine mögliche (ausgelenkte) Gleichgewichtslage existieren, die aber im Allgemeinen nicht interessiert. Viel wichtiger ist die Antwort auf die Frage nach der kritischen Kraft, bei deren Überschreitung solche Gleichgewichtslagen möglich sind.

Dazu müssen die *Gleichgewichtsbedingungen* in der ausgelenkten Lage formuliert werden. Dabei darf man annehmen, dass die Auslenkung sehr klein ist, weil ja gerade der Grenzzustand (die Größe der kritischen Kraft) gesucht ist. Die Federkraft wird deshalb horizontal angetragen und wirkt am (näherungsweise) unveränderten Hebelarm l_1 , und der Hebelarm der Kraft F_{kr} darf durch

$$l \sin \beta \approx l\beta$$

angenähert werden.

Die Auswertung des Momenten-Gleichgewichts um den Lagerpunkt A liefert mit den genannten Vereinfachungen:

$$A\vartheta \quad F_{kr}l\beta - F_C l_1 = 0 \quad .$$

Auch beim Aufschreiben der Federkraft

$$F_C = l_1 \beta c$$

wird die Kleinheit der Auslenkung vereinfachend ausgenutzt. Nach Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung erhält man nach Umstellen der Gleichung die kritische Kraft

$$F_{kr} = \frac{cl_1^2}{l} \quad .$$

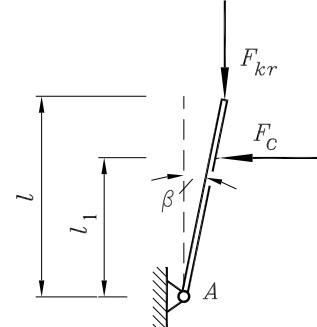
Wenn diese Kraft überschritten wird, sind also auch Gleichgewichtslagen mit $\beta \neq 0$ möglich, und die nicht ausgelenkte (Gleichgewichts-)Lage ist instabil, weil der Stab bei der geringsten Störung nicht durch die Feder in diese Lage zurückgeführt wird.

Das am Beispiel 1 demonstrierte Vorgehen zur Ermittlung der kritischen Kraft basiert auf der

Theorie 2. Ordnung:

Die Gleichgewichtsbedingungen werden am verformten System formuliert. Die Verformungen werden aber als so klein vorausgesetzt, dass für das Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen und der Verformungsbetrachtungen die entsprechenden geometrischen Vereinfachungen genutzt werden dürfen.

Auf diese Weise können kritische Belastungen berechnet werden (Belastungen, für die ausgelenkte Gleichgewichtslagen existieren). Die (meist ohnehin nicht interessierenden) Gleichgewichtslagen erhält man allerdings bei diesem Vorgehen nicht.



Für das behandelte Beispiel 1 bedeutet dies, dass der Winkel β , der die ausgelenkte Gleichgewichtslage beschreibt, nach der Theorie 2. Ordnung nicht berechnet werden kann. Man erhält auch keine Aussage darüber, ob es mehrere Gleichgewichtslagen dieser Art gibt und ob diese stabil oder instabil sind.

Wenn die Beantwortung auch dieser Fragen erwünscht ist, muss auf die Vereinfachungsmöglichkeiten der Theorie 2. Ordnung verzichtet werden, und man rechnet nach der

Theorie 3. Ordnung:

Bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System und bei allen Verformungsbetrachtungen werden große Verformungen angenommen, so dass die geometrischen Verhältnisse exakt erfasst werden.

Nach dieser Theorie können auch die möglichen Gleichgewichtslagen ermittelt werden.

Das Beispiel des Abschnitts 10.3 ist nach dieser Theorie berechnet worden, weil die Verformungen bei weichen Federn natürlich nicht als klein angenommen werden dürfen. Die Rechnung ergab 4 mögliche Gleichgewichtslagen (**Abbildung 10.7**):

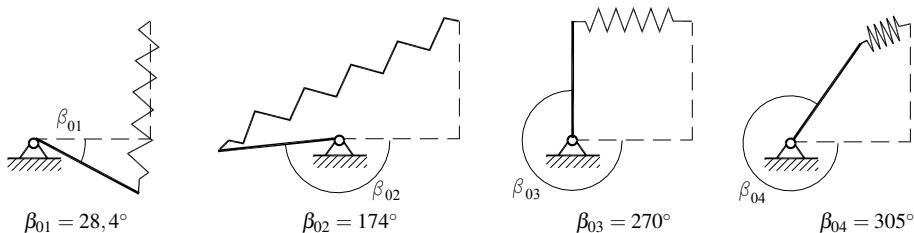
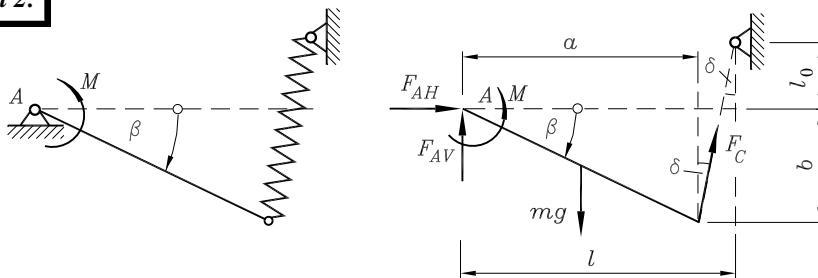


Abbildung 10.7: Vier Gleichgewichtslagen sind möglich (Beispiel aus Abschnitt 10.3)

Die Gleichgewichtslage β_{01} ergibt sich beim Einhängen des Stabes in die Feder und ist sicher stabil. Bei der Gleichgewichtslage β_{03} ist wegen $\frac{l_0}{l} = 1$ (Stablänge = Länge der entspannten Feder) die Feder entspannt und stabilisiert nur die vertikale Lage, in der das Lager die gesamte Gewichtskraft aufnimmt. Um über die Stabilität aller Gleichgewichtslagen eine Aussage treffen zu können, soll das Beispiel zunächst leicht modifiziert behandelt werden:

Beispiel 2:



Der bei A in einem Festlager und zusätzlich mit einer weichen Feder gelagerte Stab ist durch sein Eigengewicht und ein Moment $M(\beta)$ belastet (alle übrigen Größen entsprechen den Werten des Beispiels im Abschnitt 10.3). Es ist das Moment $M(\beta)$ zu ermitteln, das den Stab in einer durch den Winkel β bestimmten Lage im Gleichgewicht hält.

Aus dem Momenten-Gleichgewicht um den Punkt A ergibt sich mit

$$M(\beta) = \frac{1}{2}mga - F_C(a \cos \delta + b \sin \delta)$$

eine Beziehung, die nach Division durch mgl auf die Funktion führt, deren Nullstellen im Beispiel des Abschnitts 10.3 die gesuchten Gleichgewichtslagen bestimmten¹:



$$\begin{aligned} M^*(\beta) &= \frac{M(\beta)}{mgl} \\ &= f(\beta) = \frac{1}{2} \frac{a}{l} - \frac{F_C}{mg} \left(\frac{a}{l} \cos \delta + \frac{b}{l} \sin \delta \right) . \end{aligned}$$

Man kann also diese Funktionswerte als zusätzlich aufzubringende Momente M^* deuten, um den Stab in einer durch β vorgegebenen Gleichgewichtslage zu halten. Die nebenstehende Abbildung 10.8 gilt für die spezielle Parameterkombination $\frac{cl}{mg} = 1$ und $\frac{l_0}{l} = 1$.

Damit bieten sich folgende Überlegungen zur Stabilität der vier Gleichgewichtslagen an, die für $M = 0$ möglich sind und hier für die beiden Lagen β_{01} und β_{02} ange stellt werden sollen:

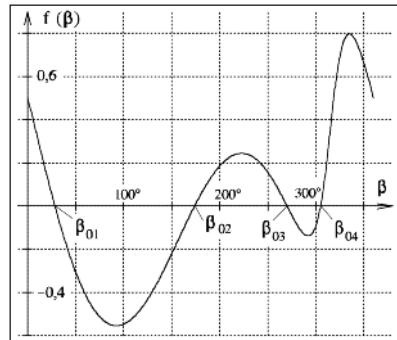


Abbildung 10.8: Die Funktionswerte sind proportional dem Moment $M(\beta)$, das den Stab im Gleichgewicht hält

- ⇒ Wenn in der Gleichgewichtslage β_{01} ein kleines positives (linksdrehendes) Moment aufgebracht wird, dreht sich der Stab in eine Lage $\beta < \beta_{01}$ und nimmt die bei diesem Moment mögliche Gleichgewichtslage ein.
- ⇒ Wenn in der Gleichgewichtslage β_{02} ein kleines positives (linksdrehendes) Moment aufgebracht wird, dreht sich der Stab in eine Lage $\beta < \beta_{02}$, wo allerdings nur bei negativem (rechtsdrehendem) Moment Gleichgewicht möglich ist, so dass diese Störung zu einem Abwandern bis über die Gleichgewichtslage β_{01} hinaus (in den Bereich positiver Momente) führt. *Die Gleichgewichtslage β_{02} ist im Gegensatz zur Gleichgewichtslage β_{01} instabil.*
- ⇒ Entsprechende Überlegungen ergeben, dass die Gleichgewichtslage β_{03} wieder stabil und die Gleichgewichtslage β_{04} instabil ist, und diese Erkenntnisse lassen sich wie folgt verallgemeinern:

Stabile und instabile Gleichgewichtslagen wechseln einander ab.

Wenn die Nullstellen der Funktion $f(\beta)$ (Gleichgewichtslagen) aus geometrischen Gründen 2π -periodisch sein müssen, kann es nur eine geradzahlige Anzahl von Gleichgewichtslagen geben.

¹Unter www.TM-aktuell.de findet man auch das Ergebnis des Versuchs von Maple, symbolische Lösungen zu finden. Im Prinzip gelingt das sogar, allerdings sind diese Lösungen (bis auf $\beta_{03} = -\frac{\pi}{2}$) unbrauchbar. Aber sie sind richtig, wie ihre numerische Auswertung zeigt. Hier gilt die Empfehlung: Lieber gleich numerisch rechnen!

Beispiel 3:

Für den nebenstehend abgebildeten Stab ist das kritische Verhältnis $\left(\frac{cl}{mg}\right)_{kr}$ zu bestimmen, bei dem die vertikale Stablage instabil wird.

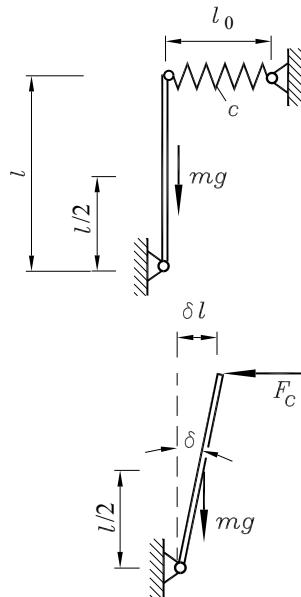
Da nur die Ermittlung der kritischen Belastung gefragt ist, kann nach der Theorie 2. Ordnung gerechnet werden. Das Momenten-Gleichgewicht um den Lagerpunkt am verformten System (sehr kleine Auslenkung, siehe untere Skizze) liefert

$$F_C l - mg \delta \frac{l}{2} = 0 \quad .$$

Mit der Federkraft $F_C = c\delta l$ erhält man daraus den kritischen Wert:

$$\left(\frac{cl}{mg}\right)_{kr} = 0,5 \quad .$$

Das Ergebnis des Beispiels 3 gestattet eine weitere Aussage zum Beispiel 2:



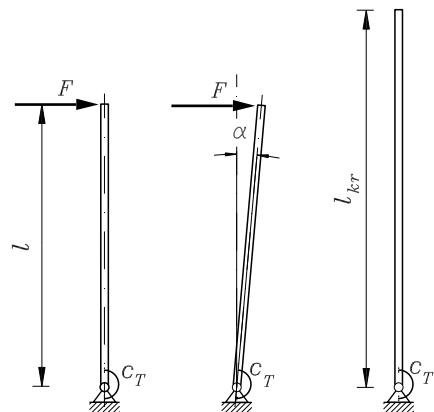
Für $\frac{cl}{mg} = 0,5$ wird die vertikale Gleichgewichtslage instabil. Da stabile und instabile Gleichgewichtslagen einander abwechseln, entfallen die beiden für das Beispiel 2 ermittelten instabilen Gleichgewichtslagen. Es gibt insgesamt nur zwei mögliche Gleichgewichtslagen.

10.5 Aufgaben

Aufgabe 10.1:

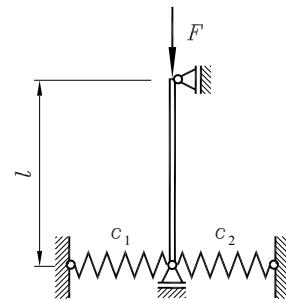
Eine starre Stahlstange (Dichte ρ) mit konstantem Querschnitt A ist unten in einem Festlager gelagert und durch eine Drehfeder gestützt. Es ist die kritische Länge der Stange zu ermitteln, bei der die Drehfeder die senkrechte Lage (Skizze rechts) nicht mehr garantieren kann.

Zunächst wird die Drehfederkonstante c_T experimentell ermittelt: An einem Stab der Länge l wird die Kraft F aufgebracht (linke Skizze), die eine Verdrehung des Stabs um den Winkel α hervorruft (mittlere Skizze).



- Wie groß ist die Drehfederkonstante c_T (dabei sollte das Moment infolge des Eigengewichts des schräg stehenden Stabes nicht vernachlässigt werden)?
- Wie groß ist die kritische Länge l_{kr} (Stab nur durch Eigengewicht belastet)?

Gegeben: $F = 100\text{N}$; $\rho = 7,85\text{ g/cm}^3$; $l = 1\text{ m}$; $A = 20\text{ cm}^2$; $\alpha = 4,8^\circ$.

**Aufgabe 10.2:**

Für den dargestellten starren Stab mit elastischer Abstützung bestimme man den kritischen Wert F_{kr} der Kraft F , bei dem die vertikale Gleichgewichtslage instabil wird.

Gegeben: l , c_1 , c_2 .

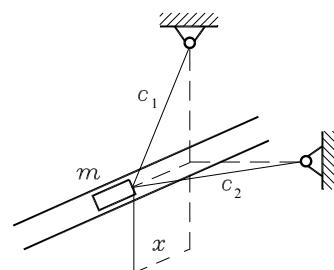
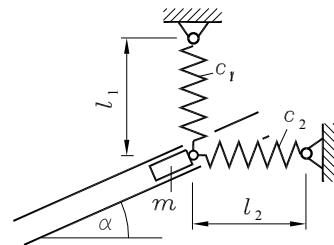
Aufgabe 10.3:

Zwei Federn mit den Federkonstanten c_1 und c_2 und den Längen l_1 und l_2 im unbelasteten Zustand halten eine Masse m in einer glatten (reibungsfreien) Führung (die Skizze zeigt die Federn im unbelasteten Zustand und nicht die Gleichgewichtslage des Systems).

Gegeben: c_1 , c_2 , l_1 , l_2 , m , α .

Man ermittle die Gleichgewichtslage $\frac{x}{l_1} > 0$ der Masse m (wie in der unteren Skizze angedeutet) für die Parameterkombinationen

- a) $\frac{c_1 l_1}{mg} = 1$, $\frac{c_2 l_2}{mg} = 0$, $\frac{l_1}{l_2} = 1$, $\alpha = 60^\circ$,
- b) $\frac{c_1 l_1}{mg} = 0$, $\frac{c_2 l_2}{mg} = 1$, $\frac{l_1}{l_2} = 1$, $\alpha = 45^\circ$,
- c) $\frac{c_1 l_1}{mg} = 5$, $\frac{c_2 l_2}{mg} = 5$, $\frac{l_1}{l_2} = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

**Aufgabe 10.4:**

Das System der Aufgabe 10.3 ist für die gleichen Parameterkombinationen a , b und c auf weitere Gleichgewichtslagen (im negativen Bereich von x) zu untersuchen. Die Stabilität der ermittelten Gleichgewichtslagen ist festzustellen.

Aufgabe 10.5:

Man ermittle für das System des Beispiels im Abschnitt 10.3 die möglichen Gleichgewichtslagen für die Parameterkombination

$$\frac{cl}{mg} = 0,5 \quad , \quad \frac{l_0}{l} = 1$$

und untersche die Gleichgewichtslagen auf Stabilität.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

11 Seilstatik, Kettenlinien, Stützlinien

Für die Berechnung der Kräfte, die von Seilen und Ketten übertragen werden, wird folgende idealisierende (mit der Praxis gut übereinstimmende) Annahme getroffen:

Seile und Ketten können ausschließlich Zugkräfte übertragen, die in jedem Punkt die Richtung der Tangente der Seil- bzw. Kettenlinie haben.

Da Seile und Ketten weder Querkräfte noch Biegemomente übertragen können, bezeichnet man sie als *biegeschlaff*. Die durch die Zugkräfte hervorgerufenen Verformungen sind klein und können für die statischen Untersuchungen vernachlässigt werden: Die Seile und Ketten werden als *dehnstarr* behandelt.

Da Seile und Ketten auf gleiche Weise idealisiert werden, wird im Folgenden nur noch von Seilen gesprochen. Alle Aussagen gelten auch für Ketten.

Überwiegt die äußere Belastung deutlich gegenüber dem Eigengewicht des Seils, dann kann das Eigengewicht vernachlässigt werden. Wenn ein solches Seil nur durch Einzelkräfte belastet wird, nimmt es (zumindest abschnittsweise) die Form einer Geraden an. Die Seilkräfte können dann wie Stabkräfte bzw. Lagerkräfte berechnet werden. So nimmt beim System der **Abbildung 11.1** (die Linienlast wirkt auf den Träger, auf das Seil wirkt eine Einzelkraft) das Seil die Hälfte der Resultierenden der Linienlast auf. Das System der **Abbildung 11.2** ist dagegen nicht tragfähig, weil das Seil eine Druckkraft aufnehmen müsste.

Während die inneren Kräfte in einem Seil immer in der Längsrichtung des Seils liegen, können äußere Kräfte das Seil durchaus in Querrichtung beladen. Wenn das Eigengewicht des Seils vernachlässigt werden kann, können die Seilkräfte in den beiden geraden Teilen des (straff gespannten) Seils wie die Kräfte an einem Fachwerknoten berechnet werden.

Das in **Abbildung 11.3** skizzierte Beispiel zeigt eine sehr kleine Rolle, die die Last F trägt, auf einem gewichtslosen Seil. Sie stellt sich so ein, dass rechter und linker Winkel des gespannten Seils gleich groß sind (Gleichgewichtslage der Rolle). Die beiden Seilkräfte sind in diesem Fall gleich:

$$F_S = \frac{F}{2 \sin \alpha} .$$

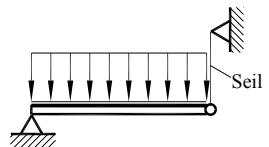


Abbildung 11.1: Tragfähiges System

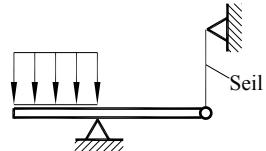


Abbildung 11.2: System ist nicht tragfähig.

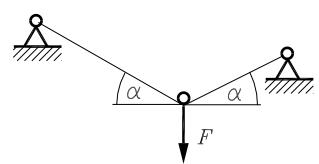


Abbildung 11.3: Konstante Seilkraft bei masselosem Seil

Ist das Eigengewicht gegenüber der äußeren Belastung nicht zu vernachlässigen (z. B. bei Seilbahnen), oder ist es die dominierende Belastung (Hochspannungsleitungen), so stellt sich in der Regel infolge der Biegeschlaffheit des Seils eine *Seilkurve* ein (bei Ketten ist der Ausdruck *Kettenlinie* gebräuchlich). Die Größe der Seilkraft ist dann nicht mehr konstant, sondern von der Form der sich einstellenden Kurve, insbesondere von ihrem Anstieg, abhängig.

11.1 Das Seil unter Eigengewicht

Die Eigengewichtsbelastung ruft in dem vertikal hängenden Seil (**Abbildung 11.4**) eine veränderliche Seilkraft hervor. In jedem Schnitt muss die Seilkraft mit der Gewichtskraft des darunter liegenden Teils des Seils im Gleichgewicht sein.

Vorbereitend auf die etwas schwierigeren nachfolgenden Betrachtungen soll die Seilkraft aus dem Gleichgewicht am differenziell kleinen (aus dem Seil an der Stelle z herausgeschnittenen) Element der Länge dz (Dichte ρ , Querschnitt A_S) ermittelt werden:

An den Schnittufern müssen die Seilkraft F_S bzw. die um den (differenziell kleinen) Betrag dF_S vergrößerte Seilkraft angetragen werden, die mit dem Eigengewicht des Elements im Gleichgewicht sein müssen. Das Kräfte-Gleichgewicht in vertikaler Richtung führt auf

$$dF_S = \rho g A_S dz ,$$

und die Integration dieser Beziehung liefert bei konstantem Seilquerschnitt A_S :

$$F_S = \rho g A_S z + C .$$

Die Integrationskonstante wird aus der Randbedingung $F_S(z=0) = 0$ zu $C = 0$ bestimmt. Wenn, wie nebenstehend skizziert, zusätzlich eine Einzelkraft F_0 am unteren Seilende angreift, dann errechnet sich die Integrationskonstante aus $F_S(z=0) = F_0$ zu $C = F_0$.

Die **Abbildung 11.5** zeigt ein an zwei Punkten aufgehängtes Seil unter Eigengewichtsbelastung, aus dem ein Element herausgeschnitten wurde. Das Koordinatensystem wurde (willkürlich) in einen Festpunkt des Seils gelegt.

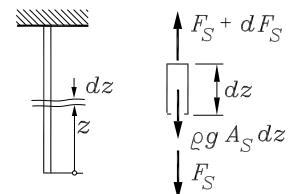


Abbildung 11.4: Seil unter Eigengewicht

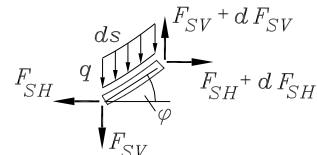
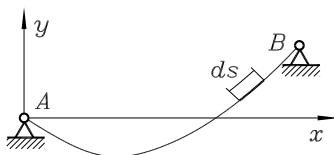


Abbildung 11.5: Kräfte am differenziell kleinen Element des Seils unter Eigengewicht

Da auf das Element die Resultierende seines verteilten Gewichts $q = \rho g A_S$ (Gewicht pro Länge, vgl. Seite 43) wirkt, müssen die Seilkräfte am rechten und linken Schnittufer unterschiedlich groß

sein. Es wird deshalb in positiver Koordinatenrichtung x ein (differenziell kleiner) Zuwachs angesetzt. Stellvertretend für die tangential gerichteten Seilkräfte wurden jeweils deren Horizontal- und Vertikalkomponente eingezeichnet. Das Gleichgewicht in x -Richtung liefert

$$dF_{SH} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{SH} = \text{konstant} \quad ,$$

so dass folgende Aussage getroffen werden kann:

Der *Horizontalzug* (horizontale Komponente der Seilkraft) ist in einem nur durch sein Eigengewicht belasteten Seil konstant.

Das Kräfte-Gleichgewicht in y -Richtung liefert:

$$dF_{SV} = q ds \quad \text{mit} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad .$$

Die beiden Seilkraftkomponenten sind natürlich nicht unabhängig voneinander. Da die resultierende Seilkraft tangential zur Seilkurve gerichtet ist, gilt:

$$\tan \varphi = y' = \frac{F_{SV}}{F_{SH}} \quad .$$

Diese Beziehung wird (unter Beachtung, dass F_{SH} konstant ist) noch einmal nach x abgeleitet, und nach Einsetzen der Gleichgewichtsbedingung in y -Richtung erhält man:

$$y'' = \frac{1}{F_{SH}} \frac{dF_{SV}}{dx} = \frac{1}{F_{SH}} \frac{dF_{SV}}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{q}{F_{SH}} \sqrt{1 + y'^2} \quad .$$

In der so entstandenen Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{q}{F_{SH}}$$

tritt y nicht explizit auf, so dass die Gleichung nach der Substitution $y' = z$ ein erstes Mal und nach Rücksubstitution ein zweites Mal integriert werden kann. Man erhält als allgemeine Lösung die Funktion, die die Lage eines Seils unter Eigengewicht beschreibt, die

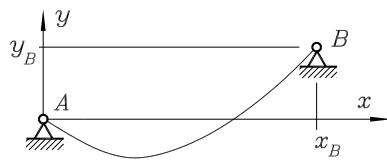
Seillinie oder Kettenlinie:

$$y = \frac{F_{SH}}{q} \cosh \left(\frac{q}{F_{SH}} x + C_1 \right) + C_2 \quad . \quad (11.1)$$

- ⇒ In der Funktion 11.1 sind noch drei Größen unbestimmt, die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 und der Horizontalzug F_{SH} .
- ⇒ Diese drei Unbekannten können z. B. berechnet werden aus zwei Randbedingungen (Lage der Seilaufhängepunkte A und B) und der Bedingung, dass die (vorgegebene) Länge des (dehnstarren) Seils der Bogenlänge der Funktion $y(x)$ zwischen den Punkten A und B entsprechen muss.

Beispiel 1: Für das skizzierte Seil ermittle man

- die Funktion der Seillinie,
- den Horizontalzug,
- die maximale Seilkraft.



Gegeben: Seillänge L , x_B , y_B , q (Gewicht/Länge).

Für das (ohne Einschränkung der Allgemeinheit willkürlich im Punkt A) festgelegte Koordinatensystem erhält man aus den Randbedingungen die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y(x=0) = 0 &\quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{F_{SH}}{q} \cosh C_1 \quad , \\ y(x_B) = y_B &\quad \Rightarrow \quad y_B = \frac{F_{SH}}{q} \left[\cosh \left(\frac{q}{F_{SH}} x_B + C_1 \right) - \cosh C_1 \right] \quad . \end{aligned}$$

Die Länge L des Seils muss gleich der Bogenlänge der Seilkurve zwischen A und B sein:

$$\begin{aligned} L &= \int_{x=x_A=0}^{x_B} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{x=0}^{x_B} \sqrt{1+\sinh^2 \left(\frac{q}{F_{SH}} x + C_1 \right)} dx \\ &= \frac{F_{SH}}{q} \left[\sinh \left(\frac{q}{F_{SH}} x_B + C_1 \right) - \sinh C_1 \right] \quad . \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind ein (recht unangenehmes, weil nichtlineares) Gleichungssystem für die drei Unbekannten C_1 , C_2 und F_{SH} . Die Integrationskonstante C_2 kommt nur in der ersten Gleichung vor, so dass es sich anbietet, zunächst aus den beiden letzten Gleichungen C_1 und F_{SH} zu berechnen. Diese lassen sich mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \cosh \alpha - \cosh \beta &= 2 \sinh \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sinh \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \quad , \\ \sinh \alpha - \sinh \beta &= 2 \sinh \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \cosh \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \quad , \quad \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

so umformen, dass die Konstante C_1 in Abhängigkeit von F_{SH} in einer Gleichung erscheint und in der zweiten Gleichung nur noch die Unbekannte F_{SH} vorkommt:

$$C_1 = \operatorname{artanh} \left(\frac{y_B}{L} \right) - \frac{q}{2F_{SH}} x_B \quad , \quad \left[2 \frac{F_{SH}}{q} \sinh \left(\frac{q x_B}{2F_{SH}} \right) \right]^2 + y_B^2 - L^2 = 0 \quad .$$

Aus der letzten Gleichung kann F_{SH} (numerisch) berechnet werden, und damit errechnet man dann C_1 und C_2 . Es ist empfehlenswert, vorher die letzte Gleichung durch L^2 und die Gleichung für C_2 durch L zu dividieren und mit den dimensionslosen Unbekannten

$$\bar{F}_{SH} = \frac{F_{SH}}{qL} \quad , \quad C_1 \quad , \quad \bar{C}_2 = \frac{C_2}{L}$$

weiterzurechnen (\bar{F}_{SH} ist der auf das Gesamtgewicht des Seils bezogene Horizontalzug). Dann kommt man (anstelle der vier gegebenen Größen) mit den beiden Parametern

$$\bar{x}_B = \frac{x_B}{L} \quad , \quad \bar{y}_B = \frac{y_B}{L}$$

aus, und es ist folgender Formelsatz auszuwerten:

$$\left[2\bar{F}_{SH} \sinh \left(\frac{\bar{x}_B}{2\bar{F}_{SH}} \right) \right]^2 + \bar{y}_B^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{F}_{SH} \quad (\text{numerisch}) \quad ,$$

$$C_1 = \operatorname{artanh} \bar{y}_B - \frac{\bar{x}_B}{2\bar{F}_{SH}} \quad , \quad \bar{C}_2 = -\bar{F}_{SH} \cosh C_1 \quad .$$



Mit einem geeigneten Programm (siehe www.TM-aktuell.de) wird dieser Formelsatz für die nebenstehend angegebenen Parameterkombinationen (\bar{x}_B und \bar{y}_B) ausgewertet (Nullstellen einer Funktion bei gleichzeitiger Berechnung von C_1 und C_2):

\bar{x}_B	\bar{y}_B	\bar{F}_{SH}	C_1	\bar{C}_2
0,5	0	0,1148	-2,1773	-0,5130
0,8	0,2	0,3555	-0,9224	-0,5178
0,98	0	1,4046	-0,3489	-1,4909

Abbildung 11.6: Horizontalzug und Integrationskonstanten für drei Parameterkombinationen

Damit sind die Seilkurven bekannt. Aus dem Horizontalzug $F_{SH} = \bar{F}_{SH}qL$ können die vertikale Komponente der Seilkraft

$$F_{SV} = F_{SH} \tan \varphi = F_{SH}y' = F_{SH} \sinh \left(\frac{q}{F_{SH}} x + C_1 \right) \quad (11.2)$$

und daraus die resultierende Seilkraft an einer beliebigen Stelle berechnet werden:

$$F_S = \sqrt{F_{SH}^2 + F_{SV}^2} = F_{SH} \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{q}{F_{SH}} x + C_1 \right)} = F_{SH} \cosh \left(\frac{q}{F_{SH}} x + C_1 \right) \quad . \quad (11.3)$$

Die maximale Seilkraft tritt dort auf, wo der Anstieg der Seilkurve am größten ist (am höheren Lagerpunkt). Bei einem Seil mit sehr flachem Durchhang (dritte Parameterkombination) kann der Horizontalzug (und damit natürlich auch die resultierende Seilkraft) größer als das Gesamtgewicht des Seils werden.

Die **Abbildung 11.7** zeigt links die Seilkurven $\bar{y}(\bar{x})$ und rechts die Verläufe der normierten Seilkräfte

$$\bar{F}_S = \frac{F_S}{qL} \quad ,$$

die sich nur um die Konstante \bar{C}_2 unterscheiden:

$$\bar{y} = \frac{y}{L} = \bar{F}_S + \bar{C}_2 \quad .$$

Man erkennt, dass die Seilkraft in dem Seil mit sehr flachem Durchhang deutlich größer als in den beiden anderen Seilen ist.

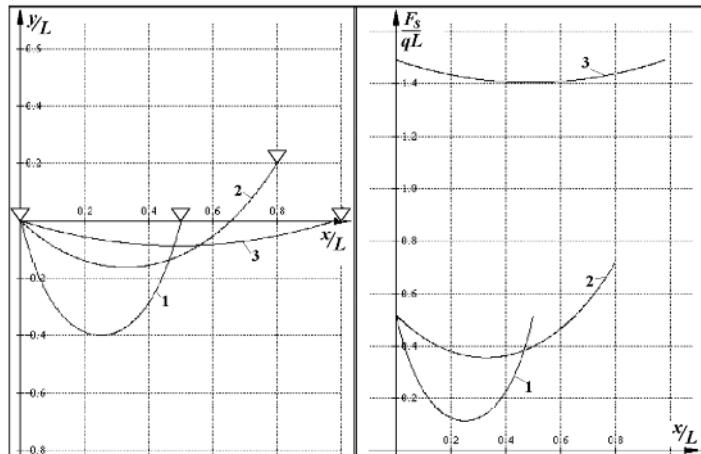


Abbildung 11.7: Seilkurven (links) und Seilkräfte (rechts)

Beispiel 2:

Das skizzierte Seil ist an zwei Punkten gelagert und durch sein Eigengewicht q (Gewicht/Länge) und eine zusätzliche Einzelkraft F belastet.

Gegeben: Seillänge L , a , b , c , F , α , q .

Es sind die Bestimmungsgleichungen für die Berechnung der Integrationskonstanten zu formulieren.

An der Krafteinleitungsstelle müssen die (tangential zur Seilkurve gerichteten) Seilkräfte in den beiden Abschnitten mit der äußeren Kraft im Gleichgewicht sein. Das ist nur möglich, wenn die Seillinie an dieser Stelle einen Knick hat. Die Seillinie muss deshalb in beiden Abschnitten gesondert aufgeschrieben werden, wofür wie skizziert auch zwei unterschiedliche Koordinatensysteme gewählt werden.

Natürlich gilt in beiden Abschnitten die allgemeine Form der Seillinie 11.1, die unter der Voraussetzung (Seil trägt nur sein Eigengewicht) hergeleitet wurde, die auch bei dieser Aufgabe für jeden Abschnitt gilt. Allerdings müssen unterschiedliche Integrationskonstanten und auch unterschiedliche Werte für den Horizontalzug angesetzt werden:

$$y_1 = \frac{F_{SH1}}{q} \cosh\left(\frac{q}{F_{SH1}} x_1 + C_1\right) + C_2 \quad , \quad y_2 = \frac{F_{SH2}}{q} \cosh\left(\frac{q}{F_{SH2}} x_2 + C_3\right) + C_4 \quad .$$

Für die Berechnung der sechs Unbekannten F_{SH1} , F_{SH2} , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 stehen die folgenden Bedingungsgleichungen zur Verfügung:

$$y_1(x_1 = 0) = 0 \quad , \quad y_2(x_2 = b) = c$$

(Seillinien müssen durch die Lagerpunkte gehen). An der Übergangsstelle gilt:

$$y_1(x_1 = a) = y_2(x_2 = 0)$$

(Seillinien müssen am Kraftangriffspunkt zusammenlaufen). Außerdem muss an diesem Punkt das Kräfte-Gleichgewicht in horizontaler Richtung

$$F_{SH1} + F \sin \alpha = F_{SH2}$$

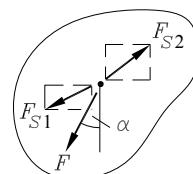
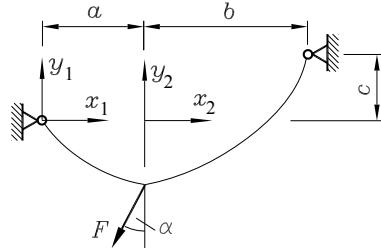
und in vertikaler Richtung (vertikale Seilkraftkomponente = Horizontalzug · Anstieg der Seilkurve) erfüllt sein:

$$F_{SH1} y_1'(x_1 = a) + F \cos \alpha = F_{SH2} y_2'(x_2 = 0) \quad .$$

Die letzte Bedingung ergibt sich aus der Forderung, dass die Summe beider Seillinienlängen die vorgegebene Gesamt-Seillänge L ergibt:

$$L = \int_{x_1=0}^a \sqrt{1+y_1'^2} dx_1 + \int_{x_2=0}^b \sqrt{1+y_2'^2} dx_2 \quad .$$

In diese sechs Beziehungen müssen die oben angegebenen Funktionen y_1 und y_2 eingesetzt werden, und es entsteht ein nichtlineares Gleichungssystem, dessen Lösung man dem Computer überantworten sollte. Die Lösungen sind im Bereich positiver Werte für F_{SH1} und F_{SH2} zu suchen (formal gibt es auch eine Lösung im Bereich negativer Werte).



11.2 Das Seil unter konstanter Linienlast

Bei der exakten Berücksichtigung des Eigengewichts (verteilte Belastung längs des Bogens) wie im vorigen Abschnitt erhält man die hyperbolische Kosinusfunktion als Seillinie.

Eine Vereinfachung der Rechnung ergibt sich, wenn bei *Seilen mit flachem Durchhang* das Eigengewicht näherungsweise als eine konstante Linienlast in x -Richtung angenommen werden darf. Der gleiche Lastfall ist gegeben, wenn das Seil eine Last trägt, die an einer relativ großen Zahl von (äquidistanten) Punkten am Seil befestigt ist (z. B. eine Brücke).

Die Herleitung der für diesen Lastfall geltenden Beziehungen unterscheidet sich von den Betrachtungen im vorigen Abschnitt nur dadurch, dass sich die Resultierende der Linienlast am differenziell kleinen Element (nebenstehende Skizze) durch Multiplikation mit dx (anstelle von ds) ergibt. Das Gleichgewicht in horizontaler Richtung

$$dF_{SH} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{SH} = \text{konstant}$$

zeigt, dass auch für diesen Lastfall gilt:

Der *Horizontalzug* (horizontale Komponente der Seilkraft) ist in einem durch eine konstante Linienlast belasteten Seil konstant.

Das Kräfte-Gleichgewicht in vertikaler Richtung liefert:

$$\begin{aligned} dF_{SV} - q_0 dx &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF_{SV}}{dx} = q_0, \\ \tan \varphi = y' &= \frac{F_{SV}}{F_{SH}} \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{F_{SV}}{F_{SH}} \right) = \frac{1}{F_{SH}} \left(\frac{dF_{SV}}{dx} \right) = \frac{q_0}{F_{SH}} \quad . \end{aligned}$$

Durch zweimaliges Integrieren gewinnt man daraus die

Seillinie oder Kettenlinie bei konstanter Linienlast:

$$y = \frac{1}{2} \frac{q_0}{F_{SH}} x^2 + C_1 x + C_2 \quad . \quad (11.4)$$

- ⇒ Die Funktion der Seillinie ist für den Lastfall „Konstante Linienlast“ eine quadratische Parabel. Sie enthält drei Unbekannte, die beiden Integrationskonstanten und den Horizontalzug.
- ⇒ Die Unbekannten errechnen sich aus den Randbedingungen (Lage der Seilaufhängepunkte) und z. B. aus der Bedingung, dass die vorgegebene Länge des dehnstarren Seils der Bogenlänge der Funktion $y(x)$ zwischen den Aufhängepunkten entsprechen muss.

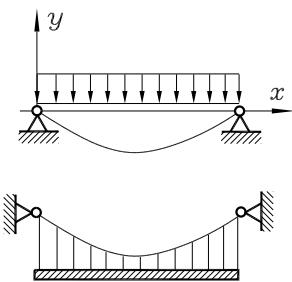


Abbildung 11.8: Seil unter konstanter Linienlast

Wenn das Koordinatensystem in den Aufhängepunkt A des Seils gelegt wird und der Aufhängepunkt B dann die Koordinaten x_B und y_B hat, lauten die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y(x=0) = 0 &\quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad , \\ y(x=x_B) = y_B &\quad \Rightarrow \quad y_B = \frac{q_0}{2F_{SH}} x_B^2 + C_1 x_B \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{y_B}{x_B} - \frac{q_0 x_B}{2F_{SH}} \quad . \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichung für die Länge der Seillinie führt auf das Integral:

$$L = \int ds = \int_{x=0}^{x_B} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{x=0}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{F_{SH}} x + C_1 \right)^2} dx \quad .$$

Die Auswertung ergibt:

$$\begin{aligned} L &= \frac{F_{SH}}{2q_0} \left[\left(\frac{q_0}{F_{SH}} x_B + C_1 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{F_{SH}} x_B + C_1 \right)^2} + \operatorname{arsinh} \left(\frac{q_0}{F_{SH}} x_B + C_1 \right) \right] \\ &\quad - \frac{F_{SH}}{2q_0} \left(C_1 \sqrt{1 + C_1^2} + \operatorname{arsinh} C_1 \right) \quad . \end{aligned}$$

Wenn die aus den Randbedingungen errechnete Beziehung für C_1 eingesetzt wird, ergibt sich eine (nichtlineare) Gleichung für den Horizontalzug F_{SH} :

$$\begin{aligned} L &= \frac{F_{SH}}{2q_0} \left(A \sqrt{1+A^2} + \operatorname{arsinh} A - B \sqrt{1+B^2} - \operatorname{arsinh} B \right) \\ \text{mit } A &= \frac{y_B}{x_B} + \frac{q_0 x_B}{2F_{SH}} \quad , \quad B = \frac{y_B}{x_B} - \frac{q_0 x_B}{2F_{SH}} \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird numerisch gelöst, danach kann die noch fehlende Integrationskonstante C_1 berechnet werden. Damit ist die Seillinie bekannt. Die Kräfte im Seil berechnen sich nach:

$$\begin{aligned} F_{SV} &= F_{SH} \tan \varphi = F_{SH} y' = F_{SH} \left(\frac{q_0}{F_{SH}} x + C_1 \right) \quad , \\ F_S &= \sqrt{F_{SH}^2 + F_{SV}^2} = F_{SH} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{F_{SH}} x + C_1 \right)^2} \quad . \end{aligned} \tag{11.5}$$

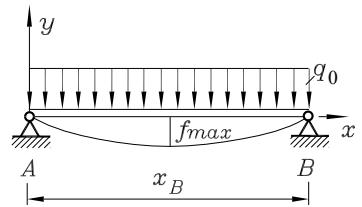
Die Schwierigkeit bei der Lösung von Aufgaben besteht im Allgemeinen im Berechnen des Horizontalzuges F_{SH} . Bei bekanntem F_{SH} sind dann die Integrationskonstanten und damit die Seillinie und die Seilkräfte sofort aufzuschreiben.

Die Berechnung von F_{SH} bei vorgegebener Seillänge L (wie oben angegeben) ist sicher die aufwendigste (allerdings wohl praktisch wichtigste) Variante. Da die angegebene Beziehung für die Seillänge, aus der F_{SH} bestimmt wird, ohnehin numerisch gelöst wird, ist ihr etwas kompliziertes Aussehen bedeutungslos. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass eine andere Zusatzbedingung auf eine einfachere Bestimmungsgleichung für den Horizontalzug führt.

Beispiel 1:

Für ein Seil mit flachem Durchhang, dessen Lager auf gleicher Höhe liegen, ist die Abhängigkeit der maximalen Seilkraft vom Durchhang f_{max} zu ermitteln.

Gegeben: q_0 , f_{max} , x_B .



Aus der Seillinie 11.4 ermittelt man mit den beiden Randbedingungen

$$y(x=0)=0 \quad \text{und} \quad y(x=x_B)=0$$

die Integrationskonstanten

$$C_2 = 0 \quad , \quad C_1 = -\frac{q_0 x_B}{2 F_{SH}}$$

und damit die Seillinie

$$y = \frac{q_0}{2 F_{SH}} (x^2 - x_B x) \quad .$$

Der maximale Durchhang tritt in der Mitte des Seiles auf. Aus dieser Bedingung ergibt sich der Horizontalzug im Seil:

$$y\left(\frac{x_B}{2}\right) = -f_{max} \quad \Rightarrow \quad f_{max} = \frac{q_0 x_B^2}{8 F_{SH}} \quad \Rightarrow \quad F_{SH} = \frac{q_0 x_B^2}{8 f_{max}} \quad .$$

Die maximale Seilkraft tritt an den Lagern auf, weil dort der Anstieg der Seilkurve am größten ist. Aus 11.5 folgt mit $x=0$:

$$F_{S,max} = F_{SH} \sqrt{1 + C_1^2} = \frac{q_0 x_B}{8 f_{max}} \sqrt{x_B^2 + 16 f_{max}^2} \quad .$$

- Die maximale Seilkraft kann bei flachem Durchhang ein Vielfaches des Seilgewichtes betragen. Wird das Seilgewicht durch $F_{G,Seil} = q_0 x_B$ angenähert, errechnet man aus

$$\frac{F_{S,max}}{F_{G,Seil}} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{x_B^2}{f_{max}^2} + 16}$$

zum Beispiel die Ergebnisse entsprechend nebenstehender Tabelle.

$\frac{x_B}{f_{max}}$	$\frac{F_{S,max}}{q_0 x_B}$
100	12,5
50	6,27
20	2,55
10	1,35

- Bei bekanntem Horizontalzug kann man auch die Seillänge aufschreiben, die natürlich bei dieser Aufgabe schon durch die Geometrie (der quadratischen Parabel) gegeben ist:

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{x_B^2 + 16 f_{max}^2} + \frac{x_B^2}{8 f_{max}} \operatorname{arsinh} \left(\frac{4 f_{max}}{x_B} \right) \quad .$$

Bei der numerischen Auswertung der nichtlinearen Gleichung für F_{SH} (z. B. bei vorgegebener Seillänge) ergibt sich stets auch eine negative Lösung (gilt auch für die exakte Erfassung des Eigengewichts, Abschnitt 11.1), die natürlich für Seile nicht sinnvoll ist. Die Kurve $y(x)$, die sich mit dieser Lösung ergibt, wird als *Stützlinie* bezeichnet. Sie beschreibt die Form eines Trägers, der durch die Belastung ausschließlich auf Druck belastet wird (keine Biegemomente, keine Querkraft).

Da in einem solchen Träger wie beim Seil als Schnittgröße nur eine Normalkraft wirkt, überträgt er die Belastung wesentlich günstiger als ein gerader Träger. Dieser Effekt wurde schon im Mittelalter im Bauwesen (Brückenbau, Gewölbe) ausgenutzt.

Beispiel 2:

Ein Bogenträger soll eine Brücke tragen (konstante Linienlast q_0). Die Lage der Stützgelenke liegt durch das Geländeprofil fest. Welche Form muss er haben, damit er nur durch Druckkräfte belastet ist, die den vorgegebenen Wert $F_{S,max}$ an keiner Stelle überschreiten.

Gegeben: q_0 , x_B , $y_B < 0$, $F_{S,max}$.

Wenn der Träger nur Druckkräfte aufnehmen soll, muss er die Form der Stützlinie haben. Diese entspricht der mathematischen Funktion der Seillinie mit negativem F_{SH} . Für die Funktion 11.4 ermittelt man mit den Randbedingungen $y(x=0)=0$ und $y(x=x_B)=y_B$ die Integrationskonstanten

$$C_2 = 0 \quad , \quad C_1 = \frac{y_B}{x_B} - \frac{q_0 x_B}{2 F_{SH}} \quad .$$

Die größte innere Kraft (Druckkraft) tritt (wie beim Seil) an der Stelle des größten Anstiegs der Stützlinie auf, im vorliegenden Fall am Lager B . Die resultierende Kraft F_S nach 11.5 wird mit $x = x_B$ und $F_S = F_{S,max}$ zur Bestimmungsgleichung für die Horizontalkraft:

$$F_{SH}^2 + \frac{\frac{q_0 y_B}{x_B} F_{SH} + \frac{\frac{1}{4} q_0^2 x_B^2 - F_{S,max}^2}{1 + \left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2}}{1 + \left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2} = 0 \quad .$$

Diese quadratische Gleichung hat eine positive und eine negative Lösung. Für die gesuchte Stützlinie muss die Horizontalkraft negativ sein. Mit der negativen Lösung der Gleichung

$$F_{SH} = -\frac{1}{2 \left[1 + \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right]} \left(q_0 y_B + \sqrt{4 F_{S,max}^2 \left[1 + \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right] - q_0^2 x_B^2} \right)$$

und den Integrationskonstanten kann die Gleichung der Stützlinie aufgeschrieben werden:

$$y = \frac{1}{2} \frac{q_0}{F_{SH}} x^2 + \left(\frac{y_B}{x_B} - \frac{q_0 x_B}{2 F_{SH}} \right) x \quad .$$

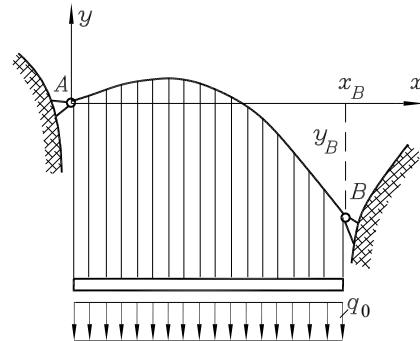


Abbildung 11.9: Die *Stützlinie* ist die ideale Form eines Trägers für konstante Linienlast.

12 Grundlagen der Festigkeitslehre

Die *Festigkeitslehre* untersucht die inneren Kräfte in Bauteilen und die daraus resultierenden Beanspruchungen und Verformungen:

- ⇒ Durch Vergleich mit Materialkennwerten, die durch Versuche ermittelt werden (Werkstoffkunde), kann man das wichtige Problem der *Dimensionierung* lösen.
- ⇒ Die wichtigsten Methoden zur Festlegung der Abmessungen von Bauteilen sind
 - die *Dimensionierung auf Festigkeit* durch Vergleich der Beanspruchung mit den zulässigen Beanspruchungen („Kann das Bauteil die Belastung ertragen, ohne zerstört zu werden?“) und
 - die *Dimensionierung auf Steifigkeit* („Bleiben die Verformungen infolge der Belastung innerhalb der tolerierten Grenzwerte?“).
- ⇒ Weil in der Festigkeitslehre auch die Verformungen der Bauteile betrachtet werden, muss man das Modell des „starren Körpers“ aufgeben. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen dürfen jedoch (bis auf wenige Ausnahmen) am unverformten System aufgestellt werden (*Theorie 1. Ordnung*, vgl. Abschnitt 10.2): Die Berechnung von Lagerreaktionen und Schnittgrößen wird also im Allgemeinen so ausgeführt, wie es aus der Statik starrer Körper bekannt ist.

12.1 Beanspruchungsarten

Die vielfältigen Möglichkeiten der Beanspruchung von Bauteilen lassen sich klassifizieren. Die in der technischen Praxis wichtigsten werden in den nachfolgenden **Abbildungen 12.1 bis 12.6** an einigen einfachen Beispielen vorgestellt:



Abbildung 12.1: Bei der *Zugbeanspruchung* liegt die Wirkungslinie der Kräfte in der Richtung der Stabachse. Es gibt Bauteile, die ausschließlich auf Zug beansprucht werden können, z. B. Seile und Ketten.



Abbildung 12.2: Auch bei der *Druckbeanspruchung* liegt die Wirkungslinie der Kräfte in Richtung der Stabachse. Es gibt Materialien, die (fast) ausschließlich Druckbeanspruchung ertragen, z. B. Beton.

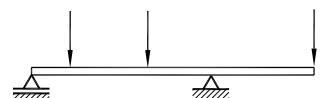


Abbildung 12.3: Von *Biegebeanspruchung* wird gesprochen, wenn im Bauteil Biegemomente auftreten. Die Biegebeanspruchung ist im Allgemeinen mit einer Schubbeanspruchung infolge der Querkraft gekoppelt.

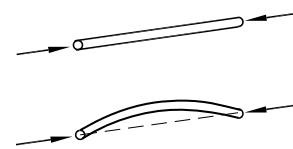
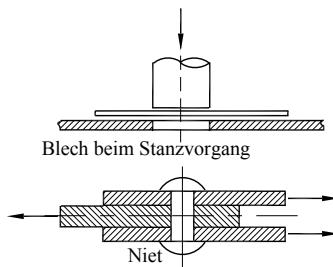
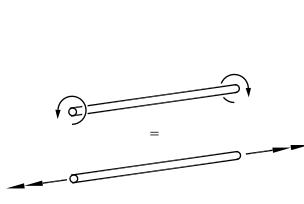


Abbildung 12.4: Bei der *Torsionsbeanspruchung* werden die Querschnitte des Bauteils durch Torsionsmomente belastet, die um die Längsachse des Stabes drehen. Diese versuchen, die Querschnitte relativ zueinander zu verdrehen.

Abbildung 12.5: Bei der *Schub- oder Scherbeanspruchung* liegen die Kräfte auf parallelen Wirkungslinien und sind entgegengesetzt gerichtet. Eine reine Scherbeanspruchung liegt vor, wenn die Wirkungslinien sehr dicht (theoretisch unendlich dicht) beieinander liegen.

Abbildung 12.6: Schlanke Druckstäbe können instabil werden und senkrecht zur Belastungsrichtung ausweichen. Dieser als *Knickung* bezeichnete Beanspruchungsfall kann nicht mehr mit der Theorie 1. Ordnung behandelt werden.

12.2 Spannungen und Verzerrungen

Um die Beanspruchungen von Bauteilen zu ermitteln, wird das aus der Statik bekannte Schnittpunktprinzip zur Berechnung der inneren Kräfte verwendet. In wenigen Ausnahmefällen kann man die Festigkeitsberechnung ausschließlich unter Verwendung der Schnittgrößen ausführen (z. B. beim Vergleich einer Kraft in einem Seil mit einer vom Hersteller angegebenen zulässigen Seilbelastung). Im Allgemeinen fließen in die Festigkeitsrechnung auch die Abmessungen der Bauteile ein (in der Angabe einer zulässigen Seilbelastung ist der Seilquerschnitt natürlich bereits berücksichtigt).

Das unter Zugbeanspruchung stehende Seil ist das einfachste Beispiel, um Festigkeitsuntersuchungen (Ermittlung von Beanspruchung und Verformung) anzustellen:

- ⇒ Ein durch die Kraft F belastetes Seil der Länge l wird *beansprucht* durch die (innere) Kraft F_S und *verformt* (verlängert) um die Länge Δl (**Abbildung 12.7**).

Um die Beanspruchung und die Verformung von den Abmessungen (Querschnitt A und Länge l des Seils) unabhängig zu machen, wird als Maß für die Beanspruchung die auf die Querschnittsfläche bezogene innere Kraft, die *Spannung*, definiert, und die Verformung wird auf die Gesamtlänge l bezogen und als *Dehnung* bezeichnet:

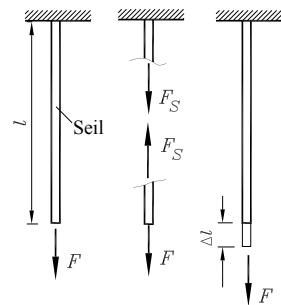


Abbildung 12.7: Die Belastung F ist Ursache für die innere Kraft F_S und die Verlängerung Δl des Seils.

$$\text{Spannung: } \sigma = \frac{F_S}{A} \quad (12.1)$$

$$\text{Dehnung: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (12.2)$$

Die *Spannung* ist wie die Kraft ein Vektor, der nicht unbedingt senkrecht zur Querschnittsfläche gerichtet sein muss. Es ist üblich, einen solchen allgemeinen Spannungsvektor in Komponenten zu zerlegen: Die *Normalspannung* σ ist senkrecht zur Querschnittsfläche gerichtet, die *Schubspannung* τ (Scherspannung) liegt in der Querschnittsfläche (**Abbildung 12.8**).

Es ist einleuchtend, dass man im allgemeinen Fall zweckmäßig mit zwei (senkrecht zueinander stehenden) Schubspannungskomponenten in der Schnittfläche rechnet.

Analog zur Dehnung ε (hervorgerufen durch die Normalspannung σ) definiert man die durch die Schubspannung τ hervorgerufenen *Gleitung* γ (*Gleitwinkel*, **Abbildung 12.9**).

- ⇒ Die Dimension der Spannung ergibt sich aus dem Quotienten „Kraft/Fläche“, gesetzliche Einheit ist

$$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \quad (\text{Pascal}) \quad ,$$

in der technischen Praxis üblich (und erlaubt¹) ist

$$1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1 \text{ MPa} \quad (\text{Mega-Pascal}) \quad ,$$

veraltet, aber in alten Berechnungsunterlagen vielfach noch anzutreffen:

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = \frac{9,81 \text{ N}}{100 \text{ mm}^2} \approx 0,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad .$$

- ⇒ Die Dehnung ε ist dimensionslos, in der Praxis teilweise üblich ist eine Angabe in % (z. B.: $\varepsilon = 0,03 \hat{=} 3\%$), die Gleitung (als Winkel im Bogenmaß) ist ebenfalls dimensionslos.

Bei den vorangegangenen Betrachtungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die Spannung unabhängig von der Lasteinleitung gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Ähnliche (natürlich streng genommen nicht gültige) Annahmen werden auch bei nachfolgenden Überlegungen häufig getroffen werden müssen.

Tatsächlich ergibt sich in unmittelbarer Nähe der Lasteinleitung ein recht komplizierter Spannungszustand. Man darf aber annehmen, dass in „genügend großem Abstand“ von dieser Stelle die durch die Art der Lasteinleitung verursachten Effekte abgeklungen sind.

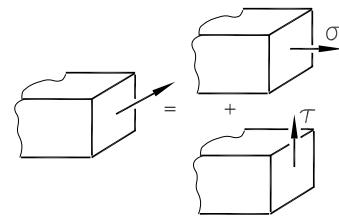


Abbildung 12.8: Der Spannungsvektor wird zerlegt in Normalspannung und Schubspannung.

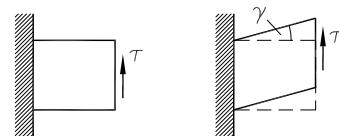


Abbildung 12.9: Die Schubspannung erzeugt einen Gleitwinkel.

¹ Eigentlich ist es nicht erlaubt, denn die SI-Konvention lässt Präfixe wie m (Milli) oder M (Mega) nur im Zähler von Brüchen zu. Aber weil man sich dort, wo N/mm^2 steht, immer die korrekte Einheit MPa denken darf, ist es nicht wirklich falsch und natürlich nicht so lästig wie das in Amerika wohl unausrottbare $1 \text{ lb/in}^2 = 1 \text{ psi} \approx 6,89476 \text{ kPa}$.

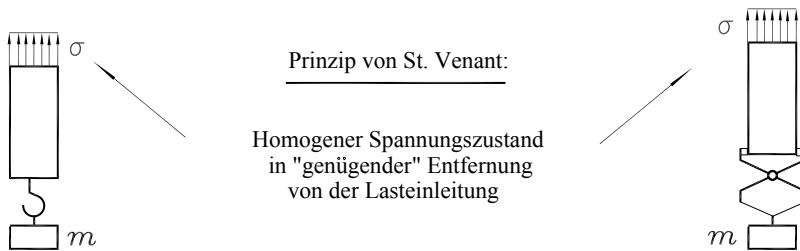


Abbildung 12.10: Im Folgenden wird die „genügende“ Entfernung immer vorausgesetzt.

Diese Vereinfachung wird nach dem französischen Physiker BARRÉ DE ST. VENANT (1797 - 1886) als *Prinzip von St. Venant* bezeichnet. Für anspruchsvollere Berechnungen muss man gegebenenfalls zusätzlich eine genauere Untersuchung der Spannungsverhältnisse an den Lasteinleitungsstellen durchführen.

12.3 Der Zugversuch

Aus der Erfahrung weiß man, dass die Verformung bei gleicher Belastung (gleicher Spannung) für unterschiedliche Materialien verschieden groß ist. Aufgabe der Werkstoffkunde ist es unter anderem, für die Materialien die Kennwerte experimentell zu ermitteln.

Das wichtigste Experiment dafür ist der so genannte *Zugversuch*, dessen Ablauf in DIN EN 10002 (früher: DIN 50145) genormt ist. Wegen der Wichtigkeit der daraus für die Festigkeitslehre zu gewinnenden Ergebnisse wird dieser Versuch kurz beschrieben:

Ein genormter Stab (**Abbildung 12.11**) wird in einer Zerreißmaschine zügig (nicht stoßartig) belastet. Dabei zeichnet die Maschine sowohl die Kraftzunahme als auch die Verlängerung einer Messstrecke l_0 auf.

Schließlich erhält man als wichtigstes Ergebnis das *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* (**Abbildung 12.12**), in dem die Spannung $\frac{F}{A_0}$ (A_0 ist die Querschnittsfläche des unverformten Stabes) über der Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ aufgetragen ist. Diese Kurven sehen für verschiedene Materialien sehr unterschiedlich aus. Ihr Verlauf wird hier am Beispiel des Diagramms für Baustahl diskutiert:

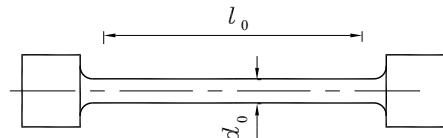


Abbildung 12.11: Der Probestab für den Zugversuch ist genormt.

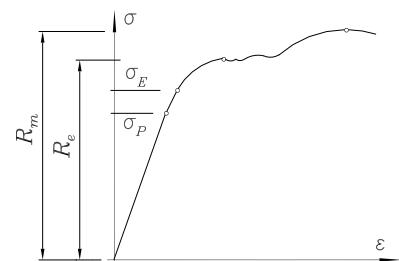


Abbildung 12.12: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

⇒ Bis zu einer Spannung σ_P (*Proportionalitätsgrenze*) verläuft die Kurve linear, und es gilt

$$\sigma = E \varepsilon$$

mit dem Proportionalitätsfaktor E , der den Anstieg der Geraden repräsentiert. Dieser Faktor wird *Elastizitätsmodul* genannt, für Stahl hat er z. B. den Wert $E_{\text{Stahl}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

- ⇒ Die *Elastizitätsgrenze* σ_E (sehr nahe bei σ_P) kennzeichnet den Punkt, bis zu dem bei nachfolgender Entlastung keine bleibenden Verformungen des Stabes gemessen werden.
- ⇒ Für die Beurteilung der Tragfähigkeit einer Konstruktion ist die *Streckgrenze* R_e (früher: σ_S bzw. *Fließgrenze* σ_F) besonders wichtig. Beim Erreichen dieser Spannung beginnt eine Verschiebung der Kristallgitter im Material, so dass unter Umständen selbst bei abfallender Spannung eine weitere Dehnung verzeichnet wird.

Für zahlreiche Materialien (z. B. hochfeste Stähle) zeigt sich diese Grenze im Spannungs-Dehnungs-Diagramm nicht so deutlich. Da mit der Streckgrenze (unter Berücksichtigung von Sicherheitsfaktoren) die zulässigen Spannungen festgelegt werden, wird dann ersatzweise die so genannte $R_{p0,2}$ -Grenze bestimmt. Dies ist die Spannung, bei der die Probe nach Entlastung eine bleibende (plastische) Dehnung von 0,2% ($\varepsilon = 0,002$) behält.

- ⇒ Nach dem Fließen setzt die so genannte *Kaltverfestigung* ein, die eine weitere Steigerung der Belastung ermöglicht, bis sich bei der Spannung R_m eine Einschnürung des Querschnitts der Probe zeigt, die zum Bruch führt (R_m - *Bruchspannung*, früher: σ_B).

Für die sehr häufig verwendeten Baustähle wurde früher die Bruchspannung zur Kennzeichnung verwendet: Der Stahl St37 hat eine Bruchspannung von $R_m = 370 \text{ N/mm}^2$ (bei einer Streckgrenze $R_e = 240 \text{ N/mm}^2$), für St52 gilt $R_m = 520 \text{ N/mm}^2$ für die Bruchspannung und $R_e = 320 \text{ N/mm}^2$ für die Streckgrenze. In den neueren Euronorm-Bezeichnungen (z. B.: S235JR bzw. S355JO) steckt die Information über die $R_{p0,2}$ -Grenze.

Beispiel 1: Ein Traggestell mit n Personen (durchschnittliche Masse pro Person: 75 kg, Masse des Traggestells ebenfalls 75 kg) soll an einem Draht aus S355JO (St52) aufgehängt werden. Bei welchem Drahtdurchmesser würde in dem Draht gerade die Bruchspannung hervorgerufen werden?

Die Spannung im Draht ergibt sich aus dem Quotienten des Gesamtgewichts und der Querschnittsfläche des Drahtes. Diese Spannung soll gerade die Bruchspannung erreichen:

$$R_m = \frac{(n+1) \cdot 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}}{\frac{\pi d^2}{4} \text{ s}^2} \quad .$$

Mit $R_m = 520 \text{ N/mm}^2$ kann daraus der Drahtdurchmesser berechnet werden:

$$d = 2 \sqrt{\frac{(n+1) \cdot 75 \cdot 9,81 \text{ N}}{\pi \cdot 520 \text{ N}}} \text{ mm} \quad .$$

Für $n = 40$ z. B. ergibt sich ein Durchmesser von $d = 8,59 \text{ mm}$. Der erstaunlich kleine Wert bestätigt die alte Konstruktionsformel: „Man glaubt ja nicht, was Eisen aushält“.

Beispiel 2: Wie lang darf ein an einem Punkt aufgehängter Draht aus Stahl (S235JR, frühere Bezeichnung: St37) mit konstantem Querschnitt und einer Dichte $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$ maximal sein, um nicht schon durch sein Eigengewicht zu reißen (Berechnung der so genannten *Reißlänge*).

Die größte innere Kraft tritt am Aufhängepunkt auf (Gesamtgewicht des Drahtes), und bei konstantem Drahtquerschnitt findet man dort auch die maximale Spannung:

$$\sigma_{max} = \frac{\rho g l A}{A} \quad , \quad \sigma_{max} = R_m \quad .$$

Durch Umstellen der Gleichung erhält man die Reißlänge:

$$l_{Reiß} = \frac{R_m}{\rho g} = \frac{370 \text{ N cm}^3 \text{ s}^2}{7,85 \cdot 9,81 \text{ mm}^2 \text{ g m}} = 4,805 \text{ km} \quad .$$

12.4 Hookesches Gesetz, Querkontraktion

Die Beziehung

$$\sigma = E \varepsilon \quad (12.3)$$

wird nach dem englischen Physiker ROBERT HOOKE (1635 - 1703) *Hookesches Gesetz* genannt.

Mit jeder Dehnung eines Stabes in Längsrichtung ist eine Änderung der Querschnittsabmessungen verbunden. Beim Zugversuch kann sie als Verjüngung des Durchmessers gemessen werden, und man definiert als *Querdehnung*

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0} \quad . \quad (12.4)$$

Da mit einer Verlängerung des Stabes ($\Delta l > 0$) eine Verringerung des Durchmessers ($\Delta d < 0$) verbunden ist (und umgekehrt), wird das Verhältnis $\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$ negativ. Nach dem französischen Physiker SIMÉON DÉNIS POISSON (1781 - 1840) wird der Quotient

$$\nu = - \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \quad (12.5)$$

als *Querkontraktionszahl* bezeichnet, ihr reziproker Wert $m = \frac{1}{\nu}$ wird *Poissonsche Zahl* genannt. Für Stahl ergibt sich (wie für die meisten Metalle) der Wert $\nu = 0,3$. Für alle Materialien liegt ν zwischen 0 (keine Querdehnung) und 0,5 (inkompressibles Material). In der Nähe dieser theoretischen Grenzen liegen unter anderem die Werte für Beton ($\nu \approx 0$) bzw. Gummi ($\nu \approx 0,5$).

Analog zum Hookeschen Gesetz, das die Normalspannung mit der Dehnung verknüpft, gibt es eine Beziehung für Schubspannung und Gleitung:

$$\tau = G \gamma \quad (12.6)$$

mit dem so genannten *Gleitmodul* G , der sich aus dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν nach der Formel

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12.7)$$

berechnen lässt. Für Stahl (mit $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$) erhält man

$$G_{Stahl} = 0,808 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad . \quad (12.8)$$

13 Festigkeitsnachweis

Dimensionierung auf Festigkeit bedeutet, die *Beanspruchung* B eines Bauteils mit der *Widerstandsfähigkeit* W des Bauteils gegen ein *Versagen* zu vergleichen (wobei diese drei Begriffe von Fall zu Fall genau definiert werden müssen). Logischerweise muss gelten:

$$B < W.$$

Dabei sind zahlreiche Einflüsse zu berücksichtigen. Nachfolgend werden einige davon behandelt, und es wird ein kurzer Einblick in das Thema *Festigkeitsnachweis* gegeben, der nur ein ganz kleiner Ausschnitt dieses umfangreichen und wichtigen Spezialgebietes sein kann (vgl. www.TM-aktuell.de).



Um den Festigkeitsnachweis führen zu können, müssen die geometrischen Abmessungen des Bauteils, seine zu ertragende Belastung (diese beiden Informationen beeinflussen im Wesentlichen die Beanspruchung B), die Werkstoffeigenschaften (kennzeichnen die Widerstandsfähigkeit W) und gegebenenfalls vorgeschriebene Sicherheitsbeiwerte bekannt sein. Der Konstrukteur steht allerdings vor der inversen Problematik: Er muss die Geometrie und den Werkstoff so festlegen, dass der Festigkeitsnachweis erfolgreich zu erbringen ist, andererseits soll die Konstruktion weder überdimensioniert noch durch Verwendung spezieller Werkstoffe zu teuer sein. Der Festigkeitsnachweis ist aber in vielen Fällen nicht durch eine Formel zu führen, die sich „nach den gesuchten Größen umstellen lässt“.

Wenn die in einem Bauteil auftretende Spannung die wesentliche Größe ist, die das Versagen hervorruft, dann folgt das übliche Vorgehen des Konstrukteurs folgender Strategie: Er schätzt möglichst alle Einflüsse, die beim anschließenden Festigkeitsnachweis zu berücksichtigen sind, so ab, dass er mit einer *zulässigen Spannung* σ_{zul} (auf der Basis der von den Werkstoffversuchen vorliegenden Ergebnissen) einen Wert hat, mit dem er die Dimensionierung des Bauteils vornimmt. Er kann dabei alle in diesem Buch in den Kapiteln 14 bis 25 behandelten Verfahren zur Berechnung von Spannungen anwenden und mit σ_{zul} vergleichen. Vielfach ist es sogar möglich, die Spannungsformeln nach den geometrischen Größen umzustellen, die für die Dimensionierung des Bauteils benötigt werden (vgl. die beiden kleinen besonders einfachen Beispiele im Abschnitt 12.3).

In den Beispielen und Aufgaben der nachfolgenden Kapitel wird dieses pragmatische Vorgehen in der beschriebenen Form (mit dem Vorgeben einer zulässigen Spannung) praktiziert. Wichtig ist deshalb folgender Hinweis:

Die pragmatische (und durchaus zu empfehlende) Vorgehensweise, Bauteile auf der Basis einer zulässigen Spannung zu dimensionieren, darf in der Regel kein Ersatz sein für den anschließenden Festigkeitsnachweis unter Berücksichtigung möglichst aller Einflüsse.

13.1 Belastungsarten

Die mit dem Zugversuch gewonnenen Ergebnisse gelten nur für (zügig aufgebrachte und danach) ruhende Belastung, auch *statische Belastung* genannt. Bewegte Maschinenbauteile sind jedoch *dynamischer Belastung* unterworfen. Folgende Skizzen verdeutlichen die wichtigsten Belastungsarten, wobei die Änderung der Spannung im Bauteil als Funktion der Zeit aufgetragen ist (**Abbildungen 13.1 und 13.2**):

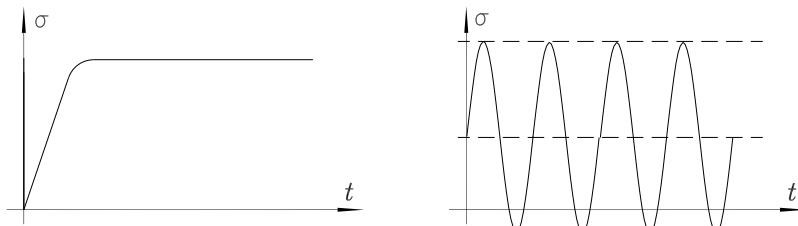


Abbildung 13.1: Eine statische Belastung (linkes Bild) wird zügig aufgebracht und bleibt dann konstant, die schwingende Belastung ändert ihre Intensität ständig um einen Mittelwert.

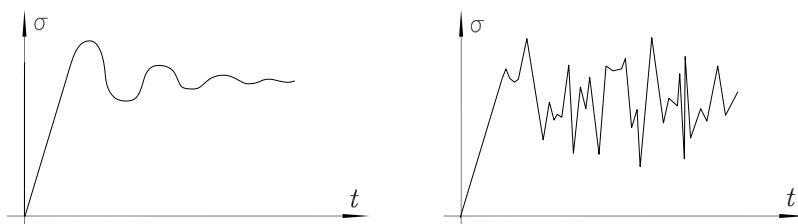


Abbildung 13.2: Eine stoßartige Belastung (linkes Bild) wird plötzlich aufgebracht und pendelt sich danach auf einen Endwert ein, die stochastische Belastung (rechtes Bild) ist völlig unregelmäßig.

Für die Behandlung der *statischen Belastung* sind die aus dem Zugversuch zu gewinnenden Erkenntnisse ausreichend. Man dimensioniert unter Beachtung eines Sicherheitsfaktors S je nach Materialverhalten bei *Versagen infolge großer bleibender Formänderungen* nach einer aus der Streckgrenze R_e (bzw. der $R_{p,0,2}$ -Grenze) ermittelten zulässigen Spannung

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \quad , \quad (13.1)$$

bei *Versagen durch Trennbruch* (spröde Materialien) nach einer aus der Bruchspannung R_m ermittelten zulässigen Spannung:

$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} \quad . \quad (13.2)$$

Diese Formeln gelten für eine gleichmäßige Spannungsverteilung im Querschnitt. Die anzusetzenden Sicherheitsbeiwerte hängen in hohem Maße von der Erfahrung, branchenüblichen Werten, Vorschriften für spezielle Konstruktionen und den zu erwartenden Folgen bei einem Versagen der Konstruktion ab. Auch die Kosten können von hohen Sicherheitsbeiwerten sowohl nega-

tiv (höhere Materialkosten) als auch positiv (geringerer Prüf- und Wartungsaufwand) beeinflusst werden. Gebräuchliche Werte sind:

$$S_F = 1,2 \dots 2 \quad \text{bzw.} \quad S_B = 2 \dots 4 \quad . \quad (13.3)$$

Bei *dynamischer Belastung* tritt nach einer hohen Lastwechselzahl ein Bruch vielfach schon bei Maximalspannungen auf, die weit unter der Streckgrenze (und noch weiter unter der Bruchspannung) liegen („Zerrüttung“ des Materials). Dieser Belastungsfall kann nicht mit den aus dem Zugversuch gewonnenen Erkenntnissen behandelt werden, es werden die Resultate der im Folgenden beschriebenen Dauerfestigkeitsversuche benötigt. Hier werden zunächst nur die wichtigsten Begriffe dieser Belastungsart bei konstanten Amplituden erläutert:

Die *schwingende Belastung* ist durch

- die *Oberspannung* σ_o ,
- die *Unterspannung* σ_u ,
- die *mittlere Spannung*

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_o + \sigma_u)$$
- und den Spannungsausschlag

$$\sigma_a = \sigma_o - \sigma_u = \sigma_m - \sigma_u$$

gekennzeichnet. Das Verhältnis von Unter- zu Oberspannung wird mit dem speziellen Parameter $R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$ („Ratio“) beschrieben.

Die wichtigsten Spezialfälle der schwingenden Belastung mit konstanten Amplituden sind die *schwellende Belastung* und die *Wechselbelastung*, für die gilt:

- *Schwellende Belastung:* $\sigma_u = 0, \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_o$ oder $\sigma_o = 0, \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_u$,
- *Wechselbelastung:* $\sigma_m = 0, \sigma_u = -\sigma_o$.

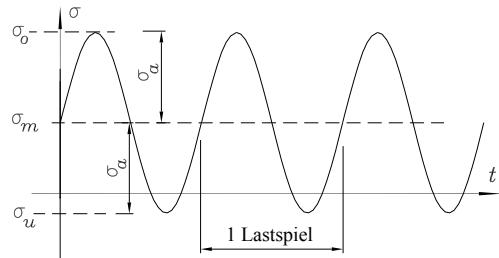


Abbildung 13.3: Schwingende Belastung mit konstanten Amplituden

13.2 Dauerfestigkeit

Für die Untersuchung des Verhaltens von Werkstoffen bei dynamischer Beanspruchung werden *Dauerfestigkeitsversuche* durchgeführt.

Bei einer bestimmten Mittelspannung σ_m werden die Proben ständigen Lastwechseln mit Spannungsausschlägen σ_a unterworfen. Die Anzahl der Lastwechsel wird gezählt und die so genannte *Bruchlastwechselzahl* registriert. Dies wird (bei gleichem σ_m) für viele verschiedene σ_a wiederholt. Wenn man den Spannungsausschlag σ_a in einem Diagramm über der Anzahl von Lastwechseln, die von der Probe bei diesem Spannungsausschlag bis zum Bruch ertragen wurden, aufträgt, ergibt sich die nach AUGUST WÖHLER (1819 - 1914) benannte *Wöhlerkurve* (**Abbildung 13.4**).

Es ist üblich (und sinnvoll), die Abszisse, auf der die Lastwechselzahl N aufgetragen wird, logarithmisch zu teilen.

Die wichtigste Erkenntnis aus den Dauerfestigkeitsversuchen ist, dass die Proben, die eine gewisse Anzahl von Lastwechseln ohne Bruch überstanden haben (z. B. für Stahl etwa 2.000.000 ... 10.000.000 Lastwechsel), auch bei Fortsetzung des Versuchs nicht versagen.

Der größte Spannungsausschlag σ_A , mit dem diese *Grenzschwingspielzahl* erreicht wird, definiert mit der so genannten *Dauerfestigkeit*

$$\sigma_D = \sigma_m + \sigma_A \quad (\text{bei } \sigma_m > 0) \text{ bzw.}$$

$$\sigma_D = \sigma_m - \sigma_A \quad (\text{bei } \sigma_m < 0)$$

den wichtigsten Wert, der aus dem Dauerfestigkeitsversuch gewonnen wird.

Zur Ermittlung einer einzigen Wöhlerkurve, die jeweils nur für ein bestimmtes σ_m gilt, sind zahlreiche Dauerfestigkeitsversuche erforderlich. Die wichtigsten Parameter aller Wöhlerkurven eines Materials werden deshalb in so genannten *Dauerfestigkeitsschaubildern* zusammengefasst. Hier wird zunächst das früher vornehmlich verwendete *Smith-Diagramm* (**Abbildung 13.5**) beschrieben, weil es die Schwingung sehr anschaulich dem Schaubild zuordnet:

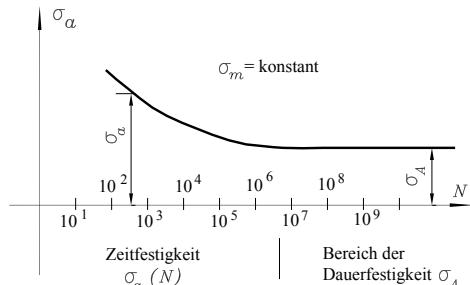


Abbildung 13.4: Wöhlerkurve

Kurven werden an Streck- bzw. Quetschgrenze korrigiert

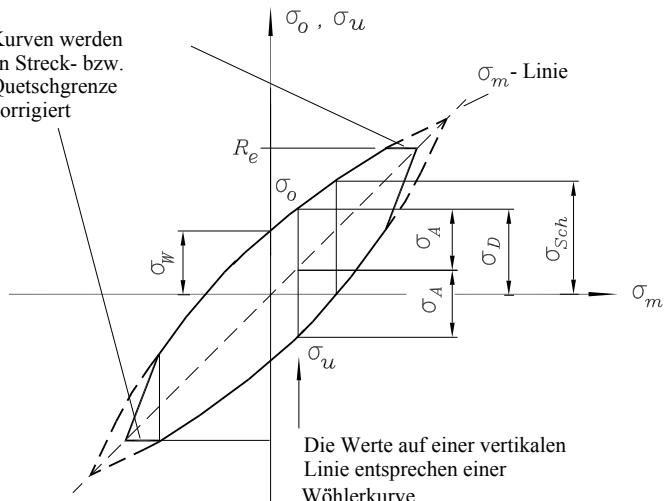


Abbildung 13.5: Dauerfestigkeitsschaubild (Smith-Diagramm)

- ⇒ Über σ_m werden die Ober- und Unterspannung, die von der Probe auf Dauer ertragen wurden, aufgetragen. Damit werden auch σ_A und die Dauerfestigkeit σ_D erkennbar.
- ⇒ An der Streckgrenze (und für Druckspannungen an der Quetschgrenze) wird das Dauerfestigkeitsschaubild so korrigiert, dass diese Grenzen nicht überschritten werden (horizontale Linien an diesen Stellen). Da σ_o und σ_u immer den gleichen Abstand von σ_m haben, sind von dieser Korrektur jeweils beide Zweige des Diagramms betroffen.
- ⇒ Der auf der vertikalen Achse ablesbare Wert σ_w heißt *Wechselfestigkeit* (Dauerfestigkeit bei der Mittelspannung $\sigma_m = 0$). Der Wert für die Dauerfestigkeit bei einer Unterspannung $\sigma_u = 0$ wird als *Schwellfestigkeit* σ_{Sch} bezeichnet. Man beachte, dass die Schwellfestigkeit der Summe der beiden Spannungsausschläge, die Wechselfestigkeit nur dem einfachen Spannungsausschlag entspricht.

Heute wird vielfach das etwas einfachere *Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh* bevorzugt, in dem nur die auf Dauer ertragbare Amplitude σ_A über der Mittelspannung σ_m aufgetragen wird. In diesem recht einfachen Diagramm (es ist eigentlich nur der Teil eines um 45° gedrehten Smith-Diagramms) sind die durch den Ursprung gehenden Geraden Linien gleichen Verhältnisses R zwischen Unter- und Oberspannung:

Die Abszisse kennzeichnet den statischen Lastfall, der Punkt auf der Ordinate die Wechselfestigkeit, die jeweils unter 45° zu den Achsen liegenden Geraden schneiden die Haigh-Kurve bei der halben Schwellfestigkeit (Zug bzw. Druck).

Der Versuchsaufwand zur Ermittlung der Dauerfestigkeitsschaubilder ist außerordentlich groß, zumal sich die meisten Materialien bei Zug, Biegung und Torsion (zum Teil auch bei Druck anders als bei Zug, z. B. Grauguss) unterschiedlich verhalten, so dass für diese Belastungen gesonderte Versuche gefahren werden müssen. Die ermittelten Spannungen werden durch einen zusätzlichen Index gekennzeichnet, z. B. sind mit σ_{bw} und τ_{tw} die Wechselfestigkeiten bei Biege- und Torsionsbeanspruchung gemeint.

Die wichtigsten Ergebnisse der Versuche zur Ermittlung der Festigkeitseigenschaften von Werkstoffen (Wechselfestigkeit, Schwellfestigkeit, Streckgrenze) findet man in Tabellen in einschlägigen Handbüchern. Es ist üblich, das reale Dauerfestigkeitsschaubild mit diesen drei Werten anzunähern, indem die gekrümmten Kurven durch Geraden ersetzt werden.

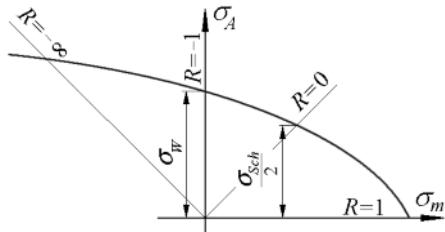


Abbildung 13.6: Haigh-Diagramm

13.3 Gestaltfestigkeit

Die tatsächlich in einem Bauteil auftretende Spannung kann (durch recht unterschiedliche Einflüsse bedingt) höher sein als die errechnete. Die wichtigsten Einflüsse, die zu solchen Abweichungen führen, sind genauer untersucht worden, man kennt Versuchsergebnisse und Erfahrungswerte, die berücksichtigt werden können (Bauteilgröße, Oberflächenbeschaffenheit, Eigenspannungen, Härtung, ...). Die trotzdem stets verbleibenden Unsicherheiten müssen durch Sicherheitsfaktoren erfasst werden.

Hier soll nur der wichtigste Einflussfaktor, die so genannte Kerbwirkung, kurz behandelt werden. Querschnittsänderungen in einem Bauteil führen zu Spannungsspitzen, die rechnerisch nur mit erheblichem Aufwand ermittelt werden können. Sie werden deshalb durch die *Formzahlen* α_k (für statische Belastung) und die *Kerbwirkungszahlen* β_k (für dynamische Belastung) erfasst.

Mit der Formzahl α_k korrigiert man „eigentlich falsche Voraussetzungen“ bei der Spannungsberechnung. Bei den in der Abbildung 13.7 zu sehenden Beispielen dürfte man nicht voraussetzen, dass sich in der Nähe der Kerben eine gleichmäßige Spannungsverteilung einstellt. Zur Vereinfachung der Berechnung tut man es doch, rechnet die so genannte *Nennspannung* σ_n mit einfachen

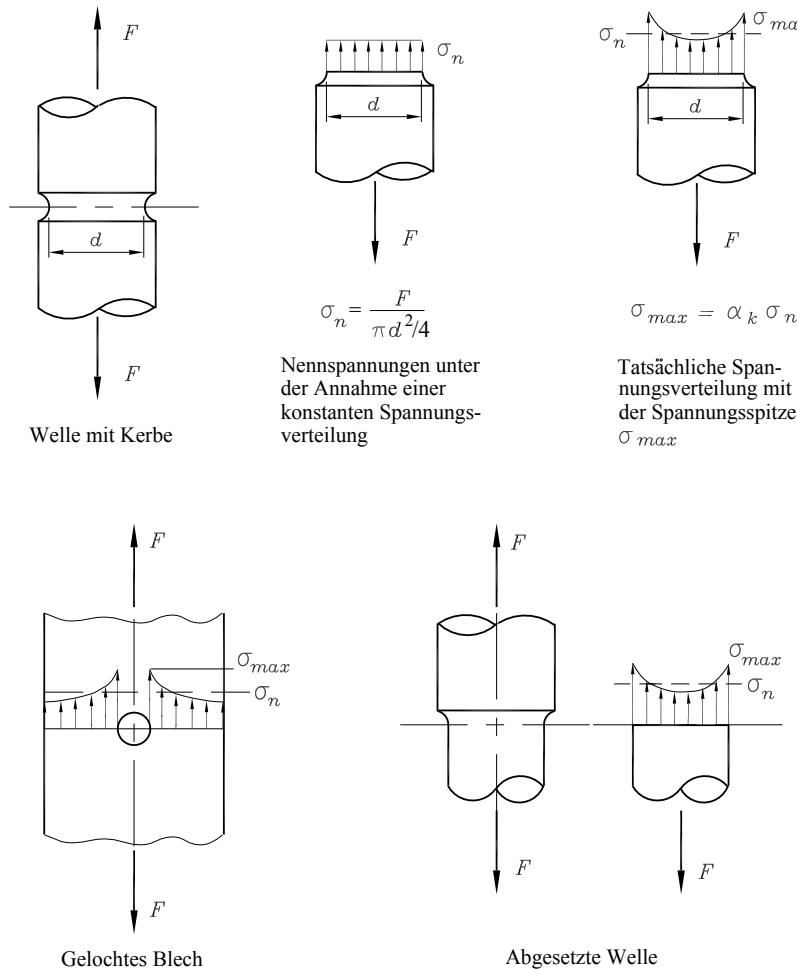


Abbildung 13.7: Nennspannung und Maximalspannung an Kerben

Formeln aus und korrigiert diese dann mit der Formzahl α_k , um die Spannungsspitze zu erfassen.
Für die Formzahlen gilt stets

$$\alpha_k \geq 1 \quad .$$

Es gibt Berechnungsverfahren, die die genaue Ermittlung der Spannungsverteilung gestatten (z. B. die Methode der finiten Elemente). Um nicht in jedem Einzelfall eine solche aufwendige Berechnung durchführen zu müssen, sind für zahlreiche Kerbformen Diagramme entwickelt worden, aus denen man die α_k -Werte entnehmen kann.

Versuche haben ergeben, dass die Kerbwirkung bei dynamischer Beanspruchung nicht so groß ist wie bei statischer Belastung. Damit gilt für die als

$$\beta_k = \frac{\sigma_A}{\sigma_{Ak}} = \frac{\text{Ertragbarer Spannungsausschlag der glatten Probe}}{\text{Ertragbarer Spannungsausschlag der gekerbten Probe}}$$

definierte *Kerbwirkungszahl* β_k :

$$1 \leq \beta_k \leq \alpha_k .$$

Die Ermittlung der β_k -Werte ist schwierig und aufwendig. Wenn keine geeigneten Werte für die Kerbwirkungszahl zur Verfügung stehen, was in der technischen Praxis eher die Regel als die Ausnahme ist, dann liegt man mit der Annahme

$$\beta_k = \alpha_k$$

auf der sicheren Seite.

13.4 Zeitfestigkeit

Bei den Überlegungen zur Dauerfestigkeit im Abschnitt 13.2 waren stets konstante Amplituden für die schwingende Belastung angenommen worden. Man darf die dort gewonnenen Ergebnisse natürlich auch verwenden, wenn man „konstante Amplitude“ durch „maximale Amplitude“ ersetzt. Doch spätestens dann, wenn die maximalen Amplituden nicht sehr häufig auftreten, führt die Dauerfestigkeitsrechnung oft zur Überdimensionierung. In diesem Fall und immer dann, wenn die Lebensdauer eines Bauteils (und damit die Anzahl der zu ertragenden Lastwechsel) abschätzbar ist oder gewollt begrenzt wird, jedoch auch, wenn Material- und Gewichtseinsparungen im Vordergrund stehen (Leichtbau), wird nach den Regeln der Zeitfestigkeit dimensioniert.

Die Wöhlerkurve zeigt, dass höhere Spannungsausschläge durchaus für eine begrenzte Zahl von Lastwechseln ertragbar sind. Die Überlegungen zur Zeitfestigkeit gehen nun davon aus, dass jeder Spannungsausschlag einen „gewissen Schadensbeitrag“ liefert und sich die einzelnen Schadensbeiträge summieren, bis nach einer bestimmten Zeit das Versagen des Bauteils eintritt. Die von dem Bauteil zu ertragenden Belastungen werden dafür in so genannten *Spannungskollektiven* zusammengefasst, deren Wirkung auf das Bauteil abgeschätzt werden kann.

13.4.1 Spannungskollektive

Man kann für typische Beanspruchungssituationen von Bauteilen (ein Auto fährt über eine längere Strecke über unterschiedliche Straßen, Flugzeuge starten oder landen, ...) die Spannungs-Zeit-Diagramme durch Aufzeichnungen ermitteln. Dabei ergeben sich unterschiedliche Amplituden, vielfach darf die Belastung als „stochastisch“ bezeichnet werden. Wenn eine ausreichende Menge solcher Untersuchungen vorliegt, darf man daraus auf die während seiner Lebensdauer zu ertragenden Belastungen des Bauteils schließen.

Um mit der gewaltigen Menge an Daten praktikabel umgehen zu können, kann man (sehr grob beschrieben) z. B. so vorgehen: Die aufgetretenen Spannungsspitzen werden geeignet klassiert, und es wird ausgezählt, wie häufig n_i eine Spannungsspitze der Klasse σ_i auftritt. Dies wird in einem Balkendiagramm dargestellt (**Abbildung 13.8**).

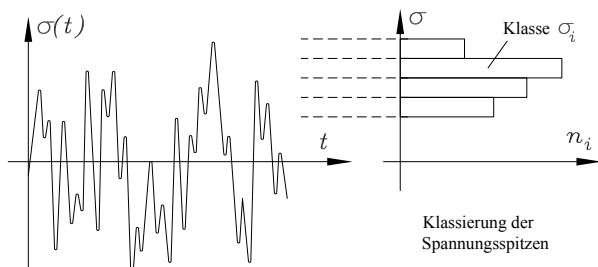


Abbildung 13.8: Das Klassieren und Auszählen der Spannungsspitzen erfolgt nach recht feinsinnig ausgedachten Regeln.

Das „Auszählen“ ist übrigens kein ganz einfacher Vorgang¹, weil im Gegensatz zur harmonisch schwingenden Belastung (**Abbildung 13.3** auf Seite 175) nicht jedem Lastspiel eindeutig genau eine Ober- und eine Unterspannung zugeordnet werden kann.

Die Anzahl der Lastwechsel n_i , die zu den Klassen gehören, die über der Dauerfestigkeit liegen, müssen im Bereich der Zeitfestigkeit natürlich links von der Wöhlerkurve (**Abbildung 13.4** auf Seite 176) liegen. Das genügt aber nicht, denn die Lastwechsel, die zu den höheren Klassen gehören, haben ja mindestens das gleiche Schädigungspotenzial, so dass gefordert werden muss, dass die Summe der Lastwechsel einer bestimmten Klasse und aller höheren Klassen kleiner als die der ertragbaren Lastwechsel dieser Klasse ist.

Deshalb wird aus dem Balkendiagramm der **Abbildung 13.8** eine „Summenhäufigkeitskurve“ konstruiert. Diese heißt *Spannungskollektiv* (nebenstehende **Abbildung 13.9**) und enthält also die Information, wie häufig eine Spannungsspitze auftritt, deren Größe **mindestens** der Klasse σ_i zuzuordnen ist (man sieht allerdings auch die weniger interessierende Information über die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Klassen).

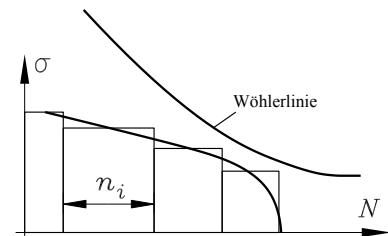


Abbildung 13.9: Spannungskollektiv

Das Spannungskollektiv muss also (wie in **Abbildung 13.9** zu sehen) komplett links von der Wöhlerlinie liegen.

Spannungskollektive zeigen häufig einander ähnelnde Kurvenverläufe, die die Definition von *Normkollektiven* (z. B.: Normalverteilung, Gerdlinienverteilung) nahelegen. Auf diese Weise können aufwendige Versuchsreihen immer dann vermieden werden, wenn man die wichtigsten Kenngrößen des Kollektivs (z. B. funktionaler Verlauf, Umfang und Höchstwert) zumindest abschätzen kann.

¹ „Es wird ausgezählt“, klingt viel einfacher als es ist. Was eine „Spannungsspitze“ ist, wäre einfach zu definieren, wenn jedem Maximum eindeutig das Minimum eines Lastspiels folgen würde. Genau das ist aber nicht der Fall, und deshalb sind eine Reihe von *Klassierungsverfahren* entwickelt worden, die diesen Prozess nach jeweils eindeutig definierten Regeln ablaufen lassen (*Rainflow-Verfahren*, *Reservoir-Methode*, ...). Natürlich gibt es geeignete Software, die das Zählen übernimmt.

13.4.2 Palmgren-Miner, Gaßner-Kurven

Auf der Basis der Untersuchungen von ARVID PALMGREN und MILTON A. MINER basiert die als *Hypothese von Palmgren und Miner* bezeichnete Annahme, dass jede Spannungsamplitude σ_i eines Spannungskollektivs entsprechend der Häufigkeit n_i ihres Auftretens zum Versagen des Bauteils beiträgt. Aus der Wöhlerkurve ([Abbildung 13.4](#) auf Seite [176](#)) ist zu entnehmen, dass die Spannungsamplitude σ_i maximal N_i -mal ertragen werden kann, und deshalb setzt man die tatsächlich aufgetretene Anzahl mit dieser Anzahl ins Verhältnis zum so genannten *Teilschädigungsquotienten* $\frac{n_i}{N_i}$.

Wären alle Spannungsamplituden gleich, dürfte dieser Quotient den Wert 1 nicht übersteigen. Damit erscheint die so genannte *Miner-Regel* zumindest plausibel, die für ein Spannungskollektiv fordert, dass die Summe aller Teilschädigungsquotienten kleiner oder gleich 1 sein muss:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} + \dots = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \leq 1 \quad . \quad (13.4)$$

Spannungsamplituden unterhalb der Dauerfestigkeit liefern keinen Beitrag zu dieser Formel, weil ihre ertragbare Anzahl unendlich ist. Man beachte, dass auch die Reihenfolge der Schadensbeiträge (bei dieser Theorie) keine Rolle spielt.

Wenn die Summe der Teilschädigungsquotienten für ein Spannungskollektiv nach der Miner-Regel [13.4](#) einen Wert deutlich kleiner als 1 liefert, kann man angeben, wie oft dieses Spannungskollektiv von dem Bauteil ertragen wird. Damit ist eine *Lebensdauerabschätzung* möglich. Die auch als *Original-Miner-Regel* bezeichnete Formel [13.4](#) liefert allerdings in der Regel (zu) optimistische Werte, so dass sich in den einschlägigen Berechnungsvorschriften verschiedene Modifikationen dieser Formel finden.

Ein alternatives Vorgehen ist nach einem Vorschlag von E. GASSNER bei Bezug auf ein bestimmtes Normkollektiv möglich. Dieses kann als Basis für Versuchsreihen ähnlich derer zur Ermittlung von Wöhlerkurven dienen: Die Probe wird (wiederholt) einer schwingenden Belastung mit Amplituden entsprechend dem Normkollektiv unterworfen. Es ist üblich, den Höchstwert eines Normkollektivs als charakteristische Größe für die Darstellung zu verwenden, so dass die sich ergebenden *Gaßner-Kurven* im entsprechenden Diagramm rechts von den Wöhlerkurven liegen (Probe kann mehr Lastwechsel ertragen, weil ein sehr großer Anteil mit kleineren Amplituden erfolgt).

Die [Abbildung 13.10](#) zeigt den Unterschied zwischen der Ermittlung eines Punktes der Wöhlerlinie und eines Punktes einer Gaßnerlinie:

- Für die Bestimmung der Wöhlerlinie wird (bei einer festen Mittelspannung) eine schwingende Belastung mit konstantem maximalen Schwingungsausschlag σ_a aufgebracht. Diese Belastung kann man als *Rechteckkollektiv* bezeichnen, das so oft wiederholt aufgebracht wird, bis die Probe nach N_W Lastwechseln bricht.
- Für die Bestimmung der Gaßnerlinie wird (bei ebenfalls fester Mittelspannung) eine schwingende Belastung mit wechselnden Amplituden σ_a aufgebracht, die ein ganz bestimmtes Normkollektiv nachbilden. Auch diese Belastung wird so oft wiederholt aufgebracht, bis die

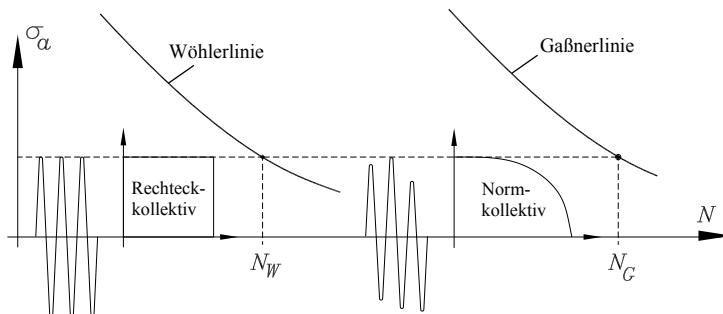


Abbildung 13.10: Ermittlung eines Punktes der Wöhlerlinie und eines Punktes einer Gaßnerlinie

Probe nach N_G Lastwechselt bricht. Weil die maximale Amplitude $\sigma_{a,max}$ als charakteristische Größe im Diagramm erscheint, liegt die Gaßnerlinie weiter rechts, weil die zahlreichen kleineren Amplituden nicht so stark schädigen. Die so zu ermittelnde Gaßnerlinie gilt genau für das Normkollektiv, das mit dem Versuch abgebildet wurde.

Wenn eine passende Gaßner-Kurve bekannt ist, kann der direkte Vergleich mit dem aktuellen Spannungskollektiv die Schadensakkumulations-Rechnung ersetzen.

Fazit:

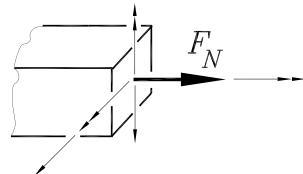
Das Gebiet der *Betriebsfestigkeit* ist ein so weites Feld, dass es einen eigenen Wissenschaftszweig darstellt. Es wird in der Regel auch nicht unter der Überschrift „Technische Mechanik“ gelehrt. Hier sollte nur ein kleiner Einblick gegeben werden (vgl. auch www.TM-aktuell.de), weil es mit der Technischen Mechanik naturgemäß besonders eng verzahnt ist.



Es ist darüber hinaus ein Gebiet, das sich in den letzten Jahren besonders schnell entwickelt hat, wobei die Wichtigkeit für die Praxis der Motor der Entwicklung war und ist. Von den zahlreichen Richtlinien und Normen, die auf diesem Wege entstanden sind und ständig weiter entstehen, seien hier nur die FKM-Richtlinie *Festigkeitsnachweis* (Maschinenbau) und der *Eurocode 3* (Stahlbau) genannt.

14 Zug und Druck

In diesem und den folgenden Kapiteln werden die Spannungen und Verformungen von Bauteilen berechnet, bei denen eine der drei Abmessungen deutlich größer ist als die beiden anderen (Stäbe, Balken, Rahmen, Wellen, ...). Dafür werden die aus der Statik bekannten Schnittgrößen (Normalkraft, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment) verwendet, die die resultierende Wirkung der über die Querschnittsfläche verteilten Spannungen repräsentieren.



Bei den Verformungsberechnungen wird immer vorausgesetzt, dass die Verformungen klein gegenüber den Abmessungen des Bauteils sind und sich das Material linear-elastisch verhält (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes).

In diesem Kapitel werden Bauteile betrachtet, die ausschließlich durch die Normalkraft F_N beansprucht werden (Seile, Stäbe).

14.1 Spannung, Dehnung

Die Normalkraft F_N ist die Resultierende der über die Querschnittsfläche verteilten Normalspannung:

$$F_N = \int_A \sigma \, dA \quad . \quad (14.1)$$

Es darf fast immer angenommen werden (Prinzip von St. Venant, siehe Abschnitt 12.2), dass die Spannung gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilt ist ($F_N = \sigma A$, wobei F_N und A in Längsrichtung veränderlich sein dürfen, vgl. die beiden Beispiele der Abbildung 14.1), und man erhält die Formel für die

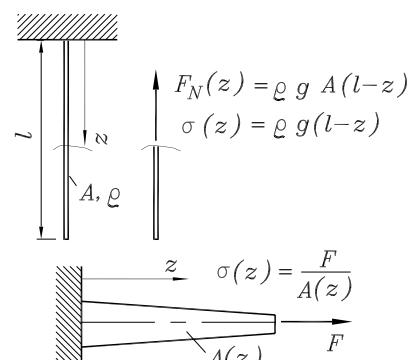


Abbildung 14.1: Eigengewichtsbelastung und Stab mit veränderlichem Querschnitt

$$\text{Normalspannung infolge der Normalkraft } F_N: \quad \sigma = \frac{F_N}{A} \quad . \quad (14.2)$$

Mit dem Hookeschen Gesetz 12.3 können die durch die Spannung hervorgerufenen Dehnungen berechnet werden, die im Allgemeinen auch von der Längskoordinate z abhängig sind. Die Deh-

nungen korrespondieren mit den Längsverschiebungen w , wie es die **Abbildung 14.2** für ein differenziell kleines Element zeigt („Dehnung = Verlängerung/Ursprungslänge“). Damit kann der Zusammenhang von Dehnung, Normalkraft und Längsverschiebung formuliert werden:

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{F_N}{EA} = \frac{(w + dw) - w}{dz} = \frac{dw}{dz} = w'(z) \quad \Rightarrow \quad EA w' = F_N \quad . \quad (14.3)$$

Bei *konstantem* ε kann aus der Dehnung die Verlängerung des Stabes der Länge l nach

$$\Delta l = \varepsilon l \quad (14.4)$$

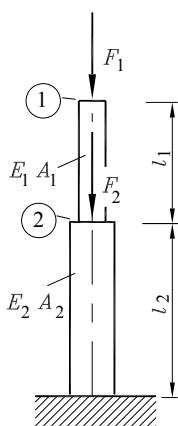
(siehe Formel 12.2 auf Seite 169) ermittelt werden, für veränderliches $\varepsilon(z)$ ergibt sich die Verlängerung Δl aus der Integration über die Dehnung:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon(z) dz \quad . \quad (14.5)$$

Für den sehr wichtigen Sonderfall, dass sowohl die Normalkraft F_N als auch die Querschnittsfläche A zumindest in einem Bereich eines Stabes konstant sind, erhält man aus den Formeln 14.3 und 14.4 die Formel für die

Längenänderung eines Stababschnitts mit der konstanten Normalkraft F_N und der konstanten Dehnsteifigkeit EA :

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad . \quad (14.6)$$



Beispiel 1:

Ein Stab mit stückweise konstantem Querschnitt (Skizze links) trägt die Kräfte F_1 und F_2 , sein Eigengewicht kann vernachlässigt werden. Man berechne

- die Spannung im oberen Abschnitt,
- die Querschnittsfläche A_2 , so dass sich im unteren Abschnitt die gleiche Spannung ergibt wie im oberen,
- die Absenkungen der Querschnitte ① und ②.

Gegeben: $F_1 = 12 \text{ kN}$; $l_1 = 30 \text{ cm}$;
 $F_2 = 9 \text{ kN}$; $l_2 = 40 \text{ cm}$;
 $A_1 = 80 \text{ mm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Die Gleichgewichtsbedingungen an den rechts dargestellten Teilsystemen liefern die Normalkräfte in den beiden Abschnitten:

$$F_{N1} = -F_1 \quad , \quad F_{N2} = -F_1 - F_2 \quad .$$

Für den oberen Abschnitt folgt daraus die Spannung

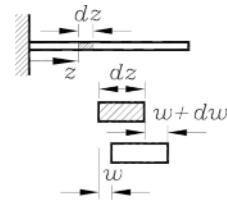
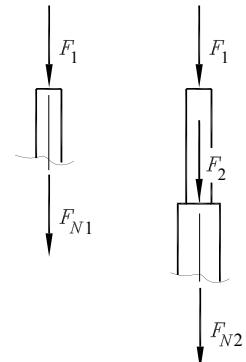


Abbildung 14.2: Element der Länge dz mit Längsverschiebungen w und $w + dw$



$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = -\frac{F_1}{A_1} = -150 \text{ N/mm}^2 .$$

Die Spannung im unteren Abschnitt soll die gleiche Größe haben. Aus dieser Forderung ergibt sich die Querschnittsfläche A_2 :

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = -\frac{F_1 + F_2}{A_2} = \sigma_1 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -\frac{F_1 + F_2}{\sigma_1} = 140 \text{ mm}^2 .$$

Die Absenkungen der Querschnitte ① und ② ergeben sich aus den Längenänderungen der unter den Querschnitten liegenden Stabbereiche:

$$w_2 = -\Delta l_2 = \frac{(F_1 + F_2)l_2}{E_2 A_2} = 0,286 \text{ mm} ; \quad w_1 = -\Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{F_1 l_1}{E_1 A_1} + w_2 = 0,500 \text{ mm} .$$

Beispiel 2:

Ein Stahlstab (Dichte ρ) mit Kreisquerschnitt ist durch die Kraft F belastet. Man ermittle jeweils unter Vernachlässigung bzw. bei Berücksichtigung des Eigengewichts

- den erforderlichen Durchmesser bei einer zulässigen Spannung von $\sigma_{zul} = 200 \text{ N/mm}^2$,
- die Verlängerung des Stabes bei einem gewählten Durchmesser von $d_{gew} = 16 \text{ mm}$.

Gegeben: $F = 40 \text{ kN}$; $l = 4 \text{ m}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$.

Für die Normalkraft gilt ohne Berücksichtigung des Eigengewichts:

$$F_N = F$$

und bei Berücksichtigung des Eigengewichts (vgl. Seite 43):

$$F_N = F + \rho g A z = F + q_e z \quad \text{mit} \quad q_e = \rho g A .$$

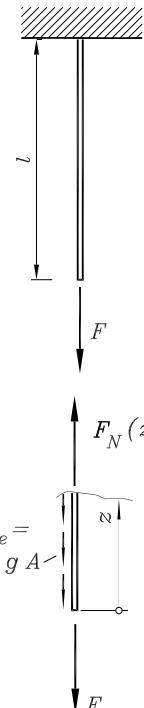
Die erforderlichen Durchmesser werden bestimmt, indem die maximale Spannung gleich der zulässigen Spannung gesetzt wird. Bei Vernachlässigung des Eigengewichts ist die Spannung im gesamten Stab gleich:

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} \Rightarrow \frac{F}{A_{erf,1}} = \frac{4F}{\pi d_{erf,1}^2} = \sigma_{zul} \Rightarrow d_{erf,1} = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma_{zul}}} = 15,96 \text{ mm}.$$

Bei Berücksichtigung des Eigengewichts ist die Spannung im Stab veränderlich und hat am Aufhängepunkt ihren größten Wert:

$$\begin{aligned} F_{N,max} &= F + q_e l \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zul} = \frac{F_{N,max}}{A_{erf,2}} = \frac{F}{A_{erf,2}} + \frac{q_e l}{A_{erf,2}} = \frac{4F}{\pi d_{erf,2}^2} + \rho g l \\ &\Rightarrow \quad d_{erf,2} = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi(\sigma_{zul} - \rho g l)}} = 15,97 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Der Eigengewichtseinfluss ist bei diesem Beispiel für die Dimensionierung unerheblich. Das Eigengewicht, das in der Regel um Größenordnungen kleiner ist als die äußere Last, kann deshalb häufig völlig unberücksichtigt bleiben.



Bei der Ermittlung der Stabverlängerung kann bei Vernachlässigung des Eigengewichts wegen der konstanten Dehnung (folgt aus der konstanten Spannung bei konstantem Querschnitt) mit der Formel 14.6 gearbeitet werden:

$$\Delta l_1 = \frac{F_N l}{EA} = \frac{4Fl}{E\pi d_{gew}^2} \Rightarrow \Delta l_1 = 3,79 \text{ mm} .$$

Bei Berücksichtigung des Eigengewichts muss entsprechend 14.5 integriert werden:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \int_{z=0}^l \varepsilon(z) dz ; \quad \varepsilon(z) = \frac{\sigma}{E} = \frac{F_N}{EA} = \frac{F}{EA} + \frac{q_e}{EA} z ; \\ \Delta l_2 &= \int_{z=0}^l \left(\frac{F}{EA} + \frac{q_e}{EA} z \right) dz ; \quad \Delta l_2 = \frac{Fl}{EA} + \frac{q_e}{2EA} l^2 = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g}{2E} l^2 = 3,79 \text{ mm} . \end{aligned}$$

Der Einfluss des Eigengewichtes ist auch bei der Stabverlängerung wie bei der Dimensionierung bei diesem Beispiel zu vernachlässigen.

14.2 Statisch unbestimmte Probleme

Bei statisch unbestimmten Problemen können die Lagerkräfte (und auch Stabkräfte, Seilkräfte, Schnittgrößen) nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Da zusätzliche Lager aber immer Aussagen über die Verformung ermöglichen, können unter Einbeziehung von Verformungsbetrachtungen auch diese Aufgaben gelöst werden.

In dem folgenden Beispiel 1 kann die Kraft im Seil 3 direkt berechnet werden, für die Berechnung der beiden Kräfte in den Seilen 1 und 2 steht aber nur eine Gleichgewichtsbedingung (Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung an der unteren Masse) für diese beiden Unbekannten zur Verfügung. Wegen der Vertikalführung der Masse muss die Verlängerung der Seile 1 und 2 jedoch gleich sein. Dies ist die zweite Bestimmungsgleichung für die Seilkräfte:

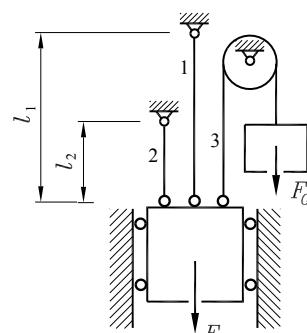
$$\Delta l_1 = \Delta l_2 .$$

Beispiel 1: Ein starrer Körper mit der Gewichtskraft F ist an den beiden elastischen Seilen 1 und 2 aufgehängt und wird außerdem über das Seil 3 von dem Gegengewicht F_G gehalten.

Man ermittle die von den Seilen 1 und 2 aufzunehmenden Kräfte.

Gegeben: $F = 8 \text{ kN}$; $l_1 = 60 \text{ cm}$; $A_1 = 36 \text{ mm}^2$;
 $F_G = 5 \text{ kN}$; $l_2 = 30 \text{ cm}$; $A_2 = 12 \text{ mm}^2$.

(A_1 und A_2 sind die Querschnittsflächen der Seile 1 und 2, alle Seile haben den gleichen Elastizitätsmodul).



Die Seilkraft im Seil 3 ist gleich der Gewichtskraft F_G , die drei aufwärts gerichteten Seilkräfte müssen mit der Kraft F im Gleichgewicht sein:

$$F_{S1} + F_{S2} + F_G - F = 0 \quad .$$

Die schon genannte Verformungsbedingung (Gleichheit der Seilverlängerungen) führt unter Verwendung von 14.6 zur zweiten Gleichung für die beiden unbekannten Seilkräfte:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{S1}l_1}{EA_1} = \frac{F_{S2}l_2}{EA_2} \quad \Rightarrow \quad F_{S1} = F_{S2} \frac{A_1}{A_2} \frac{l_2}{l_1} \quad .$$

Mit den gegebenen Größen errechnet man aus diesen beiden Gleichungen:

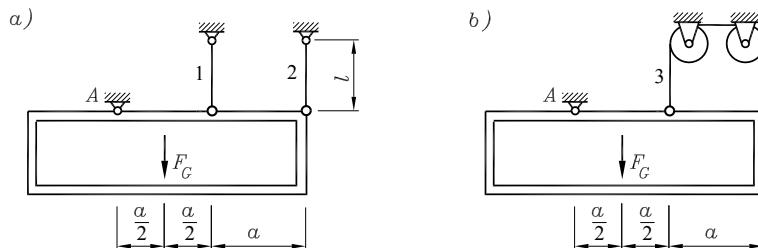
$$F_{S1} = \frac{3}{5}(F - F_G) = 1800\text{N} \quad ; \quad F_{S2} = \frac{2}{5}(F - F_G) = 1200\text{N} \quad .$$

Beispiel 2:

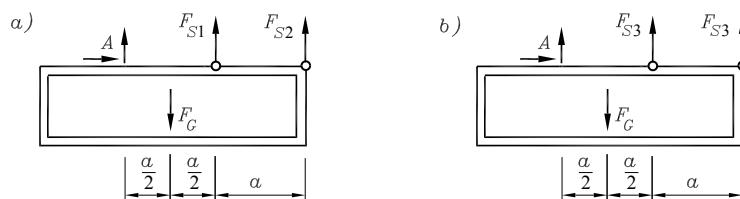
Ein starrer Körper (Gewicht F_G) ist bei A gelenkig gelagert und außerdem im Fall a an den elastischen Seilen 1 und 2, im Fall b an einem über zwei Rollen geführten Seil 3 aufgehängt. Alle Seile haben den gleichen Elastizitätsmodul E und den gleichen Querschnitt A .

Man berechne die Spannungen in den drei Seilen und die Verlängerung Δl_1 des Seils 1.

Gegeben: $F_G = 240\text{N}$; $a = 5\text{cm}$; $l = 6\text{cm}$; $A = 0,5\text{mm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$.



Die beiden Teilaufgaben erfordern unterschiedliche Lösungsstrategien, da das System a statisch unbestimmt, System b dagegen statisch bestimmt gelagert ist (nachfolgende Schnittskizzen):



- a) Das Momentengleichgewicht um den Punkt A ist die erste Bestimmungsgleichung für die unbekannten Seilkräfte F_{S1} und F_{S2} (auf weitere Gleichgewichtsbedingungen wird verzichtet, weil die Lagerkräfte bei A nicht gefragt sind):

$$F_G \frac{a}{2} - F_{S1}a - F_{S2}2a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{S1} + 2F_{S2} = \frac{F_G}{2} \quad .$$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus einer Verformungsbetrachtung: Da nur die Seile elastisch sind, kann sich der starre Körper nur um den Punkt A drehen und eine Schrägstellung einnehmen. Es müssen sich also die Längenänderungen der Seile 1 und 2 wie ihre Abstände zum Drehpunkt A verhalten:

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \Delta l_2 = 2\Delta l_1 \Rightarrow \frac{F_{S2}l}{EA} = 2 \frac{F_{S1}l}{EA} \Rightarrow F_{S2} = 2F_{S1} .$$

Die beiden Gleichungen (Momentengleichgewicht und Verformungsbedingung) liefern:

$$F_{S1} = \frac{F_G}{10} = 24 \text{ N} ; \quad F_{S2} = \frac{F_G}{5} = 48 \text{ N} .$$

Daraus ergeben sich die gesuchten Spannungen und die Verlängerung des Seiles 1:

$$\sigma_1 = \frac{F_{S1}}{A} = 48 \text{ N/mm}^2 ; \quad \sigma_2 = \frac{F_{S2}}{A} = 96 \text{ N/mm}^2 ; \quad \Delta l_1 = \frac{F_{S1}l}{EA} = 0,0137 \text{ mm} .$$

- b) Die Seilkraft F_{S3} kann, weil das System statisch bestimmt ist, ohne Verformungsbetrachtungen direkt aus einer Momentenbetrachtung um den Lagerpunkt A errechnet werden:

$$F_G \frac{a}{2} - F_{S3}a - F_{S3}2a = 0 \Rightarrow F_{S3} = \frac{F_G}{6} = 40 \text{ N} .$$

Daraus ergibt sich die Spannung in diesem Seil:

$$\sigma_3 = \frac{F_{S3}}{A} = 80 \text{ N/mm}^2 .$$

14.3 Temperatureinfluss, Fehlmaße

Bei einer *Temperaturerhöhung* um ΔT dehnt sich ein Stab zusätzlich zur elastischen Dehnung um die *Temperaturdehnung*

$$\varepsilon_t = \alpha_t \Delta T \tag{14.7}$$

mit dem *Temperaturausdehnungskoeffizienten* α_t (Dimension: K^{-1} , „1 durch Kelvin“), für Stahl gilt z. B.: $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Die Gesamtdehnung eines durch eine Normalkraft F_N belasteten Stabes, der zusätzlich einer Temperaturerhöhung ΔT unterworfen ist, errechnet sich nach

$$\varepsilon_{ges} = \frac{\sigma}{E} + \alpha_t \Delta T . \tag{14.8}$$

Darin ist σ die durch die Normalkraft F_N hervorgerufene Spannung $\sigma = \frac{F_N}{A}$.

⇒ Man beachte: Die Temperaturdehnung erfolgt stets spannungsfrei. *Temperaturspannungen werden nur bei behinderter thermischer Dehnung hervorgerufen*. Dies ist nur bei statisch unbestimmten Systemen möglich. *In statisch bestimmten Stabwerken treten keine Temperaturspannungen auf*.

Beispiel 1: Wenn ein Stab (oder mehrere oder alle Stäbe) des statisch bestimmten Stabwerks (linkes System) erwärmt wird, kann er sich spannungs-frei ausdehnen. Die übrigen Stäbe reagieren wie ein Getrie-be mit einem Freiheitsgrad.

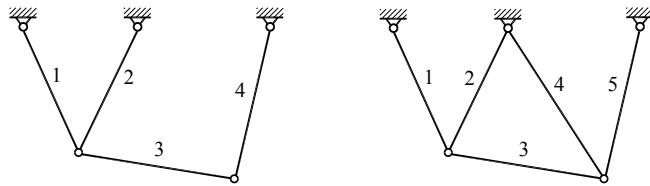


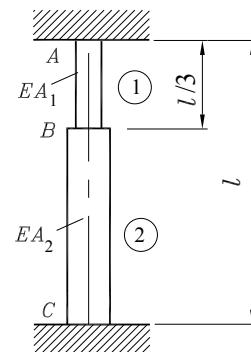
Abbildung 14.3: Statisch bestimmtes System (links) und statisch unbestimmtes System (rechts)

Wenn bei dem statisch unbestimmten Stabwerk (rechtes Stabwerk in Abbildung 14.3) z. B. der Stab 3 eine Wärmedehnung erfährt, verspannt er die beiden Stabzweischläge 1-2 und 4-5, und in allen fünf Stäben werden Spannungen hervorgerufen. Dies gilt auch bei Erwärmung jedes anderen Stabes, auch bei gleichmäßiger Erwärmung des gesamten Stabwerks.

Beispiel 2: Der skizzierte Stab wurde bei 0°C zwischen den starren Lagern A und C montiert.

- Man ermittle die Spannungen in den Teilen 1 und 2 bei einer Temperaturerhöhung auf $+40^\circ\text{C}$.
- Welche Kraft F müsste bei B (senkrecht nach unten) aufgebracht werden, so dass bei $+40^\circ\text{C}$ in den Teilen 1 und 2 die Spannungen gleich sind?
- Welche Spannungen ruft die unter b errechnete Kraft bei 0°C hervor?

Gegeben: $A_1 = 16\text{ cm}^2$; $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$;
 $A_2 = 4A_1$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ N/mm}^2$.



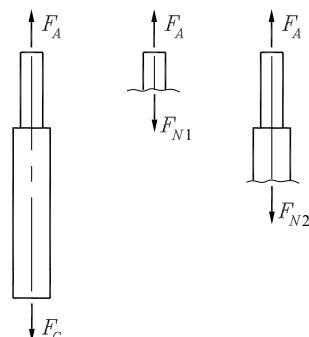
Der Stab ist statisch unbestimmt gelagert (zwei Einspannungen). Durch die spezielle Belastung werden jedoch nur Kräfte in vertikaler Richtung übertragen. Für die Berechnung der vertikalen Lagerkräfte in den Punkten A und C steht nur die Gleichgewichtsbeziehung „Summe aller Kräfte in vertikaler Richtung“ zur Verfügung, so dass sich dieses System als einfach statisch unbestimmt erweist. Es ist also eine Verformungsbetrachtungen erforderlich.

- Durch die Erwärmung und die verhinderte thermische Ausdehnung des Stabes entstehen die Lagerkräfte F_A und F_C . Zur Gleichgewichtsbedingung

$$F_A = F_C$$

wird noch eine Verformungsbedingung benötigt. Die gesamte Längenänderung, die sich aus den Längenänderungen beider Stababschnitte zusammensetzt, muss gleich Null sein, da die starren Einspannungen keine Verschiebungen zulassen:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 .$$



Dies sind die beiden Bestimmungsgleichungen, aus denen die Lagerreaktionen (und damit die Schnittgrößen und die Spannungen) berechnet werden können.

In der Verformungsbedingung werden die beiden Verlängerungen entsprechend

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \varepsilon_1 \frac{1}{3} l + \varepsilon_2 \frac{2}{3} l = 0$$

durch die Dehnungen ausgedrückt, die sich jeweils aus einem thermischen Anteil (verursacht durch ΔT) und einem elastischen Anteil (verursacht durch die Normalkräfte in den beiden Abschnitten) zusammensetzen. Die Dehnungen müssen also durch 14.8 ersetzt werden, die beiden Spannungen σ_1 und σ_2 werden entsprechend

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2}$$

durch die Normalkräfte ausgedrückt, und diese können (Gleichgewicht, Schnittskizzen auf der Seite 189) durch die Lagerreaktionen

$$F_{N1} = F_A \quad , \quad F_{N2} = F_A$$

ersetzt werden. Es ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{E} + \alpha_t \Delta T \right) \frac{l}{3} + \left(\frac{\sigma_2}{E} + \alpha_t \Delta T \right) \frac{2}{3} l = 0 & \Rightarrow \\ \frac{F_{N1}}{EA_1} + 2 \frac{F_{N2}}{EA_2} + 3\alpha_t \Delta T = 0 & \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \frac{F_A}{EA_1} = -3\alpha_t \Delta T \quad \Rightarrow \quad F_A = -2EA_1\alpha_t \Delta T . \end{aligned}$$

Dabei wurde bereits $A_2 = 4A_1$ (siehe Aufgabenstellung) berücksichtigt. Mit der nun bekannten Lagerkraft F_A errechnet man die Spannungen in den Abschnitten 1 und 2:

$$\sigma_1 = \frac{F_A}{A_1} = -202 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F_A}{A_2} = -50,4 \text{ N/mm}^2 \quad .$$

- b) Durch das Aufbringen der zusätzlichen Kraft F (nebenstehende Skizze) ändern sich die Lagerreaktionen und die Schnittgrößen. Nun gilt:

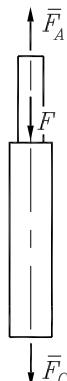
$$\bar{F}_{N1} = \bar{F}_A \quad , \quad \bar{F}_{N2} = \bar{F}_A - F \quad .$$

Die gleiche Verformungsbedingung wie im Fall a liefert damit:

$$\frac{\bar{F}_A}{EA_1} + 2 \frac{\bar{F}_A - F}{EA_2} + 3\alpha_t \Delta T = 0 \quad .$$

Mit Hilfe der daraus folgenden Lagerkraft $\bar{F}_A = \frac{F}{3} - 2EA_1\alpha_t \Delta T$ kann über die Normalkräfte und die Spannungen in den beiden Bereichen des Stabes die Bestimmungsgleichung für die Kraft F gewonnen werden, die in beiden Abschnitten die gleiche Spannung hervorruft:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{F}_A}{A_1} = \frac{\bar{F}_A - F}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F = 3EA_1\alpha_t \Delta T = 484 \text{ kN} \quad .$$



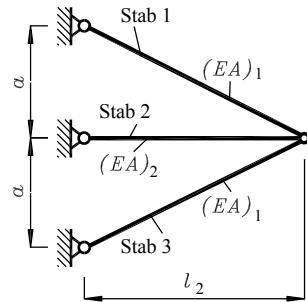
- c) In der für Fragestellung b ermittelten Formel für die Lagerkraft wird $\Delta T = 0$ gesetzt, und daraus erhält man folgende Spannungen in den Stababschnitten:

$$\bar{F}_A = \frac{F}{3} \quad ; \quad \sigma_1 = \frac{F}{3A_1} = 101 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{2F}{3A_2} = -50,4 \text{ N/mm}^2 \quad .$$

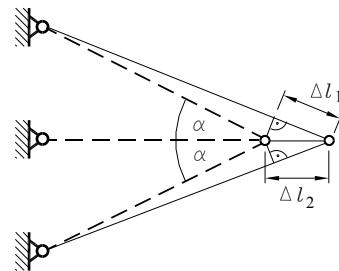
Beispiel 3:

Das skizzierte System ist bezüglich der äußeren Geometrie und der Dehnsteifigkeit der Stäbe symmetrisch. Der Stab 2 soll um die Temperaturdifferenz ΔT erwärmt werden. Die dadurch entstehenden Stabkräfte sind zu berechnen.

$$\text{Gegeben: } (EA)_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ N} \quad ; \quad a = 240 \text{ mm} \quad ; \\ (EA)_2 = 8 \cdot 10^6 \text{ N} \quad ; \quad l_2 = 450 \text{ mm} \quad ; \\ \alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \quad ; \quad \Delta T = 200 \text{ K} \quad .$$



Die in der nebenstehenden Skizze angedeutete Verschiebung des freien Knotens nach rechts um Δl_2 entspricht *nicht* der durch die thermische Dehnung des Stabes 2 erzeugten Verschiebung $\alpha_t \Delta T l_2$, die sich einstellen würde, wenn der Stab sich frei ausdehnen könnte. Da in dem statisch unbestimmten System durch die Dehnung Stabkräfte hervorgerufen werden, wird die thermische Dehnung von einer elastischen Dehnung überlagert. Die skizzierte Verschiebung stellt die *Gesamtverschiebung* (den Endzustand) aus beiden Anteilen dar.



Der Winkel α ist durch die Aufgabenstellung gegeben, es gilt z. B.: $\cos \alpha = \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + a^2}} = \frac{15}{17}$.

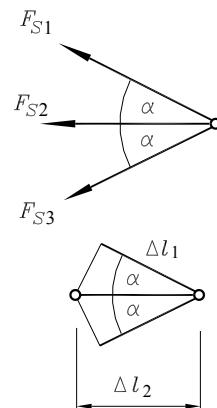
Wegen der Symmetrie gilt

$$F_{S3} = F_{S1} \quad .$$

Damit entfällt die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller Vertikalkräfte“ am nebenstehend skizzierten Knoten, und es verbleibt die Gleichgewichtsbedingung in horizontaler Richtung:

$$-2F_{S1} \cos \alpha - F_{S2} = 0 \quad .$$

Da das System einfach statisch unbestimmt ist, muss nur eine zusätzliche Gleichung aus Verformungsbetrachtungen gewonnen werden. Wegen der Symmetrie verschiebt sich der Knoten nur in horizontaler Richtung, und die Stabverlängerungen müssen so beschaffen sein, dass auch das deformierte System am Knoten zusammenpasst. Dafür ist die so genannte *Kompatibilitätsbedingung* zu formulieren.



Es darf natürlich vorausgesetzt werden, dass die Längenänderungen der Stäbe wesentlich kleiner sind als die Stablängen, so dass der Winkel zwischen den Stäben auch am deformierten System noch mit α angenähert werden darf (Theorie 1. Ordnung, die für die Gleichgewichtsbedingung ohnehin schon genutzt wurde). Dann kann aus der Verformungsskizze abgelesen werden:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha \quad .$$

Während Δl_1 ausschließlich aus der elastischen Dehnung (infolge F_{S1}) resultiert, wird Δl_2 durch thermische und elastischen Dehnung (infolge ΔT und F_{S2}) erzeugt, so dass die Beziehungen 14.6 bzw. 14.8 gelten:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{S1}}{(EA)_1} \sqrt{l_2^2 + a^2} \quad ; \quad \Delta l_2 = \left(\frac{F_{S2}}{(EA)_2} + \alpha_t \Delta T \right) l_2 \quad .$$

Aus dieser Beziehung und der Gleichgewichtsbedingung errechnen sich die beiden Stabkräfte:

$$F_{S1} = \frac{\alpha_t \Delta T \cos^2 \alpha}{\frac{1}{(EA)_1} + \frac{2 \cos^3 \alpha}{(EA)_2}} = 5026 \text{ N} \quad ; \quad F_{S2} = -\frac{2 \alpha_t \Delta T \cos^3 \alpha}{\frac{1}{(EA)_1} + \frac{2 \cos^3 \alpha}{(EA)_2}} = -8870 \text{ N} \quad .$$

- ⇒ Nur durch die Verwendung der Theorie 1. Ordnung (Verschiebungen sind klein gegenüber den Abmessungen des Systems) bleiben die Beziehungen, aus denen die Stabkräfte berechnet werden, linear. Erfahrungsgemäß macht diese (für die weitaus meisten praktischen Probleme gerechtfertigte) *Linearisierung* dem Anfänger einige Schwierigkeiten.

Für das behandelte sehr einfache Beispiel kann der Fehler, der dabei begangen wird, deutlich gemacht werden. Die exakte Kompatibilitätsbedingung lautet (Pythagoras):

$$\left(\sqrt{l_2^2 + a^2} + \Delta l_1 \right)^2 = (l_2 + \Delta l_2)^2 + a^2$$

bzw.

$$\Delta l_1 \left(2 \sqrt{l_2^2 + a^2} + \Delta l_1 \right) = \Delta l_2 (2l_2 + \Delta l_2) \quad .$$

Wenn in den Klammern die (kleinen) Verlängerungen gegenüber den (im Allgemeinen wesentlich größeren) doppelten Stablängen vernachlässigt werden, entsteht daraus mit

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + a^2}} = \Delta l_2 \cos \alpha \quad .$$

die aus der Anschauung gewonnene Beziehung.

- ⇒ Wenn die Aufgabe auch nur etwas komplizierter als das behandelte Beispiel ist, kann das Aufschreiben der Kompatibilitätsbedingung „aus der Anschauung“ außerordentlich schwierig bis unmöglich werden. Wäre bei dem behandelten Beispiel die Symmetrie nicht vorgegeben, würde sich der Knoten nicht mehr nur horizontal verschieben, und man müsste (neben zwei Gleichgewichtsbedingungen) eine Bedingung unter Einbeziehung der Verlängerungen aller Stäbe formulieren. Um praxisrelevante Probleme behandeln zu können, ist deshalb ein möglichst hoher Formalisierungsgrad der Berechnung anzustreben. Dies wird mit dem im Kapitel 15 zu behandelnden Verfahren erreicht.

Abschließend wird noch ein Beispiel behandelt, das mit dem Problem der Temperaturdehnung eng verwandt ist: Wenn ein Stab in eine (statisch unbestimmte) Konstruktion eingebaut wird, dessen Länge ein *Fehlmaß* aufweist, so dass er eigentlich „nicht passt“ und nur unter Zwang eingefügt werden kann, entstehen dadurch *Vorspannungen* bereits im unbelasteten Tragwerk. Man kann nun z. B. ein Übermaß \bar{u} so interpretieren, als wäre es eine Verlängerung eines Stabes der Länge l infolge der Temperaturerhöhung dieses Stabes um ΔT , wenn

$$\bar{u} = \alpha_t \Delta T l$$

gesetzt wird.

Die so genannte *Anfangsdehnung* $\varepsilon_0 = \frac{\bar{u}}{l}$ kann also wie die Temperaturdehnung zur elastischen Dehnung hinzugefügt werden, und die Beziehung 14.8 erweitert sich zur Formel für die

Gesamtdehnung eines Stabes infolge Normalkraft F_N , Temperaturerhöhung ΔT und Anfangsdehnung ε_0 :

$$\varepsilon_{ges} = \frac{F_N}{EA} + \alpha_t \Delta T + \varepsilon_0 \quad . \quad (14.9)$$

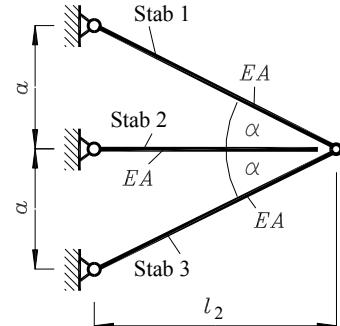
Beispiel 4:

Es wird ein ähnlicher Stabdreischlag wie im Beispiel 3 betrachtet. Das System trägt keine äußere Belastung, aber der Stab 2 war infolge einer Fertigungsungenauigkeit vor dem Einbau um 0,2% zu kurz.

Gesucht sind die Spannungen in den Stäben infolge des Einbaus von Stab 2 unter Zwang.

Gegeben: $a = 240 \text{ mm}$; $l_2 = 450 \text{ mm}$;
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Die Querschnittsflächen A der drei Stäbe sind gleich groß.



Die Gleichgewichtsbedingung und die Kompatibilitätsbedingung können ungeändert vom Beispiel 3 übernommen werden. In den Ergebnissen ist nur die Temperaturdehnung $\alpha_t \Delta T$ durch die Anfangsdehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{u}_2}{l_2} = -0,002$$

zu ersetzen, und man erhält (nach Vereinfachung unter Benutzung der gegebenen Größen):

$$\sigma_1 = \frac{F_{S1}}{A} = -\frac{E \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{\bar{u}_2}{l_2} = -138 \text{ N/mm}^2 \quad ;$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{S2}}{A} = -\frac{2 E \cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{\bar{u}_2}{l_2} = 243 \text{ N/mm}^2 \quad .$$

Das Ergebnis bestätigt die Annahme, dass Stab 2 auf Zug und Stab 1 und Stab 3 auf Druck beansprucht werden.

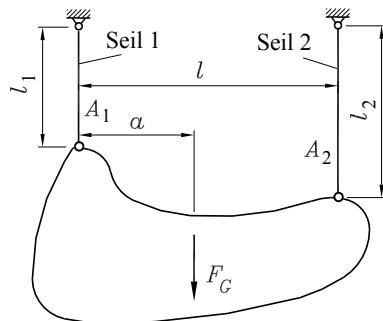
- ⇒ Das Ergebnis des Beispiels 4 zeigt, dass schon geringe Fertigungsungenauigkeiten zu erheblichen Spannungen führen können (natürlich nur bei statisch unbestimmten Konstruktionen). Man beachte, dass die Querschnittsfläche in das Ergebnis nicht eingeht, so dass die Spannungen durch größere Querschnitte nicht verringert werden können.
- ⇒ Die Praxis des Einbaus „nicht passender“ Bauteile bestätigt die Verwandtschaft zwischen *Fehlmaß* und *Temperaturdehnung*: Man erwärmt ein zu kurzes Bauteil, bis es sich problemlos einbauen lässt. Stab 2 des Beispiels 4 (Stahlstab mit $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) müsste um 167° erwärmt werden, um spannungsfrei montiert werden zu können. Bei der Abkühlung können unter Umständen Spannungen entstehen, die oberhalb der zulässigen Werte liegen.

14.4 Aufgaben

Aufgabe 14.1: Ein Körper ist an zwei Stahlseilen 1 und 2 aufgehängt, die sich durch dessen Gewicht um Δl_1 bzw. Δl_2 verlängern. Man berechne

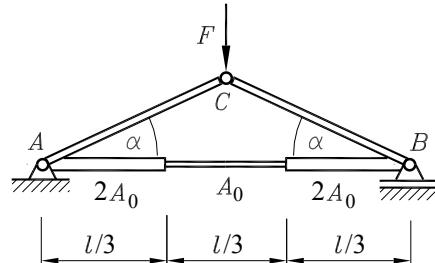
- die Zugspannung im Seil 1,
- die Gewichtskraft F_G und die Strecke a bis zu ihrem Angriffspunkt.

Gegeben: $\Delta l_1 = 0,8 \text{ mm}$; $l_1 = 80 \text{ cm}$; $l = 130 \text{ cm}$;
 $\Delta l_2 = 1,2 \text{ mm}$; $l_2 = 100 \text{ cm}$; $A_1 = 1 \text{ mm}^2$;
 $A_2 = 2 \text{ mm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.



Aufgabe 14.2: Das skizzierte System besteht aus drei gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Der horizontale Stab zwischen den Lagern A und B hat stückweise konstanten Querschnitt. Der Winkel α ist definiert.

Gegeben: $l = 180 \text{ mm}$; $A_0 = 9 \text{ mm}^2$;
 $\alpha = 30^\circ$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

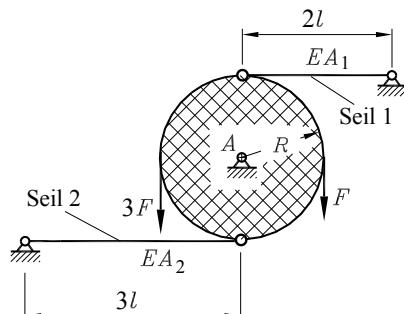


- Wie groß ist die bei C angreifende Kraft F , wenn infolge der Verlängerung des horizontalen Stabes am Lager B eine Verschiebung $\Delta l = 0,2 \text{ mm}$ (nach rechts) gemessen wird?
- Bei welcher am Punkt C angreifenden Kraft $F = F_{max}$ wird in dem horizontalen Stab die Bruchspannung $R_m = 520 \text{ N/mm}^2$ erreicht?

Aufgabe 14.3: Eine starre Scheibe ist bei A drehbar gelagert und wird zusätzlich durch zwei elastische Stahlseile mit den Querschnittsflächen A_1 bzw. A_2 gehalten.

Gegeben: F ; $A_1 = 3A_2$.

Es sind die Kräfte in den Seilen zu ermitteln.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

15 Der Stab als finites Element

15.1 Die Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die *Methode der finiten Elemente*¹ basiert auf der Idee, das zu berechnende Gebilde in eine (große) Anzahl einfacher (und damit der Berechnung zugängiger) Elemente zu zerlegen und aus den Elementlösungen unter Berücksichtigung von Kontinuitäts- und Gleichgewichtsbedingungen eine Lösung für das Gesamtsystem zu konstruieren. Diese Bedingungen werden dabei nur an einer endlichen Zahl von Punkten (so genannten *Knoten*) formuliert.

Der Vorschlag, physikalische Probleme auf diese Weise zu lösen, wurde erstmals 1943 von dem Mathematiker RICHARD COURANT (1888-1972) gemacht, die Zulässigkeit dieses Vorgehens wurde mathematisch einwandfrei bewiesen und die Anwendbarkeit in einer Veröffentlichung an einem Beispiel demonstriert. Der Gedanke wurde jedoch nicht weiter verfolgt, weil vermutlich die Lösung des sich ergebenden (recht umfangreichen) Gleichungssystems abschreckte.

Auf ganz anderem Wege wurden von verschiedenen Ingenieuren (vorwiegend aus dem Flugzeugbau) in der zweiten Hälfte der fünfziger Jahre des 20. Jahrhunderts „Elementlösungen“ zu „Gesamtlösungen“ zusammengesetzt. Diese eher intuitiv entstandene Methode fand sehr schnell viele Anwender: Die Methode der finiten Elemente wurde erfolgreich eingesetzt, ohne dass der mathematische Nachweis für die Richtigkeit des Verfahrens erbracht war.

Erst Ende der sechziger Jahre gelangen die mathematische Absicherung der Finite-Elemente-Methode und der Nachweis, dass sie mit dem von Courant vorgeschlagenen Verfahren identisch ist. Anfang der siebziger Jahre erschienen die ersten großen Programmsysteme, deren Einsatzmöglichkeiten weit über die Aufgabenstellungen der Technischen Mechanik hinausgingen.

Heute ist die Methode der finiten Elemente sicher das am meisten benutzte Verfahren, um naturwissenschaftliche und technische Probleme numerisch mit Hilfe des Computers zu lösen. Sie wird für Festigkeitsuntersuchungen, dynamische Probleme und in der Strömungsmechanik eben-

¹ „Ist es nicht zu früh, die Methode der finiten Elemente schon zum Beginn der Festigkeitslehre zu bringen?“ ist eine durchaus berechtigte Frage. In der Ingenieurausbildung wird für das Verfahren im Allgemeinen sogar eine spezielle Vorlesung nach der Technischen Mechanik reserviert. Die Autoren sind jedoch der festen Überzeugung, dass zu diesem frühen Zeitpunkt schon alles verfügbar ist, was einen Einstieg in das Verfahren ermöglicht. Und nach dieser Einführung kann dann bei allen nachfolgenden Themen das Verfahren, das später für fast alle praxisrelevanten Probleme eingesetzt werden wird, immer „im Hinterkopf präsent sein“. Dem Praktiker, der nachträglich den Einstieg in dieses wichtige Verfahren sucht, wird damit signalisiert, dass man dafür nicht mehr als die ersten Grundlagen der Festigkeitslehre benötigt. Und ein recht pragmatischer Grund spricht auch genau für diesen Zeitpunkt: Am Ende des Kapitels 14 offenbarten die Studenten immer beträchtliche Schwierigkeiten bei der Berechnung der Stabkräfte der Aufgabe 14.2 („Statik ist ja schon so lange her!“). Da bietet sich die FEM-Einführung im Abschnitt 15.2 mit der intensiven Wiederholung der Themen *Schnittprinzip* und *Gleichgewicht* geradezu an.

so eingesetzt wie in der Thermodynamik, für die Berechnung von Magnetfeldern, in der Gezeitentheorie und für die Wettervorhersage.

Man kann sich der Methode der finiten Elemente auf recht unterschiedlichem Wege nähern (siehe Kapitel 34). Nachfolgend wird sie am Beispiel der Verformungs- und Spannungsberechnung für Stabwerke aus linear-elastischem Material erläutert. Dies ist der typische „Ingenieur-Einstieg“.

15.2 Fluchtende Stabelemente

Betrachtet wird eine sehr einfache Struktur (nebenstehende Skizze), die sich aus Stäben mit konstanten Querschnitten zusammensetzt. Die Stäbe sind ausschließlich durch Normalkräfte in Längsrichtung belastet, Einzelkräfte greifen nur an den Verbindungsstellen der Stäbe (Knoten) an. Als verteilte Belastung wird die pro Stab konstante Linienlast q (Eigengewicht) berücksichtigt.

Dieses *System* wird so zerschnitten, dass die *Knoten* (einschließlich der äußeren Einzelkräfte) von den *Elementen* getrennt werden. Man erhält das einfachste finite Element der Elastomechanik, den ausschließlich durch Normalkräfte belasteten geraden Stab.

Die am Element angetragenen Kräfte U_1 und U_2 (Schnittkräfte) und die Linienlast q_e werden in gleicher Richtung positiv definiert (man beachte den Unterschied zur Definition der Schnittgrößen), die Verschiebungen der Punkte 1 und 2 übereinstimmend mit den Kraftrichtungen (**Abbildung 15.1**). Die elastischen Eigenschaften des Elementes e sind durch die Dehnsteifigkeit $(EA)_e$ und die Länge l_e gegeben.

Am Element sind natürlich U_1 , U_2 und die Resultierende der Liniенlast q_e im statischen

$$\text{Gleichgewicht: } U_1 + U_2 + q_e l_e = 0 \quad . \quad (15.1)$$

Die Gesamtverschiebung des Knotens 2 ist die Summe aus der Verschiebung des Knotens 1 und der Verlängerung des Elements infolge der Kraft U_2 und der Linienlast q_e . Letztere wurde im Beispiel 2 des Abschnitts 14.1 für den am oberen Ende eingespannten Stab berechnet. Das Ergebnis kann direkt von Seite 186 übernommen werden (dort als Δl_2 bezeichnet). Es ist die Aussage zur

$$\text{Verformung: } u_2 = u_1 + \frac{U_2 l_e}{(EA)_e} + \frac{q_e l_e^2}{2(EA)_e} \quad . \quad (15.2)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich umschreiben zur

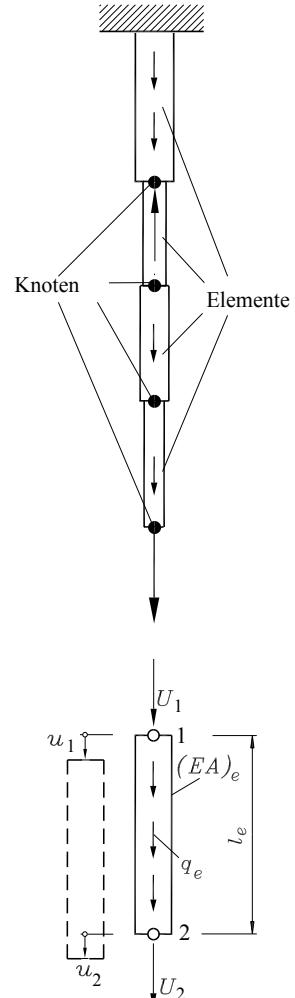


Abbildung 15.1: Einfachstes finites Element: Gerader Stab

Element-Steifigkeitsbeziehung:

$$U_1 = \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_1 - \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_2 - \frac{1}{2} q_{ele} ; \quad U_2 = - \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_1 + \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_2 - \frac{1}{2} q_{ele} . \quad (15.3)$$

Die beiden Gleichungen 15.3 werden in Matrixform zusammengefasst:

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l} \right)_e & -\left(\frac{EA}{l} \right)_e \\ -\left(\frac{EA}{l} \right)_e & \left(\frac{EA}{l} \right)_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_{ele} \\ \frac{1}{2} q_{ele} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e \mathbf{v}_e - \mathbf{f}_{e,red} . \quad (15.4)$$

⇒ Die Größen in der Element-Steifigkeitsbeziehung $\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{v}_e - \mathbf{f}_{e,red}$ haben folgende Namen:

- | | | |
|----------------------|---|---------------------------------------|
| \mathbf{f}_e | → | Element-Kraftvektor, |
| \mathbf{v}_e | → | Element-Verschiebungsvektor, |
| \mathbf{K}_e | → | Element-Steifigkeitsmatrix, |
| $\mathbf{f}_{e,red}$ | → | Vektor der reduzierten Elementlasten. |

Mit diesem einfachsten aller Elementen soll nun das einfachste System berechnet werden, das sich daraus bilden lässt, der aus zwei Elementen a und b bestehende Stab.

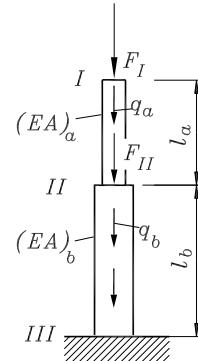
Beispiel 1:

Der skizzierte Stab ist an den Punkten I und II durch die Kräfte F_I bzw. F_{II} und zusätzlich durch das Eigengewicht (repräsentiert durch q_a und q_b) belastet und bei III gelagert.

Gegeben: $E_a, A_a, l_a, q_a, E_b, A_b, l_b, q_b, F_I, F_{II}$.

Berechnet werden sollen die Verschiebungen der Punkte I und II und die Lagerkraft bei III .

Natürlich ist diese Aufgabe mit elementaren Mitteln der Festigkeitslehre lösbar, und man kann die Ergebnisse nahezu ohne Rechnung angeben (F_{III} muss die Summe aus F_I , F_{II} und dem Gesamtgewicht sein, die Verschiebung u_{II} entspricht der Längenänderung des Elements b und u_I der Summe der Längenänderungen beider Elemente).



Hier soll jedoch der typische *Finite-Elemente-Algorithmus* demonstriert werden: Die Punkte I , II und III werden als Knoten betrachtet, die die äußere Belastung tragen. Auch die Lagerkraft F_{III} wird zu den äußeren Kräften gezählt, wie überhaupt alle Knoten zunächst gleichartig behandelt werden. Die Elemente werden durch Schnitte von den Knoten getrennt. Die Schnitte werden unendlich dicht neben den Knoten angebracht, so dass diese keine Längenausdehnung haben, die äußeren Kräfte werden jedoch den Knoten zugeordnet.

Die als Schnittkräfte sichtbar werdenden inneren Kräfte sind nach dem Schnittprinzip der Statik am Element und am Knoten gleich groß mit entgegengesetztem Richtungssinn anzutragen.

Sie werden an beiden Enden beider Elemente (im Folgenden als *Elementknoten* bezeichnet und in nebenstehender Schnittskizze als kleine Kreise zu sehen) entsprechend der in der Abbildung 15.1 gegebenen Definition gleichsinnig angetragen. Diese Richtung gilt allgemein als *positive Kraft- und Verschiebungsrichtung*. Auch die an den *Systemknoten* (dicke schwarze Punkte) angreifenden äußeren Kräfte und die Knotenverschiebungen werden dann positiv gezählt, wenn sie in diese Richtung weisen.

Es ergeben sich also drei Knoten, für die jeweils das Knotengleichgewicht erfüllt sein muss, und zwei Elemente, für die die Elementsteifigkeitsbeziehungen 15.3 gelten müssen:

$$\begin{aligned} U_{1a} &= \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_I - \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_{II} - \frac{1}{2} q_a l_a , \\ U_{2a} &= - \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_I + \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_{II} - \frac{1}{2} q_a l_a , \\ U_{1b} &= \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{II} - \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{III} - \frac{1}{2} q_b l_b , \\ U_{2b} &= - \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{II} + \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{III} - \frac{1}{2} q_b l_b . \end{aligned}$$

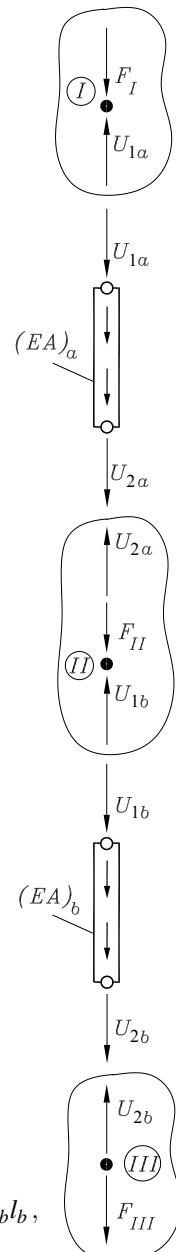
In diesen Element-Steifigkeitsbeziehungen wurden die Kompatibilitätsbedingungen bereits berücksichtigt, indem die Verschiebungen u_I , u_{II} und u_{III} verwendet wurden, so dass die Gleichheit der Verschiebung des Elementknotens 2 des Elements a mit der Verschiebung des Elementknotens 1 des Elements b garantiert ist. Dagegen ist die geometrische Randbedingung ($u_{III} = 0$) noch nicht berücksichtigt.

An den Systemknoten müssen die Element-Knotenkräfte (angetragen mit entgegengesetztem Richtungssinn zur Definition am Element) mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sein:

$$F_I = U_{1a} ; \quad F_{II} = U_{2a} + U_{1b} ; \quad F_{III} = U_{2b} .$$

Aus diesen Kraft-Gleichgewichtsbedingungen an den drei Knoten erhält man durch Einsetzen der oben angegebenen Element-Steifigkeitsbeziehungen (Element-Knotenkräfte U werden durch die Verschiebungen u ausgedrückt) die so genannten *System-Steifigkeitsbeziehungen*:

$$\begin{aligned} F_I &= \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_I - \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_{II} - \frac{1}{2} q_a l_a , \\ F_{II} &= - \left(\frac{EA}{l} \right)_a u_I + \left[\left(\frac{EA}{l} \right)_a + \left(\frac{EA}{l} \right)_b \right] u_{II} - \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{III} - \frac{1}{2} q_a l_a - \frac{1}{2} q_b l_b , \\ F_{III} &= - \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{II} + \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{III} - \frac{1}{2} q_b l_b . \end{aligned}$$



Alle Belastungen (Kräfte F_I , F_{II} und F_{III} und die reduzierten Elementlasten) werden zum *System-Kraftvektor* f , die drei Knotenverschiebungen u_I , u_{II} und u_{III} werden zum *System-Verschiebungsvektor* v zusammengefasst, der Zusammenhang zwischen diesen beiden Vektoren wird dann durch die *System-Steifigkeitsmatrix* K beschrieben:

$$f = \begin{bmatrix} F_I + \frac{1}{2}q_a l_a \\ F_{II} + \frac{1}{2}(q_a l_a + q_b l_b) \\ F_{III} + \frac{1}{2}q_b l_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b \\ 0 & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b & \left(\frac{EA}{l}\right)_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_{II} \\ u_{III} \end{bmatrix} = K v.$$

Die System-Steifigkeitsmatrix K ist (wie die Element-Steifigkeitsmatrizen) symmetrisch (bezüglich der Hauptdiagonalen). Sie ist im Allgemeinen nur spärlich mit von Null verschiedenen Elementen besetzt, hat häufig eine ausgeprägte Bandstruktur (nur in einem schmalen Band rechts und links von der Hauptdiagonalen sind von Null verschiedene Elemente zu finden), was sich bei diesem einfachen Beispiel durch die Nullen auf den Positionen k_{13} und k_{31} schon andeutet.

In den drei Gleichungen der System-Steifigkeitsbeziehung sind drei Größen unbekannt (die Verschiebungen u_I und u_{II} und die Lagerkraft F_{III}). Das Gleichungssystem kann nach diesen drei Größen aufgelöst werden. Um die für die Lösung großer linearer Gleichungssysteme extrem wichtige Symmetrie der Koeffizientenmatrix zu erhalten, wird folgende Strategie praktiziert:

- 1.) Die dritte Gleichung (mit der unbekannten Kraft F_{III}) wird aus dem Gleichungssystem herausgenommen, gleichzeitig wird die dritte Spalte der Koeffizientenmatrix K entfernt. Dies ist erlaubt, weil die Verschiebung u_{III} gleich Null ist (Einarbeitung der bisher unberücksichtigten *geometrischen Randbedingung*). Das verbleibende reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} F_I + \frac{1}{2}q_a l_a \\ F_{II} + \frac{1}{2}(q_a l_a + q_b l_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_{II} \end{bmatrix}$$

hat eine *reguläre* Koeffizientenmatrix (im Gegensatz zur *singulären* System-Steifigkeitsmatrix K) und kann nach den unbekannten Verschiebungen aufgelöst werden. Man erhält:

WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Matrizenrechnung (Grundlagen) auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) bietet u. a. folgende Themen:



- Lineare Transformation, Matrix, Vektor
- Der n -dimensionale Vektorraum
- Rechenregeln für Matrizen und Vektoren
- Inverse Transformation, reguläre und singuläre Matrizen, Ähnlichkeitstransformation
- Eigenwerte, Eigenvektoren, quadratische Formen
- Spezielle Matrizen (Diagonalmatrix, Einheitsmatrix, Dreiecksmatrix, symmetrische Matrix, dünn besetzte Matrix, Bandmatrix, Tridiagonalmatrix, Hessenbergmatrix, ...)
- Lineare Gleichungssysteme (siehe hierzu Hinweis auf Seite 73).



$$u_I = \left[\left(\frac{l}{EA} \right)_a + \left(\frac{l}{EA} \right)_b \right] (F_I + \frac{1}{2} q_a l_a) + \left(\frac{l}{EA} \right)_b [F_{II} + \frac{1}{2} (q_a l_a + q_b l_b)] \quad ; \\ u_{II} = \left(\frac{l}{EA} \right)_b (F_I + \frac{1}{2} q_a l_a) + \left(\frac{l}{EA} \right)_b [F_{II} + \frac{1}{2} (q_a l_a + q_b l_b)] \quad .$$

Es ist das erwartete Ergebnis (u_I ist die Summe der Längenänderungen beider Stababschnitte, u_{II} entspricht der Längenänderung des Elements b).

- 2.) Die zunächst aus der System-Steifigkeitsbeziehung herausgenommene dritte Gleichung wird nun bei bekannten Verschiebungen zur Berechnung der noch unbekannten Lagerkraft F_{III} verwendet. Mit dem berechneten Wert von u_{II} und $u_{III} = 0$ ergibt sich:

$$F_{III} + \frac{1}{2} q_b l_b = - \left(\frac{EA}{l} \right)_b u_{II} \quad \Rightarrow \quad F_{III} = -F_I - F_{II} - q_a l_a - q_b l_b \quad .$$

Die besondere Stärke der Finite-Elemente-Methode ist, dass alle an das Ergebnis zu stellenden Forderungen (Berücksichtigung von Materialeigenschaften und Geometrie, Gleichgewicht, Kompatibilität, Randbedingungen) durch formale Prozesse mit Matrizen erfüllt werden.

An dem einfachen Beispiel wurden alle wesentlichen Schritte des Finite-Elemente-Algorithmus sichtbar. Zusammenfassend soll noch einmal auf die Formalisierung des Ablaufs aufmerksam gemacht werden. Die physikalischen Zusammenhänge in der Struktur werden durch Einspeichern und Umspeichern der in Matrizen und Vektoren enthaltenen Informationen berücksichtigt:

- ⇒ Die Informationen über die *Materialeigenschaften* und die *Geometrie* (Abmessungen der Elemente) stecken in den Element-Steifigkeitsmatrizen. Diese werden für einen bestimmten Elementtyp (hier: Stab) nach einem einmal festzulegenden Algorithmus (hier: K_e wird durch Formel 15.4 definiert) aufgebaut.
- ⇒ Die *Kompatibilität* der Verschiebungen der einzelnen Elemente wird über die Knoten erreicht, indem die Verschiebungen der Elementknoten durch die Verschiebungen der System-Knoten ersetzt werden. Die Verschiebungen der Knoten 1 und 2 beider Elemente wurden zu den Knotenverschiebungen der Knoten I , II und III :

Element-Knoten	System-Knoten	Koinzidenzmatrix	
Element a : $(1, 2)$	→ $[I, II]$	→	$\begin{bmatrix} I & II \\ II & III \end{bmatrix}$
Element b : $(1, 2)$	→ $[II, III]$		

Die rechts mit römischen Zahlen dargestellte so genannte *Koinzidenzmatrix* beschreibt die *topologische Zusammensetzung* der Struktur aus den Elementen.

- ⇒ *Gleichgewicht* zwischen den inneren Kräften und den äußeren Belastungen wird durch das Einspeichern der Element-Steifigkeitsmatrizen in die System-Steifigkeitsmatrix und das Einspeichern der Vektoren der reduzierten Elementlasten und der Knotenkräfte in den System-Kraftvektor erzielt: In eine Null-Matrix wird zunächst die Element-Steifigkeitsmatrix des Elements a auf die Positionen gespeichert, die durch die Koinzidenzmatrix vorgegebenen

werden (betrifft hier die Zeilen bzw. Spalten *I* und *II*). Algorithmisch übereinstimmend mit dem Prozess für die nachfolgenden Elemente ist die Interpretation: Die Matrixelemente werden „zu den Null-Elementen addiert“.

Danach wird die Element-Steifigkeitsmatrix des Elements *b* eingefügt, indem alle Matrixelemente auf die wieder durch die Koinzidenzmatrix bestimmten Positionen (hier: Zeilen bzw. Spalten *II* und *III*) addiert werden. Für das behandelte Beispiel ist die System-Steifigkeitsmatrix damit komplett:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b \\ 0 & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b & \left(\frac{EA}{l}\right)_b \end{bmatrix}$$

Erzeugen der System-Steifigkeitsmatrix durch additives Einspeichern der Element-Steifigkeitsmatrizen

Entsprechend wird der System-Kraftvektor erzeugt:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}q_a l_a \\ \frac{1}{2}q_a l_a \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}q_a l_a \\ \frac{1}{2}q_a l_a + \frac{1}{2}q_b l_b \\ \frac{1}{2}q_b l_b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}q_a l_a + F_I \\ \frac{1}{2}(q_a l_a + q_b l_b) + F_{II} \\ \frac{1}{2}q_b l_b F_{III} \end{bmatrix}$$

Erzeugen des System-Kraftvektors erfordert einen Schritt mehr (Addieren der Knotenlasten)

- ⇒ Die *verhinderten Verschiebungen* (*geometrische Randbedingungen*) werden eingearbeitet, indem man die zu einer Nullverschiebung (im Beispiel: u_{III} am Knoten *III*) gehörenden Zeilen und Spalten der System-Steifigkeitsmatrix und die entsprechenden Positionen im System-Verschiebungsvektor und im System-Kraftvektor streicht:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b \\ 0 & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b & \left(\frac{EA}{l}\right)_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_{II} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I + \frac{1}{2}q_a l_a \\ F_{II} + \frac{1}{2}(q_a l_a + q_b l_b) \\ F_{III} + \frac{1}{2}q_b l_b \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I + \frac{1}{2}q_a l_a \\ F_{II} + \frac{1}{2}(q_a l_a + q_b l_b) \end{bmatrix}$$

Neben dem hohen Formalisierungsgrad des Finite-Elemente-Algorithmus, der der Programmierung außerordentlich entgegenkommt (Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen durch „Einspeichern“, Berücksichtigung der Lagerung durch „Zeilen-Spalten-Streichen“), ist die Möglichkeit der einfachen Variation der berechneten Struktur ein gewaltiger Vorteil:

- ⇒ Eine Änderung der Belastung (oder ein zusätzlicher Lastfall) beeinflusst die System-Steifigkeitsmatrix nicht. Wenn für die Lösung des Gleichungssystems ein geeignetes Eliminationsverfahren benutzt wird, braucht die Dreieckszerlegung der Koeffizientenmatrix (im Allgemeinen der aufwendigste Teil der Finite-Elemente-Berechnung überhaupt) in diesem Fall nicht neu ausgeführt zu werden.

- ⇒ Änderungen der Element-Abmessungen und der Materialeigenschaften können berücksichtigt werden, indem einzelne Elemente aus der System-Steifigkeitsmatrix wieder entfernt (Einspeichern „negativer“ Elemente) und neue Elemente hinzugefügt werden (Berechnung verschiedener Varianten einer Konstruktion).
- ⇒ Nach dem Aufbau der System-Steifigkeitsmatrix kann diese durch unterschiedliche Lagerung der Struktur unterschiedlich modifiziert werden (Berechnung verschiedener Lagerungsvarianten einer Konstruktion).
- ⇒ Die statisch unbestimmte Lagerung eines Systems macht die Berechnung weder komplizierter noch aufwendiger, im Gegenteil: Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass sich die Anzahl der Gleichungen im linearen Gleichungssystem sogar verringert.

Beispiel 2:

Der nebenstehend skizzierte Stab hat die gleichen Abmessungen und Materialeigenschaften wie im Beispiel 1. Er trägt jedoch nur eine äußere Kraft F_{II} und ist an den Punkten I und III (statisch unbestimmt) gelagert (auch das Eigengewicht soll unberücksichtigt bleiben, würde jedoch die Aufgabe nicht nennenswert komplizierter machen).

Die für das Beispiel 1 aufgebaute System-Steifigkeitsbeziehung kann wieder verwendet werden, weil sich die Abmessungen und Materialeigenschaften nicht geändert haben. Die beiden geometrischen Randbedingungen

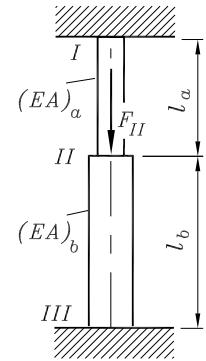
$$u_I = 0 \quad \text{und} \quad u_{III} = 0$$

werden durch Streichen der ersten und dritten Zeile (Spalte) realisiert, und das Gleichungssystem degeneriert zu einer einzigen Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)_a & -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)_a & \left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b \\ 0 & -\left(\frac{EA}{l}\right)_b & \left(\frac{EA}{l}\right)_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{II} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ F_{II} \\ F_{III} \end{bmatrix}$$

↓

$$\left[\left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b \right] [u_{II}] = [F_{II}].$$



Die Lösung liefert die Verschiebung des Punktes II:

$$u_{II} = \frac{F_{II}}{\left(\frac{EA}{l}\right)_a + \left(\frac{EA}{l}\right)_b} .$$

Mit diesem Ergebnis ergeben sich die Kräfte bei I und III (Lagerreaktionen) auch hier aus den (zunächst gestrichenen) Gleichungen 1 und 3 der System-Steifigkeitsbeziehung:

$$F_I = -\frac{F_{II}}{1 + \left(\frac{l}{EA}\right)_a \left(\frac{EA}{l}\right)_b} ; \quad F_{III} = -\frac{F_{II}}{1 + \left(\frac{l}{EA}\right)_b \left(\frac{EA}{l}\right)_a} .$$

15.3 Ebene Fachwerk-Elemente

Ebene Fachwerke (vgl. Abschnitt 6.4) bestehen aus Stäben, die wie die im vorigen Abschnitt behandelten Elemente nur eine Kraft in Stablängsrichtung übertragen. Der einzelne Fachwerkstab verformt sich auch nur durch seine Stabkraft, die eine Dehnung (und dadurch Längenänderung) des Stabes hervorruft. Die Längenänderungen aller Stäbe, die dabei selbstverständlich ihre ursprünglich gerade Form beibehalten, führen zu Knotenverschiebungen, die durch zwei Komponenten beschrieben werden müssen.

An den Knoten, an denen in der Regel mehr als zwei Stäbe zusammenstoßen, wirken natürlich nicht nur Kräfte in Stablängsrichtung (wie in den Stäben).

Deshalb wird als allgemeines (ebenes) Fachwerk-Element ein Stab definiert, der eine beliebige Lage in der Ebene einnimmt, zur x -Achse um den Winkel α gedreht ist und an jedem Knoten zwei Knotenkräfte U_{ix} und U_{iy} ($i = 1, 2$) übertragen kann (Abbildung 15.3). Die beiden Kraftkomponenten sind natürlich nicht unabhängig voneinander, weil ihre Resultierende U_i in die Stablängsrichtung fallen muss. Es gilt:

$$U_{ix} = U_i \cos \alpha \quad , \quad U_{iy} = U_i \sin \alpha \quad .$$

Von den beiden Knotenverschiebungen u_{ix} und u_{iy} ($i = 1, 2$) sind jeweils nur die in Stablängsrichtung fallenden Komponenten für die Längenänderung des Stabes verantwortlich. Die Knotenverschiebung in Stablängsrichtung u_i wird aus der Abbildung 15.3 abgelesen:

$$u_i = u_{ix} \cos \alpha + u_{iy} \sin \alpha \quad .$$

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen in Stablängsrichtung u_1 und u_2 und den in gleicher Richtung wirkenden Kräften U_1 und U_2 wurde bereits im vorigen Abschnitt mit der ersten der beiden Beziehungen 15.3 gefunden, wobei verteilte Belastungen (Eigengewicht) entsprechend der für Fachwerke üblichen Annahme im Folgenden vernachlässigt werden. Aus

$$U_1 = \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_1 - \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_2$$

wird durch Ersetzen der Verschiebungen u_1 und u_2 durch die Verschiebungskomponenten:

$$U_1 = \left(\frac{EA}{l} \right)_e [\cos \alpha \cdot u_{1x} + \sin \alpha \cdot u_{1y} - \cos \alpha \cdot u_{2x} - \sin \alpha \cdot u_{2y}] \quad .$$

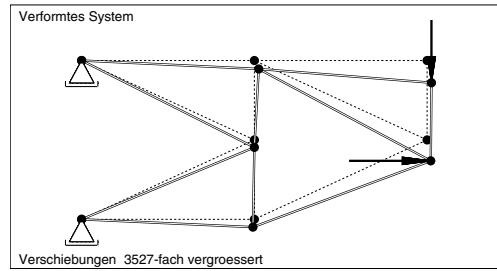


Abbildung 15.2: Verformungsbild eines Fachwerks

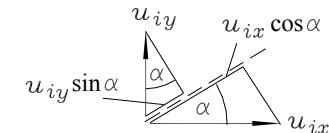
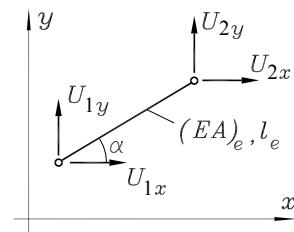


Abbildung 15.3: Ebenes Fachwerk-Element

Multiplikation dieser Gleichung mit $\cos \alpha$ liefert die Knotenkraftkomponente U_{1x} :

$$U_{1x} = U_1 \cos \alpha = \left(\frac{EA}{l} \right)_e [\cos^2 \alpha \cdot u_{1x} + \sin \alpha \cos \alpha \cdot u_{1y} - \cos^2 \alpha \cdot u_{2x} - \sin \alpha \cos \alpha \cdot u_{2y}] .$$

Entsprechend erhält man durch Multiplikation mit $\sin \alpha$ die Knotenkraftkomponente U_{1y} . Da

$$U_{2x} = -U_{1x} \quad \text{und} \quad U_{2y} = -U_{1y}$$

(Gleichgewicht am Element) gelten muss, sind alle Beziehungen bekannt, die die vier Element-Knotenkräfte mit den vier Element-Knotenverschiebungen verknüpfen. Sie bilden die

Element-Steifigkeitsbeziehung für das ebene Fachwerk-Element:

$$\begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{l} \right)_e \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ s^2 & -sc & -s^2 & sc \\ c^2 & sc & s^2 & -sc \\ \text{symm.} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} \quad (15.5)$$

mit $c = \cos \alpha$ und $s = \sin \alpha$.

- ⇒ Mit dem Bereitstellen der Element-Steifigkeitsmatrix 15.5 ist die theoretische Vorbereitung für die Fachwerk-Berechnung nach der Finite-Elemente-Methode geleistet. Der gesamte Algorithmus für die Behandlung von Systemen (hier: Fachwerke) ist mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Ablauf identisch, allerdings mit einer kleinen Erweiterung:

Da einem Elementknoten eines Fachwerk-Elements zwei Verschiebungen und zwei Kräfte zuzuordnen sind (der Knoten hat zwei *Freiheitsgrade*), beziehen sich die Speicheroperationen nicht mehr auf ein Matrixelement, sondern auf eine 2×2 -Untermatrix. Man unterteilt (**Abbildung 15.4**) die Element-Steifigkeitsmatrix in vier Untermatrizen und führt den im vorigen Abschnitt beschriebenen Algorithmus mit diesen Untermatrizen aus.

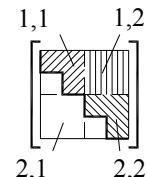
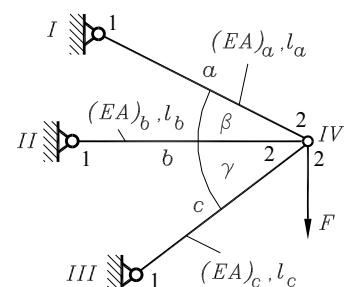


Abbildung 15.4: Einteilung der Element-Steifigkeitsmatrix in Blöcke, wegen der Symmetrie Beschränkung auf das rechte obere Dreieck

Beispiel:

Für den nebenstehend skizzierten Stabdreischlag ist der Finite-Elemente-Algorithmus für die Berechnung der Verschiebung des Kraft-Angriffspunkts und die Ermittlung der Stabkräfte anzugeben. Gegeben sind alle in der Skizze eingezeichneten Größen (Dehnsteifigkeiten und Längen der Stäbe, Kraft F und die Winkel β und γ).



Die Stäbe werden als finite Elemente a, b, c aufgefasst, und die Elementknoten 1 und 2 eines jeden Elements werden den Systemknoten I, II, III und IV zugeordnet. Für jedes Element kann bei bekanntem Lagewinkel, gegebener Dehnsteifigkeit und Länge die Element-Steifigkeitsmatrix nach 15.5 aufgeschrieben werden. Dabei ist zu beachten, dass der Winkel α in 15.5 von einer Parallelen zur x -Achse durch den Elementknoten 1 zum Element gemessen wird, so dass für die drei Elemente die folgenden Winkel einzusetzen sind:

$$\alpha_a = -\beta, \quad \alpha_b = 0, \quad \alpha_c = \gamma.$$

Die System-Steifigkeitsmatrix verknüpft acht äußere Knotenkräfte (sechs unbekannte Lagerreaktionen an den Festlagern und die äußeren Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung am Knoten IV) mit den acht Verschiebungen an den Knoten I, II, III und IV . Es ist also eine 8×8 -Matrix, die wie die Element-Steifigkeitsmatrizen in 2×2 -Untermatrizen unterteilt wird (Abbildung 15.5).

Die System-Steifigkeitsmatrix wird aus den Element-Steifigkeitsmatrizen nach dem bekannten Einspeicherungs-Algorithmus (Abschnitt 15.2) aufgebaut. Auf welche Positionen die 2×2 -Untermatrizen zu speichern sind, wird durch die gewählte Zuordnung der Elementknoten zu den Systemknoten gesteuert. Entsprechend der Nummerierung in der Skizze zur Aufgabenstellung gilt dafür nachfolgende Koinzidenzmatrix:

	Element-Knoten	System-Knoten	Koinzidenzmatrix
Element a :	(1, 2)	$\rightarrow [I, IV]$	
Element b :	(1, 2)	$\rightarrow [II, IV]$	\rightarrow
Element c :	(1, 2)	$\rightarrow [III, IV]$	$\begin{bmatrix} I & IV \\ II & IV \\ III & IV \end{bmatrix}$

Dies bedeutet zum Beispiel, dass die Untermatrizen (1,1), (1,2) und (2,2) der Element-Steifigkeitsmatrix des Elements a (siehe Skizze zur Aufgabenstellung) auf die Positionen (I, I), (I, IV) und (IV, IV) der System-Steifigkeitsmatrix gelangen (nebenstehende Skizze). Nach Aufaddieren auch der Untermatrizen der Elemente b und c ist die System-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} komplett. Sie definiert den Zusammenhang des System-Verschiebungsvektors \mathbf{v} mit dem System-Kraftvektor \mathbf{f} :

$$\mathbf{Kv} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & \\ & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} & & \\ & & & & k_{77} & k_{78} & & u_{IVx} \\ & & & & & k_{88} & & u_{IVy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix} = \mathbf{f}. \quad (15.6)$$

symm.

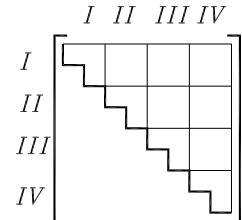
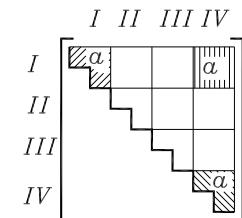


Abbildung 15.5: Auch die System-Steifigkeitsmatrix wird in Blöcke unterteilt. Die gesamte erforderliche Information steckt im rechten oberen Dreieck der Matrix.



Zur Erinnerung: Der Einspeicherungs-Algorithmus steht für die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen, wenn in den System-Kraftvektor die äußeren Kräfte mit dem gleichen Richtungssinn eingefügt werden, der auch für die Elementkräfte gewählt wurde (nach rechts bzw. nach oben). Deshalb wurde die vertikale Kraftkomponente am Knoten IV mit negativem Vorzeichen in f eingesetzt.

Die ersten 6 Gleichungen (mit den 6 unbekannten Lagerreaktionen) werden zunächst aus dem Gleichungssystem herausgenommen. Gleichzeitig werden die ersten 6 Spalten in \mathbf{K} gestrichen, die bei der Multiplikation $\mathbf{K}\mathbf{v}$ wegen der Nullen auf den ersten 6 Positionen in \mathbf{v} (verhinderte Verschiebungen an den Lagern) ohnehin keinen Beitrag leisten würden (Einarbeiten der geometrischen Randbedingungen durch „Zeilen-Spalten-Streichen“). Es verbleibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} k_{77} & k_{78} \\ k_{78} & k_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{IVx} \\ u_{IVy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix}$$

mit $k_{77} = \left(\frac{EA}{l}\right)_a \cos^2 \beta + \left(\frac{EA}{l}\right)_b + \left(\frac{EA}{l}\right)_c \cos^2 \gamma,$

$$k_{78} = -\left(\frac{EA}{l}\right)_a \sin \beta \cos \beta + \left(\frac{EA}{l}\right)_c \sin \gamma \cos \gamma, \quad (15.7)$$

$$k_{88} = \left(\frac{EA}{l}\right)_a \sin^2 \beta + \left(\frac{EA}{l}\right)_c \sin^2 \gamma,$$

aus dem die beiden Verschiebungskomponenten des Knotens IV berechnet werden können. Anschließend lassen sich die 6 Lagerreaktionen bei I, II und III aus den zunächst gestrichenen Gleichungen ermitteln (einzelne, die Lösung eines weiteren Gleichungssystems ist nicht erforderlich), z. B.:

$$F_{Ix} = k_{17}u_{IVx} + k_{18}u_{IVy} .$$

Die Stabkräfte ergeben sich bei nunmehr bekannten Knotenverschiebungen aus den Element-Steifigkeitsbeziehungen 15.5, die ohnehin für den Aufbau der System-Steifigkeitsmatrix bereitgestellt werden mussten. Bei Fachwerken genügt natürlich die Berechnung der Stabkraftkomponenten eines Knotens.

- ⇒ Die Berechnung der Knotenverschiebung für das behandelte Beispiel wäre ohne den Finite-Elemente-Algorithmus (Formulieren der Kompatibilitätsbedingung aus der „Anschauung“) schwierig und fehleranfällig. Ohne eine Verschiebungsberechnung sind natürlich auch die Stabkräfte nicht zu ermitteln (statisch unbestimmtes System).
- ⇒ Statische Unbestimmtheit erschwert die Finite-Elemente-Rechnung nicht, im Gegenteil: Je mehr Verschiebungen verhindert sind, desto stärker reduziert sich das Gleichungssystem für die Verschiebungsberechnung.
- ⇒ Die einmal durch die Wahl des Koordinatensystems definierten positiven Richtungen gelten global: Die vorgegebenen Kräfte und die berechneten Knotenverschiebungen und Knotenkräfte sind positiv, wenn ihr Richtungssinn mit den gewählten Koordinatenrichtungen übereinstimmt.

15.4 Temperaturdehnung, Anfangsdehnung

Zunächst wird wieder das einfache Stabelement betrachtet, das nur mit gleichgerichteten (fluchtenden) weiteren Elementen zusammengesetzt wird. Es soll neben der Knotenbelastung und der verteilten Belastung q_e noch einer Temperaturänderung ΔT_e und einer Anfangsdehnung ε_{0e} unterworfen sein (**Abbildung 15.6**).

Das Element-Gleichgewicht ist auch hier (Gleichung 15.1) durch

$$U_1 + U_2 + q_e l_e = 0$$

zu erfüllen, für die Gesamtdehnung gilt nun aber 14.9, so dass die Längenänderung des Elements durch

$$u_2 - u_1 = \varepsilon_{ges} l_e = \frac{U_2 l_e}{(EA)_e} + \frac{q_e l_e^2}{2(EA)_e} + (\alpha_t \Delta T)_e + (\varepsilon_0 l)_e$$

beschrieben wird (die ersten beiden Summanden wurden aus Gleichung 15.2 übernommen). Aus diesen beiden Gleichungen werden die Knotenkräfte berechnet:

$$U_2 = \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_2 - \left(\frac{EA}{l} \right)_e u_1 - \frac{1}{2} q_e l_e - (EA)_e (\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e ; \quad U_1 = -U_2 - q_e l_e .$$

Diese beiden Gleichungen werden zur *erweiterten Element-Steifigkeitsbeziehung des fluchtenden Stabes* zusammengefasst:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{l} \right)_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} q_e l_e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (EA)_e (\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (15.8)$$

Die Element-Steifigkeitsmatrix und der Vektor der reduzierten Elementlasten infolge der verteilten Belastung q_e sind erwartungsgemäß identisch mit denen in Formel 15.4, und Temperaturdehnung und Anfangsdehnung ergeben genauso einen Vektor wie die verteilte Belastung q_e . Es ist deshalb naheliegend, alle drei „Elementlasten“ zu einem *erweiterten Vektor der reduzierten Elementlasten* zusammenzufassen:

$$\mathbf{f}_{e,red} = \begin{bmatrix} F_{red,1} \\ F_{red,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} q_e l_e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (EA)_e (\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (15.9)$$

Der Finite-Elemente-Algorithmus, wie er in den Abschnitten 15.2 und 15.3 demonstriert wurde, kann also unverändert bleiben, bei der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten müssen nur für die Element-Knotenkräfte die durch 15.8 gegebenen erweiterten Ausdrücke verwendet werden. Der Algorithmus bleibt so formal, wie er beschrieben wurde, und mit Einzelkräften (greifen an den Knoten an), Temperatur- und Anfangsdehnungen sowie verteilten Lasten (Eigengewicht, Fliehkräfte, ...) wurden am einfachen Beispiel alle praktisch relevanten Belastungen berücksichtigt. Folgende Strategie wird empfohlen:

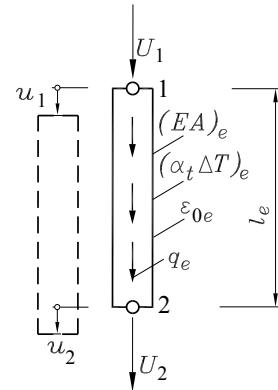


Abbildung 15.6: Element mit drei „Elementlasten“: Anfangsdehnung, Temperatur und Eigengewicht

Verteilte Elementlasten, Temperatur- und Anfangsdehnungen

der einzelnen Elemente werden nach 15.8 berechnet. Die beiden Komponenten dieses Vektors der reduzierten Elementlasten werden danach den äußeren Einzellasten, die an den Knoten angreifen, zu denen das Element Kontakt hat, zugeschlagen. Diese Knotenlasten bilden den System-Kraftvektor.

Das Erzeugen der System-Steifigkeitsmatrix (durch den in den Abschnitten 15.2 und 15.3 demonstrierten Einspeicherungsprozess) wird von den am System und an den Elementen angreifenden Belastungen überhaupt nicht beeinflusst.

Die nebenstehende Skizze verdeutlicht diese Strategie für das Element e , das mit den übrigen Elementen über die Knoten i und $i+1$ verbunden ist.

Die Zusatzknotenkräfte $(F_{red,1})_e$ und $(F_{red,2})_e$, die die Wirkung von verteilter Belastung, Temperatur- und Anfangsdehnung ersetzen, werden nach 15.9 berechnet.

Auch die anderen an den Knoten i und $i+1$ angeschlossenen Elemente können entsprechende Anteile zu den Knotenlasten liefern. Schließlich gibt es nur noch lastfreie Elemente und Lasten tragende Knoten.

Diese Regel gilt allgemein. Für das im Abschnitt 15.3 behandelte allgemeine Fachwerk-Element, dessen Element-Steifigkeitsmatrix durch Gleichung 15.5 gegeben ist, findet man die entsprechenden Formeln, indem die durch 15.9 gegebenen Kräfte (wie im Abschnitt 15.3 die Element-Knotenkräfte) in zwei Komponenten zerlegt werden. Verteilte Lasten q_e werden (wie für Fachwerke üblich) weggelassen, und man erhält den

Vektor der reduzierten Elementlasten infolge Temperatur- und Anfangsdehnungen für das ebene Fachwerk-Element:

$$\mathbf{f}_{e,red} = \begin{bmatrix} F_{red,1x} \\ F_{red,1y} \\ F_{red,2x} \\ F_{red,2y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} q_e l_e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (EA)_e (\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (15.10)$$

In dieser Formel ist α wieder der Winkel, der von einer Parallelen zur x -Achse durch den Knoten 1 und dem Fachwerk-Stab eingeschlossen wird (vgl. Abschnitt 15.3).

Bei der Berechnung der Stabkräfte (aus den Verschiebungen über die Element-Knotenkräfte) müssen natürlich die erweiterten Element-Steifigkeitsbeziehungen genutzt werden. Für die fluch-

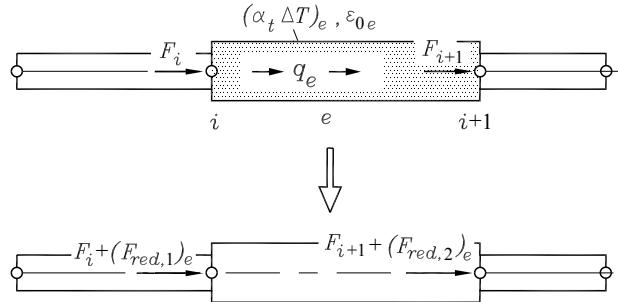


Abbildung 15.7: Befreiung des Elements von allen Belastungen

tenden Stabelemente ist das die Gleichung 15.8, die aus der einfachen Element-Steifigkeitsbeziehung 15.4 durch Subtraktion der Zusatzknotenkräfte 15.9 entstand.

Entsprechend ergeben sich die *Element-Knotenkräfte aus der erweiterten Element-Steifigkeitsbeziehung für Fachwerk-Elemente*:

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ & s^2 & -sc & -s^2 \\ & & c^2 & sc \\ & & & s^2 \end{bmatrix}_{\text{symm.}} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{red,1x} \\ F_{red,1y} \\ F_{red,2x} \\ F_{red,2y} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e \mathbf{v}_e - \mathbf{f}_{e,red} \quad (15.11)$$

mit $c = \cos \alpha$ und $s = \sin \alpha$ und $\mathbf{f}_{e,red}$ nach 15.10.

Beispiel:

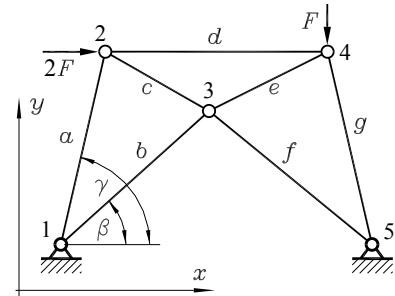
Das skizzierte (statisch unbestimmte) Fachwerk ist an den Knoten 2 und 4 durch äußere Kräfte belastet. Stab *b* wurde unter Zwang eingebaut, weil er um Δb zu lang war. Nach dem Einbau wird Stab *a* um ΔT_a erwärmt.

Gegeben sind die Dehnsteifigkeiten $(EA)_i$ und Längen l_i für alle Stäbe, der Temperaturausdehnungskoeffizient α_t des Stabs *a* und die Werte für Δb , ΔT_a , β , γ und F . Es ist der System-Kraftvektor \mathbf{f} für die System-Steifigkeitsbeziehung $\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f}$ anzugeben.

An den Knoten 1 und 5 werden die (unbekannten) Lagerreaktionen F_{1x} , F_{1y} , F_{5x} , F_{5y} eingetragen, an den Knoten 2 und 4 die beiden gegebenen Einzelkräfte.

An den Knoten 1 und 2 werden außerdem die Zusatzknotenkräfte infolge Temperaturdehnung des Stabs *a* und an den Knoten 1 und 3 die Zusatzknotenkräfte infolge Anfangsdehnung des Stabs *b* eingefügt.

Die Zusatzknotenkräfte am Knoten 1 wirken sich auf die Verschiebungsrechnung nicht aus, weil diese Zeilen (verhinderte Verschiebungen) gestrichen werden, für die Berechnung von F_{1x} und F_{1y} sind sie zu berücksichtigen.



$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_{1x} - (EA)_a \alpha_t \Delta T_a \cos \gamma - (EA)_b \frac{\Delta b}{l_b} \cos \beta \\ F_{1y} - (EA)_a \alpha_t \Delta T_a \sin \gamma - (EA)_b \frac{\Delta b}{l_b} \sin \beta \\ 2F + (EA)_a \alpha_t \Delta T_a \cos \gamma \\ (EA)_a \alpha_t \Delta T_a \sin \gamma \\ (EA)_b \frac{\Delta b}{l_b} \cos \beta \\ (EA)_b \frac{\Delta b}{l_b} \sin \beta \\ 0 \\ -F \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix}$$

15.5 Physikalische und mathematische Modelle, Nutzung von FEM-Programmen

Die Technische Mechanik beschäftigt sich ausschließlich mit *physikalischen Modellen*. Die Eigenschaften der real existierenden Bauteile werden zum Teil - wenn für die Untersuchungen irrelevant - ignoriert (z. B. ihre Farbe) und zu einem großen Teil idealisiert. So betrachtet man in der Statik z. B. „starre Körper auf idealisierten Lagern unter diskreter Belastung“. Alle Beispiele und Aufgaben (auch in diesem Buch) sind in diesem Sinne physikalische Modelle. Sie sind gekennzeichnet durch ihre Geometrie, ihre Topologie (welches Bauteil hat mit welchem anderen Kontakt), die vorgegebene Belastung und Lagerung und ihre Materialeigenschaften. In der Regel werden diese Modelle (wie die Aufgaben und Beispiele in diesem Buch) durch eine Skizze mit begleitendem Text beschrieben.

Die Aufgabe der Technischen Mechanik besteht darin, aus einem physikalischen Modell ein *mathematisches Modell* zu erzeugen und daraus Lösungen zu gewinnen. Die mathematischen Modelle können z. B. Gleichungen, Gleichungssysteme, Formeln, Integrale oder Differenzialgleichungen sein.

Weil die Empfehlungen für den Umgang mit dem physikalischen bzw. mathematischen Modell bei Finite-Elemente-Rechnungen etwas anders ausfallen als bei den bisher behandelten Problemen, soll hier die Unterscheidung am Beispiel von Systemen, die sich aus elastischen Stäben zusammensetzen (behandelt in den Abschnitten 15.1 bis 15.4), noch einmal verdeutlicht werden. Das *physikalische Modell Fachwerk* wird mit folgenden Informationen definiert:

- Die *Geometrie* des Systems wird durch die Koordinaten sämtlicher Knoten, bezogen auf ein beliebiges Koordinatensystem, beschrieben.
- Die *Topologie* des Systems wird durch eine Koinzidenzmatrix festgelegt, die die Zuordnung der Knoten aller Elemente zu den Systemknoten enthält. Im Zusammenhang mit der Geometrieeinformation sind damit auch wesentliche Element-Abmessungen bekannt.
- In einer Matrix der *Element-Informationen* werden elementbezogene Parameter (Materialeigenschaften, Querschnitte, Elementbelastungen wie Temperatur- und Anfangsdehnungen) zusammengestellt.
- Informationen über die *äußeren Knotenlasten* beschreiben, welche Knoten durch welche Kräfte belastet sind.
- Informationen über die *geometrischen Randbedingungen* legen fest, an welchen Knoten welche Verschiebungen durch Lager verhindert werden.

Aus diesen Informationen wird das *mathematische Modell* erzeugt:

- Die Abmessungen und Materialeigenschaften eines Elements (hier: Fachwerkstab), die Anzahl der Elementknoten (hier: 2), die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten (ebenfalls 2) und der Zusammenhang zwischen Kräften und Verformungen auf der Basis einer bestimmten Theorie (hier: Dehnung linear-elastischer Stäbe mit kleinen Verformungen, Theorie 1. Ordnung) werden durch die *Element-Stifigkeitsbeziehung* repräsentiert (z. B. 15.5 und 15.11).

- Ein spezieller Algorithmus ermöglicht die Reduktion von Element-Belastungen (im Abschnitt 15.4: Temperatur- und Anfangsdehnung) auf äußere Knotenlasten. Diese werden mit den diskreten Lasten an den Knoten zum *System-Belastungsvektor* zusammengefasst.
- Nach einer sehr einfachen und eleganten Vorschrift werden die Element-Steifigkeitsmatrizen zur *System-Steifigkeitsmatrix* zusammengebaut.
- Die (allerdings noch singuläre) System-Steifigkeitsmatrix und der System-Belastungsvektor definieren die *System-Steifigkeitsbeziehung*.
- Das Einarbeiten der geometrischen Randbedingungen (verhinderte Verschiebungen, hier bisher realisiert durch das „Zeilen-Spalten-Streichen“) führt schließlich auf ein *lineares Gleichungssystem* mit regulärer Koeffizientenmatrix, dessen Lösung die unbekannten Verschiebungen liefert.

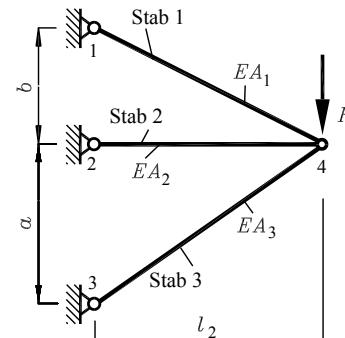
Das mathematische Modell für das physikalische Finite-Elemente-Modell ist bei Problemen der Elastostatik letztendlich ein (in der Regel sehr großes) lineares Gleichungssystem, dessen Lösung dem Computer überantwortet werden sollte. Weil aber auch das Erzeugen des Gleichungssystems im Allgemeinen sehr aufwendig ist, gilt folgende Empfehlung:

Bis auf wenige Ausnahmen sollte bei der Finite-Elemente-Rechnung schon das Erzeugen des mathematischen Modells (und natürlich danach auch dessen Lösung) von einem Computerprogramm übernommen werden.

An einem ganz kleinen Beispiel, für das man von dieser Regel durchaus noch abweichen kann, sollen die Unterschiede im Umgang mit den beiden Modellen demonstriert werden.

Beispiel: Das skizzierte System ist durch eine Kraft F belastet. Der Stab 2 soll um die Temperaturdifferenz ΔT erwärmt werden. Die Verschiebungen des Kraftangriffspunktes sind zu berechnen.

$$\begin{aligned} \text{Gegeben: } EA_1 &= 5 \cdot 10^6 \text{ N} & ; & \quad a = 320 \text{ mm} & ; \\ EA_2 &= 8 \cdot 10^6 \text{ N} & ; & \quad b = 240 \text{ mm} & ; \\ EA_3 &= 2 \cdot 10^6 \text{ N} & ; & \quad l_2 = 450 \text{ mm} & ; \\ \alpha_t &= 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} & ; & \quad \Delta T = 200 \text{ K} & ; \\ F &= 3000 \text{ N} & . & & \end{aligned}$$



Die Aufgabe hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Beispiel 3 im Abschnitt 14.3 auf Seite 191. Wegen der fehlenden Symmetrie ist das Beispiel hier jedoch für die analytische Lösung ungeeignet. Aus der Sicht der Finite-Elemente-Methode ist es jedoch mit dem Beispiel aus dem Abschnitt 15.3 (Seite 204) weitgehend identisch, weil nur die Belastung erweitert wurde.

Erzeugen und Lösen des mathematischen Modells

Das Erzeugen der 8*8-System-Steifigkeitsmatrix 15.6 braucht hier nicht noch einmal erklärt zu werden, ebenso wenig die Formeln für die verbleibenden Matrixelemente 15.7 nach der Einarbeitung der verhinderten Verschiebungen. Im System-Kraftvektor muss auf der Position für die

Horizontalkomponente der Kraft am Knoten 4 der Anteil ergänzt werden, der aus der Erwärmung des Stabes 2 resultiert. Entsprechend Formel 15.10 ergibt sich:

$$F_{4,x} = EA_2 \alpha_t \Delta T = 19200 \text{ N}$$

Damit erhält man das mathematische Modell für die Berechnung der Verschiebungskomponenten des freien Knotens auf der Basis der Formeln 15.7 mit den hier gegebenen Zahlenwerten:

$$\begin{bmatrix} 2,7816 \cdot 10^4 & -0,2360 \cdot 10^4 \\ -0,2360 \cdot 10^4 & 0,3388 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{4x} \\ u_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19200 \\ -3000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{4x} \\ u_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6538 \\ -0,4301 \end{bmatrix}.$$

Weil alle Zahlenwerte in N bzw. mm eingesetzt wurden, ergeben sich die Verschiebungen in mm. Unabhängig davon, ob man die Lösung des Gleichungssystems oder auch bereits den Aufbau des Gleichungssystems nach den Formeln 15.7 einem Mathematik-Programm überträgt, kann dieser Weg nicht empfohlen werden (und verbietet sich für kompliziertere Probleme von selbst).

Beschreibung des physikalischen Modells

Das physikalische Modell muss mit 3 „Knoten-Informationen“ beschrieben werden: Knoten-Koordinaten, hier bezogen auf ein Koordinatensystem mit Ursprung im mittleren Lager, Knoten-Lasten und die Information, welche Knotenverschiebungen verhindert sind. Zusätzlich werden 2 „Element-Informationen“ benötigt: Topologie (an welchen Knoten ist ein Element angeschlossen) und Element-Parameter (hier: Dehnsteifigkeit EA und Temperaturbelastung $\alpha_t \Delta T$). Die nebenstehenden Tabellen zeigen das schon in 5 Matrizen geordnete physikalische Modell.

Knoten-Informationen						
	Kn.-Koord.		Kn.-Lasten		u-verh.	
Kn.	x	y	F_x	F_y	u_x	u_y
1	0	240	0	0	1	1
2	0	0	0	0	1	1
3	0	-320	0	0	1	1
4	450	0	0	-3000	0	0

Element-Informationen				
	Topologie		Parameter	
El.	Kn.	Kn.	EA	$\alpha_t \Delta T$
1	1	4	$5 \cdot 10^6$	0
2	2	4	$8 \cdot 10^6$	$240 \cdot 10^{-5}$
3	3	4	$2 \cdot 10^6$	0

Natürlich ist es wesentlich komfortabler, einem Programm diese Informationen zu übergeben. Dafür wird dann allerdings ein Modul benötigt, der aus dem physikalischen Modell das mathematische Modell erzeugen kann.

Das nebenstehend zu sehende Matlab-Script benutzt dafür die Funktion femalg_m, die über www.TM-aktuell.de zum Download verfügbar ist. Man erkennt in dem Script die 5 Matrizen aus den beiden Tabellen.

```

XY = [0 240 ; 0 0 ; 0 -320 ; 450 0 ] ; % Kn.-Koord.
FK = [0 0 ; 0 0 ; 0 0 ; 0 -3000] ; % Kn.-Lasten
Lg = [1 1 ; 1 1 ; 1 1 ; 0 0 ] ; % u-verhindert
%
KM = [ 1 4 ; 2 4 ; 3 4 ] ; % Topologie
EP = [5e6 0 ; 8e6 1.2e-5*200 ; 2e6 0] ; % El.-Parameter
%
[succ uv] = femalg_m (XY,KM,EP,Lg,FK) % FEM-Algorithmus

```

Die Funktion `femalg_m` liefert natürlich exakt die bereits angegebene Lösung. Diese Art der Lösung bietet sich für Probleme an, bei denen das physikalische Modell durch einfach zu erzeugende Daten beschrieben werden kann, bei großen Fachwerken z. B., wenn immer wiederkehrende Felder mit gleichen Abmessungen aneinandergereiht sind, so dass Koordinaten, Topologie und Steifigkeiten in einer einfachen Programmschleife erzeugt werden können.



WYSIWYG-Erzeugen des physikalischen Modells

Die komfortabelste Variante, das physikalische Modell zu definieren, bieten Programme, die mit interaktiver Grafik schrittweise ein Bild entstehen lassen (WYSIWYG - „What you see is what you get“) und daraus das mathematische Modell selbst erzeugen (und es natürlich auch lösen). Das unten zu sehende Modell wurde erzeugt mit Mausklicks in das rechte Menü und Verschieben des jeweils ausgewählten Elements (Stab, Lager, Knoten, Kraft) entlang eines Rasters auf der Zeichenfläche bis zum gewünschten Ort (im Bild ist gerade das dritte Lager auf seinem Weg zum unteren Knoten, wo es dann mit Mausklick fixiert wird).

FEM-Programme mit grafischer Oberfläche liefern natürlich auch die Ergebnisse in aussagekräftigen Grafiken ab. Weil solche Programme für den Ingenieur das Standard-Werkzeug auch für die Lösung komplizierter Probleme sind, sollte man sich an solchen einfachen Aufgaben mit ihrer Benutzung schon anfreunden.

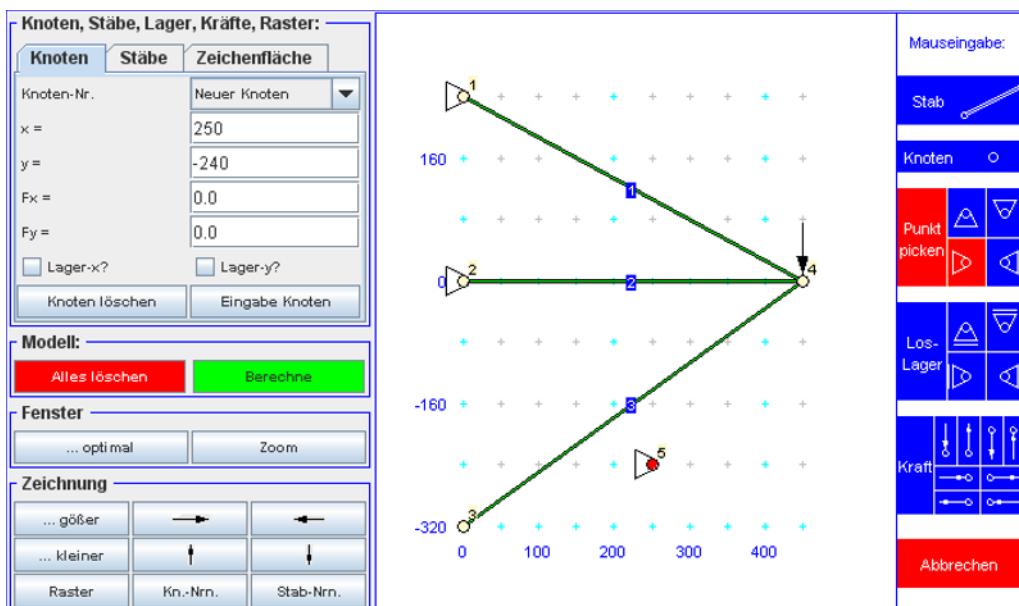


Abbildung 15.8: Interaktive Berechnung eines Fachwerks mit der Methode der finiten Elemente, zu finden (mit mehreren - auch wesentlich komplizierteren - Beispielen) unter www.TM-interaktiv.de

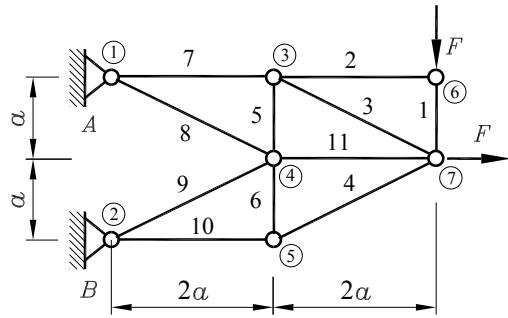
15.6 Aufgaben

Aufgabe 15.1:

Die Elementsteifigkeitsmatrizen für die Stäbe 6, 7 und 9 des nebenstehend skizzierten Fachwerks sind aufzustellen und ihr Einspeichern in die System-Steifigkeitsmatrix symbolisch anzudeuten, indem die Plätze der einzelnen Untermatrizen in der System-Steifigkeitsmatrix gekennzeichnet werden.

Man untersuche, welche Plätze in der System-Steifigkeitsmatrix auch dann nicht besetzt sind, wenn alle Elemente eingespeichert werden.

Gegeben: F , a , EA (für alle Stäbe gleich groß).

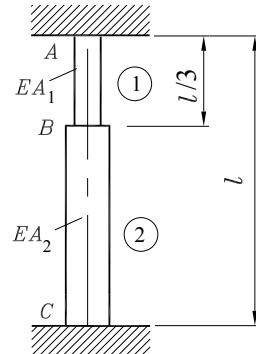


Aufgabe 15.2:

Der skizzierte Stab wurde bei 0°C zwischen den starren Lagern A und C montiert. Man ermitte

- die System-Steifigkeitsbeziehung unter Berücksichtigung einer Temperaturerhöhung um $\Delta T = +40^\circ\text{C}$,
- die Verschiebung des Punktes B durch die Temperaturerhöhung um ΔT ,
- die Kraft am oberen Lager.

Gegeben: $A_1 = 16\text{cm}^2$; $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$;
 $A_2 = 4A_1$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{N/mm}^2$.



Aufgabe 15.3:

Mit einem geeigneten FEM-Programm (z. B. mit dem Programm „Statisch unbestimmte ebene Fachwerke“, zu finden unter www.TM-interaktiv.de) berechne man die Stabkräfte des Fachwerks der Aufgabe 15.1 unter Annahme nachfolgender Zahlenwerte.

Gegeben: $a = 0,5\text{m}$; $F = 10\text{kN}$; $EA = 6,3 \cdot 10^7\text{N}$.

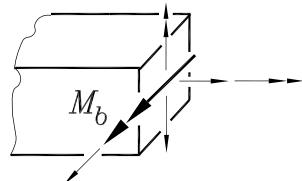
Weil das Fachwerk statisch unbestimmt ist, kann ein Stab entfernt werden, ohne dass die Tragfähigkeit eingebüßt wird.

- Welche Stäbe dürfen auf keinen Fall entfernt werden?
- Es soll einer der drei Stäbe 3, 4 oder 11 entfernt werden. Welcher sollte gewählt werden, wenn die absolut größte im Fachwerk auftretende Stabkraft möglichst klein sein soll?

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

16 Biegung

Im Folgenden werden Träger behandelt, die ausschließlich durch ein Biegemoment M_b belastet sind. Dieser als *reine Biegung* bezeichnete Belastungsfall ist ausgesprochen selten, weil bei einem nicht konstanten Biegemoment immer auch eine Querkraft wirkt. Es ist jedoch sinnvoll, die besonders wichtige Belastung durch ein Biegemoment gesondert zu betrachten.



In einigen nachfolgenden Kapiteln wird die gleichzeitige Belastung eines Trägers durch mehrere Schnittgrößen behandelt. In sehr vielen Fällen können die übrigen Belastungen gegenüber der besonders gefährlichen Biegebelastung sogar vernachlässigt werden.

16.1 Biegemoment und Biegespannung

Der in Abbildung 16.1 skizzierte Träger ist im Mittelteil (zwischen den beiden Kräften F) nur durch das konstante Biegemoment $M_b = F \cdot a$ beansprucht, so dass in diesem Bereich die Bedingung für die reine Biegebeanspruchung erfüllt ist. Es soll nun die Frage geklärt werden, welche Spannungsverteilung in einem Querschnitt dieses Bereichs dem Biegemoment M_b äquivalent ist. Eine Momentwirkung um eine im Querschnitt liegende Achse kann nur durch (senkrecht zur Querschnittsfläche gerichtete) Normalspannungen (und nicht durch in der Fläche liegende Schubspannungen) hervorgerufen werden.

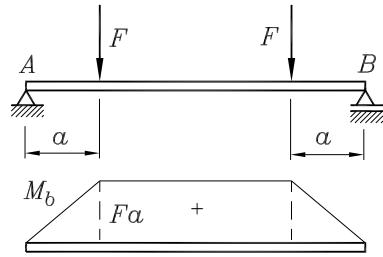
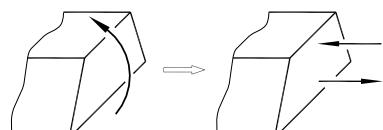


Abbildung 16.1: Reine Biegung im mittleren Bereich

Weil diese Normalspannungen bei reiner Biegung keine resultierende Kraftwirkung haben dürfen, müssen sie in einem Teil des Querschnitts positiv, im anderen Teil negativ sein:

Biegespannungen sind Normalspannungen, die in jedem Querschnitt als Zug- und Druckspannungen vorhanden sind.

Da ein Moment einem Kräftepaar äquivalent ist, ruft das skizzierte positive Biegemoment im oberen Bereich des Querschnitts eine Druckspannung, im unteren Bereich eine Zugspannung hervor.



Zur Berechnung der Spannungen im Querschnitt (und der Verformung des Trägers) genügen diese Aussagen jedoch noch nicht. Sie werden durch eine Annahme ergänzt, die erstmals von JACOB BERNOULLI (1654 - 1705) formuliert und nach ihm benannte

Bernoullische Hypothese der Biegetheorie:

Alle Punkte einer zur Trägerlängssachse senkrechten ebenen Fläche befinden sich auch nach einer reinen Biegeverformung in einer ebenen Fläche, die dann senkrecht zur verformten Trägerachse liegt.



Im Querschnitt wird nun ein Koordinatensystem so eingeführt, dass M_b um die x -Achse dreht und die positive y -Achse zu der Kante des Querschnitts zeigt, an der ein positives Biegemoment eine Zugspannung erzeugt. Diese Festlegung entspricht der Lage der Bezugsfaser, die bei der Einführung der Schnittgrößen (Abschnitt 7.1, Seite 94) für die Definition positiver Biegemomente benutzt wurde.

Da sich zwei benachbarte Querschnitte, die vor der Verformung parallel waren, entsprechend der Bernoulli-Hypothese bei der Verformung nur als starre Ebenen (um die x -Achse) drehen, ist die Dehnung der Längfasern zwischen diesen Ebenen über die Querschnittshöhe (in y -Richtung) linear veränderlich. Mit dem Hookeschen Gesetz (Dehnungen verhalten sich wie die Spannungen) folgt daraus, dass auch die Spannung über die Querschnittshöhe linear veränderlich ist. Für die Spannungsverteilung im Querschnitt wird deshalb die Funktion

$$\sigma_b = cy$$

mit dem zunächst unbekannten „Anstieg c “ angenommen. Die Wirkung der so über den Querschnitt verteilten Spannung muss dem Biegemoment M_b (Moment um die x -Achse) äquivalent sein. Es darf sich weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Moment um die y -Achse aus den Spannungen ergeben, so dass die nachfolgend formulierten drei Äquivalenzbedingungen gelten müssen.

Am differenziell kleinen Flächenelement dA (**Abbildung 16.3**) hat die dort angreifende Biegespannung σ_b die Kraftwirkung $\sigma_b dA$, als Momentwirkung dieser differenziell kleinen Kraft erhält man um die x -Achse $y \sigma_b dA$ und um die y -Achse $x \sigma_b dA$.

⇒ **1. Äquivalenzbedingung: Die Biegespannung hat keine resultierende Kraftwirkung.**

Die differenziell kleinen Kräfte $\sigma_b dA$ werden über die Querschnittsfläche integriert:

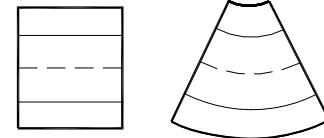
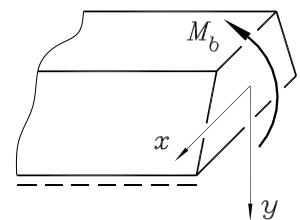


Abbildung 16.2: Dehnung der Längfasern bei der Biegeverformung

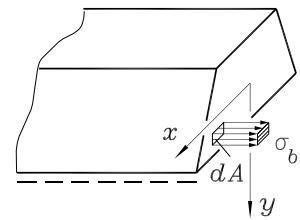


Abbildung 16.3: Die „Kraftwirkung“ der Biegespannung

$$\int_A \sigma_b dA = 0 \quad \Rightarrow \quad c \int_A y dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A y dA = 0 \quad . \quad (16.1)$$

Das sich ergebende Flächenintegral ist das aus der Statik (Formel 4.8 auf Seite 32) bekannte statische Moment der Fläche A , das genau dann verschwindet, wenn der Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt der Fläche liegt. Wegen $\sigma_b = cy$ gilt also:

In der Schwerpunktfaser (Verbindungsline der Schwerpunkte aller Querschnitte des Trägers) wirkt keine Biegespannung (*neutrale Faser*).

- ⇒ **2. Äquivalenzbedingung: Die resultierende Momentwirkung der Biegespannung um die x -Achse muss gleich dem Biegemoment M_b sein.**

Die differenziell kleinen Momente $y\sigma_b dA$ werden über die Querschnittsfläche integriert:

$$\int_A y \sigma_b dA = M_b \quad \Rightarrow \quad c \int_A y^2 dA = M_b \quad \Rightarrow \quad c = \frac{M_b}{\int_A y^2 dA} = \frac{M_b}{I_{xx}} \quad . \quad (16.2)$$

Damit ist der Faktor c im Biegespannungsansatz bekannt, und man erhält die

Biegespannungsformel $\sigma_b = \frac{M_b}{I_{xx}} y \quad (16.3)$

mit dem *Flächenträgheitsmoment* $I_{xx} = \int_A y^2 dA \quad . \quad (16.4)$

- ⇒ **3. Äquivalenzbedingung: Die Biegespannung hat keine resultierende Momentwirkung um die y -Achse.**

Die differenziell kleinen Momente $x\sigma_b dA$ werden über die Querschnittsfläche integriert:

$$\int_A x \sigma_b dA = 0 \quad \Rightarrow \quad c \int_A xy dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A xy dA = 0 \quad . \quad (16.5)$$

Die Biegespannungsformel gilt nur, wenn das x - y -Koordinatensystem in der Querschnittsfläche so liegt,

- dass der Ursprung des Koordinatensystems mit dem Schwerpunkt der Querschnittsfläche übereinstimmt und
- das so genannte *Deviationsmoment* verschwindet:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0 \quad . \quad (16.6)$$

Die Achsen x und y , die diese Bedingungen erfüllen, heißen *Hauptzentralachsen*.

Bei allen bisherigen Betrachtungen war stillschweigend vorausgesetzt worden, dass ein um die *Biegeachse x* drehendes Biegemoment M_b nur Verformungen in einer Ebene senkrecht zur x -Achse hervorruft. Tatsächlich ist dies nur der Fall, wenn die x -Achse eine Hauptzentralachse

der Querschnittsfläche des Trägers ist, anderenfalls muss das Problem nach den Regeln der so genannten *schiefen Biegung* (Abschnitt 19.1) gelöst werden.

Die wichtigsten Erkenntnisse aus den bisherigen Betrachtungen zur Biegetheorie werden nachfolgend noch einmal zusammengestellt:

- ⇒ Ein Biegemoment M_b , das um eine *Biegeachse* x dreht, die eine *Hauptzentralachse* des Trägerquerschnitts ist, ruft im Querschnitt eine Biegespannung hervor, deren Verteilung über die Querschnittsfläche nach 16.3 berechnet werden kann. Das nach 16.4 zu berechnende Flächenträgheitsmoment I_{xx} ist (wegen des Quadrats bei y) stets positiv.

Die Koordinate y weist vom Schwerpunkt des Querschnitts in Richtung zur Bezugsfaser, mit der das positive Biegemoment definiert wird. Unter Beachtung dieser Vorschrift liefert 16.3 für jeden Punkt des Querschnitts auch das korrekte Vorzeichen für die Biegespannung. Im Schwerpunkt der Querschnittsfläche ($y = 0$) tritt keine Biegespannung auf (neutrale Faser).

- ⇒ Die Biegespannung ist in einem Querschnitt in y -Richtung linear veränderlich und nimmt an den Rändern des Querschnitts (in der Abbildung 16.4 bei $y = e_1$ bzw. $y = -e_2$) die größten Werte an, wobei jeweils ein Wert positiv (Zugspannung), der andere negativ (Druckspannung) ist. Die absolut größte Spannung eines Querschnitts ergibt sich für die Punkte mit dem größten Abstand von der Biegeachse x (Punkte mit absolut größtem y -Wert $y = e_{max}$). Es ist üblich, für einen Querschnitt auch den Quotienten aus I_{xx} und e_{max} zu ermitteln:

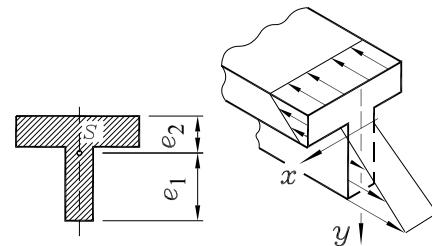


Abbildung 16.4: Die Biegespannungen haben am oberen und unteren Rand des Querschnitts ihre Maximalwerte

Mit dem so genannten *Widerstandsmoment*

$$W_x = \frac{I_{xx}}{e_{max}} \quad (16.7)$$

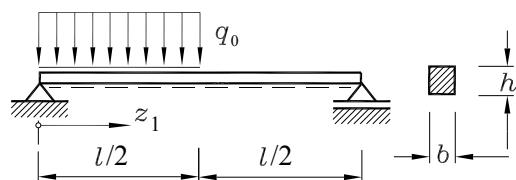
berechnet man die *absolut größte Spannung im Querschnitt*:

$$|\sigma_b|_{max} = \frac{|M_b|}{W_x}. \quad (16.8)$$

Beispiel:

Für den skizzierten Träger mit Rechteckquerschnitt sind Ort und Größe der maximalen Biegespannung zu ermitteln.

Gegeben: $l = 30\text{ cm}$; $b = 10\text{ mm}$;
 $q_0 = 100\text{ N/cm}$; $h = 15\text{ mm}$.



Die Gültigkeit der Biegespannungsformel ist an die Erfüllung der Beziehung 16.6 geknüpft. Ohne Rechnung ist klar, dass

$$\int_A xy \, dA = 0$$

ist, weil zu jedem Flächenelement $dA = dx \cdot dy$ auf der positiven Koordinatenseite ein entsprechendes Element auf der negativen Koordinatenseite vorhanden ist (**Abbildung 16.5**), so dass x und y Hauptzentralachsen sind. Diese Aussage gilt natürlich nicht nur für das Rechteck: Symmetriearchsen sind immer Hauptzentralachsen.

Für die Berechnung von I_{xx} wird zweckmäßig ein Flächenelement $dA = b \cdot dy$ (**Abbildung 16.6**) verwendet, so dass aus dem Integral über die Fläche ein Integral über die Höhe wird:

$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA = \int_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \, dy = \frac{bh^3}{12} .$$

Das maximale Biegemoment (vgl. Abschnitt 7.2, Beispiel 1 auf Seite 100) befindet sich an der Stelle $z_1 = 0,375l$ und hat den Wert

$$M_{b,max} = \frac{9}{128} q_0 l^2 ,$$

so dass sich für diesen Querschnitt die folgende Biegespannungsverteilung ergibt:

$$\sigma_b = \frac{9q_0 l^2}{128} \frac{12}{bh^3} y = \frac{27q_0 l^2}{32bh^3} y .$$

Die maximalen Spannungen in diesem Querschnitt erhält man am oberen ($y = -\frac{h}{2}$) bzw. unteren ($y = \frac{h}{2}$) Rand des Rechteckquerschnitts (**Abbildung 16.7**):

$$\sigma_b \left(y = -\frac{h}{2} \right) = -\frac{27q_0 l^2 h}{32bh^3 2} = -169 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} ; \quad \sigma_b \left(y = \frac{h}{2} \right) = 169 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} .$$

Zur Ermittlung des Absolutwertes der maximalen Biegespannung würde die Kenntnis des Widerstandsmomentes genügen, das sich mit dem maximalen Randfaserabstand $e_{max} = \frac{h}{2}$ für den Rechteckquerschnitt zu

$$W_x = \frac{I_{xx}}{e_{max}} = \frac{bh^3}{6}$$

ergibt. Damit erhält man natürlich nur den Absolutwert der maximalen Biegespannung:

$$|\sigma_b|_{max} = \frac{|M_b|_{max}}{W_x} = 169 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} .$$

Im Regelfall ist diese Information völlig ausreichend.

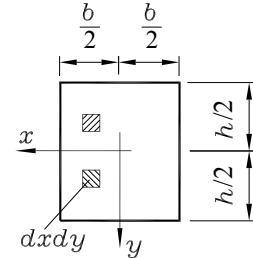


Abbildung 16.5: Symmetriearchsen sind immer Hauptzentralachsen

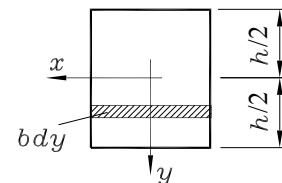


Abbildung 16.6: Flächenelement $dA = b \cdot dy$

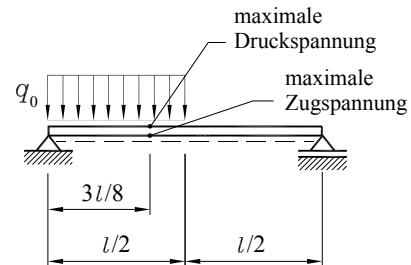


Abbildung 16.7: Am Ort des absolut größten Biegemoments findet man die maximalen Biegespannungen

16.2 Flächenträgheitsmomente

16.2.1 Definitionen

Zur Berechnung von Biegespannungen und -verformungen werden die im Abschnitt 16.1 eingeführten Kennwerte für die Querschnittsflächen benötigt, in die die Abstände der Flächenelemente von einer Achse quadratisch eingehen. Für diese *Flächenmomente zweiten Grades* (die für die Schwerpunktberechnung benötigten statischen Momente sind Momente ersten Grades) wird üblicherweise der (nicht sehr glücklich gewählte) Begriff *Flächenträgheitsmomente* verwendet, der sich wegen der formalen Übereinstimmung der mathematischen Ausdrücke mit den Massenträgheitsmomenten der Kinetik durchgesetzt hat.

Für ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem gelten die folgenden Definitionen.

$$\begin{aligned} I_{\bar{x}\bar{x}} &= \int_A \bar{y}^2 dA \quad , \\ \textbf{Axiale Flächenträgheitsmomente:} \quad I_{\bar{y}\bar{y}} &= \int_A \bar{x}^2 dA \quad , \quad (16.9) \\ \textbf{Deviationsmoment:} \quad I_{\bar{x}\bar{y}} &= - \int_A \bar{x}\bar{y} dA \quad . \end{aligned}$$

$I_{\bar{x}\bar{x}}$ und $I_{\bar{y}\bar{y}}$ werden auch als äquatoriale Flächenträgheitsmomente bezeichnet, das Deviationsmoment $I_{\bar{x}\bar{y}}$ wird auch (in Anlehnung an den Begriff aus der Kinetik) Zentrifugalmoment genannt. Die Querstriche über den Koordinaten sollen andeuten, dass die Definitionsformeln sich auf ein beliebiges Koordinatensystem beziehen. Koordinaten ohne Querstriche werden im Folgenden nur benutzt, wenn sie ihren Ursprung im Schwerpunkt der Fläche haben.

Man beachte, dass das Flächenträgheitsmoment $I_{\bar{x}\bar{x}}$, das sich auf die \bar{x} -Achse bezieht, mit dem „Hebelarm“ \bar{y} definiert werden muss und dementsprechend $I_{\bar{y}\bar{y}}$ mit dem „Hebelarm“ \bar{x} definiert ist. Die Vorstellung, dass die Flächenelemente an (quadratisch in die Rechnung einfließenden) „Hebelarmen“ wirken, ist durchaus gerechtfertigt. Die Produkte aus Flächenelementen und diesen Hebelarmen kamen (Abschnitt 16.1) über die Momentwirkungen der Spannungen am Flächenelement in die Rechnung hinein.

Aus den Definitionen lassen sich folgende Aussagen ablesen:

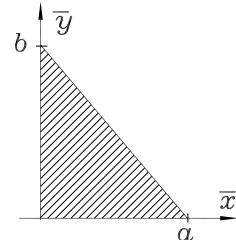
- ⇒ Die Werte für die axialen Flächenträgheitsmomente und das Deviationsmoment sind sowohl von der Art der Fläche als auch von dem gewählten Bezugskoordinatensystem abhängig. Sie haben die Dimension „Länge hoch 4“, z. B.: cm⁴.
- ⇒ Für Flächen, die aus mehreren Teilflächen zusammengesetzt sind, gilt: Axiale Flächenträgheitsmomente, die sich auf gleiche Achsen beziehen (bzw. Deviationsmomente, die sich auf das gleiche Achsenpaar beziehen), dürfen addiert werden.
- ⇒ $I_{\bar{x}\bar{x}}$ und $I_{\bar{y}\bar{y}}$ sind für beliebige Flächen und bei beliebigem Koordinatensystem stets positiv.

$\Leftrightarrow I_{\bar{x}\bar{y}}$ kann positiv oder negativ werden. Es wird Null, wenn mindestens eine der beiden Koordinatenachsen eine Symmetriearchse der Fläche ist, weil dann zu jedem Flächenelement dA bei \bar{x}, \bar{y} ein entsprechendes mit einem negativen Produkt $\bar{x} \cdot \bar{y}$ existiert.

Das (recht willkürliche, aber auch nicht weiter störende) Minuszeichen in der Definition des Deviationsmomentes ist üblich, weil dadurch die Transformationsformeln für die Drehung des Koordinatensystems (Abschnitt 16.2.5) exakt den gleichen Aufbau haben wie die (im Kapitel 22 behandelten) Formeln für die Transformation der Spannungen des ebenen Spannungszustandes.

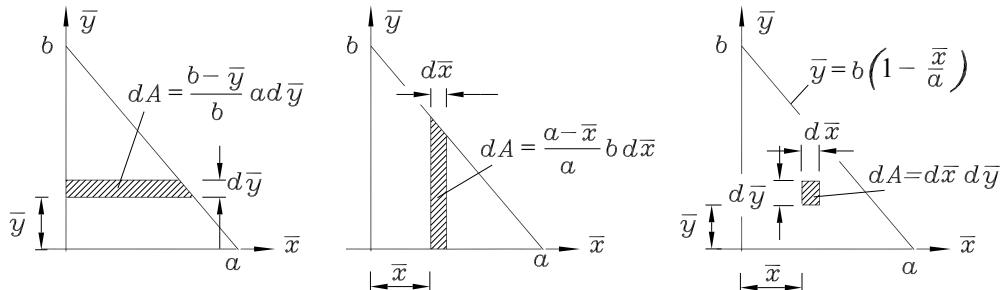
Beispiel: Ein rechtwinkliges Dreieck liegt mit seinen Seiten a und b auf den Koordinatenachsen. $I_{\bar{x}\bar{x}}$, $I_{\bar{y}\bar{y}}$ und $I_{\bar{x}\bar{y}}$ sind zu berechnen.

Gegeben: a, b .



Für die Berechnung der axialen Flächenträgheitsmomente können die Flächenintegrale in einfache Integrale überführt werden, indem jeweils ein streifenförmiges Flächenelement benutzt wird. Dies ist erlaubt, weil alle Flächenanteile eines solchen Streifens am gleichen „Hebelarm“ \bar{x} bzw. \bar{y} hängen. Dabei wird das linke Streifen-Element (nachfolgende Skizze) für das Flächenträgheitsmoment bezüglich der \bar{x} -Achse benutzt und das in der Mitte skizzierte bezüglich der \bar{y} -Achse.

Für die Berechnung des Deviationsmomentes muss ein Doppelintegral gelöst werden, weil die Lage eines jeden Flächenelementes durch ein individuelles Wertepaar \bar{x}, \bar{y} bestimmt wird.



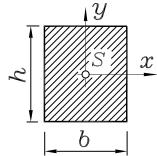
$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_A \bar{y}^2 dA = \int_{\bar{y}=0}^b \bar{y}^2 \frac{a}{b} (b - \bar{y}) d\bar{y} = \frac{ab^3}{12} ,$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_A \bar{x}^2 dA = \int_{\bar{x}=0}^a \bar{x}^2 \frac{b}{a} (a - \bar{x}) d\bar{x} = \frac{a^3 b}{12} ,$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = - \int_A \bar{x} \bar{y} dA = - \int_{\bar{x}=0}^a \int_{\bar{y}=0}^{b(1-\bar{x}/a)} \bar{x} \bar{y} d\bar{y} d\bar{x} = - \frac{a^2 b^2}{24} .$$

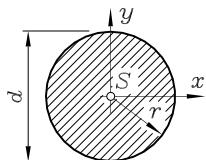
16.2.2 Einige wichtige Formeln

Alle nachfolgend angegebenen Formeln beziehen sich auf ein im Schwerpunkt der jeweiligen Fläche liegendes x-y-Koordinatensystem.



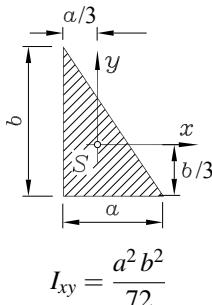
Rechteck:

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} ; \quad I_{yy} = \frac{b^3h}{12} ; \quad I_{xy} = 0$$

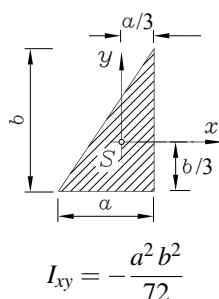


Kreis:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} ; \quad I_{xy} = 0$$



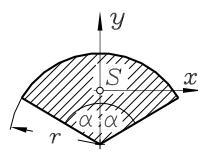
$$I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{72}$$



$$I_{xy} = -\frac{a^2 b^2}{72}$$

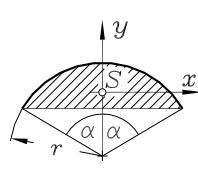
Rechtwinkliges Dreieck:

$$I_{xx} = \frac{ab^3}{36} ; \\ I_{yy} = \frac{a^3b}{36}$$



Kreissektor:

$$I_{xx} = \frac{r^4}{72} \left(18\alpha + 9\sin 2\alpha - 32 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right) ; \\ I_{yy} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha) ; \quad I_{xy} = 0$$



Kreisabschnitt:

$$I_{xx} = \frac{r^4}{144} \left(36\alpha - 9\sin 4\alpha - \frac{64\sin^6 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right) ; \\ I_{yy} = \frac{r^4}{4} \left(\alpha - \frac{2}{3}\sin 2\alpha + \frac{1}{12}\sin 4\alpha \right) ; \quad I_{xy} = 0$$

Man beachte: In den Formeln für den Kreissektor und den Kreisabschnitt ist α der **halbe Öffnungswinkel**. Selbstverständlich müssen dimensionslose Werte für α (Bogenmaß) eingesetzt werden.

16.2.3 Der Satz von Steiner

Wenn eine Querschnittsfläche aus Teilflächen zusammengesetzt ist, deren Flächenträgheitsmomente bekannt sind, dann dürfen die Flächenträgheitsmomente der Teilflächen addiert (bzw. bei Ausschnitten subtrahiert) werden, wenn sie sich sämtlich auf die gleiche Achse beziehen. Da im Allgemeinen (siehe die Tabelle des vorigen Abschnitts) die Flächenträgheitsmomente der geometrischen Grundflächen bezüglich ihrer Schwerpunktachsen bekannt sind, müssen diese gegebenenfalls auf die gemeinsame Bezugsachse umgerechnet werden. Das häufigste dabei auftretende Problem ist die Umrechnung eines auf ein Schwerpunktachsensystem bezogenen Flächenträgheitsmoments auf ein parallel verschobenes Koordinatensystem.

Für eine beliebige Fläche A sollen I_{xx} , I_{yy} und I_{xy} , alle bezogen auf das durch den Schwerpunkt der Fläche gelegte x - y -Koordinatensystem, bekannt sein. Gefragt sind die entsprechenden Werte bezüglich des um a bzw. b verschobenen Koordinatensystems \bar{x} , \bar{y} .

Aus der **Abbildung 16.8** ist die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + a \quad , \\ \bar{y} &= y + b\end{aligned}$$

ablesbar, und man errechnet z. B.:

$$\begin{aligned}I_{\bar{x}\bar{x}} &= \int_A \bar{y}^2 dA = \int_A (y+b)^2 dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA \\ &= I_{xx} + 0 + b^2 A .\end{aligned}$$

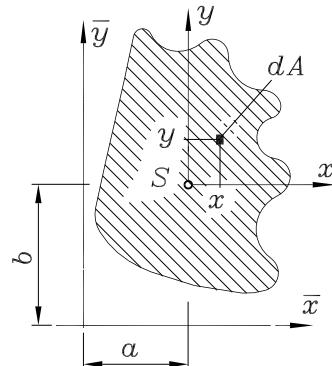


Abbildung 16.8: Umrechnung auf ein parallel verschobenes Koordinatensystem

Das Integral des mittleren Summanden ist das statische Moment bezüglich einer Schwerpunktachse und hat dementsprechend den Wert Null.

Auf gleichem Wege ergeben sich die Formeln für die beiden anderen Trägheitsmomente. Nach JACOB STEINER (1796 - 1863) werden diese Umrechnungsformeln bezeichnet als

Steinerscher Satz:

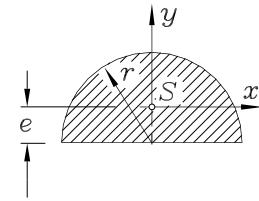
$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + b^2 A \quad , \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + a^2 A \quad , \quad I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - ab A . \quad (16.10)$$

Diese Formeln gelten nur unter der Voraussetzung, dass auf der **rechten Seite** die Flächenträgheitsmomente stehen, die sich auf ein **Schwerpunktkoordinatensystem** beziehen, während die Flächenträgheitsmomente auf der linken Seite für ein beliebiges (dazu parallel liegendes) Koordinatensystem gelten.

Man beachte also: Die Steiner-Formeln dürfen **nicht für die Umrechnung zwischen zwei beliebigen parallelen Koordinatensystemen** verwendet werden.

Beispiel:

Man ermittle mit Hilfe der Formeln des Abschnitts 16.2.2 und den Formeln 4.12 bzw. 4.13 des Abschnitts 4.2 die Lage des Schwerpunkts und die Flächenträgheitsmomente eines Halbkreises und zeige, dass sich die Formeln für die Flächenträgheitsmomente der Kreisfläche ergeben, wenn man diese aus zwei Halbkreisflächen (natürlich unter Berücksichtigung der Steinerschen Anteile) zusammensetzt.



Als Sonderfälle des Kreissektors oder des Kreisabschnitts mit halbem Öffnungswinkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält man die Formeln für den Halbkreis:

$$I_{xx} = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4 \quad ; \quad I_{yy} = \frac{\pi r^4}{8} \quad ; \quad I_{xy} = 0 \quad ; \quad e = \frac{4r}{3\pi} \quad . \quad (16.11)$$

Da das Koordinatensystem im Schwerpunkt der vollen Kreisfläche nur in y -Richtung gegenüber den Schwerpunktsystemen der beiden Halbkreisflächen parallel verschoben ist (also nur ein Abstand zwischen den x -Achsen vorliegt), muss bei der Ermittlung von I_{xx} der Steinersche Satz angewendet werden, während die I_{yy} der beiden Halbkreisflächen einfach addiert werden können. Man beachte, dass sich die Koordinaten x und y für den Kreis auf seinen Mittelpunkt beziehen und nicht mit den Schwerpunktkoordinaten des Halbkreises der obigen Skizze übereinstimmen:

$$I_{xx, \text{Kreis}} = 2 \left[\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4 + e^2 \frac{\pi r^2}{2} \right] = 2 \left[\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4 + \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 \frac{\pi r^2}{2} \right] = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad ,$$

$$I_{yy, \text{Kreis}} = 2 \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad .$$

16.2.4 Zusammengesetzte Flächen

Für die Berechnung von Aufgaben nach der Biegetheorie werden die Flächenträgheitsmomente benötigt, die sich auf Achsen durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche beziehen. Wenn sich die Querschnittsfläche aus mehreren Teilflächen zusammensetzt, muss zuerst der Gesamtschwerpunkt der Fläche ermittelt werden.

Die axialen Flächenträgheitsmomente sind ein Maß für den Widerstand, den ein Querschnitt der Biegeverformung entgegensetzt. Da in die Steinerschen Formeln die Abstände der Flächen von der Bezugsachse quadratisch eingehen, kann man mit relativ kleinen Querschnittsflächen große Flächenträgheitsmomente erreichen, wenn Teilflächen in möglichst großem Abstand von der Bezugsachse (Achse durch den Schwerpunkt der Gesamtfläche) angeordnet werden (vorteilhaft sind Hohlquerschnitte, I-Träger usw., Abbildung 16.9).

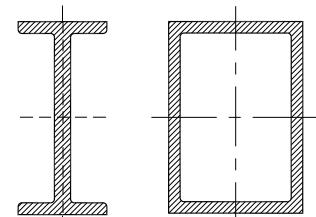


Abbildung 16.9: I-Profil und Kasten-Profil

In die Formeln für die axialen Flächenträgheitsmomente (einschließlich der zugehörigen Steinerschen Formeln) gehen jeweils nur die Abstände in einer Richtung ein (in die I_{xx} -Formeln z. B. nur die Abstände in y -Richtung).

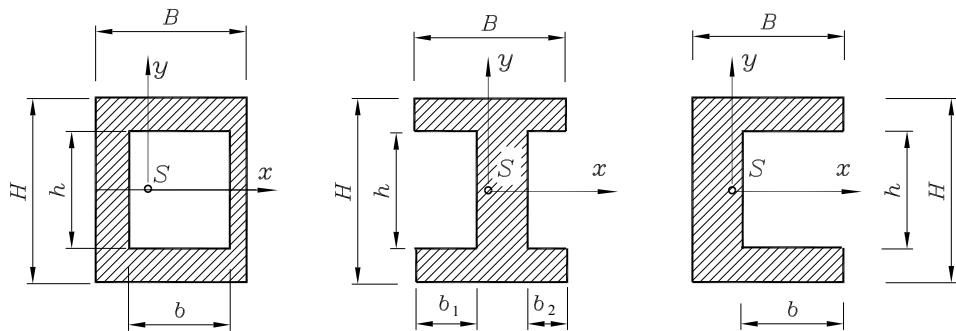


Abbildung 16.10: Wenn $b = b_1 + b_2$ ist, gilt für alle drei Querschnitte: $I_{xx} = \frac{1}{12} (BH^3 - bh^3)$

Deshalb ergeben sich für unterschiedliche Flächen, die aus gleichen Teilflächen zusammengesetzt sind und deren Teilflächenschwerpunkte die gleichen Abstände von der Bezugssachse haben, die gleichen Werte für die Flächenträgheitsmomente für diese Bezugssachse. Diese Aussage kann bei Änderungen einer Konstruktion nützlich sein und wird in Tabellenbüchern genutzt, um mit einer Formel eine ganze Klasse von Querschnitten abzuhandeln. So erhält man z. B. für die drei Querschnitte in der **Abbildung 16.10** unter der Voraussetzung, dass $b = b_1 + b_2$ ist, jeweils das gleiche I_{xx} . Natürlich haben diese drei Querschnitte unterschiedliche I_{yy} , weil die Teilflächen zur y-Achse unterschiedliche Abstände haben.

Die wichtige Aufgabe, die Flächenträgheitsmomente einer Fläche zu bestimmen, die sich aus mehreren Teilflächen zusammensetzt, für die die Flächenträgheitsmomente bekannt sind, soll zunächst am einfachen Beispiel demonstriert werden:

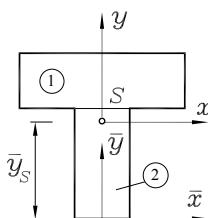
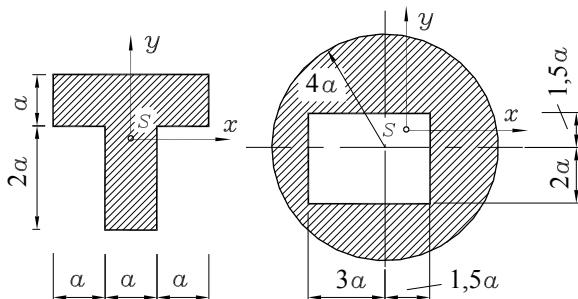
Beispiel: Für die beiden skizzierten Flächen sind I_{xx} , I_{yy} und I_{xy} zu berechnen, jeweils bezüglich des gezeichneten Schwerpunktkoordinatensystems.

Gegeben: a .

Da das T-Profil eine Symmetrieachse besitzt, vereinfacht sich die Rechnung: Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse.

Zur Ermittlung der zweiten Schwerpunktkoordinate wird das \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem (nebenstehende Skizze) benutzt, und es folgt für das in zwei Rechteckflächen aufgeteilte T-Profil:

$$\bar{x}_S = 0 \quad ; \quad \bar{y}_S = \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^2 A_i \bar{y}_i = \frac{1}{5a^2} \left(3a^2 \frac{5}{2}a + 2a^2 a \right) = \frac{19}{10} a \quad .$$



Im nun bekannten Schwerpunkt der zusammengesetzten Fläche liegt das x - y -Koordinatensystem zur Berechnung der Flächenträgheitsmomente. Die Koordinaten der Schwerpunkte der beiden Rechteckteilflächen in diesem Koordinatensystem sind

$$x_i = 0 \quad , \quad y_i = \bar{y}_i - \bar{y}_S \quad .$$

Das sind gleichzeitig die Abstände zur Ermittlung der „Steiner-Anteile“, die in diesem Fall nur bei der Ermittlung von I_{xx} ungleich Null sind. Da eine der Bezugsachsen eine Symmetriearchse ist, wird das Deviationsmoment $I_{xy} = 0$. Die Rechnung liefert:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{3aa^3}{12} + 3a^2 \left(\frac{3}{5}a \right)^2 + \frac{a8a^3}{12} + 2a^2 \left(\frac{9}{10}a \right)^2 = 3,62a^4 \quad ; \\ I_{yy} &= \frac{a27a^3}{12} + \frac{2aa^3}{12} = 2,42a^4 \quad ; \quad I_{xy} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Die zweite zu behandelnde Fläche dieses Beispiels zeigt keine Symmetrie, so dass für beide axialen Flächenträgheitsmomente der Steinersche Satz angewendet werden muss (**Abbildung 16.11**).

Um mit den bekannten Formeln für die Standardflächen arbeiten zu können, muss die Fläche in eine vorhandene Fläche (Kreis) und eine Fehlfläche (Rechteck) aufgeteilt werden. So-wohl Flächeninhalt als auch Flächenträgheitsmomente der Fehlfäche gehen mit negativem Vorzeichen in die Rechnung ein.

Hier bringt es einen Rechenvorteil, das \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem in den Schwerpunkt des Kreises zu legen. Zunächst wird wieder die Lage des Gesamtschwerpunkts der Fläche berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{x}_S &= \frac{1}{16\pi a^2 - \frac{63}{4}a^2} \left(-\frac{63}{4}a^2 \left(-\frac{3}{4}a \right) \right) = 0,3422a \quad ; \\ \bar{y}_S &= \frac{1}{16\pi a^2 - \frac{63}{4}a^2} \left(-\frac{63}{4}a^2 \left(-\frac{1}{4}a \right) \right) = 0,1141a \quad . \end{aligned}$$

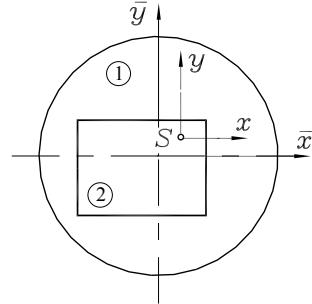


Abbildung 16.11: Fläche = Kreis – („Rechteck einschließlich Anteil aus Steinerschem Satz 16.10“)

Schließlich ergeben sich die Flächenträgheitsmomente aus der Subtraktion der Anteile von Kreis und Rechteck, jeweils unter Berücksichtigung der Steiner-Anteile:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{\pi(8a)^4}{64} + 16\pi a^2 \bar{y}_S^2 - \left[\frac{4,5a(3,5a)^3}{12} + \frac{63}{4}a^2 \left(\frac{a}{4} + \bar{y}_S \right)^2 \right] = 183,55a^4 \quad ; \\ I_{yy} &= \frac{\pi(8a)^4}{64} + 16\pi a^2 \bar{x}_S^2 - \left[\frac{3,5a(4,5a)^3}{12} + \frac{63}{4}a^2 \left(3\frac{a}{4} + \bar{x}_S \right)^2 \right] = 161,58a^4 \quad ; \\ I_{xy} &= -16\pi a^2 (-\bar{x}_S)(-\bar{y}_S) - \left[-\frac{63}{4}a^2 \left(-3\frac{a}{4} - \bar{x}_S \right) \left(-\frac{a}{4} - \bar{y}_S \right) \right] = 4,30a^4 \quad . \end{aligned}$$

Bei der Ermittlung des Deviationsmomentes wurde berücksichtigt, dass die beiden Teilflächen Symmetriearchsen besitzen und deswegen nur Steiner-Anteile der Teilflächen das Deviationsmoment der Gesamtfläche bilden.

16.2.5 Hauptträgheitsmomente, Hauptzentralachsen

Die im Abschnitt 16.1 hergeleitete Biegespannungsformel 16.3 (Seite 217) gilt nur, wenn sich das Flächenträgheitsmoment I_{xx} auf eine durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende x -Achse bezieht und außerdem das Deviationsmoment I_{xy} für das x - y -Koordinatensystem verschwindet. Die zweite Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn wenigstens eine der beiden Achsen (x oder y) eine Symmetriechse des Querschnitts ist. Aber auch für unsymmetrische Querschnitte existiert ein Achsenpaar, für das das Deviationsmoment verschwindet. In diesem Abschnitt wird das Problem behandelt, die Richtungen dieser Achsen zu ermitteln.

Zunächst wird untersucht, wie sich die Flächenträgheitsmomente bei einer Drehung des Bezugskoordinatensystems ändern. Aus der Abbildung 16.12 können die Transformationsformeln für den Übergang vom x - y -Koordinatensystem auf ein um den Winkel φ gedrehtes ξ - η -Koordinatensystem abgelesen werden:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi , \\ \eta &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi .\end{aligned}$$

Wenn diese Transformationen in die Definitionsformeln für die Flächenträgheitsmomente eingesetzt werden, z. B.

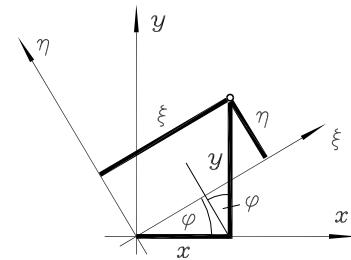


Abbildung 16.12: Drehung des Koordinatensystems

$$I_{\xi\xi} = \int_A \eta^2 dA = \sin^2 \varphi \int_A x^2 dA + \cos^2 \varphi \int_A y^2 dA - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A xy dA = \dots ,$$

so erhält man nach einigen elementaren Umformungen die Formeln für die

Transformation der Flächenträgheitsmomente auf ein gedrehtes Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}I_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) + \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi , \\ I_{\eta\eta} &= \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) - \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi , \\ I_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi .\end{aligned}\quad (16.12)$$

Zu besonders wichtigen Aussagen führt die Beantwortung der Frage, für welche Winkel die Flächenträgheitsmomente $I_{\xi\xi}$ und $I_{\eta\eta}$ extreme Werte annehmen. Die Bedingungsgleichungen dafür sind:

$$\frac{dI_{\xi\xi}}{d\varphi} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dI_{\eta\eta}}{d\varphi} = 0 .$$

Beide liefern das gleiche Ergebnis:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} .$$

Da der Tangens des Winkels $2\varphi^*$ im Bereich von 0° bis 360° auf zwei Winkel führt, die sich um 180° unterscheiden, erhält man für den einfachen Winkel φ^* zwei Lösungen, die sich um 90° unterscheiden: Die Extremwerte der Flächenträgheitsmomente ergeben sich für zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen. Die Frage, welcher der beiden Winkel zum Maximum und welcher zum Minimum gehört, wird durch die zweite Ableitung entschieden. Diese Rechnung führt auf die unten angegebene Formel 16.14.

Durch Einsetzen der Bedingungsgleichung für den Winkel φ^* in die allgemeinen Transformationsformeln für die Flächenträgheitsmomente 16.12 ergeben sich die Formeln 16.13 für das maximale bzw. minimale Flächenträgheitsmoment und eine weitere wichtige Erkenntnis: Das Deviationsmoment verschwindet für das durch φ^* definierte Koordinatensystem, diese beiden Koordinaten sind also auch die Hauptzentralachsen der Fläche.

Alle für die Biegetheorie erforderlichen Kennwerte einer Fläche können errechnet werden, wenn I_{xx} , I_{yy} und I_{xy} für ein beliebiges, im **Schwerpunkt der Fläche** liegendes x - y -Koordinatensystem bekannt sind:

Es existiert immer ein gegenüber dem x - y -Koordinatensystem um den Winkel φ_1 gedrehtes Koordinatensystem mit den Achsen 1 und 2, für das das Deviationsmoment verschwindet (1 und 2 sind die Hauptzentralachsen der Fläche). Die Flächenträgheitsmomente bezüglich dieser Achsen heißen **Hauptträgheitsmomente**:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{4} + I_{xy}^2} \quad , \\ I_2 &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{4} + I_{xy}^2} \quad . \end{aligned} \quad (16.13)$$

I_1 ist das größte und I_2 das kleinste aller Flächenträgheitsmomente, die sich bezüglich beliebiger Schwerpunktachsen finden lassen. Die Achsen 1 und 2 stehen senkrecht aufeinander. Der Winkel φ_1 zwischen der x -Achse und der Achse 1 des größten Flächenträgheitsmoments errechnet sich nach:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_{xy}}{I_1 - I_{yy}} \quad . \quad (16.14)$$

- ⇒ Der positive Drehsinn des Winkels φ_1 ist durch die Koordinaten x und y festgelegt (**Abbildung 16.13**). Ein positiver Winkel wird linksdrehend an die x -Achse angetragen und führt zur Achse 1 mit dem größten Flächenträgheitsmoment.
- ⇒ Für Flächen mit mindestens einer Symmetriechse kann man sich diese Berechnungen ersparen, da eine Symmetriechse und zwangsläufig auch die zu ihr senkrecht verlaufende Schwerpunktachse immer Hauptzentralachsen sind und damit zu einer von beiden das größte, zur anderen das kleinste aller Flächenträgheitsmomente bezüglich der Schwerpunktachsen gehört.

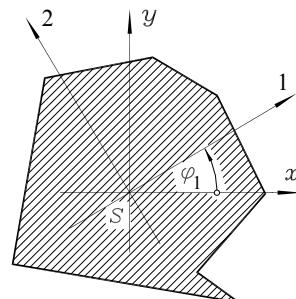
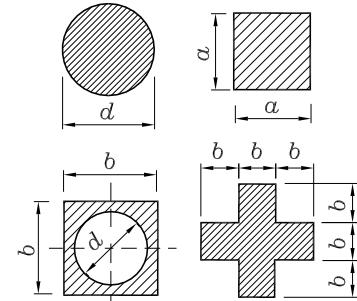


Abbildung 16.13: Winkel φ_1

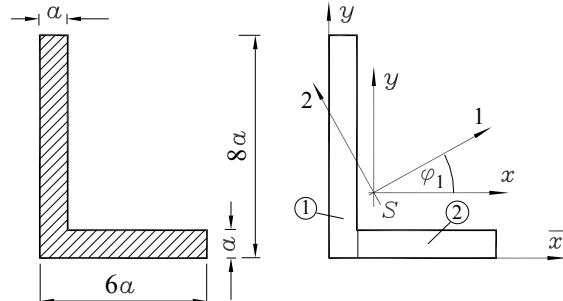
- ⇒ Weil man bei einem Quadrat für beide Hauptzentralachsen das gleiche Flächenträgheitsmoment erhält (Maximum gleich Minimum), muss sich dieser Wert auch für beliebige andere Schwerpunktachsen ergeben. Es gilt also: Bei einem Quadrat und bei beliebigen anderen regelmäßigen n -Ecken und natürlich auch beim Kreis (und immer dann, wenn $I_1 = I_2$ ist, nebenstehend skizzierte Beispiele) sind sämtliche Schwerpunktachsen auch Hauptzentralachsen.



Beispiel: Für die skizzierte Fläche ermittle man

- die Hauptträgheitsmomente,
- die Lage der Hauptzentralachsen.

Der Schwerpunkt der entsprechend der Skizze aufgeteilten Fläche wird bezüglich des \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystems ermittelt:



$$\bar{x}_S = \frac{1}{13a^2} \left(8a^2 \frac{a}{2} + 5a^2 \frac{7}{2}a \right) = 1,654a ; \quad \bar{y}_S = \frac{1}{13a^2} \left(8a^2 4a + 5a^2 \frac{a}{2} \right) = 2,654a .$$

Die beiden Flächenträgheitsmomente I_{xx} und I_{yy} , die sich auf das x - y -Koordinatensystem im Schwerpunkt der Gesamtfläche beziehen, ergeben sich aus jeweils vier Summanden (zwei Rechtecke, jeweils unter Berücksichtigung der Steiner-Anteile). Das Deviationsmoment I_{xy} resultiert ausschließlich aus den Steiner-Anteilen, da die Rechtecke bezüglich ihres **eigenen** Schwerpunkt-Koordinatensystems (Symmetrieachsen) keine Deviationsmomente haben:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{a(8a)^3}{12} + 8a^2(4a - \bar{y}_S)^2 + \frac{5aa^3}{12} + 5a^2\left(\bar{y}_S - \frac{a}{2}\right)^2 = 80,78a^4 ; \\ I_{yy} &= \frac{8aa^3}{12} + 8a^2\left(\bar{x}_S - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a(5a)^3}{12} + 5a^2\left(\frac{7}{2}a - \bar{x}_S\right)^2 = 38,78a^4 ; \\ I_{xy} &= -8a^2\left(-\bar{x}_S + \frac{a}{2}\right)(4a - \bar{y}_S) - 5a^2\left(\frac{7}{2}a - \bar{x}_S\right)\left(\frac{a}{2} - \bar{y}_S\right) = 32,31a^4 . \end{aligned}$$

Aus diesen Werten errechnen sich die beiden Hauptträgheitsmomente nach 16.13 und der Lagewinkel für das Hauptachsensystem (vgl. Skizze oben rechts) nach 16.14:

$$\begin{aligned} I_1 &= 98,31a^4 ; \quad I_2 = 21,24a^4 ; \\ \tan \varphi_1 &= 0,5427 \Rightarrow \varphi_1 = 28,49^\circ . \end{aligned}$$

- ⇒ Für eine L-förmige Fläche mit gleichen Schenkellängen ist das Hauptachsensystem um 45° gegenüber dem x - y -System gedreht. Obwohl man für eine solche Fläche aus der Anschauung sofort die Lage der Hauptachsen kennt (Symmetrie), ist zur Ermittlung von I_1 und I_2 trotzdem eine Rechnung wie bei dem gerade gelösten Beispiel erforderlich.

16.2.6 Formalisierung der Berechnung

Eine in der Praxis sehr häufig vorkommende Aufgabe ist die Ermittlung der Trägheitsmomente einer Fläche, die sich aus Teilflächen zusammensetzt, deren Schwerpunkte und Trägheitsmomente bekannt sind. Dafür wird folgendes Vorgehen empfohlen:

- ① Die Fläche wird in geeignete Teilflächen A_i zerlegt. Dabei ist es oft sinnvoll, aus größeren Teilflächen eine kleinere auszuschneiden (**Abbildung 16.14**: 2 Rechtecke mit einem Kreisausschnitt). Ausschnittflächen gehen mit negativem Vorzeichen in die Rechnung ein.
- ② Bezogen auf ein globales \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem werden die Schwerpunktkoordinaten \bar{x}_i, \bar{y}_i der Teilflächen eingezeichnet.
- ③ Für jede Teilfläche A_i wird ein lokales x_i - y_i -Schwerpunkt-Koordinatensystem so festgelegt, dass die Achsen parallel zu den Achsen des globalen Koordinatensystems verlaufen.
- ④ Ausfüllen der schattierten Zellen in folgender Tabelle (vgl. auch www.TM-aktuell.de):

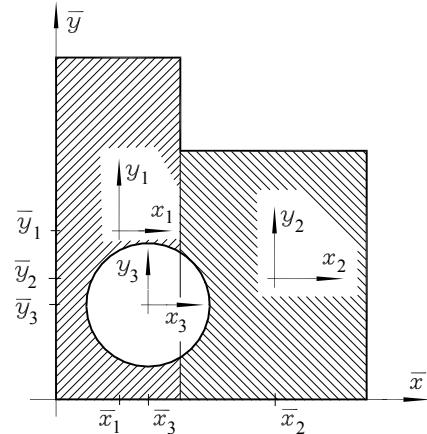


Abbildung 16.14: Eine Fläche wird aus Teilflächen und Ausschnitten zusammengesetzt

i	A_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	I_{xixi}	I_{yyiy}	I_{xiyi}	$A_i\bar{x}_i$	$A_i\bar{y}_i$
	Σ_1			Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6
i	$\bar{x}_i - \bar{x}_S$	$\bar{y}_i - \bar{y}_S$	$A_i(\bar{x}_i - \bar{x}_S)^2$	$A_i(\bar{y}_i - \bar{y}_S)^2$	$-A_i(\bar{x}_i - \bar{x}_S)(\bar{y}_i - \bar{y}_S)$			
			Σ_7	Σ_8	Σ_9			

Die A_i sind die einzelnen Teilflächen (negativ für Ausschnittflächen), \bar{x}_i und \bar{y}_i die Schwerpunktkoordinaten der Teilflächen, bezogen auf das **globale Koordinatensystem**. I_{xixi} , I_{yyiy} und I_{xiyi} sind die Flächenträgheitsmomente der Teilflächen (negativ für Ausschnitte), bezogen jeweils auf das zugehörige **lokale Koordinatensystem der Teilfläche**.



- ⑤ Nur der schattierte innere Teil der Tabelle hat einen unmittelbaren Bezug zur aktuellen Aufgabe („Eingabewerte“ der Rechnung), die Ermittlung der übrigen Werte folgt einem formalen Algorithmus, der durch die Angaben im Tabellenkopf, die Summenbildung in den angegebenen Spalten und die folgenden Formeln bestimmt wird.

- ⑥ Zunächst muss der obere Teil der Tabelle ergänzt werden, um die Schwerpunktkoordinaten der Gesamtfläche, bezogen auf das globale Koordinatensystem, nach nebenstehenden Formeln berechnen zu können.

Schwerpunkt-Koordinaten:

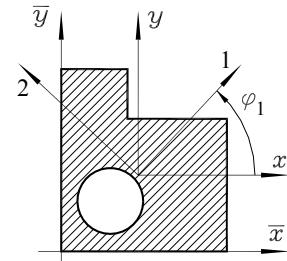
$$\bar{x}_S = \frac{\Sigma_5}{\Sigma_1} , \quad \bar{y}_S = \frac{\Sigma_6}{\Sigma_1} .$$

- ⑦ Berechnung der Flächenträgheitsmomente der Gesamtfläche, bezogen auf das x - y -Koordinatensystem, das (parallel zu \bar{x} , \bar{y}) im Schwerpunkt der Gesamtfläche liegt:

$$I_{xx} = \Sigma_2 + \Sigma_8 , \quad I_{yy} = \Sigma_3 + \Sigma_7 , \quad I_{xy} = \Sigma_4 + \Sigma_9 .$$

- ⑧ Die Hauptträgheitsmomente (bezüglich der Hauptzentralachsen 1 und 2) erhält man aus 16.13, den Winkel φ_1 zwischen der x -Achse und der Hauptzentralachse 1 aus 16.14:

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{4} + I_{xy}^2} , \quad \tan \varphi_1 = \frac{I_{xy}}{I_1 - I_{yy}} .$$



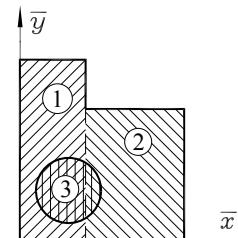
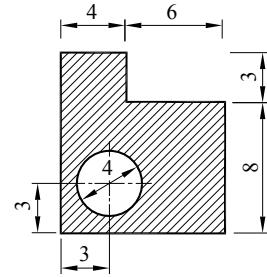
Beispiel 1:

Für die skizzierte Fläche sind die Hauptträgheitsmomente und die Lage der Hauptzentralachsen zu ermitteln.

Hinweis: Die in der Skizze eingetragenen Längen sollen die Dimension mm haben. Bei der Tabellenrechnung werden die Maßeinheiten mm, mm², mm³ und mm⁴ weggelassen.

Für die in der unteren Skizze angegebene Einteilung der Fläche in zwei Rechtecke mit der Kreisfläche als Fehlfläche (Fläche und Flächenträgheitsmomente negativ) ergibt sich der unten zu sehende erste Teil der Tabelle. Man beachte, dass nur für den schattierten Teil die einzutragenden Werte aus der Aufgabenskizze entnommen werden müssen. Alle weiteren Werte folgen aus vorherigen Tabelleneinträgen. Vor der Auswertung des zweiten Tabellenteils muss die Lage des Schwerpunkts der zusammengesetzten Fläche ermittelt werden, dessen Koordinaten aus dem ersten Tabellenteil berechnet werden:

$$\bar{x}_S = \frac{\Sigma_5}{\Sigma_1} = 4,863 \text{ mm} ; \quad \bar{y}_S = \frac{\Sigma_6}{\Sigma_1} = 4,989 \text{ mm} .$$



i	A_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	I_{xixi}	I_{yiyi}	I_{xixi}	$A_i \bar{x}_i$	$A_i \bar{y}_i$
1	44,0	2	5,5	443,7	58,7	0	88,0	242,0
2	48,0	7	4	256,0	144,0	0	336,0	192,0
3	-12,6	3	3	-12,6	-12,6	0	-37,7	-37,7
	$\Sigma_1 = 79,4$			$\Sigma_2 = 687,1$	$\Sigma_3 = 190,1$	$\Sigma_4 = 0$	$\Sigma_5 = 386,3$	$\Sigma_6 = 396,3$

Mit den nun bekannten Schwerpunktkoordinaten \bar{x}_S und \bar{y}_S kann auch der zweite Teil der Tabelle ausgefüllt werden, wobei man nur formal den angegebenen Rechenvorschriften folgen muss:

i	$\bar{x}_i - \bar{x}_S$	$\bar{y}_i - \bar{y}_S$	$A_i(\bar{x}_i - \bar{x}_S)^2$	$A_i(\bar{y}_i - \bar{y}_S)^2$	$-A_i(\bar{x}_i - \bar{x}_S)(\bar{y}_i - \bar{y}_S)$
1	-2,863	0,511	360,7	11,49	64,37
2	2,137	-0,989	219,2	46,96	101,45
3	-1,863	-1,989	-43,6	-49,72	46,57
			$\sum_7 = 536,2$	$\sum_8 = 8,73$	$\sum_9 = 212,4$

Mit diesen Werten berechnet man die Flächenträgheitsmomente der Gesamtfläche bezüglich des x - y -Koordinatensystems, das (parallel zu \bar{x} , \bar{y}) im Schwerpunkt der Gesamtfläche liegt:

$$I_{xx} = \sum_2 + \sum_8 = 695,8 \text{ mm}^4 ;$$

$$I_{yy} = \sum_3 + \sum_7 = 726,3 \text{ mm}^4 ;$$

$$I_{xy} = \sum_4 + \sum_9 = 212,4 \text{ mm}^4 .$$

Damit ergeben sich die Hauptträgheitsmomente (bezüglich der Hauptachsen 1 und 2):

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{4} + I_{xy}^2}$$

$$\Rightarrow I_1 = 924 \text{ mm}^4 ; \quad I_2 = 498 \text{ mm}^4 .$$

Den Winkel zwischen der x -Achse und der Hauptachse 1 berechnet man folgendermaßen:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_{xy}}{I_1 - I_{yy}} = 1,074 \Rightarrow \varphi_1 = 47,1^\circ .$$

Natürlich bieten sich für die Auswertung der Tabellen moderne Tabellenkalkulationsprogramme geradezu an (**Abbildung 16.15**, siehe auch www.TM-aktuell.de).



i	A_i	x_{iq}	y_{iq}	$I_{xx}x_{iq}$	$I_{yy}y_{iq}$	$I_{xy}x_{iq}y_{iq}$	$A_i^*x_i$	$A_i^*y_i$
1	44	2	5,5	443,67	58,7	0	88	242
2	48	7	4	256	144	0	336	192
3	-12,57	3	3	-12,566	-12,57	0	-37,699	-37,699
4						0	0	0
5						0	0	0
6						0	0	0
7						0	0	0
	79,434			687,1	190,13	0	386,3	396,301

i	$x_{iq}-x_S$	$y_{iq}-y_S$	$A_i^*(x_{iq}-x_S)^2$	$A_i^*(y_{iq}-y_S)^2$	$A_i^*(x_{iq}-x_S)(y_{iq}-y_S)$
1	-2,863	0,5109	360,706	11,486	64,366
2	2,1368	-0,989	219,166	46,958	101,45
3	-1,863	-1,989	-43,624	-49,718	46,571
4					
5					
6					
7			536,248	8,725	212,38

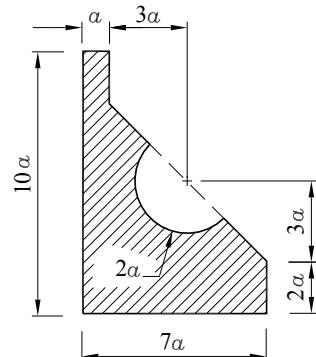
Xs = 4,86319
 Ys = 4,98908
 bx = 695,825
 ly = 726,301
 lxy = 212,384
 M = 924,036
 I2 = 498,17
 phi1 = 47,0573

Abbildung 16.15: Auswertung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, hier: MS-Excel

Beispiel 2:

Für die skizzierte Fläche sind die Koordinaten des Schwerpunkts, die Hauptträgheitsmomente und die Lage der Hauptzentralachsen zu berechnen.

Bei der Aufteilung der Fläche in Teilflächen und Festlegung der lokalen Koordinatensysteme (parallel zu einem globalen Koordinatensystem!) wird man feststellen, dass sich die im Abschnitt 16.2.2 angegebenen Formeln für mindestens eine Fläche auf ein anders liegendes Koordinatensystem beziehen. Für diese Teilfläche müssen die Transformationsformeln für die Drehung des Koordinatensystems 16.12 genutzt werden.



Bei der Einteilung der Fläche entsprechend **Abbildung 16.16** in zwei Rechteckflächen, eine Dreiecksfläche und eine Halbkreisfläche (als Fehlfläche) sind für die ersten drei Teilflächen die Koordinaten der Schwerpunkte sofort anzugeben.

Für die Halbkreisfläche, deren Schwerpunkt auf ihrer Symmetriearchachse liegt, ist e durch die Formel 16.11 gegeben (Sonderfall des Kreissektors bzw. Kreisabschnitts, vgl. auch Abschnitt 4.2).

Da die Halbkreisfläche unter einem Winkel von 45° gedreht liegt, sind die horizontale und vertikale Komponente von e gleich groß:

$$e_h = e_v = \frac{8a}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a .$$

Aus diesen Komponenten und den gegebenen Koordinaten des Mittelpunktes des Halbkreises ergeben sich die Koordinaten \bar{x}_4 und \bar{y}_4 bezüglich des skizzierten Koordinatensystems:

$$\bar{x}_4 = \left(4 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \right) a , \quad \bar{y}_4 = \left(5 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \right) a .$$

Für das im Halbkreis eingetragene x^* - y^* -Koordinatensystem (für diese Teilfläche die Hauptzentralachsen) sind die Flächenträgheitsmomente als Formeln 16.11 im Abschnitt 16.2.3 bereits bereitgestellt worden (die Drehung des Koordinatensystems um 180° ist prinzipiell für die Flächenträgheitsmomente bedeutungslos):

$$I_{x^*x^*} = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} 16a^4 , \quad I_{y^*y^*} = 2\pi a^4 , \quad I_{x^*y^*} = 0 .$$

Die Beziehungen für die Drehung des Bezugskoordinatensystems 16.12 im Abschnitt 16.2.5 transformieren mit $\varphi = 45^\circ$ und damit $\cos 2\varphi = 0$ und $\sin 2\varphi = 1$ die Flächenträgheitsmomente aus dem x^* - y^* -System in ein ξ - η -System (hier mit dem x_4 - y_4 -System identisch):

$$I_{\xi\xi} = I_{x4y4} = \left(2\pi - \frac{64}{9\pi} \right) a^4 , \quad I_{\eta\eta} = I_{y4y4} = \left(2\pi - \frac{64}{9\pi} \right) a^4 , \quad I_{\xi\eta} = I_{x4y4} = \frac{64}{9\pi} a^4 .$$

Der Rest ist wieder formales Einspeichern in die Tabelle und Abarbeiten des 8-Punkte-Algorithmus, der am Beginn des Abschnitts 16.2.6 beschrieben wurde. Die komplette Tabellenrechnung findet man unter www.TM-aktuell.de.

Aber es geht natürlich noch wesentlich bequemer. Neben der Möglichkeit, ein Tabellenkalkulationsprogramm zu nutzen, ist die Berechnung von Flächenträgheitsmomenten ein geeigneter Kandidat für die Benutzung eines so genannten „WYSIWYG-Programms“¹, wie man es mit dem Script „Flächenträgheitsmomente - Online-Berechnung“ unter www.TM-interaktiv.de findet.

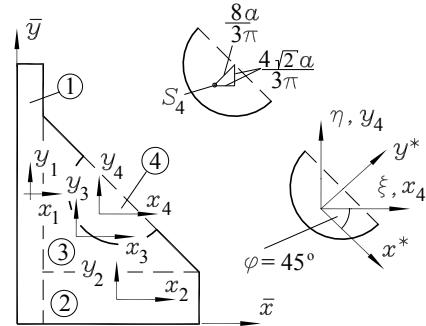


Abbildung 16.16: Rechteck + Rechteck + Dreieck – Halbkreis



¹Zu diesem Begriff vgl. auch die Erläuterungen auf Seite 213

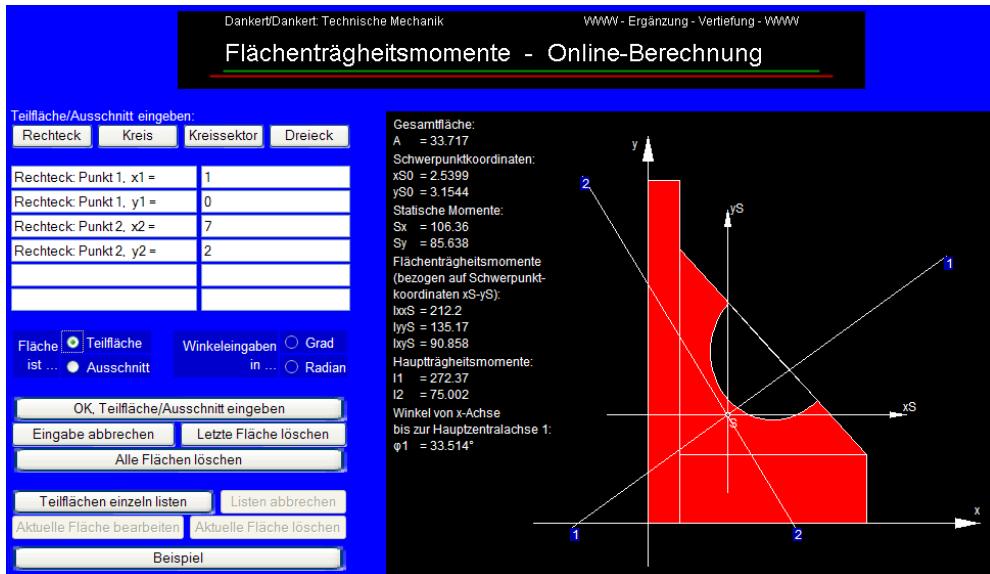


Abbildung 16.17: Besonders komfortabel: Der Benutzer beschreibt die Fläche, und die Software zeichnet und berechnet alle interessierenden Parameter

Die **Abbildung 16.17** zeigt das Ergebnis für das Beispiel 2, das man auf diesem Wege ohne die auf der Seite 233 angestellten Überlegungen erhält.

Und da ist sie natürlich schon wieder, die Frage: „Und warum muss ich das alles lernen, wenn es mit der verfügbaren Software so einfach ist?“

Zum ersten Mal wurde diese Frage auf der Seite 46 beantwortet. Alles, was dort zu lesen ist, gilt auch hier.

Für das Thema „Flächenträgheitsmomente“ kommt noch ein wichtiges Argument hinzu: Die Biegebeanspruchung von Trägern ist wohl das häufigste (und besonders kritische) Problem in der Festigkeitslehre. Die Flächenträgheitsmomente bilden die Grundlage für die Beurteilung der Tragfähigkeit, und man sollte unbedingt ein Gefühl dafür entwickeln, wie man ihre Größe beeinflussen kann. Das gelingt nur durch das Berechnen von möglichst vielen Beispielen, denn die Größe eines Parameters mit der merkwürdigen Dimension cm^4 entzieht sich zunächst ganz sicher der Vorstellungskraft.

Noch viel weniger kann man sich unter dem Deviationsmoment I_{xy} vorstellen. Zunächst genügt es, ein $I_{xy} \neq 0$ als „Spielverderber“ anzusehen: Es bedeutet, dass die Biegespannungsformel 16.3 (Seite 217) nicht verwendet werden darf. Deshalb kommt den Hauptzentralachsen eine besondere Bedeutung zu, und als Test, ob man schon ein „Gefühl“ für das gesamte Thema „Flächenträgheitsmomente“ hat, kann empfohlen werden: **Vor** der Berechnung eines Beispiels (ob „von Hand“ oder mit Software-Unterstützung) sollte man versuchen abzuschätzen, welche Lage die Hauptzentralachse 1 für diese Fläche haben wird.

16.2.7 Durch Polygonzüge begrenzte Flächen, beliebig berandete Flächen

Für Querschnitte, die sich nur mit Schwierigkeiten oder gar nicht in Standardquerschnitte zerlegen lassen (diese Zerlegung war Voraussetzung für die Beispiele im Abschnitt 16.2.6), liefert in jedem Fall das nachfolgend beschriebene Verfahren eine Lösung, zumindest eine ausgezeichnete Näherungslösung. Behandelt wird eine Fläche, deren Außenkontur und (beliebig viele) Innenkonturen (Ausschnitte) sich durch Polygonzüge beschreiben lassen (**Abbildung 16.18**).

Zunächst wird ein einzelnes Geradenstück der Außenkontur betrachtet (**Abbildung 16.19**): Die Gerade 1 – 2 schließt mit den Koordinatenachsen Flächen (Trapeze) ein, die durch Integrale ausgedrückt und wie folgt mit Vorzeichen behaftet werden:

$$\Delta A_{\bar{x}} = - \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \bar{y} d\bar{x} \quad , \quad \Delta A_{\bar{y}} = \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \bar{x} d\bar{y}$$

(mit dem Δ wird angedeutet, dass ein Trapez als Teilfläche betrachtet wird). Wenn Punkt 2 links von Punkt 1 liegt, kehren sich die Vorzeichen der Flächen automatisch um. Es ist leicht nachzuvollziehen, dass für einen geschlossenen Polygonzug bei Nummerierung der Punkte entgegen dem Uhrzeigersinn die Summe aller (mit den $\Delta A_{\bar{x}}$ oder den $\Delta A_{\bar{y}}$ gebildeten) Trapezflächen die von dem Polygon umschlossene Gesamtfläche liefert (sinnvoll für Außenkontur), bei Nummerierung im Uhrzeigersinn wird das Ergebnis negativ (sinnvoll für Ausschnitte).

Dieses bereits im Abschnitt 4.5.1 für die Berechnung von Flächenschwerpunkten genutzte Verfahren wird nun auf die statischen Momente und Flächenträgheitsmomente erweitert.

Die *statischen Momente* der Trapeze setzen sich aus den statischen Momenten unendlich vieler unendlich schmaler Rechtecke zusammen, für das statische Moment bezüglich der \bar{x} -Achse sind dies z. B. Rechtecke $\bar{y} d\bar{x}$ mit dem Schwerpunkt bei $\frac{\bar{y}}{2}$:

$$\Delta S_{\bar{x}} = - \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{\bar{y}^2}{2} d\bar{x} \quad , \quad \Delta S_{\bar{y}} = \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{\bar{x}^2}{2} d\bar{y} \quad .$$

Bei den *axialen Flächenträgheitsmomenten* ist zu beachten, dass das unendlich schmale Rechteck $\bar{y} d\bar{x}$ mit dem Schwerpunkt bei $\frac{\bar{y}}{2}$ z. B. bezüglich der \bar{x} -Achse einschließlich eines Steiner-Anteils aufzuschreiben ist:

$$\Delta I_{\bar{x}\bar{x}} = - \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \left[\frac{\bar{y}^3 d\bar{x}}{12} + \left(\frac{\bar{y}}{2} \right)^2 \bar{y} d\bar{x} \right] = - \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{\bar{y}^3}{3} d\bar{x} \quad , \quad \Delta I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{\bar{x}^3}{3} d\bar{y} \quad .$$

Dementsprechend ist für das Deviationsmoment für ein unendlich schmales Rechteck nur der Steiner-Anteil zu beachten, dessen negatives Vorzeichen nach 16.10 für das Trapez unter der Geraden 1 – 2 das positive Vorzeichen vor dem Integral erzeugt:

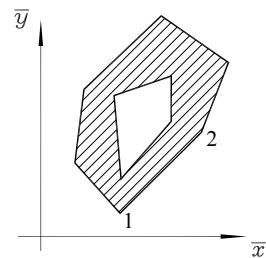


Abbildung 16.18: Durch Polygonzüge begrenzte Fläche mit Ausschnitten

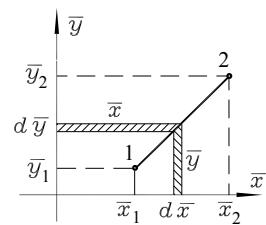


Abbildung 16.19: Ein Geradenstück der Außenkontur

$$\Delta I_{\bar{x}\bar{y}} = - \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \left(-\bar{x} \frac{\bar{y}}{2} \bar{y} d\bar{x} \right) = + \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{\bar{x}\bar{y}^2}{2} d\bar{x} .$$

Zur Auswertung der Integrale wird die Geradengleichung benötigt, als Zwei-Punkte-Gleichung wahlweise nach \bar{x} oder \bar{y} aufgelöst:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} (\bar{y} - \bar{y}_1) + \bar{x}_1 , \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} (\bar{x} - \bar{x}_1) + \bar{y}_1 .$$

Die Auswertung der Integrale ist nicht schwierig (aber mühsam). Durch Summation über alle Geradenstücke, die einen geschlossenen Polygonzug bilden müssen, erhält man die

Flächenkennwerte einer von einem geschlossenen Polygonzug begrenzten Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_i (\bar{y}_{i+1} \bar{x}_i - \bar{y}_i \bar{x}_{i+1}) , \\ S_{\bar{x}} &= \frac{1}{6} \sum_i (\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1}) (\bar{y}_{i+1} \bar{x}_i - \bar{y}_i \bar{x}_{i+1}) , \\ S_{\bar{y}} &= \frac{1}{6} \sum_i (\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1}) (\bar{y}_{i+1} \bar{x}_i - \bar{y}_i \bar{x}_{i+1}) , \\ I_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{1}{12} \sum_i [\bar{y}_{i+1}^2 + (\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1}) \bar{y}_i] (\bar{y}_{i+1} \bar{x}_i - \bar{y}_i \bar{x}_{i+1}) , \\ I_{\bar{y}\bar{y}} &= \frac{1}{12} \sum_i [\bar{x}_{i+1}^2 + (\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1}) \bar{x}_i] (\bar{y}_{i+1} \bar{x}_i - \bar{y}_i \bar{x}_{i+1}) , \\ I_{\bar{x}\bar{y}} &= \frac{1}{12} \sum_i \left[\frac{1}{2} \bar{x}_{i+1}^2 \bar{y}_i^2 - \frac{1}{2} \bar{x}_i^2 \bar{y}_{i+1}^2 - (\bar{y}_{i+1} \bar{x}_i - \bar{y}_i \bar{x}_{i+1}) (\bar{x}_i \bar{y}_i + \bar{x}_{i+1} \bar{y}_{i+1}) \right] . \end{aligned} \quad (16.15)$$

Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\bar{x}_S = \frac{S_{\bar{y}}}{A} , \quad \bar{y}_S = \frac{S_{\bar{x}}}{A} . \quad (16.16)$$

Flächenträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunkt-Koordinatensystems:

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_S^2 A , \quad I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_S^2 A , \quad I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}_S \bar{y}_S A . \quad (16.17)$$

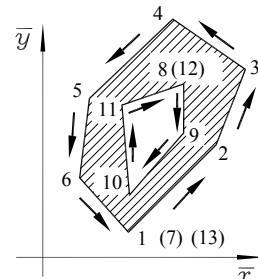
- ⇒ Ein geschlossener Polygonzug aus n Geradenstücken mit n Eckpunkten wird in den Formeln 16.15 durch $n+1$ Punkte dargestellt, indem der Startpunkt als Endpunkt noch einmal verwendet wird. Dabei sind die Punkte entgegen dem Uhrzeigersinn abzuarbeiten.
- ⇒ Innenkonturen (Ausschnitte) sind im Uhrzeigersinn abzuarbeiten. Da bei formaler Anwendung der Formeln auch das Geradenstück zwischen dem letzten Punkt der Außenkontur und dem ersten Punkt der Innenkontur einen Anteil liefert und damit die Rechnung verfälschen würde, muss entweder die Innenkontur gesondert behandelt werden, oder man hält sich an folgende einfache Regel (ein zweimal in unterschiedlichen Richtungen durchlaufendes Geradenstück liefert zwei gleiche Anteile, die sich aufheben):

Die Außenkontur wird, beginnend mit einem beliebigen Punkt, entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen. Vom Endpunkt (gleich Startpunkt) geht man zu einem beliebigen Punkt einer Innenkontur, die dann im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, vom Endpunkt (gleich Startpunkt) der Innenkontur eventuell zu weiteren Innenkonturen (sämtlich im Uhrzeigersinn zu durchlaufen). Nach Durchlaufen der letzten Innenkontur geht man über die Verbindungslien der einzelnen Konturen bis zum Startpunkt der Außenkontur zurück. Die Summen in den Formeln 16.15 erstrecken sich über alle auf diesem Weg berührten Punkte.

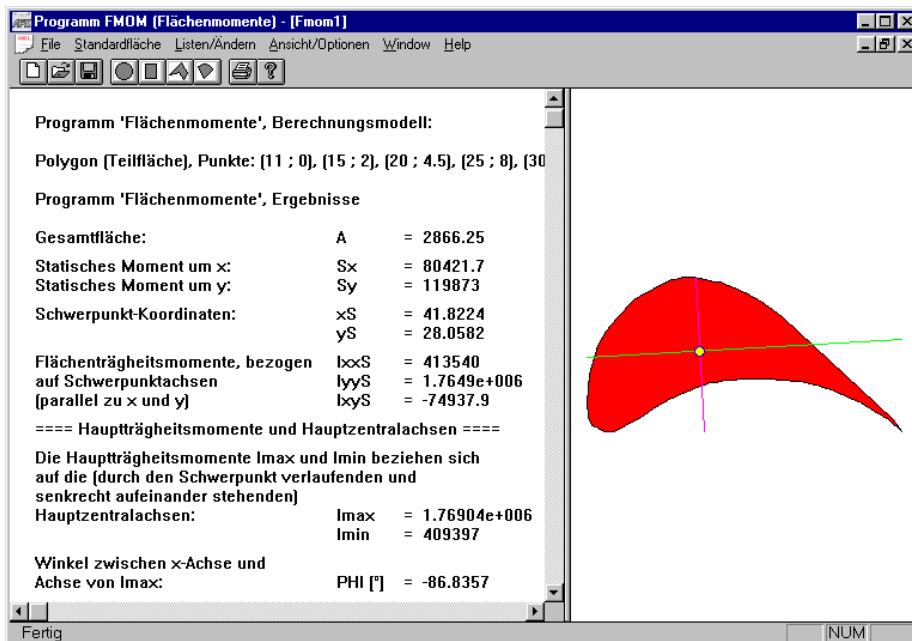
Beispiel:

Für die nebenstehend skizzierte Fläche mit einer Außenkontur mit 6 Punkten und einer Innenkontur (Ausschnitt) mit 4 Punkten erstrecken sich die Summen in den Formeln 16.15 über insgesamt 13 Summanden. Dabei könnten die Knotenkoordinaten z. B. in folgender Reihenfolge berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 (=1) \rightarrow \\ 8 &\rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12 (=8) \rightarrow 13 (=1) \end{aligned}$$



Für viele krummlinig berandete Flächen, die nicht durch mathematische Funktionen beschrieben werden können, ist die Annäherung durch Polygone häufig die einzige Möglichkeit, um die Flächenkennwerte zu ermitteln. Der nachfolgende Bildschirm-Schnappschuss zeigt die Berechnung der Flächenkennwerte für eine Turbinenschaufel, deren Kontur als Polygon mit insgesamt 43 Punkten genähert wurde (siehe www.TM-aktuell.de):



16.3 Gültigkeit der Biegespannungsformel, Widerstandsmomente, Beispiele

Zur Erinnerung: Die *Biegeachse* ist die Achse in der Querschnittsfläche, um die das Biegemoment M_b dreht. Sie steht senkrecht auf der *Lastebene*, in der die Wirkungslinien aller Kräfte liegen. Nur wenn die Biegeachse x eine Hauptzentralachse der Querschnittsfläche ist, gilt die einfache Biegespannungsformel

$$\sigma_b = \frac{M_b}{I_{xx}} y .$$

Auf diese wichtige Einschränkung soll mit dem nachfolgenden Beispiel noch einmal aufmerksam gemacht werden.

Beispiel 1:

Ein Träger mit Dreiecksquerschnitt ist einseitig eingespannt und nur durch sein Eigengewicht belastet (in den Skizzen durch die konstante Liniенlast angedeutet). Für den nebenstehend skizzierteren Querschnitt (gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck) sind die Achsen 1 und 2 die Hauptzentralachsen (1 ist Symmetriechse) mit den Hauptträgheitsmomenten

$$I_1 = \frac{a^4}{24} , \quad I_2 = \frac{a^4}{72} .$$

- a) In der ersten Einbauvariante wird der Träger um die Achse des kleinsten Flächenträgheitsmoments gebogen, und in die Biegespannungsformel ist einzusetzen:

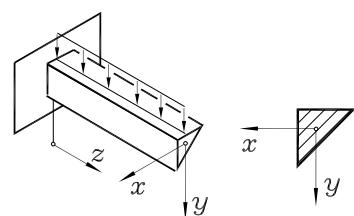
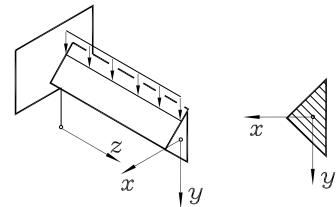
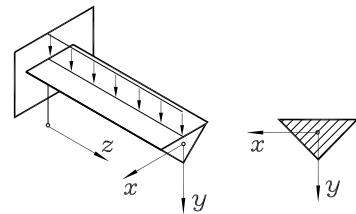
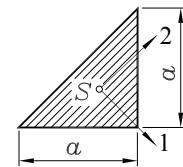
$$I_{xx} = \frac{a^4}{72} .$$

- b) In der um 90° gedrehten Einbauvariante wird der Träger um die Achse des Hauptträgheitsmoments I_1 gebogen, und in die Biegespannungsformel ist einzusetzen:

$$I_{xx} = \frac{a^4}{24} .$$

- c) In der letzten Einbauvariante ist die x -Achse, um die das Biegemoment M_b infolge der Belastung in der Lastebene $y-z$ dreht, keine Hauptzentralachse, und es gilt: $I_{xx} = I_{yy} = \frac{a^4}{36}$ und $I_{xy} = -\frac{a^4}{72}$, (vgl. Abschnitt 16.2.2). **Deshalb darf die einfache Biegespannungsformel nicht verwendet werden.** Die Biegespannungen müssen nach den (im Abschnitt 19.1 behandelten) Regeln der schiefen Biegung berechnet werden.

Es soll aber schon hier erwähnt werden, dass sich der Träger (im Unterschied zu den Einbauvarianten a und b) bei der Einbauvariante c nicht nur in der Belastungsebene verformt, sondern auch in x -Richtung ausweicht.



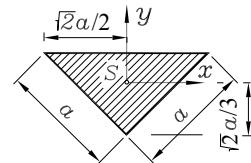
Die *absolut größte Biegespannung* in einem Querschnitt tritt in dem Punkt auf, der den absolut größten Abstand e_{max} von der Biegeachse hat. Das als Quotient des zugehörigen Flächenträgheitsmoments I und des Abstands e_{max} definierte *Widerstandsmoment* W kann genutzt werden, um die absolut größte Biegespannung $|\sigma_b|_{max}$ im Querschnitt zu berechnen:

$$W = \frac{I}{e_{max}} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_b|_{max} = \frac{|M_b|}{W} .$$

Die Biegeachse muss dabei natürlich eine der beiden Hauptzentralachsen des Querschnitts sein: *Widerstandsmomente beziehen sich immer auf Hauptzentralachsen*. Im allgemeinen Fall gehören zu einem Querschnitt also zwei Widerstandsmomente.

Für die Hauptzentralachsen des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks aus Beispiel 1 erhält man mit den aus der Skizze abzulesenden maximalen Entfernungen von den beiden Hauptzentralachsen:

$$W_x = \frac{I_2}{\frac{1}{3}\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}a^3}{48} , \quad W_y = \frac{I_1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}a^3}{24} .$$



Die Formel für die maximale Biegespannung (mit dem Widerstandsmoment im Nenner) liefert keine Aussage darüber, ob diese Spannung eine Druck- oder Zugspannung ist. Wenn diese Information benötigt wird (und man der durch Anschauung eigentlich immer zu gewinnenden Aussage nicht traut), muss mit der allgemeinen Biegespannungsformel 16.3 (mit dem Flächenträgheitsmoment im Nenner) gearbeitet werden. Diese liefert bei Einhaltung der Konventionen über die Koordinaten und die Definition positiver Biegemomente für jeden Punkt des Querschnitts die Biegespannung mit dem richtigen Vorzeichen.

Für Querschnitte, die zur Biegeachse symmetrisch sind, ist diese Überlegung meist schon deshalb belanglos, weil die maximale Biegespannung an einem Rand des Querschnitts als Druckspannung und in gleicher Größe am gegenüberliegenden Rand als Zugspannung auftritt.

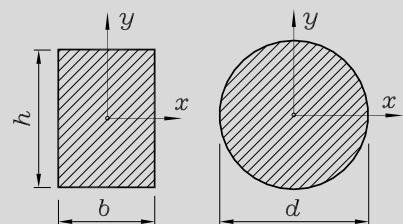
Dies gilt z. B. für das Rechteck und den Kreis. Aus den Formeln für die Flächenträgheitsmomente (Abschnitt 16.2.2) errechnet man die

Widerstandsmomente für Rechteck und Kreis:

$$\text{Rechteck: } W_x = \frac{bh^3}{6} , \quad W_y = \frac{hb^3}{6} .$$

$$\text{Kreis: } W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} .$$

(16.18)



Das Widerstandsmoment W einer Querschnittsfläche ist ein Maß für die *Festigkeit des Querschnitts* gegenüber einer Biegebelastung, das Flächenträgheitsmoment ist ein Maß für die *Steifigkeit* (gegen Verformung). Widerstandsmomente haben die Dimension "Länge hoch 3", z. B.: cm^3 . Weil sie als Quotient und nur für die Biegung um Hauptzentralachsen definiert sind, gilt bei Querschnittsflächen, die sich aus mehreren Teilflächen zusammensetzen, gegenüber den Flächenträgheitsmomenten folgender wichtiger Unterschied:

Im Gegensatz zu den Flächenträgheitsmomenten dürfen Widerstandsmomente in keinem Fall addiert (subtrahiert) werden, auch dann nicht, wenn sie sich auf die gleiche Achse beziehen.

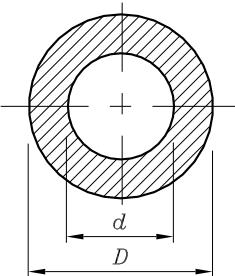
Beispiel 2: Es ist das Widerstandsmoment der skizzierten Kreisringfläche zu ermitteln.

Weil Widerstandsmomente nicht addiert bzw. subtrahiert werden dürfen, wird zuerst das Flächenträgheitsmoment als Differenz

$$I_O = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

berechnet, um dann das Widerstandsmoment zu ermitteln:

$$W_O = \frac{I_O}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} .$$



Man überzeugt sich leicht, dass die Differenz der beiden Widerstandsmomente des äußeren und inneren Kreises mit den Formeln 16.18 zu einem anderen (falschen!) Ergebnis führen würde.

Da für die Dimensionierung auf Festigkeit die maximale Spannung maßgebend ist, muss für jeden Querschnitt eines Biegeträgers die Beziehung

$$|\sigma_b|_{max} = \frac{|M_b|}{W} \leq \sigma_{zul} \quad (16.19)$$

erfüllt sein. Bei Biegeträgern mit konstantem Querschnitt bestimmt das maximale Biegemoment den gefährdeten Querschnitt, für den dann zweckmäßig zunächst das erforderliche Widerstandsmoment nach

$$W_{erf} = \frac{|M_b|_{max}}{\sigma_{zul}} \quad (16.20)$$

ermittelt wird, um danach die erforderlichen Querschnittsabmessungen festzulegen.

Für Materialien mit unterschiedlichen ertragbaren Spannungen im Zug- und Druckbereich sind natürlich dann, wenn der Querschnitt nicht symmetrisch zur Biegeachse ist, gesonderte Betrachtungen für die gezogene bzw. die gedrückte Faser des Biegeträgers anzustellen.

Beispiel 3: Ein Biegeträger ist aus einem Flachstahl mit Rechteckquerschnitt (Breite 100 mm, Höhe 10 mm) und einem Normprofil L50 (DIN EN 10055, früher: DIN 1024, Querschnittswerte siehe Abbildung 16.20) zusammengeschweißt. Es ist das für den skizzierten Belastungsfall maßgebliche Widerstandsmoment zu ermitteln.

Der Schwerpunkt der zusammengesetzten Fläche liegt auf der Symmetrielinie. Seine Lage in vertikaler Richtung wird im gewählten \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem (nebenstehende Skizze) aufgeschrieben:

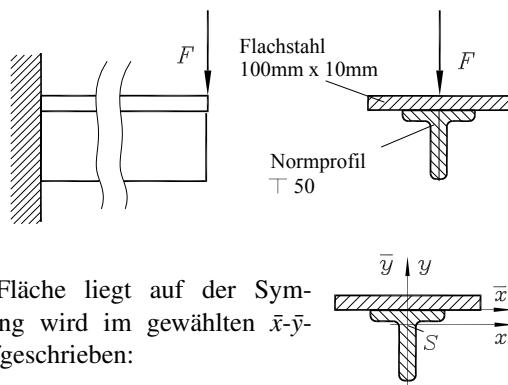


Abbildung 16.20 zeigt den Querschnitt eines L50-Profilen und eine Tabelle mit seinen geometrischen Werten:

b	h	A	e_x	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y
mm	mm	cm^2	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3
50	50	5,66	1,39	12,1	3,36	6,06	2,42

Abbildung 16.20: Querschnittswerte für Normprofil L50

$$\bar{y}_S = \frac{1}{1000+566} (1000 \cdot 5 - 566 \cdot 13,9) \text{ mm} = -1,831 \text{ mm} .$$

Da bei dem skizzierten Lastfall die x -Achse (Schwerpunkt-Achse der Gesamtfläche) die Biegeachse ist, muss vor der Ermittlung des Widerstandsmoments das Flächenträgheitsmoment I_{xx} der Gesamtfläche berechnet werden:

$$I_{xx} = \left[\frac{100 \cdot 10^3}{12} + 1000 \cdot (5 + 1,831)^2 + 121000 + 566 \cdot (-13,9 + 1,831)^2 \right] \text{ mm}^4 = 25,84 \text{ cm}^4 .$$

Den größten Abstand zum Schwerpunkt hat die untere Randfaser. Mit

$$e_{\max} = h - |\bar{y}_S| = (5 - 0,1831) \text{ cm} = 4,8169 \text{ cm}$$

ergibt sich das Widerstandsmoment:

$$W_x = \frac{I_{xx}}{e_{\max}} = 5,37 \text{ cm}^3 .$$

Beispiel 4:

Ein Träger mit Quadratquerschnitt bei linear veränderlicher Kantenlänge ist nur durch eine Kraft F belastet. Man ermittle in Abhängigkeit von F , l und a_0 Ort und Größe der maximalen Biegespannung für

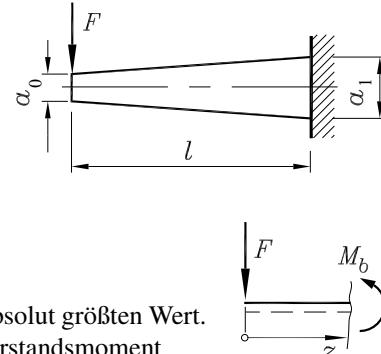
$$a) \frac{a_1}{a_0} = 2 ; \quad b) \frac{a_1}{a_0} = 1,25 ; \quad c) \frac{a_1}{a_0} = 1 .$$

Das Biegemoment (nebenstehende Skizze)

$$M_b(z) = -Fz$$

ist linear veränderlich und hat an der Einspannung seinen absolut größten Wert.

Da auch die Querschnittsabmessungen und damit das Widerstandsmoment



$$W(z) = \frac{a^3(z)}{6} \quad \text{mit} \quad a(z) = a_0 + (a_1 - a_0) \frac{z}{l}$$

von der Koordinate z abhängen, muss die größte Biegespannung durch eine Extremwertberechnung gewonnen werden. Nach 16.8 ergibt sich der Betrag der Spannung in Abhängigkeit von z zu

$$|\sigma_b(z)| = \frac{6Fz}{a^3(z)} = \frac{6Fz}{\left[a_0 + (a_1 - a_0) \frac{z}{l}\right]^3} .$$

Zur Ermittlung des relativen Extremwerts dieser Funktion wird die Nullstelle ihrer Ableitung nach z bestimmt. Aus

$$\frac{d\sigma_b}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 + \frac{a_1 - a_0}{l} \bar{z} - 3 \frac{a_1 - a_0}{l} \bar{z} = 0$$

erhält man den Ort des relativen Extremwerts der Spannungsfunktion:

$$\bar{z} = \frac{a_0 l}{2(a_1 - a_0)} = \frac{l}{2(\frac{a_1}{a_0} - 1)} .$$

Bei der Auswertung ist zu beachten, dass die Spannungsfunktion für beliebige z definiert ist, aber für die Aufgabe nur Lösungen im Bereich $0 \leq z \leq l$ gesucht sind.

$$a) \quad \frac{a_1}{a_0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{b,max} = \sigma_b \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{8}{9} \frac{F l}{a_0^3} .$$

$$b) \text{ Formal ergibt sich mit } \frac{a_1}{a_0} = 1,25 = \frac{5}{4} \Rightarrow \bar{z} = 2l$$

ein Wert für den Ort des relativen Extremwerts, der außerhalb des interessierenden Bereichs liegt, also muss der maximale Wert an einer Bereichsgrenze liegen. Da bei $z = 0$ das Biegemoment (und damit die Spannung) Null ist, liegt der Extremwert bei $z = l$:

$$\sigma_{b,max} = \sigma_b(l) = \frac{384}{125} \frac{F l}{a_0^3} .$$

c) Für den konstanten Querschnitt versagt die Formel für \bar{z} (eine lineare Funktion hat keinen relativen Extremwert). Auch hier ergibt sich die maximale Spannung bei $z = l$:

$$\sigma_{b,max} = \sigma_b(l) = \frac{6F l}{a_0^3} .$$

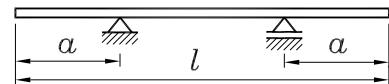
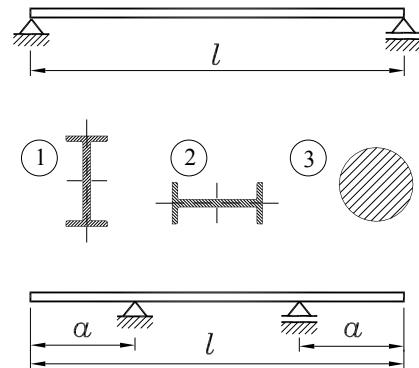
Beispiel 5:

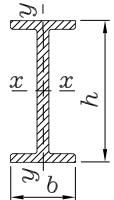
Ein an den Enden gestützter Träger mit konstantem Querschnitt ist nur durch sein Eigengewicht belastet. Welche Länge l darf er maximal haben, ohne dass die zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 240 \text{ N/mm}^2$ überschritten wird bei

- a) einem Träger I200 nach DIN EN 10024 (früher: DIN 1025-1, Querschnittswerte siehe Abbildung 16.21) in der Einbauvariante ①,
- b) dem gleichen Träger in der Einbauvariante ②,
- c) einem Rundstab ③ aus dem gleichen Material und gleicher Masse pro Länge?
- d) Wie lang können die Träger in den Fällen a, b und c sein, wenn sie nicht an den Enden, sondern im günstigsten Abstand a von den Enden symmetrisch gelagert werden?

Die konstante Linienlast wird aus dem Gewicht pro Länge ermittelt:

$$q_0 = 26,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 257 \frac{\text{N}}{\text{m}} .$$





b	h	A	G	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y
mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3
90	200	33,4	26,2	2140	214	117	26,0

Abbildung 16.21: Querschnittswerte für Normprofil I200

Die Lager nehmen jeweils die halbe Gewichtskraft auf, das größte Biegemoment wirkt in Trägermitte:

$$M_{b,max} = \frac{1}{2} q_0 l \frac{l}{2} - q_0 \frac{l}{2} \frac{l}{4} = \frac{1}{8} q_0 l^2 .$$

Bei konstantem Querschnitt ergibt sich dort auch die größte Spannung, und es muss gelten:

$$M_{b,max} = \frac{1}{8} q_0 l^2 = \sigma_{zul} W .$$

Dies wird nach l umgestellt. Mit der zulässigen Spannung erhält man die maximal mögliche Stützweite:

$$l_{max} = \sqrt{\frac{8 \sigma_{zul} W}{q_0}} .$$

Bei der Einbauvariante ① ist die x -Achse die Biegeachse, bei der Einbauvariante ② ist es die y -Achse. Die Widerstandsmomente W_x bzw. W_y können aus der Abbildung 16.21 entnommen werden:

$$a) \quad l_{max,①} = \sqrt{\frac{8 \cdot 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 214000 \text{mm}^3}{0,257 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}} = 39,98 \text{ m} .$$

$$b) \quad l_{max,②} = 13,94 \text{ m} .$$

- c) Ein Rundstab aus gleichem Material bei gleicher Masse pro Länge muss die gleiche Querschnittsfläche wie der Träger I200 haben. Damit ist sein Durchmesser bekannt:

$$A_{Kreis} = \frac{\pi d^2}{4} = 33,4 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad d = 6,521 \text{ cm} .$$

Das Widerstandsmoment errechnet sich nach 16.18, und man erhält die Stützweite:

$$l_{max,③} = \sqrt{\frac{8 \sigma_{zul} \pi d^3}{q_0 \cdot 32}} = \sqrt{\frac{240 \cdot \pi \cdot 65,21^3}{0,257 \cdot 4}} \text{ mm} = 14,26 \text{ m} .$$

Die drei Ergebnisse verdeutlichen den erheblichen Einfluss des Widerstandsmoments einer Querschnittsfläche. Obwohl die Querschnittsflächen gleich sind (gleiches Gesamt-Gewicht der Konstruktionen), weichen die möglichen Stützlängen erheblich voneinander ab.

- d) Für einen beliebigen Lagerabstand a vom Trägerrand erhält man für das Biegemoment an beiden Lagern:

$$M_{b,L} = -\frac{1}{2}q_0a^2$$

und für das Biegemoment in Trägermitte:

$$M_{b,M} = \frac{1}{2}q_0l\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

Das Biegemoment in der Mitte kann sowohl positiv ($a < \frac{l}{4}$) als auch negativ ($a > \frac{l}{4}$) werden. Der Betrag eines negativen Biegemoments in Trägermitte bleibt aber immer kleiner als der Betrag des Biegemoments am Lager, da nur $a < \frac{l}{2}$ sinnvoll ist. Da für ein kleines Biegemoment am Lager die Strecke a möglichst klein sein muss, kommt nur der Fall $a < \frac{l}{4}$ für die günstigste Lagerung in Frage, für den in **Abbildung 16.22** der M_b -Verlauf skizziert ist.

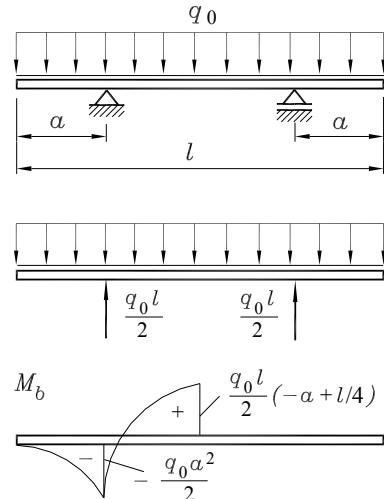


Abbildung 16.22: Lagerreaktionen und M_b -Verlauf bei symmetrischer Lagerung

Der Betrag des Biegemoments am Lager verringert sich mit kleiner werdendem a , der Betrag des Biegemoments in der Trägermitte wird dabei größer. Der günstigste Fall tritt also bei gleichen Beträgen der beiden Biegemomente ein. Damit ist die Bestimmungsgleichung für diesen Fall gegeben. Aus der Forderung

$$\frac{1}{2}q_0l\left(\frac{l}{4} - \bar{a}\right) = \frac{1}{2}q_0\bar{a}^2$$

resultiert eine quadratische Gleichung für die Berechnung der optimalen Lagerstellung \bar{a} :

$$\bar{a}^2 + l\bar{a} - \frac{l^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_{1,2} = -\frac{l}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

Nur eine der beiden Lösungen ist sinnvoll. Aus

$$\bar{a} = (\sqrt{2} - 1)\frac{l}{2} = 0,2071l$$

errechnet sich der Betrag des größten Biegemoments, das an den Lagern und in der Trägermitte auftritt:

$$|M_b|_{max} = \frac{1}{2}q_0\bar{a}^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}q_0l^2$$

Wird dieses Moment in die Formel zur Ermittlung der Stützlängen \bar{l}_{max} für die Einbauvarianten ①, ② und ③ eingesetzt, so ergeben sich folgende Stützlängen:

$$a) \quad \bar{l}_{max,①} = 96,5 \text{ m} \quad ; \quad b) \quad \bar{l}_{max,②} = 33,7 \text{ m} \quad ; \quad c) \quad \bar{l}_{max,③} = 34,4 \text{ m} \quad .$$

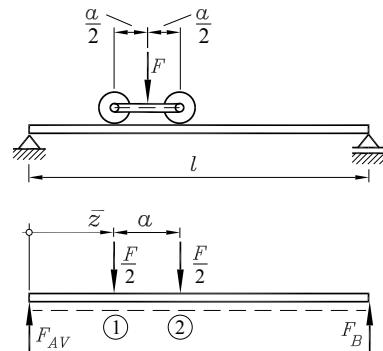
Die errechneten Längen sind für den Fall d deutlich größer als bei Lagerung an den Trägerenden: Durch eine optimale Lagerung kann die Beanspruchung des Materials erheblich verringert werden.

Beispiel 6:

Ein Träger I400 mit einem Widerstandsmoment $W_x = 1460 \text{ cm}^3$ wird durch die Last F , die über die beiden Räder einer Laufkatze übertragen wird, belastet.

Gegeben: $l = 10\text{m}$; $a = 0,8\text{m}$.

Für die ungünstigste Stellung der Laufkatze soll die maximal zulässige Last F berechnet werden, wenn die Spannung $\sigma_{zul} = 160 \text{ N/mm}^2$ nicht überschritten werden darf.



Da der Träger nur durch Einzelkräfte belastet ist, ergibt sich ein stückweise linearer Biegemomentenverlauf mit jeweils einem Knick unter den Kräften $\frac{F}{2}$. Damit kann das größte Biegemoment nur an einer dieser beiden Stellen auftreten. Seine Größe ist von der Stellung der Laufkatze abhängig. Zur Ermittlung der ungünstigsten Laststellung werden die Lagerkräfte und die Biegemomente an den Stellen ① und ② in Abhängigkeit von \bar{z} ermittelt. Die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} F_{AV} &= \frac{F}{2l}(2l - 2\bar{z} - a) ; \quad F_B = \frac{F}{2l}(2\bar{z} + a) ; \\ M_{b,①} &= F_{AV}\bar{z} = \frac{F}{2l}(2l\bar{z} - 2\bar{z}^2 - a\bar{z}) ; \\ M_{b,②} &= F_B(l - \bar{z} - a) = \frac{F}{2l}(2l\bar{z} + al - 2\bar{z}^2 - 3a\bar{z} - a^2) . \end{aligned}$$

Eine Extremwertbetrachtung für die beiden Funktionen $M_{b,①}$ und $M_{b,②}$ liefert:

$$\begin{aligned} M_{b,①} \text{ wird maximal für } 2l - 4\bar{z} - a &= 0 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{l}{2} - \frac{a}{4} ; \\ M_{b,②} \text{ wird maximal für } 2l - 4\bar{z} - 3a &= 0 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{l}{2} - \frac{3a}{4} . \end{aligned}$$

Die Abbildung 16.23 zeigt die berechneten Laststellungen, bei denen das eine bzw. andere Moment am größten wird. Durch Einsetzen der Werte \bar{z}_1 in $M_{b,①}$ bzw. \bar{z}_2 in $M_{b,②}$ werden diese Maximalwerte berechnet. Sie sind erwartungsgemäß gleich groß (symmetrisches Problem):

$$M_{b,max,①} = M_{b,max,②} = \frac{F}{2l} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{al}{2} + \frac{a^2}{8} \right) .$$

Die gesuchte maximal zulässige Kraft F wird aus der Bedingung

$$M_{b,max} = \sigma_{zul} W_x$$

ermittelt und ergibt sich zu:

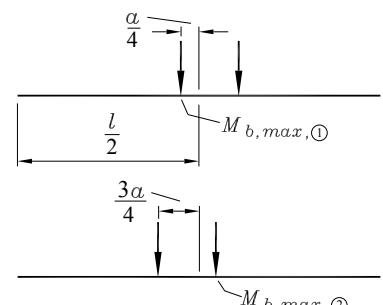


Abbildung 16.23: Die beiden ungünstigsten Laststellungen

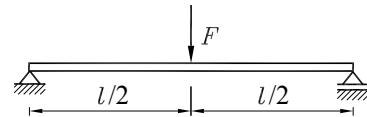
$$F_{max} = \frac{2\sigma_{zul}W_x}{\frac{l}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8l}} = \frac{2 \cdot 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1460 \cdot 10^3 \text{ mm}^3}{(5 - 0,4 + \frac{0,8^2}{80}) \cdot 10^3 \text{ mm}} = 101 \text{ kN} .$$

16.4 Aufgaben

Aufgabe 16.1:

Ein Biegeträger mit Kreisquerschnitt wird durch eine Einzelkraft F belastet.

Gegeben: $l = 3 \text{ m}$; $F = 10 \text{ kN}$

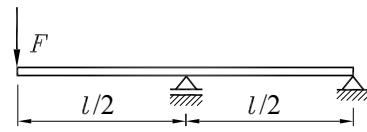


a) Man ermittle den erforderlichen Durchmesser d_{erf} , so dass eine zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 150 \text{ N/mm}^2$ nicht überschritten wird.

b) Welche prozentuale Materialeinsparung ergibt sich beim Ersetzen des Kreisquerschnitts durch einen Kreisringquerschnitt mit $\frac{d}{D} = 0,8$ (Innendurchmesser/Außendurchmesser)?

Aufgabe 16.2:

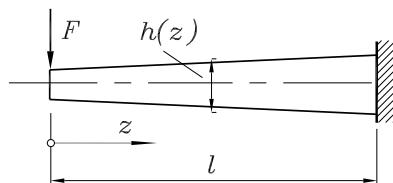
Für den Biegeträger mit Quadratquerschnitt wähle man die Kantenabmessung so, dass bei Belastung durch die Kraft F die zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschritten wird. Anschließend ermittle man die tatsächlich vorhandene Maximalspannung, wenn zusätzlich das Eigengewicht des Trägers (Dichte ρ) berücksichtigt wird.



Gegeben: $l = 1 \text{ m}$; $F = 1 \text{ kN}$; $\sigma_{zul} = 200 \text{ N/mm}^2$; $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$

Aufgabe 16.3:

Ein so genannter *Träger gleicher Festigkeit* ist so dimensioniert, dass in jedem Querschnitt die gleiche maximale Spannung σ_{max} auftritt. Ein Kragträger mit Rechteckquerschnitt (konstante Breite b) soll durch eine veränderliche Höhe $h(z)$ zum Träger gleicher Biegefestigkeit werden.



Gegeben: F , b , σ_{max} . Gesucht: $h(z)$.

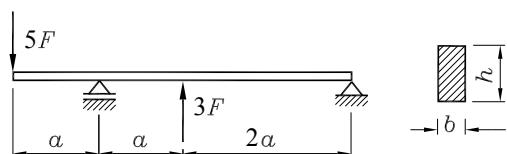
Aufgabe 16.4:

Aus einem kreisrunden Baumstamm mit dem Durchmesser D ist ein Balken mit einem Rechteckquerschnitt $h \cdot b$ so auszuschneiden, dass dieser ein möglichst großes Widerstandsmoment hat. Man ermittle h und b in Abhängigkeit von D .

Aufgabe 16.5:

Für den skizzierten Biegeträger ermittle man

- Ort und Größe des absolut größten Biegemoments $|M_b|_{max}$,
- die erforderliche Breite b für einen Rechteckquerschnitt mit $h = 2b$.



Gegeben: $a = 20 \text{ cm}$; $F = 60 \text{ N}$; $\sigma_{zul} = 160 \text{ N/mm}^2$

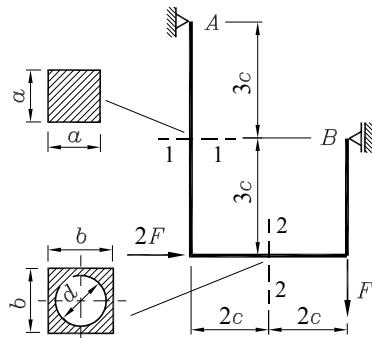
Aufgabe 16.6:

Für den skizzierten Rahmen berechne man

- die Kantenlänge a des Quadrat-Querschnitts 1 – 1,
- den maximal zulässigen Durchmesser d der Bohrung im Schnitt 2 – 2 bei gegebener Kantenlänge des Quadrat-Querschnitts b ,

so dass die zulässige Spannung $\sigma_{b,zul}$ nicht überschritten wird.

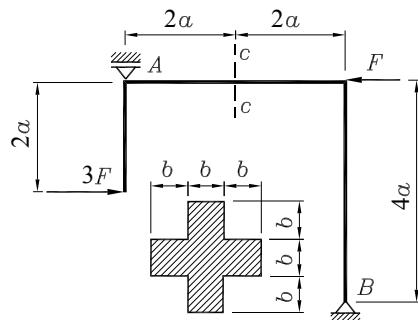
Gegeben: $\sigma_{b,zul} = 240 \text{ N/mm}^2$; $c = 32 \text{ mm}$;
 $F = 160 \text{ N}$; $b = 10 \text{ mm}$.

**Aufgabe 16.7:**

Für den skizzierten Rahmen berechne man

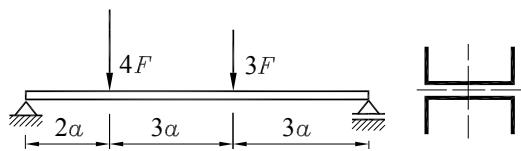
- den Ort und die Größe des absolut größten Biegemoments $|M_b|_{max}$,
- die maximale Biegespannung im Schnitt $c - c$, wenn der Träger dort den skizzierten kreuzförmigen Querschnitt hat.

Gegeben: $F = 1000 \text{ N}$; $a = 87 \text{ cm}$; $b = 3 \text{ cm}$.

**Aufgabe 16.8:**

Der skizzierte Träger ist aus zwei Normprofilen U50 nach DIN 1026 (Querschnittswerte siehe Abbildung 16.24) zusammengeschweißt.

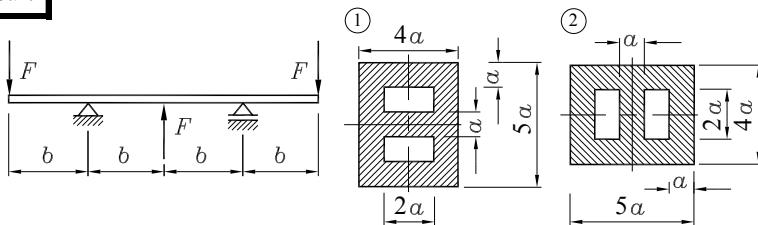
Gegeben: $F = 1,5 \text{ kN}$; $a = 200 \text{ mm}$.



Man ermittle

- den Ort und die Größe des maximalen Biegemoments,
- die maximale Biegespannung für die skizzierte Einbauvariante der Normprofile.
- Wäre eine um 90° gedrehte Einbauvariante der zusammengeschweißten Normprofile für die Größe der entstehenden maximalen Biegespannungen günstiger?

	Abbildung 16.24: Querschnittswerte für Normprofil U50							
b	h	A	G	e	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y
mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3
38	50	7,12	5,59	1,37	26,4	10,6	9,12	3,75

Aufgabe 16.9:

Für den skizzierten Biegeträger berechne man

- den Ort und die Größe des absolut größten Biegemoments $|M_b|_{max}$,
- für eine gegebene zulässige Spannung σ_{zul} die erforderlichen Querschnittsabmessungen $a_{erf,①}$ und $a_{erf,②}$ für die beiden Einbauvarianten ① und ②.

Gegeben: $F = 250\text{ N}$; $b = 6\text{ cm}$; $\sigma_{zul} = 120\text{ N/mm}^2$.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

Das ist Ihnen hoffentlich aufgefallen, lieber Leser: Von den 8 Seiten des Abschnitts 16.3 wurden mehr als 6 Seiten für die Beispiele verwendet, und im Abschnitt 16.4 gab es deutlich mehr Übungsaufgaben als in den vorangegangenen Kapiteln. Das hat im Wesentlichen drei Gründe:

- Die Biegebeanspruchung ist ein ganz besonders wichtiges Thema der Festigkeitslehre, weil in der Regel durch die Biegemomente sehr große Spannungen hervorgerufen werden. Deshalb beschäftigen sich auch die drei folgenden Kapitel noch mit diesem Thema.
- Der in diesem Kapitel behandelte Stoff ist ein besonders typisches (tückisches) Beispiel für die Aussage: „In keinem anderen Fach wird man von der Vorstellung, etwas verstanden zu haben, so ge- und enttäuscht wie in der Technischen Mechanik, wenn man die recht einfach erscheinende Theorie auf praktische Probleme anwendet.“
- Im Abschnitt 16.3 wird deutlich, dass man verloren ist, wenn man den Stoff vorangegangener Kapitel nicht beherrscht: Die Themen „Lagerreaktionen“ und „Schnittgrößen“ (die Themen, die in der Statik erfahrungsgemäß Schwierigkeiten machen) und „Flächenträgheitsmomente“ sind unabdingbare Voraussetzungen für die Biegespannungsberechnung.

Immer wieder „Sigma gleich M durch W“, und doch ist jede Aufgabe anders! Und wenn Sie sich, lieber Leser, gerade auf eine Klausur vorbereiten, in der auch das Thema Biegung ansteht, dann können Sie darauf vertrauen, dass demjenigen, der die Klausur stellt, auch wieder etwas Neues eingefallen ist. Da hilft weder das Lernen von Formeln noch das Einpauken eines Algorithmus. Üben und Aufgaben rechnen (und das immer wieder) ist die einzige empfehlenswerte Strategie. Die vier letzten Aufgaben des Abschnitts 16.4 stammen übrigens aus Klausuren, die die Autoren dieses Buchs ihren Studenten zugemutet haben.

Es gibt aber auch eine angenehme Aussage: Wenn man den im Kapitel 16 behandelten Stoff nicht nur verstanden, sondern auch auf wirklich unterschiedliche Probleme erfolgreich angewendet hat, kann man ein positives Fazit der bisherigen Beschäftigung mit der Technischen Mechanik ziehen und darf an die vielen noch folgenden (und ganz gewiss nicht leichteren) Themen recht optimistisch herangehen.

17 Verformungen durch Biegemomente

17.1 Differenzialgleichung der Biegelinie

Die Theorie der Biegeverformung basiert auf den gleichen Annahmen wie die im Kapitel 16 behandelte Biegespannungsberechnung:

- ⇒ Das Material verformt sich elastisch (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes), die Querschnitte bleiben bei der Verformung eben (Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese).
- ⇒ Die Theorie wird für die „reine Biegung“ (konstantes Biegemoment) formuliert, aber auch auf den allgemeinen Fall (veränderliches Biegemoment) angewendet.
- ⇒ Die Biegeachse (Achse, um die das Biegemoment dreht) ist mit einer Hauptzentralachse des Querschnitts identisch.

Unter diesen Voraussetzungen verformt sich ein ursprünglich gerades Element der Länge dz durch ein (konstantes) Biegemoment M_b so, dass alle Längfasern zu konzentrischen Kreisen werden (**Abbildung 17.1**).

Die Schwerpunktgefaser ($y = 0$) wird bei der Verformung nicht gedehnt (neutrale Faser), deshalb gilt mit dem Krümmungsradius der neutralen Faser ρ :

$$dz = |\rho| d\varphi .$$

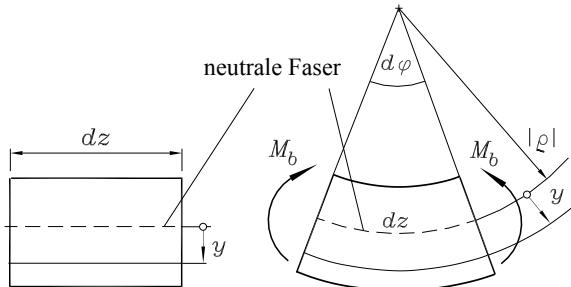


Abbildung 17.1: Das unverformte Element (links) verformt sich durch M_b : Gerade Fasern werden zu konzentrischen Kreisen (Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese)

Eine beliebige Längsfaser im Abstand y vom Schwerpunkt **verlängert** sich um den Betrag

$$(|\rho| + y) d\varphi - dz = |\rho| d\varphi + y d\varphi - dz = y d\varphi$$

und **dehnt** sich also um

$$\varepsilon = \frac{y d\varphi}{dz} = \frac{y d\varphi}{|\rho| d\varphi} = \frac{y}{|\rho|} .$$

Aus der Dehnung kann mit dem Hookeschen Gesetz ($\sigma_b = E\varepsilon$) auf die Spannung in dieser Faser geschlossen werden, die sich andererseits auch nach der Biegespannungsformel 16.3 (Seite 217) aus dem Biegemoment errechnen lässt:

$$\sigma_b = \frac{|M_b|}{I} y = E \varepsilon = E \frac{y}{|\rho|} .$$

Die Querschnittsordinate y hebt sich aus dieser Beziehung heraus, und es ergibt sich der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Verformung:

$$|M_b| = EI \frac{1}{|\rho|} .$$

$\frac{1}{|\rho|}$ ist der Betrag der *Krümmung* einer Kurve:

Die Krümmung der Schwerpunktfaser ist dem Biegemoment proportional. Der Proportionalitätsfaktor EI (Produkt aus Elastizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment bezüglich der Biegeachse) wird als *Biegesteifigkeit* bezeichnet.

- ⇒ Es wird vereinbart: Als Kurve des durch ein Biegemoment verformten Trägers wird die verformte neutrale Faser (*Biegelinie*) angesehen, deren Verschiebung gegenüber der unverformten Lage mit einer Koordinate v (positiv in gleicher Richtung wie die Querschnittsordinate y) gemessen wird (**Abbildung 17.2**).

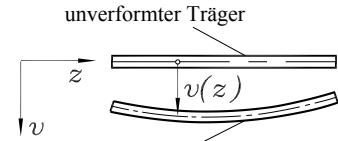


Abbildung 17.2: Biegelinie $v(z)$

Der mathematische Zusammenhang zwischen der Funktion $v(z)$ und der (vorzeichenbehafteten) Krümmung der zugehörigen Kurve ist durch

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (17.1)$$



gegeben (siehe „Mathematik für die Technische Mechanik“ unter www.TM-aktuell.de). Das Vorzeichen der Krümmung wird durch die 2. Ableitung (Änderung des Anstiegs) der Verschiebung v bestimmt.

Die **Abbildung 17.3** zeigt, dass ein positives Biegemoment eine negative Krümmung hervorruft, was beim Weglassen der Betragsstriche in der Verformungsgleichung auf ein Minuszeichen führt:

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_b}{EI} . \quad (17.2)$$

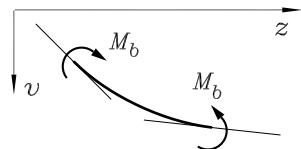


Abbildung 17.3: Verringerung des Tangentenanstiegs ⇒ negatives v'' ⇒ negative Krümmung

Für Materialien, die (im elastischen Bereich) sehr große Verformungen zulassen (z. B.: Stab des Stabhochsprungers), muss mit dieser nichtlinearen Differenzialgleichung gerechnet werden.

Für die in der technischen Praxis besonders häufig vorkommenden sehr kleinen Verformungen ist insbesondere der Anstieg v' ebenfalls sehr klein, so dass das noch viel kleinere $(v')^2$ gegenüber 1 vernachlässigt werden kann (noch bei einem Anstieg von 5° ergibt sich mit $1 + (v')^2 = 1 + (\tan 5^\circ)^2 = 1,00765$ ein Fehler kleiner als 1%). Damit erhält man für kleine Verformungen die

Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung:

$$EI v'' = -M_b . \quad (17.3)$$

Die Biegelinie 2. Ordnung 17.3 ist eine *lineare inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung*, in der der *Koeffizient von v''* (Biegesteifigkeit) und die *rechte Seite* (Biegemoment) von der Koordinate z abhängig sein können.

Zweimaliges Differenzieren von 17.3 führt auf

$$(EIv'')'' = -M_b'' \quad ,$$

und mit den aus der Statik (Abschnitt 7.2, Seite 99) bekannten Differentialbeziehungen 7.1 für die Schnittgrößen

$$M_b' = F_Q \quad , \quad F_Q' = -q \quad \text{bzw.} \quad M_b'' = F_Q' = -q$$

(q ist eine auf den Träger wirkende Linienlast) erhält man (für kleine Verformungen) die

Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung:

$$(EIv'')'' = q \quad . \quad (17.4)$$

In der *linearen inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung 4. Ordnung* 17.4 dürfen die Linienlast q und die Biegesteifigkeit EI von der Koordinate z abhängig sein. Für konstante Biegesteifigkeit EI vereinfacht sich diese Differentialgleichung zur

Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung bei konstanter Biegesteifigkeit:

$$EIv''' = q \quad . \quad (17.5)$$

17.2 Integration der Differentialgleichung

Der einfache Aufbau der **Differentialgleichungen der Biegelinie** gestattet die Lösung durch direktes (zwei- bzw. viermaliges) Integrieren beider Seiten. Dabei sollte gegebenenfalls ein veränderliches EI auf die rechte Seite gebracht werden.

Zu beachten ist, dass jeder Integrationsschritt eine Integrationskonstante erzeugt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung enthält zwei, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung vier Konstanten, die mit Hilfe von *Randbedingungen* bestimmt werden müssen.

Die Randbedingungen für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung dürfen die Ableitungen der gesuchten Funktion bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung enthalten. Beim Arbeiten mit der Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung sind dies Aussagen über die Verschiebung v (Durchbiegung) und den Anstieg der Biegelinie v' (Biegewinkel), beim Arbeiten mit der Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung kommen noch Aussagen über das Biegemoment $M_b = -EIv''$ und die Querkraft $F_Q = -(EIv'')'$ hinzu.

Bei statisch bestimmten Aufgaben stimmt die Anzahl der Randbedingungen mit der Anzahl der Integrationskonstanten überein. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten stehen bei dem nachfolgenden Beispiel 1 die beiden Verformungsbedingungen

$$v(z = l) = 0 \quad , \quad v'(z = l) = 0$$

zur Verfügung (eine Einspannung lässt keine Absenkung zu und erzwingt eine horizontale Tangente), mit denen bei Verwendung der Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung die beiden Integrationskonstanten ermittelt werden können.

Dem Nachteil, bei Verwendung der Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung vorab den Biegemomentenverlauf ermitteln zu müssen, steht bei Verwendung der Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung der Nachteil gegenüber, mehr (und vielfach kompliziertere) Randbedingungen zu benötigen. Zwar könnte bei dem folgenden Beispiel 1 der Integrationsprozess mit der besonders einfachen Differentialgleichung

$$EIv''' = 0 \quad (\text{keine Linienlast!}) \quad \text{bzw.} \quad v''' = 0$$

sofort gestartet werden, für die Bestimmung der 4 Integrationskonstanten müssen aber neben den beiden Verformungsbedingungen am rechten Rand noch je eine Aussage über das Biegemoment und die Querkraft am linken Rand formuliert werden (**Abbildung 17.4**):

$$M_b(z = 0) = -EIv''(z = 0) = 0 \Rightarrow v''(z = 0) = 0 \quad ,$$

$$F_Q(z = 0) = -EIv'''(z = 0) = -F \Rightarrow v'''(z = 0) = \frac{F}{EI} \quad .$$

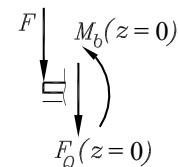
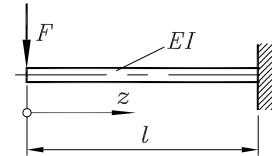


Abbildung 17.4: Schnitt „unendlich nah“ bei F

Beispiel 1:

Ein Kragträger mit konstanter Biegesteifigkeit EI (Quadratquerschnitt mit der Kantenlänge a) ist am linken Rand durch die Kraft F belastet. Man berechne

- die Biegelinie $v(z)$,
- die Absenkung des Lastangriffspunktes.



Gegeben: $l = 1\text{ m}$; $F = 500\text{ N}$; $a = 4\text{ cm}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

- Mit dem Biegemoment $M_b = -Fz$ (**Abbildung 17.5**) startet die Rechnung mit der Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung, die sofort zweimal integriert wird:

$$\begin{aligned} EIv'' &= Fz \quad , \\ EIv' &= \frac{1}{2}Fz^2 + C_1 \quad , \\ EIv &= \frac{1}{6}Fz^3 + C_1z + C_2 \quad . \end{aligned}$$

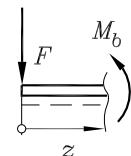


Abbildung 17.5:
 $M_b = -Fz$

Aus den beiden Randbedingungen ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten C_1 und C_2 :

$$\begin{aligned} v(z = l) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{6}Fl^3 + C_1l + C_2 = 0 \quad , \\ v'(z = l) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}Fl^2 + C_1 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Die sich daraus ergebenden Konstanten

$$C_1 = -\frac{1}{2}Fl^2 \quad , \quad C_2 = \frac{1}{3}Fl^3$$

werden in die Funktion $v(z)$ eingesetzt, und man erhält nach einigen elementaren Umformungen die Biegelinie:

$$v(z) = \frac{Fl^3}{6EI} \left[\left(\frac{z}{l} \right)^3 - 3 \frac{z}{l} + 2 \right] \quad .$$

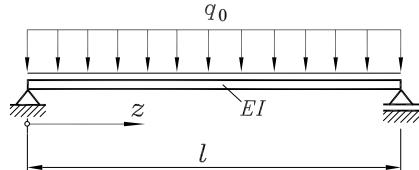
- b) Zur Ermittlung der Durchbiegung unter der Kraft F wird der Koordinatenwert des Kraftangriffspunktes $z = 0$ in die Biegelinie eingesetzt, und es entsteht:

$$v_F = v(z=0) = \frac{Fl^3}{3EI} \quad .$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten und dem Flächenträgheitsmoment für den quadratischen Querschnitt $I = \frac{a^4}{12}$ (Abschnitt 16.2.2) ergibt sich die Durchbiegung am Angriffspunkt der Kraft F zu $v_F = 3,72 \text{ mm}$.

Beispiel 2:

Ein 40 m langer Stahlträger mit dem Normprofil I200 nach DIN EN 10024 (früher: DIN 1025-1) ist an beiden Enden gelenkig gelagert und nur durch sein Eigengewicht belastet. Die erforderlichen Parameter sind der Abbildung 16.21 auf Seite 243 (Biegung um die x -Achse) zu entnehmen (Elastizitätsmodul: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$).



Man berechne die maximale Durchbiegung des Trägers und die maximale Tangentenneigung (Biegewinkel).

Mit der konstanten Linienlast q_0 kann die Rechnung mit der Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung sofort starten:

$$EIv''' = q_0 \quad .$$

Das viermalige Integrieren bis zur Durchbiegung v führt zu vier Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} EIv''' &= q_0 z + C_1 \quad , \\ EIv'' &= \frac{1}{2}q_0 z^2 + C_1 z + C_2 \quad , \\ EIv' &= \frac{1}{6}q_0 z^3 + \frac{1}{2}C_1 z^2 + C_2 z + C_3 \quad , \\ EIv &= \frac{1}{24}q_0 z^4 + \frac{1}{6}C_1 z^3 + \frac{1}{2}C_2 z^2 + C_3 z + C_4 \quad . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten sind vier Randbedingungen erforderlich:

- An jedem Lager muss die Durchbiegung gleich Null sein (zwei Bedingungen).
- An den Trägerenden verschwinden die Biegemomente, wenn dort (wie bei diesem Beispiel) keine äußeren Momente eingeleitet werden (vgl. Abschnitt 7.3, Seite 105), woraus zwei weitere Bedingungen resultieren.

Aus diesen vier Randbedingungen erhält man die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} v(z=0) = 0 &\Rightarrow C_4 = 0 \quad , \\ M_b(z=0) = 0 &\Rightarrow v''(z=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad , \\ &\qquad\qquad\qquad v(z=l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{24} q_0 l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + C_3 l = 0 \quad , \\ M_b(z=l) = 0 &\Rightarrow v''(z=l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l = 0 \quad . \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen werden die Konstanten C_1 und C_3 bestimmt:

$$C_1 = -\frac{1}{2} q_0 l \quad , \quad C_3 = \frac{1}{24} q_0 l^3 \quad .$$

Damit können die Biegelinie und ihre erste Ableitung aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{q_0 l^4}{24 EI} \left[\left(\frac{z}{l}\right)^4 - 2 \left(\frac{z}{l}\right)^3 + \frac{z}{l} \right] \quad , \\ v'(z) &= \frac{q_0 l^3}{24 EI} \left[4 \left(\frac{z}{l}\right)^3 - 6 \left(\frac{z}{l}\right)^2 + 1 \right] \quad . \end{aligned}$$

Der Ort der maximalen Durchbiegung ist bei dieser Aufgabe durch die Anschauung gegeben (Trägermitte aus Symmetriegründen). Für eine kompliziertere unsymmetrische Belastung müsste diese Stelle durch die Auswertung von $v' = 0$ gewonnen werden. Die größten Tangentenneigungen (maximale Biegewinkel) ergeben sich an den Lagern. Wenn diese Aussage nicht (wie bei dieser Aufgabe) aus der Anschauung zu gewinnen ist, müsste $v'' = 0$ ausgewertet werden. Die gesuchten Maximalwerte sind:

$$v_{max} = v\left(z = \frac{l}{2}\right) = \frac{5 q_0 l^4}{384 EI} \quad , \quad v'_{max} = v'(z=0) = \frac{q_0 l^3}{24 EI} \quad .$$

Mit den Zahlenwerten für I200 ([Abbildung 16.21](#) auf Seite 243) und den gegebenen Werten erhält man:

$$v_{max} = 1,91 \text{ m} \quad , \quad v'_{max} = 0,1525 \quad .$$

Die Durchbiegung ist recht erheblich wegen der großen Stützlänge von 40 m, bei der dieser Träger ([Beispiel 5 des Abschnitts 16.3](#) auf Seite 242) aber auch an der Grenze seiner Tragfähigkeit ist (er erträgt gerade sein Eigengewicht).

- ⇒ Es ist üblich, v' als „Biegewinkel“ zu bezeichnen, obwohl die erste Ableitung natürlich der Tangens des Anstiegswinkels der Kurve ist. Bei den im Allgemeinen sehr kleinen Winkeln ist der Unterschied gering. Selbst bei dem außergewöhnlich großen Zahlenwert des gerade behandelten Beispiels würden sich aus $v' = 0,1525$ exakt $8,74^\circ$ ergeben, bei Interpretation des Anstiegs als Biegewinkel käme man auf $8,67^\circ$ (Abweichung ist kleiner als 1%).
- ⇒ Während bei dem Beispiel 1 wegen des relativ einfach aufzuschreibenden Biegemomentenverlaufs die Verwendung der Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung vorteilhaft ist (man vermeidet so auch die schwierige Formulierung der Querkraft- und Momenten-Randbedingungen), ist bei dem Beispiel 2 die Arbeit mit der Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung empfehlenswert, zumal die Randbedingungen ($v = 0$ und $v'' = 0$ an beiden Rändern) recht einfach zu formulieren sind.

Eine generelle Empfehlung, welche der beiden Differenzialgleichungen der Biegelinie bei bestimmten Aufgabentypen zu bevorzugen ist, kann kaum gegeben werden. Einzelkräfte als Belastungen erschweren die Formulierung der Randbedingungen für die Differenzialgleichung 4. Ordnung, Linienlasten (insbesondere veränderliche Linienlasten) machen das Aufschreiben des Biegemomentenverlaufs (für die Differenzialgleichung 2. Ordnung) schwieriger.

Als Basis für Computerprogramme und die Anwendung numerischer Verfahren bei komplizierteren Aufgaben wird die Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung allgemein bevorzugt, weil der formalere Rechenprozess der Programmierung entgegenkommt.

Wenn der Biegemomentenverlauf nur abschnittsweise aufgeschrieben werden kann (Einzelkräfte, Einzelmomente, Zwischenstützen, ...), muss für jeden Abschnitt auch die Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung gesondert formuliert (und integriert) werden. Entsprechendes gilt bei Verwendung der Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung, weil in diesen Fällen Unstetigkeiten in den Ableitungen der Funktion $v(z)$ vorkommen (z. B. ein Querkraftsprung bei Einzelkräften oder Zwischenstützen), über die nicht integriert werden darf.

In diesen Fällen erhöht sich natürlich die Anzahl der Integrationskonstanten, und man muss Randbedingungen auch an den „Bereichsrändern“ formulieren, die häufig nur als so genannte *Übergangsbedingungen* aufgeschrieben werden können.

Für das nachfolgende Beispiel 3 wird die Arbeit mit der Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung empfohlen. Da der Momentenverlauf für zwei Abschnitte aufgeschrieben werden muss, ergeben sich vier Integrationskonstanten. Neben den beiden Randbedingungen (keine Absenkung an den beiden Lagern A und B) müssen noch zwei Übergangsbedingungen am Kraftangriffspunkt formuliert werden: Die Absenkung am rechten Rand des linken Abschnitts muss gleich der Absenkung am linken Rand des rechten Abschnitts sein. Eine entsprechende Bedingung muss für die Biegewinkel gelten, weil die Biegelinie an dieser Stelle keinen Knick haben darf.

Beispiel 3:

Für den skizzierten Träger ermittle man

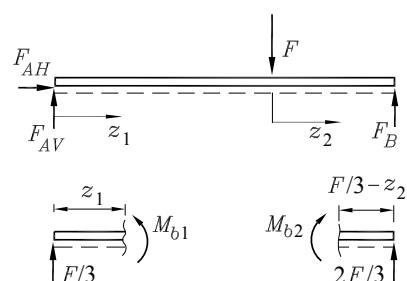
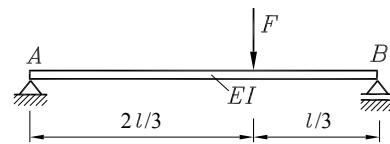
- die Biegelinie,
- Ort und Größe der maximalen Durchbiegung.

Gegeben: l , F , $EI = \text{konstant}$.

Zur Bereitstellung der Biegemomente für die Integration der Differenzialgleichung 2. Ordnung werden die Lagerkräfte benötigt:

$$F_{AV} = \frac{1}{3}F \quad , \quad F_B = \frac{2}{3}F \quad .$$

Für die beiden Trägerbereiche werden die nebenstehend skizzierten Koordinatensysteme definiert. Die Biegemomente werden an den dargestellten Teilsystemen ermittelt und damit die Differenzialgleichungen aufgeschrieben und integriert:



$$\begin{aligned}
 M_{b1} &= \frac{1}{3} F z_1 \quad , & M_{b2} &= \frac{2}{3} F \left(\frac{l}{3} - z_2 \right) \quad , \\
 EIv''_1 &= -\frac{1}{3} F z_1 \quad , & EIv''_2 &= -\frac{2}{3} F \left(\frac{l}{3} - z_2 \right) \quad , \\
 EIv'_1 &= -\frac{1}{6} F z_1^2 + C_1 \quad , & EIv'_2 &= \frac{1}{3} F \left(\frac{l}{3} - z_2 \right)^2 + C_3 \quad , \\
 EIv_1 &= -\frac{1}{18} F z_1^3 + C_1 z_1 + C_2 \quad , & EIv_2 &= -\frac{1}{9} F \left(\frac{l}{3} - z_2 \right)^3 + C_3 z_2 + C_4 \quad .
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten werden zwei Randbedingungen und zwei Übergangsbedingungen formuliert und ausgewertet:

$$\begin{aligned}
 v_1(z_1 = 0) &= 0 & \Rightarrow & C_2 = 0 \quad , \\
 v_1(z_1 = \frac{2}{3}l) &= v_2(z_2 = 0) & \Rightarrow & -\frac{4}{243} Fl^3 + \frac{2}{3} C_1 l = -\frac{1}{243} Fl^3 + C_4 \quad , \\
 v'_1(z_1 = \frac{2}{3}l) &= v'_2(z_2 = 0) & \Rightarrow & -\frac{2}{27} Fl^2 + C_1 = \frac{1}{27} Fl^2 + C_3 \quad , \\
 v_2(z_2 = \frac{l}{3}) &= 0 & \Rightarrow & \frac{1}{3} C_3 l + C_4 = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Aus den drei letzten Gleichungen errechnet man:

$$C_1 = \frac{4}{81} Fl^2 \quad , \quad C_3 = -\frac{5}{81} Fl^2 \quad , \quad C_4 = \frac{5}{243} Fl^3 \quad .$$

a) Mit den ermittelten Konstanten werden die Biegelinien für beide Bereiche aufgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{Fl^3}{162EI} \left[-9 \left(\frac{z_1}{l} \right)^3 + 8 \frac{z_1}{l} \right] & \text{für } 0 \leq z_1 \leq \frac{2}{3}l \quad , \\
 v_2 &= \frac{Fl^3}{243EI} \left[-27 \left(\frac{1}{3} - \frac{z_2}{l} \right)^3 - 15 \frac{z_2}{l} + 5 \right] \\
 &= \frac{Fl^3}{243EI} \left[27 \left(\frac{z_2}{l} \right)^3 - 27 \left(\frac{z_2}{l} \right)^2 - 6 \frac{z_2}{l} + 4 \right] & \text{für } 0 \leq z_2 \leq \frac{1}{3}l \quad .
 \end{aligned}$$

b) Aus der Anschauung ist klar, dass die größte Durchbiegung im linken Abschnitt liegt. Deshalb wird die Ableitung der Funktion $v_1(z)$ gebildet und zur Ermittlung des Ortes \bar{z}_1 von $v_{1,max}$ gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= \frac{Fl^2}{162EI} \left[-27 \left(\frac{z_1}{l} \right)^2 + 8 \right] \quad , \\
 v'_1 = 0 &\Rightarrow -27 \bar{z}_1^2 + 8l^2 = 0 \Rightarrow \bar{z}_1 = \sqrt{\frac{8}{27}}l = \frac{2}{9}\sqrt{6}l \quad , \\
 v_{max} = v_1(z_1 = \bar{z}_1) &= \frac{16}{2187} \sqrt{6} \frac{Fl^3}{EI} = 0,01792 \frac{Fl^3}{EI} \quad .
 \end{aligned}$$

- ⇒ Die Überprüfung, ob der errechnete Extremwert ein Minimum oder Maximum ist (mit Hilfe der zweiten Ableitung) kann man sich ersparen, wenn (wie im vorliegenden Fall) klar ist, welche Form der verformte Träger etwa hat.
- ⇒ Formal ergeben sich für den Ort \bar{z}_1 des Extremwerts von v_1 zwei Lösungen. Der negative Wert wurde nicht berücksichtigt, weil er nicht im Trägerbereich liegt. Wer seiner Anschauung nicht traut und auch im rechten Bereich nach der gleichen Strategie nach Extremwerten

für die Durchbiegung sucht, würde dort formal zwei Lösungen finden, die beide nicht im Trägerbereich liegen. Generell gilt natürlich: Innerhalb eines interessierenden Bereichs nimmt eine Funktion ihre Extremwerte entweder an Stellen mit verschwindender erster Ableitung oder an den Rändern des Bereichs an.

- ⇒ Die in der Statik (Abschnitt 7.1, Seite 95) gegebene Empfehlung, beim Aufschreiben der Momentenverläufe sämtliche Koordinatensysteme gleichsinnig zu definieren, findet hier eine weitere Begründung.

Die **Abbildung 17.6** verdeutlicht, wie bei Nichtbeachtung dieser Empfehlung die Übergangsbedingungen formuliert werden müssen, weil gleiche Tangenteneigungen in den beiden Abschnitten dann unterschiedliches Vorzeichen haben:

$$v_1(z_1 = \frac{2}{3}l) = v_2(z_2 = \frac{1}{3}l) , \\ v'_1(z_1 = \frac{2}{3}l) = -v'_2(z_2 = \frac{1}{3}l) .$$

Eine ähnliche Fehlerquelle ergibt sich in diesem Fall für die Querkraft-Bedingung an der Übergangsstelle (erforderlich für das Arbeiten mit der Differenzialgleichung 4. Ordnung).

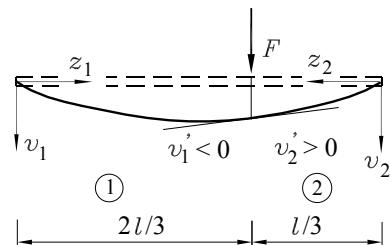


Abbildung 17.6: Nicht zu empfehlen: Geogenläufige Koordinaten haben unterschiedliche Vorzeichen für den Anstieg zur Folge

17.3 Rand- und Übergangsbedingungen

Beim Arbeiten mit der *Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung* werden die Integrationskonstanten mit Hilfe von Aussagen über die Verschiebung v und die Ableitung v' (Biegewinkel) bestimmt. Die **Abbildung 17.7** zeigt die häufigsten Varianten der *Randbedingungen* (es sind Aussagen über die **Werte** von v bzw. v' möglich) und *Übergangsbedingungen* (es sind nur Aussagen über die **Gleichheit** von v bzw. v' an den Übergangsstellen von einem Bereich zum anderen möglich).

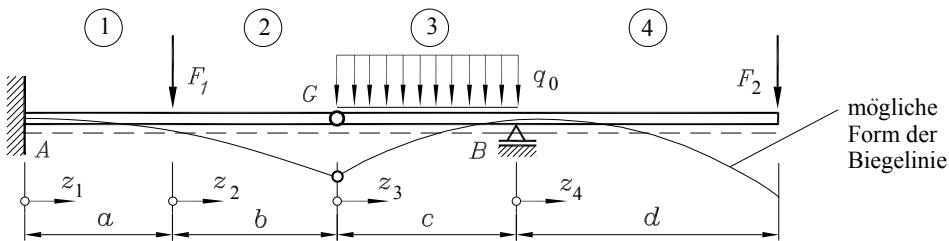


Abbildung 17.7: Bei 4 Bereichen müssen 8 bzw. 16 Bedingungen formuliert werden

Da die Differenzialgleichungen für vier Bereiche aufgeschrieben (und integriert) werden müssen, wurden vier Koordinaten eingeführt (aus den bereits im vorigen Abschnitt genannten Gründen

sind alle z -Koordinaten von links nach rechts gerichtet). *Randbedingungen* können formuliert werden

- am linken Rand des 1. Abschnitts (keine Verschiebung v und horizontale Tangente der Biegelinie an der Einspannung A),
- am rechten Rand des 3. Abschnitts ($v = 0$ am Lager B),
- am linken Rand des 4. Abschnitts ($v = 0$ am Lager B).

Sie werden ergänzt durch die *Übergangsbedingungen*:

- Gleichheit der Verschiebungen v am rechten Rand des 1. Abschnitts und linken Rand des 2. Abschnitts und Gleichheit der Biegewinkel an dieser Stelle (Biegelinie hat keinen Knick),
- Gleichheit der Verschiebungen v am rechten Rand des 2. Abschnitts und linken Rand des 3. Abschnitts (am Gelenk jedoch keine Gleichheit der Biegewinkel),
- Gleichheit der Biegewinkel am rechten Rand des 3. Abschnitts und linken Rand des 4. Abschnitts (auch am Lager ergibt sich kein Knick in der Biegelinie).

Für die Bestimmung der 8 Integrationskonstanten stehen also 8 Bedingungen zur Verfügung:

$$\begin{array}{ll} 1.) \ v_1(z_1 = 0) = 0 & , \quad 5.) \ v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = 0) \quad , \\ 2.) \ v'_1(z_1 = 0) = 0 & , \quad 6.) \ v'_1(z_1 = a) = v'_2(z_2 = 0) \quad , \\ 3.) \ v_3(z_3 = c) = 0 & , \quad 7.) \ v_2(z_2 = b) = v_3(z_3 = 0) \quad , \\ 4.) \ v_4(z_4 = 0) = 0 & , \quad 8.) \ v'_3(z_3 = c) = v'_4(z_4 = 0) \quad . \end{array}$$

Beim Arbeiten mit der *Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung* kommen zu diesen Bedingungen noch Aussagen über die 2. und 3. Ableitung von v hinzu, so dass an Rändern und Übergangsstellen das *Gleichgewicht der Schnittgrößen (Biegemoment und Querkraft) mit den äußeren Kräften und Momenten* hergestellt wird. Dazu werden Schnitte „unendlich dicht“ neben Rändern und Übergangsstellen betrachtet. Deshalb gehen Linienlasten, die ja bereits von der Differentialgleichung erfasst werden, in diese Gleichgewichtsbedingungen nicht ein. Die acht so genannten *geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen*, die für das Arbeiten mit der Differentialgleichung 2. Ordnung aufgeschrieben wurden, werden um noch einmal acht *dynamische Rand- und Übergangsbedingungen* ergänzt.

Folgende *Randbedingungen* können formuliert werden:

- Die Biegemomente sind Null am rechten Rand des 2. Abschnitts und am linken Rand des 3. Abschnitts (Gelenk kann kein Moment übertragen), ebenso am rechten Rand des 4. Abschnitts (freier Rand ohne äußeres Moment).
- Am rechten Rand des 4. Abschnitts muss die Querkraft mit der Kraft F_2 im Gleichgewicht sein (**Abbildung 17.8**):

$$F_{Q4}(z_4 = d) = -(EIv''_4)'|_{z_4=d} = F_2 \quad .$$

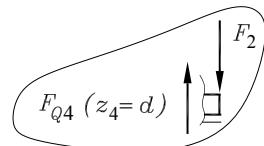


Abbildung 17.8: Schnitt „unendlich dicht“ am rechten Rand

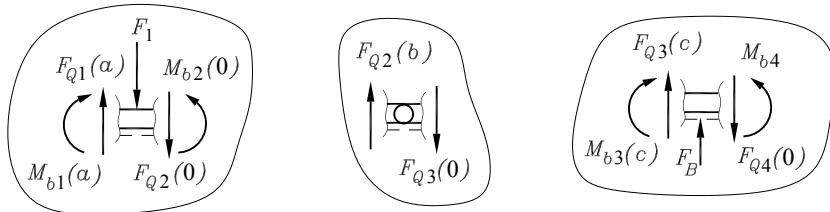


Abbildung 17.9: Schnittstellen liegen „unendlich dicht“ neben den Übergangsstellen

Aus den in **Abbildung 17.9** dargestellten Schnitten der Übergangsstellen lassen sich folgende Übergangsbedingungen ablesen:

- Gleichheit der Biegemomente links und rechts von der Kraft F_1 bzw. links und rechts vom Lager B ,
- Gleichheit der Querkräfte links und rechts vom Gelenk.
- Der Querkraftsprung bei F_1 wird durch die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in vertikaler Richtung beschrieben:

$$F_{Q1}(z_1 = a) = F_1 + F_{Q2}(z_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad -(EI v''_1)'|_{z_1=a} = F_1 - (EI v''_2)'|_{z_2=0} \quad .$$

In dieser allgemeinen Form müssen die Bedingungen formuliert werden, wenn die Biegesteifigkeit veränderlich ist.

Nachfolgend sind diese für die Arbeit mit der Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung zusätzlich erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen zusammengestellt, wobei vereinfachend angenommen wurde, dass die *Biegesteifigkeit über alle Abschnitte des Trägers konstant* ist, so dass sie aus den meisten Gleichungen verschwindet:

$$9.) \quad v''_2(z_2 = b) = 0 \quad , \quad 13.) \quad v''_1(z_1 = a) = v''_2(z_2 = 0) \quad ,$$

$$10.) \quad v''_3(z_3 = 0) = 0 \quad , \quad 14.) \quad v''_3(z_3 = c) = v''_4(z_4 = 0) \quad ,$$

$$11.) \quad v''_4(z_4 = d) = 0 \quad , \quad 15.) \quad v'''_2(z_2 = b) = v'''_3(z_3 = 0) \quad ,$$

$$12.) \quad v'''_4(z_4 = d) = -\frac{F_2}{EI} \quad , \quad 16.) \quad v'''_1(z_1 = a) = v'''_2(z_2 = 0) - \frac{F_1}{EI} \quad .$$

- ⇒ Die Gesamtanzahl der Rand- und Übergangsbedingungen entspricht auch hier der Anzahl der Integrationskonstanten ($4 \cdot 4 = 16$), die bei Integration der Differentialgleichungen für vier Abschnitte entstehen. Man beachte, dass dafür an den Lagern die Querkraft- und Biegemomentbedingungen, in die die Lagerreaktionen eingehen würden, nicht benötigt werden.
- ⇒ Da bei statisch bestimmt gelagerten Trägern die Lagerreaktionen aus Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können, stehen mit diesen nicht benutzten Bedingungen wirksame Kontrollmöglichkeiten zur Verfügung. So müssen bei dem betrachteten Beispiel Biegemoment und Querkraft am linken Rand des 1. Abschnitts mit den Lagerreaktionen an der Einspannstelle im Gleichgewicht sein. Am Lager B muss z. B. gelten:

$$F_{Q3}(z_3 = c) + F_B = F_{Q4}(z_4 = 0) \quad \Rightarrow \quad -EI v'''_3(z_3 = c) + F_B = -EI v'''_4(z_4 = 0) \quad .$$

Eine komplett durchgerechnete Aufgabe mit einer besonders großen Vielfalt an Rand- und Übergangsbedingungen findet man als Beispiel 3 im Abschnitt 17.5 (Seite 265).

17.4 Einige einfache Biegelinien

a)

$$v_F = \frac{Fab^2}{3EIl}$$

$$v'_1(z_1 = 0) = \frac{Fab(l+b)}{6EIl}$$

$$v'_2(z_2 = b) = -\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$$

$$v_1 = \frac{Fab^2}{6EI} \left[\left(1 + \frac{l}{b}\right) \frac{z_1}{l} - \frac{z_1^3}{abl} \right] \quad \text{für } 0 \leq z_1 \leq a$$

$$v_2 = \frac{Fa^2b}{6EI} \left[\left(1 + \frac{l}{a}\right) \frac{b-z_2}{l} - \frac{(b-z_2)^3}{abl} \right] \quad \text{für } 0 \leq z_2 \leq b$$

Für $a \geq b$: $v_{max} = \frac{Fb\bar{z}_1^3}{3EIl}$ bei $\bar{z}_1 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$

Für $a \leq b$: $v_{max} = \frac{Fa(b-\bar{z}_2)^3}{3EIl}$ bei $\bar{z}_2 = b - \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}$

a*)

$$v_{max} = v_F = \frac{Fl^3}{48EI}$$

$$v'(z=0) = -v'(z=l) = \frac{Fl^2}{16EI}$$

b)

$$v_{max} = \frac{5q_0l^4}{384EI}$$

$$v'(z=0) = -v'(z=l) = \frac{q_0l^3}{24EI}$$

$$v = \frac{q_0l^4}{24EI} \left[\frac{z}{l} - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \right]$$

c)

$$v_{max} = 0,006522 \frac{q_0l^4}{EI} \quad \text{bei } \bar{z} = l \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}}$$

$$v'(z=0) = \frac{7q_1l^3}{360EI} ; \quad v'(z=l) = -\frac{q_1l^3}{45EI}$$

$$v = \frac{q_1l^4}{360EI} \left[7\frac{z}{l} - 10\left(\frac{z}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{l}\right)^5 \right]$$

d)

$$v_{max} = \frac{\sqrt{3} M l^2}{27 EI} \quad \text{bei} \quad \bar{z} = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$v'(z=0) = \frac{M l}{3 EI} \quad ; \quad v'(z=l) = -\frac{M l}{6 EI}$$

$$v = \frac{M l^2}{6 EI} \left[2 \frac{z}{l} - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]$$

e)

$$v_{max} = \frac{F l^3}{3 EI} \quad ; \quad v'(z=0) = -\frac{F l^2}{2 EI}$$

$$v = \frac{F l^3}{6 EI} \left[2 - 3 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]$$

f)

$$v_{max} = \frac{q_0 l^4}{8 EI} \quad ; \quad v'(z=0) = -\frac{q_0 l^3}{6 EI}$$

$$v = \frac{q_0 l^4}{24 EI} \left[3 - 4 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right]$$

g)

$$v_{max} = \frac{q_1 l^4}{30 EI} \quad ; \quad v'(z=0) = -\frac{q_1 l^3}{24 EI}$$

$$v = \frac{q_1 l^4}{120 EI} \left[4 - 5 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^5 \right]$$

h)

$$v_{max} = \frac{11 q_1 l^4}{120 EI} \quad ; \quad v'(z=0) = -\frac{q_1 l^3}{8 EI}$$

$$v = \frac{q_1 l^4}{120 EI} \left[11 - 15 \frac{z}{l} + 5 \left(\frac{z}{l} \right)^4 - \left(\frac{z}{l} \right)^5 \right]$$

i)

$$v_{max} = \frac{M l^2}{2 EI} \quad ; \quad v'(z=0) = -\frac{M l}{EI}$$

$$v = \frac{M l^2}{2 EI} \left[1 - 2 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right]$$

17.5 Statisch unbestimmte Systeme

Bei statisch unbestimmten Problemen können Lagerreaktionen und Schnittgrößen nicht allein aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Mit Hilfe von Verformungsbetrachtungen sind auch diese Aufgaben lösbar, weil für jedes zusätzliche Lager eine weitere Verformungsaussage (Rand- oder Übergangsbedingung) formuliert werden kann. Dies soll am Problem des nachfolgenden Beispiels 1 (**Abbildung 17.10**) diskutiert werden.

Beim Arbeiten mit der *Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung* kann der Biegemomentenverlauf zunächst nur mit einer noch unbekannten Lagerreaktion (zum Beispiel der Lagerkraft F_B des Lagers B) aufgeschrieben werden (die übrigen Lagerreaktionen müssen gegebenenfalls mit Hilfe der statischen Gleichgewichtsbedingungen eliminiert werden). Nach der Integration der Differentialgleichung stehen jedoch für die 3 Unbekannten der allgemeinen Lösung (2 Integrationskonstanten und die Lagerkraft) auch 3 Randbedingungen zur Verfügung, so dass auch die unbekannte Lagerkraft (und aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen dann auch die übrigen Lagerreaktionen) und die Schnittgrößen berechnet werden können.

Beim Arbeiten mit der *Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung* ist kein prinzipieller Unterschied zum statisch bestimmten Problem zu nennen, weil die Lagerreaktionen ohnehin nicht in die Differentialgleichung eingehen, so dass man mit vier Randbedingungen auskommt. Nach dem Bestimmen der Integrationskonstanten können die Schnittgrößen nach

$$M_b = -EIv'' \quad , \quad F_Q = -(EIv'')'$$

und die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen mit den Schnittgrößen an den Lagerstellen bestimmt werden.

Beispiel 1:

Für den skizzierten Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI sind die Lagerreaktionen bei A und B und der Biegemomentenverlauf zu ermitteln.

Gegeben: l , q_0 , EI .

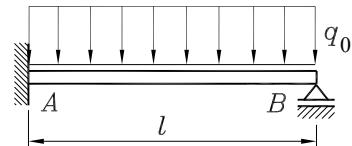


Abbildung 17.10: Einfach statisch unbestimmter Biegeträger

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Die Lagerreaktionen und der Biegemomentenverlauf können nicht allein aus Gleichgewichtsbeziehungen berechnet werden. Für die erforderlichen Verformungsbetrachtungen wird hier die Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung gewählt (Diskussion der Vor- und Nachteile dieser Wahl siehe oben), mit der die Rechnung (ohne Vorarbeit) sofort gestartet werden kann:

$$\begin{aligned} EIv''' &= q_0 \quad , \\ EIv''' &= q_0 z + C_1 \quad , \\ EIv'' &= \frac{1}{2} q_0 z^2 + C_1 z + C_2 \quad , \\ EIv' &= \frac{1}{6} q_0 z^3 + \frac{1}{2} C_1 z^2 + C_2 z + C_3 \quad , \\ EIv &= \frac{1}{24} q_0 z^4 + \frac{1}{6} C_1 z^3 + \frac{1}{2} C_2 z^2 + C_3 z + C_4 \quad . \end{aligned}$$

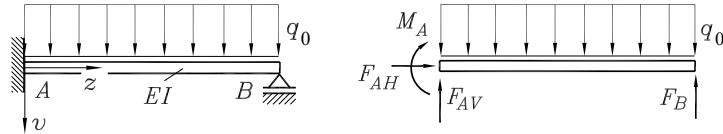


Abbildung 17.11: Koordinaten und Lagerreaktionen

Die vier Randbedingungen zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten („Absenkung bei A gleich Null“, „Biegewinkel bei A gleich Null“, „Absenkung bei B gleich Null“ und „Biegemoment bei B gleich Null“) werden mit Bezug auf das in der Abbildung 17.11 definierte Koordinatensystem formuliert:

$$\begin{aligned} v(z=0) = 0 &\Rightarrow C_4 = 0 \quad , \\ v'(z=0) = 0 &\Rightarrow C_3 = 0 \quad , \\ v(z=l) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{24}q_0l^4 + \frac{1}{6}C_1l^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 = 0 \quad , \\ v''(z=l) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}q_0l^2 + C_1l + C_2 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern die Integrationskonstanten

$$C_1 = -\frac{5}{8}q_0l \quad , \quad C_2 = \frac{1}{8}q_0l^2 \quad ,$$

mit denen der Momentenverlauf aufgeschrieben werden kann:

$$M_b(z) = -EIv'' = \frac{q_0l^2}{8} \left[-4\left(\frac{z}{l}\right)^2 + 5\frac{z}{l} - 1 \right] \quad .$$

Zur Berechnung der Lagerreaktionen wird zuvor der Querkraftverlauf bereitgestellt:

$$F_Q(z) = -EIv''' = \frac{q_0l}{8} \left(-8\frac{z}{l} + 5 \right) \quad .$$

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen an den freigeschnittenen Lagern (Schnitte „unendlich dicht“ neben den Lagern, Abbildung 17.12) erhält man mit den bereits ermittelten Funktionen für Biegemoment und Querkraft die gesuchten Lagerreaktionen:

$$\begin{aligned} F_{AV} &= F_Q(0) = \frac{5}{8}q_0l \quad , \\ M_A &= M_b(0) = -\frac{1}{8}q_0l^2 \quad , \\ F_B &= -F_Q(l) = -\frac{3}{8}q_0l \quad , \quad F_{AH} = 0 \quad . \end{aligned}$$

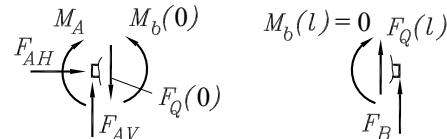


Abbildung 17.12: Schnitte „unendlich dicht“ an den Lagern

Die Kontrolle des Gleichgewichts am Gesamtsystem zeigt, dass die ermittelten Lagerreaktionen die Gleichgewichtsbedingungen identisch erfüllen.

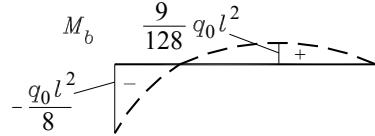
Zur grafischen Darstellung des Biegemomentenverlaufs werden markante Stellen (Extremwert und Nullstellen) der Funktion ermittelt. $M_b(z)$ hat einen relativen Extremwert bei $\bar{z} = \frac{5}{8}l$ (Nullstelle des Querkraftverlaufs):

$$\bar{M}_b = M_b \left(\bar{z} = \frac{5}{8}l \right) = \frac{9}{128}q_0l^2 \quad .$$

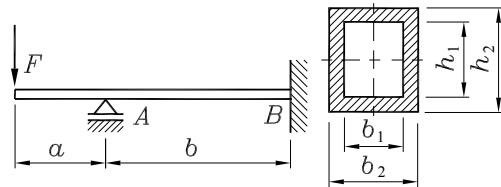
Die Nullstellen im Momentenverlauf ergeben sich als Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$\left(\frac{\bar{z}}{l}\right)^2 - \frac{5}{4} \frac{\bar{z}}{l} + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 = l \quad , \quad \bar{z}_2 = \frac{l}{4} \quad .$$

Die grafische Darstellung des Momentenverlaufs zeigt, dass der berechnete relative Extremwert an der Stelle, wo die Querkraft verschwindet, nicht das absolut größte Biegemoment ist. Dieses liegt an der Einspannstelle.



Beispiel 2: Für den skizzierten statisch unbestimmt gelagerten Träger mit Kastenquerschnitt und konstanter Biegesteifigkeit sind Ort und Größe der maximalen Biegespannung zu bestimmen.



Gegeben: $b_1 = 30 \text{ mm}$; $b_2 = 40 \text{ mm}$; $h_1 = 40 \text{ mm}$; $h_2 = 50 \text{ mm}$; $F = 4 \text{ kN}$; $a = 500 \text{ mm}$.

Obwohl keine Biegeverformungen gefragt sind, ist die Ermittlung von Verformungen nötig, da es sich um ein statisch unbestimmtes System handelt. Die Biegelinien müssen für zwei Bereiche formuliert werden. Weil das Aufschreiben der Biegemomente in diesem Fall relativ einfach ist, wird die Differenzialgleichung 2. Ordnung verwendet.

Da das System einfach statisch unbestimmt ist, muss eine unbekannte Lagerreaktion in die Biegemomentenverläufe aufgenommen werden. Dafür bietet sich die Kraft F_A an. Mit den gewählten Koordinaten für die beiden Bereiche (**Abbildung 17.13**) werden die beiden M_b -Verläufe formuliert, und die Rechnung wird gestartet:

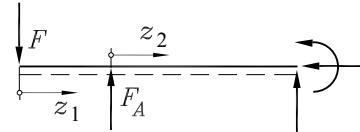


Abbildung 17.13: Koordinaten und F_A

$$\begin{aligned} M_{b1} &= -Fz_1 \quad , & M_{b2} &= F_A z_2 - F(a+z_2) \quad , \\ EIv''_1 &= Fz_1 \quad , & EIv''_2 &= (F-F_A)z_2 + Fa \quad , \\ EIv'_1 &= \frac{1}{2}Fz_1^2 + C_1 \quad , & EIv'_2 &= \frac{1}{2}(F-F_A)z_2^2 + Faz_2 + C_3 \quad , \\ EIv_1 &= \frac{1}{6}Fz_1^3 + C_1z_1 + C_2 \quad , & EIv_2 &= \frac{1}{6}(F-F_A)z_2^3 + \frac{1}{2}Faz_2^2 + C_3z_2 + C_4 \quad . \end{aligned}$$

Für 5 Unbekannte (4 Integrationskonstanten und F_A) werden 5 Randbedingungen formuliert:

- 1.) $v_1(z_1 = a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}Fa^3 + C_1a + C_2 = 0 \quad ,$
- 2.) $v_2(z_2 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0 \quad ,$
- 3.) $v'_1(z_1 = a) = v'_2(z_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Fa^2 + C_1 = C_3 \quad ,$
- 4.) $v_2(z_2 = b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}(F-F_A)b^3 + \frac{1}{2}Fab^2 + C_3b + C_4 = 0 \quad ,$
- 5.) $v'_2(z_2 = b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(F-F_A)b^2 + Fab + C_3 = 0 \quad .$

Da für die Ermittlung der Biegespannung nur der Momentenverlauf erforderlich ist, der wiederum nur die unbekannte Lagerkraft F_A enthält, wird nur diese berechnet: Gleichung 5 wird nach C_3 umgestellt und C_3 und C_4 (Gleichung 2) werden in Gleichung 4 eingesetzt. Diese liefert dann:

$$F_A = F \left(\frac{3a}{2b} + 1 \right) .$$

Mit F_A sind auch die Momentenverläufe bekannt. Die gesuchte maximale Biegespannung tritt bei konstantem Querschnitt des Trägers am Ort des absolut größten Biegemoments auf. Der Biegemomentenverlauf ist stückweise linear, so dass für die Extremwerte nur die Punkte A und B in Frage kommen. Für die beiden Stellen errechnet man:

$$M_{bA} = -Fa , \quad M_{bB} = F_A b - F(a+b) = \frac{1}{2} Fa .$$

Bemerkenswert ist, dass die Abmessung b für den Biegemomentenverlauf (und damit für die Biegespannungen) keine Rolle spielt. Mit den Querschnittskennwerten

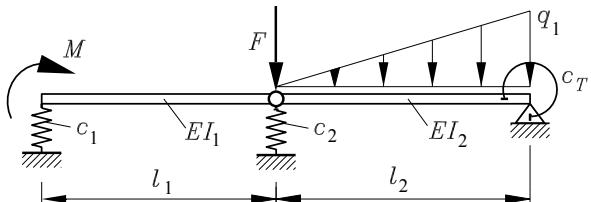
$$I = \frac{1}{12} (b_2 h_2^3 - b_1 h_1^3) = 25,67 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad W \frac{I}{\frac{h_2}{2}} = 10,27 \text{ cm}^3$$

und dem absolut größten Biegemoment berechnet man die maximale Biegespannung

$$\sigma_{b,max} = \frac{Fa}{W} = 195 \text{ N/mm}^2 .$$

Sie tritt an der Trägeroberkante als Zugspannung und an der Trägerunterkante als Druckspannung im Querschnitt über dem Lager A auf.

Beispiel 3: Für den skizzierten Träger sollen die Biegelinie, der Biegemomentenverlauf und der Querkraftverlauf berechnet werden.



Gegeben:

$$l_1 = 1200 \text{ mm} ; EI_1 = 2,5 \text{ kNm}^2 ; c_1 = 50 \text{ N/mm} ; q_1 = 1,3 \text{ N/mm} ; F = 800 \text{ N} ; l_2 = 1300 \text{ mm} ; EI_2 = 5 \text{ kNm}^2 ; c_2 = 250 \text{ N/mm} ; c_T = 5 \text{ kNm} ; M = 250 \text{ Nm} .$$

Mit diesem Beispiel eines Trägers mit stückweise konstantem Querschnitt und einem Gelenk, der durch ein Lager, Federn und eine Drehfeder gefesselt ist und durch eine Kraft, ein Moment und eine Linienlast belastet ist, sollen möglichst viele Besonderheiten demonstriert werden. Eine Aufgabe dieser Art analytisch zu lösen, ist hart an der Grenze der Zumutbarkeit. Hier soll die Lösung so weit aufbereitet werden, dass die Auswertung dem Computer übertragen werden kann.

Die Differenzialgleichung der Biegelinie muss für zwei Abschnitte formuliert werden. Wegen der nur mit erheblicher Mühe zu formulierenden Momentenverläufe, die außerdem mehrere unbekannte Kräfte enthalten würden, empfiehlt sich das Rechnen mit der Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung, in die die Linienlastverläufe (im linken Bereich gleich Null, im rechten Bereich linear veränderlich) eingesetzt werden. Der auf diese Weise sehr bequeme Start der Rechnung wird mit dem aufwendigeren Integrationsprozess und der größeren Anzahl zu bestimmender Integrationskonstanten bezahlt.

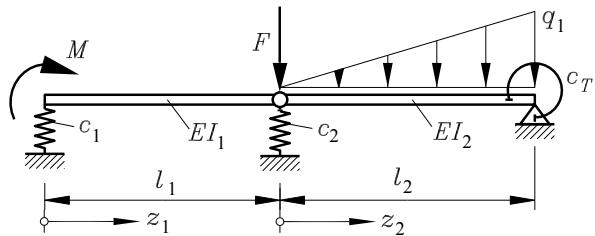
Mit den nebenstehend zu sehenden Koordinaten gilt:

$$v_1''' = 0 \quad , \quad v_2''' = \frac{q_1}{EI_2 l_2} z_2 \quad .$$

Viermaliges Integrieren führt auf die beiden allgemeinen Lösungen:

$$v_1 = \frac{1}{6} C_1 z_1^3 + \frac{1}{2} C_2 z_1^2 + C_3 z_1 + C_4 \quad ;$$

$$v_2 = \frac{q_1}{120 EI_2 l_2} z_2^5 + \frac{1}{6} C_5 z_2^3 + \frac{1}{2} C_6 z_2^2 + C_7 z_2 + C_8 \quad .$$



Es sind 8 Integrationskonstanten zu bestimmen, für die Aussagen über die Verschiebung, die Ableitung der Verschiebung, das Biegemoment und die Querkraft formuliert werden können. Da in die Rand- und Übergangsbedingungen die Federkräfte und das Federmoment eingehen, sind die in **Abbildung 17.14** zu sehenden Schnittskizzen hilfreich. Für die Richtungen der anzutragenden Schnittgrößen gelten die auf der Seite 97 zu sehenden Definitionen, und für die Richtung der anzutragenden Federkräfte gilt: Weil positive Verschiebungen nach unten gerichtet sind (Feder wird zusammengedrückt), reagiert die Feder mit einer nach oben gerichteten Kraft. Verdrehwinkel sind in einem solchen System im Uhrzeigersinn positiv (siehe **Abbildung 17.14**, rechte Skizze), so dass das von der Drehfeder auf den Träger wirkende Moment entgegen dem Uhrzeigersinn anzutragen ist:

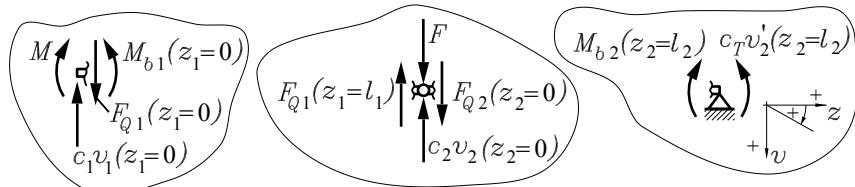


Abbildung 17.14: An allen Übergangsstellen müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein

Und das sind die 8 Rand- und Übergangsbedingungen:

- 1.) $M_{b1}(0) = M \Rightarrow -EI_1 v_1''(0) = M \quad ,$
- 2.) $F_{Q1}(0) = c_1 v_1(0) \Rightarrow -EI_1 v_1'''(0) = c_1 v_1(0) \quad ,$
- 3.) $v_1(l_1) = v_2(0) \quad ,$
- 4.) $M_{b1}(l_1) = 0 \Rightarrow v_1''(l_1) = 0 \quad ,$
- 5.) $M_{b2}(0) = 0 \Rightarrow v_2''(0) = 0 \quad ,$
- 6.) $F_{Q1}(l_1) + c_2 v_2(0) - F - F_{Q2}(0) = 0 \Rightarrow -EI_1 v_1'''(l_1) + c_2 v_2(0) - F + EI_2 v_2'''(0) = 0 \quad ,$
- 7.) $v_2(l_2) = 0 \quad ,$
- 8.) $M_{b2}(l_2) = c_T v_2'(l_2) \Rightarrow -EI_2 v_2''(l_2) = c_T v_2'(l_2) \quad .$

Damit kann das folgende Gleichungssystem formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} 0 & -EI_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EI_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_1^3}{6} & \frac{l_1^2}{2} & l_1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -EI_1 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_2^3}{6} & \frac{l_2^2}{2} & l_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_2 l_2 - \frac{c_T l_2^2}{2} & -EI_2 - c_T l_2 & -c_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ -\frac{q_1 l_2^4}{120 EI_2} \\ \frac{q_1 l_2^2}{6} + \frac{c_T q_1 l_2^3}{24 EI_2} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist (mit einiger Mühe) durchaus noch „von Hand“ möglich. Weil danach die Auswertung der allgemeinen Lösung mit den dann bekannten Integrationskonstanten aber auch recht aufwendig (und natürlich fehleranfällig) ist, kann dieser Weg kaum empfohlen werden.



Unter www.TM-aktuell.de findet man deshalb ein Matlab-Script, das das oben zu sehende Gleichungssystem aufbaut, löst und mit den berechneten Integrationskonstanten die Funktionen für die Durchbiegung, das Biegemoment, und die Querkraft

$$M_{b1} = -EI_1 v_1'' = -EI_1(C_1 z_1 + C_2),$$

$$M_{b2} = -EI_2 v_2'' = -\frac{q_1 z_2^3}{6l_2} - EI_2(C_5 z_2 + C_6)$$

und die Querkraft

$$F_{Q1} = -EI_1 v_1''' = -EI_1 C_1,$$

$$F_{Q2} = -EI_2 v_2''' = -\frac{q_1 z_2^2}{2l_2} - EI_2 C_5$$

auswertet. Die **Abbildung 17.15** zeigt die grafische Darstellung der Funktionen. Natürlich sind auf diesem Wege auch weitere interessierende Ergebnisse ohne Schwierigkeiten zu erlangen (Maximalwerte von Durchbiegung und Biegemoment, Lagerreaktionen, Federkräfte, ...).

Diese Aufgabe ist Anlass zu einer grundsätzlichen Bemerkung: Auch bei sorgfältigstem Arbeiten und mit der Unterstützung geeigneter Software bleibt die Rechnung fehleranfällig, schon etwas kompliziertere Probleme können so nicht mehr gelöst werden. Deshalb wird die Aufgabe auf Seite 286 noch einmal [mit dem Differenzenverfahren gelöst](#), die Berechnung mit der Methode der finiten Elemente findet man unter www.TM-aktuell.de.

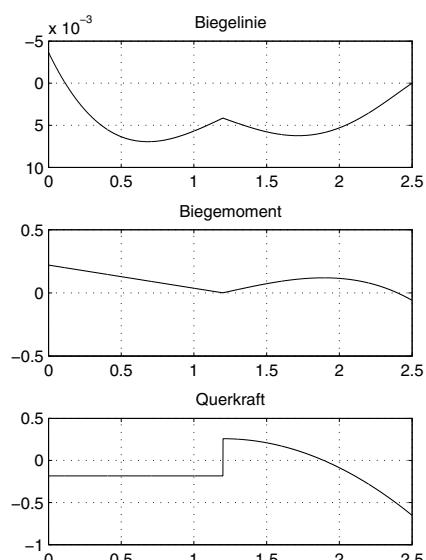


Abbildung 17.15: Grafik-Ausgabe des Matlab-Scripts (Dimensionen: m bzw. kN)



17.6 Superposition

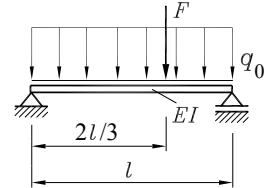
Die Differenzialgleichungen der Biegelinie für kleine Durchbiegungen sind linear. Deshalb dürfen Lösungen von Einzel-Lastfällen zu einer Gesamtlösung (gleichzeitiges Wirken aller Einzel-Lastfälle) überlagert (superponiert) werden.

Neben der Verschiebungsfunktion v dürfen auch deren Ableitungen und damit der Biegewinkel v' und die Schnittgrößen M_b und F_Q superponiert werden.

Beispiel 1:

Der skizzierte Träger mit konstanter Biegesteifigkeit ist durch die konstante Linienlast q_0 und die Einzelkraft F belastet. Man ermittle die Biegelinie.

Gegeben: l , F , q_0 , EI .



Die Lösung wird entsprechend Abbildung 17.16 aus zwei Lastfällen zusammengesetzt:

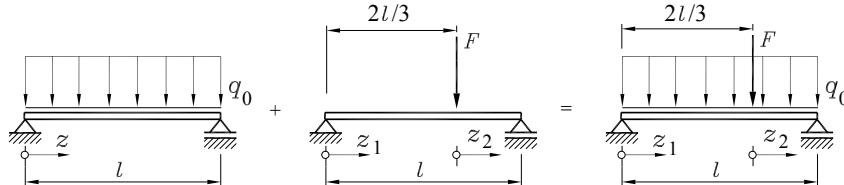


Abbildung 17.16: „Lastfall q_0 “ + „Lastfall F “ = Gesamt-Lastfall

Die Biegelinie muss wegen der Einzelkraft in zwei Bereichen formuliert werden, für die die beiden Koordinaten z_1 und z_2 eingeführt wurden. Für den „Lastfall F “ kann die Biegelinie für die beiden Bereiche direkt der Formelzusammenstellung im Abschnitt 17.4 entnommen werden (Fall a mit $a = \frac{2}{3}l$ und $b = \frac{l}{3}$):

$$v_{1,F} = \frac{Fl^3}{162EI} \left[-9\left(\frac{z_1}{l}\right)^3 + 8\frac{z_1}{l} \right] ,$$

$$v_{2,F} = \frac{Fl^3}{243EI} \left[27\left(\frac{z_2}{l}\right)^3 - 27\left(\frac{z_2}{l}\right)^2 - 6\frac{z_2}{l} + 4 \right] .$$

Der „Lastfall q_0 “ (Fall b im Abschnitt 17.4 mit der Koordinate z) muss nun für die gleichen Koordinaten z_1 und z_2 aufgeschrieben werden. Im linken Bereich mit $z = z_1$ gilt:

$$v_{1,q} = \frac{q_0 l^4}{24EI} \left[\left(\frac{z_1}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{z_1}{l}\right)^3 + \frac{z_1}{l} \right] .$$

Im rechten Bereich muss die Koordinate z durch

$$z = z_2 + \frac{2}{3}l$$

ersetzt werden (Abbildung 17.17), und man erhält:

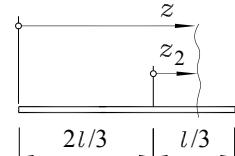


Abbildung 17.17: Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} v_{2,q} &= \frac{q_0 l^4}{24 EI} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{z_2}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{z_2}{l} \right)^3 + \frac{2}{3} + \frac{z_2}{l} \right] \\ &= \frac{q_0 l^4}{24 EI} \left[\left(\frac{z_2}{l} \right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{z_2}{l} \right)^3 - \frac{4}{3} \left(\frac{z_2}{l} \right)^2 - \frac{13}{27} \frac{z_2}{l} + \frac{22}{81} \right] . \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung für die Biegelinie ergibt sich aus der Addition beider Teillösungen:

$$\begin{aligned} v_1(z_1) &= v_{1,F}(z_1) + v_{1,q}(z_1) \quad \text{für } 0 \leq z_1 \leq \frac{2}{3}l , \\ v_2(z_2) &= v_{2,F}(z_2) + v_{2,q}(z_2) \quad \text{für } 0 \leq z_2 \leq \frac{1}{3}l . \end{aligned}$$

Besonders sinnvoll kann man die Superposition einzelner Lastfälle für die *Lösung statisch unbestimmter Probleme* nutzen. Dafür bietet sich z. B. folgende Lösungs-Strategie an:

- ⇒ Lager werden durch (unbekannte) Lagerreaktionen ersetzt, so dass ein statisch bestimmt gelagertes System verbleibt.
- ⇒ Die Verformungen an den Punkten, an denen Lager entfernt wurden, werden mit Hilfe der Superposition einzelner Lastfälle aufgeschrieben. Anschließend werden die unbekannten Lagerreaktionen aus Bestimmungsgleichungen ermittelt, die die Verformungen an genau diesen Punkten Null werden lassen.

Beispiel 2:

Für den statisch unbestimmt gelagerten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit berechne man die Lagerkraft bei A.

Gegeben: a, b, F .

Das Lager A wird durch die (unbekannte) Lagerkraft F_A ersetzt. Dann liefert Lastfall e (Formeln im Abschnitt 17.4) an der Stelle A eine *Durchbiegung infolge der Kraft F*:

$$v_{A,F} = v(z=a) = \frac{F(a+b)^3}{6EI} \left[2 - \frac{3a}{a+b} + \left(\frac{a}{a+b} \right)^3 \right] .$$

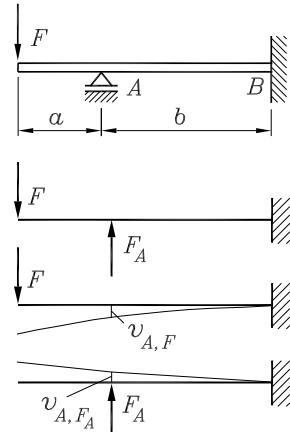
An der gleichen Stelle ergibt sich (ebenfalls Lastfall e) die *Durchbiegung infolge der Kraft F_A* :

$$v_{A,F_A} = -\frac{F_A b^3}{3EI} .$$

Die Überlagerung liefert die Gesamt-Durchbiegung an der Stelle A, die wegen des Lagers gleich Null sein muss. Dies liefert entsprechend

$$v_{A,F} + v_{A,F_A} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F \left(\frac{3a}{2b} + 1 \right)$$

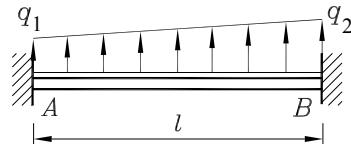
das Ergebnis, das bereits im Abschnitt 17.5 für dieses System (siehe Seite 264) auf anderem Wege gefunden wurde.



Beispiel 3:

Der skizzierte Träger mit konstanter Biegesteifigkeit ist durch eine Linienlast (Trapezlast) belastet.

Gegeben: l, q_1, q_2 .



Man ermittle die vertikalen Lagerkräfte und die Einspannmomente bei A und B.

Der beidseitig eingespannte Träger ist dreifach statisch unbestimmt gelagert. Da aber keine Kräfte in Längsrichtung eingeleitet werden, sind die horizontalen Lagerreaktionen gleich Null, weil (Theorie 1. Ordnung) Längskräfte, die durch die Biegung entstehen (der verformte Träger ist zwangsläufig länger als der gerade Träger), vernachlässigt werden.

Das zu behandelnde Berechnungsmodell muss also an einem Lager eine Längsverschiebung zulassen (**Abbildung 17.18**) und ist nur noch zweifach statisch unbestimmt. Diese Nachgiebigkeit des Lagers in Längsrichtung kommt bei Biegeproblemen der Praxis der Realität ohnehin meist näher.

Zunächst werden die beiden Lagerreaktionen bei A durch Superposition von vier Lastfällen entsprechend **Abbildung 17.19** berechnet.

Die Summe der Verformungen (Vertikalverschiebung und Biegewinkel), die durch alle Lastfälle bei A hervorgerufen werden, muss gleich Null sein. Mit den Formeln, die im Abschnitt 17.4 zusammengestellt sind, entstehen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{q_1 l^4}{8 EI} - \frac{(q_2 - q_1) l^4}{30 EI} + \frac{F_A l^3}{3 EI} - \frac{M_A l^2}{2 EI} &= 0 \quad , \\ \frac{q_1 l^3}{6 EI} + \frac{(q_2 - q_1) l^3}{24 EI} - \frac{F_A l^2}{2 EI} + \frac{M_A l}{EI} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert:

$$F_{AV} = \frac{l}{20} (7q_1 + 3q_2) \quad , \quad M_A = \frac{l^2}{60} (3q_1 + 2q_2) \quad .$$

Mit diesen Werten können nun die Lagerreaktionen bei B aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden, nachdem auch die Einspannung bei B durch zwei Lagerreaktionen ersetzt wurde.

Man erhält mit den Definitionen entsprechend nebenstehender Skizze:

$$F_{BV} = \frac{l}{20} (3q_1 + 7q_2) \quad , \quad M_B = \frac{l^2}{60} (2q_1 + 3q_2) \quad .$$

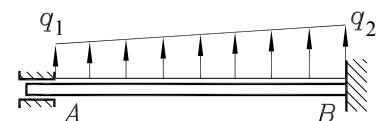


Abbildung 17.18: Korrektes Berechnungsmodell nach Theorie 1. Ordnung

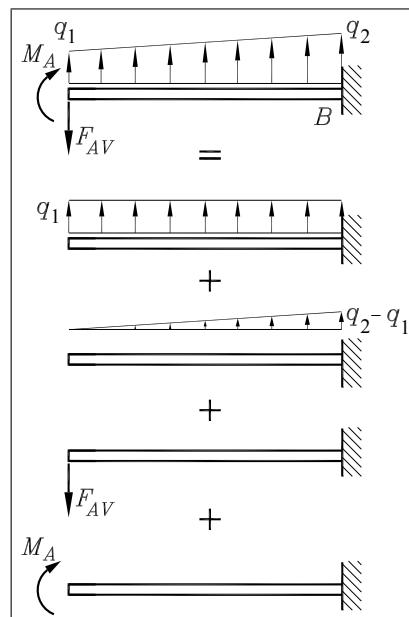
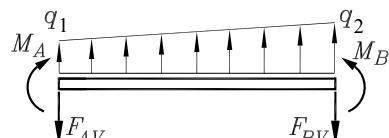


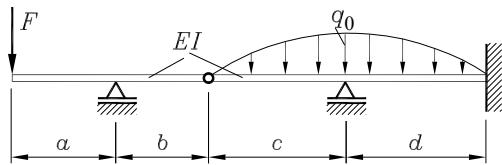
Abbildung 17.19: Berechnung des Systems durch Überlagerung von vier Lastfällen



17.7 Aufgaben

Aufgabe 17.1:

Für den skizzierten zusammengesetzten Träger sind sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen anzugeben, die benötigt werden



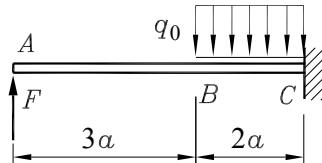
- zur Berechnung der Biegelinie mit der Differenzialgleichung 2. Ordnung und
- zur Berechnung der Biegelinie mit der Differenzialgleichung 4. Ordnung.

Gegeben: $a, b, c, d, F, EI = \text{konstant}$.

Aufgabe 17.2:

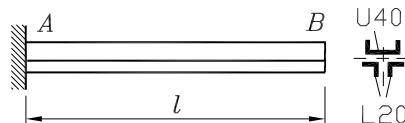
Der skizzierte Träger mit konstanter Biegesteifigkeit ist durch eine konstante Linienlast q_0 im Bereich $B - C$ belastet. Wie groß muss eine bei A angreifende Kraft F sein, damit die Durchbiegung am Punkt B Null wird?

Gegeben: a, q_0 .



Aufgabe 17.3:

Ein Biegeträger ist aus einem Profil U40 nach DIN 1026 und zwei Profilen T20 nach DIN 1028 zusammengeschweißt, bei A starr eingespannt und nur durch sein Eigengewicht belastet (Gewicht des Schweißwerkstoffs ist vernachlässigbar).



Man berechne die vertikale Verschiebung des freien Trägerendes.

Gegeben: $l = 800\text{ mm}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

		<tr> <th>a</th><th>A</th><th>G</th><th>e</th><th>I_{xx}</th><th>W_x</th><th>I_{yy}</th><th>W_y</th></tr> <tr> <th>mm</th><th>cm^2</th><th>kg/m</th><th>cm</th><th>cm^4</th><th>cm^3</th><th>cm^4</th><th>cm^3</th></tr>	a	A	G	e	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y	mm	cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3
a	A	G	e	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y											
mm	cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3											
20	1,12	0,88	0,60	0,39	0,28	0,39	0,28											

Abbildung 17.20: Querschnittswerte für Normprofil T20

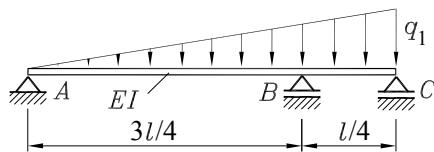
	<tr> <th>b</th><th>h</th><th>A</th><th>G</th><th>e</th><th>I_{xx}</th><th>W_x</th><th>I_{yy}</th><th>W_y</th></tr> <tr> <th>mm</th><th>mm</th><th>cm^2</th><th>kg/m</th><th>cm</th><th>cm^4</th><th>cm^3</th><th>cm^4</th><th>cm^3</th></tr>	b	h	A	G	e	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3
b	h	A	G	e	I_{xx}	W_x	I_{yy}	W_y											
mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3											
35	40	6,21	4,87	1,33	14,1	7,05	6,68	3,08											

Abbildung 17.21: Querschnittswerte für Normprofil U40

Aufgabe 17.4:

Für den skizzierten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit berechne man die Lagerkräfte bei A, B und C (Empfehlung: Superposition unter Verwendung der Formeln aus dem Abschnitt 17.4).

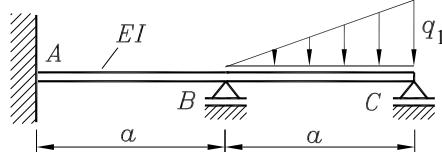
Gegeben: l , q_1 .

**Aufgabe 17.5:**

Für den zweifach statisch unbestimmt gelagerten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit ermittle man

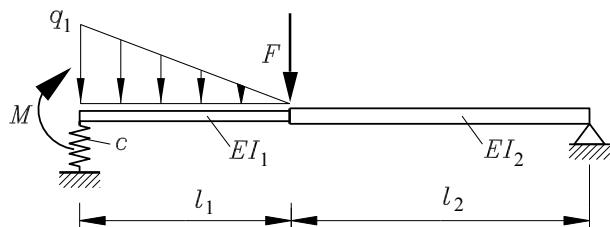
- die Biegelinie,
- die Schnittgrößenverläufe (Biegemoment und Querkraft) einschließlich grafischer Darstellung (siehe auch www.TM-aktuell.de),
- die Lagerreaktionen bei A, B und C,
- den Ort und die Größe der maximalen Durchbiegung,
- den Ort und die Größe des absolut größten Biegemoments.

Gegeben: a , q_1 , $EI = \text{konstant}$.

**Aufgabe 17.6:**

Für den skizzierten Träger mit stückweise konstantem Querschnitt berechne man

- die Biegelinie,
- den Ort und die Größe der maximalen Durchbiegung.
- den Ort und die Größe des maximalen Biegemoments,
- die Federkraft.



Gegeben: $l_1 = 600 \text{ mm}$; $EI_1 = 3 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$; $q_1 = 5,2 \text{ N/mm}$; $F = 2000 \text{ N}$; $l_2 = 800 \text{ mm}$; $EI_2 = 8 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$; $c = 200 \text{ N/mm}$; $M = 10^6 \text{ Nmm}$.

Hinweis: Bei diesem System können die Federkraft und die Schnittgrößenverläufe aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Empfehlenswert ist trotzdem das Arbeiten mit der Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung zur Verformungsberechnung, wobei die Schnittgrößen als Nebenprodukt anfallen. Dann steht mit den statischen Gleichgewichtsbedingungen eine ganze Reihe recht wirksamer Kontrollen zur Verfügung, z. B. muss die Querkraft am linken Rand der Federkraft entsprechen.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

18 Computer-Verfahren für Biegeprobleme

Dem aufmerksamen Leser des vorigen Kapitels wird nicht entgangen sein, dass die Differenzialgleichungen der Biegelinie zwar für veränderliche Biegesteifigkeit EI formuliert wurden, die behandelten Beispiele aber sämtlich (zumindest stückweise) konstante Biegesteifigkeit voraussetzen. Der Aufwand für die Integration der Differenzialgleichungen hielt sich so in erträglichen Grenzen. Bei praxisnahen Problemen (**Abbildung 18.1**) ist eine geschlossene Lösung durch Integration der Differenzialgleichungen nicht mehr praktikabel.

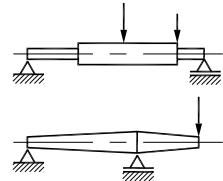


Abbildung 18.1: Abgesetzte Welle, konische Welle

Wegen der Wichtigkeit der Biegebeanspruchung wurden deshalb in der Vergangenheit zahlreiche Verfahren für solche Aufgaben entwickelt (die Verformung abgesetzter Wellen wurde besonders gern grafisch ermittelt, was zwar enorm aufwendig, aber immerhin praktikabel war).

Heute sind eigentlich nur noch die Verfahren sinnvoll, bei denen der größte Teil des Aufwands dem Computer übertragen werden kann. Selbst in der relativ kurzen Geschichte der Computer-Nutzung für die Berechnung von Mechanik-Problemen gibt es schon Veränderungen: Die anfänglich (wegen des knappen Speicherplatzes) sehr beliebten Verfahren mit so genannten Übertragungsmatrizen spielen heute keine Rolle mehr.

Die beiden nachfolgend beschriebenen Verfahren kommen der Computer-Nutzung in besonderem Maße entgegen. Wie an den behandelten Beispielen deutlich werden wird, ist das *Differenzenverfahren* sehr gut anwendbar auf Probleme, wie sie in der **Abbildung 18.1** skizziert sind. Für biegesteife Rahmenkonstruktionen (**Abbildung 18.2**) ist es weniger geeignet, während die bereits im Kapitel 15 (am Beispiel von Fachwerken) behandelte *Methode der finiten Elemente* gerade auch für solche Aufgaben das geeignete Verfahren ist.

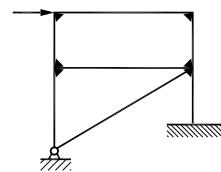


Abbildung 18.2: Biegesteifer Rahmen

18.1 Das Differenzenverfahren

Das Differenzenverfahren basiert auf der Idee, die Differenzialquotienten in der Differenzialgleichung und den Randbedingungen eines Randwertproblems durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Eigentlich ist es tragisch: Eine der genialsten Leistungen des menschlichen Geistes, der Übergang vom Differenzen- zum Differenzialquotienten, wird dabei (für den Computer) rückgängig gemacht.

Die Differenzenquotienten werden für ausgewählte Punkte (*Stützstellen*) aufgeschrieben und bilden ein Gleichungssystem, das die Berechnung der Funktionswerte an diesen Stützstellen gestat-

tet. Um den damit unvermeidlich verbundenen Fehler in Grenzen zu halten, müssen die Stützstellen möglichst nah beieinander liegen, was zwangsläufig auf ein recht großes Gleichungssystem führt. Praktikabel ist das Verfahren (auch bei Computer-Nutzung) deshalb *nur für lineare Randwertprobleme*, weil dann auch das Gleichungssystem linear wird.

Das **Differenzenverfahren** überführt ein lineares Randwertproblem (Differentialgleichung und Randbedingungen) zur Bestimmung einer unbekannten Funktion in ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionswerte an bestimmten Punkten.

18.1.1 Differenzenformeln

Die Abszisse x wird äquidistant (Abstand h) unterteilt (**Abbildung 18.3**). Dann kann der Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

an der beliebigen Stützstelle i (bei x_i) auf unterschiedliche Art durch Differenzenquotienten angenähert werden, wobei jeweils der Anstieg der Tangente durch einen Sekantenanstieg ersetzt wird:

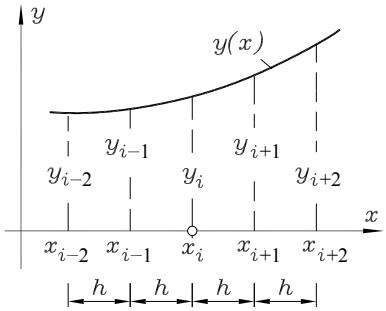


Abbildung 18.3: Stützstellen

$$y'_i \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (\text{vorwärts genommene Differenzenformel}) ,$$

$$y'_i \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (\text{rückwärts genommene Differenzenformel}) .$$

Beide Näherungswerte sind mit einem Fehler behaftet, der umso kleiner ist, je kleiner h ist. Wenn die zweite Ableitung (Änderung des Anstiegs) im Intervall $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$ das Vorzeichen nicht wechselt, wird eine der beiden Formeln einen etwas zu großen, die andere einen etwas zu kleinen Wert liefern, so dass das arithmetische Mittel aus beiden Formeln im Allgemeinen einen besseren Näherungswert liefert. Dieser Mittelwert

$$y'_i \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

wird als *zentrale Differenzenformel* bezeichnet und kann geometrisch als Anstieg der Sekante vom Punkt $i-1$ zum Punkt $i+1$ gedeutet werden. Auf die gleiche Formel kommt man, wenn man durch die Punkte $i-1$, i und $i+1$ eine quadratische Parabel legt und deren Anstieg an der Stelle x_i berechnet.

Auf analoge Weise können höhere Ableitungen genähert werden, z. B.:

$$y''_i \approx \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_i = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i = \frac{1}{h} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) ,$$

wobei in der Klammer die Differenz der ersten Ableitungen an den Zwischenpunkten $i+\frac{1}{2}$ und $i-\frac{1}{2}$ steht.

Für die Berechnung der Biegelinie mit dem Differenzenverfahren werden die ersten vier Ableitungen benötigt, die nachfolgend zusammengestellt sind.

Zentrale Differenzenformeln:

$$\begin{aligned} y'_i &\approx \frac{1}{2h} (-y_{i-1} + y_{i+1}) , \\ y''_i &\approx \frac{1}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) , \\ y'''_i &\approx \frac{1}{2h^3} (-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}) , \\ y''''_i &\approx \frac{1}{h^4} (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) . \end{aligned} \quad (18.1)$$

18.1.2 Biegelinie bei konstanter Biegsteifigkeit

Die Anwendung des Differenzenverfahrens soll zunächst am besonders einfachen (kontrollierbaren) Beispiel demonstriert werden. Ausgangspunkt ist immer die Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung, weil dafür nicht vorab der Biegemomentenverlauf ermittelt werden muss und die Behandlung statisch unbestimmter Probleme keine zusätzlichen Überlegungen erfordert. In der Differentialgleichung 17.5¹

$$EIv'''' = q$$

wird die 4. Ableitung von v durch die entsprechende Differenzenformel 18.1 angenähert. Man erhält die

Differentialgleichung der Biegelinie bei konstanter Biegsteifigkeit:

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{qh^4}{EI} . \quad (18.2)$$

Auch in den Randbedingungen werden die Differentialquotienten durch die Differenzenformeln ersetzt. Für die Aussagen über die Schnittgrößen benötigt man die

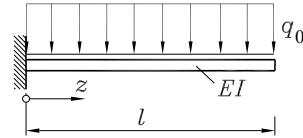
Differentialgleichungen für Biegemoment und Querkraft bei konstanter Biegsteifigkeit:

$$\begin{aligned} M_{bi} &= -\frac{EI}{h^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) , \\ F_{Qi} &= -\frac{EI}{2h^3} (-v_{i-2} + 2v_{i-1} - 2v_{i+1} + v_{i+2}) . \end{aligned} \quad (18.3)$$

¹ Der Mathematiker könnte einwenden, dass dies eigentlich gar keine „richtige“ Differentialgleichung ist, sondern eher eine Integrationsaufgabe ist (und noch dazu eine triviale, wenn EI konstant ist, möglicherweise sogar auch noch q). so dass eine numerische Lösung nicht gerechtfertigt ist. Aber es ist das *Randwertproblem*, das die Schwierigkeiten erzeugt. Es wird sich zeigen, dass gerade die bei der analytischen Lösung oft sehr lästigen Rand- und Übergangsbedingungen bei der Anwendung des Differenzenverfahrens keine nennenswerten Schwierigkeiten bereiten.

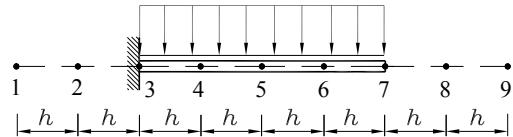
Beispiel:

Für den skizzierten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI sind die Durchbiegung und die Schnittgrößen näherungsweise mit dem Differenzenverfahren zu bestimmen und mit den Werten der exakten Lösung zu vergleichen.



Gegeben: a , q_1 , $EI = \text{konstant}$.

Der Träger wird zunächst (sehr grob) in $n_A = 4$ äquidistante Abschnitte der Länge $h = l/4$ unterteilt (nebenstehende Skizze).



Für die 5 Punkte 3...7 (Innenpunkte), für die natürlich die Differenzialgleichung der Biegelinie gelten muss, werden ersatzweise die Differenzengleichungen entsprechend 18.2 aufgeschrieben, in die für die randnahen Punkte zusätzliche Außenpunkte eingehen:

$$i = 3 : v_1 - 4v_2 + 6v_3 - 4v_4 + v_5 = \frac{q_0 l^4}{n_A^4 EI}$$

$$i = 4 : v_2 - 4v_3 + 6v_4 - 4v_5 + v_6 = \frac{q_0 l^4}{n_A^4 EI}$$

$$i = 5 : v_3 - 4v_4 + 6v_5 - 4v_6 + v_7 = \frac{q_0 l^4}{n_A^4 EI}$$

$$i = 6 : v_4 - 4v_5 + 6v_6 - 4v_7 + v_8 = \frac{q_0 l^4}{n_A^4 EI}$$

$$i = 7 : v_5 - 4v_6 + 6v_7 - 4v_8 + v_9 = \frac{q_0 l^4}{n_A^4 EI}$$

In diesen fünf Differenzengleichungen erscheinen einschließlich der Werte für die Außenpunkte 1, 2, 8 und 9 insgesamt neun Unbekannte. Das Defizit von vier Gleichungen wird genau durch die Randbedingungen ausgeglichen:

$$v(z=0) = 0 \Rightarrow v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0$$

$$v'(z=0) = 0 \Rightarrow v'_3 = 0 \Rightarrow -v_2 + v_4 = 0$$

$$F_Q(z=l) = 0 \Rightarrow F_{Q7} = 0 \Rightarrow -v_5 + 2v_6 - 2v_8 + v_9 = 0$$

$$M_b(z=l) = 0 \Rightarrow M_{b7} = 0 \Rightarrow v_6 - 2v_7 + v_8 = 0$$

Dieses lineare Gleichungssystem (9 Gleichungen mit 9 Unbekannten) ließe sich leicht auf weniger Unbekannte reduzieren (v_3 ist bekannt, v_2 wird durch v_4 ersetzt usw.). Wenn man es ohnehin mit Hilfe des Computers lösen will, ist dies weder erforderlich noch sinnvoll. Es kommt vielmehr darauf an, das Gleichungssystem für die Computerrechnung in geeigneter Form aufzuschreiben.

Aus nachfolgend noch ausführlich diskutierten Gründen werden die beiden Randbedingungen des linken Randes als erste Gleichungen, die Randbedingungen des rechten Randes als die beiden letzten Gleichungen aufgeschrieben. Aus den Ausdrücken auf den rechten Seiten der Gleichungen wird der gemeinsame Faktor $\frac{q_0 l^4}{EI}$ herausgezogen, so dass das Ergebnis der Rechnung für beliebige Werte dieser Größen gilt.

Es ist dagegen nicht sinnvoll, auch noch den Faktor n_A^4 aus dem Vektor der rechten Seite herauszuziehen, weil n_A ein Verfahrensparameter ist, der das Ergebnis der Rechnung möglichst nicht beeinflussen sollte.

Für $n_A = 4$ ist also folgendes Gleichungssystem mit $n = n_A + 5 = 9$ Gleichungen zu lösen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{256} \\ \frac{1}{256} \\ \frac{1}{256} \\ \frac{1}{256} \\ \frac{1}{256} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{q_0 l^4}{EI} .$$

- ⇒ Schon bei dieser sehr groben Einteilung des Trägers in vier Abschnitte sind in der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems zahlreiche Nullen zu sehen, und weil auch bei feinerer Diskretisierung in jeder Zeile maximal 5 von Null verschiedene Elemente auftreten können, nimmt der Prozentsatz der Nullelemente drastisch zu (und das so genannte *Fill-in* wird kleiner). Es sind „Dünn besetzte Matrizen“ (*sparse matrices*), für die außerordentlich effektive Lösungsalgorithmen verfügbar sind. Ab einer gewissen Größenordnung der Matrizen bieten diese Algorithmen auch auf sehr leistungsfähigen Computern die einzige Chance, die Gleichungssysteme zu lösen.
- ⇒ Hier kommt noch ein weiterer Vorteil hinzu: Die von Null verschiedenen Matrixelemente konzentrieren sich in einem relativ schmalen Band in der Nähe der Hauptdiagonalen. Für diese so genannten *Bandmatrizen* (*band matrices*) stehen besonders effektive Algorithmen zur Verfügung.
- ⇒ Vorteilhaft ist auch die Regelmäßigkeit der Matrix im „Mittelteil“, so dass auch sehr große Matrizen mit wenigen Programmieranweisungen aufgebaut werden können. Große Matrizen müssen grundsätzlich „aufgebaut“ werden, man kann sie nicht „eingeben“ (z. B.: $n_A = 100 \Rightarrow n = 105 \Rightarrow 105 \cdot 105 = 11025$ Werte für die Koeffizientenmatrix, unzumutbar!).

Die nebenstehende Lösung des Gleichungssystems ist natürlich entsprechend der sehr groben Einteilung des Trägers nur eine relativ grobe Näherung der exakten Lösung. An ihr soll die Berechnung der Schnittgrößen demonstriert werden.

Nach den Formeln 18.3 errechnet man z. B. für den Punkt 3 (Schnittgrößen gleich Lagerreaktionen) das Biegemoment:

$$\begin{aligned} M_{b3} &= -\frac{EI}{h^2} (v_2 - 2v_3 + v_4) \\ &= -\frac{16EI}{l^2} (0,015625 + 0,015625) \frac{q_0 l^4}{EI} = -0,5 q_0 l^2 . \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,080078 \\ 0,015625 \\ 0 \\ 0,015625 \\ 0,048828 \\ 0,089844 \\ 0,132813 \\ 0,175781 \\ 0,220703 \end{bmatrix} \frac{q_0 l^4}{EI}$$

Für das Biegemoment an der Einspannstelle erhält man genauso wie für die Querkraft

$$F_{Q3} = -\frac{EI}{2h^3} (-v_1 + 2v_2 - 2v_4 + v_5) = q_0 l$$

Ergebnisse, die mit der exakten Lösung übereinstimmen, weil für konstante Linienlast der Biegemomentenverlauf eine quadratische Parabel ist, für die die zentralen Differenzenformeln die Differenzialquotienten fehlerfrei ersetzen. Bei diesem Beispiel sind also nur Durchbiegung (Funktion 4. Grades) und Biegewinkel (Funktion 3. Grades) mit einem Fehler behaftet, der bei feinerer Einteilung des Trägers (größeres n_A) kleiner wird.



Die Tabelle in **Abbildung 18.4** (vgl. www.TM-aktuell.de) zeigt dies für die Absenkung des Trägerendes $v(l)$ und den Biegewinkel $v'(l)$, der entsprechend **18.1** berechnet wird:

$$\begin{aligned} v'(l) &= v'_{n-2} = \frac{1}{2h} (-v_{n-3} + v_{n-1}) \\ &= \frac{n_A}{2l} (-v_{n-3} + v_{n-1}) \end{aligned}$$

(der rechte Randpunkt des Trägers ist jeweils der Punkt $n - 2$).

Selbst bei grober Einteilung des Trägers ist die Genauigkeit für praktische Anforderungen mehr als ausreichend.

n_A	$\frac{EI}{q_0 l^4} v(l)$	Fehler	$\frac{EI}{q_0 l^3} v'(l)$	Fehler
4	0,132813	6,25%	0,171875	3,125%
20	0,125313	0,25%	0,166875	0,125%
50	0,125050	0,04%	0,166700	0,020%
100	0,125013	0,01%	0,166675	0,005%
500	0,125000	0,00%	0,166667	0,000%
Exakt	0,125000		0,166667	

Abbildung 18.4: Absenkung und Biegewinkel am Trägerende

Andererseits hat die Biegelinie bei diesem einfachen Beispiel einen recht glatten Verlauf (ohne Wendepunkte), der sich besonders gut annähern lässt. Doch selbst bei komplizierteren Verläufen erhält man mit $n_A = 100$ im Allgemeinen sehr gute Ergebnisse (und es spricht ja nichts dagegen, bei der Computerrechnung $n_A = 1000$ zu wählen, siehe Hinweis unten).

Es soll schon hier darauf hingewiesen werden, wie einfach Variantenrechnungen zu realisieren sind. Der Träger in **Abbildung 18.5** ist zusätzlich durch ein Lager am rechten Rand (und damit statisch unbestimmt) gestützt. Bei einer Berechnung mit dem Differenzenverfahren ist (unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung) nur eine einzige Gleichung (die vorletzte) zu ändern. Die Querkraftrandbedingung wird durch folgende Gleichung ersetzt:

$$v_{n-2} = 0$$

(n ist die Anzahl der Gleichungen, $n - 2$ der Randpunkt).

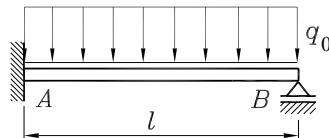


Abbildung 18.5: Variantenrechnungen sind besonders einfach: Nur eine Gleichung muss geändert werden, um aus dem Träger des Beispiels 1 dieses statisch unbestimmte System zu machen

WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Lineare Gleichungssysteme auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) bietet ausführliche

Informationen zur Lösung sehr großer Gleichungssysteme, siehe Seite 73.



18.1.3 Biegelinie bei veränderlicher Biegesteifigkeit

Die Differenzialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung bei veränderlicher Biegesteifigkeit 17.4

$$[EI(z)v''(z)]'' = q(z)$$

wird in zwei Schritten in eine Differenzengleichung überführt. Zunächst wird die 2. Ableitung der eckigen Klammer entsprechend 18.1 ersetzt:

$$\frac{1}{h^2} \left\{ [EIv'']_{i-1} - 2[EIv'']_i + [EIv'']_{i+1} \right\} = q_i .$$

Nun werden die 2. Ableitungen in den eckigen Klammern durch die gleiche Differenzenformel ersetzt, wobei beachtet werden muss, dass dies an drei verschiedenen Punkten geschieht und jeweils für diese Punkte die Nachbarpunkte in die Formel eingehen:

$$\begin{aligned} [EIv'']_{i-1} &\approx EI_{i-1} \frac{1}{h^2} (v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i) , \\ [EIv'']_i &\approx EI_i \frac{1}{h^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) , \\ [EIv'']_{i+1} &\approx EI_{i+1} \frac{1}{h^2} (v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2}) . \end{aligned}$$

Es ergibt sich die **Differenzengleichung der Biegelinie bei veränderlicher Biegesteifigkeit**:

$$I_{i-1}v_{i-2} - 2(I_{i-1} + I_i)v_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1})v_i - 2(I_i + I_{i+1})v_{i+1} + I_{i+1}v_{i+2} = \frac{q_i h^4}{E} . \quad (18.4)$$

Bei den Schnittgrößen

$$\begin{aligned} M_b(z) &= -EI(z)v''(z) , \\ F_Q(z) &= M'_b(z) = -[EI(z)v''(z)]' \end{aligned}$$

muss nur bei der Querkraft das Ersetzen der Differenzialquotienten in zwei Schritten erfolgen, während sich für das Biegemoment die gleiche Differenzenformel wie bei konstanter Biegesteifigkeit ergibt. Für die Querkraft errechnet man:

$$\begin{aligned} F_{Qi} &\approx -\frac{1}{2h} \left\{ -[EIv'']_{i-1} + [EIv'']_{i+1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2h} \left\{ -\left[EI_{i-1} \frac{1}{h^2} (v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i) \right] + \left[EI_{i+1} \frac{1}{h^2} (v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2}) \right] \right\} . \end{aligned}$$

Dies wird nach den Verschiebungen geordnet, und man erhält die **Differenzengleichungen der Schnittgrößen bei veränderlicher Biegesteifigkeit**:

$$\begin{aligned} M_{bi} &= -\frac{EI_i}{h^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) , \\ F_{Qi} &= -\frac{EI}{2h^3} (-I_{i-1}v_{i-2} + 2I_{i-1}v_{i-1} - (I_{i-1} - I_{i+1})v_i - 2I_{i+1}v_{i+1} + I_{i+1}v_{i+2}) . \end{aligned} \quad (18.5)$$

- ⇒ In die Differenzengleichungen für die Randpunkte und die Querkraft-Randbedingungen gehen mit I_{i-1} bzw. I_{i+1} Werte für Punkte ein, die außerhalb des Trägers liegen. Da diese „Außenwerte“ durch das Ersetzen der Ableitung der Funktion $I(z)$ durch Differenzenformeln in die Rechnung hineinkommen, sind dafür die Werte einzusetzen, die sich bei Erweiterung des Definitionsbereichs der Funktion $I(z)$ über die Randpunkte hinaus ergeben würden.
- ⇒ Wenn bei sprunghafter Änderung der Biegesteifigkeit (z. B. bei abgesetzten Wellen) ein Punkt des Differenzenschemas direkt auf der Sprungstelle liegt, nimmt man für diesen Punkt sinnvollerweise den arithmetischen Mittelwert der Biegesteifigkeiten der beiden Abschnitte (bei feiner Diskretisierung darf man auch einen der beiden Werte nehmen).
- ⇒ Bei veränderlicher Biegesteifigkeit ist es empfehlenswert, ein „Bezugs-Trägheitsmoment“ I_0 zu definieren und damit die Biegesteifigkeit für alle Punkte in der Form

$$EI_i = \mu_i EI_0 \quad (18.6)$$

aufzuschreiben. Dann kann EI_0 aus allen Gleichungen ausgeklammert werden, und die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems bleibt dimensionslos. Ein wesentlicher Grund für diese Strategie ist die bei großen Gleichungssystemen wichtige Kondition der Koeffizientenmatrix (siehe www.TM-aktuell.de). Die Kondition würde von den stark unterschiedlichen Größenordnungen der Matrixelemente mit dem EI_i und den wesentlich kleineren Matrixelementen in den Randbedingungszeilen ungünstig beeinflusst werden.

Die typischen Zeilen, die bei konstanter Biegesteifigkeit als

$$\dots \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots$$

im Mittelteil der Matrix stehen, sind also durch



$$\dots \quad 0 \quad 0 \quad \mu_{i-1} \quad -2(\mu_{i-1} + \mu_i) \quad \mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} \quad -2(\mu_i + \mu_{i+1}) \quad \mu_{i+1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots$$

zu ersetzen. Man sieht, dass der Fall konstanter Biegesteifigkeit (alle $\mu_i = 1$) als Sonderfall in den Differenzenformeln für veränderliche Biegesteifigkeit enthalten ist.

- ⇒ Auch bei den Zeilen im Gleichungssystem, die die Randbedingungen beschreiben, sollten die Biegesteifigkeiten entsprechend ersetzt werden. Empfohlen wird also die Verwendung der folgenden

Differenzenformeln für die Biegelinie bei veränderlicher Biegesteifigkeit:

$$\begin{aligned} \mu_{i-1} v_{i-2} - 2(\mu_{i-1} + \mu_i) v_{i-1} + (\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1}) v_i - 2(\mu_i + \mu_{i+1}) v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2} &= \frac{q_i h^4}{EI_0}, \\ M_{bi} &= -\frac{EI_0}{h^2} (\mu_i v_{i-1} - 2\mu_i v_i + \mu_i v_{i+1}), \\ F_{Qi} &= -\frac{EI_0}{2h^3} [-\mu_{i-1} v_{i-2} + 2\mu_{i-1} v_{i-1} - (\mu_{i-1} - \mu_{i+1}) v_i - 2\mu_{i+1} v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2}] \\ \text{mit } \mu_i &= \frac{I_i}{I_0} \quad (I_0 \text{ ist ein beliebiges Bezugs-Trägheitsmoment}). \end{aligned} \quad (18.7)$$

Beispiel:

Der skizzierte Träger mit Rechteckquerschnitt (konstante Höhe, linear veränderliche Breite) ist nur durch sein Eigengewicht belastet. Mit dem Differenzenverfahren ist näherungsweise die Durchbiegung zu berechnen.

$$\text{Gegeben: } b_A, \lambda = \frac{b_B}{b_A}, E, \text{ Dichte } \rho.$$

Die mit einem Breitenverhältnis $\lambda = 2$ berechneten Werte sollen ausgewertet werden.

Mit der linear veränderlichen Breite

$$b(z) = b_A + \frac{b_B - b_A}{l} z = b_A \left[1 + (\lambda - 1) \frac{z}{l} \right]$$

werden auch die Linienlast

$$q(z) = \rho g h b(z) = q_A \left[1 + (\lambda - 1) \frac{z}{l} \right]$$

(Trapezlast, nebenstehende Skizze) und die Biegesteifigkeit

$$EI(z) = E \frac{1}{12} h^3 b(z) = EI_A \left[1 + (\lambda - 1) \frac{z}{l} \right]$$

linear veränderlich. Der Wert für die Biegesteifigkeit am linken Rand

$$EI_A = EI_0 = E \cdot \frac{1}{12} h^3 b_A$$

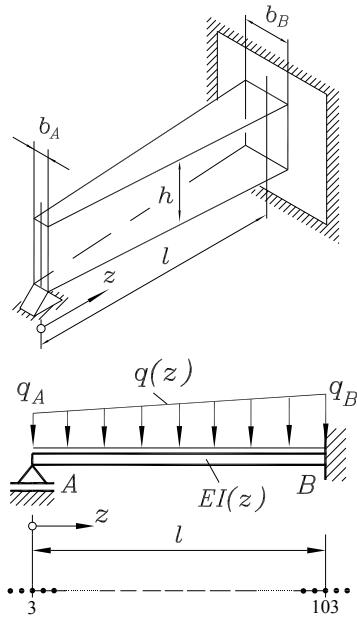
wird als Bezugsgröße verwendet. In der eckigen Klammer der Formel oben stehen also die für die Formeln 18.7 benötigten μ -Werte, die bei einer Einteilung des Trägers in n_A Abschnitte (Punkt 3 ist linker Randpunkt) in der Form

$$\mu_i = \left[1 + (\lambda - 1) \frac{i-3}{n_A} \right]$$

aufgeschrieben werden können. Damit kann das Gleichungssystem bei entsprechender Unterstützung durch die Software (siehe www.TM-aktuell.de) mit geringem Aufwand erzeugt werden.

Für eine (recht grobe) Einteilung des Trägers in nur $n_A = 100$ Abschnitte (105 Gleichungen) wurden die Ergebnisse ermittelt, von denen nebenstehend eine kleine Auswahl im Vergleich mit der exakten Lösung angegeben ist. Es sind die dimensionslosen Verschiebungen \bar{v}_i , die noch mit dem Faktor $\frac{q_A l^4}{EI_A}$, der aus den Gleichungen ausgeklammert wurde, multipliziert werden müssen.

Die Abweichungen von der exakten Lösung liegen deutlich unter 0,2%, die Ergebnisse können praktisch als exakt angesehen werden. Eine Rechnung mit einer feineren Unterteilung erübrigt sich.



i	\bar{v}_i	Exakt
1	-0.000409445	
2	-0.000204956	
3	0.000000000	0.000000000
4	0.000204956	
5	0.000409464	
13	0.001981580	0.001980908
23	0.003606643	0.003605449
33	0.004657002	0.004655431
43	0.005040644	0.005038842
52	0.004825657	
53	0.004771756	0.004769868
54	0.004712320	
63	0.003956104	0.003954281
73	0.002780082	0.002778476
83	0.001502345	0.001501113
93	0.000447305	0.000446607
103	0.000000000	0.000000000

Die Frage, woher denn die Werte der exakten Lösung kommen, ist übrigens durchaus berechtigt. Sie stammen aus der Auswertung der nachfolgend angegebenen exakten Biegelinie², die (unter erheblichem Zeit- und Papieraufwand) durch Integration der Differentialgleichung ermittelt wurde. Von einer Nachahmung wird dringend abgeraten, das Nachempfinden der numerischen Lösung mit dem Differenzenverfahren wird allerdings nachdrücklich empfohlen.

$$\frac{EI_A}{q_A l^4} v_{\text{exakt}}(z) = \frac{1}{72} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^4 - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^3 + \frac{29 - 36 \ln 2}{72(1 - 2 \ln 2)} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 - \frac{11}{36(1 - 2 \ln 2)} \left[1 - \frac{z}{l} + \left(1 + \frac{z}{l}\right) \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2l}\right)\right] \quad . \quad (18.8)$$

18.1.4 Vermeiden von Übergangsbedingungen

Bisher wurden nur einfeldrige Träger betrachtet, die in n_A Abschnitte unterteilt wurden, wobei sich $n = n_A + 5$ Stützpunkte (einschließlich der vier Außenpunkte) ergaben. Die jeweils zwei Randbedingungen wurden für die Randpunkte 3 bzw. $n - 2$ formuliert.

Die analytische Lösung (Kapitel 17) wurde immer dann besonders aufwendig, wenn Diskontinuitäten (Unstetigkeiten) in der Belastung (Einzelkräfte, Einzelmomente), Lagerung (Zwischenstützen, Federn) oder Biegesteifigkeit (abgesetzte Welle, Gelenk) auftraten. Dann musste „mehr-feldrig“ gerechnet werden, wobei an den Übergangsstellen jeweils vier Übergangsbedingungen formuliert werden mussten (vgl. Abschnitt 17.3 und Beispiel 3 im Abschnitt 17.5 auf Seite 265).

Gerade für solche Probleme kann das Differenzenverfahren eine besondere Stärke ausspielen, indem die Unstetigkeiten auf eine endliche Breite (ein Feld der Schrittweite h) „verschmiert“ werden. Nachfolgend werden die wichtigsten „Tricks“ dieser Art zusammengestellt:

- ⇒ Eine **Einzelkraft**, die nicht am Trägerrand angreift (und dort über die Querkraft-Randbedingung zu erfassen ist), wird zu einer Linienlast „verschmiert“:

Eine am Knoten i angreifende Kraft F_i
wird durch eine Linienlast

$$q_i^* = \frac{F_i}{h}$$

ersetzt (**Abbildung 18.6**), die mit einer Wirkungsbreite h (jeweils $\frac{h}{2}$ links und rechts vom Punkt i) nur in die Gleichung für den Knoten i eingeht.

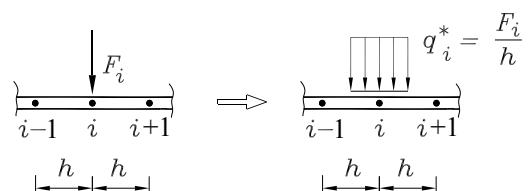


Abbildung 18.6: „Verschmieren“ einer Einzelkraft

Der Fehler, der dadurch in die Rechnung hineinkommt, ist vernachlässigbar, weil er in der Größenordnung des unvermeidbar beim Differenzenverfahren in Kauf genommenen Fehlers liegt und mit feinerer Unterteilung des Trägers kleiner wird (eigentlich ist ohnehin die Einzelkraft eine „künstliche“ Größe, die in der Realität immer „verschmiert“ angreift).

²Die Möglichkeit des Vergleichs mit einer exakten Lösung ist natürlich eine seltene Ausnahme. Die exakte Biegelinie wurde hier auch deshalb angegeben, um zu zeigen, wo man mit dem Versuch einer analytischen Lösung landet, wenn man vom Pfad der „akademischen Probleme“ auch nur leicht abweicht.

- ⇒ Ein **Einzelmoment** M_i am Punkt i wird erfasst, indem es vorher durch ein an den Punkten $i-1$ und $i+1$ angreifendes Kräftepaar ersetzt wird (die gewählten Vorzeichen gelten für ein linksdrehendes Moment):

$$F_{i-1} = -F_{i+1} = \frac{M_i}{2h} \quad \Rightarrow \quad q_{i-1}^* = -q_{i+1}^* = \frac{M_i}{2h^2} .$$

- ⇒ Eine **diskrete Feder** am Punkt i bringt dort eine Einzelkraft

$$F_{ci} = -c_i v_i \quad \Rightarrow \quad q_i^* = \frac{F_{ci}}{h} = \frac{-c_i v_i}{h}$$

ein. Das Minuszeichen ist erforderlich, weil bei nach unten gerichteter positiver Verschiebung die Feder mit einer nach oben gerichteten Kraft (also entgegen der Richtung positiver Kräfte) reagiert.

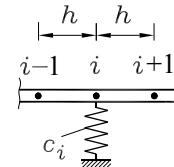


Abbildung 18.7: Diskrete Feder

Auch diese Kraft wird verschmiert, q_i^* kann allerdings nicht einfach der rechten Seite der entsprechenden Gleichung zugeschlagen werden, weil die noch unbekannte Verschiebung v_i darin enthalten ist. Der von der Feder erzeugte Linienlastanteil wird deshalb als gesonderter Anteil in die Differenzengleichung 18.7 eingesetzt (muss dabei mit $\frac{h^4}{EI_0}$ multipliziert werden) und wird dann auf die linke Seite der Gleichung gebracht. Die entstehende Gleichung

$$\begin{aligned} \mu_{i-1} v_{i-2} - 2(\mu_{i-1} + \mu_i) v_{i-1} + (\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} + \frac{c_i h^3}{EI_0}) v_i \\ - 2(\mu_i + \mu_{i+1}) v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2} = \frac{q_i h^4}{EI_0} \end{aligned}$$

zeigt, dass es eine ganz einfache Möglichkeit gibt, eine diskrete Feder am Punkt i zu realisieren: Zum Hauptdiagonalelement dieser Gleichung wird $c_i \frac{h^3}{EI_0}$ addiert. Eine andere Möglichkeit der Realisierung von diskreten Federn wird im Abschnitt 19.2.3 vorgestellt. Diese führt auf das gleiche Ergebnis wie die hier demonstrierte Variante.

- ⇒ Eine **vorgeschriebene Verschiebung** (dem Punkt i wird eine Verschiebung v_v aufgezwungen) wird erfasst, indem im Gleichungssystem die i -te Gleichung ersetzt wird durch

$$v_i = v_v .$$

- ⇒ Eine **starre Zwischenstütze** ist nur ein Sonderfall der vorgeschriebenen Verschiebung und wird dementsprechend durch

$$v_i = 0$$

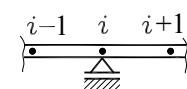


Abbildung 18.8: Zwischenstütze

erfasst (man beachte die besondere Interpretation dieser Realisierung im Abschnitt 19.2.3)).

- ⇒ Ein **Gelenk** am Punkt i wird berücksichtigt, indem die Biegesteifigkeit für den Punkt i gleich Null gesetzt wird, realisiert durch

$$\mu_i = 0 .$$

Natürlich müssen (auch bei ansonsten konstanter Biegesteifigkeit) bei der Realisierung eines Gelenks durch diesen simplen Trick in jedem Fall die Differenzengleichungen für die Biegelinie bei veränderlicher Biegesteifigkeit 18.7 verwendet werden, weil neben der i -ten Gleichung auch jeweils eine Gleichung davor und danach betroffen sind.

18.1.5 Einige spezielle Randbedingungen

Nachfolgend werden einige typische Randbedingungen zusammengestellt, die gegebenenfalls auch kombiniert werden können.

- ⇒ Am **starr eingespannten linken Rand** (Punkt 3) sind Absenkung und Biegewinkel gleich Null:

$$v_3 = 0, \quad v'_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_2 + v_4 = 0 .$$

Entsprechend gilt für den **starr eingespannten rechten Rand** (Punkt $n-2$):

$$v_{n-2} = 0, \quad v'_{n-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_{n-3} + v_{n-1} = 0 .$$

- ⇒ Bei einem momentenfreien Lager (Fest- oder Loslager) sind Absenkung und Biegemoment gleich Null. Für ein **momentenfreies Lager am linken Rand** gilt:

$$v_3 = 0, \quad M_{b3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 - 2v_3 + v_4 = 0 .$$

Entsprechend gilt für das **momentenfreie Lager am rechten Rand** (Punkt $n-2$):

$$v_{n-2} = 0, \quad M_{b,n-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{n-3} - 2v_{n-2} + v_{n-1} = 0 .$$

- ⇒ Am **linken Rand angreifende Einzelkräfte und Einzelmomente** müssen mit den Schnittgrößen am linken Randpunkt 3 im Gleichgewicht sein:

$$M_{b3} = -M, \quad F_{Q3} = -F \quad \Rightarrow$$

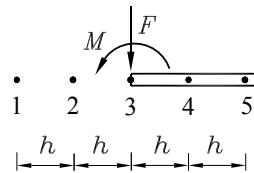


Abbildung 18.11: Einzellasten am linken Rand

$$\mu_3 v_2 - 2\mu_3 v_3 + \mu_3 v_4 = \frac{Mh^2}{EI_0},$$

$$-\mu_2 v_1 + 2\mu_2 v_2 - (\mu_2 - \mu_4)v_3 - 2\mu_4 v_4 + \mu_4 v_5 = \frac{2Fh^3}{EI_0} .$$

- ⇒ Am **rechten Rand angreifende Einzelkräfte und Einzelmomente** müssen mit den Schnittgrößen am rechten Randpunkt $n-2$ im Gleichgewicht sein:

$$M_{b,n-2} = M, \quad F_{Q,n-2} = F \quad \Rightarrow$$

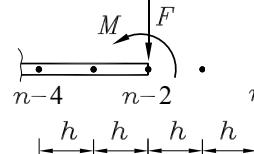


Abbildung 18.12: Einzellasten am rechten Rand

$$\mu_{n-2} v_{n-3} - 2\mu_{n-2} v_{n-2} + \mu_{n-2} v_{n-1} = -\frac{Mh^2}{EI_0},$$

$$-\mu_{n-3} v_{n-4} + 2\mu_{n-3} v_{n-3} - (\mu_{n-3} - \mu_{n-1})v_{n-2} - 2\mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_{n-1} v_n = -\frac{2Fh^3}{EI_0} .$$

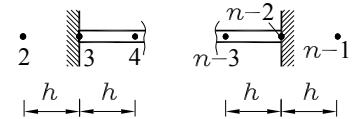


Abbildung 18.9: Starre Einspannungen am linken bzw. rechten Rand

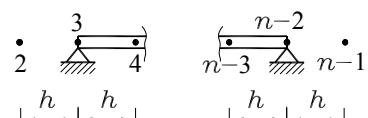


Abbildung 18.10: Momentenfreie Lager am linken bzw. rechten Rand

- ⇒ Eine Federkraft ist proportional zur Absenkung. Bei einer **Feder am linken Rand** muss die Querkraft am Randpunkt 3 mit der Federkraft im Gleichgewicht sein:

$$F_{Q3} - cv_3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\mu_2 v_1 + 2\mu_2 v_2 - \left(\mu_2 - \mu_4 - \frac{2ch^3}{EI_0} \right) v_3 - 2\mu_4 v_4 + \mu_4 v_5 = 0 \quad .$$

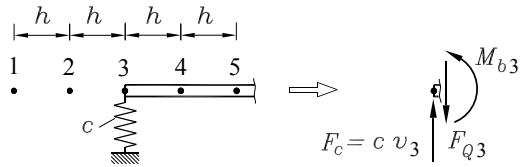


Abbildung 18.13: Feder am linken Rand

- ⇒ Bei einer **Feder am rechten Rand** muss die Querkraft am Randpunkt $n-2$ mit der Federkraft im Gleichgewicht sein:

$$F_{Q,n-2} + cv_{n-2} = 0 \quad \Rightarrow$$

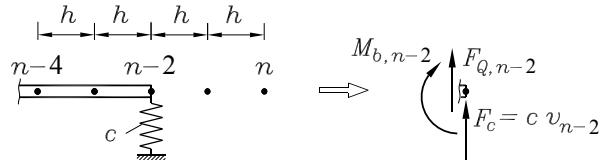


Abbildung 18.14: Feder am rechten Rand

$$-\mu_{n-3} v_{n-4} + 2\mu_{n-3} v_{n-3} - \left(\mu_{n-3} - \mu_{n-1} + \frac{2ch^3}{EI_0} \right) v_{n-2} - 2\mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_{n-1} v_n = 0 \quad .$$

- ⇒ Eine Drehfeder erzeugt ein Moment proportional zur ersten Ableitung der Verschiebung. Bei einer **Drehfeder am linken Rand** muss das Biegemoment am Randpunkt 3 mit dem Federmoment im Gleichgewicht sein:

$$M_{b3} + c_T v'_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\mu_3 + \frac{c_T h}{2EI_0} \right) v_2 - 2\mu_3 v_3 + \left(\mu_3 - \frac{c_T h}{2EI_0} \right) v_4 = 0 \quad .$$

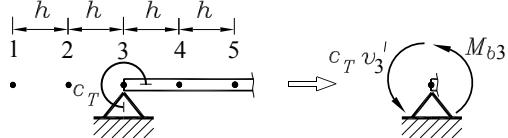


Abbildung 18.15: Drehfeder am linken Rand

- ⇒ Entsprechend gilt bei einer **Drehfeder am rechten Rand**:

$$M_{b,n-2} - c_T v'_{n-2} = 0 \quad \Rightarrow$$

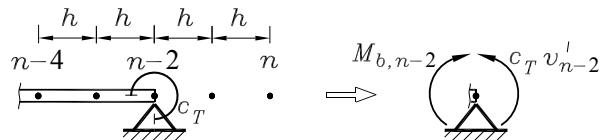
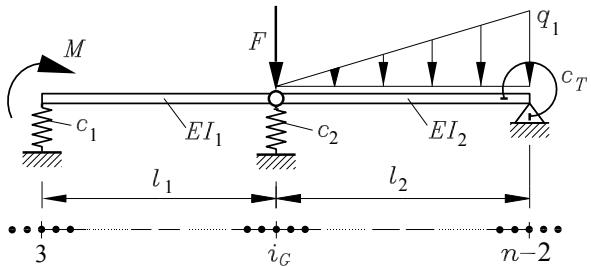


Abbildung 18.16: Drehfeder am rechten Rand

$$\left(\mu_{n-2} - \frac{c_T h}{2EI_0} \right) v_{n-3} - 2\mu_{n-2} v_{n-2} + \left(\mu_{n-2} + \frac{c_T h}{2EI_0} \right) v_{n-1} = 0 \quad .$$

Das folgende Beispiel zeigt, wie am linken Rand die Querkraft-Bedingung für die Feder nach **Abbildung 18.13** mit der Biegemoment-Bedingung nach **Abbildung 18.11** kombiniert wird.

Beispiel: Für den skizzierten Träger, mit dem im Abschnitt 17.5 die Realisierung unterschiedlicher Rand- und Übergangsbedingungen demonstriert wurde (Seite 266), sollen die Absenkung des Gelenks und die Kraft in der Feder c_2 berechnet werden.



$$l_1 = 1200 \text{ mm} ; EI_1 = 2,5 \text{ kNm}^2 ; c_1 = 50 \text{ N/mm} ; q_1 = 1,3 \text{ N/mm} ; F = 800 \text{ N} ; l_2 = 1300 \text{ mm} ; EI_2 = 5 \text{ kNm}^2 ; c_2 = 250 \text{ N/mm} ; c_T = 5 \text{ kNm} ; M = 250 \text{ Nm} .$$

Bei der Einteilung des Trägers in n_A Abschnitte sollte man darauf achten, dass ein Punkt mit dem Gelenk zusammenfällt, was bei den gegebenen Abmessungen bei jedem Vielfachen von 25 garantiert ist. Zunächst wird $n_A = 25$ gewählt, dann entstehen $n = 30$ Gleichungen, die Schrittweite ist $h = \frac{l_1 + l_2}{n_A} = 100 \text{ mm}$. Die Randpunkte haben die Nummern 3 bzw. $n - 2 = 28$, das Gelenk liegt bei Punkt $i_G = 15$.

Als Bezugsbiegesteifigkeit wird (willkürlich) $EI_0 = EI_1$ gewählt, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{EI_1}{EI_0} = 1 & \text{für } i = 1 \dots i_G - 1 \quad (i = 1 \dots 14) , \\ \mu_i &= 0 & \text{für } i = i_G = 15 \quad (\text{Gelenk}) , \\ \mu_i &= \frac{EI_2}{EI_0} = 2 & \text{für } i = i_G + 1 \dots n \quad (i = 16 \dots 30) . \end{aligned}$$

Als Linienlasten q_i an den Stützpunkten gelten folgende Werte:

$$\begin{aligned} q_i &= 0 & \text{für } i = 3 \dots i_G - 1 & \quad (\text{lastfreier linker Bereich}) , \\ q_i &= \frac{F}{h} & \text{für } i = i_G = 15 & \quad (\text{verschmierte Einzelkraft}) , \\ q_i &= q_1(i - i_G)\frac{h}{l_2} & \text{für } i = i_G + 1 \dots n - 2 & \quad (\text{Dreieckslast im rechten Bereich } i = 16 \dots 28) . \end{aligned}$$

Damit stehen alle Größen für das Aufschreiben der Differenzengleichungen für die Innenpunkte $3 \dots n - 2$ ($3 \dots 28$) nach 18.7 bereit. Abschließend wird das Hauptdiagonalelement der Gleichung für Punkt $n_G = 15$ (Angriffspunkt der Feder c_2) um $c_2 \frac{h^3}{EI_0} = 0,1$ vergrößert (siehe Erläuterung zu Abbildung 18.7 auf Seite 283).

Die 4 Randbedingungsgleichungen können aus dem Katalog dieses Abschnitts (Seiten 284 und 285) zusammengestellt werden. An den Rändern gilt (mit $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1$, $\mu_{28} = 2$):

$$\begin{aligned} v_2 - 2v_3 + v_4 &= -1 & , \quad -v_1 + 2v_2 + 0,04v_3 - 2v_4 + v_5 &= 0 & , \\ v_{28} &= 0 & , \quad 1,9v_{27} - 4v_{28} + 2,1v_{29} &= 0 & . \end{aligned}$$

Es ist also das folgende Gleichungssystem zu lösen, in dem nur die von Null verschiedenen Elemente angegeben sind. Man erkennt den regelmäßigen Aufbau der Koeffizientenmatrix: Die beiden ersten bzw. letzten Gleichungen repräsentieren die Randbedingungen, ansonsten findet man im oberen Teil ($\mu_i = 1$) die typischen „ $1, -4, 6, -4, 1$ “-Gleichungen, im unteren Teil wegen $\mu_i = 2$ entsprechend modifizierte Gleichungen. Nur die 3 Gleichungen im Mittelteil weichen wegen des Gelenks und der Feder von den übrigen Gleichungen ab. Die Feinheit der Diskretisierung (Schrittweite h) steckt in der rechten Seite in allen Elementen, in der Koeffizientenmatrix

nur in den vier Elementen, die von den Federn beeinflusst sind. Wenn man also von $n_A = 25$ auf $n_A = 2500$ übergeht, sind nur diese Elemente von der Änderung betroffen:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & & & \\ -1 & 2 & 0,04 & -2 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 5 & -2 & 0 & \\ 1 & -2 & 3,1 & -4 & 2 & \\ 0 & -4 & 10 & -8 & 2 & \\ 2 & -8 & 12 & -8 & 2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 2 & -8 & 12 & -8 & 2 & \\ 1 & & & & & \\ 1,9 & -4 & 2,1 & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \\ v_{16} \\ v_{17} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{28} \\ v_{29} \\ v_{30} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0,32 \\ 0,004 \\ 0,008 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,052 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

Unter www.TM-aktuell.de findet man ein Matlab-Script, das dieses Gleichungssystem aufbaut und löst. Realisiert wird das natürlich nicht durch den Aufbau einer 30×30 -Matrix und des entsprechenden Vektors der rechten Seite, sondern für eine beliebige Diskretisierung n_A . In der nebenstehenden Tabelle sind einige Ergebnisse zusammengestellt.

n_A	v_{Gelenk} [mm]	F_{c2} [N]
25	4,9772	1244,3
250	4,9826	1245,6
2500	4,9826	1245,7
Exakt	4,9826	1245,7

Schon bei $n_A = 25$ (30 Gleichungen) sind die Ergebnisse ausreichend genau. Bei feinerer Diskretisierung muss man schon mehr Stellen angeben, als im Ingenieur-Bereich im Allgemeinen sinnvoll sind, um überhaupt Unterschiede zur exakten Lösung zu erkennen.



WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Differenzenverfahren auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) bietet u. a. folgende Informationen:



- Skript „Das Differenzenverfahren - kurze Einführung -“
- Strategien zur Lösung der Gleichungssysteme
- Matlab-Script als Vorlage für unterschiedliche Probleme
- Beispiele: Biegeträger, elastisch gebettete Träger, gekrümmte Träger, Biegeschwingungen gerader Träger, Knickstäbe, ...



18.2 Der Biegeträger als finites Element

Der im Kapitel 15 eingeführte Finite-Elemente-Algorithmus ist dort so allgemein beschrieben worden, dass er auf andere Problemklassen übertragen werden kann, wenn für ein zu definierendes finites Element der Zusammenhang zwischen Element-Knotenlasten und Element-Knotenverschiebungen (Element-Steifigkeitsbeziehung) bekannt ist.

In den folgenden Abschnitten werden finite Elemente für Biegeträger (unter Biegemoment- und Querkraft-Belastung) und biegesteife Rahmentragwerke (unter Biegemoment-, Querkraft- und Normalkraft-Belastung) entwickelt. Dabei wird ausschließlich auf die im Kapitel 17 behandelte Theorie der Biegeverformung zurückgegriffen.

18.2.1 Element-Steifigkeitsmatrix für Biegeträger

Als finites Element wird ein Biegeträger der Länge l_e mit der konstanten Biegesteifigkeit EI_e definiert, der an den Knoten 1 und 2 durch die Element-Knotenlasten V_1 und M_1 bzw. V_2 und M_2 belastet ist (Abbildung 18.17). Die Knotenlasten werden entsprechend den Formalisierungsprinzipien der Finite-Elemente-Methode an beiden Knoten mit gleichem Richtungssinn (nach oben bzw. linksdrehend) angetragen.

Die Element-Knotenlasten sind nicht unabhängig voneinander (natürlich müssen die Gleichgewichtsbedingungen am Element erfüllt sein). Sie verformen das Element, die Verformung wird durch die Element-Knotenverformungen v_1 , φ_1 , v_2 und φ_2 beschrieben, die mit den gleichen Richtungen wie die Element-Knotenlasten positiv definiert werden.

Gesucht ist nun der Zusammenhang zwischen den Element-Knotenlasten und den Element-Knotenverformungen (Element-Steifigkeitsmatrix). Diese Aufgabe wird in zwei Schritten gelöst: Zunächst werden nur Knotenverformungen am Knoten 1 zugelassen (das Element wird am Knoten 2 eingespannt, Abbildung 18.18), und es wird nach den Belastungen gefragt, die diese Verformungen hervorrufen, anschließend wird diese Prozedur für den Knoten 2 ausgeführt, um dann schließlich die beiden Fälle zu überlagern.

- a) In der Zusammenstellung wichtiger Grundlastfälle für die Biegeverformung im Abschnitt 17.4 findet man (Varianten e und i) die Formeln, nach denen die Verformungen v_1 und φ_1 infolge der Belastungen \bar{V}_1 und \bar{M}_1 aufgeschrieben werden können (Superposition beider Lastfälle):

$$v_1 = \frac{\bar{V}_1 l_e^3}{3EI_e} - \frac{\bar{M}_1 l_e^2}{2EI_e}, \quad \varphi_1 = -\frac{\bar{V}_1 l_e^2}{2EI_e} + \frac{\bar{M}_1 l_e}{EI_e}.$$

Diese beiden Formeln werden nach den Belastungen \bar{V}_1 und \bar{M}_1 umgestellt:

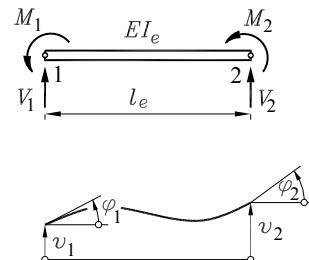


Abbildung 18.17: Finites Element und Knotenverformungen

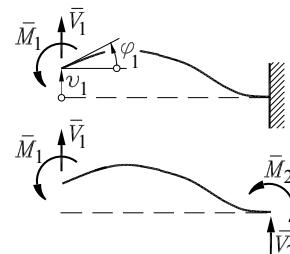


Abbildung 18.18: Verformungen am Knoten 1

$$\bar{V}_1 = \frac{12EI_e}{l_e^3} v_1 + \frac{6EI_e}{l_e^2} \varphi_1 , \quad \bar{M}_1 = \frac{6EI_e}{l_e^2} v_1 + \frac{4EI_e}{l_e} \varphi_1 .$$

Aus Gleichgewichtsbedingungen gewinnt man Kraft und Moment an der Einspannung:

$$\bar{V}_2 = -\bar{V}_1 = -\frac{12EI_e}{l_e^3} v_1 - \frac{6EI_e}{l_e^2} \varphi_1 , \quad \bar{M}_2 = \bar{V}_1 l_e - \bar{M}_1 = \frac{6EI_e}{l_e^2} v_1 + \frac{2EI_e}{l_e} \varphi_1 .$$

- b) Auf gleichem Wege werden die Belastungen ermittelt, die die Verformungen des Knotens 2 erzeugen:

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= -\frac{12EI_e}{l_e^3} v_2 - \frac{6EI_e}{l_e^2} \varphi_2 , \\ \hat{M}_2 &= -\frac{6EI_e}{l_e^2} v_2 + \frac{4EI_e}{l_e} \varphi_2 , \\ \hat{V}_1 &= -\hat{V}_2 = -\frac{12EI_e}{l_e^3} v_2 + \frac{6EI_e}{l_e^2} \varphi_2 , \\ \hat{M}_1 &= -\hat{V}_2 l_e - \hat{M}_2 = -\frac{6EI_e}{l_e^2} v_2 + \frac{2EI_e}{l_e} \varphi_2 .\end{aligned}$$

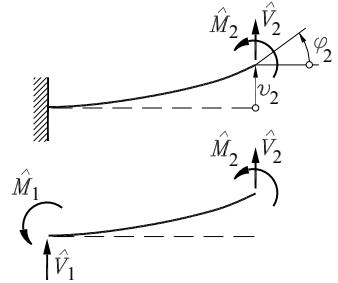


Abbildung 18.19: Verformungen und Belastungen am Knoten 2

Wenn die für die beiden Fälle *a* und *b* berechneten Belastungen gleichzeitig auf das Element aufgebracht werden (Addieren der Kräfte und Momente), dann rufen sie auch die Summe der unter *a* und *b* erzeugten Verformungen hervor (**Abbildung 18.20**):

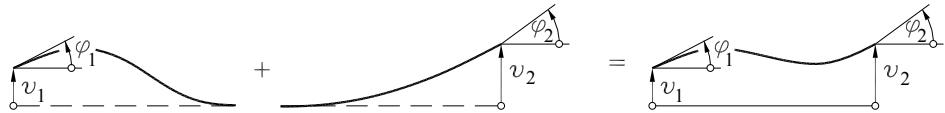


Abbildung 18.20: Addition der beiden Verformungsfälle zur Verformung des finiten Elements

Die Addition der Knotenbelastungen der beiden Lastfälle entsprechend

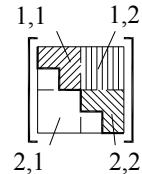
$$\begin{aligned}V_1 &= \bar{V}_1 + \hat{V}_1 & , \quad M_1 = \bar{M}_1 + \hat{M}_1 & , \\ V_2 &= \bar{V}_2 + \hat{V}_2 & , \quad M_2 = \bar{M}_2 + \hat{M}_2 & \end{aligned}$$

führt zur

Element-Stifigkeitsbeziehung für den ebenen Biegeträger:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}_{\text{symm.}} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (18.9)$$

- ⇒ Damit ist die theoretische Vorarbeit für die Berechnung des geraden Biegeträgers nach der Finite-Elemente-Methode geleistet. Die Elemente mit zwei Freiheitsgraden pro Knoten (Verschiebung und Biegewinkel) können - wie im Kapitel 15 beschrieben - zu Systemen zusammengebaut werden. Wie im Kapitel 15 erläutert, werden durch den Einspeicherungs-Algorithmus, der unverändert übernommen werden kann, die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Der wesentliche Vorteil der Finite-Elemente-Strategie liegt darin, dass man sie ganz formal auf unterschiedliche Probleme übertragen kann.
- ⇒ Beim Einspeichern der Element-Steifigkeitsmatrizen in die System-Steifigkeitsmatrix werden jeweils 2*2-Untermatrizen übertragen (wie bei den Fachwerk-Elementen des Abschnitts 15.3). Im Gegensatz zu den Fachwerk-Elementen des Abschnitts 15.3 können mit den durch 18.9 beschriebenen Elementen jedoch nur gerade Biegeträger (fluchtende Elemente, keine Rahmen) berechnet werden.


Beispiel:

Für den skizzierten Biegeträger soll die Berechnung der Verformung am Kraftangriffspunkt und des Biegewinkels am rechten Lager nach dem Finite-Elemente-Algorithmus demonstriert werden. Für das Element a sollen die Element-Knotenlasten berechnet werden.

$$\text{Gegeben: } EI_a; \lambda = \frac{EI_b}{EI_a} = 0,25; l_a; \mu = \frac{l_b}{l_a} = 0,5; F.$$

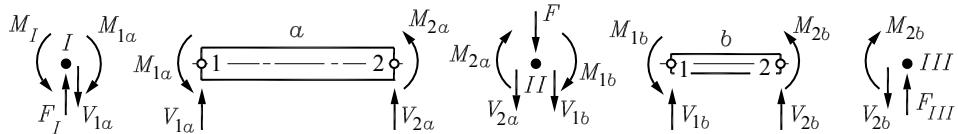
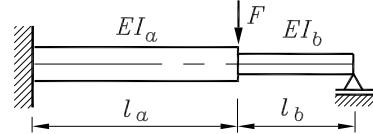


Abbildung 18.21: FEM-Berechnungsmodell: 2 Elemente, 3 Knoten

Die Abbildung 18.21 zeigt die Einteilung des Systems in zwei finite Elemente a und b und die drei von den Elementen gelösten Systemknoten I , II und III , auf die die äußeren Belastungen wirken (gegebene Kraft F und die Lagerreaktionen F_I , M_I und F_{III}).

Die Element-Steifigkeitsmatrizen für die Elemente a und b werden nach 18.9 aufgeschrieben (nebenstehend, bei K_b wurden die gegebenen Werte für λ und μ bereits eingearbeitet).

$$K_a = \frac{EI_a}{l_a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_a & -12 & 6l_a \\ & 4l_a^2 & -6l_a & 2l_a^2 \\ & & 12 & -6l_a \\ & & & 4l_a^2 \end{bmatrix} \quad \text{symm.}$$

$$K_b = \frac{EI_a}{l_a^3} \begin{bmatrix} 24 & 6l_a & -24 & 6l_a \\ & 2l_a^2 & -6l_a & l_a^2 \\ & & 24 & -6l_a \\ & & & 2l_a^2 \end{bmatrix} \quad \text{symm.}$$

Zur Erinnerung: Wenn die Element-Steifigkeitsmatrizen nach den Regeln aus dem Kapitel 15 in die System-Steifigkeitsmatrix und die äußeren Belastungen in den System-Belastungsvektor eingespeichert werden, dann garantiert die Lösung des so entstehenden Gleichungssystems,

- dass die Gleichgewichtsbedingungen an den Systemknoten erfüllt sind und
- die Knotenverformungen der an einem Knoten zusammenstoßenden Elemente kompatibel sind (die geometrischen Übergangsbedingungen werden erfüllt).

Die Zuordnung der Elementknoten zu den Systemknoten ist in diesem Fall besonders einfach:

Element-Knoten	System-Knoten	Koinzidenzmatrix
Element a : Element b :	$(1, 2)$ \rightarrow $[I, II]$ \rightarrow $[II, III]$	\rightarrow $\begin{bmatrix} I & II \\ II & III \end{bmatrix}$

Die System-Steifigkeitsmatrix hat 6 Zeilen bzw. Spalten (3 Knoten mit je 2 Freiheitsgraden). Sie wird aus den Element-Steifigkeitsmatrizen aufgebaut, indem die 2×2 -Untermatrizen entsprechend **Abbildung 18.22** eingespeichert werden. Im Mittelblock, zu dem beide Elemente einen Anteil liefern (am Knoten II stoßen beide Elemente zusammen) werden die Elementanteile addiert. Man erhält schließlich folgende System-Steifigkeitsbeziehung:

$$\begin{array}{c} I \quad II \quad III \\ \boxed{\begin{bmatrix} a & a & \\ a & a & \\ & & \end{bmatrix}} \end{array} \quad \begin{array}{c} I \quad II \quad III \\ \boxed{\begin{bmatrix} & & \\ & b & b \\ & b & b \end{bmatrix}} \end{array}$$

Abbildung 18.22: System-Steifigkeitsmatrix: Zielpositionen für die Element-Steifigkeitsmatrizen

$$\frac{EI_a}{l_a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_a & -12 & 6l_a & 0 & 0 \\ & 4l_a^2 & -6l_a & 2l_a^2 & 0 & 0 \\ & & 36 & 0 & -24 & 6l_a \\ & & & 6l_a^2 & -6l_a & l_a^2 \\ & & \text{symm.} & & 24 & -6l_a \\ & & & & & 2l_a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \varphi_I \\ v_{II} \\ \varphi_{II} \\ v_{III} \\ \varphi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ M_I \\ -F \\ 0 \\ F_{III} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die äußere Kraft F wurde mit negativem Vorzeichen in den Belastungsvektor eingefügt, weil sie entgegen dem für den Aufbau der Element-Steifigkeitsbeziehung gewählten Richtungssinn wirkt. Auf die Positionen 4 und 6 des Belastungsvektors wurden Nullen gesetzt, weil keine äußeren Momente an den Knoten II und III angreifen.

In der System-Steifigkeitsbeziehung sind die beiden Kräfte F_I und F_{III} und das Moment M_I und die drei gesuchten Knotenverformungen v_{II} , φ_{II} und φ_{III} unbekannt. Die Gleichungen 1, 2 und 5 mit den unbekannten Belastungsgrößen werden zunächst aus dem Gleichungssystem herausgenommen. Gleichzeitig können die entsprechenden Spalten 1, 2 und 5 der System-Steifigkeitsmatrix gestrichen werden, die ohnehin keinen Beitrag liefern, weil die zugehörigen Verschiebungsgrößen v_I , φ_I und v_{III} den Wert Null haben (Einarbeiten der geometrischen Randbedingungen durch „Zeilen-Spalten-Streichen“). Die zu streichenden Zeilen und Spalten sind in der System-Steifigkeitsbeziehung grau unterlegt. Es verbleibt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 36v_{II} &+ 6l_a\varphi_{III} = -\frac{Fl_a^3}{EI_a} \\ 6l_a^2\varphi_{II} &+ l_a^2\varphi_{III} = 0 \\ 6l_a v_{II} + l_a^2\varphi_{II} &+ 2l_a^2\varphi_{III} = 0 \end{aligned}$$

Wenn man die erste Gleichung durch l_a und die beiden anderen Gleichungen durch l_a^2 dividiert, findet man l_a nur noch bei der Unbekannten v_{II} , so dass man mit der neuen Unbekannten $\frac{v_{II}}{l_a}$ das Gleichungssystem allgemein lösen kann:

$$\begin{bmatrix} 36 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_{II}}{l_a} \\ \varphi_{II} \\ \varphi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{Fl_a^2}{EI_a} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{v_{II}}{l_a} \\ \varphi_{II} \\ \varphi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ 36 \end{bmatrix} \frac{Fl_a^2}{180EI_a} .$$

Mit den nun bekannten Verformungen können aus den drei Gleichungen, die aus der System-Steifigkeitsbeziehung zunächst gestrichen wurden, die Lagerreaktionen F_I , F_{III} und M_I berechnet werden:

$$\begin{aligned} F_I &= \frac{EI_a}{l_a^3} \left[12 \cdot 0 + 6l_a \cdot 0 - 12 \cdot \left(\frac{-11Fl_a^3}{180EI_a} \right) + 6l_a \cdot \left(\frac{-6Fl_a^2}{180EI_a} \right) \right] = \frac{8}{15}F , \\ M_I &= \frac{EI_a}{l_a^3} \left[6l_a \cdot 0 + 4l_a^2 \cdot 0 - 6l_a \cdot \left(\frac{-11Fl_a^3}{180EI_a} \right) + 2l_a^2 \cdot \left(\frac{-6Fl_a^2}{180EI_a} \right) \right] = \frac{3}{10}Fl_a , \\ F_{III} &= \frac{EI_a}{l_a^3} \left[-24 \cdot \left(\frac{-11Fl_a^3}{180EI_a} \right) - 6l_a \cdot \left(\frac{-6Fl_a^2}{180EI_a} \right) + 24 \cdot 0 - 6l_a \cdot \left(\frac{36Fl_a^2}{180EI_a} \right) \right] = \frac{7}{15}F . \end{aligned}$$

Aus den Element-Steifigkeitsbeziehungen sind die Element-Knotenbelastungen für jedes Element zu ermitteln, was hier für das Element a gezeigt wird. Die Element-Steifigkeitsmatrix wird mit dem Element-Verformungsvektor, der mit den bekannten bzw. berechneten Werten

$$v_I = 0 , \quad \varphi_I = 0 , \quad v_{II} = -\frac{11Fl_a^3}{180EI_a} , \quad \varphi_{II} = -\frac{6Fl_a^2}{180EI_a}$$

bestückt wird, multipliziert:

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ M_{1a} \\ V_{2a} \\ M_{2a} \end{bmatrix} = \frac{EI_a}{l_a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_a & -12 & 6l_a \\ 6l_a & 4l_a^2 & -6l_a & 2l_a^2 \\ -12 & -6l_a & 12 & -6l_a \\ 6l_a & 2l_a^2 & -6l_a & 4l_a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11l_a \\ -6 \end{bmatrix} \frac{Fl_a^2}{180EI_a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9l_a \\ -16 \\ 7l_a \end{bmatrix} \frac{F}{30} .$$

⇒ Die Element-Knotenbelastungen entsprechen natürlich (mit Ausnahme des Vorzeichens) den Schnittgrößen F_Q und M_b . So ist z. B. das gerade berechnete

$$M_{2a} = \frac{7}{30}Fl_a$$

(Moment am Knoten 2 des Elements a) gleich dem Biegemoment an der Kraftangriffsstelle. Mit den errechneten Elementbelastungen V_{1a} und M_{1a} sind die Schnittgrößen am linken Elementrand und damit die Lagerreaktionen an der Einspannung bekannt. Letztere entsprechen erwartungsgemäß genau den oben bereits berechneten Werten für F_I und M_I .

⇒ Die errechneten Werte für die Verformungen, Lagerreaktionen und Elementbelastungen sind exakt, weil die Biegetheorie von der Element-Steifigkeitsmatrix 18.9 exakt erfasst wird.

18.2.2 Element-Belastungen (Linienlasten)

Die im Abschnitt 18.2.1 hergeleitete Element-Steifigkeitsbeziehung 18.9 gilt für Elemente, in die nur über die Knoten Kräfte eingeleitet werden. Um auch Linienlasten, die ja Element-Belastungen sind, erfassen zu können, wird ein Weg beschritten, der schon im Abschnitt 15.4 zur Erfassung von Temperatur- und Anfangsdehnungen diente: Die Element-Belastungen werden auf statisch gleichwertige Knotenlasten reduziert, die dann den äußeren Belastungen zugeschlagen werden können.

Diese Reduktion soll am Beispiel einer linear veränderlichen Linienlast demonstriert werden. Ein Element einer Finite-Elemente-Struktur ist durch eine Trapezlast belastet (**Abbildung 18.23**), die konsequenterweise in gleicher Richtung wie alle Elementkräfte (nach oben) positiv definiert wird. Das System soll nun wie skizziert durch zwei Systeme („Beidseitig eingespannter Träger“ + „Reduziertes System“) so ersetzt werden, dass deren Summe (hinsichtlich der Verformungen und der Belastungen) mit dem Original-System identisch ist.

Der beidseitig eingespannte Träger, der die Linienlast tragen soll, gestattet keine Verformungen an den Knoten, allerdings wirken dort die Lagerreaktionen.

Wenn die Summe der beiden Ersatzsysteme dem Originalsystem entsprechen soll, müssen die Lagerreaktionen des eingespannten Trägers durch entgegengesetzt gerichtete Belastungen am reduzierten System kompensiert werden. Mit diesen reduzierten Belastungen werden am reduzierten System alle Knotenverformungen korrekt ausgerechnet, weil das zu überlagernde Element ja keine Verformungen an diesen Punkten beiträgt.

Den Element-Knotenlasten, die das reduzierte System liefert, sind allerdings für das Element, das die Linienlast trägt, die Lagerreaktionen der Einspannstellen (negative reduzierte Belastungen) zu überlagern. Man ermittelt die reduzierten Belastungen am beidseitig eingespannten Träger (**Abbildung 18.24**) nach der Theorie der Biegeverformung. Für den skizzierten Fall sind es die Ergebnisse des Beispiels 3 im Abschnitt 17.6 (Seite 270):

$$\begin{aligned} F_{1r} &= \frac{l_e}{20} (7q_1 + 3q_2) , \quad M_{1r} = \frac{l_e^2}{60} (3q_1 + 2q_2) , \\ F_{2r} &= \frac{l_e}{20} (3q_1 + 7q_2) , \quad M_{2r} = -\frac{l_e^2}{60} (2q_1 + 3q_2) . \end{aligned} \quad (18.10)$$

Auf entsprechendem Wege könnte man für andere Element-Belastungen die reduzierten Belastungen ermitteln, im Allgemeinen kommt man aber mit den Formeln 18.10 aus, die als Sonderfälle die konstante Linienlast und die Dreieckslast enthalten. Für andere Verläufe bevorzugt der Praktiker meist eine stückweise Näherung der tatsächlichen Belastungsfunktion durch Trapezlasten (Einteilung des Linienlastbereichs in mehrere finite Elemente).

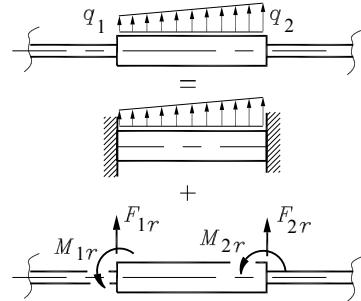


Abbildung 18.23: Originalsystem, ersetzt durch zwei Teilsysteme

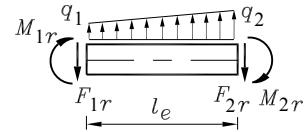


Abbildung 18.24: „Lagerreaktionen“ infolge Trapezlast

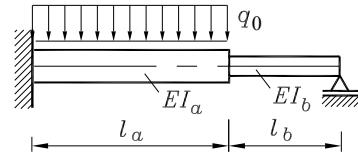
Die wichtigste Schritte bei der Berücksichtigung von Linienlasten, die am nachfolgenden Beispiel noch einmal demonstriert werden, sind also:

- ⇒ Die auf die Elemente wirkenden Linienlasten werden durch reduzierte Belastungen ersetzt, die als äußere Knotenlasten behandelt werden.
- ⇒ Das System, das dann nur noch durch Einzelkräfte und Einzelmomente an den Knoten belastet ist, liefert bei der Berechnung nach dem Finite-Elemente-Algorithmus die **Knotenverformungen exakt**.
- ⇒ Bei der Berechnung der Element-Knotenbelastungen müssen für die Elemente, bei denen Linienlasten ersetzt wurden, die reduzierten Belastungen subtrahiert werden. Für diese Elemente verwendet man die nachfolgende Beziehung 18.11.

Erweiterte Element-Steifigkeitsbeziehung für den ebenen Biegeträger:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}_{\text{symm.}} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{1r} \\ M_{1r} \\ F_{2r} \\ M_{2r} \end{bmatrix} \quad (18.11)$$

Beispiel: Für den Biegeträger des Beispiels aus dem vorigen Abschnitt sollen mit der nebenstehend skizzierten Belastung alle Knotenverformungen und die Element-Knotenlasten des Elements a berechnet werden.

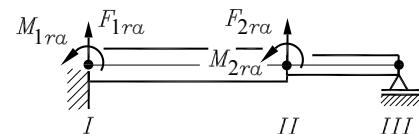


Gegeben: EI_a ; $\lambda = \frac{EI_b}{EI_a} = 0,25$; l_a ; $\mu = \frac{l_b}{l_a} = 0,5$; q_0 .

Die Linienlast am Element a wird nach 18.10 durch reduzierte Belastungen an den Elementknoten ersetzt (negative Vorzeichen, weil die Linienlast in diesem Beispiel nach unten gerichtet ist):

$$F_{1ra} = F_{2ra} = -\frac{1}{2} q_0 l_a \quad , \\ M_{1ra} = -M_{2ra} = -\frac{1}{12} q_0 l_a^2 \quad .$$

Da die Abmessungen und Biegesteifigkeiten mit denen des Beispiels aus dem vorigen Abschnitt übereinstimmen, können die Element-Steifigkeitsmatrizen und die System-Steifigkeitsmatrix ungeändert übernommen werden. Im (nebenstehend zu sehenden) System-Belastungsvektor tauchen nun allerdings die reduzierten Knotenlasten auf den Positionen der Systemknoten I und II auf.



$$\begin{bmatrix} F_I - \frac{1}{2} q_0 l_a \\ M_I - \frac{1}{12} q_0 l_a^2 \\ -\frac{1}{2} q_0 l_a \\ \frac{1}{12} q_0 l_a^2 \\ F_{III} \\ 0 \end{bmatrix}$$

System-Belastungsvektor

Man beachte, dass am Knoten I die reduzierten Belastungen zusätzlich zu den Lagerreaktionen F_I und M_I auftauchen. Zwar werden diese Gleichungen bei der Verformungsberechnung zunächst gestrichen, bei einer anschließenden Berechnung der Lagerreaktionen mit diesen Gleichungen müssten diese Anteile berücksichtigt werden.

Nach dem Einarbeiten der geometrischen Randbedingungen durch „Zeilen-Spalten-Streichen“ verbleibt ein Gleichungssystem wie im Beispiel des vorigen Abschnitts, das sich von diesem nur durch die geänderte rechte Seite unterscheidet:

$$\begin{aligned} 36v_{II} &+ 6l_a \varphi_{III} = -\frac{q_0 l_a^4}{2EI_a} \\ 6l_a^2 \varphi_{II} + l_a^2 \varphi_{III} &= \frac{q_0 l_a^5}{12EI_a} \\ 6l_a v_{II} + l_a^2 \varphi_{II} + 2l_a^2 \varphi_{III} &= 0 \end{aligned}$$

Wenn man wieder die erste Gleichung durch l_a und die beiden anderen Gleichungen durch l_a^2 dividiert, findet man l_a nur noch bei der Unbekannten v_{II} , so dass man mit der neuen Unbekannten $\frac{v_{II}}{l_a}$ das Gleichungssystem allgemein lösen kann:

$$\begin{bmatrix} 36 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_{II}}{l_a} \\ \varphi_{II} \\ \varphi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{q_0 l_a^3}{EI_a} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{v_{II}}{l_a} \\ \varphi_{II} \\ \varphi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{q_0 l_a^3}{36EI_a} .$$

Die Element-Knotenbelastungen für das Element a müssen hier mit der erweiterten Element-Steifigkeitsbeziehung ermittelt werden. Der Element-Verformungsvektor wird mit den bekannten bzw. berechneten Werten

$$v_I = 0 , \quad \varphi_I = 0 , \quad v_{II} = -\frac{q_0 l_a^4}{36EI_a} , \quad \varphi_{II} = 0$$

bestückt und in die erweiterte Element-Steifigkeitsbeziehung eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ M_{1a} \\ V_{2a} \\ M_{2a} \end{bmatrix} = \frac{EI_a}{l_a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_a & -12 & 6l_a \\ 6l_a & 4l_a^2 & -6l_a & 2l_a^2 \\ -12 & -6l_a & 12 & -6l_a \\ 6l_a & 2l_a^2 & -6l_a & 4l_a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{q_0 l_a^4}{36EI_a} - \begin{bmatrix} -6 \\ -l_a \\ -6 \\ l_a \end{bmatrix} \frac{q_0 l_a}{12} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3l_a \\ 2 \\ l_a \end{bmatrix} \frac{q_0 l_a}{12} .$$

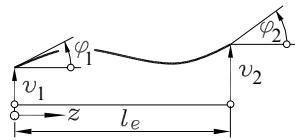
- ⇒ Hier soll noch einmal auf die konsequent gehandhabte **Vorzeichen-Regelung** aufmerksam gemacht werden: Sämtliche Kräfte und Verschiebungen wurden positiv nach oben definiert, die Momente und Winkel sind linksdrehend positiv. Dies gilt für die äußere Belastung der Knoten (Einzelkräfte bzw. -momente) und der Elemente (Linienlasten) ebenso wie für die Ergebnisse (Knotenverformungen, Element-Knotenbelastungen, Lagerreaktionen).

Diese Aussage gilt für die Formulierung der Theorie. Den Programmierern von FEM-Programmen ist es natürlich freigestellt, für die Eingabe über die Benutzeroberfläche der Software Vorzeichenregelungen zu treffen, die den Konventionen entsprechen, die dem Anwender vertraut sind (z. B. für Biegeträger: Kräfte und Verschiebungen positiv nach unten).

18.2.3 Exakte Lösungen, Näherungslösungen

Auch wenn es bisher nicht so aussah: *Die Methode der finiten Elemente ist ein Näherungsverfahren*. Alle Beispiele im Kapitel 15 und im Abschnitt 18.2 lieferten allerdings Ergebnisse, die im Rahmen der klassischen Theorien (ebene Fachwerke bzw. ebene Biegeträger) exakt waren.

Am Biegeträger lässt sich sehr schön demonstrieren, wo die Grenzen für die exakte Lösung sind. Als bei der Herleitung der Element-Steifigkeitsbeziehung (Abschnitt 18.2.1) die Frage beantwortet wurde, welche Knotenkräfte die Knotenverformungen v_1, φ_1, v_2 und φ_2 hervorrufen (Abbildung 18.25), war die Basis für die Antwort die Biegelinie (Kapitel 17). Wie diese Funktion aussieht, die einen (lastfreien) verformten Träger mit vorgeschriebenen Verformungen an den Rändern beschreibt, ist durch Integration der Biegelinie $v'''' = 0$ leicht zu ermitteln. Es wird nach viermaliger Integration eine Funktion 3. Grades, aus der sich mit den vier Randbedingungen $v(0) = v_1, v'(0) = \varphi_1, v(l_e) = v_2, v'(l_e) = \varphi_2$ ergibt:



$$v(z) = \left(1 - 3\frac{z^2}{l_e^2} + 2\frac{z^3}{l_e^3}\right) v_1 + \left(z - 2\frac{z^2}{l_e} + \frac{z^3}{l_e^2}\right) \varphi_1 \\ + \left(3\frac{z^2}{l_e^2} - 2\frac{z^3}{l_e^3}\right) v_2 + \left(-\frac{z^2}{l_e} + \frac{z^3}{l_e^2}\right) \varphi_2 \quad . \quad (18.12)$$

Abbildung 18.25: $v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2$

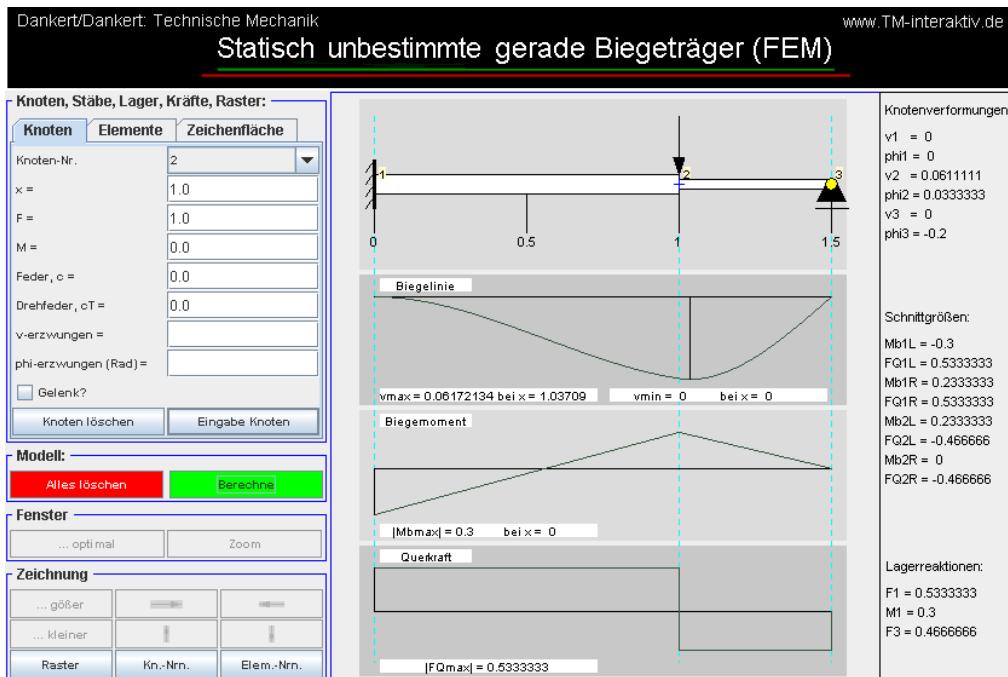


Abbildung 18.26: Programm „Gerade Biegeträger“, zu finden unter www.TM-interaktiv.de

Wenn sich die Verformungen aller Elemente mit dieser Funktion beschreiben lassen, ist das Ergebnis exakt. Mit dem Programm „Gerade Biegeträger“ (steht unter www.TM-interaktiv.de zur interaktiven Nutzung zur Verfügung) soll demonstriert werden, was zu tun ist (und was von der Software bereits getan werden konnte), um für die Fälle, bei denen sich die Verformung nicht mehr durch die Biegelinie 18.12 beschreiben lässt, eine ausreichende Genauigkeit zu bekommen.



Die Abbildung 18.26 zeigt die Berechnung des Biegeträgers von Seite 290. Die Ergebnisse sind erwartungsgemäß exakt, weil die Verformung der lastfreien Elemente mit 18.12 beschrieben werden kann. Deshalb darf man auch auf die grafische Darstellung der Biegelinie (Verformungen innerhalb der Elemente) und die Angabe der maximalen Durchbiegung vertrauen.

Die Aussage des letzten Satzes gilt nicht mehr für das Beispiel aus dem Abschnitt 18.2.2 (Abbildung 18.27), weil bei der Herleitung der reduzierten Lasten, die die Linienlast für die FEM-Rechnung ersetzen, gezeigt wurde, dass dann mit dem FEM-Algorithmus nur noch die Knotenverformungen exakt berechnet werden.

Aber dieser Mangel kann geheilt werden:

Das Originalsystem setzt sich nach Abbildung 18.23 auf Seite 293 aus dem reduzierten System und einem beidseitig eingespannten Träger zusammen. Den nach 18.12 berechneten Verformungen innerhalb eines Elements müssen die Verformungen des beidseitig eingespannten Trägers unter der entsprechenden Linienlast überlagert werden.

Das Programm „Gerade Biegeträger“ unter www.TM-interaktiv.de führt diese Nachbesserung der FEM-Berechnung automatisch aus, so dass auch die Verformungen von Elementen mit linear veränderlicher Linienlast (Trapezlast) exakt ausgegeben werden. Weil es auch die unterschiedlichsten Lager (einschließlich Feder und Drehfeder) und Gelenke exakt erfassat, liefert sogar das System der Abbildung 18.28 exakte Werte im Sinne der klassischen Biegetheorie. Dies ist für dieses System sogar überprüfbar, weil dieser Träger im Abschnitt 17.5 (Seite 265) durch Integration der Biegelinie berechnet wurde.

Fazit: Exakt werden folgende Eigenschaften des Biegeträgers erfasst bzw. durch Nachbesserung korrigiert: Stückweise konstante Biegesteifigkeiten, starre Einspannungen, momentenfreie Lager, lineare Federn und Drehfedern, Gelenke, Einzelkräfte, Einzelmomente und linear veränderliche Linienlasten.

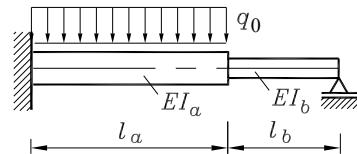


Abbildung 18.27: Verformungen des linken Elements können nicht mehr allein nach 18.12 berechnet werden

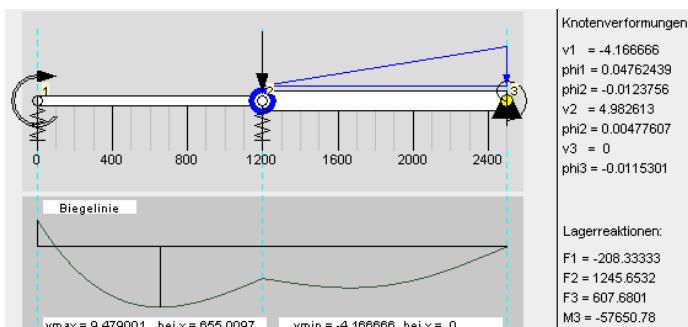


Abbildung 18.28: Biegeträger des Beispiels 3 aus Abschnitt 17.5

Nicht exakt zu erfassen sind kontinuierlich veränderliche Biegesteifigkeiten. Der nur durch sein Eigengewicht belastete Keil (**Abbildung 18.29**) ist ein Beispiel dafür. Im Abschnitt 18.1.3 wurde die Biegeverformung mit Hilfe des Differenzenverfahrens berechnet (Seite 281).

Dort findet man auch den Grund dafür, warum die Finite-Elemente-Methode für solche Aufgaben keine exakten Lösungen liefern kann: Die auf Seite 282 als Funktion 18.8 angegebene exakte Lösung enthält u. a. die Funktion des natürlichen Logarithmus. Obwohl die Biegesteifigkeit nur linear veränderlich ist, darf man formulieren, dass keine für die Finite-Elemente-Theorie praktikable Verformungsfunktion eine solche Biegelinie exakt nachbilden kann. Es gibt auch keine Chance zur Nachbesserung.

Aber genau für solche Probleme kann die Methode der finiten Elemente ihre eigentliche Stärke als Näherungsverfahren ausspielen. Für die Biegeträger-Probleme heißt das z. B.: Es wird weiter mit stückweise konstanter Biegesteifigkeit gearbeitet, aber mit möglichst vielen Abschnitten.

Das Programm „Gerade Biegeträger“ unter www.TM-interaktiv.de unterteilt automatisch (der Benutzer merkt es nicht) einen Träger mit kontinuierlich veränderlichem Querschnitt in 500 Elemente mit stückweise konstanter Biegesteifigkeit. Das Ergebnis für den keilförmigen Träger sieht man in **Abbildung 18.30**: Ein Vergleich mit der exakten Lösung bestätigt alle ausgegebenen Stellen der Ergebnisse, und das gilt auch für Ort und Größe von v_{max} .

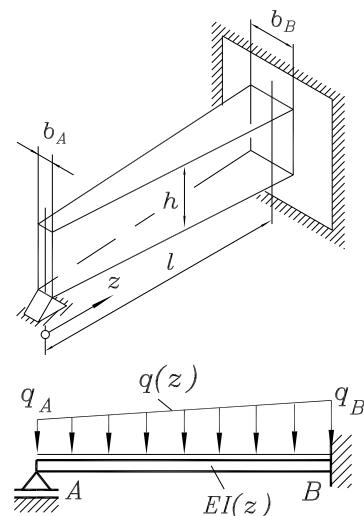


Abbildung 18.29: Kontinuierlich veränderliche Biegesteifigkeit kann nur näherungsweise erfasst werden.

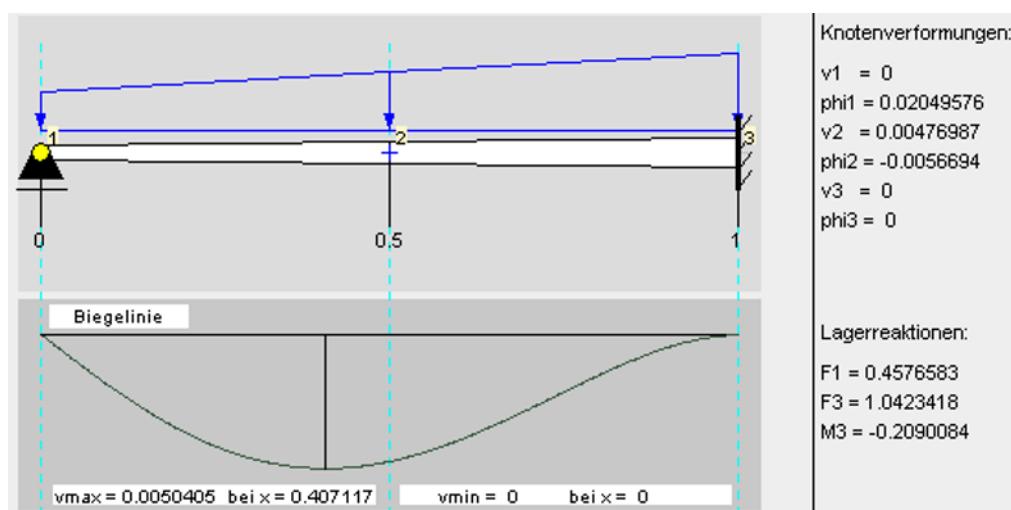


Abbildung 18.30: Kontinuierlich veränderliche Biegesteifigkeit, scheinbar exakte Ergebnisse

18.2.4 Biegesteife Rahmentragwerke

Biegesteife *Rahmentragwerke* (**Abbildung 18.31**) bestehen aus geraden Trägern, die an den Ecken biegesteif miteinander verbunden sind, so dass auch Biegemomente übertragen werden können (im Gegensatz zu den Fachwerken, deren Stäbe nur über Gelenke verbunden sind).

Für einen einzelnen Träger eines Rahmens können die Biegeverformung und die Längenänderung infolge der Normalkräfte (unter Voraussetzung kleiner Verformungen, Theorie 1. Ordnung) unabhängig voneinander berechnet werden (behandelt in den Kapiteln 14 bzw. 17). An den Ecken allerdings werden aus Biegeverformungen des einen Trägers (zumindest teilweise) Längsverformungen des anderen Trägers.

Die Gleichgewichtsbedingungen müssen an den Ecken für die Normal- und Querkräfte insgesamt erfüllt sein (an einer rechtwinkligen unbelasteten Ecke wird zum Beispiel aus der Querkraft des einen Trägers die Normalkraft des anderen Trägers und umgekehrt).

Als finites Element wird zunächst ein aus dem Rahmen herausgeschnittener Träger behandelt, der nur durch die Knotenlasten (Kräfte in Längs- und Querrichtung und Momente) belastet ist und dadurch verformt wird. Die Verformung wird durch die Knotenverschiebungen in Längs- bzw. Querrichtung und die Biegewinkel an den Knoten beschrieben. Die Belastungs- und Verformungsgrößen an beiden Knoten werden mit gleichen Richtungen positiv definiert.

Der Zusammenhang zwischen den Kräften in Längsrichtung und den entsprechenden Knotenverschiebungen ist mit Gleichung 15.3 (Seite 197) für den durch Normalkräfte belasteten Stab gegeben, der Zusammenhang zwischen den Kräften in Querrichtung und den Momenten einerseits und den zugehörigen Verformungen andererseits wird durch die Element-Steifigkeitsmatrix für den Biegeträger 18.9 (Seite 289) hergestellt. Beide Gleichungen werden nun zur Element-Steifigkeitsbeziehung für das Rahmenelement zusammengefasst:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{V}_1 \\ \tilde{M}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{V}_2 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e \begin{bmatrix} \left(\frac{Al^2}{I} \right)_e & 0 & 0 & -\left(\frac{Al^2}{I} \right)_e & 0 & 0 \\ 12 & 6l_e & 0 & -12 & 6l_e & \\ & 4l_e^2 & 0 & -6l_e & 2l_e^2 & \\ & & \left(\frac{Al^2}{I} \right)_e & 0 & 0 & \\ & & & 12 & -6l_e & \\ & & & & 4l_e^2 & \end{bmatrix}_{\text{symm.}} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (18.13)$$

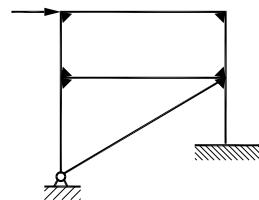


Abbildung 18.31: Rahmen sind an den Ecken z. B. fest verschweißt, verschraubt, durch Knotenbleche verstift, ...

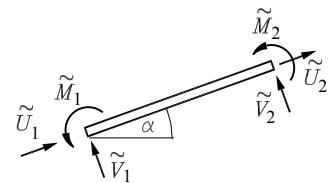


Abbildung 18.32: Finites Rahmenelement

In der Form 18.13 ist die Element-Steifigkeitsmatrix für den Finite-Elemente-Algorithmus nicht brauchbar, da die Knotenkräfte und die Knotenverschiebungen der angrenzenden Elemente andere Richtungen hätten. Diese werden deshalb auf ein für alle Elemente gültiges globales Koordinatensystem transformiert (**Abbildung 18.33**). Das finite Rahmenelement ist zur x -Achse des globalen Koordinatensystems um den Winkel α gedreht. Momente und Winkel brauchen nicht transformiert zu werden, weil sie um eine Achse senkrecht zur Zeichenebene drehen.

Die Knotenverschiebungen in Längs- bzw. Querrichtung, wie sie in 18.13 verwendet wurden, setzen sich aus den Verschiebungen u_1 und v_1 (in Richtung der globalen Koordinatenachsen) folgendermaßen zusammen (**Abbildung 18.34**):

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha , \\ \tilde{v}_1 &= -u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha , \\ \tilde{\varphi}_1 &= \varphi_1 .\end{aligned}\quad (18.14)$$

Die hier für den Knoten 1 aufgeschriebenen Transformationen gelten in gleicher Form auch für den Knoten 2.

Aus der **Abbildung 18.35** kann abgelesen werden, wie sich die in Richtung der globalen Koordinatenachsen wirkenden Kräfte U_1 und V_1 aus den in Längs- bzw. Querrichtung des Elements wirkenden Kräften zusammensetzen:

$$\begin{aligned}U_1 &= \tilde{U}_1 \cos \alpha - \tilde{V}_1 \sin \alpha , \\ V_1 &= \tilde{U}_1 \sin \alpha + \tilde{V}_1 \cos \alpha , \\ M_1 &= \tilde{M}_1 .\end{aligned}\quad (18.15)$$

Auch hier gelten analoge Beziehungen für den Knoten 2.

Diese Transformationsbeziehungen werden genutzt, um aus 18.13 die Element-Steifigkeitsbeziehung für ein Rahmenelement herzuleiten, dessen Belastungs- und Verformungsgrößen sich auf das globale Koordinatensystem beziehen. Dies soll hier nur an einer Gleichung exemplarisch dargestellt werden. Nach 18.15 errechnet sich U_1 aus zwei Anteilen, die sich in den ersten beiden Zeilen von 18.13 finden, wobei die Verschiebungen schließlich noch durch 18.14 ersetzt werden:

$$\begin{aligned}U_1 &= \tilde{U}_1 \cos \alpha - \tilde{V}_1 \sin \alpha \\ &= \left(\frac{EA}{l} \right)_e (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \cos \alpha - \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e (12 \tilde{v}_1 + 6 l_e \tilde{\varphi}_1 - 12 \tilde{v}_2 + 6 l_e \tilde{\varphi}_2) \sin \alpha \\ &= \left(\frac{EA}{l} \right)_e [(u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha) - (u_2 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha)] \cos \alpha \\ &\quad - \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e [12(-u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha) + 6 l_e (...) - 12 (...) + 6 l_e (...)] \sin \alpha .\end{aligned}$$

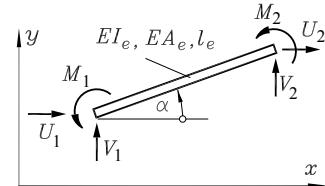


Abbildung 18.33: Element-Knotenlasten, bezogen auf das globale Koordinatensystem

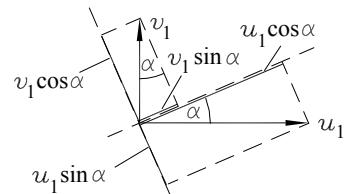


Abbildung 18.34: Transformation der Knotenverschiebungen

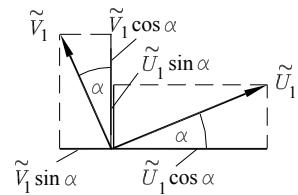
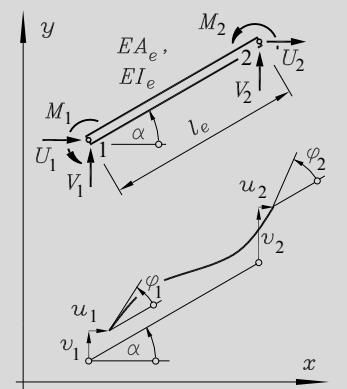


Abbildung 18.35: Transformation der Knoten-Belastungen

Auf die gleiche Weise entstehen fünf weitere Gleichungen, die mit der für U_1 entwickelten Gleichung zusammengefasst werden zur

Element-Steifigkeitsbeziehung für ein Rahmenelement:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (18.16)$$



mit den Untermatrizen

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 12s^2 + \beta c^2 & (\beta - 12)sc & -6l_e s \\ 12c^2 + \beta s^2 & 6l_e c & 4l_e^2 \\ \text{symm.} & & \end{bmatrix}, \quad K_{12} = \begin{bmatrix} -12s^2 - \beta c^2 & -(\beta - 12)sc & -6l_e s \\ -(\beta - 12)sc & -12c^2 - \beta s^2 & 6l_e c \\ 6l_e s & -6l_e c & 2l_e^2 \end{bmatrix},$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 12s^2 + \beta c^2 & (\beta - 12)sc & 6l_e s \\ 12c^2 + \beta s^2 & -6l_e c & 4l_e^2 \\ \text{symm.} & & \end{bmatrix} \quad \text{und den Abkürzungen} \\ c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha, \quad \beta = \left(\frac{Al^2}{I} \right)_e.$$

Auch hier werden Elementbelastungen durch äquivalente Knotenlasten ersetzt und den äußeren Belastungen zugeschlagen. Dafür werden folgende Vereinbarungen getroffen:

- ⇒ Für Linienlasten, die senkrecht zum Element wirken, wird eine Vorzeichenregel vereinbart: Bei Fortschreiten vom ersten zum zweiten Elementknoten zeigen die Pfeilspitzen positiver Linienlasten nach links. Die reduzierten Knotenlasten für eine linear veränderliche Liniенlast (Trapezlast) können dann durch Zerlegung der mit 18.10 gegebenen Belastungen in Komponenten in Richtung der Achsen des globalen Koordinatensystems gewonnen werden.
- ⇒ Anfangsdehnungen und Temperaturdehnungen werden wie im Abschnitt 15.4 durch die Knotenkräfte 15.10 ersetzt, die für das Rahmenelement auf die Positionen der Kräfte gesetzt werden (**Abbildung 18.36**), Momente entstehen durch diese Belastungen nicht.

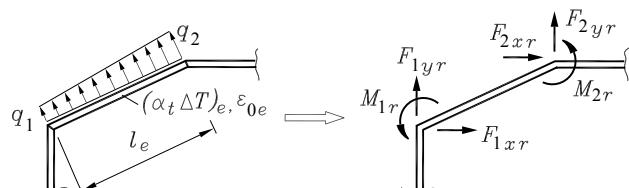


Abbildung 18.36: Reduzierte Knotenlasten infolge Linienlast, Temperatur- und Anfangsdehnung

Die *erweiterte Element-Steifigkeitsbeziehung für das Rahmenelement* kann dann in der Form

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{1xr} \\ F_{1yr} \\ M_{1r} \\ F_{2xr} \\ F_{2yr} \\ M_{2r} \end{bmatrix} \quad (18.17)$$

mit

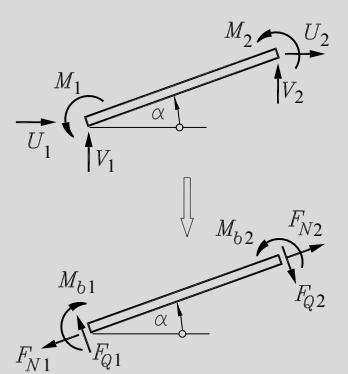
$$\begin{bmatrix} F_{1xr} \\ F_{1yr} \\ M_{1r} \\ F_{2xr} \\ F_{2yr} \\ M_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA_e(\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \cos \alpha - \frac{l_e}{20} (7q_1 + 3q_2) \sin \alpha \\ -EA_e(\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \sin \alpha + \frac{l_e}{20} (7q_1 + 3q_2) \cos \alpha \\ \frac{l_e^2}{60} (3q_1 + 2q_2) \\ EA_e(\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \cos \alpha - \frac{l_e}{20} (3q_1 + 7q_2) \sin \alpha \\ EA_e(\alpha_t \Delta T + \varepsilon_0)_e \sin \alpha + \frac{l_e}{20} (3q_1 + 7q_2) \cos \alpha \\ -\frac{l_e^2}{60} (2q_1 + 3q_2) \end{bmatrix} \quad (18.18)$$

aufgeschrieben werden.

Nach der Verformungsberechnung am System können bei dann bekannten Knotenverformungen die Element-Knotenbelastungen nach 18.16 oder 18.17 ermittelt werden, deren Richtungen sich auf das globale Koordinatensystem beziehen. Deshalb ist es vielfach wünschenswert, diese wieder in die „normalen“ Schnittgrößen umzuwandeln. Aus der nachfolgenden Skizze abzulesen sind die

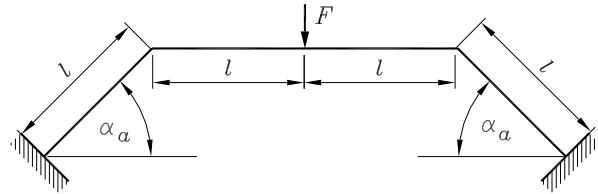
Schnittgrößen für ein Rahmenelement:

$$\begin{aligned} F_{N1} &= -U_1 \cos \alpha - V_1 \sin \alpha , \\ F_{Q1} &= -U_1 \sin \alpha + V_1 \cos \alpha , \\ M_{b1} &= -M_1 , \\ F_{N2} &= U_2 \cos \alpha + V_2 \sin \alpha , \\ F_{Q2} &= U_2 \sin \alpha - V_2 \cos \alpha , \\ M_{b2} &= M_2 . \end{aligned} \quad (18.19)$$



Beispiel:

Für den skizzierten Rahmen sind die Verformungsgrößen und die Schnittgrößen an der Kraftangriffsstelle und an der Rahmenecke zu berechnen.



$$\text{Gegeben: } l; F; EI; \beta = \frac{Al^2}{I} = 10^4; \alpha_a = 45^\circ.$$

Wegen der Symmetrie (Abmessungen, Lagerung, Belastung) braucht nur eine Hälfte des Rahmens betrachtet zu werden, so dass das System nur in zwei finite Elemente unterteilt werden muss. Entsprechend Abbildung 18.37 ist eine Symmetriehälfte durch die Kraft $\frac{F}{2}$ belastet. Die geometrischen Symmetriebedingungen (verhinderte Verschiebung in horizontaler Richtung und horizontale Tangente der Biegelinie im Symmetrieschnitt) werden durch eine entsprechende Lagerung simuliert.

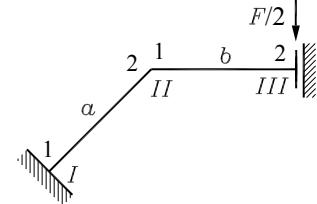


Abbildung 18.37: Berechnungsmodell: Symmetriehälfte

Für die beiden Elemente a und b können die Element-Steifigkeitsmatrizen nach 18.16 mit den folgenden Untermatrizen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11,a} &= \begin{bmatrix} 5006 & 4994 & -3\sqrt{2}l \\ 5006 & 5006 & 3\sqrt{2}l \\ \text{symm.} & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{11,b} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 \\ 12 & 6l & \\ \text{symm.} & & 4l^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{12,a} &= \begin{bmatrix} -5006 & -4994 & -3\sqrt{2}l \\ -4994 & -5006 & 3\sqrt{2}l \\ 3\sqrt{2}l & -3\sqrt{2}l & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{12,b} = \begin{bmatrix} -10000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l \\ 0 & -6l & 2l^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{22,a} &= \begin{bmatrix} 5006 & 4994 & 3\sqrt{2}l \\ 5006 & 5006 & -3\sqrt{2}l \\ \text{symm.} & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22,b} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 \\ 12 & -6l & \\ \text{symm.} & & 4l^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Beim Aufbau der System-Steifigkeitsmatrix, die die neun Verformungsgrößen an den drei Knoten mit den zugehörigen Belastungsgrößen verknüpft, werden jeweils diese 3×3 -Untermatrizen eingespeichert, entsprechend der einfachen Topologie des Systems wie nebenstehend angegeben.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11,a} & \mathbf{K}_{12,a} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_{22,a} + \mathbf{K}_{11,b} & \mathbf{K}_{12,b} \\ \text{symm.} & & \mathbf{K}_{22,b} \end{bmatrix}$$

9*9-System-Steifigkeitsmatrix

Fünf Knotenverformungen sind durch die Lagerung behindert (u_I, v_I und φ_I an der Einspannung und u_{III} und φ_{III} im Symmetrieschnitt). Nach Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten 1, 2, 3, 7 und 9 (Einarbeiten der geometrischen Randbedingungen durch „Zeilen-Spalten-Streichen“) verbleibt das folgende Gleichungssystem (es wurde wieder der auf Seite 292 beschriebene kleine Trick angewendet, der dimensionslose Matrixelemente erzeugt):

$$\begin{bmatrix} 15006 & 4994 & 3\sqrt{2} & 0 \\ & 5018 & 6 - 3\sqrt{2} & -12 \\ & & 8 & -6 \\ & \text{symm.} & & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_{II}}{l} \\ \frac{v_{II}}{l} \\ \varphi_{II} \\ \frac{v_{III}}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix} \frac{Fl^2}{EI}$$



Für den Vektor der äußeren Knotenbelastungen (rechte Seite des Gleichungssystems) lieferte nur die Kraft $\frac{F}{2}$ am Knoten III einen Anteil (negativ, weil nach unten gerichtet), weil der Knoten II unbelastet ist.

Die nebenstehend angegebene Lösung zeigt, dass sich die Rahmenecke (im Vergleich zum Kraftangriffspunkt) kaum verschiebt (www.TM-aktuell.de). Dies liegt daran, dass nur durch Längenänderung der Elemente eine Verschiebung dieses Punktes möglich ist, während sich der Kraftangriffspunkt im Wesentlichen infolge der Biegeverformung verschiebt.

$$\begin{bmatrix} \frac{u_{II}}{l} \\ \frac{v_{II}}{l} \\ \varphi_{II} \\ \frac{v_{III}}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00009227 \\ -0,00023454 \\ -0,05027731 \\ -0,06703986 \end{bmatrix} \frac{Fl^2}{EI}$$

Die Berechnung der Element-Knotenkräfte soll für das Element b demonstriert werden. Die bereits formulierten Untermatrizen der Element-Steifigkeitsmatrix und die nun bekannten Knotenverformungen der Knoten II und III werden in 18.16 eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix}_b = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00009227l \\ -0,00023454l \\ -0,05027731 \\ 0 \\ -0,06703986l \\ 0 \end{bmatrix} \frac{Fl^2}{EI}$$

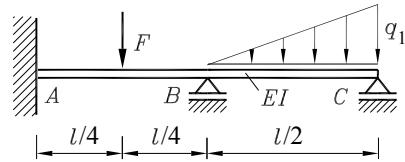
Die Element-Knotenkräfte, die sich aus dieser Matrizenmultiplikation ergeben, stimmen für das Element b bis auf die Vorzeichen mit den Schnittgrößen an den Elementknoten, die nach 18.19 berechnet werden, überein:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 0,9227 \\ 0,5000 \\ 0,1997l \\ -0,9227 \\ -0,5000 \\ 0,3003l \end{bmatrix} F \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{Q1} \\ M_{b1} \\ F_{N2} \\ F_{Q2} \\ M_{b2} \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} -0,9227 \\ 0,5000 \\ -0,1997l \\ -0,9227 \\ 0,5000 \\ 0,3003l \end{bmatrix} F$$

18.3 Aufgaben

Aufgabe 18.1:

Für den skizzierten zweifach statisch unbestimmt gelagerten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist die Durchbiegung näherungsweise mit dem Differenzenverfahren zu bestimmen.



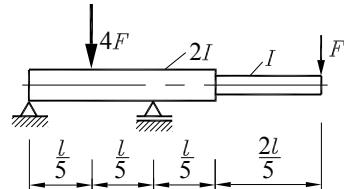
Gegeben: $l = 600\text{mm}$; $F = 960\text{N}$; $q_1 = 0,8\text{N/mm}$; $EI = 2 \cdot 10^7\text{Nmm}^2$.

- Für die modifizierte Aufgabe mit $F = 0$ (nur Belastung durch Linienlast) sind Ort und Größe der maximalen Durchbiegung zu bestimmen und mit den Ergebnissen der Aufgabe 17.5 (Seite 272) zu vergleichen.
- Beide Rechnungen sind mit der Finite-Elemente-Methode zu überprüfen³.

Aufgabe 18.2:

Für den skizzierten Biegeträger sind mit Hilfe des Differenzenverfahrens die Biegelinie und die Verläufe von Biegemoment und Querkraft zu berechnen.

Gegeben: l , F , I , $E = \text{konst.}$

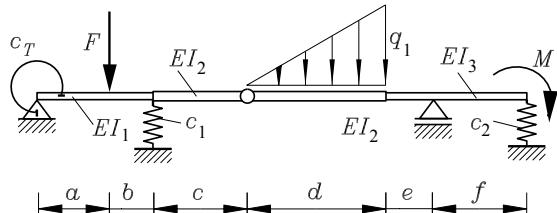


Für das statisch bestimmte System sind die Schnittgrößen am mittleren Lager problemlos exakt zu berechnen. Man vergleiche diese Werte mit den Näherungswerten, die das Differenzenverfahren liefert. Die Absenkungen der Kraftangriffspunkte sind mit der Finite-Elemente-Methode zu überprüfen³.

Aufgabe 18.3:

Für den skizzierten Biegeträger sind mit Hilfe des Differenzenverfahrens die Biegelinie und die Verläufe von Biegemoment und Querkraft zu berechnen.

Gegeben:



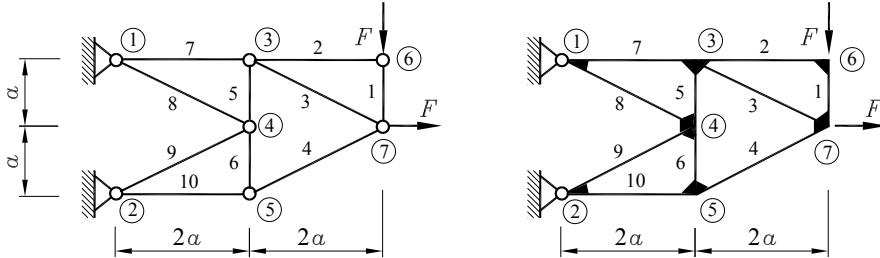
$a = 150\text{mm}$; $b = 100\text{mm}$; $EI_1 = 3 \cdot 10^9\text{Nmm}^2$; $c_1 = 8\text{ kN/mm}$; $F = 12\text{kN}$; $c = 200\text{mm}$; $d = 300\text{mm}$; $EI_2 = 6 \cdot 10^9\text{Nmm}^2$; $c_2 = 0,4\text{ kN/mm}$; $M = 160\text{Nm}$; $e = 100\text{mm}$; $f = 200\text{mm}$; $EI_3 = 2 \cdot 10^9\text{Nmm}^2$; $c_T = 180\text{kNm}$; $q_1 = 20\text{N/mm}$.

Die Ergebnisse sind mit der Finite-Elemente-Methode zu überprüfen³.

³ Nutzung eines geeigneten Programms, zu finden z. B. unter www.TM-interaktiv.de

Aufgabe 18.4:

Die Theorie des idealen Fachwerks (reibungsfreie Gelenke, Stäbe nehmen nur Zug- bzw. Druckkräfte auf) ist mit der (im Allgemeinen realen) Ausführung des Tragwerks mit biegesteifen Verbindungen (Knotenbleche) zu vergleichen. Alle Stäbe bzw. Biegeträger haben den gleichen Rechteckquerschnitt mit der Breite b und der Höhe h .



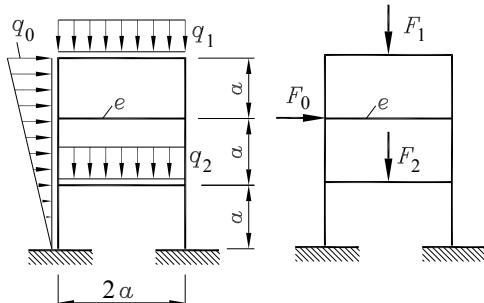
Gegeben: $a = 0,5 \text{ m}$; $F = 10 \text{ kN}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $b = 1,5 \text{ cm}$; $h = 2 \text{ cm}$.

- Man berechne mit einem geeigneten FEM-Programm⁴ die Knotenverschiebungen und die Stabkräfte des idealen Fachwerks (linke Skizze).
- Mit einem FEM-Programm, das die Berechnung ebener biegesteifer Rahmentragwerke gestattet⁴, berechne man die Knotenverschiebungen und die Schnittgrößen an den Elementknoten des biegesteifen Tragwerks (rechte Skizze).
- Die für beide Systeme berechneten Knotenverschiebungen und die sich aus den Schnittgrößen ergebenden maximalen Spannungen in den Elementen nach beiden Theorien sind zu vergleichen und zu diskutieren.

Aufgabe 18.5:

Ein biegesteifer Rahmen ist durch eine Dreieckslast und zwei konstante Linienlasten belastet. Alle Elemente haben den gleichen Querschnitt.

Gegeben: $a = 2 \text{ m}$; $EA = 10^{10} \text{ N}$; $q_0 = 3 \text{ kN/m}$; $EI = 10^{12} \text{ Nmm}^2$; $q_1 = q_2 = 1 \text{ kN/m}$.



- Mit einem FEM-Programm, das die Berechnung ebener biegesteifer Rahmentragwerke gestattet⁴, berechne man die Knotenverschiebungen des Rahmens und vergleiche sie mit den Ergebnissen, die man erhält, wenn die Linienlasten durch ihre Resultierenden (rechte Skizze) ersetzt werden.
- Man stelle die ermittelten Schnittgrößen an den Elementknoten des mit e bezeichneten Elements für beide Varianten gegenüber.
- Das Gleichgewicht der Lagerreaktionen mit den äußeren Lasten ist zu überprüfen.

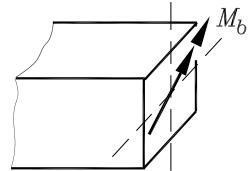
Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

⁴ Zu finden z. B. unter www.TM-interaktiv.de

19 Spezielle Biegeprobleme

19.1 Schiefe Biegung

Die im Abschnitt 16.1 hergeleitete Biegespannungsformel 16.4 gilt nur, wenn die Biegeachse (Achse, um die das Biegemoment dreht) eine Hauptzentralachse der Querschnittsfläche ist (siehe auch Diskussion im Abschnitt 16.3). Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, spricht man von *schiefer Biegung*.



Da jede Fläche zwei aufeinander senkrecht stehende Hauptzentralachsen hat (vgl. Abschnitt 16.2.5), kann die Spannungsberechnung bei schiefer Biegung stets auf zwei Hauptachsenfälle reduziert werden, so dass folgendes Vorgehen immer zum Ziel führt:

- ⇒ Das Biegemoment wird in zwei Komponenten in Richtung der Hauptzentralachsen zerlegt. Wenn für alle zu betrachtenden Querschnitte die Hauptzentralachsen die gleiche Lage haben, ist es meist günstiger, bereits die äußere Belastung in diese Richtungen zu zerlegen.
- ⇒ Für beide Hauptachsenfälle werden die Biegespannungen gesondert berechnet und anschließend überlagert.

Es ist im Allgemeinen nicht empfehlenswert, dabei mit den Widerstandsmomenten zu arbeiten, weil für die Überlagerung die Information über die Vorzeichen der Spannungsanteile benötigt wird. Außerdem kann die maximale Biegespannung auch an einem Punkt auftreten, der von der Berechnung mit dem Widerstandsmoment gar nicht erfasst wird. Es ist auch möglich, dass die beiden Widerstandsmomente einen Punkt „erfassen“, der gar nicht zum Querschnitt gehört (z. B. beim Kreis).

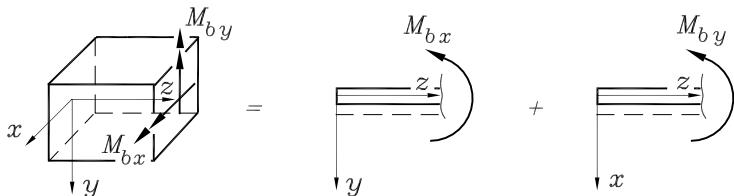


Abbildung 19.1: Definition der Biegemomente in zwei Ebenen

Wie in der Statik vereinbart (Abschnitt 8.4), werden die Biegemomente M_{by} und M_{bx} am positiven Schnittufer so angetragen, dass die im Bereich positiver x- bzw. y-Werte liegenden Fasern auf Zug beansprucht werden (Abbildung 19.1). Der Vorteil dieser Vereinbarung, zwei ebene Probleme mit gleicher Definition positiver Momente betrachten zu können, gilt auch für die Biegespannungsberechnung: Die aus zwei gleichartigen Formeln zu gewinnenden Spannungsanteile können einfach durch Addition überlagert werden, und man erhält die

Biegespannungsformel für zweiachsige Biegung (schiefe Biegung) um die Hauptzentralachsen x und y :

$$\sigma_b = \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}}{I_{yy}} x \quad . \quad (19.1)$$

- ⇒ Die Formel 19.1 gestattet die Berechnung der Biegespannung für jeden Punkt des Querschnitts. Bei Beachtung der Vereinbarung für die Definition positiver Biegemomente ergeben sich automatisch auch die richtigen Vorzeichen für die Spannungswerte.

Die Spannungsfunktion $\sigma_b(x,y)$ ist linear in x und y . Man kann sie sich als Ebene veranschaulichen, die die x - y -Ebene (Querschnitts-Ebene) entlang der Geraden

$$\frac{M_{bx}}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}}{I_{yy}} x = 0$$

schneidet. Diese so genannte *Spannungs-Null-Linie* geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts. Die auf ihr liegenden Punkte des Querschnitts sind biegespannungsfrei.

Auf einer Seite der Spannungs-Null-Linie liegen die Punkte mit positiver Biegespannung (Zug), auf der anderen Seite die Punkte mit negativer Biegespannung (Druck). Da die Spannungsfunktion durch eine Ebene repräsentiert wird, wachsen die σ_b -Werte proportional mit dem (senkrechten) Abstand der Querschnittspunkte von der Spannungs-Null-Linie, und es ergibt sich die wichtige Aussage über den

Maximalwert der Biegespannung in einem Querschnitt:

Die absolut größte Biegespannung in einem Querschnitt wirkt in dem Punkt mit der größten (senkrechten) Entfernung von der Spannungs-Null-Linie

$$y = -\frac{I_{xx}}{I_{yy}} \frac{M_{by}}{M_{bx}} x \quad . \quad (19.2)$$

Die Spannungs-Null-Linie ist eine Gerade, die in der Querschnittsfläche liegt und durch den Flächenschwerpunkt des Querschnitts verläuft.

Die Strategie für die Biegespannungsberechnung (Überlagerung zweier Hauptachsen-Probleme) kann auch auf die Verformungsberechnung übertragen werden. Dies führt im Allgemeinen nicht auf eine ebene Biegelinie, so dass sich die einzelnen Punkte des Trägers in unterschiedliche Richtungen verschieben. Als Empfehlung gilt für die

Verformungsberechnung bei schiefer Biegung:

Alle Belastungen werden so in Komponenten zerlegt, dass sie mit den Hauptachsen des Querschnitts zusammenfallen. Die Verformung kann dann durch Überlagerung zweier ebener Biegelinien ermittelt werden. Dabei ergibt sich im Allgemeinen eine räumlich gekrümmte Kurve als resultierende Biegelinie.

Beispiel 1: Ein Kragträger mit Rechteckquerschnitt (Seitenverhältnis: $\frac{h}{b} = 2$) ist am freien Ende durch eine Einzelkraft F belastet, deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche verläuft ($\tan \alpha = 2$).

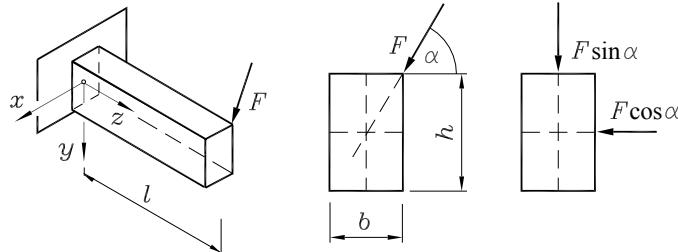


Abbildung 19.2: Kraft F : Zerlegung in Hauptzentralachsen-Richtungen

Man diskutiere den Spannungsverlauf im Einspannquerschnitt.

Die Kraft F wird in zwei Komponenten in Richtung der Hauptzentralachsen zerlegt (Abbildung 19.2), und an der Einspannstelle ergeben sich damit die Extremwerte der Biegemomente

$$M_{bx} = -Fl \sin \alpha, \quad M_{by} = -Fl \cos \alpha.$$

Damit erhält man nach 19.1 folgende Biegespannungsverteilung im Einspannquerschnitt:

$$\sigma_b = -\frac{12Fl}{bh} \left(\frac{y}{h^2} \sin \alpha + \frac{x}{b^2} \cos \alpha \right).$$

Aus $\sigma_b = 0$ ergibt sich die Spannungs-Null-Linie für diesen Querschnitt:

$$y = -x \frac{h^2}{b^2} \cot \alpha$$

bzw. mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$y = -2x \quad (\text{Abbildung 19.3})$$

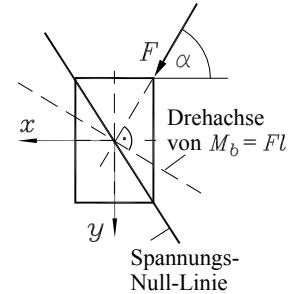


Abbildung 19.3: Biegeachse und Spannungs-Null-Linie sind im Allgemeinen nicht identisch

Die Extremwerte der Biegespannung ergeben sich in den Eckpunkten der Rechteckfläche im ersten Quadranten (Druck) und im dritten Quadranten (Zug).

⇒ Dieses Beispiel bringt eine wichtige Information: Die Spannungs-Null-Linie steht im Allgemeinen nicht senkrecht auf der Belastungsebene und ist damit auch nicht mit der Biegeachse (Drehachse des Gesamtbiegemoments $M_b = Fl$ in diesem Querschnitt) identisch.

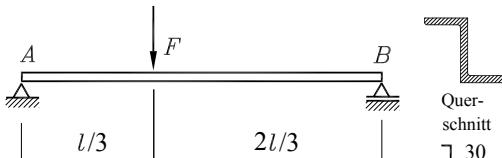
Beispiel 2: Der skizzierte Träger mit einem Normprofil (Abmessungen siehe Abbildung 19.4) ist durch die vertikale Kraft F belastet.

Gegeben: $F = 1 \text{ kN}$; $l = 1 \text{ m}$.

Man ermittle Ort und Größe der maximalen Biegespannung.

Das maximale Biegemoment tritt am Kraftangriffspunkt auf. Mit der Lagerkraft F_B (aus dem Momentengleichgewicht um A) erhält man das Biegemoment (Abbildung 19.5):

$$F_B = \frac{F}{3} \quad \Rightarrow \quad M_{b,max} = F_B \frac{2}{3} l = \frac{2}{9} Fl.$$



$\tan \alpha$	o_ξ	o_η	e_ξ	e_η	a_ξ	a_η	$I_{\xi\xi}$	$I_{\eta\eta}$
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm^4	cm^4
1,655	3,86	0,58	0,61	1,39	3,54	0,87	18,1	1,54

Abbildung 19.4: Querschnittswerte für Normprofil

Das Biegemoment $M_{b,max}$ biegt um die horizontale x -Achse (senkrecht zur Zeichenebene, **Abbildung 19.5**), die bei diesem Profil jedoch keine Hauptzentralachse ist. Die in der Profiltabelle eingetragenen Achsen ξ und η sind die Hauptzentralachsen des Querschnitts, die zum x - y -System um den Winkel α gedreht sind. Die Flächenträgheitsmomente und die Abstände zu ausgewählten Eckpunkten können der Tabelle entnommen werden.

Deshalb wird das Biegemoment in zwei Komponenten um die Achsen ξ und η zerlegt (nebenstehende Skizze). Mit

$$M_{b\xi} = \frac{2}{9} Fl \cos \alpha \quad , \quad M_{b\eta} = \frac{2}{9} Fl \sin \alpha$$

ergibt sich folgende Spannungsverteilung im Querschnitt:

$$\sigma_b = \frac{M_{b\xi}}{I_{\xi\xi}} \eta + \frac{M_{b\eta}}{I_{\eta\eta}} \xi = \frac{2}{9} Fl \left(\frac{\eta \cos \alpha}{I_{\xi\xi}} + \frac{\xi \sin \alpha}{I_{\eta\eta}} \right) \quad .$$

Die maximale Spannung tritt in dem Querschnittspunkt auf, der am weitesten von der Spannungsnull-Linie

$$\eta = - \frac{I_{\xi\xi}}{I_{\eta\eta}} \tan \alpha \cdot \xi = -19,45 \xi$$

entfernt ist (nebenstehende Skizze). Dies sind offensichtlich die Punkte e bzw. \bar{e} . Mit den auf das ξ - η -System bezogenen Koordinaten dieser Punkte, die man der Tabelle in **Abbildung 19.4** entnimmt, erhält man für die Punkte e bzw. \bar{e} :

$$\sigma_{b,e} = -176 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad \sigma_{b,\bar{e}} = +176 \text{ N/mm}^2 \quad .$$

Es empfiehlt sich, vorsichtshalber auch für die Punkte a und o die Spannungen zu berechnen. Man erhält jedoch (wie erwartet) kleinere Werte.

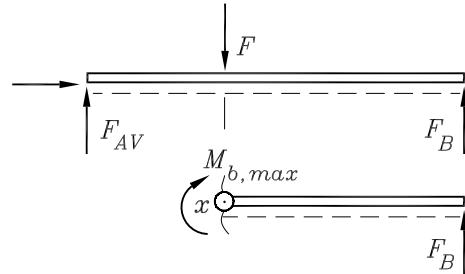
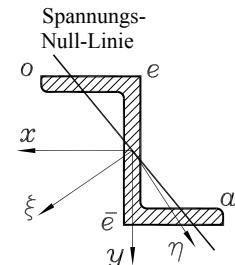
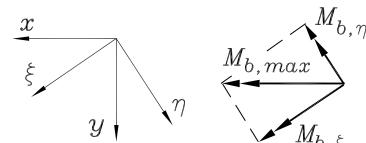
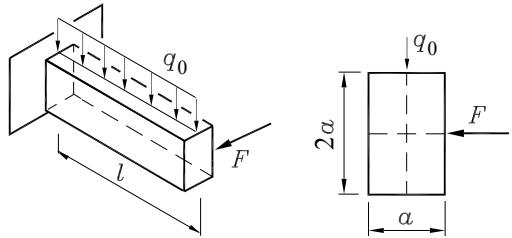


Abbildung 19.5: Biegemoment in der Lastebene



Beispiel 3:

Der skizzierte Träger mit Rechteckquerschnitt trägt Belastungen in zwei unterschiedlichen Lastebenen. Es sind die Richtungen der resultierenden Durchbiegungen am freien Trägerende und in Trägermitte für das Belastungsverhältnis $\frac{q_0 l}{F} = 2$ zu berechnen.

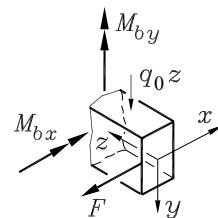


Da die beiden Lastebenen senkrecht zu den Hauptzentralachsen des Querschnitts liegen, dürfen jeweils die Beziehungen der einfachen Biegung verwendet werden. Mit dem nebenstehend skizzierten Koordinatensystem gelten sowohl für die x - z -Ebene, in der die Kraft F wirkt, als auch für die y - z -Ebene, in der die Linienlast wirkt, alle Vereinbarungen, die im Kapitel 17 (für das ebene Biegeproblem) verwendet wurden, so dass die Formeln des Abschnitts 17.4 verwendet werden dürfen.

Zur Unterscheidung werden die Verschiebungen in y -Richtung (wie im Kapitel 17) mit v und die in x -Richtung mit u bezeichnet (nebenstehende Skizze). Die Richtung der durch geometrische Überlagerung zu ermittelnden Gesamtverschiebung wird durch den Winkel α gekennzeichnet.

Mit den Flächenträgheitsmomenten (Abschnitt 16.2.2)

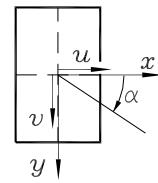
$$I_{xx} = \frac{2}{3} a^4, \quad I_{yy} = \frac{1}{6} a^4$$



errechnet man mit den Formeln der beiden Lastfälle e bzw. f des Abschnitts 17.4 die Durchbiegungen:

$$v(z=0) = \frac{q_0 l^4}{8 E I_{xx}} = \frac{3}{16} \frac{q_0 l^4}{E a^4}, \quad u(z=0) = -\frac{F l^3}{3 E I_{yy}} = -2 \frac{F l^3}{E a^4},$$

$$v(z=\frac{l}{2}) = \frac{17}{384} \frac{q_0 l^4}{E I_{xx}} = \frac{17}{256} \frac{q_0 l^4}{E a^4}, \quad u(z=\frac{l}{2}) = -\frac{5}{48} \frac{F l^3}{E I_{yy}} = -\frac{5}{8} \frac{F l^3}{E a^4}.$$



Die resultierenden Durchbiegungen an den betrachteten Stellen folgen aus

$$f(z=0) = \sqrt{u^2(0) + v^2(0)}, \quad f(z=\frac{l}{2}) = \sqrt{u^2(\frac{l}{2}) + v^2(\frac{l}{2})}$$

und die Richtungen der resultierenden Verschiebungen aus

$$\tan \alpha_1 = \frac{v(0)}{u(0)} = -\frac{3}{32} \frac{q_0 l}{F}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{v(\frac{l}{2})}{u(\frac{l}{2})} = -\frac{17}{160} \frac{q_0 l}{F}.$$

Die Vorzeichen der Verschiebungskomponenten legen eindeutig fest, dass die Winkel, die die Gesamtverschiebungsrichtung kennzeichnen, jeweils im zweiten Quadranten liegen müssen. Also ergeben sich folgende Winkel:

$$\alpha_1 = 169,4^\circ; \quad \alpha_2 = 168,0^\circ.$$

Es sind unterschiedliche Verschiebungsrichtungen am freien Trägerende und in der Trägermitte, was nur bei räumlich gekrümmter Biegelinie möglich ist.

19.2 Der elastisch gebettete Träger

19.2.1 Differentialgleichung für den elastisch gebetteten Träger

Ein Träger, der zusätzlich zu seinen Lagern oder ausschließlich auf einem elastischen Untergrund aufliegt, kann nach der Theorie des *elastisch gebetteten Trägers* berechnet werden. Diese basiert auf der

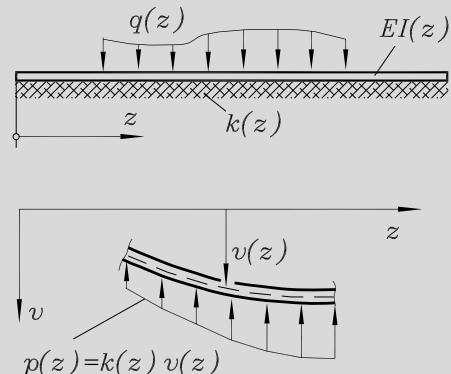
Hypothese von Winkler/Zimmermann:

Die elastische Unterlage reagiert mit einem Gegendruck auf den Träger, der der Durchbiegung v proportional ist. Dieser wird über die Trägerbreite zu einer Linienlast

$$p(z) = k(z)v(z)$$

zusammengefasst.

Der Proportionalitätsfaktor (*Bettungszahl* k mit der Dimension N/mm^2) wird experimentell ermittelt.



Unter Beibehaltung der Definitionen des Kapitels 17 für die Schnittgrößen, die Koordinaten und Durchbiegungen kann die Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung 17.4 um ein zusätzliches Glied (Linienlast infolge des Bettungsdrucks) ergänzt werden. Die resultierende Linienlast aus der äußereren Belastung $q(z)$ und der entgegengesetzten Bettungs-Linienlast $p(z)$

$$q_{res}(z) = q(z) - p(z) = q(z) - k(z)v(z)$$

wird in 17.4 eingesetzt, und man erhält aus

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI(z) \frac{d^2v(z)}{dz^2} \right] = q_{res}(z) = q(z) - k(z)v(z)$$

durch Umordnen die

Differentialgleichung der Biegelinie des elastisch gebetteten Trägers:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI(z) \frac{d^2v(z)}{dz^2} \right] + k(z)v(z) = q(z) . \quad (19.3)$$

Die vier Integrationskonstanten, die in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung auftauchen, müssen aus Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt werden. Dafür gilt alles, was im Abschnitt 17.3 behandelt wurde. Auch für die Schnittgrößen gelten weiter die bekannten Beziehungen:

$$M_b(z) = -EI(z)v''(z) , \quad F_Q(z) = -[EI(z)v''(z)]' .$$

19.2.2 Lösung der Differenzialgleichung der Biegelinie

Die „*Gewöhnliche inhomogene lineare Differenzialgleichung 4. Ordnung*“ 19.3 kann in der Regel nicht geschlossen gelöst werden. Glücklicherweise ist der nachfolgend behandelte Sonderfall „Biegesteifigkeit $EI = \text{konstant}$ und Bettungszahl $k = \text{konstant}$ “ besonders wichtig. Die Differenzialgleichung kann unter dieser Voraussetzung durch die Biegesteifigkeit dividiert werden, es ergibt sich die

Differenzialgleichung der Biegelinie des elastisch gebetteten Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Bettungszahl:

$$v'''' + k^* v = q^* \quad \text{mit} \quad k^* = \frac{k}{EI} \quad , \quad q^*(z) = \frac{q(z)}{EI} \quad . \quad (19.4)$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differenzialgleichung setzt sich entsprechend

$$v(z) = v_{\text{part}}(z) + v_{\text{hom}}(z)$$

aus einer beliebigen Partikulärlösung v_{part} und der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung v_{hom} zusammen¹.

Für die Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$v'''' + k^* v = 0 \quad (19.5)$$

erhält man mit dem Ansatz $v = e^{\lambda z}$ die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^4 e^{\lambda z} + k^* e^{\lambda z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 + k^* = 0 \quad ,$$

die vier (komplexe) Lösungen für λ liefert:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{k^*} \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm i) \quad .$$

Man überzeugt sich leicht, dass die λ -Werte die Dimension („Länge“)⁻¹ haben. Es wird deshalb die Abkürzung

$$\frac{1}{L} = \sqrt[4]{k^*} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

eingeführt, und die Lösung der homogenen Differenzialgleichung kann folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$v_{\text{hom}} = \bar{C}_1 e^{(1+i)\frac{z}{L}} + \bar{C}_2 e^{(-1+i)\frac{z}{L}} + \bar{C}_3 e^{(-1-i)\frac{z}{L}} + \bar{C}_4 e^{(1-i)\frac{z}{L}} \quad .$$

In dieser Form der Lösung müssten sich komplexe Integrationskonstanten ergeben, um auf reelle Ergebnisse für die Durchbiegung zu kommen. Es ist deshalb sinnvoll, mit Hilfe der bekannten

¹Hinweis für Leser, die die Theorie der Lösung solcher Differenzialgleichungen noch nicht kennen: Ohne Einbuße des Verständnisses für die mechanischen Zusammenhänge darf die Entwicklung bis zum Ergebnis 19.6 „überlesen“ werden. Für die Leser, die in der Mathematik dieses Tema schon behandelt haben, gilt: *Gewöhnliche inhomogene lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* sind ein so wichtiges Thema für Ingenieure und Naturwissenschaftler, dass man die Chance nicht verpassen sollte, an diesem anschaulichen Beispiel alle Schritte noch einmal nachzuempfinden.

Zusammenhänge („Euler-Relation“) die e -Funktionen durch die trigonometrischen Funktionen zu ersetzen:

$$e^{(i\pm 1)\frac{z}{L}} = e^{\pm \frac{z}{L}} e^{i\frac{z}{L}} = e^{\pm \frac{z}{L}} \left(\cos \frac{z}{L} + i \sin \frac{z}{L} \right) \quad ,$$

$$e^{(-i\pm 1)\frac{z}{L}} = e^{\pm \frac{z}{L}} e^{-i\frac{z}{L}} = e^{\pm \frac{z}{L}} \left(\cos \frac{z}{L} - i \sin \frac{z}{L} \right) \quad .$$

Nach dem Einsetzen dieser Beziehungen in die Lösung der homogenen Differenzialgleichung können die Integrationskonstanten (zum Teil unter Einbeziehung der imaginären Einheit i) zu neuen (reellen) Integrationskonstanten zusammengefasst werden:

$$v_{hom} = e^{\frac{z}{L}} \left(C_1 \cos \frac{z}{L} + C_2 \sin \frac{z}{L} \right) + e^{-\frac{z}{L}} \left(C_3 \cos \frac{z}{L} + C_4 \sin \frac{z}{L} \right) \quad .$$

Die neben diesem Lösungsanteil noch erforderliche Partikulärlösung der Differenzialgleichung 19.4 kann nur bei gegebener Funktion für die Linienlast $q^*(z)$ ermittelt werden. Man überzeugt sich leicht, dass für Potenzfunktionen bis maximal 3. Grades (wegen des Verschwindens der 4. Ableitung) die inhomogene Differenzialgleichung 19.4 von

$$v_{part} = \frac{q^*(z)}{k^*}$$

erfüllt wird. Beide Lösungsanteile werden zusammengefasst zur allgemeinen

Lösung der Differenzialgleichung des elastisch gebetteten Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Bettungszahl, belastet mit einer Linienlast, die durch eine Potenzfunktion maximal 3. Grades beschrieben wird:

$$v = \frac{q(z)}{k} + e^{\frac{z}{L}} \left(C_1 \cos \frac{z}{L} + C_2 \sin \frac{z}{L} \right) + e^{-\frac{z}{L}} \left(C_3 \cos \frac{z}{L} + C_4 \sin \frac{z}{L} \right) \quad (19.6)$$

mit $L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}}$.

- ⇒ Die Integrationskonstanten C_1 bis C_4 werden aus Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt. Da alle Definitionen (Koordinatensystem, Verschiebungen, Schnittgrößen) aus dem Kapitel 17 beibehalten wurden, gelten dafür sämtliche im Abschnitt 17.3 gegebenen Beispiele.
- ⇒ Man beachte, dass für elastisch gebettete Träger immer eine Verformungsrechnung erforderlich ist, auch wenn nur die Schnittgrößen interessieren (es gibt keine „statisch bestimmt gelagerten Träger“ mit elastischer Bettung).

WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Gewöhnliche Differenzialgleichungen auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) bietet u. a.:



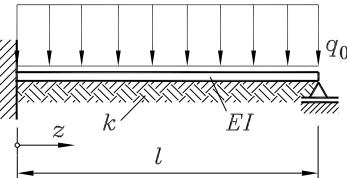
- Differenzialgleichungen 1. Ordnung
- Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung
- Lineare Unabhängigkeit von Funktionen
- Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten



Beispiel:

Für den skizzierten elastisch gebetteten Träger sind der Verlauf der Biegelinie und der Biegemomentenverlauf zu bestimmen.

Gegeben: q_0 , EI , l , $k = 1024 \frac{EI}{l^4}$.



Es gilt die allgemeine Lösung 19.6 für die Differenzialgleichung der Biegelinie des elastisch gebetteten Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Bettungszahl, die folgenden Randbedingungen angepasst werden muss:

$$1.) v(0) = 0 \quad , \quad 2.) v'(0) = 0 \quad , \quad 3.) v(l) = 0 \quad , \quad 4.) M_b(l) = 0 \Rightarrow v''(l) = 0 \quad .$$

Neben der Verschiebungsfunktion $v(z)$ werden also noch deren 1. und 2. Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{q_0}{k} + e^{\frac{z}{L}} \left(C_1 \cos \frac{z}{L} + C_2 \sin \frac{z}{L} \right) + e^{-\frac{z}{L}} \left(C_3 \cos \frac{z}{L} + C_4 \sin \frac{z}{L} \right), \\ v'(z) &= \frac{e^{\frac{z}{L}}}{L} \left[(C_1 + C_2) \cos \frac{z}{L} + (C_2 - C_1) \sin \frac{z}{L} \right] + \frac{e^{-\frac{z}{L}}}{L} \left[(C_4 - C_3) \cos \frac{z}{L} - (C_3 + C_4) \sin \frac{z}{L} \right], \\ v''(z) &= \frac{2}{L^2} e^{\frac{z}{L}} \left(-C_1 \sin \frac{z}{L} + C_2 \cos \frac{z}{L} \right) + \frac{2}{L^2} e^{-\frac{z}{L}} \left(C_3 \sin \frac{z}{L} - C_4 \cos \frac{z}{L} \right). \end{aligned}$$

Die Verschiebungsfunktion $v(z)$ und ihre Ableitungen werden in die vier Randbedingungs-Gleichungen eingesetzt, und es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die vier Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ e^{\frac{l}{L}} \cos \frac{l}{L} & e^{\frac{l}{L}} \sin \frac{l}{L} & e^{-\frac{l}{L}} \cos \frac{l}{L} & e^{-\frac{l}{L}} \sin \frac{l}{L} \\ -e^{\frac{l}{L}} \sin \frac{l}{L} & e^{\frac{l}{L}} \cos \frac{l}{L} & e^{-\frac{l}{L}} \sin \frac{l}{L} & -e^{-\frac{l}{L}} \cos \frac{l}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{q_0}{k} \quad .$$



Dies wird mit einem geeigneten Programm gelöst (vgl. www.TM-aktuell.de). Für den gegebenen Zahlenwert erhält man mit

$$\frac{l}{L} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad l = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{4EI}} = 4$$

folgendes Ergebnis:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,012267256 \\ 0,014247988 \\ -1,012267256 \\ -1,038782500 \end{bmatrix} \frac{q_0 l^4}{1024 EI}$$

(nebenstehend das „Command Window“ von Matlab mit diesem Ergebnis).

```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
x =
0.01226725628224
0.01424798813525
-1.01226725628224
-1.03878250069972
>>
```

Mit den Konstanten kann die Biegelinie aufgeschrieben werden (aus den C_i wurde der gemeinsame Faktor $\frac{q_0 l^4}{1024 EI}$ ausgeklammert, die C_i^* sind die dimensionslosen Zahlenwerte), und der Biegemomentenverlauf ergibt sich nach der Formel $M_b(z) = -EIv''(z)$:

$$v(z) = \frac{q_0 l^4}{1024 EI} \left[1 + e^{4\tilde{\imath}} \left(C_1^* \cos \frac{4z}{l} + C_2^* \sin \frac{4z}{l} \right) + e^{-4\tilde{\imath}} \left(C_3^* \cos \frac{4z}{l} + C_4^* \sin \frac{4z}{l} \right) \right] ,$$

$$M_b(z) = -\frac{q_0 l^2}{32} \left[e^{4\tilde{\imath}} \left(-C_1^* \sin \frac{4z}{l} + C_2^* \cos \frac{4z}{l} \right) + e^{-4\tilde{\imath}} \left(C_3^* \sin \frac{4z}{l} - C_4^* \cos \frac{4z}{l} \right) \right] .$$

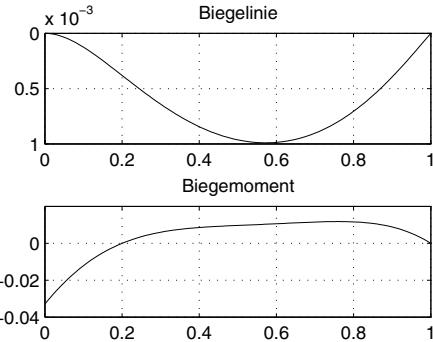
Nebenstehend sieht man (Matlab-Grafik) den Verlauf der Biegelinie und des Biegemoments. Dargestellt sind die

dimensionslosen Verschiebungen $\frac{EI}{q_0 l^4} v$

bzw. die

dimensionslosen Biegemomente $\frac{M_b}{q_0 l^2}$.

Die Ergebnisse gelten natürlich nur für den vorgegebenen Zahlenwert für k .



Der Zahlenwert für k war erforderlich, um in der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems für die Bestimmung der Integrationskonstanten für den Quotienten $\frac{l}{L}$ einen Zahlenwert zu erhalten. Die Frage, ob man das Gleichungssystem (immerhin nur vier Gleichungen) nicht allgemein lösen könnte, ist in diesem Fall mit einem „Ja, aber“ zu beantworten.

Dabei braucht man sich die Lösung des Gleichungssystems „von Hand“ nicht anzutun. Programme, die symbolisch rechnen können, liefern durchaus ein korrektes Ergebnis ab (Ergebnisse dieser Art siehe www.TM-aktuell.de). Die Ausdrücke für die Konstanten sind aber so kompliziert, dass das eigentliche Ziel solcher Rechnungen, den Einfluss der Parameter auf die Resultate zu erkennen, nur sehr bedingt erreicht wird.



Aber es geht! Folgende Integrationskonstanten liefert z. B. Maple nach symbolischer Rechnung ab:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{q_0}{k} \begin{bmatrix} \frac{-1+2\cos^2(l/L)+2\sin(l/L)\cos(l/L)-e^{-l/L}\cos(l/L)+e^{-2l/L}-e^{l/L}\cos(l/L)}{4\sin(l/L)\cos(l/L)-e^{2l/L}+e^{-2l/L}} \\ \frac{-1+2\cos^2(l/L)-2\sin(l/L)\cos(l/L)-2e^{-l/L}\cos(l/L)+e^{l/L}\sin(l/L)+e^{-l/L}\sin(l/L)+e^{-2l/L}}{4\sin(l/L)\cos(l/L)-e^{2l/L}+e^{-2l/L}} \\ \frac{e^{2l/L}-1+2\cos^2(l/L)-2\sin(l/L)\cos(l/L)-e^{l/L}\cos(l/L)-e^{-l/L}\cos(l/L)}{4\sin(l/L)\cos(l/L)-e^{2l/L}+e^{-2l/L}} \\ \frac{e^{2l/L}-e^{l/L}\sin(l/L)-2e^{l/L}\cos(l/L)+2\sin(l/L)\cos(l/L)+2\cos^2(l/L)-1-e^{-l/L}\sin(l/L)}{4\sin(l/L)\cos(l/L)-e^{2l/L}+e^{-2l/L}} \end{bmatrix} .$$

Auch wenn der geübte Rechner hier noch etwas Potenzial zur Vereinfachung dieser Ausdrücke sieht, kann man aus solchen Formel-Monstern doch nichts entnehmen. Um es deutlich zu sagen: Symbolische Rechnung kann hier nicht empfohlen werden. Gegebenenfalls sollte man die Rechnung für mehrere unterschiedliche Parameterwerte durchführen, so dass man eine Kurvenschar erhält, aus der man den Einfluss der interessierenden Parameter ablesen kann.

19.2.3 Lösung mit dem Differenzenverfahren

Das einfache Beispiel des vorigen Abschnitts hat gezeigt, dass trotz konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Bettungszahl der Rechenaufwand bei einer exakten Lösung recht erheblich wird. Deshalb bietet sich schon für solche Aufgaben eine numerische Lösung an, die bei komplizierteren Problemen ohnehin unumgänglich ist.

Da sich die Differenzialgleichungen der Biegelinie des elastisch gebetteten Trägers 19.3 bzw. 19.4 nur durch den Bettungsanteil $k(z)v(z)$ von den Differenzialgleichungen der Biegelinie des nicht gebetteten Trägers unterscheiden, für die im Abschnitt 18.1 die Differenzenformeln hergeleitet wurden, müssen die Formeln 18.2 bzw. 18.4 nur um diesen Anteil ergänzt werden. Weil der Bettungsanteil keine Ableitung enthält, wird er am Punkt i einfach zu $k_i v_i$, und die mit $\frac{h^4}{E}$ multiplizierten Differenzengleichungen des Abschnitts 18.1 werden um genau einen Term ergänzt.

Differenzengleichung der Biegelinie des elastisch gebetteten Trägers bei veränderlicher Biegesteifigkeit:

$$\begin{aligned} I_{i-1}v_{i-2} - 2(I_{i-1} + I_i)v_{i-1} + \left(I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + \frac{k_i h^4}{E} \right) v_i \\ - 2(I_i + I_{i+1})v_{i+1} + I_{i+1}v_{i+2} = \frac{q_i h^4}{E} \quad . \end{aligned} \quad (19.7)$$

Differenzengleichung der Biegelinie des elastisch gebetteten Trägers bei konstanter Biegesteifigkeit:

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + \left(6 + \frac{k_i h^4}{EI} \right) v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{q_i h^4}{EI} \quad . \quad (19.8)$$

- ⇒ Auch in der einfacheren Differenzenformel 19.8 darf die Bettungszahl veränderlich sein (an jedem Punkt i einen anderen Wert haben). Dies wird in den nachfolgenden Überlegungen zu den Übergangsbedingungen genutzt.
- ⇒ Für die Berechnung der Biegemomente und Querkräfte gelten für den elastisch gebetteten Träger die gleichen Differenzialbeziehungen wie für den Träger ohne elastische Bettung. Deshalb dürfen die Differenzenformeln 18.3 bzw. 18.5 ungeändert übernommen werden.

Rand- und Übergangsbedingungen

Die elastische Bettung geht (wie die Linienlasten) nur über die Differenzialgleichung in die Rechnung ein. Weil die Rand- und Übergangsbedingungen von der Bettung unberührt bleiben, können alle „Tricks“ zur Vermeidung von Übergangsbedingungen, die im Abschnitt 18.1.4 beschrieben wurden, und der gesamte Katalog der Randbedingungen, der im Abschnitt 18.1.5 zusammengestellt wurde, auch für die Lösung der Aufgaben mit elastischer Bettung ungeändert genutzt werden.

Weil die elastische Bettung auch über die Trägerlänge (von Punkt zu Punkt) veränderlich sein darf und gegebenenfalls nur für einen einzelnen Punkt gelten kann, bieten sich noch folgende

zusätzliche Möglichkeiten für die Berücksichtigung von linearen Federn, vorgeschriebenen Verschiebungen und Zwischenstützen an, die einerseits eine Bestätigung der Strategien sind, die im Abschnitt 18.1.4 beschrieben wurden, andererseits sogar noch einfacher zu realisieren sind.

- ⇒ **Federn** mit linearem Federgesetz können zu einer elastischen Bettung „verschmiert“ werden, die (wie die Linienlast, die eine Einzelkraft ersetzt) nur auf einen Punkt wirkt:

$$k_i = \frac{c_i}{h} .$$

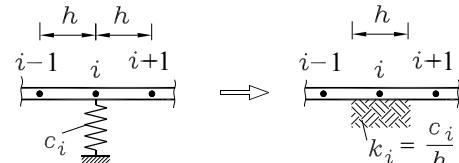


Abbildung 19.6: „Verschmieren“ einer Feder

Praktische Realisierung: Das Hauptdiagonalelement der i -ten Gleichung wird vergrößert um $k_i \frac{h^4}{E} = c_i \frac{h^3}{E}$. Dies entspricht der bereits im Abschnitt 18.1.4 beschriebenen Strategie.

- ⇒ Eine **Zwischenstütze** kann als Sonderfall einer „Feder mit unendlicher Steifigkeit“ angesehen werden und deshalb besonders bequem durch extreme Vergrößerung des Hauptdiagonalelements der i -ten Gleichung realisiert werden (bei Division dieser Gleichung durch ihr Hauptdiagonalelement wird dieses gleich 1, und alle übrigen Koeffizienten dieser Gleichung werden näherungsweise Null, was der im Abschnitt 18.1.4 besprochenen Realisierung von Zwischenstützen entspricht).

Diese Realisierungsvariante hat den Vorteil, dass nur ein Matrixelement geändert werden muss. Eventuell im Belastungsvektor (rechte Seite) stehende Größen haben ebenso wenig Einfluss wie die übrigen Elemente in der Zeile i der Koeffizientenmatrix. Deshalb wird diese Möglichkeit, verhinderte Verschiebungen zu simulieren, auch bei der Finite-Elemente-Rechnung bevorzugt, zumal die dort sehr wichtige Symmetrie der Koeffizientenmatrix dadurch nicht gestört wird.

$$\begin{bmatrix} & i \\ & | \\ - & 10^{30} & - \\ & | \\ & | \end{bmatrix}_i$$

Ein „Riese“ auf der Hauptdiagonalen verhindert die Verschiebung v_i .

- ⇒ Der beschriebene „Zwischenstützen-Trick“ kann für die Realisierung einer **vorgeschriebenen Verschiebung** (dem Punkt i wird die Verschiebung v_i , aufgezwungen) folgendermaßen modifiziert werden: Zusätzlich zu dem extrem großen Wert auf der Hauptdiagonalen wird als rechte Seite das v_i -fache dieses Wertes eingesetzt. Es ist evident, dass dann nach einer Division der Gleichung durch ihr Hauptdiagonalelement genau die im Abschnitt 18.1.4 für diesen Fall angegebene Gleichung entsteht.

Generelle Strategie für gerade Biegeträger mit und ohne Bettung

Die Differenzialgleichung der Biegelinie für den elastisch gebetteten Träger 19.3 unterscheidet sich nur durch das zusätzliche Glied $k(z)v(z)$ von der Biegelinie ohne Bettung 17.4. Dieser kleine Unterschied führte zu erheblichem Mehraufwand bei der analytischen Lösung (Abschnitt 19.2.2).

Bei der numerischen Lösung führt die Berücksichtigung elastischer Bettung zu keinem nennenswerten Mehraufwand, im Gegenteil: Die elastische Bettung ermöglicht die besonders einfache Realisierung von Federn und Zwischenstützen. Deshalb bietet sich folgende Strategie an: Man verwendet immer die (durch Modifizieren von 18.7 entstehenden)

Differenzenformeln für den elastisch gebetteten Träger:

$$\begin{aligned} \mu_{i-1} v_{i-2} - 2(\mu_{i-1} + \mu_i) v_{i-1} + \left(\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} + \frac{k_i h^4}{EI_0} \right) v_i \\ - 2(\mu_i + \mu_{i+1}) v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2} = \frac{q_i h^4}{EI_0} \quad , \\ M_{bi} = -\frac{EI_0}{h^2} (\mu_i v_{i-1} - 2\mu_i v_i + \mu_i v_{i+1}) \quad , \\ F_{Qi} = -\frac{EI_0}{2h^3} [-\mu_{i-1} v_{i-2} + 2\mu_{i-1} v_{i-1} - (\mu_{i-1} - \mu_{i+1}) v_i - 2\mu_{i+1} v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2}] \\ \text{mit } \mu_i = \frac{I_i}{I_0} \quad (I_0 \text{ ist ein beliebiges Bezugs-Trägheitsmoment}). \end{aligned} \quad (19.9)$$

Folgende einheitliche Strategie für die Berechnung gerader Biegeträger (mit und ohne Bettung) nach dem Differenzenverfahren wird empfohlen (unter www.TM-aktuell.de findet man zahlreiche Beispiele, die auf diese Weise berechnet wurden):



- ① Der Träger mit der Gesamtlänge l wird äquidistant in n_A Abschnitte der Breite $h = \frac{l}{n_A}$ so unterteilt, dass alle markanten Punkte (Krafteinleitung, Lager, Gelenke, ...) getroffen werden. Mit Rand- und Außenpunkten entstehen insgesamt $n = n_A + 5$ Stützstellen. Der linke Randpunkt des Trägers hat die Nummer 3, der rechte Randpunkt die Nummer $n - 2$.
- ② Es werden 3 Vektoren \mathbf{qi} , \mathbf{ki} und \mathbf{mi} mit jeweils n Elementen definiert, die zunächst sämtlich Null gesetzt werden.
- ③ In den Vektor \mathbf{qi} werden die von Null abweichenden Linienlastintensitäten q_i an den Stützstellen einschließlich „verschmierter“ Einzelkräfte und -momente eingetragen.
- ④ In den Vektor \mathbf{ki} werden die von Null abweichenden Bettungsziffern k_i an den Stützstellen einschließlich „verschmierter“ Federn und Zwischenstützen eingetragen.
- ⑤ Es wird eine beliebige Bezugs-Biegesteifigkeit EI_0 gewählt. In den Vektor \mathbf{mi} werden die Quotienten

$$\mu_i = \frac{EI_i}{EI_0}$$

eingetragen. EI_i ist die Biegesteifigkeit am Punkt i . Für die Außenpunkte werden die Werte eingesetzt, die sich bei Fortsetzung des Trägers über die Ränder hinaus ergeben würden. Gelenke werden berücksichtigt, indem für den Gelenkpunkt der Wert 0 eingetragen wird.

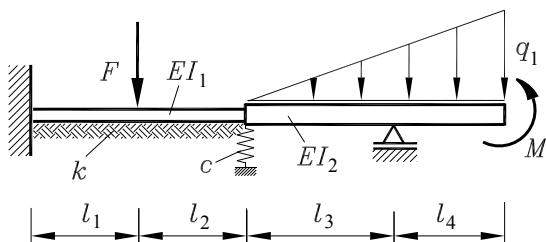
- ⑥ Für die $n_A + 1$ Trägerpunkte können damit alle Differenzengleichungen nach 19.9 aufgeschrieben werden.
- ⑦ Die vier Randbedingungsgleichungen werden aus dem Katalog des Abschnitts 18.1.5 ergänzt, so dass das Gleichungssystem mit n Gleichungen komplett ist.
- ⑧ Nach der Lösung des Gleichungssystems sind die Verschiebungen für alle Punkte (Biegelinie) bekannt. Die Schnittgrößen (Biegemoment und Querkraft) können damit nach 19.9 berechnet werden.

Beispiel:

Der skizzierte Träger mit stückweise konstantem Querschnitt ist im linken Bereich elastisch gebettet. Es sind die Biegelinie und der Verlauf des Biegemoments zu ermitteln. Speziell sind die Verschiebungen am Angriffspunkt von F und am rechten Rand sowie die Federkraft zu berechnen.

Gegeben:

$$l_1 = l_2 = 250 \text{ mm} ; l_3 = 400 \text{ mm} ; EI_1 = 6 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2 ; c = 6 \text{ kN/mm} ; F = 2 \text{ kN} ; k = 12 \text{ N/mm}^2 ; l_4 = 300 \text{ mm} ; EI_2 = 3 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}^2 ; q_1 = 14 \text{ N/mm} ; M = 240 \text{ Nm} .$$



- ① Der Träger mit der Gesamtlänge $l = 1200 \text{ mm}$ wird in $n_A = 600$ Abschnitte der Breite $h = \frac{l}{n_A} = 2 \text{ mm}$ unterteilt. Es entstehen $n = n_A + 5 = 605$ Stützstellen. Der linke Randpunkt des Trägers hat die Nummer 3, der rechte Randpunkt die Nummer 603. Die Kraft F greift am Punkt 128 an, die Feder befindet sich am Punkt 253, die Zwischenstütze am Punkt 453.
- ②...⑤ Als Bezugs-Biegesteifigkeit wird $EI_0 = EI_1$ gewählt. Die 3 Vektoren qi , ki und mi werden folgendermaßen mit den gegebenen Werten bestückt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{qi} = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0,04 \\ 0,08 \\ \vdots \\ 7,96 \\ 8 \\ 8,04 \\ \vdots \\ 13,96 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ki} = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ \vdots \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ \vdots \\ 12 \\ 3006 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 10^{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{mi} = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{ll} 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ \vdots & \\ 127 & \\ 128 & \\ 129 & \\ \vdots & \\ 252 & \\ 253 & \\ 254 & \\ 255 & \\ \vdots & \\ 452 & \\ 453 & \\ 454 & \\ \vdots & \\ 602 & \\ 603 & \\ 604 & \\ 605 & \end{array}
 \end{aligned}$$

⑥ Damit können alle Differenzengleichungen nach 19.9 aufgeschrieben werden. Man findet unter www.TM-aktuell.de die Realisierung mit einem Matlab-Script.

⑦ Die vier Randbedingungsgleichungen werden aus dem Katalog des Abschnitts 18.1.5 entnommen. Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$v_3 = 0$$

$$-v_2 + v_4 = 0$$

$$5v_{602} - 10v_{603} + 5v_{604} = -0,00016$$

$$-5v_{601} + 10v_{602} - 10v_{604} + 5v_{605} = 0$$

⑧ Nach der Lösung des Gleichungssystems sind die Verschiebungen für alle Punkte bekannt, und die Schnittgrößenverläufe können berechnet werden. Abbildung 19.7 zeigt die Biegelinie, den M_b -Verlauf und den F_Q -Verlauf.

Die speziellen Werte, die in der Aufgabenstellung gefordert sind, findet man ebenfalls in der Grafik, die Federkraft wurde aus

$$F_c = c v_{253}$$

berechnet.

Die Genauigkeit der Ergebnisse ist schwer abzuschätzen. Man sollte immer mindestens eine zusätzliche Rechnung mit einer anderen Diskretisierung durchführen. Diese schützt natürlich nicht vor systematischen Fehlern bei der Anwendung des Differenzenverfahrens. Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse einer sehr wirkungsvollen Kontrolle unterzogen.

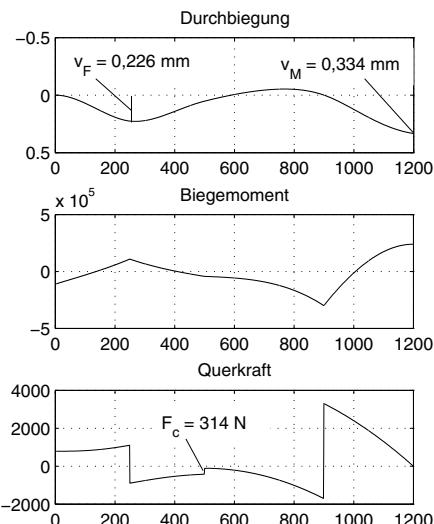


Abbildung 19.7: Biegelinie, Schnittgrößen und spezielle Werte (Differenzenverfahren mit $n_A = 600$ Abschnitten)



19.2.4 Lösung mit der Finite-Elemente-Methode

Der im Abschnitt 18.2 für den geraden Biegeträger beschriebene FEM-Algorithmus kann ohne Änderung auf elastisch gebettete Träger übertragen werden, wenn die Element-Steifigkeitsmatrix geeignet erweitert wird. Für deren Herleitung wird das später im Kapitel 33 beschriebene Verfahren empfohlen. Nachfolgend sieht man das Ergebnis.

Element-Steifigkeitsmatrix für den elastisch gebetteten Biegeträger:

$$\mathbf{K}_e = \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}_{\text{symm.}} + \left(\frac{kl}{420} \right)_e \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}_{\text{symm.}} \quad (19.10)$$

Die Element-Steifigkeitsmatrix 19.10 wurde mit zwei Summanden aufgeschrieben, um zu verdeutlichen, dass der „Nicht-Bettungs-Anteil“ mit der Element-Steifigkeitsmatrix desbettungsfreien Biegeträgers (Formel 18.9) übereinstimmt, weil beide mit der gleichen Ansatzfunktion² erzeugt wurden. Daraus leitet sich eine wichtige Erkenntnis ab, weil mit einer Polynomfunktion 3. Grades die Funktion der Biegelinie 19.6 niemals exakt beschrieben werden kann:

Die Finite-Elemente-Rechnung liefert für den elastisch gebetteten Träger in jedem Fall nur eine Näherungslösung. Ein einziges Element (wie beim Träger ohne Bettung) für einen elastisch gebetteten Bereich liefert deshalb in der Regel nur eine grobe Näherung.



Das FEM-Programm zur Berechnung elastisch gebetteter Träger unter www.TM-interaktiv.de berücksichtigt dies, indem es automatisch (der Benutzer merkt es nicht) die Bereiche mit elastischer Bettung in eine große Anzahl einzelner Elemente zerlegt. Der Ausschnitt des Bildschirm-Schnappschusses 19.9 zeigt mit diesem Programm berechnete Ergebnisse (Beispiel auf Seite 320), die Abbildung 19.8 die Ergebnisse einer genaueren Rechnung mit dem Differenzenverfahren. Die Übereinstimmung ist überzeugend.



Abbildung 19.8: Ergebnisse mit dem Differenzenverfahren mit $n_A = 2400$

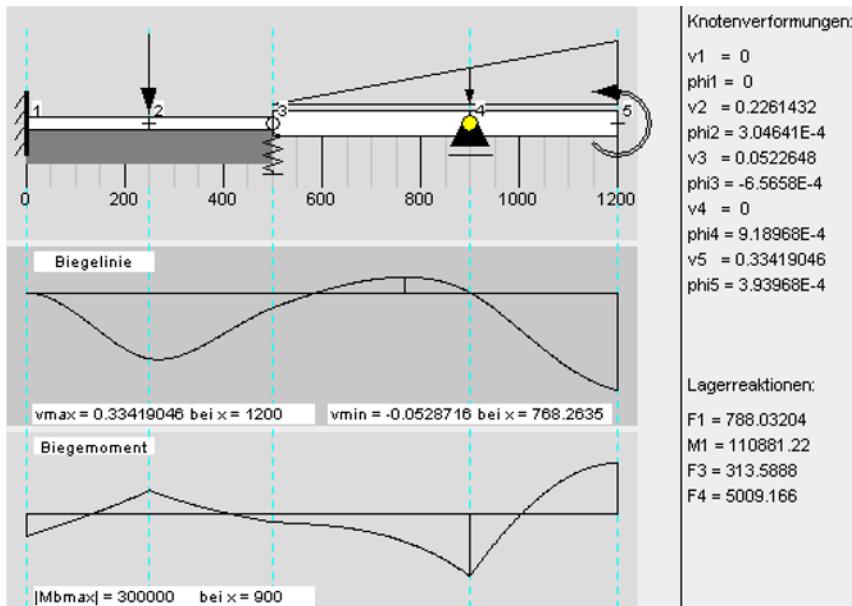


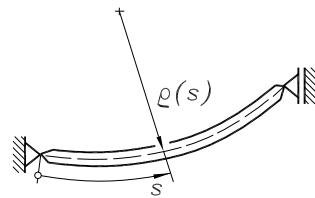
Abbildung 19.9: Bestätigung der Ergebnisse mit der Finite-Elemente-Methode

²Die wichtige Rolle der Ansatzfunktionen wird im Abschnitt 18.2.3 beschrieben.

19.3 Der gekrümmte Träger

In diesem Abschnitt werden Träger betrachtet, deren Achse bereits im unbelasteten Zustand eine gekrümmte Linie ist. Dabei werden folgende Bedingungen vorausgesetzt:

- Der Träger ist *eben gekrümmmt*. Der Krümmungsradius ρ darf veränderlich sein.
- Der Träger ist ausschließlich *in der Krümmungsebene belastet*.
- Eine der beiden *Hauptzentralachsen* der Trägerquerschnitte hat die *Richtung des Krümmungsradius*.
- Als *Trägerachse* wird (wie beim geraden Träger) die Verbindungsline der Schwerpunkte aller Querschnittsflächen angesehen.

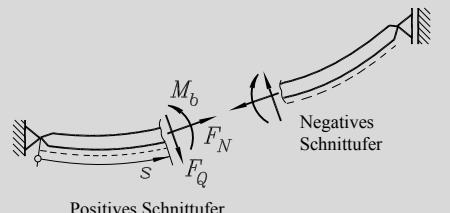


19.3.1 Schnittgrößen

In enger Anlehnung an die Vereinbarungen, die für den geraden Träger (Kapitel 7) getroffen wurden, definiert man die

Schnittgrößen für den gekrümmten Träger:

- Die Schnittstelle wird durch eine Koordinate s , die der gekrümmten Trägerachse folgt, festgelegt. Das Schnittufer auf der Koordinatenseite wird als positives Schnittufer, das andere als negatives Schnittufer bezeichnet.
- Die Bezugsfaser wird immer auf der Außenseite des Trägers angetragen (nicht auf der Seite, auf der der Krümmungsmittelpunkt liegt).
- Die Normalkraft F_N wird in tangentialer Richtung als Zugkraft angetragen.
- Die in radialer Richtung wirkende Querkraft F_Q zeigt am positiven Schnittufer zur Bezugsfaserseite.
- Ein positives Biegemoment M_b wirkt so, dass es die Krümmung vergrößert (und die Bezugsfaserseite auf Zug belastet).



Analog zur Vorgehensweise beim geraden Träger werden nun die differenziellen Beziehungen ermittelt, die für die Schnittgrößen des gekrümmten Trägers gelten müssen. Dazu wird ein sehr kleines Element (Länge Δs) aus dem Träger herausgeschnitten (**Abbildung 19.10**). Die Schnittgrößen verändern vom linken bis zum rechten Schnittufer dieses Elements ihre Größen um ΔF_N , ΔF_Q bzw. ΔM_b .

Im Gegensatz zum geraden Träger verändern die beiden Kräfte auch ihre Richtungen, so dass in die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen am Element jeweils F_N und F_Q eingehen. Deshalb wird auch die verteilte äußere Belastung (Linienlast) mit zwei Komponenten q_r (radial) und q_t (tangential) berücksichtigt (man bedenke, dass selbst das Eigengewicht beim gekrümmten Träger nur durch beide Linienlast-Komponenten erfasst werden kann). Zwei Kraft-Gleichgewichtsbedingungen und eine Momenten-Gleichgewichtsbedingung werden an diesem Element formuliert.

Diese führen nach dem Grenzübergang $\Delta s \rightarrow 0$ (und damit $\Delta F_N \rightarrow 0$, $\Delta F_Q \rightarrow 0$ und $\Delta M_b \rightarrow 0$) nach etwas mühsamerer Rechnung als beim geraden Träger auf die

**Differenzial-
Beziehungen der
Schnittgrößen des
gekrümmten Trägers:**

$$\begin{aligned}\frac{dF_N(s)}{ds} &= -\frac{F_Q(s)}{\rho(s)} - q_t(s) \quad , \\ \frac{dF_Q(s)}{ds} &= \frac{F_N(s)}{\rho(s)} - q_r(s) \quad , \\ \frac{dM_b(s)}{ds} &= F_Q(s) \quad .\end{aligned}\quad (19.11)$$

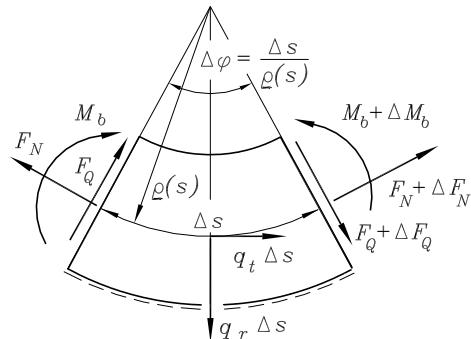


Abbildung 19.10: Gleichgewicht der Schnittgrößen und Linienlasten

- ⇒ Der Leser, der bei dem (lobenswerten) Versuch, die Rechnung nachzuvollziehen, die zu den Formeln 19.11 führt, Schwierigkeiten hat, sollte sich noch einmal die im Abschnitt 9.2 vorgeführte Herleitung der Formel für die Seilhaftung ansehen, bei der exakt die gleichen Überlegungen anzustellen waren.
- ⇒ Der wichtige Sonderfall des Kreisbogenträgers (mit konstantem Krümmungsradius R) ist in den Formeln 19.11 enthalten. Empfehlenswert ist, für Kreisbogenträger mit einer Winkelkoordinate φ zu arbeiten, so dass in 19.11 ds durch $Rd\varphi$ ersetzt werden kann.

Führt man mit den Formeln für den Kreisbogenträger den Grenzübergang

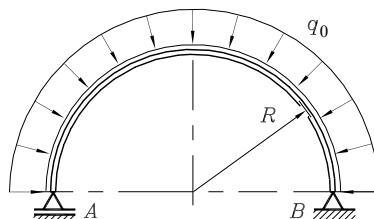
$$R \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad R d\varphi \rightarrow dz$$

durch, so ergeben sich die für gerade Träger geltenden Beziehungen 7.1.

Beispiel:

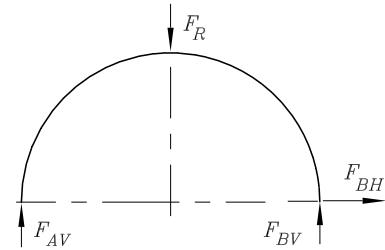
Ein halbkreisförmiger Träger ist durch eine konstante radiale Linienlast belastet. Man ermittle die Lagerreaktionen bei A und B und die Schnittgrößenverläufe.

Gegeben: R , q_0 .



Die Resultierende der Linienlast F_R kann aus Symmetriegründen nur die in der nebenstehenden Skizze gezeichnete Lage haben. Deshalb gibt es auch keine horizontale Lagerkraftkomponente bei B (die Horizontalkomponenten der Linienlast bilden ein Gleichgewichtssystem), und die Vertikalkomponenten der beiden Lagerreaktionen sind gleich groß:

$$F_{BH} = 0 \quad , \quad F_{AV} = F_{BV} = \frac{1}{2} F_R \quad .$$



Weil für die Berechnung der Schnittgrößen die Resultierende der konstanten Radiallast für einen beliebigen Öffnungswinkel φ benötigt wird, soll diese zunächst berechnet werden (die Resultierende F_R in den Auflagerreaktionen ist dann der Sonderfall für den Öffnungswinkel $\varphi = \pi$).

Die nebenstehende Skizze zeigt einen Abschnitt des Kreisbogens mit dem Öffnungswinkel φ . An der Stelle ψ wird die Radiallast q_0 über den differenziell kleinen Winkel $d\psi$ zu den gezeichneten Resultierenden

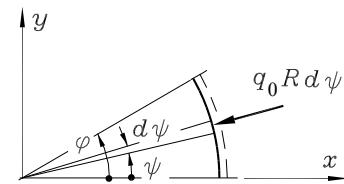
$$q_0 R d\psi$$

zusammengefasst, die in zwei Komponenten bezüglich des x -y-Koordinatensystems zerlegt wird.

Man erhält die Komponenten der Gesamt-Resultierenden durch Summation aller unendlich kleinen Teilkomponenten (Integration) über den Winkel φ :

$$F_{Rx}(\varphi) = - \int_0^\varphi q_0 R \cos \psi d\psi = -q_0 R \sin \varphi \quad ,$$

$$F_{Ry}(\varphi) = - \int_0^\varphi q_0 R \sin \psi d\psi = q_0 R (\cos \varphi - 1) \quad .$$



Die beiden Komponenten werden zusammengefasst zur Resultierenden einer radial gerichteten konstanten Linienlast über den Winkel φ , die aus Symmetriegründen bei $\frac{\varphi}{2}$ angreifen muss:

$$F_{R\varphi} = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = q_0 R \sqrt{\sin^2 \varphi + (\cos \varphi - 1)^2} = 2 q_0 R \sin \frac{\varphi}{2} \quad .$$

- ⇒ Der Betrag der Resultierenden einer konstanten radial gerichteten Linienlast q_0 (konstante Radiallast) über einen Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel φ ergibt sich aus dem Produkt der Linienlastintensität q_0 und der Sehnenlänge des Kreisbogens.

Für den Spezialfall, der für die Berechnung der Lagerreaktionen des Beispiels benötigt wird (Halbkreis), ist dies der Durchmesser $2R$, und man erhält für die beiden Vertikalkomponenten der Lagerkräfte:

$$F_{AV} = F_{BV} = q_0 R \quad .$$

Die einfache Formel für die Berechnung der Resultierenden einer konstanten Radiallast wird nun auch für die Ermittlung der Schnittgrößen verwendet. Die Abbildung 19.11 zeigt den Schnitt an

der Stelle, die durch die Koordinate φ gekennzeichnet ist, mit den dort wirkenden Schnittgrößen, der Resultierenden der Linienlast und der Vertikalkomponente der Lagerreaktion bei B .

Das Momenten-Gleichgewicht um die Schnittstelle

$$M_b(\varphi) + q_0 R^2 (1 - \cos \varphi) - 2q_0 R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0$$

führt nach einigen elementaren Umformungen auf das überraschende Ergebnis

$$M_b(\varphi) = 0 \quad .$$

Der statisch bestimmt gelagerte Halbkreis unter konstanter Radiallast ist momentenfrei.

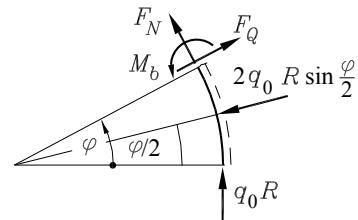


Abbildung 19.11: Schnittgrößen

Damit erübrigts sich das Aufschreiben der Kraft-Gleichgewichtsbedingungen, denn nach 19.11 ist auch die Querkraft gleich Null, und die Normalkraft muss konstant sein. Da die Normalkraft an den Lagern mit den Vertikalkomponenten der Lagerreaktionen im Gleichgewicht sein muss, gilt also:

$$F_Q(\varphi) = 0 \quad , \quad F_N(\varphi) = -q_0 R \quad .$$

- ⇒ Die konstante radial gerichtete Linienlast ruft bei diesem Halbkreisträger als einzige Schnittgröße eine (konstante) Normalkraft hervor. Der Träger hat damit für diese Belastung die ideale Form einer *Stützlinie* (vgl. Beispiel 2 im Abschnitt 11.2 auf Seite 166, wo die Stützlinie für konstante vertikal gerichtete Linienlast berechnet wurde).

Aus diesem Beispiel lassen sich folgende Aussagen für einen wichtigen Spezialfall ableiten:

Kreisring unter konstanter radialem Linienlast

Eine Symmetriehälfte eines geschlossenen Kreisrings (**Abbildung 19.12**, linke Skizze) stützt sich auf der anderen Hälfte mit den tangential gerichteten „Lagerreaktionen“ $q_0 R$ ab, die in jedem Schnitt die Momentwirkung der äußeren Belastung kompensieren (Skizze 19.11).

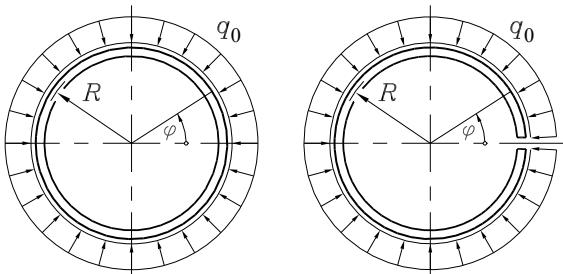


Abbildung 19.12: Geschlossener und geschlitzter Kreisring

Deshalb treten im *geschlossenen Kreisring* weder Biegemoment noch Querkraft auf, die Normalkraft hat den konstanten Wert

$$F_N = -q_0 R \quad .$$

Für den *geschlitzten Kreisring* (**Abbildung 19.12**, rechte Skizze) erhält man mit einer Schnittskizze wie in **Abbildung 19.11** (ohne die Lagerreaktion) aus Gleichgewichtsbetrachtungen:

$$F_N(\varphi) = -2q_0 R \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad , \quad M_b(\varphi) = 2q_0 R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

mit den Maximalwerten bei $\varphi = \pi$:

$$F_{N,max} = -2q_0 R \quad , \quad M_{b,max} = 2q_0 R^2 \quad .$$

Beim geschlitzten Kreisring ist eine Hälfte (bei $\varphi = \pi$) an der anderen starr eingespannt. Dort tritt (zusätzlich zur Normalkraft) das gefährlich große Biegemoment $M_{b,max}$ auf.

19.3.2 Spannungen infolge Biegemoment und Normalkraft

Die Schnittgrößen repräsentieren die resultierenden Wirkungen der über den Querschnitt verteilten Spannungen. Die Normalkraft und das Biegemoment sind den Wirkungen der Normalspannungen äquivalent (wie beim geraden Träger, vgl. Formeln 14.1 und 16.2).

$$F_N = \int_A \sigma(y) dA \quad , \quad M_b = \int_A y \sigma_b(y) dA \quad . \quad (19.12)$$

In diesen Formeln können bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes die Spannungen durch die Dehnungen ersetzt werden. Die folgenden Betrachtungen konzentrieren sich darauf, die Dehnungen beliebiger Fasern des Trägers zu erfassen.

Wie beim geraden Träger beginnt die y -Achse im Schwerpunkt des Querschnitts (in der Trägerachse) und zeigt zu der Seite, auf der die Bezugsfaser liegt. Es wird auch für den gekrümmten Träger die Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese (vgl. Abschnitt 16.1, Seite 216) vorausgesetzt: Die Trägerquerschnitte behalten bei der Verformung ihre ursprünglich ebene Form bei. Dann verformt sich ein aus dem Träger herausgeschnittenes differenziell kleines Element (Abmessung entlang der Trägerachse vor der Verformung sei ds_0) entsprechend **Abbildung 19.13**.

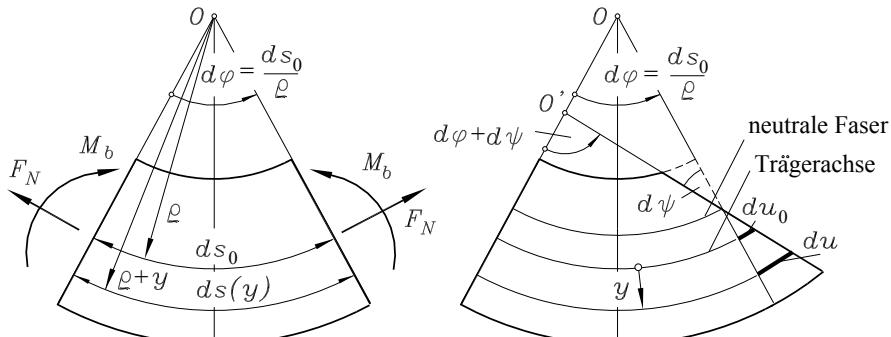


Abbildung 19.13: Unverformtes Element (links) und verformtes Element

Da es nur auf die relative Verschiebung der einzelnen Punkte zueinander ankommt, wurde zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen die Verformung so dargestellt, als hätte sich nur der rechte Querschnitt gedreht. Die Lage des gedrehten Querschnitts wird durch die Verlängerung der Trägerachse du_0 und den Winkel $d\psi$ eindeutig beschrieben.

Die Verlängerung einer beliebigen Faser im Abstand y von der Trägerachse kann dann durch

$$du = du_0 + yd\psi = \varepsilon_0 ds_0 + yd\psi = \varepsilon_0 \rho d\varphi + yd\psi$$

ausgedrückt werden, wobei die Verlängerung der Trägerachse durch das Produkt aus ihrer Dehnung ε_0 und ihrer Ursprungslänge ersetzt wurde.

Die Dehnung einer beliebigen Faser ist der Quotient aus ihrer Verlängerung du und ihrer ursprünglichen Länge, die aus der linken Skizze in **Abbildung 19.13** abgelesen wird:

$$\varepsilon(y) = \frac{du}{ds(y)} = \frac{\varepsilon_0 \rho d\varphi + yd\psi}{(\rho + y)d\varphi} = \varepsilon_0 + \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - \varepsilon_0 \right) \frac{y}{\rho + y} \quad .$$

Damit kann das Hookesche Gesetz

$$\sigma(y) = E\epsilon(y) = E \left[\epsilon_0 + \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - \epsilon_0 \right) \frac{y}{\rho+y} \right] \quad (19.13)$$

aufgeschrieben werden, das nun zusammen mit den beiden eingangs angegebenen Formeln 19.12 für die Schnittgrößen ein Gleichungssystem für die drei unbekannten Größen $\sigma(y)$, ϵ_0 und $\frac{d\psi}{d\varphi}$ bildet. Da ϵ_0 und $\frac{d\psi}{d\varphi}$ nicht von der Querschnittskoordinate y abhängig sind, können sie beim Einsetzen von 19.13 in die Schnittgrößen-Formeln 19.12 vor die Integrale gezogen werden:

$$\begin{aligned} F_N &= E \left[\epsilon_0 A + \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - \epsilon_0 \right) \int_A \frac{y}{\rho+y} dA \right] , \\ M_b &= E \left[\epsilon_0 \int_A y dA + \left(\frac{d\psi}{d\varphi} - \epsilon_0 \right) \int_A \frac{y^2}{\rho+y} dA \right] . \end{aligned} \quad (19.14)$$

Drei Integralausdrücke erscheinen in 19.14: Das Integral $\int_A y dA$ aus der zweiten Gleichung verschwindet, weil es das statische Moment bezüglich des Schwerpunktes ist (vgl. 16.1). Das Integral in der ersten Gleichung liefert in der Regel einen negativen Wert, deshalb setzt man

$$\int_A \frac{y}{\rho+y} dA = -\kappa A \quad (19.15)$$

mit dem dimensionslosen Parameter κ , mit dem sich dann auch das Integral der zweiten Gleichung aufschreiben lässt:

$$\int_A \frac{y^2}{\rho+y} dA = \int_A \left(y - \frac{\rho y}{\rho+y} \right) dA = \int_A y dA - \rho \int_A \frac{y}{\rho+y} dA = \kappa \rho A . \quad (19.16)$$

Die Abkürzungen für die Integrale 19.15 und 19.16 werden in die beiden Formeln 19.14 eingesetzt, aus denen danach der Klammerausdruck $(\frac{d\psi}{d\varphi} - \epsilon_0)$ und ϵ_0 berechnet werden können. Die Ergebnisse werden in die Spannungsformel 19.13 eingesetzt, und man erhält nach etwas mühsamer (aber nicht schwieriger) Rechnung die Formel für die

Spannungsverteilung im Querschnitt des gekrümmten Trägers:

$$\sigma(y) = \frac{F_N}{A} + \frac{M_b}{\rho A} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{y}{\rho+y} \right) \quad \text{mit} \quad \kappa = -\frac{1}{A} \int_A \frac{y}{\rho+y} dA . \quad (19.17)$$

- ⇒ Die Normalkraft führt zu einer konstanten Spannungsverteilung wie beim geraden Träger und könnte (wie dort) gesondert erfasst und mit den Biegespannungen überlagert werden.
- ⇒ Das Biegemoment erzeugt eine nichtlineare Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe. Auch bei reiner Biegung ($F_N = 0$) verläuft die Spannungs-Null-Linie nicht durch die Trägerachse (Schwerpunktachse ist nicht die neutrale Faser).
- ⇒ Für $\rho \rightarrow \infty$ geht 19.17 in die Formel für den geraden Träger über. Aus 19.16 ergibt sich:

$$\kappa \rho^2 A = \int_A \frac{\rho y^2}{\rho+y} dA = \int_A \frac{y^2}{1+\frac{y}{\rho}} dA \quad \Rightarrow \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\kappa \rho^2 A) = \int_A y^2 dA = I_{xx} . \quad (19.18)$$

Beispiel 1:

Für spezielle Querschnittsformen (Rechteck, symmetrisches Trapez, Kreis) eines gekrümmten Trägers sollen die zur Spannungsberechnung erforderlichen κ -Werte in Abhängigkeit von $\frac{e}{\rho}$ berechnet werden. Das Verhältnis $\frac{e}{\rho}$ mit dem Abstand e vom Flächenschwerpunkt zum Innenrand der Querschnittsfläche kann als Maß für die Stärke der Krümmung des Trägers gedeutet werden.

In den Skizzen ist auch jeweils eine Empfehlung angedeutet, wie man das differenziell kleine Flächenelement dA wählen kann, um ein Doppelintegral beim Integrieren über die Querschnittsfläche A zu vermeiden.

Für das *Rechteck* mit dem Flächenelement $dA = b dy$ erhält man ein in geschlossener Form lösbares Integral:

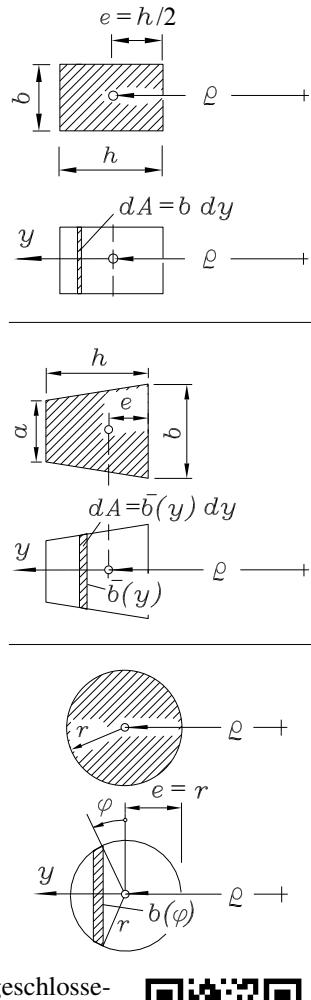
$$\begin{aligned}\kappa &= -\frac{1}{A} \int_A \frac{y}{\rho + y} dA = -\frac{b}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho + y}\right) dy \\ &= \frac{\rho}{h} \ln\left(\frac{1 + \frac{h}{2\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}}\right) - 1 = \frac{\rho}{2e} \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{\rho}}{1 - \frac{e}{\rho}}\right) - 1 .\end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Formel für unterschiedliche Werte von $\frac{e}{\rho}$ findet man in der Tabelle in **Abbildung 19.14**.

Für den Trapezquerschnitt wird zunächst der Abstand e des Flächenschwerpunkts vom Innenrand benötigt, der nach den im Abschnitt 4.2 beschriebenen Regeln berechnet wird:

$$e_{Trapez} = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b} .$$

Auch für das Trapez und den Kreis ergeben sich Integrale, die in geschlossener Form lösbar sind. Allerdings ist man gut beraten, die Unterstützung durch ein symbolisch rechnendes Programm in Anspruch zu nehmen (oder numerisch zu integrieren). Die komplette Rechnung findet man unter www.TM-aktuell.de, die Tabelle in **Abbildung 19.14** zeigt ausgewählte Ergebnisse.



$\frac{e}{\rho} \rightarrow$	0,75	0,5	0,25	0,1	0,05
Rechteck	0,29727	0,098612	0,021651	0,0033535	0,00083460
Trapez	$\frac{a}{b} = 0$	0,38527	0,13119	0,030118	0,0048553
	$\frac{a}{b} = 0,5$	0,34272	0,11476	0,025643	0,0040335
	$\frac{a}{b} = 2$	0,24076	0,079710	0,017280	0,0026436
Kreis	0,20378	0,071797	0,016133	0,0025126	0,00062594

Abbildung 19.14: κ -Werte für Rechteck-, Trapez- und Kreisquerschnitte

Beispiel 2:

Am Beispiel des Kreisquerschnitts soll der Einfluss der Krümmung des Trägers auf die Spannungen im Querschnitt diskutiert werden. Der skizzierte Träger hat in allen Bereichen den gleichen Kreisquerschnitt mit dem Radius r . Die beiden gekrümmten Bereiche zeigen (maßstäblich) Krümmungen, die durch $\frac{e}{\rho_1} = 0,1$ bzw. $\frac{e}{\rho_2} = 0,5$ charakterisiert werden können (für Kreisquerschnitte gilt: $\frac{e}{\rho} = \frac{r}{\rho}$).

Weil der Träger nur durch ein äußeres Moment M_0 belastet ist, wirkt in allen Querschnitten das gleiche Biegemoment $M_b = M_0$ (Normal- und Querkräfte gibt es nicht). Dann kann im *geraden Trägerbereich* die Spannung an den Querschnittsrändern (vgl. Abschnitt 16.3) nach

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = 4 \frac{M_0}{\pi r^3}$$

berechnet werden. In den gekrümmten Trägerteilen gilt 19.17, wobei am Innenrand $y = -r$ und am Außenrand $y = r$ zu setzen ist.

Man errechnet nach 19.17 σ_{bi} für den Innenrand und σ_{ba} für den Außenrand:

$$\sigma_{bi} = \frac{M_b}{\rho A} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{-r}{\rho - r} \right) = \frac{M_0}{\pi r^3} \frac{r}{\rho} \left(1 - \frac{\frac{r}{\rho}}{\kappa \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)} \right) = \frac{M_0}{\pi r^3} s_i \left(\frac{r}{\rho} \right) ,$$

$$\sigma_{ba} = \frac{M_b}{\rho A} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{r}{\rho + r} \right) = \frac{M_0}{\pi r^3} \frac{r}{\rho} \left(1 + \frac{\frac{r}{\rho}}{\kappa \left(1 + \frac{r}{\rho} \right)} \right) = \frac{M_0}{\pi r^3} s_a \left(\frac{r}{\rho} \right) .$$

Die Funktionen s_i und s_a dürfen als Maß für den Einfluss der Krümmung angesehen werden und können mit dem Faktor 4, der für den geraden Träger steht, verglichen werden. Für den Bereich mit schwacher Krümmung erhält man mit

$$s_i(0,1) = -4,32 \quad \text{und} \quad s_a(0,1) = 3,72$$

Werte, die nur wenig ($< 10\%$) von den Werten für den geraden Träger abweichen. Im Bereich starker Krümmung dagegen sind die Abweichungen der Spannungswerte für den gekrümmten Träger deutlich größer:

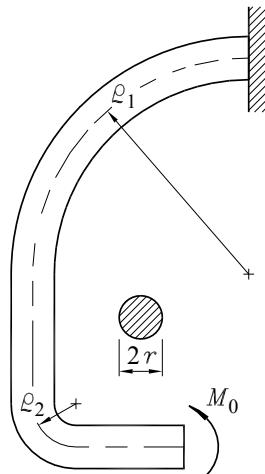
$$s_i(0,5) = -6,46 \quad \text{und} \quad s_a(0,5) = 2,82 .$$

Die an diesem Beispiel gewonnenen Aussagen lassen sich verallgemeinern:

Die absolut größte Spannung tritt bei gekrümmten Trägern am Innenrand auf.

Als Maß für die Krümmung eines Trägers wird das Verhältnis des Abstands e der Innenrandfaser vom Schwerpunkt des Querschnitts zum Krümmungsradius ρ der Trägerachse definiert.

Für *schwach gekrümmte Träger* ($\frac{e}{\rho} \ll 1$) sind die Abweichungen der Maximalspannungen gegenüber der Berechnung mit der Formel für den geraden Träger gering, so dass (natürlich abhängig von den Genauigkeitsforderungen) gegebenenfalls mit dieser einfacheren Formel gerechnet werden kann. Man beachte jedoch, dass man damit nicht „auf der sicheren Seite“ liegt.



Beispiel 3:

Ein Kranhaken mit dem Krümmungsradius R ist ein typischer Vertreter eines (in der Regel sehr hoch belasteten) stark gekrümmten Trägers. Für den zu untersuchenden Bereich des skizzierten Kranhakens gilt: $\frac{\epsilon}{R} = 0,5$.

Es ist zu berechnen, ob ein Kreisquerschnitt oder ein Rechteckquerschnitt mit gleicher Querschnittsfläche (bei gleicher Krümmung $\frac{\epsilon}{R}$) günstiger ist.

Gegeben: $R = 10\text{cm}$; $F = 25\text{kN}$.

Für den Kreisquerschnitt mit $r = e = 5\text{cm}$ und der Querschnittsfläche

$$A_{Kreis} = \pi r^2$$

entnimmt man der Tabelle in der Abbildung 19.14 auf Seite 329:

$$\kappa_{Kreis} = 0,071797 \quad .$$

Für den Rechteckquerschnitt mit $\frac{h}{2} = e = 5\text{cm}$ und damit $h = 10\text{cm}$ errechnet sich die Breite (bei gleicher Querschnittsfläche wie für den Kreis) nach

$$A_{Rechteck} = b h = A_{Kreis} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\pi r^2}{h} = \frac{\pi r}{2} = 7,854\text{cm} \quad .$$

Auch der κ -Wert für das Rechteck wird der Tabelle in der Abbildung 19.14 auf Seite 329 entnommen:

$$\kappa_{Rechteck} = 0,098612 \quad .$$

Die Abbildung 19.15 zeigt die Schnittgrößen im gefährdeten Querschnitt (maximale Normalkraft, maximales Biegemoment). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern:

$$M_b = -FR \quad , \quad F_N = F \quad .$$

Nach 19.17 erhält man die Spannungsverteilung in diesem Querschnitt:

$$\sigma(y) = \frac{F}{A} \left(-\frac{1}{\kappa} \frac{y}{R+y} \right)$$

mit den Maximalwerten an den Rändern bei $y = -\frac{R}{2}$ (Innenrand) bzw. $y = \frac{R}{2}$ (Außenrand). Die folgende Tabelle vergleicht die Spannungen an beiden Rändern für beide Querschnitte:

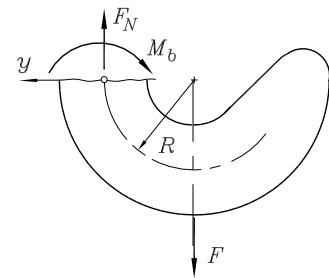
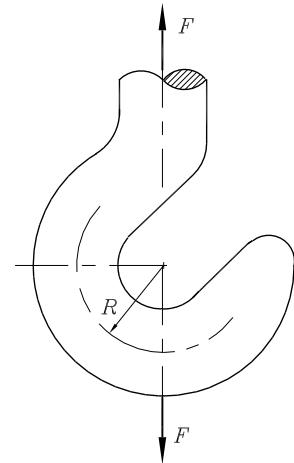


Abbildung 19.15: Schnittgrößen im gefährdeten Querschnitt

	Innenrand	Außenrand
Kreis: $\sigma [\text{N/mm}^2] =$	44,33	-14,78
Rechteck: $\sigma [\text{N/mm}^2] =$	32,28	-10,76

Der Rechteckquerschnitt erweist sich als günstiger als der Kreisquerschnitt. Die Absolutwerte der Spannungen sind am Innenrand wegen der starken Krümmung deutlich größer als am Außenrand.

19.3.3 Verformungen des Kreisbogenträgers

Die Untersuchung der Verformung wird hier auf *Kreisbogenträger* beschränkt. Dann kann

- anstelle des veränderlichen Krümmungsradius ρ des unverformten Trägers der konstante Radius R angenommen werden und
- ein beliebiger Punkt der Trägerachse durch eine Winkelkoordinate φ identifiziert werden.

Die **Abbildung 19.16** zeigt ein aus dem Träger herausgeschnittenes differenziell kleines Element, dessen Krümmungsradius R (des gestrichelt gezeichneten unverformten Elements) sich durch die Verformung auf $\bar{\rho}$ ändert. Dabei wird gleichzeitig aus dem Öffnungswinkel $d\varphi$ der Öffnungswinkel $(d\varphi + d\psi)$ des verformten Elements, wobei das Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli-Hypothese) vorausgesetzt wird.

Die Trägerachse des unverformten Elements

$$ds_0 = R d\varphi$$

dehnt sich bei der Verformung um

$$\varepsilon_0 = \frac{d\bar{s} - ds_0}{ds_0} .$$

Diese Formel wird nach der Länge der verformten Trägerachse

$$d\bar{s} = ds_0 + \varepsilon_0 ds_0 = R d\varphi (1 + \varepsilon_0)$$

umgestellt, die auch durch den Krümmungsradius $\bar{\rho}$ der verformten Trägerachse und den geänderten Öffnungswinkel $(d\varphi + d\psi)$ dargestellt werden kann:

$$d\bar{s} = \bar{\rho} (d\varphi + d\psi) .$$

Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke (und gleichzeitige Division durch $d\varphi$) liefert:

$$R(1 + \varepsilon_0) = \bar{\rho} \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right) .$$

Der Ausdruck $\frac{d\psi}{d\varphi}$ konnte im vorigen Abschnitt aus der zweiten Gleichung von 19.14 unter Einbeziehung von 19.16 ersetzt werden, wobei der dort verwendete Krümmungsradius ρ durch den Radius des Kreisbogenträgers R ersetzt werden muss. Nach einigen elementaren Umformungen erhält man:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{R} = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \frac{M_b}{\kappa R^2 EA} . \quad (19.19)$$

Hierin könnte ε_0 auch noch (wie $\frac{d\psi}{d\varphi}$) ersetzt werden, so dass ein Zusammenhang zwischen $\bar{\rho}$ und den Schnittgrößen entstehen würde. Darauf wird verzichtet, weil für die folgenden Überlegungen ohnehin (wie auch in der Biegetheorie des geraden Trägers, vgl. Abschnitt 17.1) kleine Verformungen vorausgesetzt werden. Dann kann wegen $\varepsilon_0 \ll 1$ der erste Bruch auf der rechten Seite von 19.19 als Faktor weggelassen werden:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{R} = \frac{M_b}{\kappa R^2 EA} . \quad (19.20)$$

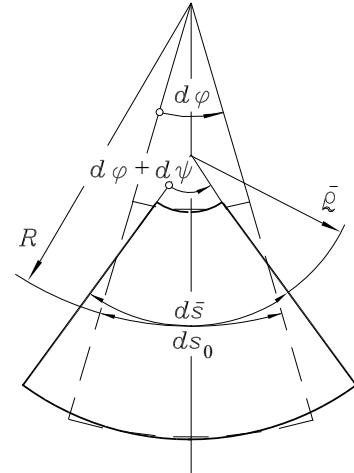


Abbildung 19.16: Unverformtes (gestrichelt gezeichnetes) und verformtes Element des Kreisbogenträgers

Gleichung 19.20 beschreibt die Verformung eines Kreisbogenträgers infolge der Biegebelastung, wobei für eine sinnvolle praktische Handhabbarkeit der Krümmungsradius des verformten Trägers $\bar{\rho}$ noch durch die Verschiebungen der Punkte der Trägerachse ersetzt werden muss.

Die Abbildung 19.17 verdeutlicht, dass (im Gegensatz zum geraden Träger) der Verformungszustand stets durch zwei Verschiebungskomponenten beschrieben werden muss (Punkt A der Trägerachse verschiebt sich nach A'), weil die tangential gerichtete Verschiebung u nicht nur durch die Normalkraft hervorgerufen wird.

Es wird vereinbart,

- die Punkte der Trägerachse des unverformten Kreisbogenträgers durch die Koordinate φ festzulegen,
- die Radialverschiebung v positiv nach außen (zur Bezugsfaserseite wie beim geraden Träger) zu richten und
- die Tangentialverschiebung u positiv in Richtung größer werdender Winkelkoordinate φ anzunehmen.

In 19.20 wird nun $\bar{\rho}$ durch die Verschiebungskomponenten u und v ersetzt. In dem (willkürlich in den Mittelpunkt des unverformten Kreisbogenträgers gelegten) x - y -Koordinatensystem kann die Verformungskurve (Lage des beliebigen Punktes A') aus der Skizze abgelesen werden:

$$x = (R + v) \cos \varphi - u \sin \varphi \quad , \\ y = (R + v) \sin \varphi + u \cos \varphi \quad .$$

Dies kann als Parameterdarstellung der Verformungskurve (Parameter ist die Winkelkoordinate φ) aufgefasst werden, für die die Krümmung (reziproker Krümmungsradius) nach

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{mit} \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} \quad , \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\varphi}$$

aufgeschrieben werden kann. Im Zähler dieses Bruchs und innerhalb der Klammer im Nenner entstehen ausschließlich Produkte aus zwei Größen, die jeweils die Dimension einer Länge haben. Alle Produkte aus Verschiebungen und Verschiebungsableitungen (z. B.: $u^2, v^2, uv, u\dot{v}, \dot{u}v, \dots$) können gegenüber den Produkten aus dem Radius R und den Verschiebungen bzw. Verschiebungsableitungen (z. B.: $Ru, Rv, R\dot{v}, \dots$) vernachlässigt werden, wobei klar wird, in welchem Sinne der Begriff „kleine Verschiebungen“ zu verstehen ist: *Die Verschiebungen müssen klein gegenüber dem Radius des unverformten Kreisbogenträgers sein.* Nach etwas mühsamer (aber nicht schwieriger) Rechnung erhält man mit

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{1}{R} \frac{1 + \frac{1}{R}(2v + 3\dot{u} - \dot{v})}{\left[1 + \frac{2}{R}(v + \dot{u})\right]^{\frac{3}{2}}}$$

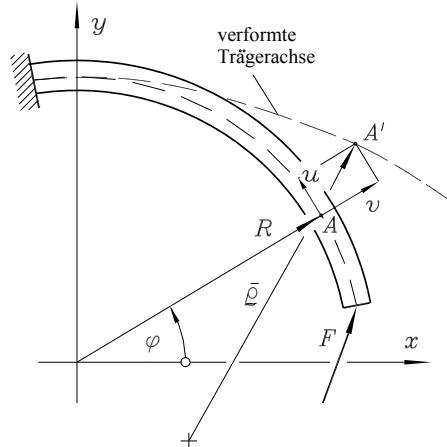


Abbildung 19.17: Radialverschiebung v und Tangentialverschiebung u

einen Ausdruck, der wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Verschiebungen noch weiter zu vereinfachen ist. Da natürlich für den Ausdruck im Nenner

$$\delta = \frac{2}{R}(v + u) \ll 1$$

gilt, kann die Potenzreihenentwicklung des Nenners

$$(1 + \delta)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\delta + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\delta^2 - + \dots$$

nach dem linearen Glied abgebrochen werden, und man erhält über

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \approx \frac{1}{R} \left[1 + \frac{1}{R}(2v + 3u - \ddot{v}) \right] \left[1 - \frac{3}{R}(v + u) \right]$$

durch Ausmultiplizieren bei weiterer Vernachlässigung der oben beschriebenen Verschiebungskomponenten mit

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \approx \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}(v + \ddot{v})$$

einen in den Verschiebungsgrößen linearen Ausdruck für die Krümmung der verformten Trägerachse, der in die Beziehung 19.20 eingesetzt werden kann. Dass in der so entstehenden Differenzialgleichung

$$\ddot{v} + v = -\frac{M_b}{\kappa EA} \quad (19.21)$$

nur die Radialverschiebung v vorkommt, lässt hoffen, wie beim geraden Träger die Verschiebung v unabhängig von der Verschiebung u berechnen zu können. Leider bestätigt sich diese Hoffnung nur für wenige Ausnahmen, weil in der Regel über die Randbedingungen eine Kopplung der Verschiebungskomponenten unvermeidlich wird (vgl. nachfolgendes Beispiel).

Deshalb muss 19.21 noch um die Differenzialgleichung zur Berechnung der Tangentialverschiebung u ergänzt werden. Die Abbildung 19.18 zeigt ein differenziell kleines Element (Länge der unverformten Trägerachse: $Rd\varphi$), dessen Endpunkte A und B nach der Verformung bei A' bzw. B' liegen. Die Trägerachse verlängert sich durch die Radialverschiebung v von $Rd\varphi$ auf $(R + v)d\varphi$ und durch die Tangentialverschiebungen u bzw. $(u + du)$ um du (der Einfluss von dv kann als klein von höherer Ordnung vernachlässigt werden).

Damit kann die Dehnung der Trägerachse aufgeschrieben werden:

$$\varepsilon_0 = \frac{(R + v)d\varphi - R d\varphi + du}{R d\varphi} = \frac{1}{R}(v + u) \quad .$$

Diese Dehnung kann wieder gleichgesetzt werden mit dem ε_0 , das sich aus der zweiten Formel von 19.14 errechnet, und man erhält den gesuchten Zusammenhang von Radialverschiebung und Schnittgrößen. Gemeinsam mit der bereits für die Radialverschiebungen angegebenen Beziehung hat man damit die

Differenzialgleichungen für die Verformungsberechnung des Kreisbogenträgers:

$$\ddot{v} + v = -\frac{M_b}{\kappa EA} \quad , \quad \dot{u} + v = \frac{F_N R + M_b}{EA} \quad . \quad (19.22)$$

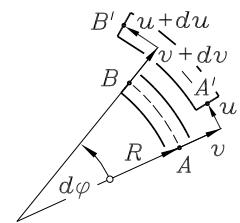


Abbildung 19.18: Verknüpfung der Verschiebungen u und v

- ⇒ In 19.22 gelten für die Winkelkoordinate φ , die Tangentialverschiebung u und die Radialverschiebung v die Definitionen nach Abbildung 19.17 (Seite 333). Die Schnittgrößen müssen der im Abschnitt 19.3.1 (Seite 323) gegebenen Definition entsprechen.
- ⇒ Der dimensionslose Parameter κ (Flächenkennwert für die Querschnittsflächen gekrümmter Träger) ist in der Beziehung 19.17 (Seite 328) definiert worden. Für einige Querschnitte finden sich κ -Werte in der Tabelle des Beispiels 1 (Seite 329).
- ⇒ Es muss zunächst die Differentialgleichung für die Radialverschiebung v gelöst werden, deren allgemeine Lösung danach in die Differentialgleichung für die Tangentialverschiebung eingesetzt wird, die dann (Umstellung nach u) durch einfaches Integrieren gelöst werden kann. Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung und eine Differentialgleichung 1. Ordnung sind insgesamt drei Integrationskonstanten aus drei Randbedingungen zu bestimmen.
- ⇒ Die allgemeine Lösung der *linearen inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung* für die Radialverschiebung setzt sich entsprechend

$$v = v_{hom} + v_{part} \quad (19.23)$$

aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung $\ddot{v} + v = 0$ und einer beliebigen Partikulärlösung zusammen. Für den homogenen Lösungsanteil gilt immer:

$$v_{hom} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi \quad . \quad (19.24)$$

Die Partikulärlösung ist problemabhängig und kann nur bei vorgegebener Funktion für die rechte Seite ermittelt werden, die bei konstantem Querschnitt ausschließlich von der Funktion $M_b(\varphi)$ bestimmt wird. Neben einem konstanten Anteil tauchen dort in der Regel cos- und sin-Funktionen auf. Für die ausgesprochen typische Form der rechten Seite der Differentialgleichung

$$f(\varphi) = a + b \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (19.25)$$

darf als Partikulärlösung immer verwendet werden³:

$$v_{part} = a - \frac{b}{2} \varphi \cos \varphi + \frac{c}{2} \varphi \sin \varphi \quad . \quad (19.26)$$

- ⇒ Bei Trägern mit großem Radius R (im Vergleich mit den Querschnittsabmessungen) kann mit im Allgemeinen vertretbarer Genauigkeitseinbuße die Differentialgleichung für die Radialverschiebung 19.22 unter Benutzung von 19.18 ersetzt werden durch die *Differentialgleichung für den schwach gekrümmten Kreisbogenträger*:

$$\ddot{v} + v = -\frac{M_b R^2}{EI} \quad . \quad (19.27)$$

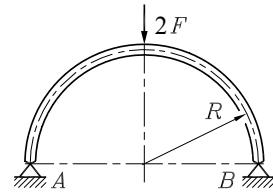
In diesem Fall kann das für gerade Träger benutzte Flächenträgheitsmoment verwendet werden, wodurch eventuell aufwendige κ -Wert-Berechnungen bei komplizierten Querschnitten entfallen.

³Der Leser, der sich in diesem Zweig der Mathematik schon gut auskennt, wird registrieren, dass für die trigonometrischen Funktionen der um den Faktor φ „erweiterte Partikulärlansatz“ verwendet werden muss, weil die Funktionen cos und sin die homogene Differentialgleichung erfüllen. Für alle anderen Leser wird die Internet-Ergänzung zum Thema „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ hilfreich sein, auf die auf Seite 314 verwiesen wird.

Beispiel:

Der skizzierte Kreisbogenträger (Radius R) wird durch zwei Festlager (einfach statisch unbestimmt) gestützt. Er hat einen konstanten Kreisquerschnitt mit dem Radius $r = 0,05R$.

Gegeben: $R = 40\text{cm}$; $F = 10\text{kN}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.



- Es sind die Verformungen des gesamten Trägers, speziell die Absenkung des Lastangriffspunktes, und die Schnittgrößen F_N und M_b am Lastangriffspunkt zu berechnen.
- Welche Abweichungen von den unter a ermittelten Ergebnissen ergeben sich, wenn der Träger als „schwach gekrümmmt“ betrachtet wird?

Wegen der Symmetrie braucht nur eine Hälfte des Trägers (**Abbildung 19.19**) berechnet zu werden. Diese Trägerhälfte wird am Kraftangriffspunkt so gelagert, dass die Symmetriebedingungen (horizontale Tangente, keine Verschiebung in horizontaler Richtung) erfüllt sind.

In die Schnittgrößen geht zwangsläufig (wegen der statisch unbestimmten Lagerung) eine der vier Lagerreaktionen ein. Wenn entschieden wird, die Lagerkraft F_C in den Schnittgrößenverläufen zu behalten, sollte das Moment M_C durch F_C ausgedrückt werden. Momentengleichgewicht um den Punkt A liefert :

$$M_C = F_C R - FR .$$

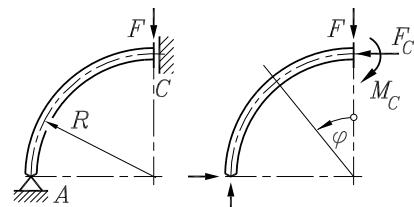


Abbildung 19.19: Symmetrieschnitt

Mit der wie skizziert gewählten Koordinate φ erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen am geschnittenen Träger (Kraft-Gleichgewicht in Richtung der Normalkraft und Momentengleichgewicht um die Schnittstelle, **Abbildung 19.20**):

$$F_N = -F \sin \varphi - F_C \cos \varphi , \quad M_b = -FR(1 - \sin \varphi) + F_C R \cos \varphi .$$

Damit können die Differenzialgleichungen 19.22 aufgeschrieben werden:

$$\ddot{v} + v = \frac{FR}{\kappa EA} \left(1 - \sin \varphi - \frac{F_C}{F} \cos \varphi \right) , \quad \dot{u} + v = -\frac{FR}{EA} .$$

Zunächst muss für die erste Differenzialgleichung eine Partikulärlösung gefunden werden:

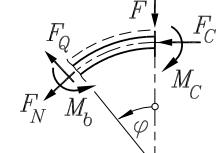


Abbildung 19.20: Schnittgrößen

Ein Vergleich der rechten Seite mit Formel 19.25 zeigt, dass sie genau dieser „typischen Form“ entspricht. Also wird 19.26 an das aktuelle Problem angepasst, und man hat die Partikulärlösung

$$v_{part} = \frac{FR}{\kappa EA} \left(1 + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi - \frac{F_C}{2F} \varphi \sin \varphi \right) ,$$

die gemeinsam mit der Lösung der homogenen Differenzialgleichung 19.24 die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für die Radialverschiebung bildet:

$$v = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{FR}{\kappa EA} \left(1 + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi - \frac{F_C}{2F} \varphi \sin \varphi \right) .$$

Diese wird in die zweite Differenzialgleichung eingesetzt, und eine einfache Integration, die noch eine Integrationskonstante erzeugt, liefert die allgemeine Lösung für die Tangentialverschiebung:

$$u = -\frac{FR}{EA} \varphi - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

$$-\frac{FR}{\kappa EA} \left[\varphi + \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{F_C}{F} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{F_C}{F} \varphi \right) \cos \varphi \right] + C_3 .$$

Die beiden allgemeinen Lösungen enthalten insgesamt drei Integrationskonstanten und die unbekannte Lagerkraft F_C , für deren Bestimmung vier Randbedingungen zur Verfügung stehen:

$$u(\varphi = 0) = 0 , \quad u\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0 , \quad \dot{v}(\varphi = 0) = 0 , \quad v\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Einsetzen der vier Bedingungen in die allgemeinen Lösungen für v und u liefert:

$$C_1 = \frac{FR}{\kappa EA} \left(1 - \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{\pi} - \kappa \frac{\pi}{2} \right) , \quad C_2 = -\frac{FR}{2 \kappa EA} , \quad C_3 = \frac{FR}{\kappa EA} , \quad F_C = \frac{2}{\pi} F .$$

a) Damit können die Verschiebungsfunktionen aufgeschrieben werden:

$$v = \frac{FR}{\kappa EA} \left[1 + \left(1 - \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{\pi} - \kappa \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \varphi \right) \cos \varphi - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \varphi \right) \sin \varphi \right] ,$$

$$u = -\frac{FR}{\kappa EA} \left[(1 + \kappa) \varphi - 1 + \left(1 - \frac{3}{4} \pi - \kappa \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \varphi \right) \sin \varphi + \left(1 + \frac{1}{\pi} \varphi \right) \cos \varphi \right] .$$

Hierin ist $A = \pi r^2$ die Querschnittsfläche des Trägers, und aus der Tabelle auf Seite 329 kann $\kappa = 0,00062594$ für $\frac{r}{R} = 0,05$ entnommen werden. Für die Absenkung des Kraftangriffspunktes errechnet man mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$v_F = v(\varphi = 0) = \frac{FR}{\kappa EA} \left(2 - \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{\pi} - \kappa \frac{\pi}{2} \right) = -0,9419 \text{ mm} .$$

Die Schnittgrößen an der Kraftangriffsstelle müssen mit den dort wirkenden Lagerreaktionen des „Symmetrieschnitt-Lagers“ im Gleichgewicht sein:

$$F_N(\varphi = 0) = -F_C = -\frac{2}{\pi} F = -6,366 \text{ kN} ;$$

$$M_b(\varphi = 0) = M_C = F_C R - FR = \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) FR = -1,454 \text{ kNm} .$$

b) Die Rechnung nach der Differenzialgleichung für den schwach gekrümmten Träger 19.27 unterscheidet sich nur in dem Faktor für das Biegemoment in der Differenzialgleichung für die Radialverschiebung. Dieser (bei diesem Beispiel konstante) Faktor bleibt während der gesamten Rechnung erhalten, so dass nur in den berechneten Funktionen κ durch $\frac{I}{AR^2}$ mit $I = \frac{\pi r^4}{4}$ ersetzt werden muss:

$$\kappa \Rightarrow \frac{I}{AR^2} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2 R^2} = \frac{r^2}{4R^2} = 0,000625 .$$

Der Unterschied ist minimal: Die unter Voraussetzung schwacher Krümmung berechnete Verschiebung unter der Kraft vergrößert sich bei diesem Träger nur auf $v_F = -0,9426 \text{ mm}$ (Abweichung < 0,1%). Wenn also der κ -Wert für den Querschnitt nicht ohnehin zur Verfügung steht, ist für schwach gekrümmte Träger eine aufwendige κ -Berechnung nicht gerechtfertigt, zumal sich für die Schnittgrößen überhaupt keine Unterschiede ergeben.

19.3.4 Numerische Berechnung der Verformungen

Das relativ einfache Beispiel des vorigen Abschnitts zeigte, dass die (bei statisch unbestimmten Problemen unumgängliche) Verformungsberechnung für gekrümmte Träger recht aufwendig werden kann. Da die Verformungen durch ein lineares Randwertproblem beschrieben werden, ist es naheliegend, dies mit dem im Abschnitt 18.1 behandelten Differenzenverfahren zu lösen.

Mit den zentralen Differenzenformeln 18.1, mit denen in den Differentialgleichungen 19.22 die Ableitungen näherungsweise ersetzt werden, entstehen die

Differenzengleichungen für die Verformungsberechnung des Kreisbogenträgers:

$$\begin{aligned} v_{i-1} + (h^2 - 2)v_i + v_{i+1} &= -h^2 \frac{M_{bi}}{\kappa_i E A_i}, \\ -u_{i-1} + u_{i+1} + 2hv_i &= 2h \frac{F_{Ni}R + M_{bi}}{E A_i}. \end{aligned} \quad (19.28)$$

- ⇒ Da mit den Differenzenquotienten Ableitungen nach der Winkelkoordinate φ ersetzt wurden, ist die Schrittweite h in 19.28 ebenfalls ein Winkel.
- ⇒ Weil sowohl die Näherungsformel für die zweite Ableitung (in der ersten Differenzengleichung) als auch die Näherungsformel für die erste Ableitung (in der zweiten Differenzengleichung) jeweils zwei Nachbarpunkte einbeziehen, würden an beiden Trägerrändern je zwei Verschiebungen (u und v) für Außenpunkte in die Rechnung hineinkommen. Da für diese vier zusätzlichen Unbekannten (bei statisch bestimmten Aufgaben) nur drei Randbedingungen als zusätzliche Gleichungen formuliert werden können, würde sich in jedem Fall ein Defizit von einer Gleichung zur Anzahl der Unbekannten ergeben.

Von den verschiedenen Möglichkeiten, dieses Defizit zu beheben, (z. B.: Arbeiten mit vorwärts bzw. rückwärts genommenen Differenzenformeln in Randnähe), wird folgende Variante empfohlen: Die Differenzengleichungen für die Tangentialverschiebungen werden nur für jeden zweiten Punkt und nur für die Innenpunkte (nicht für die Randpunkte) formuliert (**Abbildung 19.21**).

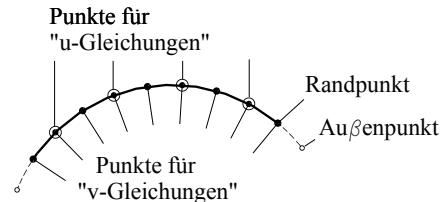


Abbildung 19.21: Unterschiedliche Strategien für die Verschiebungen u und v

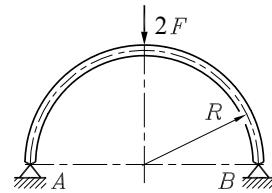
Dann gehen als unbekannte u -Werte gerade die Tangentialverschiebungen an den Punkten ein, für die keine „ u -Gleichungen“ formuliert werden (die Differenzenformel bezieht sich nur auf die Nachbarpunkte), aber u. a. auch die Werte der Randpunkte, für die gegebenenfalls Randbedingungen aufgeschrieben werden müssen.

Diese Strategie ist gerechtfertigt, weil die Änderung der Tangentialverschiebung u im Allgemeinen deutlich geringer ist als die Änderung der Radialverschiebung v , so dass ein größeres Raster für die Approximation der Ableitungen von u ausreichend ist. Die Koeffizientenmatrix des entstehenden linearen Gleichungssystems ist besonders dünn mit von Null verschiedenen Elementen besetzt, weil in jeder Gleichung nur 3 unbekannte Verschiebungen auftauchen.

Beispiel:

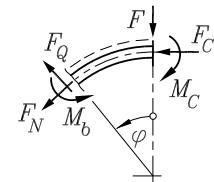
Die Berechnung der Verformungen mit dem Differenzenverfahren wird an dem bereits im Abschnitt 19.3.3 (Seite 336) exakt gelösten (statisch unbestimmt gelagerten) Halbkreisbögen mit konstantem Kreisquerschnitt mit dem Radius $r = 0,05R$ demonstriert.

Gegeben: $R = 40\text{cm}$; $F = 10\text{kN}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.



Wie bei der exakten Lösung im vorigen Abschnitt wird nur eine Symmetriehälfte betrachtet (**Abbildung 19.19** auf Seite 336), für die die benötigten Schnittgrößen in Abhängigkeit von der unbekannten Lagerkraft F_C formuliert werden (nebenstehende Skizze):

$$\begin{aligned} F_N &= -F \sin \varphi - F_C \cos \varphi , \\ M_b &= -FR(1 - \sin \varphi) + F_C R \cos \varphi . \end{aligned}$$



Der Viertelkreis wird in $n_A = 80$ Abschnitte unterteilt, so dass sich die Schrittweite

$$h = \frac{\pi}{160}$$

ergibt. Die Punkte (einschließlich der beiden Außenpunkte) werden von 1 bis 83 nummeriert (**Abbildung 19.22**).

Für die Punkte 2 bis 82 werden die „v-Gleichungen“ formuliert (81 Gleichungen), wobei neben den Verschiebungen auch die Unbekannte F_C auf die linke Seite geschrieben wird:

$$v_{i-1} + (h^2 - 2)v_i + v_{i+1} + \frac{F_C R}{\kappa EA} h^2 \cos \varphi_i = \frac{FR}{\kappa EA} h^2 (1 - \sin \varphi_i) , \quad i = 2, 3, 4, \dots, 82 .$$

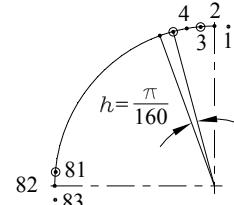


Abbildung 19.22: Diskretisierung: $n_A = 80$

Für die in der **Abbildung 19.22** besonders hervorgehobenen Punkte 3, 5, ..., 81 werden die „u-Gleichungen“ aufgeschrieben (40 Gleichungen):

$$-u_{i-1} + u_{i+1} + 2hv_i = -2h \frac{FR}{EA} , \quad i = 3, 5, 7, \dots, 81 .$$

Schließlich sind noch die Randbedingungen zu ergänzen (4 Gleichungen):

$$\begin{aligned} v'_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad -v_1 + v_3 = 0 \quad (\text{horizontale Tangente im Symmetrieschnitt}), \\ u_2 &= 0 , \quad u_{82} = 0 , \quad v_{82} = 0 . \end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 125 Gleichungen für die 125 Unbekannten

$$\begin{aligned} F_C &\quad (\text{1 Wert}) ; \\ v_1, v_2, v_3, \dots, v_{83} &\quad (\text{83 Werte}) ; \\ u_2, u_4, u_6, \dots, u_{82} &\quad (\text{41 Werte}) . \end{aligned}$$

Der Wert für den Parameter $\kappa = 0,00062594$ für $\frac{r}{R} = 0,05$ wird der Tabelle auf Seite 329 entnommen. Der Zusammenhang zwischen dem Winkel φ_i und der Nummerierung der Punkte kann so formuliert werden:

$$\varphi_i = (i-2) \frac{\pi}{160} .$$

Unter www.TM-aktuell.de findet man ein Matlab-Script, mit dem das Gleichungssystem aufgebaut und gelöst wird. Es kann mit unterschiedlich feiner Diskretisierung (Anzahl der Abschnitte n_A) arbeiten.

Die Abbildung 19.23 zeigt die Matlab-Grafik, in der die Verformungen des Halbkreises (stark vergrößert) dargestellt sind.

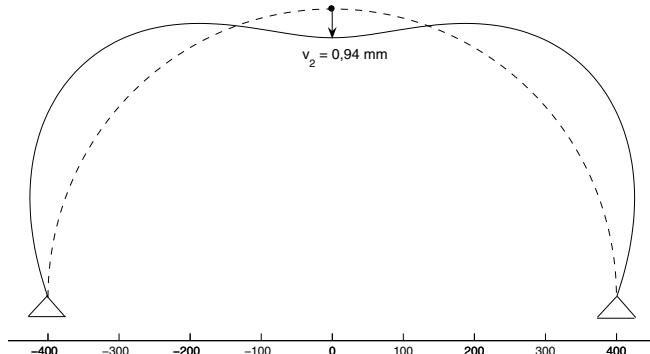


Abbildung 19.23: Verformung, stark vergrößert

In der Tabelle in Abbildung 19.24 sind einige Ergebnisse für v_2 (Absenkung des Lastangriffspunktes), F_C und M_C im Vergleich mit der exakten Lösung zusammengestellt. Ein Vergleich mit einer exakten Lösung ist aber nur in Ausnahmefällen möglich. Hier gibt es noch die Chance einer



Kontrollrechnung mit der Finite-Elemente-Methode:

Auch wenn im Abschnitt 18.2.4 nur gerade biege- und dehnsteife Trägerelemente behandelt wurden, kann man ein FEM-Modell, das aus solchen Elementen zusammengesetzt ist, durchaus als Kontrolle für die hier durchgeführte Rechnung heranziehen. Der Kreisbogen wird dafür durch ein Polygon ersetzt, das bei einer genügenden Anzahl von Elementen das Verhalten eines gekrümmten Trägers ausreichend genau annähern kann.

Über www.TM-aktuell.de erreicht man das Matlab-Interface zum „Finite-Elemente-Baukasten Femset“, mit dem der interessierte Benutzer FEM-Modelle in Matlab beschreiben und berechnen lassen kann. Ein FEM-Modell aus Rahmenelementen mit Knoten, die alle auf einem Kreis liegen, ist damit ohne nennenswerten Aufwand zu erzeugen. Unter www.TM-aktuell.de findet man auch ein Matlab-Script für die hier behandelte Aufgabe. In der Tabelle in Abbildung 19.24 sieht man die Ergebnisse von zwei Kontrollrechnungen.



Fazit: Das Differenzenverfahren liefert fast exakte Ergebnisse schon bei $n_A = 80$. Eine FEM-Rechnung mit 80 Elementen steht dem kaum nach, obwohl ein ganz anderes Modell (Polygon aus geraden Trägern) berechnet wurde. In beiden Fällen erübrigts sich eine genauere Rechnung.

	Exakt	Differenzenverfahren		FEM-Rechnung	
		$n_A = 80$	$n_A = 160$	80 Elemente	160 Elemente
v_F [mm] =	-0,9419	-0,9420	-0,9414	-0,9450	-0,9451
F_C [kN] =	6,366	6,367	6,366	6,359	6,358
M_C [kNm] =	-1,454	-1,453	-1,453	-1,457	-1,457

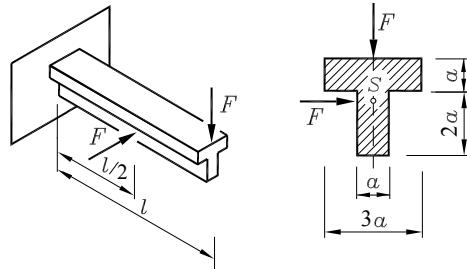
Abbildung 19.24: Die sicherste Variante zur Bestätigung der Ergebnisse: Berechnung nach verschiedenen Verfahren mit unterschiedlichen Software-Produkten

19.4 Aufgaben

Aufgabe 19.1:

Der skizzierte Kragträger mit T-förmigem Querschnitt ist durch zwei Einzelkräfte belastet. Man ermittle Ort und Größe der maximalen Biegespannung.

Gegeben: F , l , a .

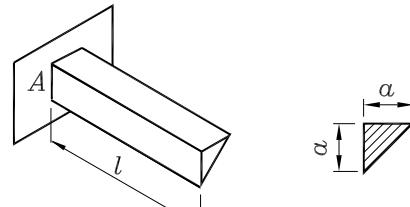

Aufgabe 19.2:

Ein Biegeträger mit Dreiecksquerschnitt (rechteckiges gleichschenkliges Dreieck) ist bei A starr eingespannt und nur durch sein Eigengewicht (Dichte ρ) belastet.

Gegeben: $l = 80 \text{ cm}$; $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$;
 $a = 2 \text{ cm}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

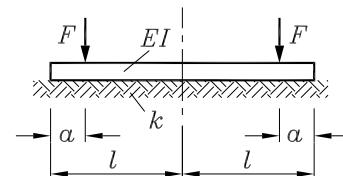
Man ermittle

- die Biegespannungen an den drei Eckpunkten des Einspannquerschnitts,
- die Lage der Spannungs-Null-Linie,
- Größe und Richtung der Gesamtverschiebung des freien Trägerendes.


Aufgabe 19.3:

Die auf elastischem Untergrund liegenden Schwellen eines Schienenweges werden wie skizziert über die Schienen durch zwei Kräfte F belastet.

Gegeben: F , $EI = \text{konstant}$, l , $a = \frac{l}{4}$, $\frac{kl^4}{EI} = 2$.



- Für die exakte Lösung müsste unter Ausnutzung der Symmetrie die allgemeine Lösung 19.6 der Differenzialgleichung für zwei Bereiche (mit 8 Integrationskonstanten) aufgeschrieben werden. Die erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen für die Berechnung der Integrationskonstanten sind zu formulieren.
- Mit Hilfe des Differenzenverfahrens sind die Verformung und der Biegemomentenverlauf zu ermitteln.
- Die unter b ermittelten Ergebnisse sind durch eine FEM-Rechnung mit einem geeigneten Programm zu bestätigen (siehe www.TM-interaktiv.de).

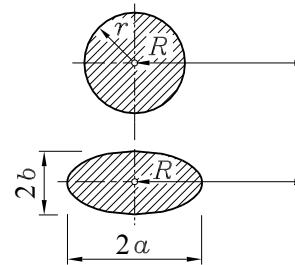


Aufgabe 19.4:

Die Ermittlung der größten Beanspruchung in einem Kranhaken (Beispiel 3 im Abschnitt 19.3.2 auf Seite 331) zeigte, dass ein Rechteckquerschnitt günstiger als ein Kreisquerschnitt (bei gleicher Querschnittsfläche) ist. Es ist zu untersuchen, ob auch die Verwendung eines elliptischen Querschnitts anstelle eines Kreisquerschnittes zu einer geringeren Maximalspannung führt, wenn die Querschnittsflächen gleich sind (gleicher Materialeinsatz) und der Krümmungsradius R beibehalten wird.

Gegeben: R , $r = 0,5R$.

- Man ermittle die κ -Werte für einen elliptischen Querschnitt nach der Formel 19.17 mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms (vgl. www.TM-aktuell.de) für unterschiedliche Werte $\frac{a}{R}$.
- Man berechne das Verhältnis der betragsmäßig größten Biegespannung bei elliptischen Querschnitten zu der betragsmäßig größten Biegespannung bei einem Kreisquerschnitt mit dem gleichen Flächeninhalt für verschiedene Formen der Ellipse ($\frac{a}{b} = 2 ; 1,5 ; 0,5$).

**Aufgabe 19.5:**

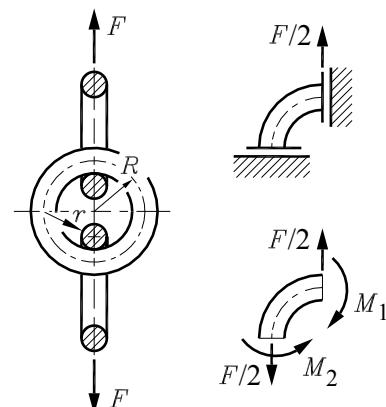
Eine Kette besteht wie skizziert aus kreisringförmigen Gliedern. Wegen der doppelten Symmetrie braucht für die Verformungs- und Spannungsrechnung nur ein Viertel eines Gliedes betrachtet zu werden.

Die Skizze oben rechts zeigt ein Viertel eines Kettengliedes mit der halben Belastung und den beiden Lägern, die die in Symmetrieschnitten möglichen Verschiebungen zulassen. In die Skizze unten rechts sind die in den Symmetrieschnitten wirkenden Kräfte und Momente eingezeichnet. Da die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen bereits erfüllt sind, bleibt bei zwei unbekannten Momenten nur eine Gleichgewichtsbedingung: Das Problem ist einfach statisch unbestimmt.

Gegeben: F ; R ; $\frac{r}{R} = 0,25$; E .

Man berechne mit dem Differenzenverfahren

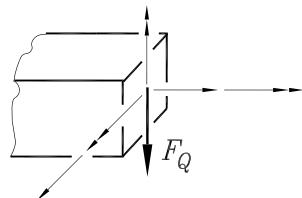
- die Verformungen eines Kettengliedes infolge der Kraft F ,
- den Biegemomentenverlauf und Ort und Größe des absolut größten Biegemoments.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

20 Querkraftschub

Die Querkraft F_Q ist senkrecht zur Trägerlängsachse gerichtet. Die in der Querschnittsfläche liegende Kraft ist die Resultierende der Schubspannungen, die in dieser Fläche wirken.



20.1 Ermittlung der Schubspannungen

Für die Berechnung der Spannungen, die der Querkraft äquivalent sind, werden folgende Annahmen getroffen:

- ⇒ Die Querkraft wirkt in Richtung einer Hauptzentralachse des Querschnitts.
- ⇒ Es werden nur die Schubspannungskomponenten betrachtet, die **einer** Querkraft äquivalent sind (gegebenenfalls muss eine zweite Rechnung mit der anderen Querkraft des Querschnitts ausgeführt werden).
- ⇒ Die Schubspannungen, die durch die Querkraft hervorgerufen werden, sind wie die Biegespannungen σ_b über die Querschnittsbreite konstant. Da diese Bedingung im Allgemeinen nicht exakt erfüllt ist, werden im Folgenden stets die Mittelwerte der Schubspannung über die Querschnittsbreite berechnet.

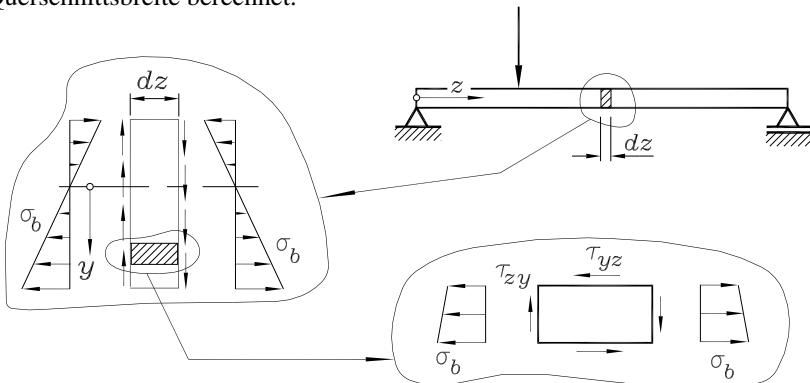


Abbildung 20.1: Normal- und Schubspannungen am differenziell kleinen Element

An einem differenziell kleinen Element der Länge dz , das aus dem Träger herausgeschnitten wird (**Abbildung 20.1**), wirken die Schnittgrößen M_b und F_Q . Die durch M_b hervorgerufenen Biegespannungen sind über die Höhe (in y -Richtung) linear veränderlich, die Art der Veränderlichkeit der Schubspannungen τ_{zy} ist zunächst nicht bekannt (Hinweis zu den Indizes von τ : Der erste

Index kennzeichnet die Schnittfläche durch die Koordinate, die senkrecht zur Fläche gerichtet ist, der zweite Index bestimmt die Richtung der Schubspannung).

In der **Abbildung 20.1** sieht man, dass aus dem differenziell kleinen Element der Länge dz in vertikaler Richtung noch einmal ein Element mit der Höhe dy herausgeschnitten wird (**Abbildung 20.2**). Die Spannungen an den Schnittflächen $b dy$ können zu Kräften zusammengefasst werden (b ist die Breite des Trägers).

Es ist erkennbar, dass an dem Element $dz \cdot dy$ das Momentengleichgewicht (z. B. um den Mittelpunkt) nur erfüllt sein kann, wenn auch in den horizontalen Schnittflächen Schubspannungen wirken, die nach der getroffenen Vereinbarung mit τ_{yz} bezeichnet werden. Die Momentwirkungen der Normalspannungen heben sich (bis auf Anteile, die von höherer Ordnung klein sind) auf, und man erhält für das Momentengleichgewicht um den Mittelpunkt des Elements:

$$\tau_{yz} b dz dy = \tau_{zy} b dy dz .$$

Alle Abmessungen fallen aus dieser Beziehung heraus, und man erhält als allgemeingültige Aussage das

Gesetz der zugeordneten Schubspannungen:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} . \quad (20.1)$$

Die Schubspannungen in zwei senkrecht aufeinander stehenden Schnittflächen sind gleich groß (und entweder beide zur gemeinsamen Kante dieser Schnittflächen gerichtet oder beide von der Kante weggerichtet).

Dass Schubspannungen auch in den Längsschnitten eines Biegeträgers auftreten, lässt sich recht gut veranschaulichen (**Abbildung 20.3**): Werden zwei übereinander liegende Träger auf Biegung belastet, so verschieben sie sich gegeneinander. Wenn sie verbunden werden (Schweißen, Kleben, Nieten,), so wird diese Verschiebung durch die in der Verbindung hervorgerufene Schubspannungen verhindert.

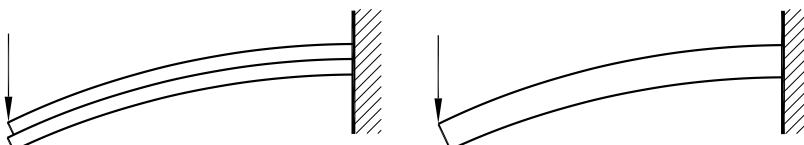


Abbildung 20.3: Im kompakten Träger (rechts) verhindern Schubspannungen das Abscheren der Schichten

Es soll nun die Schubspannung an einer beliebigen Stelle y des Querschnitts bei z berechnet werden (die Indizes für die Schubspannung werden jetzt weggelassen, weil ohnehin für die beiden betrachteten Schnitte die gleichen Werte gelten). Dazu wird eine differenziell kleine Scheibe des Trägers (Dicke dz) noch einmal in der Höhe y zerschnitten, so dass sie in zwei Teile zerfällt (**Abbildung 20.4**).

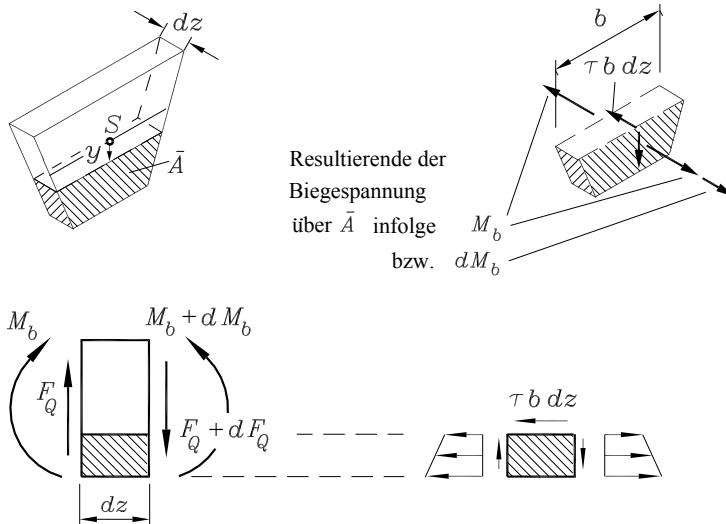


Abbildung 20.4: Berechnen der Schubspannungen in Abhängigkeit von y

Am unteren Teil wirken in horizontaler Richtung (z -Richtung) die Biegespannungen der anteiligen Fläche \bar{A} und die Schubspannungen der Fläche $b dz$. Die Biegespannungen werden am linken Schnittufer durch das Moment M_b , am rechten Schnittufer durch $(M_b + dM_b)$ hervorgerufen. Die Spannungen infolge M_b heben sich gegenseitig auf, so dass das Gleichgewicht in z -Richtung durch die Resultierende der Schubspannungen $\tau b dz$ und die Resultierende aus den Normalspannungen infolge dM_b hergestellt werden muss.

Die Spannung infolge dM_b an einer beliebigen Stelle \bar{y} innerhalb \bar{A} errechnet sich nach der Biegespannungsformel 16.3, wobei M_b durch dM_b ersetzt werden muss. Der Querstrich bei \bar{y} wird verwendet, weil y bereits vergeben ist für die Kennzeichnung des horizontalen Schnitts (y und \bar{y} zählen beide vom Schwerpunkt der Gesamt-Querschnittsfläche positiv nach unten). Die Integration dieser Biegespannungen $\frac{dM_b}{I_{xx}} \bar{y}$ über die Fläche \bar{A} liefert die resultierende Kraft, die der Schubspannung im horizontalen Schnitt das Gleichgewicht hält:

$$\tau b dz = \int_{\bar{A}} \frac{dM_b}{I_{xx}} \bar{y} d\bar{A} = \frac{dM_b}{I_{xx}} \int_{\bar{A}} \bar{y} d\bar{A} .$$

Das Integral

$$S_x = \int_{\bar{A}} \bar{y} d\bar{A}$$

ist das aus dem Abschnitt 4.2 als Formel 4.8 bekannte statische Moment der Fläche \bar{A} , das sich hier auf die durch den Schwerpunkt der Gesamt-Querschnittsfläche verlaufende x -Achse (senkrecht zur y -Achse) bezieht. Damit wird aus der Gleichgewichtsbedingung in z -Richtung (nach Division durch $b dz$):

$$\tau = \frac{dM_b}{dz} \frac{S_x}{b I_{xx}} ,$$

und mit $\frac{dM_b}{dz} = F_Q$ (vgl. Abschnitt 7.2) ergibt sich die Formel für die Berechnung der

Schubspannung infolge Querkraftbelastung: $\tau = \frac{F_Q S_x}{b I_{xx}} \quad . \quad (20.2)$

- $F_Q(z)$ ist die Querkraft in der Schnittfläche bei z und I_{xx} das Flächenträgheitsmoment dieser Fläche bezüglich der durch den Flächenschwerpunkt (senkrecht zur F_Q -Richtung) verlaufenden Hauptzentralachse x (Biegeachse).
- Die Breite des Querschnitts $b(y)$ darf veränderlich sein. Die y -Achse beginnt im Schwerpunkt der Querschnittsfläche und steht senkrecht auf der x -Achse.
- $S_x(y)$ ist das statische Moment einer *Teilquerschnittsfläche*, die durch die Parallele zur x -Achse bei y vom Gesamtquerschnitt abgetrennt wird. $S_x(y)$ bezieht sich auf die *Schwerpunktachse des Gesamtquerschnitts* (x -Achse).

⇒ Wenn die Lage des Schwerpunkts einer der beiden Teilquerschnittsflächen bekannt ist, kann $S_x(y)$ vereinfacht nach

$$S_x = \bar{A}_1 a_1 = \bar{A}_2 a_2$$

berechnet werden (a_1 und a_2 sind die Abstände der Schwerpunkte der Teilflächen \bar{A}_1 bzw. \bar{A}_2 vom Schwerpunkt der Gesamtfläche, Abbildung 20.5).

- Die Querschnittskennwerte (S_x , b , I_{xx}) sind positiv in die Schubspannungsformel 20.2 einzusetzen, die Richtung der Schubspannungen wird ausschließlich durch das Vorzeichen der Querkraft F_Q bestimmt.
- Die für einen y -Wert des Querschnitts errechnete Schubspannung gilt jeweils auch für einen Längsschnitt des Trägers (Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen).

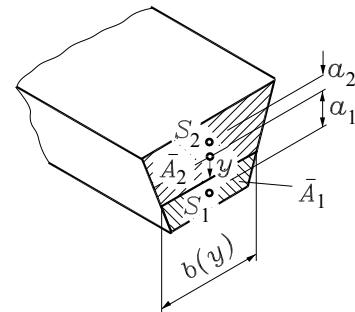


Abbildung 20.5: Vereinfachte Berechnung des statischen Moments S_x

Beispiel 1: Der skizzierte Kragträger mit Rechteckquerschnitt wird durch die Kraft F belastet. Dann wirkt in allen Querschnitten die Querkraft

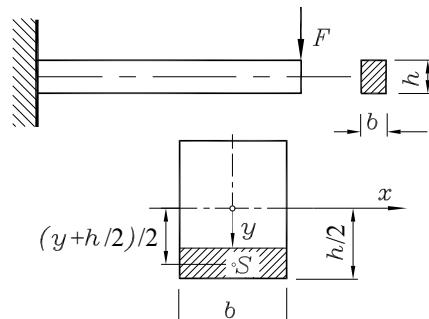
$$F_Q = F \quad .$$

Die Breite b des Querschnitts ist konstant, und für das Flächenträgheitsmoment des gesamten Rechteckquerschnitts gilt nach der Tabelle im Abschnitt 16.2.2:

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \quad .$$

Das statische Moment des schraffierten Teilrechtecks bezüglich der x -Achse errechnet sich aus dem Produkt „Teilfläche · Schwerpunktkoordinate der Teilfläche“:

$$S_x(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{y + \frac{h}{2}}{2} = \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{b}{2} \quad .$$



Damit erhält man die Schubspannungsverteilung über die Höhe des Rechteckquerschnitts:

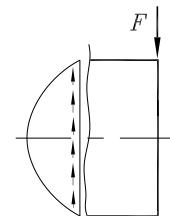
$$\tau(y) = \frac{3}{2} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \frac{F}{bh} .$$

Der quadratische Verlauf (nebenstehende Skizze) hat die Randwerte

$$\tau\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0$$

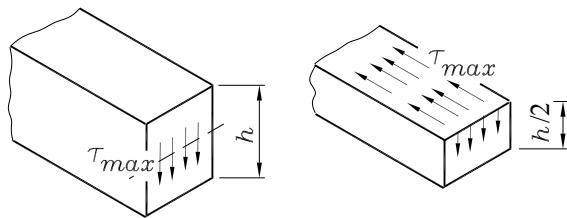
und den Maximalwert in der Schwerpunktfaser:

$$\tau_{max} = \tau(y=0) = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} .$$



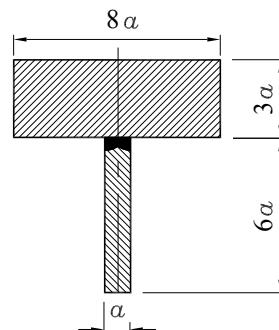
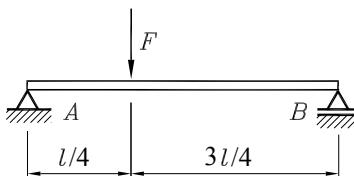
Diese Schubspannung wirkt nach dem Gesetz der zugeordneten Schubspannungen auch in einem Horizontalschnitt des Trägers (**Abbildung 20.6**). Sie muss besonders dann beachtet werden, wenn dieser Längsschnitt z. B. eine Kleb-, Schweiß- oder Nietverbindung ist.

Abbildung 20.6: Schubspannungen in Biegeträgern sind eigentlich nur dadurch gefährlich, weil sie auch in Längsschnitten wirken



Falls ein Balken aus mehreren Teilen zusammengesetzt wird, sollte die Fuge nicht in Höhe des Gesamtschwerpunktes der zusammengesetzten Fläche gelegt werden.

Beispiel 2:



Gegeben: F, l, a .

Ein T-Träger wurde aus zwei Rechteckprofilen so zusammengeschweißt, dass die Naht eine Verbindung über die gesamte Stegbreite a herstellt. Für die in der Skizze angegebene Lagerung und Belastung ist die größte Schubspannung in der Schweißnaht zu ermitteln.

Mit den Lagerreaktionen

$$F_A = \frac{3}{4} F \quad \text{und} \quad F_B = \frac{1}{4} F$$

ergibt sich der nebenstehend skizzierte Querkraftverlauf mit der maximalen Querkraft

$$F_{Q,max} = \frac{3}{4} F .$$

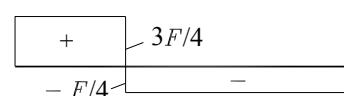


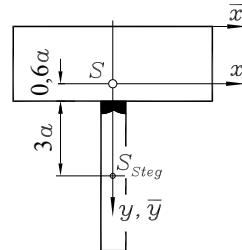
Abbildung 20.7: Querkraftverlauf

Nach dem im Abschnitt 16.2.6 beschriebenen Algorithmus werden Schwerpunkt (bezogen auf das nebenstehend skizzierte \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem) und Flächenträgheitsmoment der Gesamtfläche (bezogen auf das x - y -Koordinatensystem) berechnet:

$$\bar{y}_S = 2,4a \quad ; \quad I_{xx} = 133,2a^4 \quad .$$

Die Schweißnaht liegt also im Abstand

$$y = 0,6a$$



vom Schwerpunkt der Gesamtfläche, und das in die Formel 20.2 eingehende statische Moment der Teilfläche kann entweder für den Flansch oder den Steg (jeweils bezogen auf die x -Achse) berechnet werden. Für den Steg ergibt sich z. B. folgende Rechnung:

$$S_x(y = 0,6a) = 6a^2(0,6a + 3a) = 21,6a^3 \quad .$$

Mit den ermittelten Querschnittswerten, der maximalen Querkraft und der Breite $b = a$ an der Nahtstelle erhält man die maximale Schubspannung in der Schweißnaht nach 20.2:

$$\tau_{Naht,max} = 0,1216 \frac{F}{a^2} \quad .$$

Sie tritt im Nahtbereich zwischen dem Lager A und der Kraft F auf.

Die Darstellung des Schubspannungsverlaufs in Abbildung 20.8 über die gesamte Höhe des Querschnitts zeigt den für Rechteckquerschnitte typischen parabolischen Verlauf in beiden Bereichen mit einem relativen Maximum im Schwerpunkt (dort ist das statische Moment der Teilfläche am größten).

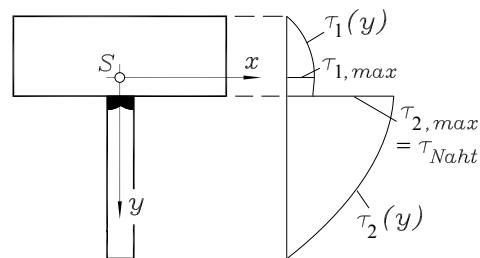


Abbildung 20.8: Schubspannungsverlauf im Querschnitt mit Unstetigkeitsstelle

Der krasse Sprung an der Übergangsstelle (bedingt durch die sich sprunghaft ändernde Breite) gibt Anlass, die Gültigkeit der Voraussetzungen dieser Berechnung noch einmal zu diskutieren, denn speziell die gleichmäßige Verteilung der Schubspannung über die Querschnittsbreite wird im viel breiteren Flansch in der Nähe der Übergangsstelle nicht realistisch sein. Vielmehr gilt:

- ⇒ Genaue Untersuchungen zeigen, dass bei breiten Trägern die Schubspannungen sich nicht gleichmäßig über die Breite verteilen. Sie sind am Rand etwas größer als in der Mitte, nach der Formel 20.2 wird ein über die Breite genommener Mittelwert errechnet. Dies hat im Allgemeinen wenig praktische Bedeutung, da bei breiten Trägern die Schubspannungen natürlich entsprechend klein (und damit meist unbedeutend) sind (vgl. das gerade behandelte Beispiel, bei dem die Schubspannungen nur in dem schmalen Steg bedeutsam sind).
- ⇒ Eine besondere Betrachtung erfordert die so genannten dünnwandigen offenen Profile, bei denen (im Gegensatz zum gerade behandelten Beispiel) die „breiten“ Querschnittsabschnitte eine sehr kleine Höhe haben (z. B. L-, I- und U-Profile). Diese werden deshalb im nächsten Abschnitt gesondert behandelt.

20.2 Dünnwandige offene Profile, Schubmittelpunkt

An dem in **Abbildung 20.9** skizzierten I-Profil wird gezeigt, dass in den Flanschen auch in vertikalen Längsschnitten aus Gleichgewichtsgründen Schubspannungen wirken müssen. Dazu wird ein differenziell kleines Element (Länge dz) betrachtet, an dessen Schnittufern die Biegespannungen σ bzw. $(\sigma + d\sigma)$ wirken (in der Skizze sind die Spannungspfeile nur für die Flansche eingezeichnet, wobei willkürlich angenommen wurde, dass oben eine Druckspannung und unten eine Zugspannung wirkt).

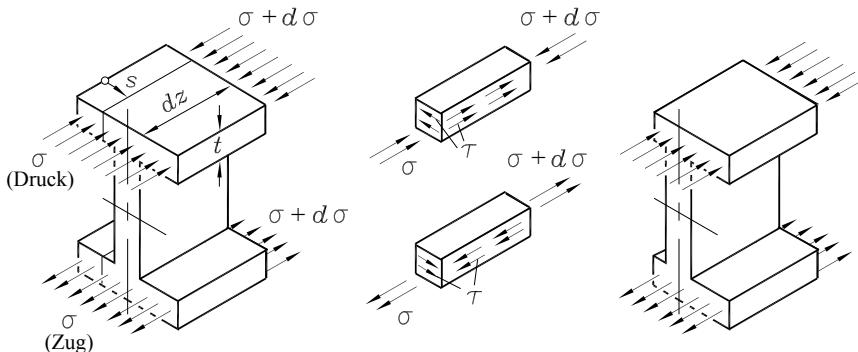


Abbildung 20.9: Auch im vertikalen Schnitt durch einen Flansch wirken Schubspannungen

Wenn Streifen der Flansche von dem Element abgeschnitten werden (**Abbildung 20.9**, rechts), dann wird deutlich, dass in den (vertikalen) Schnitten Schubspannungen wirken müssen, die mit den $d\sigma$ -Anteilen der Biegespannung das Kraft-Gleichgewicht in Träger-Längsrichtung herstellen. Wie bei der Herleitung der Formel 20.2 im vorigen Abschnitt werden diese Biegespannungsanteile $d\sigma = \frac{dM_b}{I_{xx}} y$ über die Fläche $s \cdot t$ integriert und mit der resultierenden Kraft der Schubspannungen in der Fläche $dz \cdot t$ gleichgesetzt.

Wenn konstante Schubspannung über die Flanschdicke t vorausgesetzt wird (bei dünnwandigen Profilen natürlich erlaubt), ergibt sich mit

$$\tau = \frac{F_Q S_x}{t I_{xx}} \quad (20.3)$$

eine Formel, die wie 20.2 aufgebaut ist und mit t die Flanschdicke (anstelle der Querschnittsbreite b) und mit S_x wie die Formel 20.2 das statische Moment der abgeschnittenen Fläche bezüglich der Biegeachse x enthält (**Abbildung 20.10**).

Natürlich wirken Schubspannungen der gleichen Größe (Gesetz der zugeordneten Schubspannungen) auch in den Querschnittsflächen. Da die Schubspannungen an den Rändern des Flansches gleich Null sind, werden sie mit wachsender Koordinate s (und damit größer werdendem statischen Moment der Teilfläche) nach innen größer. Ihre Richtung weist an einem Flansch (abhängig davon, ob die Biegespannung im Flansch Zug oder Druck ist) entweder zum Steg hin

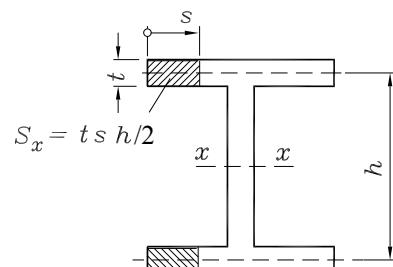


Abbildung 20.10: Statisches Moment für einen Schnitt eines dünnwandigen Profils

oder vom Steg weg, im Steg stimmt die Schubspannungsrichtung mit der Richtung der Querkraft an dem entsprechenden Schnittufer überein.

Die Abbildung 20.11 veranschaulicht, wie die Schubspannungen über die Querschnittsfläche „fließen“, wobei die über bzw. unter den Flanschen und rechts vom Steg angedeuteten Funktionen die Intensität verdeutlichen.

Da in die Formeln 20.2 bzw. 20.3 jeweils das statische Moment der gesamten Teilfläche eingeht, die durch einen Längsschnitt bei y bzw. s abgetrennt wird, ist klar, dass die Summe der am Steg „zusammenfließenden“ Anteile dem Wert am Anschlusspunkt im Steg entspricht. Wegen der vorausgesetzten Dünzwandigkeit sind die an dieser Stelle nicht mit der Herleitung übereinstimmenden Voraussetzungen (im Flanschteil über bzw. unter dem Steg schneidet ein vertikaler Schnitt keine Scheibe des Flansches ab) vernachlässigbar.

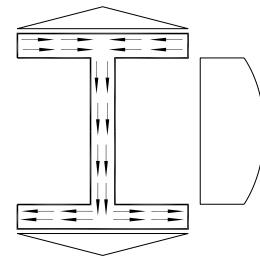


Abbildung 20.11: Schubspannungsfluss

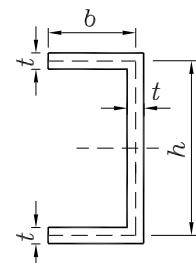
- ⇒ Für *dünzwandige Querschnitte* (im betrachteten Beispiel: t ist klein im Vergleich mit Steghöhe und Flanschbreite) werden nur die Schubspannungen in die Rechnung einbezogen, die parallel zur Profil-Mittellinie gerichtet sind. Für das **I**-Profil bedeutet dies z. B., dass in den Flanschen keine vertikalen Schubspannungen, wie sie sich nach 20.2 durchaus ergeben würden, berücksichtigt werden.
- ⇒ Da nur die durch die Querkraft hervorgerufenen Schubspannungen betrachtet wurden, müssen sie der eingeleiteten Querkraft äquivalent sein. Für das behandelte Beispiel bedeutet das, dass die Resultierende aus der Schubspannung im Steg die Querkraft ist. Die Schubspannungen in den Flanschen bilden beim **I**-Profil ein Gleichgewichtssystem, was leider nicht bei allen Profilformen der Fall ist (vgl. nachfolgendes Beispiel).
- ⇒ Für dünzwandige Profile darf auch das Flächenträgheitsmoment vereinfacht berechnet werden. Für das **I**-Profil werden der Anteil des Stegs und für die Flansche nur die „Steiner-Anteile“ berücksichtigt, weil der t^3 -Faktor die Anteile bezüglich der Flansch-Schwerpunktachsen verschwindend klein macht.

Der Praktiker geht häufig noch einen Schritt weiter und bezieht auch den (speziell bei breiten Flanschen deutlich kleineren) Anteil des Stegs nicht mit ein (und liegt damit auf der sichereren Seite): „Bei **I**-Profilen nehmen die Flansche die Biegung und der Steg die Querkraft auf.“ Eine nennenswerte Erleichterung bei der Rechnung bringt diese weitere Vereinfachung jedoch nicht und wird deshalb im Folgenden nicht verwendet.

Beispiel:

Für das skizzierte dünzwandige Profil ist der Verlauf der Schubspannungen infolge einer vertikal nach unten gerichteten Querkraft zu ermitteln.

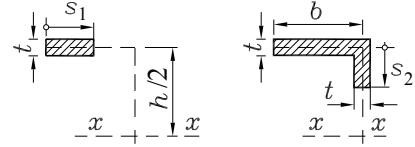
Gegeben: $h, b, t \ll h, b$.



Das Flächenträgheitsmoment der Gesamtfläche wird vereinfacht aufgeschrieben (für die Querriegel werden nur die Steiner-Anteile berücksichtigt):

$$I_{xx} = 2tb \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{th^3}{12} = \frac{th^2}{12} (6b+h) \quad .$$

Es werden die nebenstehend skizzierten Koordinaten s_1 und s_2 verwendet. Die in 20.3 für die beiden Abschnitte eingehenden statischen Momente beziehen sich jeweils auf die Linie $x-x$ und sind für die schraffierten Flächen aufzuschreiben:



$$\begin{aligned} S_{1x} &= ts_1 \frac{h}{2} \quad , \\ S_{2x} &= tb \frac{h}{2} + ts_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) = \frac{t}{2} (bh + hs_2 - s_2^2) \quad . \end{aligned}$$

Damit erhält man die Schubspannungsverläufe in den beiden Abschnitten:

$$\begin{aligned} \tau_1(s_1) &= \frac{F_Q S_{1x}}{t I_{xx}} = \frac{6F_Q}{th(6b+h)} s_1 \quad , \\ \tau_2(s_2) &= \frac{F_Q S_{2x}}{t I_{xx}} = \frac{6F_Q}{th(6b+h)} \left(b + s_2 - \frac{s_2^2}{h} \right) \quad . \end{aligned}$$

Der lineare τ_1 -Verlauf hat sein Maximum an der Ecke:

$$\tau_{1,max} = \frac{6F_Q b}{th(6b+h)} \quad .$$

Mit dem gleichen Wert startet der parabolische τ_2 -Verlauf für den vertikalen Teil, der sein Maximum im Symmetrieschnitt hat:

$$\tau_{2,max} = \frac{3F_Q(4b+h)}{2th(6b+h)} \quad .$$

Im unteren Querriegel ist der Verlauf analog zum oberen Querriegel, allerdings mit entgegengesetzter Richtung, so dass die Schubspannungen keine horizontal gerichtete resultierende Komponente erzeugen (**Abbildung 20.12**).

Die vertikal gerichtete Resultierende der Schubspannungen (hier ausschließlich durch τ_2 repräsentiert) ist die Querkraft F_Q selbst, wovon man sich durch Integration des τ_2 -Verlaufs über die Höhe leicht überzeugen kann.

Die **Abbildung 20.12** verdeutlicht allerdings, dass die Schubspannungen ein Moment um den Schwerpunkt des Querschnitts hervorrufen. Die Wirkungslinie der Querkraft, die diesen Schubspannungen äquivalent ist, kann also nicht durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen.

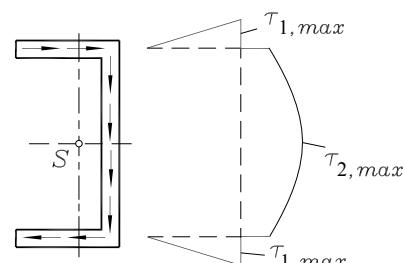


Abbildung 20.12: Die Schubspannungen infolge der Querkraft erzeugen in einem \cup -Profil ein Moment um den Schwerpunkt

Der Punkt des Querschnitts, durch den die Wirkungslinie der Querkraft tatsächlich verläuft, der so genannte *Schubmittelpunkt T*, kann durch eine Äquivalenzbetrachtung ermittelt werden: Das Moment der Querkraft (um einen beliebigen Punkt der Querschnittsebene) muss gleich dem Moment der aus den Schubspannungen resultierenden Kräften sein.

Als Bezugspunkt bietet sich der Punkt *A* an (**Abbildung 20.13**), weil nur die Resultierende der Schubspannungen des unteren Querriegels eine Momentwirkung um diesen Punkt hat. Diese ist für die linear veränderliche τ_1 -Funktion leicht zu ermitteln. Momentwirkungen aus Schubspannungen und Querkraft sind äquivalent, wenn

$$F_Q x_T = \frac{1}{2} \tau_{1,max} b t h = \frac{3 F_Q b^2}{6b + h}$$

gilt. Daraus errechnet sich der Abstand des Schubmittelpunkts *T* von der vertikalen Profil-Mittellinie:

$$x_T = \frac{3b^2}{6b + h} .$$

Aus diesem Beispiel kann man eine allgemein gültige Definition ableiten:

Der Schubmittelpunkt

eines Profils ist derjenige Punkt, durch den die Wirkungslinie der Querkraft verläuft. Er ist im Allgemeinen nicht mit dem Flächenschwerpunkt identisch

Bei symmetrischen Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt auf der Symmetrielinie und fällt bei doppelt-symmetrischen Querschnitten mit dem Schwerpunkt zusammen.

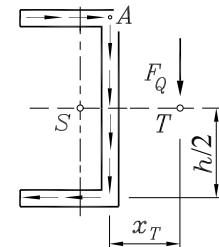


Abbildung 20.13: Berechnung des Schubmittelpunktes aus Äquivalenz der Momente um den Punkt *A*

⇒ Die **Abbildung 20.14** zeigt die Konsequenz dieser Erkenntnis: Die äußere Kraft *F* an dem skizzierten Träger-Abschnitt, die (wie für alle Biegeträger-Probleme bisher immer vorausgesetzt) in der Schwerpunkt-Ebene angreift, kann mit den Schnittgrößen nur ein Gleichgewichtssystem bilden, wenn im Schnitt zusätzlich zur Querkraft F_Q noch ein um die Träger-Längsachse drehendes Torsionsmoment M_t wirkt.

Da im folgenden Kapitel gezeigt wird, dass gerade solche dünnwandigen offenen Profile sehr empfindlich gegen Torsionsbelastung sind, ist dies ein höchst unangenehmer Effekt, der möglichst vermieden werden sollte.

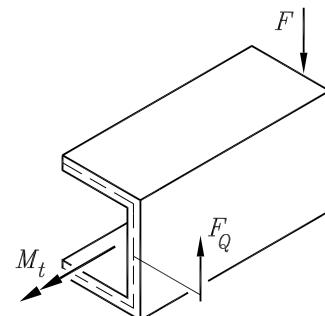


Abbildung 20.14: Gleichgewicht kann nur durch ein zusätzliches Torsionsmoment hergestellt werden

Um für den in **Abbildung 20.14** skizzierten Träger Torsionsfreiheit zu garantieren, muss die belastende Kraft *F* „neben dem eigentlichen Querschnitt“ angreifen, wie es die **Abbildung 20.15** zeigt. Die (Querkraft-)Schubspannungen in der Schnittfläche bilden dann mit der äußeren Kraft ein Gleichgewichtssystem.

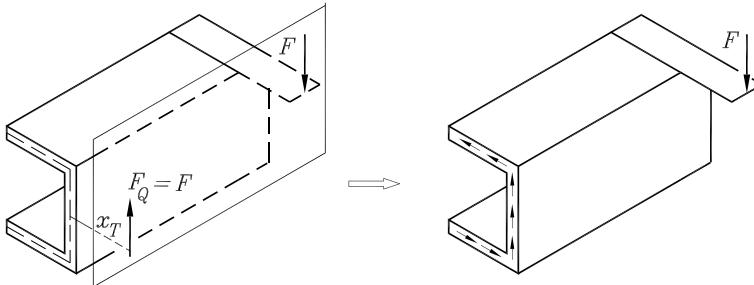


Abbildung 20.15: Mit einem (eher zweifelhaften) konstruktiven Trick kann auch der Querschnitt eines offenen dünnwandigen Profils torsionsfrei bleiben

Im Allgemeinen ist ein Konstrukteur gut beraten, wenn er solche Probleme umgeht (Einbau des Profils um 90° gedreht, Verwendung anderer Profile, Zusammensetzen von mehreren Profilen zu symmetrischen Querschnitten, ...).

- ⇒ Bei einigen Profilen ist das Lasteinleitungsproblem wesentlich einfacher lösbar, weil der Schubmittelpunkt innerhalb der Querschnittsfläche liegt. Aus dem oben demonstrierten Algorithmus zur Ermittlung des Schubmittelpunkts (Momentenäquivalenz) folgt, dass für die beiden in der **Abbildung 20.16** skizzierten Profile die Schubmittelpunkte nur im Schnittpunkt der Profil-Mittellinien liegen können.

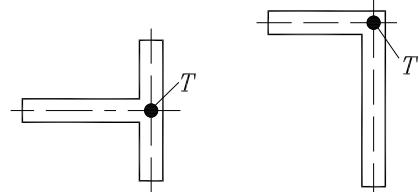


Abbildung 20.16: Für **T**- und **L**-Profile liegen die Schubmittelpunkte im Schnittpunkt der Profil-Mittellinien

- ⇒ An dieser Stelle fördert es sicher das Verständnis, eine in der Technischen Mechanik übliche (und auch in diesem Buch immer wieder verwendete) Formulierung zu diskutieren: „*Die Schnittgrößen rufen im Querschnitt Spannungen hervor*“, ist eigentlich nicht korrekt. Die Spannungen sind unmittelbare Folge der Verzerrungen, die durch die äußere Belastung verursacht werden. Die Schnittgrößen sind als Resultierende dieser Spannungen fiktive Größen, die allerdings außerordentlich nützlich auf dem Weg zur Spannungsberechnung sind. Weil der Weg zu den Spannungen in einem Träger fast immer über die Schnittgrößen führt, soll die oben zitierte Formulierung auch weiter gestattet sein.
- ⇒ Als Konsequenz gilt für die Schubspannungsberechnung: *Die Querkräfte werden in der Schnittfläche immer so angebracht, dass ihre Wirkungslinien durch den Schubmittelpunkt gehen* (über das Antragen des Torsionsmoments braucht keine Vereinbarung getroffen zu werden, weil Momente auch senkrecht zur Drehachse verschoben werden dürfen). Wenn die Gleichgewichtsbedingungen auch ein Torsionsmoment liefern, ist neben der Berechnung der Querkraftschubspannungen noch eine Schubspannungsberechnung infolge Torsion (Kapitel 21) erforderlich. Zur Berechnung des Torsionsmoments wird eine Momentengleichgewichtsbedingung bezüglich einer Achse durch den Schubmittelpunkt des Querschnitts empfohlen, in die die Querkräfte nicht eingehen.

20.3 Schubspannungen in Verbindungsmittern

Werden Längsfugen in Trägern durch Verbindungsmitte (Nägel, Niete, Dübel, Bolzen, Schrauben, Schweißnähte ...) überbrückt, die ein Verschieben der Trägerteile gegeneinander verhindern, so müssen diese die in der Fuge wirkenden Schubspannungen aufnehmen. Diese stellen in den meisten Fällen die wesentliche Belastung des Verbindungsmitte dar.

Wenn es sich um eine *flächenhafte Verbindung* handelt (Klebefläche, Reibschweißfläche, ...), können die zu übertragenen Schubspannungen wie in einem kompakten Träger berechnet werden.

Sind die Trägerteile nur an *diskreten Stellen* verbunden, so muss die mit einem Vergleichsträger zu berechnende Schubspannung auf die (in der Regel kleinere) Scherfläche des Verbindungsmitte umgerechnet werden. Dieses Vorgehen soll an zwei Beispielen erläutert werden.

Beispiel 1: Der aus zwei Rechteckquerschnitten zusammengefügten Träger überträgt am Übergang beider Querschnitte eine Schubspannung, die sich für den kompakten Träger für jede Stelle der Fuge nach 20.2 berechnen lässt:

$$\tau_{Fuge} = \frac{F_Q S_{x,Fuge}}{b I_{xx}} .$$

Es wird nun angenommen, dass die beiden Trägerteile nur an sieben äquidistanten Stellen verbunden sind. Dann werden die Schubspannungen einer Scherfläche, die man dem „Einzugsbereich“ eines Verbindungsmitte zuordnen kann, zu einer *Scherkraft* zusammengefasst, wie es die Abbildung 20.17 andeutet.

Für den linken Bereich mit konstanter Querkraft (und damit wegen der konstanten geometrischen Parameter auch mit konstanter Schubspannung) ergibt sich diese Scherkraft aus der Multiplikation der Schubspannung mit der Scherfläche, im rechten Bereich mit veränderlicher Querkraft (bzw. Schubspannung) muss über die Fläche integriert werden, für die skizzierten Flächen 2 bzw. 6 also z. B.:

$$F_{S2} = \tau_{Fuge,1} ab = F_{Q1} \frac{a S_{x,Fuge}}{I_{xx}} ,$$

$$F_{S6} = \int_{z_2=2a}^{3a} \tau_{Fuge,2}(z_2) b dz_2 = \frac{S_{x,Fuge}}{I_{xx}} \int_{z_2=2a}^{3a} F_{Q2}(z_2) dz_2 .$$

Die Schubkräfte ergeben sich vorzeichenbehaftet (die Abbildung 20.17 zeigt die tatsächlichen Richtungen), für die Berechnung der Spannungen ist nur ihr Betrag interessant.

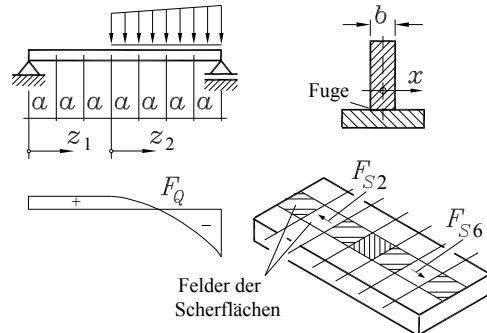


Abbildung 20.17: Verteilung der Schubspannung auf 7 Scherflächen

Bei einem Bolzen pro Feld (**Abbildung 20.18 oben**) ergibt sich die zu übertragende Spannung aus dem Quotienten von Scherkraft und Querschnittsfläche des Bolzens:

$$\tau_{Bolzen,i} = \frac{|F_{Si}|}{\pi \frac{d^2}{4}} .$$

Wenn die beiden Trägerteile in jedem Feld durch zwei Schweißnähte der Länge l_0 und der Nahtbreite a_0 verbunden sind (**Abbildung 20.18 unten**), übertragen diese die Schubspannung

$$\tau_{Naht,i} = \frac{|F_{Si}|}{2 l_0 a_0} .$$

Wenn die Schweißnähte auf beiden Seiten über die gesamte Trägerlänge (ohne Unterbrechung) ausgeführt wären, könnte der Umweg über die Scherkräfte unterbleiben, weil die nach **20.2** berechnete Schubspannung einfach mit dem Verhältnis der fiktiven zur tatsächlichen Scherbreite $\frac{b}{2a_0}$ multipliziert werden könnte.

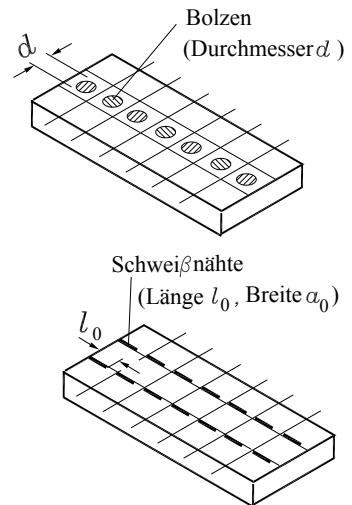


Abbildung 20.18: Verbindung durch Bolzen bzw. Schweißnähte

Beispiel 2: In dem außermittig belasteten Träger sind die Querkräfte und damit die Schubspannungen in der Fuge links bzw. rechts von der Kraftangriffsstelle jeweils konstant:

$$F_{Q1} = \frac{2}{3}F \Rightarrow \tau_{Fuge,1} = \frac{2}{3} \frac{FS_{x,Fuge}}{bI_{xx}} ,$$

$$F_{Q2} = \frac{1}{3}F \Rightarrow \tau_{Fuge,2} = \frac{1}{3} \frac{FS_{x,Fuge}}{bI_{xx}} .$$

Die Schubkräfte in der Fuge dürfen durch Multiplikation der Schubspannungen mit den Scherflächen aufgeschrieben werden:

$$F_{S1} = \tau_{Fuge,1} \frac{1}{3}lb = \frac{2}{9}F \frac{S_{x,Fuge} l}{I_{xx}} ,$$

$$F_{S2} = \tau_{Fuge,2} \frac{2}{3}lb = \frac{2}{9}F \frac{S_{x,Fuge} l}{I_{xx}} .$$

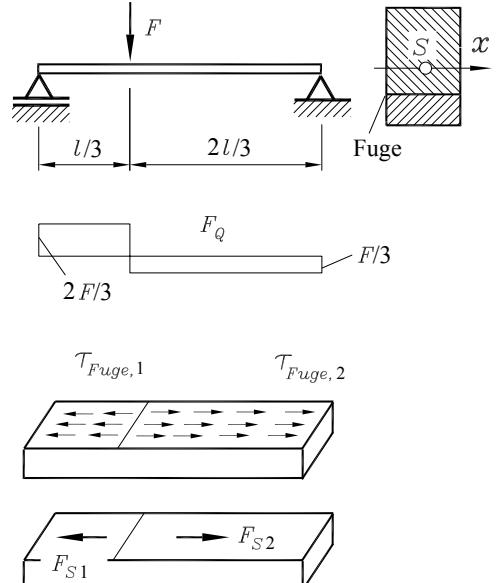


Abbildung 20.19: Verteilte Schubbelastung in der Fuge (z.B. in einer Klebefläche)

Die Gleichheit der beiden Schubkräfte überrascht nicht, weil sie aus Gleichgewichtsgründen (**Abbildung 20.19 unten**) unumgänglich ist. Sie bedeutet, dass bei Verbindung durch diskrete Verbindungsmittel in beiden Abschnitten jeweils die gleiche Anzahl zu verwenden ist, um alle mit der gleichen Schubspannung zu beladen.

20.4 Verformungen durch Querkräfte

Im Folgenden werden zunächst die *ausschließlich durch Querkräfte erzeugten Verformungen* betrachtet, obwohl natürlich die Querkraftbelastung eines Trägers immer mit einer Biegemomentbelastung gekoppelt ist. Da wie bei der im Kapitel 17 behandelten Verformung durch Biegemomente bei vorauszusetzender Kleinheit der Verschiebungen lineare Differentialbeziehungen entstehen, dürfen die gesondert berechneten Biegemoment- und Querkraftverformungen zur Gesamtverformung addiert werden.

Nach dem Hookeschen Gesetz 12.6 wird durch eine Schubspannung τ eine Verzerrung hervorgerufen, die durch den Gleitwinkel $\gamma = \frac{\tau}{G}$ beschrieben wird. Da die Schubspannung über die Trägerhöhe entsprechend 20.2 veränderlich ist, wird auch dieser Gleitwinkel veränderlich, und die ursprünglich geraden Seiten eines aus dem Träger herausgeschnittenen Elements müssen sich verwölben, wie es die Abbildung 20.20 zeigt (in der Skizze sind die unterschiedlichen Gleitwinkel in Höhe des Schwerpunkts bzw. am oberen Rand angedeutet).

Diese Verwölbung kann im Rahmen der Theorie des geraden Trägers nicht berücksichtigt werden (genauere Verformungsberechnungen können für praxisnahe Probleme im Allgemeinen nur mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ausgeführt werden).

Es wird deshalb näherungsweise eine mittlere konstante Schubspannung $\bar{\tau}$ angenommen (Abbildung 20.21), die dann einen konstanten Gleitwinkel $\bar{\gamma}$ über die Querschnittshöhe erzeugt. So bleiben die Querschnitte auch durch die Schubspannungsverformung eben. Der durch diese Näherungsannahme erzeugte Fehler wird weitgehend durch eine Korrektur der Querschnittsfläche A ausgeglichen:

Die *wirksame Schubfläche A_S* , auf die die mittlere Schubspannung wirkt, errechnet sich mit einem Korrekturparameter κ_S , der aus der Bedingung gewonnen wird, dass die bei der Verformung erzeugten Formänderungsenergien des realen bzw. gemittelten Schubspannungszustandes gleich sind. Dies wird im Kapitel 24 behandelt und führt auf folgende Formeln:

$$\bar{\tau} = \frac{F_Q}{A_S} \quad , \quad A_S = \frac{A}{\kappa_S} \quad , \quad \kappa_S = \frac{A}{I_{xx}^2} \int_A \frac{S_x^2}{b^2} dA \quad . \quad (20.4)$$

Das Trägerelement der Länge dz verformt sich zum Parallelogramm (Abbildung 20.21), wobei die Vertikalverschiebung sich vom linken zum rechten Rand des Elements um $dv_S = \bar{\gamma} dz$ ändert (der Index S soll andeuten, dass es sich um reine *Schubverformung* ausschließlich durch

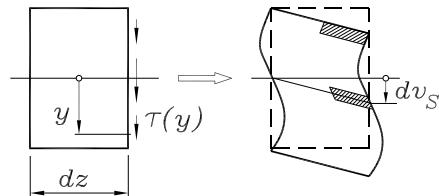


Abbildung 20.20: Verzerrung eines Elements infolge der mit y veränderlichen Schubspannung (keine Verzerrung an den Rändern, maximale Verzerrung in der Schwerpunktsschicht)

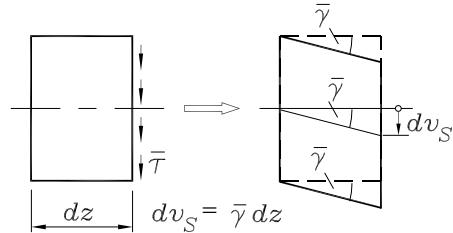


Abbildung 20.21: Näherungsannahme „Mittlere Schubspannung“ → Konstanter Gleitwinkel

die Querkraft handelt im Gegensatz zur *Biegeverformung* durch das Biegemoment). Die Verformungsberechnung wird nun besonders einfach, wenn auch noch angenommen wird, dass die vertikalen Schnittflächen des Elements sich bei der Schubverformung nicht drehen, was immer dann der Fall sein wird, wenn die Schnittflächen der Nachbarelemente auch ihre vertikale Richtung behalten. Mit diesen Annahmen erhält man unter Verwendung des Hookeschen Gesetzes und mit 20.4 die Differenzialbeziehung für die *Verformung infolge Querkraftbelastung*

$$\frac{dv_S}{dz} = \bar{\gamma} = \frac{\bar{\tau}}{G} = \frac{F_Q}{GA_S} = \frac{\kappa_S F_Q}{GA} , \quad (20.5)$$

die genau dann gilt (siehe nachfolgende Diskussion), wenn das Produkt GA im Nenner der rechten Seite, die *Schubsteifigkeit* des Trägers, und der Korrekturparameter κ_S konstant sind. Bei der Integration von 20.5 entsteht eine Integrationskonstante, die durch eine Verschiebungsrandbedingung bestimmt wird.

Beispiel 1:

Für den skizzierten Träger ist die Schubverformung infolge der Querkraftbelastung zu ermitteln. Die maximale Absenkung ist mit der durch das Biegemoment hervorgerufenen Biegeverformung zu vergleichen.

Gegeben: E, G, h, b, l .

Die Querschnittswerte und die Querkraft $F_Q = F$ sind konstant, so dass auf der rechten Seite von 20.5 eine Konstante steht.

Der κ_S -Wert ist nur von der Querschnittsform abhängig. Er wird nach 20.4 berechnet, wobei das S_x unter dem Integral wie in der Formel 20.2 das statische Moment der bei y abgetrennten Teilfläche bezüglich der Schwerpunktachse x ist (nebenstehende Skizze):

$$\kappa_S = \frac{A}{I_{xx}^2} \int_A S_x^2 dA = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} \int_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{b^2} \left[b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \right]^2 b dy = \frac{6}{5} .$$

Die Integration von 20.5 liefert damit

$$v_S(z) = \frac{6F}{5Gb} z ,$$

wobei die Integrationskonstante wegen $v_S(z=0) = 0$ entfiel.

Die Abbildung 20.22 zeigt diese Verformung infolge der Querkraft (Schubverformung).

Alle Trägerelemente erfahren die gleiche Verzerrung, die Querschnitte bleiben in vertikaler Lage und stehen also nicht (wie bei der Biegeverformung) senkrecht zur Verformungslinie.

Der Schubverformung v_S kann nun die Biegeverformung v_B zur Gesamtverformung v überlagert werden. Für die Absenkung des Trägerendes z. B. erhält man mit der Biegeverformung, die der Tabelle im Abschnitt 17.4 zu entnehmen ist:

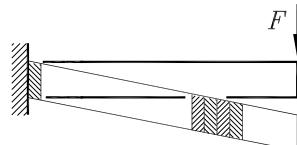
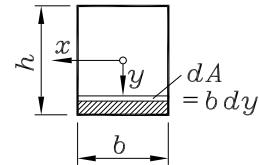
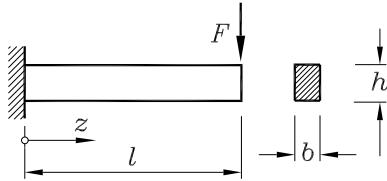


Abbildung 20.22: Verformung infolge Querkraftbelastung

$$v_{max} = v_{B,max} + v_{S,max} = \frac{Fl^3}{3E\frac{bh^3}{12}} + \frac{6Fl}{5Gbh} = \frac{4Fl^3}{Ebh^3} \left[1 + \frac{3}{10} \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right] .$$

- ⇒ Der Faktor $\left(\frac{h}{l}\right)^2$ beim zweiten Summanden in der eckigen Klammer, der die Größenordnung des Schubverformungsanteils charakterisiert, macht deutlich, dass dieser für schlanke Träger wesentlich kleiner als der Biegeanteil ist. Diese Aussage gilt allgemein.
- ⇒ Dass die Trägerquerschnitte bei reiner Schubverformung ihre vertikale Lage beibehalten und v_S damit nach 20.5 berechnet werden darf, gilt auch für veränderliche Querkraft. Die Abbildung 20.23 zeigt dafür ein Beispiel. Die Ähnlichkeit von Schubverformungslinie und Biegemomentenverlauf ist durchaus nicht zufällig, denn bei konstantem Querschnitt ist die Ableitung der Schubverformung der Querkraft proportional, die andererseits nach 7.1 auch die Ableitung des Biegemoments ist.

Das Beispiel verdeutlicht allerdings ein neues Problem:

Es gibt drei Rand- und Übergangsbedingungen (keine Absenkungen an den Lagern, gleiche Absenkungen an der Übergangsstelle), aber bei Integration in zwei Bereichen nur zwei Integrationskonstanten. Wenn man jedoch die Integrationskonstanten aus zwei Bedingungen errechnet hat, ist die dritte Bedingung identisch erfüllt.

Das gilt natürlich alles nicht mehr bei veränderlichem Querschnitt, doch bevor man dafür nach (durchaus zu findenden) Reparatur-Möglichkeiten sucht, sollte man beachten: Wenn die Schubverformungen überhaupt zusätzlich zu den im Allgemeinen deutlich größeren Biegeverformungen berücksichtigt werden sollen, dann sollten bei veränderlichen Querschnitten die nachfolgenden Formeln verwendet werden (wegen der geringen praktischen Bedeutung wird auf eine Herleitung hier verzichtet).

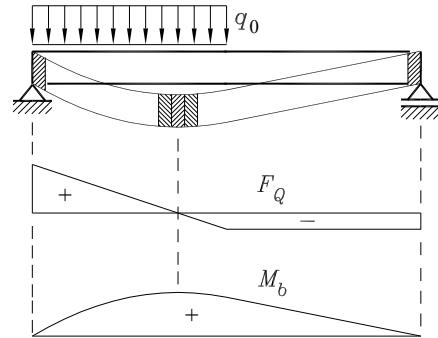


Abbildung 20.23: Die Schubverformung ist bei konstantem Trägerquerschnitt proportional zum Biegemomentenverlauf

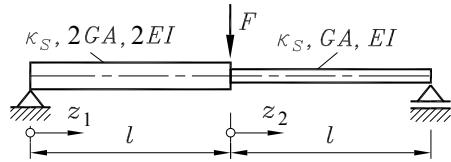
Differenzialgleichungen für die Berechnung der Gesamtverformung v infolge Biegung und Querkraftschub:

$$EI\psi' = M_b \quad , \quad GA(v' + \psi) = \kappa_S F_Q \quad . \quad (20.6)$$

- v ist die Gesamt-Durchbiegung unter Wirkung von M_b und F_Q ,
- ψ ist der Schrägstellungswinkel der eben bleibenden Querschnitte, die jedoch nicht senkrecht zur verbogenen Trägerachse stehen, so dass die Ableitung von v nicht identisch mit ψ ist.

Beispiel 2:

Für den skizzierten Träger mit stückweise konstantem Querschnitt kann die Berechnung der Gesamtverformung nach 20.6 in folgenden Schritten ablaufen:



- Für beide Bereiche werden Querkraft- und Biegemomentenverlauf nach den vereinbarten Regeln formuliert. Damit können die Differenzialgleichungen 20.6 aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} 2EI\psi'_1 &= \frac{F}{2}z_1 & , \quad 2GA(v'_1 + \psi_1) &= \kappa_S \frac{F}{2} & , \\ EI\psi'_2 &= \frac{F}{2}(l - z_2) & , \quad GA(v'_2 + \psi_2) &= -\kappa_S \frac{F}{2} & . \end{aligned}$$

- Es werden zunächst die beiden „ ψ' -Gleichungen“ integriert (es entstehen 2 Integrationskonstanten), die Ergebnisse werden in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt, die nach v' umgestellt und ebenfalls integriert werden. Es entstehen 2 weitere Integrationskonstanten.
- Die 4 Integrationskonstanten werden aus folgenden Bedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} v_1(z_1 = 0) &= 0 & , \quad v_2(z_2 = l) &= 0 & , \quad v_1(z_1 = l) = v_2(z_2 = 0) & , \\ \psi_1(z_1 = l) &= \psi_2(z_2 = 0) & \text{(Schrägstellung der Querschnitte an der Übergangsstelle)} & . \end{aligned}$$

- Nach etwas mühsamer Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned} v_1(z_1) &= \frac{3\kappa_SF}{8GA}z_1 + \frac{Fl^3}{24EI}\left[4\frac{z_1}{l} - \left(\frac{z_1}{l}\right)^3\right] & , \\ v_2(z_2) &= \frac{3\kappa_SF}{8GA}(l - z_2) + \frac{Fl^3}{24EI}\left[3 + \frac{z_2}{l} - 6\left(\frac{z_2}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2}{l}\right)^3\right] & . \end{aligned}$$

- Die ersten Summanden in den beiden Formeln sind die Schubverformungsanteile. Die beiden anderen Summanden (Biegeverformung) würden sich natürlich auch nach der im Kapitel 17 behandelten Theorie der Biegeverformung ergeben.

Als Fazit aus den theoretischen Überlegungen und den Ergebnissen der beiden Beispiele bleibt:

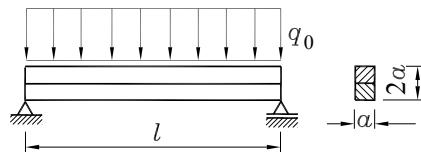
- ⇒ Die Trägerquerschnitte bleiben auch bei Berücksichtigung der Schubverformung eben, liegen allerdings nicht mehr senkrecht zur Verformungslinie.
- ⇒ Die Schubverformung kann für schlanke Träger gegenüber der Biegeverformung im Allgemeinen vernachlässigt werden.

Nur für gedrungene Träger (Querschnittshöhe liegt in der Größenordnung der Trägerlänge) kann die Schubverformung in die Nähe der Größenordnung der Biegeverformung kommen. Für solche Träger liefert 20.6 allerdings nur noch eine Abschätzung der tatsächlichen Werte, weil für gedrungene Träger sowohl die Bernoulli-Hypothese der Biegeverformungstheorie als auch die Annahme der Schubverformungstheorie (gemittelte Schubspannungen über die Trägerhöhe) nur noch in grober Näherung erfüllt sind.

20.5 Aufgaben

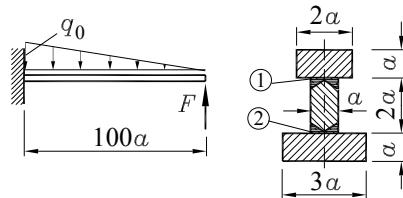
Aufgabe 20.1: Der skizzierte Träger ist aus zwei Balken mit Quadratquerschnitten zusammengeleimt und trägt die konstante Linienlast q_0 . Man ermittle Ort und Größe der maximalen Schubspannung in der Leimfuge.

Gegeben: $a = 4 \text{ cm}$; $l = 40 \text{ cm}$; $q_0 = 5 \text{ kN/m}$.



Aufgabe 20.2: Ein Träger ist wie skizziert aus drei Blechen zusammengeschweißt. Er trägt eine Linienlast (Dreiecksbelastung) und die Kraft F .

Gegeben: $F = 20q_0a$, a , q_0 .

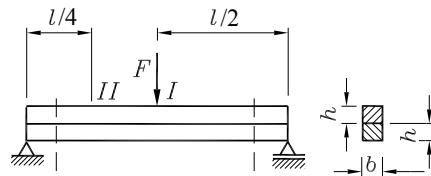


Man ermittle

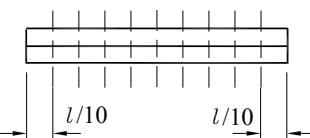
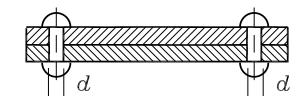
- die absolut größte Querkraft im Träger,
- Ort und Größe der maximalen Schubspannungen in den Schweißnähten 1 und 2, wenn als Schweißnahtbreite die Stegbreite a angenommen wird,
- Ort und Größe der maximalen Schubspannungen im Träger.

Aufgabe 20.3: Zwei Träger mit Rechteckquerschnitten liegen übereinander und sind durch 2 Bolzen (Durchmesser d) bzw. 9 Niete verbunden, so dass ein Verschieben der beiden Träger gegeneinander verhindert wird. Die zulässige Schubspannung in den Nieten ist τ_{zul} .

Gegeben: F , h , l , d , τ_{zul} .



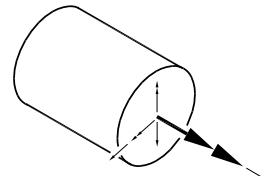
- Man berechne die Schubspannung in den beiden Bolzen in Höhe der Trennfuge für die Stellungen I und II der Last F .
- Für die Verbindung der beiden Träger durch neun gleichmäßig verteilte Niete (untere Skizze) berechne man die erforderlichen Nietdurchmesser für die Laststellung II.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

21 Torsion

Das um die Längsachse des Trägers drehende Torsionsmoment M_t ist das resultierende Moment der Schubspannungen, die in der Schnittfläche liegen. Es ist ungleich schwieriger als bei den übrigen Schnittgrößen, die dem Torsionsmoment äquivalente Spannung im Querschnitt zu berechnen.



Glücklicherweise gilt das nicht für Stäbe mit Kreis- und Kreisringquerschnitten, die besonders häufig für die Übertragung von Torsionsmomenten verwendet werden.

21.1 Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten

Die Theorie der Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten basiert auf folgenden Annahmen:

- ⇒ Die Querschnitte verdrehen sich wie starre Scheiben gegeneinander (und behalten also ihre ursprüngliche ebene Form).
- ⇒ Das Torsionsmoment M_t ist das resultierende Moment der im Querschnitt *tangential verlaufenden Schubspannungen*.
- ⇒ Es gilt das Hookesche Gesetz $\tau = G\gamma$, die Verformungen sind klein.

Als Querschnittsvariable wird wegen der Rotationssymmetrie nur der Radius r , der einen beliebigen Kreis des Querschnitts kennzeichnet, benötigt. Die Verformung wird durch den *Verdrehwinkel* φ beschrieben, der im gleichen Drehsinn wie das Torsionsmoment M_t (am positiven Schnittufer) positiv gezählt wird (**Abbildung 21.1**).

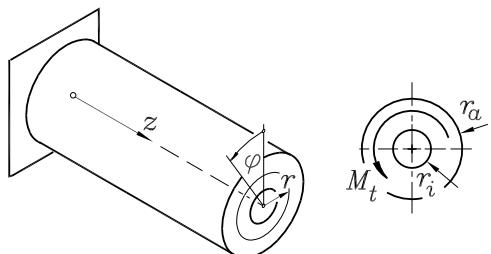


Abbildung 21.1: Definition von z , r , φ und M_t

Die **Abbildung 21.2** zeigt eine aus dem Torsionsstab herausgeschnittene unendlich dünne Scheibe (Dicke dz). Auch die äußere Mantelfläche (Zylinder mit dem Radius r) ist eine Schnittfläche. Die Stirnflächen (starre Kreisringscheiben) haben sich gegeneinander um den Winkel $d\varphi$ gedreht. Auf der Mantelfläche ist der Gleitwinkel γ erkennbar. Weil nur kleine Verformungen zugelassen werden ($\tan\gamma \approx \gamma$), kann aus der Skizze die folgende Beziehung abgelesen werden:

$$\gamma dz = r d\varphi .$$

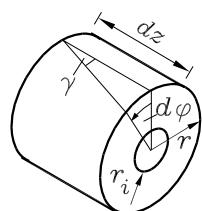


Abbildung 21.2: r_i , r , γ , $d\varphi$ und dz

Daraus ergibt sich mit dem Hookeschen Gesetz der Zusammenhang zwischen dem Verdrehwinkel und der Schubspannung:

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dz} = Gr \varphi' .$$

Am differenziell kleinen Flächenelement dA des Querschnitts hat die dort wirkende Schubspannung die Kraftwirkung τdA und damit um den Mittelpunkt die Momentwirkung $r \tau dA$ (**Abbildung 21.3**). Die resultierende Momentwirkung (Integration über die Querschnittsfläche A) muss dem Torsionsmoment M_t entsprechen:

$$M_t = \int_A \tau r dA .$$

Mit dem bereits bekannten Zusammenhang zwischen Schubspannung und Verformung ergibt sich:

$$M_t = \int_A Gr \varphi' r dA = G \varphi' \int_A r^2 dA = GI_p \varphi'$$

mit dem so genannten *polaren Flächenträgheitsmoment*

$$I_p = \int_A r^2 dA . \quad (21.1)$$

Die polaren Flächenträgheitsmomente lassen sich auf recht einfache Weise aus den äquatorialen Flächenträgheitsmomenten I_{xx} und I_{yy} berechnen. Wegen $r^2 = x^2 + y^2$ (**Abbildung 21.4**) gilt:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_{yy} + I_{xx} .$$

Man beachte, dass diese I_p -Formel zwar allgemein gilt, *das polare Flächenträgheitsmoment aber nur für die Torsionsberechnung von Kreis- und Kreisringquerschnitten verwendet werden darf*.

Aus den nun bekannten Zusammenhängen zwischen Schubspannung und Verdrehwinkel bzw. Torsionsmoment und Verdrehwinkel ergeben sich die folgenden Formeln.

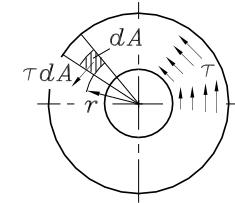


Abbildung 21.3: Momentwirkung der Schubspannung τ

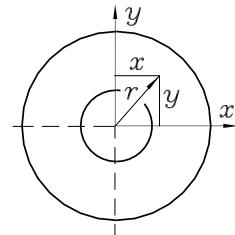


Abbildung 21.4: r , x und y

Torsionsschubspannungen in Kreis- und Kreisringquerschnitten: $\tau = \frac{M_t}{I_p} r \quad (21.2)$

Differenzialgleichung für den Verdrehwinkel: $GI_p \varphi' = M_t \quad (21.3)$

Polares Flächenträgheitsmoment für Kreisquerschnitt: $I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (21.4)$

Polares Flächenträgheitsmoment für Kreisringquerschnitt: $I_p = \frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4) \quad (21.5)$

⇒ Das Produkt GI_p ist die *Torsionssteifigkeit* des Kreis- bzw. Kreisringquerschnitts.

⇒ In 21.4 ist d der Durchmesser des Kreisquerschnitts, in 21.5 sind d_i der Innen- und d_a der Außendurchmesser des Kreisringquerschnitts.

- ⇒ Die maximalen Torsionsschubspannungen treten am Außenrand ($r = \frac{d}{2}$ bzw. $r = \frac{d_a}{2}$) auf. Man definiert deshalb (analog zu den Widerstandsmomenten gegen Biegung) als Quotienten des polaren Flächenträgheitsmomentes und des Außenradius die

Widerstandsmomente gegen Torsion

$$\text{für Kreisquerschnitt: } W_t = \frac{\pi d^3}{16} , \quad (21.6)$$

$$\text{für Kreisringquerschnitt: } W_t = \frac{\pi}{16 d_a} (d_a^4 - d_i^4) . \quad (21.7)$$

$$\text{Maximale Torsionsschubspannung im Querschnitt: } \tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} . \quad (21.8)$$

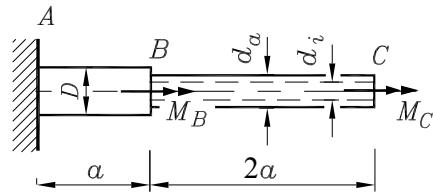
Aus der Differenzialgleichung für den Verdrehwinkel 21.3 ergibt sich für einen wichtigen Sonderfall folgende einfache Formel.

Relativer Verdrehwinkel zweier Endquerschnitte eines Bereichs der Länge l mit konstantem Torsionsmoment M_t und konstanter Torsionssteifigkeit GI_p :

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} . \quad (21.9)$$

Beispiel 1:

Ein Torsionsstab hat in einem Abschnitt einen konstanten Kreisquerschnitt (Durchmesser D) und im zweiten Abschnitt einen Kreisringquerschnitt (Innendurchmesser d_i , Außendurchmesser d_a). Er ist bei A starr eingespannt und bei B und C durch die Momente M_B bzw. M_C belastet.



Gegeben: $M_B = 1,8 \text{ kNm}$; $a = 1 \text{ m}$; $d_i = 20 \text{ mm}$; $G = 0,808 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;
 $M_C = 0,6 \text{ kNm}$; $D = 60 \text{ mm}$; $d_a = 40 \text{ mm}$.

Es sind die maximale Torsionsschubspannung τ_{max} und die Verdrehwinkel der Querschnitte B und C (relativ zum Einspannquerschnitt A) zu berechnen.

Das Torsionsmoment ist bereichsweise konstant. Wenn der linke Bereich mit dem Index 1 und der rechte Bereich mit dem Index 2 gekennzeichnet wird, gilt:

$$M_{t1} = M_B + M_C , \quad M_{t2} = M_C .$$

Damit können nach 21.6 bis 21.8 die maximalen Schubspannungen berechnet werden:

$$1. \text{ Bereich } (A \dots B): \quad W_{t1} = \frac{\pi D^3}{16} \Rightarrow \tau_{1,max} = 56,6 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$2. \text{ Bereich } (B \dots C): \quad W_{t2} = \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} \Rightarrow \tau_{2,max} = 50,9 \text{ N/mm}^2 .$$

Die größte Schubspannung tritt im ersten Bereich auf. Da sowohl Torsionsmomente als auch Torsionssteifigkeiten bereichsweise konstant sind, berechnet man die Verdrehwinkel nach 21.9.

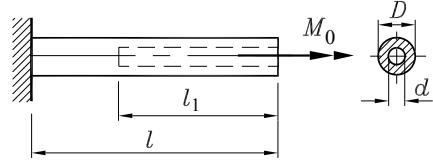
Für den Punkt C setzt sich der Verdrehwinkel aus zwei Anteilen (jeweils der relative Verdrehwinkel der Endquerschnitte eines Abschnitts) zusammen:

$$\varphi_B = \frac{(M_B + M_C) a 32}{G \pi D^4} = 0,02335 \Rightarrow \varphi_B = 1,34^\circ ;$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_C 2 a 32}{G \pi (d_a^4 - d_i^4)} = \varphi_B + 0,06303 = 0,08638 \Rightarrow \varphi_C = 4,95^\circ .$$

Beispiel 2:

Ein Torsionsfederstab mit dem Durchmesser D soll durch einseitiges Aufbohren (Bohrlochdurchmesser d , Bohrlochtiefe l_1) so geeicht werden, dass er durch ein Moment M_0 genau um insgesamt $\varphi_{ges} = 10^\circ$ verdreht wird.



Gegeben: $M_0 = 600 \text{ Nm}$; $D = 20 \text{ mm}$; $G = 0,808 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;
 $l = 350 \text{ mm}$; $d = 10 \text{ mm}$.

Gesucht: Bohrlochtiefe l_1 und die maximale Torsionsschubspannung.

Da sowohl das Torsionsmoment als auch die Torsionssteifigkeit bereichsweise konstant sind, kann der Verdrehwinkel als Summe aus zwei Anteilen nach 21.9 aufgeschrieben werden:

$$\varphi_{ges} = \frac{M_0(l - l_1) 32}{G \pi D^4} + \frac{M_0 l_1 32}{G \pi (D^4 - d^4)}$$

wird nach der gesuchten Länge umgestellt. Man erhält mit den gegebenen Werten:

$$l_1 = \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \left(\frac{G \pi D^4}{32 M_0} \varphi_{ges} - l \right) \Rightarrow l_1 = 288 \text{ mm} .$$

Da das Torsionsmoment konstant ist, tritt die größte Schubspannung im Bereich mit dem kleineren Widerstandsmoment auf, und es gilt für den rechten Bereich:

$$\tau_{t,max} = \frac{M_0 16 D}{\pi (D^4 - d^4)} = 407 \text{ N/mm}^2 .$$

- ⇒ Bei gleicher Querschnittsfläche haben Kreisringquerschnitte im Vergleich mit Kreisquerschnitten immer das größere polare Flächenträgheitsmoment und ein größeres Widerstandsmoment gegen Torsion.
- ⇒ Natürlich gilt auch für die durch Torsion hervorgerufenen Spannungen das Gesetz der zugeordneten Schubspannungen 20.1. Das bedeutet, dass auch in Längsschnitten eines Torsionsstabes die Schubspannungen in gleicher Größe wie in den Querschnitten auftreten.

Die Abbildung 21.5 zeigt, dass diese Schubspannungen nur in den Seitenflächen wirken (senkrecht zu den tangential gerichteten Schubspannungen in den Querschnitten). Eine Vorstellung von diesen Spannungen gewinnt man z. B. beim Tordieren eines Holzstäbes mit Kreisquerschnitt, der bei entsprechend hoher Belastung in Längsrichtung reißt, weil Holz in Faserrichtung die geringere Festigkeit hat.

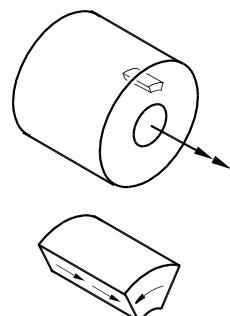


Abbildung 21.5: Torsions-Schubspannungen in den Längsschnitten

- ⇒ Die Berechnung der Torsionsverformung kann für die weitaus meisten praktisch wichtigen Fälle mit der Formel 21.9 ausgeführt werden, weil das Torsionsmoment fast immer zumindest bereichsweise konstant ist. Die Differentialbeziehung 21.3 wird allerdings bei stetig veränderlichem Querschnitt benötigt, wobei im Allgemeinen eine (in jedem Fall numerisch) einfach zu lösende Integrationsaufgabe entsteht.
- ⇒ Eine sehr wichtige Aufgabe ist das Dimensionieren von Wellen mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt, die die Antriebsleistung eines Motors auf eine Arbeitsmaschine übertragen und dabei in keinem Betriebszustand eine zulässige Spannung bzw. einen zulässigen Verdrehwinkel überschreiten dürfen. Deshalb wird als Torsionsmoment das größte zu übertragene Moment aus der Antriebsleistung und der Drehzahl aus der Beziehung $P = M \omega$ (Leistung = Moment · Winkelgeschwindigkeit) berechnet:

$$M = \frac{P}{\omega} . \quad (21.10)$$

Man beachte, dass das größte Moment nicht unbedingt beim Übertragen der maximalen Leistung auftreten muss. Gegebenenfalls muss man aus der Kennlinie der Antriebsmaschine den Punkt heraussuchen, der dem größten abzugebenden Drehmoment zuzuordnen ist.

Die Leistung wird in W (Watt) bzw. kW (Kilowatt) angegeben, definiert als

$$1 \text{ W} = 1 \text{ Nm/s}$$

(häufig noch anzutreffen ist die veraltete Leistungsangabe in PS, es gilt: 1 PS = 0,73550 kW).

Anstelle der Winkelgeschwindigkeit ω wird häufig die Drehzahl n angegeben (Anzahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit, gemessen in min^{-1}), es gilt der Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi n .$$

Da ω üblicherweise in s^{-1} angegeben wird, ist eine Dimensionsumrechnung erforderlich (man hüte sich vor der Anwendung von Praktikerformeln wie „ $\omega = \pi n / 30$ “, die mit unterschiedlichen Dimensionen arbeiten, es sei denn, man ist ganz sicher, selbst ein Praktiker und sicher im Umgang mit solchen Formeln zu sein).

Beispiel 3:

Ein Motor liefert sein maximales Drehmoment bei einer Leistung von 100 kW und einer Drehzahl von 5000 Umdrehungen pro Minute. Wie groß muss der Durchmesser der ausschließlich auf Torsion beanspruchten Abtriebswelle sein, wenn in ihr eine zulässige Schubspannung von $\tau_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ nicht überschritten werden darf?

Das nach 21.10 zu berechnende maximale Drehmoment

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n} = \frac{100 \cdot 10^3 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}}{2\pi 5000 \frac{1}{60} \text{s}} = 191 \text{ Nm}$$

wird als Torsionsmoment in die Formel 21.8 eingesetzt, und mit 21.6 errechnet man den erforderlichen Durchmesser:

$$W_{1,erf} = \frac{\pi d_{erf}^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_{zul}} \quad \Rightarrow \quad d_{erf} = \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi \tau_{zul}}} = 19,1 \text{ mm} .$$

21.2 St.-Venantsche Torsion beliebiger Querschnitte

Die für Kreis- und Kreisringquerschnitte getroffene Annahme, dass die Querschnitte bei der Torsionsverformung eben bleiben, kann für andere Querschnittsformen nicht aufrechterhalten werden. Im Allgemeinen führen die unterschiedlichen Gleitwinkel benachbarter Querschnittselemente dazu, dass sich die Querschnitte bei Torsionsbelastung verwölben.

Unter der Voraussetzung, dass sich die Querschnittsverwölbungen ungehindert ausbilden können, ist die Theorie der so genannten *St.-Venantschen Torsion* anwendbar.

Bei vielen praktischen Problemen ist diese Voraussetzung allerdings nicht erfüllt (eine starre Einspannung eines Trägers lässt z. B. keine Verwölbung zu). In diesen Fällen liefert die St.-Venantsche Torsionstheorie vielfach eine gute Näherung. Wenn die durch die behinderte Verwölbung zusätzlich hervorgerufenen Spannungen nicht vernachlässigt werden dürfen und die Verwölbung durch konstruktive Maßnahmen nicht verhindert werden kann (z. B. bei dünnwandigen Querschnitten), ist nach der (mathematisch wesentlich anspruchsvoller) Theorie der *Wölkrafttorsion* zu rechnen, die im Rahmen dieses Buches nicht behandelt wird.

- ⇒ Die St.-Venantsche Torsionstheorie basiert auf den Grundannahmen der linearen Elastizitätstheorie: Es gilt das Hookesche Gesetz, und die Verformungen sind klein gegenüber den Abmessungen des Bauteils. In allen Abschnitten dieses Kapitels wird die Gültigkeit der St.-Venantschen Torsionstheorie vorausgesetzt.

Die wichtigsten Formeln und Differentialgleichungen der allgemeinen St.-Venantschen Torsionstheorie werden in diesem Abschnitt (ohne Herleitung) zusammengestellt. Die beiden folgenden Abschnitte behandeln als besondere Sonderfälle die dünnwandigen Querschnitte.

Analog zu den Formeln, die sich für Kreis- und Kreisringquerschnitte ergaben, gelten bei *beliebigem Querschnitt* die nachfolgenden Beziehungen.

St.-Venantsche Torsion

$$\text{Differentialgleichung für den Verdrehwinkel: } GI_t \varphi' = M_t \quad (21.11)$$

$$\text{Maximale Torsionsschubspannung im Querschnitt: } \tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (21.12)$$

$$\text{Relativer Verdrehwinkel zweier Endquerschnitte eines Bereichs der Länge } l \text{ mit konstantem Torsionsmoment } M_t \text{ und konstanter Torsionssteifigkeit } GI_t: \quad \Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_t} \quad (21.13)$$

- ⇒ Die Formeln 21.11 bis 21.13 für die allgemeine St.-Venantsche Torsion unterscheiden sich von den entsprechenden Formeln für den Spezialfall „Kreis- und Kreisringquerschnitt“ nur dadurch, dass das polare Flächenträgheitsmoment I_p durch das Torsionsträgheitsmoment I_t ersetzt wird. Das Problem reduziert sich damit auf die (leider nicht triviale) Frage, wie die Querschnittskennwerte I_t und W_t für beliebige Querschnitte zu ermitteln sind.

- ⇒ Die Berechnung der Verteilung der Schubspannungen im Querschnitt ist im Allgemeinen schwierig, mit Hilfe der nachfolgend angegebenen Beziehungen 21.16 aber durchaus möglich. In der Regel wird die Berechnung der maximalen Schubspannung nach 21.12 genügen.

Die mathematische Theorie der St.-Venant'schen Torsion basiert auf der Berechnung einer so genannten *Torsionsfunktion* Φ für den Stabquerschnitt, die sich als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 1 \quad (21.14)$$

(*Poissonsche Differentialgleichung*) unter Beachtung der Randbedingungen

$$\Phi_{Rand} = \text{konstant} \quad (21.15)$$

ergibt. Bei mehreren Rändern (Flächen mit Ausschnitten) darf Φ auf jedem Rand einen anderen konstanten Wert annehmen.

Wenn für eine Querschnittsfläche eine Funktion $\Phi(x, y)$ gefunden wurde, die der Poissonschen Differentialgleichung und den Randbedingungen genügt (hierin liegt allerdings die Schwierigkeit), dann können das Torsionsträgheitsmoment I_t für den Querschnitt und die Komponenten der Schubspannungen bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems für jeden Querschnittspunkt nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$I_t = 2 \int_A \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dA \quad , \quad (21.16)$$

$$\tau_{zx} = -2 \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{zy} = 2 \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad .$$

Nur für sehr wenige Querschnittsformen lassen sich Lösungen der Poissonschen Differentialgleichung angeben, die die geforderten Randbedingungen erfüllen. Man darf es fast als Ironie auffassen, dass es gerade für Kreis und Kreisring, für die die Torsionsaufgabe ohnehin einfach lösbar ist, kein Problem ist (nachfolgendes Beispiel).

Beispiel: Es ist zu zeigen, dass die Funktion

$$\Phi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4}$$

die Poissonsche Differentialgleichung 21.14 erfüllt und auf einem Kreis (mit dem Mittelpunkt im Zentrum des x - y -Koordinatensystems) konstante Werte annimmt, so dass durch Einsetzen dieser Funktion in 21.16 die im vorigen Abschnitt angegebenen Formeln bestätigt werden können.

Die zweiten Ableitungen der Funktion

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{2}$$

sind konstant und erfüllen die Poissonsche Differentialgleichung. Einsetzen der Kreisgleichung in $\Phi(x, y)$ zeigt, dass auch die Randbedingungen 21.15 erfüllt sind:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{Rand} = \frac{R^2}{4} = \text{konstant} \quad .$$

Also ist $\Phi(x, y)$ die Torsionsfunktion für den Kreisquerschnitt (und natürlich auch für den Kreisringquerschnitt) und darf in 21.16 eingesetzt werden:

$$I_t = 2 \int_A \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_{yy} + I_{xx} = I_p ,$$

$$\tau_{zx} = -2 \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{M_t}{I_t} y , \quad \tau_{zy} = 2 \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{M_t}{I_t} x .$$

Als Torsionsträgheitsmoment erhält man für Kreis- und Kreisringquerschnitte wie erwartet das polare Flächenträgheitsmoment, auch die Schubspannungsformeln werden bestätigt.

Für kompliziertere Querschnittsformen lässt sich die Torsionsaufgabe im Allgemeinen nur numerisch lösen. Mit Hilfe geeigneter Diskretisierungsverfahren (Differenzenverfahren, Methode der finiten Elemente) stellt dies aber heute kein grundsätzliches Problem mehr dar.

Die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Werte für den Rechteckquerschnitt können z. B. (bis auf den theoretischen Wert für $\frac{h}{b} \rightarrow \infty$ in der letzten Spalte) mit einem Finite-Elemente-Programm nachgerechnet werden, das eine Element-Matrix für die Lösung der Poissonschen Differenzialgleichung bereitstellt (siehe Beispiel im Abschnitt 34.3.3, wo die Berechnung eines Wertes demonstriert wird).

I_t und W_t für die Formeln 21.11 bis 21.13 für Rechteckquerschnitte:

$$I_t = c_1 h b^3 , \quad W_t = c_2 h b^2 \quad (21.17)$$

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2	4	10	∞
c_1	0,141	0,196	0,229	0,281	0,312	1/3
c_2	0,208	0,231	0,246	0,282	0,312	1/3

(c_1 und c_2 aus Tabelle)

- ⇒ Die maximale Schubspannung tritt immer am Außenrand der engsten Querschnittsstelle auf, beim Rechteckquerschnitt also in der Mitte der längeren Seite.
- ⇒ Für sehr schmale Rechtecke ($\frac{h}{b} \rightarrow 0$) nähern sich die Werte für c_1 und c_2 immer mehr dem Wert $\frac{1}{3}$, so dass $I_t = \frac{hb^3}{3}$ und $W_t = \frac{hb^2}{3}$ als Torsionsträgheitsmoment bzw. Torsionswiderstandsmoment für das „unendlich dünne Rechteck“ angesehen werden dürfen. Auf diese beiden Formeln wird im Abschnitt 21.3.2 noch einmal zurückgegriffen.
- ⇒ Früher wurden Lösungen für die Torsionsaufgaben vielfach experimentell ermittelt, wobei die Tatsache genutzt wurde, dass die Poissonsche Differenzialgleichung auch andere physikalische Vorgänge beschreibt:

Eine ebene Membran mit festgehaltenem Rand, die von einer Seite unter konstanten Druck gesetzt wird, wölbt sich so, dass die Verschiebung $w(x, y)$ der Poissonschen Differenzialgleichung genügt. Der Anstieg des Membranhügels ist also der Schubspannung in einem entsprechenden Querschnitt unter Torsionsbelastung proportional („Seifenhaut-Gleichnis“).

Auch die Strömung einer in einem oben offenen Gefäß zirkulierenden Flüssigkeit (das Gefäß habe konstanten Querschnitt) wird durch die Poissonsche Differenzialgleichung beschrieben. Dabei ist die Strömungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Schubspannung in einem tordierten Stab mit gleichem Querschnitt proportional.

21.3 St.-Venant'sche Torsion dünnwandiger Querschnitte

Neben den Kreis- und Kreisringquerschnitten gibt es noch eine große Gruppe praktisch sehr wichtiger Querschnitte, für die durch (recht restriktiv anmutende, aber gerechtfertigte) zusätzliche Annahmen das St.-Venant'sche Torsionsproblem unter Umgehung der Lösung der Poisson'schen Differentialgleichung 21.14 behandelt werden kann. Es sind die dünnwandigen Profile (Wandstärken sind wesentlich kleiner als die übrigen Querschnittsabmessungen), für die die Spannungs- und Verformungsberechnung in den beiden folgenden Abschnitten behandelt wird. Dabei muss zwischen geschlossenen Querschnitten (z. B.: Ringquerschnitte, Kastenquerschnitte) und offenen Querschnitten (z. B.: L- und T-Profile) unterschieden werden.

21.3.1 Dünnwandige geschlossene Querschnitte

Es werden dünnwandige geschlossene Querschnitte entsprechend Abbildung 21.6 betrachtet (mathematisch: 2-fach zusammenhängender Bereich, kompliziertere Profile mit mehr als einer geschlossenen Zelle werden hier nicht behandelt). Die gestrichelt gezeichnete Linie halbiert die Dicke t an jeder Stelle.

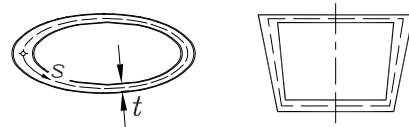


Abbildung 21.6: Dünnwandige geschlossene Querschnitte, $t(s)$ darf veränderlich sein

Diese Profil-Mittellinie repräsentiert gemeinsam mit der Dicke $t(s)$ die Geometrie des Querschnitts. Die Querschnitts-Koordinate s , die an einem beliebigen Punkt beginnt, folgt der Profil-Mittellinie. Die Koordinate, die (in Längsrichtung des Torsionsstabes) die Lage des Querschnitts beschreibt, wird wie bisher mit z bezeichnet. Folgende Annahmen werden für die Berechnung der Spannungen und Verformungen dünnwandiger geschlossener Querschnitte getroffen:

- ⇒ Die Dicke $t(s)$ ist klein im Vergleich mit den übrigen Querschnittsabmessungen und verändert sich mit s nicht sehr stark.
- ⇒ Die Querschnittsabmessungen sind wie das Torsionsmoment M_t in Längsrichtung des Torsionsstabes (z -Richtung) konstant (Hohlzylinder, in den ein Torsionsmoment über den Endquerschnitt eingeleitet wird).
- ⇒ Bei der Verformung behalten die Querschnitte ihre ursprüngliche Form, es dürfen allerdings unterschiedliche Verschiebungen der Querschnittspunkte in z -Richtung (Querschnittsverwölbungen) auftreten.

Abbildung 21.7 zeigt die Lage einiger spezieller Punktes des Querschnitts (A, B, \dots) nach der Verformung (A', B', \dots). Die Längsverschiebungen (w_A, w_B, \dots) verwölben den Querschnitt, der sich außerdem um den Torsionswinkel φ verdreht und in der Draufsicht (aus der z -Richtung) seine ungeänderte Form zeigt.

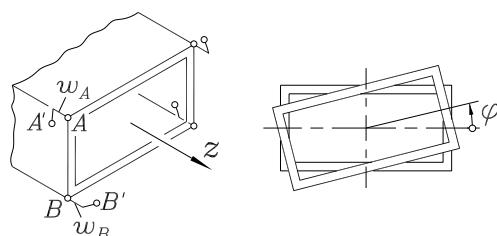


Abbildung 21.7: Querschnitte behalten (in der Draufsicht) ihre Form, dürfen sich aber verwölben

- ⇒ Die Verwölbung des Querschnitts kann sich frei ausbilden (St.-Venantsche Torsion), so dass keine Normalspannungen durch die Längsverschiebungen hervorgerufen werden.
- ⇒ Die Schubspannungen sind über die Profildicke konstant.

Der Fehler, der mit der letzten Annahme hingenommen wird, kann am einfachen Beispiel abgeschätzt werden: Für einen dünnwandigen Kreisring mit dem Innenradius r_i und dem Außenradius $r_i + t$ ergibt die Rechnung nach den Formeln für den Kreisring 21.2 und 21.5 ein Verhältnis der Schubspannungen am Außenrand τ_a und am Innenrand τ_i von $\frac{\tau_a}{\tau_i} = \frac{r_i+t}{r_i} = 1 + \frac{t}{r_i}$. Die Theorie des dünnwandigen geschlossenen Querschnitts würde etwa den Mittelwert dieser beiden Spannungen liefern. Wenn t klein gegenüber dem Radius ist, kann dieser Fehler hingenommen werden.

Die (über die Dicke t konstanten) Schubspannungen werden zum *Schubfluss*

$$T = \tau t \quad (21.18)$$

(Dimension: „Kraft/Länge“) zusammengefasst, der in der Profil-Mittellinie angreift und tangential zu dieser gerichtet ist.

Die Abbildung 21.8 zeigt ein aus dem Torsionsstab herausgeschnittenes Element. Nach dem Gesetz der zugeordneten Schubspannungen 20.1 wirkt natürlich auch der Schubfluss in den Längsschnitten in gleicher Größe. Da keine Normalspannungen wirken (spannungsfreies Verwölben, Querschnitte behalten ihre Form), kann das Gleichgewicht am Element nur erfüllt sein, wenn T an allen Elementrändern den gleichen Wert hat:

Der Schubfluss $T = \tau t$ infolge Torsion ist in den Querschnitten eines dünnwandigen geschlossenen Profils konstant.

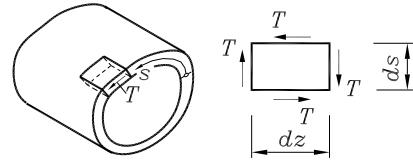


Abbildung 21.8: Der Schubfluss T muss (Gleichgewicht) konstant sein

Die resultierende Momentwirkung des gesamten Schubflusses eines Querschnitts muss (bezüglich eines beliebigen Punktes P) dem Torsionsmoment äquivalent sein. Die Abbildung 21.9 zeigt die (differenziell kleine) Kraft $T ds$, die der Schubfluss an einem Element der Länge ds hervorruft. Sie hat die Momentwirkung $r^* T ds$ mit dem Hebelarm r^* , der senkrecht auf der Tangente an die Profil-Mittellinie steht. Das Summieren (Integrieren) aller differenziell kleinen Momente über den Umfang liefert die resultierende Momentwirkung des Schubflusses:

$$M_t = \oint T r^* ds = T \oint r^* ds .$$

Der Kreis im Integralsymbol deutet ein Umlaufintegral an: Die obere Grenze beschreibt den gleichen Punkt wie die untere Grenze, wobei s sich um die Gesamtlänge der Profil-Mittellinie vergrößert hat. T kann vor das Integral gezogen werden, das verbleibende Integral lässt sich sehr schön geometrisch deuten: Die in der Abbildung 21.9 angedeutete Dreiecksfläche $dA_m = r^* \frac{ds}{2}$

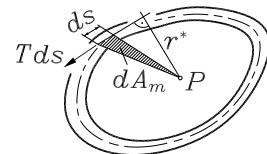
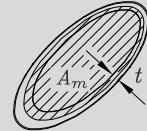


Abbildung 21.9: Momentwirkung des Schubflusses

(„Grundlinie · Höhe / 2“) summiert sich mit den anderen differenziell kleinen Dreiecksflächen bei der Integration über den Umfang zur Gesamtfläche A_m , die von der Profil-Mittellinie umschlossen wird. Das in der Formel verbliebene Integral liefert also die doppelte Fläche $2A_m$, und man erhält nach RUDOLF BREDT (1842 - 1900) eine recht einfache Formel zur

Berechnung des Schubflusses in einem dünnwandigen geschlossenen Querschnitt:

$$T = \frac{M_t}{2A_m} \quad (1. \text{ Bredtsche Formel}) . \quad (21.19)$$



A_m ist die von der Profil-Mittellinie des Querschnitts eingeschlossene Fläche (in der Skizze schraffiert). Die Schubspannung als Quotient aus Schubfluss und Wanddicke

$$\tau(s) = \frac{T}{t(s)} \quad (21.20)$$

hat ihren maximalen Wert an der Querschnittsstelle mit der geringsten Dicke t_{min} .

Die Verzerrungen der Elemente des ausschließlich durch Schubspannungen belasteten Torsionsstabs werden durch die Gleitwinkel γ beschrieben, die nach dem Hookeschen Gesetz 12.6 mit den Schubspannungen entsprechend $\tau = G\gamma$ verknüpft sind. Um die daraus resultierenden Verformungen zu berechnen, wird zunächst am einfachen Beispiel demonstriert, wie aus der Gleitung γ die Verdrehung und die Verwölbung der Querschnitte entstehen.

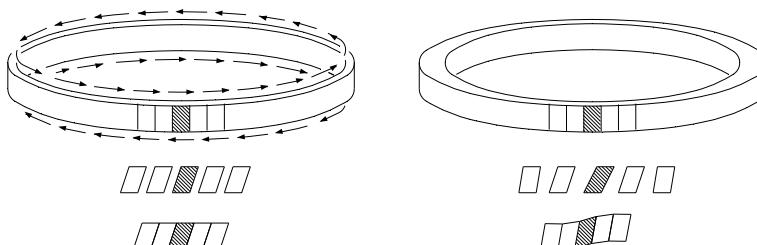


Abbildung 21.10: Die konstante Dicke eines Kreisrings (links) führt zu konstanten Verzerrungen, veränderliche Dicke (rechts) und damit veränderliche Verzerrungen führen zu Verwölbungen

Betrachtet wird zunächst eine unendlich dünne Scheibe, die aus einem Torsionsstab mit *Kreisringquerschnitt konstanter Dicke* herausgeschnitten wurde (Abbildung 21.10, links). Der über den Umfang konstante Schubfluss ist bei konstanter Dicke einer konstanten Schubspannung äquivalent, die wiederum zu konstanten Gleitwinkeln führt: Die in der Abbildung angedeuteten Rechtecke werden zu kongruenten Parallelogrammen verzerrt, die ohne Verwölbung der Querschnittsflächen auch nach der Verformung zusammenpassen.

Bei einem *Kreisringquerschnitt mit veränderlicher Dicke* (Abbildung 21.10, rechts) entspricht der über den Umfang konstante Schubfluss nach 21.20 einer veränderlichen Schubspannung, die benachbarte Elemente unterschiedlich verzerrt. Diese können nach der Verformung nur bei gleichzeitiger Verschiebung der Querschnittspunkte in Längsrichtung des Torsionsstabes zusammenpassen: Der Querschnitt verwölbt sich.

Die Gleitung wird entsprechend **Abbildung 21.11** in zwei Summanden zerlegt:

$$\gamma = \gamma_\varphi + \gamma_w$$

mit den Anteilen γ_φ (verursacht die Verdrehung der Querschnitte gegeneinander) und γ_w , der zur Verwölbung führt.

Die **Abbildung 21.12** zeigt den Zusammenhang zwischen γ_φ und dem Torsionswinkel φ . Zwei benachbarte Querschnitte (Abstand dz) verdrehen sich (unter Beibehaltung ihrer Form) gegeneinander um den Winkel $d\varphi$. Für die differenziell kleinen Größen ($\gamma_\varphi \approx \tan \gamma_\varphi$) liest man ab:

$$\gamma_\varphi = \frac{dv}{dz} ,$$

wobei dv die Verschiebung eines Punktes tangential zur Profil-Mittellinie ist. Tatsächlich bewegen sich alle Punkte der Profil-Mittellinie bei der Verdrehung auf konzentrischen Kreisen. Ein Punkt A (unterer Teil der **Abbildung 21.12**) bewegt sich nach A' entlang $r d\varphi$, und man liest den Zusammenhang

$$dv = r d\varphi \cos \alpha = r^* d\varphi$$

ab, wobei $r^* = r \cos \alpha$ der senkrechte Abstand vom Bezugspunkt P zur Tangente an die Profil-Mittellinie ist. Zwischen dem Gleitwinkel-Anteil γ_φ und dem Torsionswinkel φ besteht also der Zusammenhang:

$$\gamma_\varphi = r^* \frac{d\varphi}{dz} = r^* \varphi' . \quad (21.21)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Gleitwinkel-Anteil γ_w und der (senkrecht zur Querschnittsfläche gerichteten) Verschiebung w , die die Verwölbung darstellt, kann aus der **Abbildung 21.13** abgelesen werden:

$$\gamma_w = \frac{dw}{ds} . \quad (21.22)$$

Damit sind beide Gleitwinkel-Anteile mit den entsprechenden Verschiebungen verknüpft. Andrerseits kann die Gleitung γ über das Hookesche Gesetz im Zusammenhang mit 21.19 und 21.20 aus dem im Querschnitt wirkenden Torsionsmoment berechnet werden:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{Gt} = \frac{M_t}{2A_m Gt} = \gamma_\varphi + \gamma_w . \quad (21.23)$$

Mit einem kleinen Trick gelingt die Entkopplung der beiden Verschiebungen. Die Beziehung 21.23 wird auf beiden Seiten über den gesamten Umfang der Profil-Mittellinie integriert (Umlaufintegral). In

$$\oint \frac{M_t}{2A_m Gt} ds = \oint \gamma_\varphi ds + \oint \gamma_w ds$$

wird das letzte Integral

$$\oint \gamma_w ds = \oint \frac{dw}{ds} ds = \oint dw = w_{END} - w_{ANF} = 0 ,$$

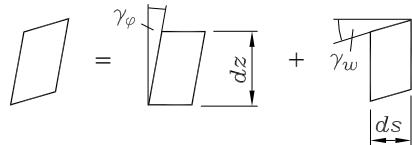


Abbildung 21.11: Gleitungsanteile aus Verdrehung und Verwölbung

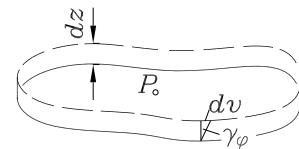


Abbildung 21.12: Gleitung γ_φ und Torsionswinkel φ

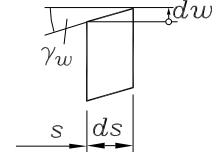


Abbildung 21.13: γ_w und dw

weil Endpunkt und Anfangspunkt beim geschlossenen Profil zusammenfallen, so dass ihre Verschiebungen gleich sind. Es verbleibt

$$\frac{M_t}{2A_m G} \oint \frac{ds}{t(s)} = \oint \gamma_\varphi ds = \varphi' \oint r^* ds = 2A_m \varphi' ,$$

wobei alle nicht von s abhängigen Größen vor die Integrale gezogen wurden. Außerdem wurde die bereits bei der Herleitung der Spannungsformel 21.19 gewonnene Erkenntnis genutzt, dass das Umlaufintegral über r^* gleich der doppelten Fläche ist, die von der Profil-Mittellinie umschlossen wird. Nach Umstellen der Beziehung entsprechend

$$G \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \varphi' = M_t$$

erkennt man die Ähnlichkeit mit der Gleichung 21.11, die es nahelegt, den Bruch als Torsionsträgheitsmoment I_t für den dünnwandigen geschlossenen Querschnitt zu definieren¹.

Der Verdrehwinkel eines Torsionsstabes mit dünnwandigem geschlossenen Querschnitt
kann nach den Formeln 21.11 bzw. 21.13 berechnet werden. Für das Torsionsträgheitsmoment gilt:

$$I_t = \frac{4A_m^2}{U(s)} \quad \text{mit} \quad U(s) = \oint \frac{ds}{t(s)} \quad (\text{2. Bredtsche Formel}) . \quad (21.24)$$

⇒ Das Umlaufintegral in 21.24 lässt sich für einen wichtigen Sonderfall recht einfach lösen. Für *Querschnitte mit stückweise konstanter Dicke* t_1, t_2, \dots jeweils auf Abschnitten mit den Längen s_1, s_2, \dots gilt (auch bei gekrümmter Profil-Mittellinie):

$$U(s) = \oint \frac{ds}{t(s)} = \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} + \dots . \quad (21.25)$$

Wenn $\varphi' = \frac{M_t}{GI_t}$ berechnet wurde, kann bei Bedarf auch die Verwölbung des Querschnitts aus 21.23 in Verbindung mit 21.21 und 21.22 ermittelt werden. Man erhält

$$\frac{dw(s)}{ds} = \frac{M_t}{2A_m G t(s)} - \varphi' r^*(s)$$

bzw. nach Integration über s :

$$w(s) = \frac{M_t}{2A_m G} \int \frac{ds}{t(s)} - \varphi' \int r^*(s) ds + C . \quad (21.26)$$

Die Integrationskonstante in 21.26 kann ermittelt werden, indem für einen beliebigen Punkt s des Querschnitts die Verschiebung $w = 0$ gesetzt wird. Dann erhält man alle übrigen Verschiebungen w relativ zu der tatsächlichen Verschiebung an dieser Stelle. Man darf natürlich auch $w(s=0) = 0$ setzen, so dass die Integrationskonstante verschwindet. Hier soll 21.26 benutzt werden, um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein spezieller Querschnitt zu wölbfreier Torsion führt.

¹ Zwischenruf in der Vorlesung: „Was muss das für ein Mensch sein, der sich solche Formeln ausdenkt?“ Antwort: Rudolf Bredt war ein erfolgreicher Unternehmer. Seine Kranbaufirma brachte 1876 den weltweit ersten elektrisch betriebenen Kran auf den Markt. Er war ein begnadeter Praktiker, der sich auch vor der Theorie nicht scheute.

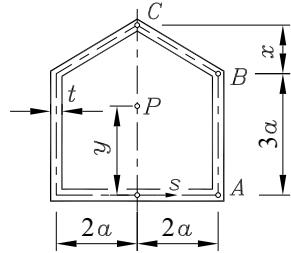
Beispiel:

Für den skizzierten geschlossenen dünnwandigen einfach-symmetrischen Querschnitt mit konstanter Wandstärke t ist die Abmessung x zu bestimmen, für die der Querschnitt bei Torsionsbelastung wölf frei bleibt.

Gegeben: a .

Mit der von der Profil-Mittellinie umschlossenen Fläche

$$A_m = 12a^2 + 2ax$$



und dem Umlaufintegral (für konstante Dicke t : „Umfang / Dicke“)

$$U(s) = \oint \frac{ds}{t(s)} = \frac{10a + 2\sqrt{4a^2 + x^2}}{t}$$

ergibt sich das Torsionsträgheitsmoment

$$I_t = \frac{4(12a^2 + 2ax)^2 t}{10a + 2\sqrt{4a^2 + x^2}} .$$

Die Koordinate s soll (wie skizziert) auf der Symmetrielinie starten, mit $w = 0$ bei $s = 0$ verschwindet die Integrationskonstante in 21.26, und mit $\varphi' = \frac{M_t}{G I_t}$ erhält man:

$$w(s) = \frac{M_t}{G} \left[\frac{1}{2(12a^2 + 2ax)} \frac{s}{t} - \frac{10a + 2\sqrt{4a^2 + x^2}}{4(12a^2 + 2ax)^2 t} \int r^* ds \right] .$$

Da r^* (senkrechter Abstand der Punkte der Profil-Mittellinie vom Bezugspunkt P) abschnittsweise konstant ist, liefert auch das Integral über r^* eine lineare Abhängigkeit von s . Dieses Integral ist allerdings von der Lage des Bezugspunktes P abhängig, die in vertikaler Richtung (wie skizziert) durch die Strecke y beschrieben werden soll. Die Verschiebung w ist gleich Null, wenn in der vorstehenden Formel die eckige Klammer verschwindet. Im Bereich von $s = 0$ bis zum Punkt A ist dies der Fall, wenn

$$\int r^* ds = \int y ds = ys = \frac{12a^2 + 2ax}{5a + \sqrt{4a^2 + x^2}} s \quad (0 \leq s \leq 2a)$$

gilt, woraus sich

$$y = \frac{12a^2 + 2ax}{5a + \sqrt{4a^2 + x^2}}$$

ergibt. Wegen der bereichsweise linearen Abhängigkeit $w(s)$ genügt es, für jeden weiteren Bereich jeweils das Verschwinden vom w für nur einen zusätzlichen Punkt zu fordern. Für den Punkt B lautet die Bedingung:

$$y_{2a+2a} = \frac{12a^2 + 2ax}{5a + \sqrt{4a^2 + x^2}} 5a .$$

Daraus berechnet man

$$x = \frac{3}{2}a \quad \text{und damit} \quad y = 2a \quad .$$

Bevor kontrolliert wird, ob sich auch für den Punkt C (und damit auch für den gesamten Bereich B-C) keine w -Verschiebung ergibt, soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Berechnung des Integrals über r^* auch dann geometrisch anschaulich deutbar ist, wenn sich die Integration nicht über den gesamten Umfang erstreckt: Das Ergebnis entspricht der doppelten Fläche, die von einer Linie überstrichen wird, die von P zur Profil-Mittellinie gezogen wird und dort über den Integrationsbereich wandert. Von $s = 0$ bis zum Punkt C überstreicht diese Linie gerade die halbe „Profil-Mittellinien-Fläche“, so dass das Integral über r^* gleich der gesamten Fläche A_m ist. So lässt sich leicht bestätigen, dass auch am Punkt C keine Verschiebung w auftritt und damit aus Symmetriegründen der gesamte Querschnitt wölbfrei ist, wenn (wie oben berechnet) $x = 1,5a$ ist.

- ⇒ Der Bezugspunkt P ist (vgl. die Herleitung der Verformungsbeziehungen) der Punkt, um den sich der Querschnitt dreht (alle Punkte des Querschnitts bewegen sich auf konzentrischen Kreisen). Bei wölfreien Querschnitten wie im gerade behandelten Beispiel bleiben alle Querschnittspunkte bei Drehung um diesen Punkt in der Ebene, in der sie vor der Verformung lagen. Man beachte, dass der Punkt P nicht mit dem Schwerpunkt des Querschnitts identisch ist.
- ⇒ Man überzeugt sich leicht, dass für das Fünfeck des behandelten Beispiels bei den Abmessungen, die zu Wölfreiheit führen, der Punkt P der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die Mittellinien aller Geradenstücke tangiert. Es lässt sich zeigen, dass diese Aussage verallgemeinerungsfähig ist:

Dünnwandige geschlossene Querschnitte mit konstanter Profildicke, deren Mittellinien *Kreistangenten-Polygone* darstellen (und damit natürlich auch beliebige Dreiecke, das Quadrat und alle regelmäßigen n -Ecke) sind wölffrei.

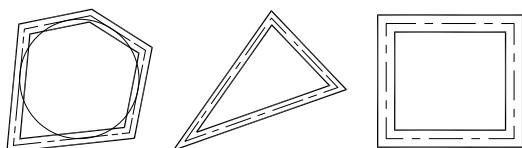


Abbildung 21.14: Wölfreie Querschnitte

- ⇒ Für dünnwandige geschlossene Rechteckquerschnitte kann auf gleiche Weise wie im gerade behandelten Beispiel gezeigt werden, dass sie sich bei Torsionsbelastung nicht verwölben, wenn ihre Abmessungen die Beziehung

$$\frac{t_h}{h} = \frac{t_b}{b}$$

erfüllen.

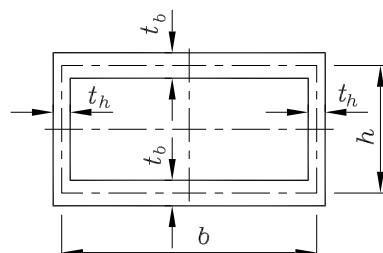


Abbildung 21.15: Dünwandige geschlossene Rechteck-Querschnitte können wölffrei sein

21.3.2 Dünnwandige offene Querschnitte

Betrachtet wird zunächst ein schmales Rechteck, dessen Breite t deutlich kleiner als seine Höhe s ist (Bezeichnungen t und s mit Rücksicht auf die anschließende Erweiterung der Betrachtungen). Zur Berechnung der Schubspannungen, die einem Torsionsmoment M_t in diesem Querschnitt äquivalent sind, werden folgende Annahmen getroffen:

- ⇒ Die Schubspannungen verlaufen parallel zu den Rändern der langen Seiten des Rechtecks, sind über die Höhe konstant und werden am oberen und unteren Rand innerhalb eines sehr schmalen Bereichs umgelenkt.
 - ⇒ Die Schubspannungen sind über die Breite des Rechtecks linear veränderlich mit gleich großen, entgegengesetzten Maximalwerten τ_{max} an den Rändern.

Diese beiden Annahmen berechtigen zu der in der Abbildung 21.16 skizzierten Modellvorstellung: Die Schubspannung wird jeweils über die halbe Breite (wie eine Dreieckslast) zum Schubfluss

$$T = \frac{1}{4} \tau_{max} t$$

zusammengefasst, der im Abstand $\frac{2}{3} \cdot \frac{t}{2}$ von der Mittellinie wirkt und an den beiden Enden (in gleicher Größe) umgelenkt wird.

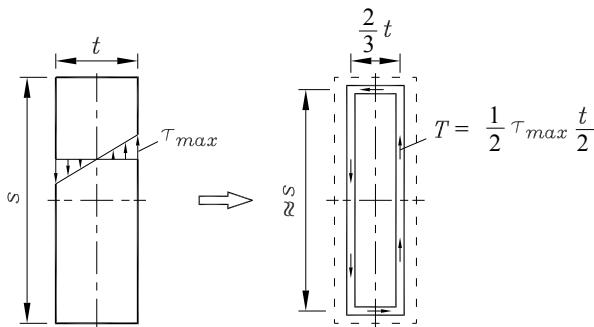


Abbildung 21.16: Modellvorstellung vom Schubfluss in einem schmalen Rechteck

Die resultierende Momentwirkung dieses Schubflusses muss dem Torsionsmoment äquivalent sein:

$$M_t = 2 \left(T s \frac{t}{3} + T \frac{2}{3} t \frac{s}{2} \right) = \frac{1}{3} \tau_{max} s t^2 \quad .$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn das beschriebene Modell als geschlossenes dünnwandiges Profil betrachtet wird, für das die Formel 21.19 gilt:

$$M_t = 2A_m T = 2 \frac{2}{3} t s \frac{1}{4} \tau_{max} t = \frac{1}{3} \tau_{max} s t^2 \quad .$$

Die sich daraus ergebende Formel für die maximale Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{st^2} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{mit} \quad W_t = \frac{1}{3}s t^2$$

findet eine weitere Bestätigung beim Vergleich mit den Formeln für den Rechteckquerschnitt 21.17 aus dem Abschnitt 21.2. Die getroffenen Annahmen für das schmale Rechteck entsprechen dem theoretischen Wert, der sich für das „unendlich schmale Rechteck“ bei exakter Lösung des Randwertproblems für die Torsionsfunktion 21.14 und 21.15 ergibt. Deshalb wird auch die für die Verformungsberechnung benötigte Formel für das Torsionsträgheitsmoment vom „unendlich schmalen Rechteck“ übernommen:

$$I_t = \frac{1}{3} st^3 \quad .$$

Der Fehler, der mit der Anwendung dieser Formeln verbunden ist, ist also umso geringer, je kleiner das Verhältnis $\frac{t}{s}$ ist. Für $\frac{t}{s} = 0,1$ beträgt die Abweichung sowohl für I_t als auch für W_t etwa 6 % vom exakten Wert.

Für dieses Seitenverhältnis sind in **Abbildung 21.17** einige Schubspannungsverläufe der exakten Lösung skizziert, die die eingangs getroffenen Annahmen bestätigen: Die vertikal gerichtete Schubspannung τ_{zy} folgt über die Breite praktisch exakt einem linearen Verlauf und bleibt über die Höhe (hier dargestellt für den Außenrand) konstant bis auf einen sehr kleinen Bereich am Ende. Sie wird dort umgelenkt, wobei wieder nur in einem sehr schmalen Bereich horizontal gerichtete Schubspannungen τ_{zx} vorhanden sind.

Die Modellvorstellung, nach der ein schmales Rechteck wie ein dünnwandiger geschlossener Querschnitt betrachtet werden kann, bietet sich geradezu dafür an, auf andere dünnwandige offene Profile ausgedehnt zu werden. Tatsächlich ist es gerechtfertigt, die Formeln für das schmale Rechteck auch auf Profile mit gekrümmter Mittellinie anzuwenden.

Die **Abbildung 21.18** zeigt einen Querschnitt, dessen Mittellinie ein Kreisbogen ist. Bei einem Radienverhältnis $\frac{r_a}{r_i} = 1,2$ entspricht der Öffnungswinkel $\alpha = 104,2^\circ$ exakt dem Abmessungsverhältnis $\frac{t}{s} = 0,1$, wobei als Breite t (Profildicke) die Differenz der Radien $r_a - r_i$ und als „Höhe“ s die Länge der Profil-Mittellinie verwendet wird.

Für diesen Querschnitt sollen die Ergebnisse, die sich mit den oben angegebenen Formeln ergeben, verglichen werden mit denen, die eine Lösung nach der „exakten“ St.-Venant'schen Theorie (Gleichungen 21.14 und 21.15) liefert (diese Lösung ist für den betrachteten Querschnitt nur auf numerischem Wege möglich und wurde hier mit einem Finite-Elemente-Programm gewonnen, vgl. www.TM-aktuell.de, siehe auch **Abbildung 21.22** auf Seite 383). Für das Torsionsträgheitsmoment ergibt sich:

$$\text{Dünnwandiges offenes Profil:} \quad I_t = \frac{st^3}{3} = 3,33t^4 \quad ,$$

$$\text{exakt:} \quad I_t = 3,12t^4 \quad .$$

Der Fehler entspricht exakt dem, der sich bei diesem Abmessungsverhältnis auch für das schmale Rechteck ergab. Für die Schubspannung erhält man nach der exakten Theorie unterschiedliche Werte für die beiden Ränder, nach der Theorie des dünnwandigen offenen Querschnitts nur einen Wert für die Maximalspannung:

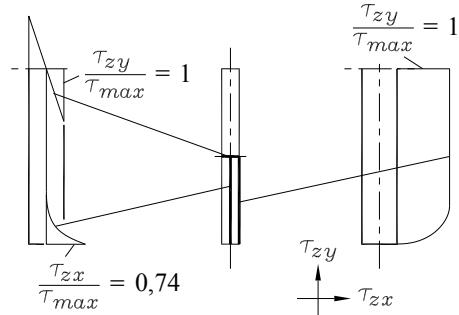


Abbildung 21.17: Die exakte Lösung für ein schmales Rechteck bestätigt die Modellvorstellung

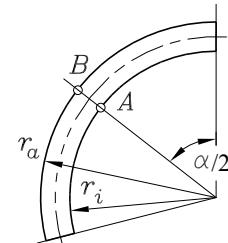


Abbildung 21.18: Gekrümmte Mittellinie



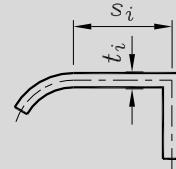
$$\begin{aligned} \text{Dünnwandiges offenes Profil: } \tau_{max} &= 0,300 \frac{M_t}{t^3} \quad , \\ \text{exakt: } \tau_A &= 0,333 \frac{M_t}{t^3} \quad , \quad \tau_B = 0,309 \frac{M_t}{t^3} \quad . \end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit der Formeln für das schmale Rechteck auf dünnwandige offene Querschnitte, deren Profil-Mittellinie keine Gerade ist, erstreckt sich natürlich auch auf Profile mit abgewinkelten Mittellinien (z. B. L-Profil). Es ist sogar gerechtfertigt, bei Querschnitten, die aus mehreren dünnwandigen Abschnitten zusammengesetzt sind, das Torsionsträgheitsmoment I_t (näherungsweise) durch Addition der Anteile aus den einzelnen Abschnitten zu berechnen, und dies gilt auch für verzweigte Profile (z. B.: T-Profil, I-Profil) und für Profile mit unterschiedlichen Breiten t_i in den einzelnen Abschnitten. Das Torsions-Widerstandsmoment W_t zur Berechnung der maximalen Schubspannung ergibt sich dann als Quotient aus I_t und der größten Breite t_{max} .

Für die Berechnung der maximalen Schubspannung und der Verformung in dünnwandigen offenen Profilen können die Formeln für die St.-Venant'sche Torsion 21.12 und 21.13 verwendet werden mit

$$I_t \approx \frac{1}{3} \sum_i s_i t_i^3 \quad , \quad (21.27)$$

$$W_t \approx \frac{I_t}{t_{max}} \quad . \quad (21.28)$$



Man beachte, dass die maximale Schubspannung (im Gegensatz zum geschlossenen Querschnitt) dort auftritt, wo der Querschnitt seine größte Wanddicke t_{max} hat.

☞ Dünnwandige offene Querschnitte sind gegen Torsion wesentlich empfindlicher als geschlossene Querschnitte (vgl. die nachfolgenden Beispiele). Dies ist verständlich, denn die gegenläufigen Schubflüsse entlang der langen Seiten haben wegen des kleinen Hebelarms nur eine geringe Momentwirkung.

☞ Die Formel 21.27 gilt für Querschnitte mit abschnittsweise konstanter Dicke t_i . Für einen Abschnitt i mit veränderlicher Dicke $t_i(s_i)$ darf der entsprechende Summand aus

$$I_{t,i} = \frac{1}{3} \int_{s_i} t_i^3(s) ds$$

berechnet werden.



Abbildung 21.19: Abschnitt mit kontinuierlich veränderlicher Dicke

☞ Natürlich ist die Spannungs- und Verformungsberechnung nach 21.12 und 21.13 unter Verwendung der Querschnittswerte für das dünnwandige offene Profil nach 21.27 und 21.28 nur erlaubt, wenn sich die Querschnittsverwölbungen frei ausbilden können. Andernfalls treten (im Allgemeinen nicht vernachlässigbare) Normalspannungen auf, der Torsionsstab wird steifer, und man muss die (hier nicht behandelte) Theorie der Wölkrafttorsion bemühen.

Die Verwölbung eines einzelnen Rechteck-Abschnitts kann wegen der Dünzwandigkeit vernachlässigt werden. Als *Verwölbung des dünnwandigen offenen Profils* werden die Verschiebungen der Punkte der Profil-Mittellinie senkrecht zur Querschnittsfläche bezeichnet. Zwei benachbarte Querschnittsflächen, die sich (unter Beibehaltung ihrer geometrischen Form) gegeneinander verdrehen, würden auch die zwischen ihnen liegenden Mittellinienelemente verzerren. Da aber in der Mittellinie gerade keine Schubspannung (und damit keine Verzerrung) auftritt, weichen die Punkte der Mittellinie so aus (Mittellinie verwölbt sich), dass die Elemente unverzerrt bleiben.

- ⇒ Für einige häufig verwendete offene Profile darf die Theorie der St.-Venant'schen Torsion jedoch bedenkenlos verwendet werden: Querschnitte, die aus sternförmig in einem Punkt zusammenlaufenden dünnen Rechtecken (auch bei unterschiedlichen Wanddicken) bestehen (und damit sämtliche L- und T-Profile), sind wölf frei.

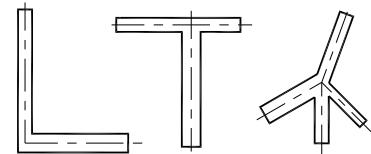


Abbildung 21.20: Wölf frei dünnwandige offene Profile

Beispiel 1:

Wenn die beiden nebenstehend skizzierten dünnwandigen U-Profile ($t \ll a$) durch eine Schweißnaht verbunden werden (Fall a), entsteht ein offener Querschnitt, mit zwei Schweißnähten (Fall b) wird der Querschnitt geschlossen.

Im Fall a errechnet sich die maximale Schubspannung infolge eines Torsionsmoments M_t nach 21.27 und 21.28 zu

$$\tau_{max,a} = \frac{M_t t}{I_t} = \frac{3 M_t}{4 a t^2},$$

im Fall b ergibt sich nach 21.19 und 21.20:

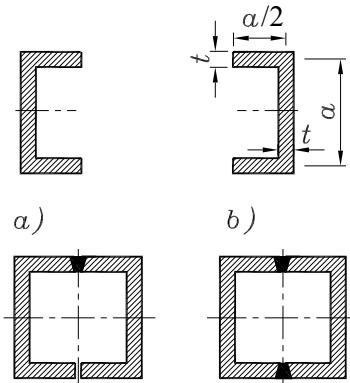
$$\tau_{max,b} = \frac{M_t}{2 A_m t} = \frac{M_t}{2 a^2 t}.$$

Das Verhältnis der maximalen Schubspannungen von offenem und geschlossenem Querschnitt beträgt in diesem Fall

$$\frac{\tau_{max,a}}{\tau_{max,b}} = 1,5 \frac{a}{t}.$$

In der Praxis sieht das z. B. so aus: Ein Normprofil U100, das mit einer Höhe $h = 100\text{ mm}$ und einer Breite $b = 50\text{ mm}$ genau dem Abmessungsverhältnis dieses Beispiels (mit $a = h$) entspricht, hat eine Profildicke von $t = 8,5\text{ mm}$. Damit ergäbe sich ein Verhältnis der maximalen Schubspannungen von offenem und geschlossenem Querschnitt von $\frac{\tau_{max,a}}{\tau_{max,b}} = 17,6$.

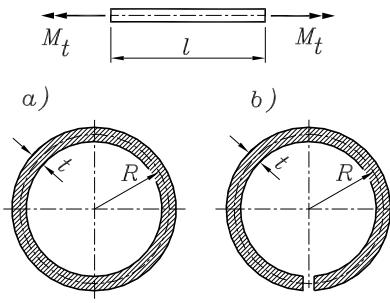
- ⇒ Man beachte, dass wegen des Gesetzes der zugeordneten Schubspannungen 20.1 die Torsionsschubspannungen nicht nur im Querschnitt, sondern auch in Längsschnitten auftreten. Im Beispiel 1 würden sie also die Schweißnähte in Längsrichtung auf Abscherung beanspruchen.



Beispiel 2:

Ein Torsionsstab (Länge: l) mit dünnwandigem Querschnitt ist durch ein konstantes Torsionsmoment M_t belastet. Im Fall a ist der Querschnitt ein geschlossener Kreisring, im Fall b ist der Ring in Längsrichtung aufgeschlitzt (die Breite des Schlitzes kann vernachlässigt werden). Für ein Abmessungsverhältnis $\frac{R}{t} = 8$ sind zu berechnen

- die maximalen Torsionsschubspannungen,
- die relativen Verdrehwinkel der Endquerschnitte.



Mit Hilfe der Formeln 21.19, 21.20 und 21.24 für geschlossene dünnwandige Profile ergibt sich für den Fall a :

$$\begin{aligned} T &= \frac{M_t}{2A_m} = \frac{M_t}{2\pi R^2} & \Rightarrow \quad \tau_{max,a} &= \frac{T}{t} = \frac{M_t}{2\pi R^2 t} , \\ I_t &= \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\pi^2 R^4}{\frac{2\pi R}{t}} = 2\pi R^3 t & \Rightarrow \quad \Delta\phi_a &= \frac{M_t l}{G I_t} = \frac{M_t l}{2G\pi R^3 t} . \end{aligned}$$

Die maximale Schubspannung und der relative Verdrehwinkel für den offenen Querschnitt (Fall b) wird mit den Querschnittswerten nach 21.27 und 21.28 berechnet:

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{2}{3}\pi R t^3 , & W_t &= \frac{I_t}{t} = \frac{2}{3}\pi R t^2 , \\ \tau_{max,b} &= \frac{M_t}{W_t} = \frac{3M_t}{2\pi R t^2} , & \Delta\phi_b &= \frac{M_t l}{G I_t} = \frac{3M_t l}{2G\pi R t^3} . \end{aligned}$$

Die Werte, die sich für das offene Profil ergeben, sind deutlich größer, wie sich aus

$$\frac{\tau_{max,b}}{\tau_{max,a}} = 3 \frac{R}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\phi_b}{\Delta\phi_a} = 3 \frac{R^2}{t^2}$$

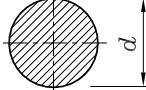
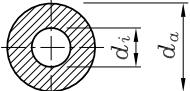
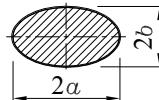
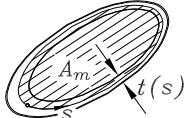
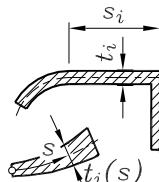
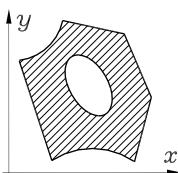
mit dem gegebenen Abmessungsverhältnis $R/t = 8$ erkennen lässt:

$$\frac{\tau_{max,b}}{\tau_{max,a}} = 24 ; \quad \frac{\Delta\phi_b}{\Delta\phi_a} = 192 .$$

- ⇒ Dieses Ergebnis ist repräsentativ und zeigt die geringe Tragfähigkeit von dünnwandigen offenen Profilen. Im Gegensatz zur Biegebeanspruchung, bei der z. B. ein **I**-Profil ideal ist, weil der wesentliche Anteil der Querschnittsfläche möglichst weit von der Biegeachse entfernt liegt, ist ein solches Profil für die Torsionsbeanspruchung ausgesprochen ungeeignet.
- ⇒ Wenn Torsionsbeanspruchung für dünnwandige Profile unvermeidbar ist, sollte nach Möglichkeit wenigstens eine geschlossene Zelle vorhanden sein. Besteht ein Querschnitt aus einer solchen geschlossenen Zelle und nicht geschlossenen dünnwandigen Teilquerschnitten, können letztere im Allgemeinen bei der Torsionsrechnung vernachlässigt werden. Ein guter Kompromiss ist in der Regel ein Kastenprofil, wie es die beiden zusammengeschweißten **U**-Profile des Beispiels 1 bilden, das bei sehr günstiger Ausnutzung der Querschnittsfläche sowohl für Biegung als auch Torsion als steif und fest gelten darf.

21.4 Formeln für die St.-Venantsche Torsion

Für alle behandelten Torsionsprobleme dürfen die Verformungen und die maximalen Schubspannungen nach den auf der Seite 366 zusammengestellten Formeln 21.11 bis 21.13 berechnet werden, wenn man die folgenden Torsionsträgheitsmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t verwendet:

Kreis		$I_t = \frac{\pi d^4}{32}$, $W_t = \frac{\pi d^3}{16}$
Kreisring		$I_t = \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{32}$, $W_t = \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16d_a}$
Ellipse		$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$, $W_t = \frac{\pi a b^2}{2}$ (Voraussetzung für W_t -Formel: $b \leq a$)
Rechteck		$I_t = c_1 h b^3$, $W_t = c_2 h b^2$ mit c_1 und c_2 aus der Tabelle auf Seite 368
Dünnwandiger geschlossener Querschnitt		$I_t = \frac{4A_m^2}{U(s)}$ mit $U(s) = \oint \frac{ds}{t(s)}$ $W_t = 2A_m t_{min}$
Dünnwandiger offener Querschnitt		$I_t \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3$, $W_t \approx \frac{I_t}{t_{max}}$ Abschnitt mit veränderlicher Wanddicke: $I_{t,i} = \frac{1}{3} \int_{s_i} s_i t_i^3(s) ds$
Beliebiger Querschnitt		$I_t = 2 \int_A \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dA$, $\tau_{zx} = -2 \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\tau_{zy} = 2 \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ $\Phi(x,y)$ ist Lösung des Randwertproblems $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 1$ mit $\Phi_{Rand} = \text{konst.}$

Im Formelsatz für den beliebigen Querschnitt (letzter Eintrag in der Zusammenstellung auf der Seite 381) ergibt sich für einen wichtigen Sonderfall eine Vereinfachung der I_t -Formel. Der Integrand kann identisch durch

$$x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(x\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(y\Phi)}{\partial y} - 2\Phi$$

ersetzt werden (man überzeugt sich leicht durch Ausdifferenzieren der rechten Seite). In

$$I_t = 2 \int_A \left[\frac{\partial(x\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(y\Phi)}{\partial y} \right] dA - 4 \int_A \Phi dA$$

kann das erste Integral nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint P dx + \oint Q dy$$

durch zwei Umlaufintegrale ersetzt werden (Hinweis: Der Gaußsche Integralsatz gilt auch für mehrfach zusammengesetzte Flächen, wenn alle Konturen so durchlaufen werden, dass die Fläche immer links liegt, Abbildung 21.21). Man erhält:

$$I_t = -2 \oint y \Phi dx + 2 \oint x \Phi dy - 4 \int_A \Phi dA .$$

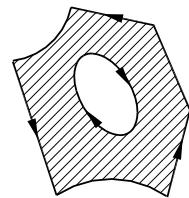


Abbildung 21.21: Gaußscher Integralsatz, Umlaufsinn bei mehrfach zusammengesetzter Fläche

Da in die beiden Umlaufintegrale nur die Φ -Werte der Ränder eingehen, liefern sie keinen Anteil für einen Rand mit $\Phi_{Rand} = 0$. Wenn es nur genau einen Rand gibt, kann diese Bedingung natürlich die allgemeine Bedingung $\Phi_{Rand} = \text{konst.}$ ersetzen, und für *einfach zusammenhängende Querschnittsflächen* (Flächen ohne Ausschnitte) darf ein vereinfachter Formelsatz für das St.-Venantische Torsionsproblem verwendet werden:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 1 \quad \text{mit} \quad \Phi_{Rand} = 0 \quad \text{und} \quad I_t = -4 \int_A \Phi dA . \quad (21.29)$$

21.5 Numerische Lösungen

Die Lösung des St.-Venantischen Torsionsproblems nach den Formeln für den beliebigen Querschnitt (Seite 381 bzw. Formelsatz 21.29) gelingt in geschlossener Form nur für wenige Spezialfälle. Ansonsten ist man auf numerische Lösungen angewiesen.

Für das schwierigste Problem, die Lösung der Poissonschen Differenzialgleichung, bietet sich das Differenzenverfahren an, das im Abschnitt 18.1 für eindimensionale Probleme besprochen wurde, weil eine Erweiterung auf zweidimensionale Aufgaben ohne Schwierigkeiten möglich ist: Analog zur Einteilung der x -Koordinate in äquidistante Abschnitte der Länge h wird auch die y -Koordinate äquidistant mit einer gegebenenfalls anderen Schrittweite k unterteilt, so dass die x - y -Ebene mit einem Rechtecknetz überzogen wird. Für die Punkte dieses Netzes wird die Differenzialgleichung durch Differenzengleichungen ersetzt, indem die partiellen Ableitungen analog zu den Formeln 18.1 durch Differenzenformeln ersetzt werden. Da Ableitungen in beiden

Richtungen in der Differenzialgleichung vorkommen, gehen in jede Differenzengleichung auch Nachbarpunkte in x - und y -Richtung ein.

Dieses früher sehr beliebte Verfahren zur Lösung der Poissonschen Differenzialgleichung ist bei der Aufstellung der Differenzengleichungen in Randnähe dann recht mühsam, wenn Randpunkte nicht mit den Punkten des rechteckigen Netzes zusammenfallen, was allerdings eher die Regel als die Ausnahme ist. Die Erfüllung der Randbedingungen kann dann nur durch Interpolation erreicht werden, was für jeden Randpunkt eine individuelle Betrachtung erfordert.

Deshalb ist das Differenzenverfahren auf diesem Gebiet fast völlig durch die Methode der finiten Elemente verdrängt worden. Mit Dreieckselementen gelingt es immer, beliebige Randkonturen ausreichend genau zu erfassen.

Die für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf das St.-Venantsche Torsionsproblem erforderlichen theoretischen Überlegungen können hier nicht dargestellt werden. Man findet sie unter www.TM-aktuell.de, u. a. mit Demonstration von Beispielen aus diesem Kapitel (**Abbildung 21.22** zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung).

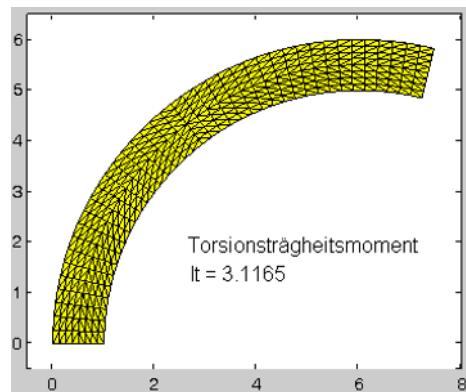


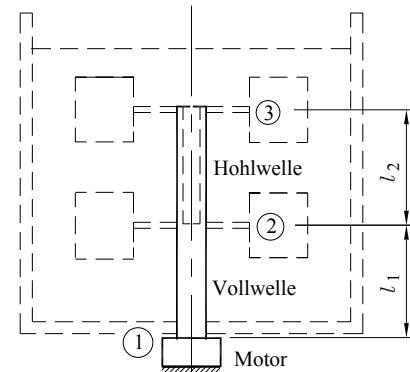
Abbildung 21.22: Berechnung von I_t mit Matlab-Femset, hier das Beispiel von Seite 377

21.6 Aufgaben

Aufgabe 21.1:

Der Antriebsmotor eines Rührwerks leistet 2 kW bei 100 Umdrehungen pro Minute. Es darf angenommen werden, dass jeweils die Hälfte dieser Leistung an den Punkten 2 bzw. 3 von der ausschließlich auf Torsion beanspruchten Welle an die Flügel des Rührwerks abgegeben wird.

Gegeben: $P = 2 \text{ kW}$; $l_1 = 100 \text{ mm}$;
 $n = 100 \text{ min}^{-1}$; $l_2 = 100 \text{ mm}$;
 $\tau_{zul} = 130 \text{ N/mm}^2$; $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

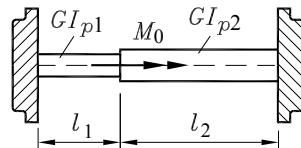


Man berechne

- das Drehmoment des Motors,
- den erforderlichen Durchmesser d für die Vollwelle zwischen 1 und 2 (Ergebnis aufrunden auf volle mm),
- den größtmöglichen Innendurchmesser d_i für die Hohlwelle zwischen 2 und 3, wenn diese den gleichen Außendurchmesser wie die Welle 1...2 hat (abrunden auf volle mm),
- den Gesamtverdrehwinkel der Welle 1...3 mit den unter b und c ermittelten Werten.

Aufgabe 21.2: Die Achse eines Radsatzes muss aus konstruktiven Gründen außermittig angetrieben werden.

Gegeben: $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$.



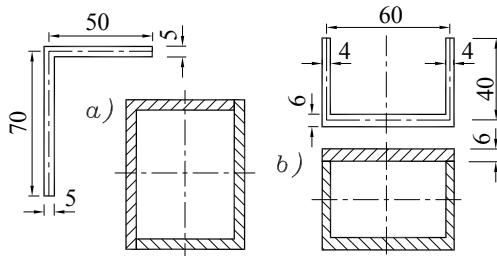
- Es ist das Verhältnis der polaren Flächenträgheitsmomente $\kappa = \frac{I_{p1}}{I_{p2}}$ zu berechnen, bei dem an beiden Rädern Momente gleicher Größe übertragen werden.
- Man berechne die erforderlichen Durchmesser in den Bereichen 1 und 2, wenn folgende Parameter gegeben sind: $M_0 = 1 \text{ kNm}$; $\lambda = 2$; $\tau_{zul} = 120 \text{ N/mm}^2$.

Aufgabe 21.3: Man weise nach, dass die Funktion

$$\Phi(x,y) = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

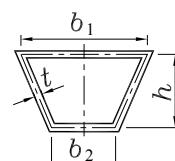
die Poissonsche Differenzialgleichung 21.14 und die Randbedingung 21.15 für einen elliptischen Rand erfüllt und damit die Torsionsfunktion für einen elliptischen Querschnitt darstellt, und leite dann das Torsionsträgheitsmoment I_t her, das in der Tabelle auf Seite 381 angegeben ist.

Aufgabe 21.4: Für die Herstellung eines Torsionsstabes stehen dünnwandige L- und U-Profile zur Verfügung. Zur Erhöhung der Torsionsfestigkeit und -steifigkeit können zwei L-Profile (Variante a) oder das U-Profil mit einem Deckblech (Variante b) zu einem geschlossenen Kastenprofil verbunden werden.



- Man ermittle, welche Variante zur Minimierung der Schubspannungen bzw. des Verdrehwinkels günstiger ist.
- Wie groß ist das Verhältnis $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ der größten Schubspannung τ_1 im offenen U-Profil zu der größten Schubspannung τ_2 im geschlossenen Profil (U-Profil und Deckblech)? Wie groß ist das Verhältnis der relativen Verdrehwinkel $\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2}$ zweier Torsionsstäbe mit entsprechenden Querschnitten?

Aufgabe 21.5: Für den skizzierten einfach symmetrischen Trapezquer schnitt ist die Abmessung b_2 so zu bestimmen, dass der auf Torsion belastete Querschnitt wölbfrei ist. Die Dicke t ist über den gesamten Umfang konstant.



Gegeben: b_1, h, t .

22 Zusammengesetzte Beanspruchung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Spannungen in Bauteilen berechnet, bei denen eine Abmessung deutlich größer war als die beiden anderen. Dabei wurde jeweils in nur einer Schnittfläche ($z = \text{konstant}$) die Spannung ermittelt, die sich infolge einer speziellen Schnittgröße ergibt.

Natürlich treten die unterschiedlichen Belastungsarten häufig gekoppelt auf, so ist zum Beispiel eine Biegespannung fast immer mit einer Querkraftbelastung (Schubspannung) verbunden. Außerdem beschränken sich die Spannungen auch bei den einfachen Bauteilen nicht auf eine Schnittfläche, weil Schubspannungen immer in zwei senkrecht aufeinander stehenden Schnittflächen paarweise auftreten.

In diesem Kapitel wird deshalb das Problem behandelt, wie ein Spannungszustand (hinsichtlich der Festigkeit des Bauteils) zu beurteilen ist, wenn mehrere Spannungskomponenten gleichzeitig wirken. Da diese Frage gerade auch für die komplizierteren Berechnungsmodelle der Festigkeitslehre bedeutsam ist, sollen diese hier erwähnt werden, auch wenn ihre Berechnung mit Ausnahme weniger Spezialfälle im Rahmen dieses Buches nicht behandelt werden kann.

22.1 Modelle der Festigkeitsberechnung

In den Kapiteln 14 bis 21 wurden mit dem *Stab*, dem *Biegeträger* und dem *Torsionsstab* ausschließlich *eindimensionale Modelle* der Festigkeitsberechnung behandelt (eine Abmessung ist deutlich größer als die beiden anderen).

Die Abbildung 22.1 (Modell: Zwei Deckenträger liegen auf den tragenden Wänden eines Gebäudes) zeigt zwei „eindimensionale“ Biegeträger zusammen mit zwei „zweidimensionalen“ Bauteilen.

Während bei den eindimensionalen Modellen die beiden anderen Dimensionen durch die Querschnittsabmessungen repräsentiert werden, ist bei den zweidimensionalen Modellen, so genannten *Flächentragwerken*, die Dicke des Bauteils die dritte Dimension. Diese kann (wie die Querschnittsfläche der eindimensionalen Modelle) veränderlich sein und bestimmt gemeinsam mit der Mittelfläche die Geometrie des zweidimensionalen Modells (die Mittelfläche wird von den Punkten gebildet, die die Dicke an jeder Stelle halbieren).

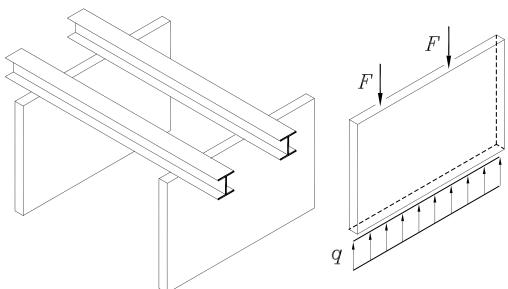


Abbildung 22.1: Biegeträger und Scheiben

Ein ebenes Flächentragwerk, das ausschließlich Belastungen (Einzellasten, Linienlasten) aufnimmt, die in der Mittelfläche liegen, wird als *Scheibe* bezeichnet.

Ebene Flächentragwerke, die auch Belastungen (Einzellasten, Linienlasten, Flächenlasten) senkrecht zur Mittelfläche aufnehmen, nennt man *Platten*, Flächentragwerke mit gekrümmter Mittelfläche heißen *Schalen*. Der Behälter in **Abbildung 22.2** zeigt eine Kombination aus Kreisplatte und Zylinderschale mit einer typischen Belastungsart (Flächenlast), die bei den eindimensionalen Berechnungsmodellen nicht vorkam.

Die Theorie der Berechnung von Flächentragwerken basiert auf ebenso sinnvollen (und durch die Praxis bestätigten) Annahmen, wie sie für die eindimensionalen Modelle getroffen wurden, allerdings gelingt nur für relativ wenige geometrische Formen (z. B. Rechteckscheibe, Rechteckplatte, Kreisscheibe und Kreisplatte, Zylinder-, Kugel- und Kegelschale) eine geschlossene analytische Lösung, meist sogar nur für ganz spezielle Belastung und Lagerung (z. B. für rotationssymmetrische Probleme, vgl. Kapitel 25).

Zahlreiche Bauteile entziehen sich jedoch völlig der gerade beschriebenen Klassifizierung (kompakte Körper wie Motorkolben, Maschinengruben oder die bizarren Geometrien von Gussgehäusen, ...). Sie müssen als dreidimensionale Modelle behandelt werden, für die die Berechnung bis auf (kaum erwähnenswerte) Ausnahmen nur numerisch möglich ist. Dafür stehen heute leistungsfähige Finite-Elemente-Programmsysteme zur Verfügung, und Hochleistungs-Computer gestatten die Behandlung von Modellen, die das Verhalten der realen Bauteile außerordentlich gut annähern.

Nicht zu unterschätzen ist jedoch der Aufwand, der mit der Beschreibung des Berechnungsmodells durch Eingabedaten auch dann verbunden ist, wenn komfortable Datengeneratoren verfügbar sind. Die Entscheidung für eine „3D-Rechnung“ sollte gut überlegt werden. Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken sind dagegen mit vergleichsweise geringem manuellen Aufwand für die Vorarbeiten verbunden.

Als Alternative zur numerischen Berechnung bietet sich häufig die experimentelle Spannungs- und Verformungsanalyse an, auf die man ohnehin dann zurückgreifen muss, wenn nicht alle erforderlichen Eingangsdaten für die Berechnung verfügbar sind, speziell die Belastung (z. B. in durchströmten oder umströmten Bauteilen, thermische Belastungen, ...) ist häufig nicht mit der gewünschten Genauigkeit verfügbar. Das Ziel der Festigkeitsrechnung (ob analytisch oder numerisch) oder der experimentellen Analyse ist jedoch immer die Ermittlung der Spannungen an verschiedenen Punkten des Bauteils, um sie mit den ertragbaren Spannungen vergleichen zu können (Festigkeitsnachweis, vgl. Kapitel 13).

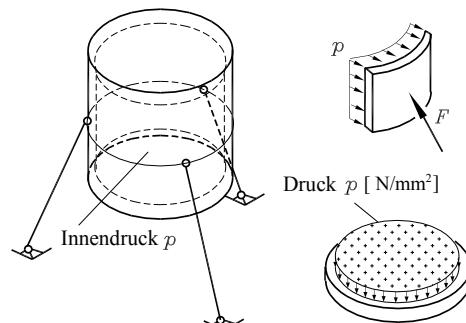


Abbildung 22.2: Kreisplatte und Zylinderschale

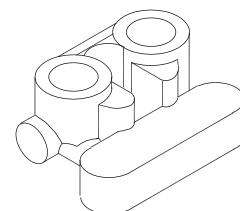


Abbildung 22.3: Typisches „3D-Modell“

22.2 Der einachsige Spannungszustand

Die Normalspannungen (unterschiedlicher Herkunft) in einer Schnittfläche haben die gleiche Richtung und dürfen deshalb durch Addition überlagert werden. Davon wurde bereits bei der Behandlung der Biegung um zwei Achsen (schiefe Biegung) und beim gekrümmten Träger Gebrauch gemacht.

Im geraden Träger werden Normalspannungen durch die Biegemomente und die Normalkraft F_N hervorgerufen. Bei Beachtung der für die Schnittgrößen getroffenen Vereinbarungen (Kapitel 7 und Abschnitt 8.4) und der verwendeten Koordinatensysteme gilt

$$\sigma_z(x, y) = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}}{I_{yy}} x . \quad (22.1)$$

Diese Formel liefert für jeden Punkt einer Querschnittsfläche (vorzeichensicher bei Einhaltung der Vereinbarungen) die aus Biegung und Normalkraft resultierende Gesamt-Normalspannung. Der Index z am Symbol für die Spannung kennzeichnet die Schnittfläche: σ_z wirkt in der Fläche $z = \text{konstant}$.

Beispiel:

Für den skizzierten Träger mit Quadratquerschnitt soll die Normalspannung in einem beliebigen Querschnitt des vertikalen Abschnitts bestimmt werden.

Gegeben: F , l , a .

Mit den Schnittgrößen

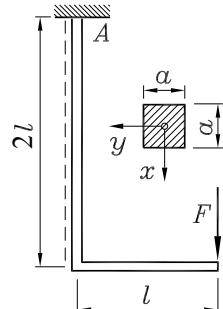
$$F_N = F \quad \text{und} \quad M_b = -Fl$$

(Bezugsfaser und damit y -Achse wie eingezeichnet) und den Querschnittskennwerten

$$A = a^2 \quad \text{und} \quad I_{xx} = \frac{a^4}{12}$$

ergibt sich die Spannungsverteilung:

$$\sigma_z = \frac{F_N}{A} + \frac{M_b}{I_{xx}} y = \frac{F}{a^2} - 12 \frac{Fl}{a^4} y = \frac{F}{a^2} \left(1 - 12 \frac{ly}{a^2} \right) .$$



- ⇒ Die Spannungs-Null-Linie (vgl. Abschnitt 19.1) liegt bei dieser kombinierten Beanspruchung (durch F_N und M_b) nicht mehr im Schwerpunkt der Querschnittsfläche.
- ⇒ Man erkennt an dem Ergebnis, dass die Normalspannung infolge F_N wesentlich kleiner als die Biegespannung ist. Die maximale Biegespannung $\sigma_{b,max} = \frac{6Fl}{a^3}$ im Querschnitt (am Rand bei $y = -\frac{a}{2}$) hat schon für $l = \frac{a}{6}$ den gleichen Betrag wie die Spannung infolge der Normalkraft. Das bedeutet: Eine äußere Kraft in Trägerlängsrichtung ruft schon bei etwas außermitigem Angriffspunkt eine Biegespannung hervor, die größer ist als die Spannung infolge der Normalkraft.

Wenn ein Bauteil ausschließlich durch *eine Normalspannung in einer Richtung beansprucht wird*, so spricht man von einem *einachsigen Spannungszustand*. Bei einer reinen Biegebeanspruchung

(ohne Querkraftschub) und Beanspruchung durch eine Normalkraft (wie im gerade behandelten Beispiel) ist diese Voraussetzung erfüllt.

Am Beispiel eines Zugstabs, dessen Querschnitt durch eine konstante Spannung σ_0 beansprucht ist (**Abbildung 22.4**), wird deutlich, dass in einem Schnitt, der nicht senkrecht zur Richtung zu σ_0 liegt, auch Schubspannungen auftreten.

Gleichgewicht in horizontaler Richtung ist an dem aus dem Stab herausgeschnittenen Keil nur herzustellen, wenn in der schrägen Schnittfläche A_φ neben der Normalspannung σ_φ auch eine Schubspannung τ_φ wirkt.

Die (konstanten) Spannungen in den Schnittflächen A_0 bzw. A_φ werden durch Multiplikation mit den Flächen zu Kräften $\sigma_0 A_0$ bzw. $\sigma_\varphi A_\varphi$. Diese Kräfte müssen die folgenden Gleichgewichtsbedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi A_\varphi - \sigma_0 A_0 \cos \varphi &= 0 \quad , \\ \tau_\varphi A_\varphi - \sigma_0 A_0 \sin \varphi &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Mit $A_0 = A_\varphi \cos \varphi$ ergeben sich daraus die

Spannungen in einem beliebigen Schnitt beim einachsigen Spannungszustand:

$$\sigma_\varphi = \sigma_0 \cos^2 \varphi \quad , \quad \tau_\varphi = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\varphi \quad . \quad (22.2)$$

- ⇒ Die Normalspannung wird (wie zu erwarten) am größten für $\varphi = 0$. In diesem Schnitt wirkt keine Schubspannung, und dies ist auch im Folgenden das Kriterium dafür, dass σ_0 eine so genannte *Hauptspannung* ist.
- ⇒ Bei Materialien, die besonders empfindlich gegen Schubbeanspruchung sind, ist also zu beachten, dass selbst beim einachsigen Spannungszustand, bei dessen Berechnung sich im Allgemeinen nur eine Normalspannung ergibt, eine Schubspannung wirkt, die in speziellen Fällen durchaus für das Versagen eines Bauteils verantwortlich sein kann.

Beim einachsigen Spannungszustand ergibt sich die maximale Schubspannung für $\varphi = 45^\circ$. Es ist die so genannte

$$\text{Hauptschubspannung} \quad \tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_0 \quad . \quad (22.3)$$

Die Formeln 22.2 und 22.3 gelten für einen beliebigen Punkt des Bauteils und damit auch, wenn die Spannung σ_0 nicht konstant ist (Beispiel: Biegespannung).

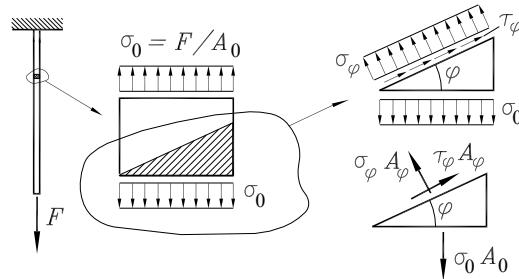


Abbildung 22.4: Auch beim einachsigen Spannungszustand gibt es Schubspannungen

22.3 Der ebene Spannungszustand

Der *ebene Spannungszustand* ist dadurch gekennzeichnet, dass in zwei senkrecht zueinander stehenden Schnitten Normal- und Schubspannungen vorhanden sein können, während in der dritten Richtung keine Spannungen wirken. Dieser Spannungszustand hat besondere praktische Bedeutung. Er ergibt sich zum Beispiel

- bei der kombinierten Biegemoment-, Normalkraft-, Querkraft- und Torsionsbeanspruchung der Träger, die in den Kapiteln 14 bis 21 behandelt wurden,
- im Inneren von Flächentragwerken (Abschnitt 22.1),
- an den von äußeren Kräften nicht belasteten Oberflächen beliebiger Bauteile. Da an der Oberfläche häufig die größten Spannungen auftreten (vgl. die Biegetheorie), liegt die kritische Spannung auch bei kompakten (schwierig zu berechnenden) Bauteilen meistens in einem Gebiet, in dem ein ebener Spannungszustand vorliegt. Gerade die Oberflächen sind aber für eine experimentelle Spannungsermittlung (Dehnmessstreifen, vgl. Beispiel 2 auf Seite 395) besonders gut zugänglich.

Der ebene Spannungszustand wird durch drei Spannungen bestimmt: σ_x , σ_y und τ_{xy} . Dabei wurde bereits berücksichtigt, dass die in den beiden Schnittflächen wirkenden Schubspannungen gleich sind (Gesetz der zugeordneten Schubspannungen 20.1).

Abbildung 22.5 zeigt ein aus einem Bauteil herausgeschnittenes differenziell kleines Element mit den Abmessungen $dx \cdot dy$. Die am Element angetragenen Spannungen sind nicht unabhängig voneinander, sie müssen ein Gleichgewichtssystem bilden. Dies wird hier nicht betrachtet, weil die Gleichgewichtsbedingungen in der Theorie der Spannungsberechnung bereits berücksichtigt sein müssen (man vergleiche hierzu die Theorie des Querkraftschubes, die das Gleichgewicht mit den Biegespannungen garantiert). Es sind vielmehr folgende Fragen interessant:

- ① Das x - y -Koordinatensystem, an dem sich die Richtungen der drei Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} orientieren, liegt recht willkürlich so, wie es für die Berechnung dieser Spannungen günstig gewesen sein mag. Wie groß sind die Spannungen in beliebigen Schnitten, die parallel zu einem (um den Winkel φ gedrehten) ξ - η -Koordinatensystem liegen?
- ② Bei welcher Schnittrichtung treten die maximalen Spannungen auf, wie groß sind die Maximalspannungen?

Zur Beantwortung dieser Fragen wird ein Keil aus dem Element herausgeschnitten, dessen eine Schnittfläche senkrecht zur Koordinatenachse ξ liegt (**Abbildung 22.6**).

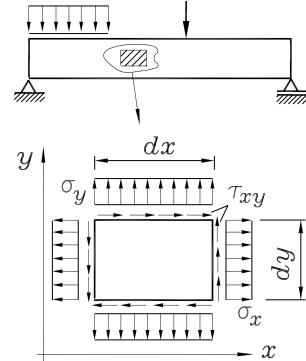


Abbildung 22.5: Ebener Spannungszustand in einem Biegeträger

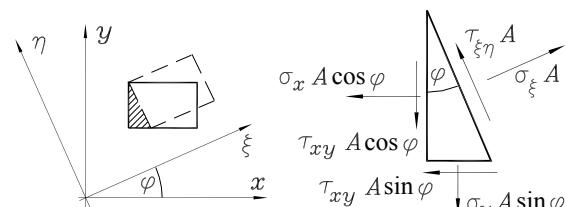


Abbildung 22.6: Spannungen in einem beliebigen Schnitt

Wenn diese Schnittfläche mit A bezeichnet wird, haben die zur x - bzw. y -Achse senkrecht stehenden Flächen die Größen $A \cos \varphi$ bzw. $A \sin \varphi$. In der Abbildung 22.6 sind die aus den Spannungen resultierenden Kräfte an den drei Flächen angetragen, die folgende Gleichgewichtsbedingungen erfüllen müssen:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi A &= \sigma_x A \cos^2 \varphi + \tau_{xy} A \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y A \sin^2 \varphi + \tau_{xy} A \sin \varphi \cos \varphi , \\ \tau_{\xi\eta} A &= \tau_{xy} A \cos^2 \varphi - \sigma_x A \cos \varphi \sin \varphi - \tau_{xy} A \sin^2 \varphi + \sigma_y A \sin \varphi \cos \varphi .\end{aligned}\quad (22.4)$$

Nach einigen elementaren Umformungen ergeben sich die nachfolgenden Formeln, die durch eine Beziehung für σ_η ergänzt wurden, die sich aus Gleichgewichtsbetrachtungen an einem Keil mit einer Schnittfläche senkrecht zur η -Achse ergibt.

Transformation der Spannungen des ebenen Spannungszustandes auf ein gedrehtes Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi , \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi , \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi .\end{aligned}\quad (22.5)$$

Der Aufbau dieser Formeln entspricht exakt der Struktur der Transformationsformeln 16.12 für die Flächenträgheitsmomente (Seite 227). Deshalb können alle dort gewonnenen Aussagen sinngemäß übernommen werden:

Es existiert immer ein gegenüber dem x - y -Koordinatensystem um den Winkel φ_1 gedrehtes Koordinatensystem mit den Achsen 1 und 2, für das die Schubspannungen verschwinden. 1 und 2 sind die *Hauptspannungsrichtungen* des ebenen Spannungszustandes. Die Normalspannungen σ_1 und σ_2 in diesen Richtungen sind die

Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} , \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} .\end{aligned}\quad (22.6)$$

σ_1 ist die größte und σ_2 die kleinste aller Normalspannungen, die sich bezüglich beliebiger Richtungen für den betrachteten Punkt finden lassen. Die beiden Hauptspannungsrichtungen stehen senkrecht aufeinander.

Der Winkel φ_1 zwischen der x -Achse und der Hauptspannungsrichtung 1 errechnet sich nach:

$$\tan \varphi_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_2} .\quad (22.7)$$

- ⇒ Man beachte: Im Gegensatz zu den Hauptträgheitsmomenten (Abschnitt 16.2.5) können die beiden Hauptspannungen beliebige Vorzeichen haben. Deshalb ist σ_1 nicht immer auch die absolut größte Spannung in diesem Punkt.

Um Richtung und Größe der maximalen Schubspannung zu ermitteln, wird die Formel für $\tau_{\xi\eta}$ in 22.5 nach φ abgeleitet und Null gesetzt. Man gewinnt folgende Aussage:

Die maximalen Schubspannungen treten in Schnitten auf, deren Richtungen um 45° zu den Hauptspannungsrichtungen gedreht sind. In den *Hauptschubspannungsrichtungen*

$$\varphi_\tau = \varphi_1 \pm 45^\circ$$

wirken die *Hauptschubspannungen*:

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad . \quad (22.8)$$

Auf CHRISTIAN OTTO MOHR (1835 - 1918) geht die Idee zurück, für die Transformationsgleichungen 22.5 und 22.6 grafische Lösungen bereitzustellen: Wenn man aus der ersten und dritten Gleichung in 22.5 den Winkel φ eliminiert (quadrieren und addieren, etwas mühsam, aber machbar), entsteht mit

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2$$

(die Indizes ξ und η wurden weggelassen) eine Gleichung, die in einem σ - τ -Koordinatensystem einen Kreis beschreibt.

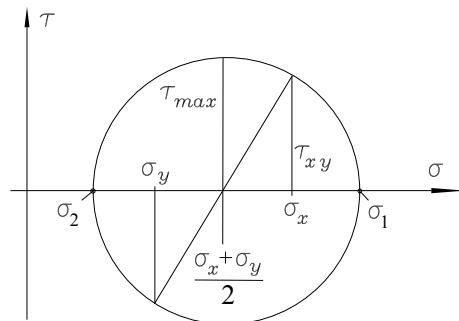


Abbildung 22.7: Mohrscher Spannungskreis

Abbildung 22.7 zeigt diesen *Mohrschen Spannungskreis*. Man erkennt, dass er bei einem gegebenen Satz von Spannungen für einen Punkt σ_x , σ_y und τ_{xy} einfach zu konstruieren ist. Jeder beliebige Durchmesser verbindet zwei Punkte auf dem Kreis, für die die Spannungen für die entsprechende Spannungsrichtung φ abgelesen werden können. Speziell sieht man auf der σ -Achse die beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 , der Radius entspricht dem τ_{max} .

Dass σ_1 und τ_{max} um 90° versetzt erscheinen (und nicht um 45° , wie es nach 22.8 sein muss), deutet darauf hin, dass im Mohrschen Spannungskreis mit dem doppelten Winkel 2φ gearbeitet werden muss, was speziell dann zu beachten ist, wenn man die Spannungen unter einem bestimmten Winkel entnehmen will.

Darauf wird hier nicht weiter eingegangen, denn der Mohrsche Spannungskreis war ein sehr nützliches Werkzeug, als der Ingenieur noch mit dem Rechenschieber arbeitete¹. Heute gibt es

¹Dass der Mohrsche Spannungskreis hier erläutert wird, hat neben der Tatsache, dass Abbildung 22.7 noch einmal recht anschaulich alle wesentlichen Größen des ebenen Spannungszustands zeigt, auch den Grund, Chr. O. Mohr zu würdigen, auf den z. B. auch ein geniales Verfahren zur grafischen Ermittlung der Durchbiegung einer Welle zurückgeht, das allerdings (welch ein Glück für alle Studenten!) überhaupt nicht mehr verwendet wird.

natürlich keinen Grund mehr, die Auswertungen der Formeln 22.5 bis 22.8 durch das Zeichnen eines Kreises zu realisieren.

Es sollen hier noch die Zusammenhänge der Spannungen mit den Dehnungen behandelt werden, weil bei der experimentellen Spannungsanalyse mittels Dehnmessstreifen primär die Dehnungen als Versuchsergebnisse anfallen, die dann (unter der Voraussetzung elastischer Verformung) über das Hookesche Gesetz in die Spannungen umgerechnet werden können. Dabei ist zu beachten, dass beim ebenen Spannungszustand mit Normalspannungen in zwei Richtungen jede Normalspannung auch die Dehnung in der jeweils dazu senkrechten Richtung beeinflusst (Querkontraktion, vgl. Abschnitt 12.4). Die Dehnung in einer Richtung ergibt sich also beim ebenen Spannungszustand aus der Überlagerung des Anteils aus der Spannung in dieser Richtung mit der Querkontraktion aus der anderen Spannung:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - v \sigma_y) \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - v \sigma_x) \quad . \quad (22.9)$$

Diese beiden Formeln lassen sich nach den Spannungen umstellen und werden ergänzt durch den Zusammenhang zwischen Schubspannung und Gleitung nach 12.6 im Zusammenhang mit 12.7. Dieser Formelsatz wird bezeichnet als

Hookesches Gesetz für den ebenen Spannungszustand:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_x + v \varepsilon_y) \quad , \quad \sigma_y = \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_y + v \varepsilon_x) \quad , \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+v)} \gamma_{xy} \quad . \end{aligned} \quad (22.10)$$

Die Formeln 22.10 gelten für zwei beliebige zueinander senkrechte Richtungen, also auch für die Hauptspannungsrichtungen, für die wegen der verschwindenden Schubspannung (und damit auch der Gleitung γ_{xy}) die dritte Gleichung entfällt.

Durch Einsetzen der Spannungen nach 22.10 in die Transformationsformeln 22.5 erhält man die Formeln für die

Transformation der Dehnungen und der Gleitung des ebenen Spannungszustandes auf ein gedrehtes Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi \quad , \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi \quad , \\ \gamma_{\xi\eta} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi \quad . \end{aligned} \quad (22.11)$$

Die formale Ähnlichkeit dieser Formeln mit den Transformationsformeln 22.5 gestattet die Übertragung der Erkenntnisse über die Spannungen auf Aussagen über die Dehnung:

- ⇒ Es existiert immer ein gegenüber dem x - y -Koordinatensystem um den Winkel φ_1 gedrehtes Koordinatensystem mit den Achsen 1 und 2, für das die Gleitung verschwindet. 1 und 2 sind die *Hauptdehnungsrichtungen, die mit den Hauptspannungsrichtungen identisch sind*. Die *Hauptdehnungen* berechnen sich nach

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \right] , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y - \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \right] \quad (22.12)$$

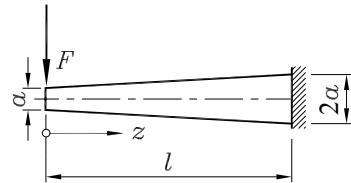
und der Winkel φ_1 zwischen der x -Achse und der Hauptdehnungsrichtung 1 aus

$$\tan \varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} . \quad (22.13)$$

Diese Formel liefert den gleichen Wert für φ_1 wie 22.7. Die Hauptspannungen lassen sich über das Hookesche Gesetz 22.10 also auch aus den Hauptdehnungen berechnen.

Beispiel 1:

Für den skizzierten Kragträger mit veränderlichem Quadrat-Querschnitt wurde (als Beispiel 4 im Abschnitt 16.3 auf Seite 241) berechnet, dass bei $z = \frac{l}{2}$ die maximale Biegespannung auftritt. Für diesen Querschnitt sollen die Hauptspannungen (bei Berücksichtigung der Biegespannung und der Querkraftschubspannung) ermittelt werden.



Gegeben: F , a , $l = 10a$.

Der Querschnitt bei $z = \frac{l}{2}$ hat die Kantenlänge $1,5a$. Mit

$$M_b = -F \frac{l}{2} , \quad I_{xx} = \frac{(1,5a)^4}{12} = \frac{27}{64} a^4$$

ergibt sich die Biegespannungsverteilung nach 16.3:

$$\sigma_b = -\frac{32}{27} \frac{F l}{a^4} y .$$

Nach 20.2 (Seite 346) erhält man mit (vgl. Beispiel 1 im Abschnitt 20.1 auf Seite 346)

$$F_Q = -F , \quad S_x = \left(\frac{(1,5a)^2}{4} - y^2 \right) \frac{1,5a}{2}$$

den Verlauf der Querkraftschubspannung

$$\tau = -\frac{32}{27} \frac{F}{a^4} \left(\frac{9}{16} a^2 - y^2 \right) .$$

Zur Erinnerung: Die y -Achse hat ihren Ursprung im Schwerpunkt des Querschnitts und ist nach unten gerichtet, die Biegespannungen wirken senkrecht zum Querschnitt (in z -Richtung), so dass alle Spannungen in der y - z -Ebene zu sehen sind (Abbildung 22.8).

Für das betrachtete Beispiel gilt also:

$$\sigma_y = 0 , \quad \sigma_z = \sigma_b , \quad \tau_{zy} = \tau .$$

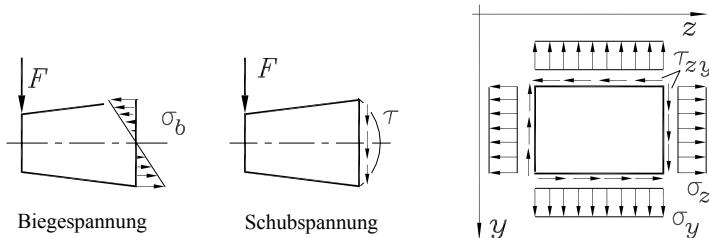


Abbildung 22.8: Biegespannungs- und Schubspannungsverteilung über die Querschnittshöhe, eine Normalspannung σ_y gibt es bei diesem Beispiel nicht

Die **Abbildung 22.8** zeigt die Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe und das Definiti onsbild mit den Bezeichnungen, die für die Formeln des ebenen Spannungszustands verwendet werden. Die Hauptspannungen in einem beliebigen Punkt des Querschnitts (sie sind über die Breite konstant) berechnen sich bei entsprechender Modifizierung der Indizes nach 22.6:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{16}{27} \frac{Fl}{a^4} y \pm \sqrt{\left(\frac{16}{27} \frac{Fl}{a^4} y\right)^2 + \left[\frac{32}{27} \frac{F}{a^4} \left(\frac{9}{16} a^2 - y^2\right)\right]^2} .$$

Bei einer Höhe von $1,5a$ für den betrachteten Querschnitt darf y in dieser Formel Werte im Bereich $-0,75a \leq y \leq 0,75a$ annehmen. Die folgende Tabelle vergleicht für einige Punkte des Querschnitts die Biegespannungen und Querkraftschubspannungen mit den Hauptspannungen:

y	σ_b	τ	σ_1	σ_2
$-0,75a$	$8,889 F/a^2$	0	$8,889 F/a^2$	0
$-0,50a$	$5,926 F/a^2$	$-0,370 F/a^2$	$5,949 F/a^2$	$-0,023 F/a^2$
$-0,25a$	$2,963 F/a^2$	$-0,593 F/a^2$	$3,077 F/a^2$	$-0,114 F/a^2$
0	0	$-0,667 F/a^2$	$0,667 F/a^2$	$-0,667 F/a^2$
$0,25a$	$-2,963 F/a^2$	$-0,593 F/a^2$	$0,114 F/a^2$	$-3,077 F/a^2$
$0,50a$	$-5,926 F/a^2$	$-0,370 F/a^2$	$0,023 F/a^2$	$-5,949 F/a^2$
$0,75a$	$-8,889 F/a^2$	0	0	$-8,889 F/a^2$

- ⇒ Die Ergebnisse zeigen, dass die Hauptspannung in keinem Punkt größer wird als die maximale Biegespannung. Dieses Ergebnis ist repräsentativ: Im Allgemeinen kann der aus der Querkraft herrührende Spannungsanteil vernachlässigt werden, zumal die Querkraftschubspannungen an den Punkten der maximalen Biegespannung (Ober- bzw. Unterkante des Querschnitts) verschwinden.
- ⇒ Die Schubspannung aus der Querkraftbelastung kann allerdings zur Beurteilung der Haltbarkeit von Fügestellen (vgl. Abschnitt 20.3) bedeutsam sein. Die maximale Schubspannung tritt in der Schwerpunkt faser auf. Da dort keine Normalspannungen wirken (neutrale Faser für Biegebeanspruchung), verlaufen die beiden Hauptspannungen unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen.

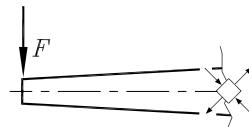


Abbildung 22.9: Hauptspannungen am Punkt der größten Schubspannung

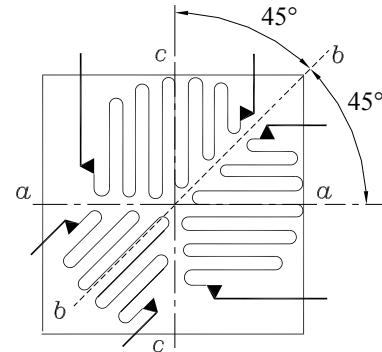
Die „reine Schubbelastung“ in der neutralen Faser eines Biegeträgers wird durch eine Zug- und eine Druckspannung repräsentiert. Da diese beiden Hauptspannungen den gleichen Absolutbetrag haben, können sie (und damit die Schubspannung) gegebenenfalls durch nur eine Dehnungsmessung (z. B. mit einem unter 45° angebrachten Dehnmessstreifen) ermittelt werden.

Beispiel 2:

Bei einer experimentellen Spannungsanalyse wurden mit der skizzierten Dehnmessstreifen-Rosette die Dehnungen in den beiden senkrecht aufeinander stehenden Richtungen a und c und die Dehnung in der unter 45° zu a und c geneigten Richtung b gemessen:

$$\varepsilon_a = 0,70 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_b = 0,81 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_c = 0,27 \cdot 10^{-3}.$$

Berechnet werden sollen



- die Größe der Hauptdehnungen ε_1 und ε_2 und die Richtung der Hauptdehnung ε_1 ,
- die Größe der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 , wenn für das Material der Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ und die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$ angenommen werden dürfen.

Die in den Richtungen a und c gemessenen Dehnungen entsprechen den Dehnungen in x - und y -Richtung (willkürliche Wahl des Koordinatensystems):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 0,70 \cdot 10^{-3} ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_c = 0,27 \cdot 10^{-3} .$$

Zur Berechnung der Hauptdehnungen nach 22.12 fehlt der Gleitwinkel γ_{xy} . Die beiden ersten Gleichungen 22.11 enthalten jedoch γ_{xy} und (wie gegeben) drei Dehnungen, so dass die Gleitung berechnet werden kann, wenn ε_b z. B. als ε_ξ in Richtung $\varphi = 45^\circ$ eingesetzt wird:

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_b = \frac{1}{2} (\varepsilon_a + \varepsilon_c) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} .$$

Daraus errechnet sich

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c = -0,81 \cdot 10^{-3} ,$$

und aus 22.12 und 22.13 erhält man die Hauptdehnungen und die Hauptdehnungsrichtung 1:

$$\varepsilon_1 = 0,94 \cdot 10^{-3} ; \quad \varepsilon_2 = 0,027 \cdot 10^{-3} ; \quad \varphi_1 = -31^\circ .$$

Da die Hauptspannungsrichtungen mit den Hauptdehnungsrichtungen übereinstimmen (Abbildung 22.10), können die Hauptspannungen nach dem Hookeschen Gesetz 22.10 aus den Hauptdehnungen ermittelt werden:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = 219 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = 71,6 \text{ N/mm}^2 .$$

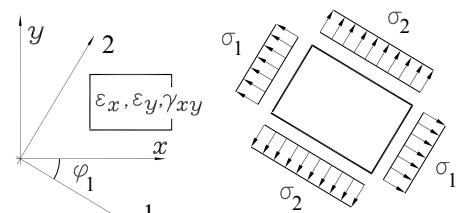


Abbildung 22.10: Richtungen der Hauptspannungen und Hauptdehnungen

22.4 Der räumliche Spannungszustand

Der allgemeine Fall ist der *räumliche Spannungszustand*: In drei aufeinander senkrecht stehenden Schnittflächen wirken

- 3 Normalspannungen σ_x , σ_y , σ_z und
- 6 Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} .

Der erste Index kennzeichnet die Schnittfläche (der Index x steht also z. B. für die Schnittfläche $x = \text{konstant}$), der zweite Index bei den Schubspannungen steht für die Richtung innerhalb der Schnittfläche (bei den Normalspannungen erübrigts sich die Richtungsangabe, weil sie immer senkrecht zur Schnittfläche gerichtet sind).

Nach dem Gesetz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen 20.1 gilt

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

so dass der räumliche Spannungszustand durch die Angabe von insgesamt 6 unterschiedlichen Spannungskomponenten beschrieben wird.

Der räumliche Spannungszustand in einem Punkt kann durch die Angabe von sechs Spannungskomponenten (3 Normalspannungen σ_x , σ_y , σ_z und 3 Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) eindeutig beschrieben werden.

Es ergeben sich nun die entsprechenden Probleme, die auf Seite 389 für den ebenen Spannungszustand als Fragen ① und ② formuliert wurden: Wie sieht es bei beliebiger anderer Schnittfläche aus und wo treten die maximalen Spannungen auf? Für den ebenen Spannungszustand konnten die Antworten darauf mit Gleichgewichtsbetrachtungen entsprechend Abbildung 22.6 auf anschaulichem Wege gefunden werden. Weil die Anschauung im dreidimensionalen Fall sehr schnell verloren geht, empfiehlt sich ein eher formaler Weg.

Dieser Weg wird zunächst noch einmal für den ebenen Spannungszustand demonstriert, weil er dafür auch anschaulich ist, um ihn dann formal auf den räumlichen Spannungszustand zu übertragen:

- Die Koordinaten x und y werden durch x_1 und x_2 ersetzt, und die Spannungen werden sämtlich mit dem Symbol σ bezeichnet, das durch zwei Indizes ergänzt wird:

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \tau_{xy} \Rightarrow \sigma_{11}, \quad \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}. \quad (22.14)$$

- Die Schnittebene in beliebiger Richtung wird durch den (auf ihr senkrecht stehenden) Einheitsvektor e_ξ beschrieben (Abbildung 22.11):

$$e_\xi = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (22.15)$$

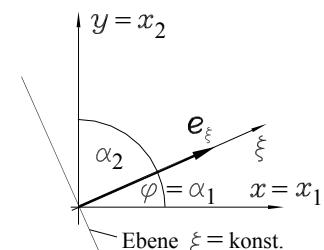


Abbildung 22.11: Ebener Spannungszustand, Übergang zu neuen Bezeichnungen

- Die Spannungen werden in einer (symmetrischen) Spannungsmatrix S zusammengestellt, für die in einer beliebigen Schnittfläche wirkenden Spannungen wird der Spannungsvektor s definiert:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}. \quad (22.16)$$

- Der Spannungsvektor s_ξ für die durch e_ξ definierte Ebene kann dann aus

$$s_\xi = S \cdot e_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cos \alpha_1 + \sigma_{12} \cos \alpha_2 \\ \sigma_{12} \cos \alpha_1 + \sigma_{22} \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (22.17)$$

berechnet werden.

- Die Komponenten von s_ξ in 22.17 beziehen sich noch auf das x_1 - x_2 -System. Die Normalspannung σ_ξ in der Schnittfläche $\xi = \text{konstant}$ (in Richtung von e_ξ) kann man mit dem Skalarprodukt aus dem Vektor s_ξ mit dem Einheitsvektor e_ξ berechnen:

$$\sigma_\xi = s_\xi \cdot e_\xi = \sigma_{11} \cos^2 \alpha_1 + \sigma_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sigma_{22} \cos^2 \alpha_2 + \sigma_{12} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1. \quad (22.18)$$

Dieses Ergebnis entspricht genau den ersten Formeln in 22.4 bzw. 22.5, die dort anschaulich aus Gleichgewichtsbedingungen gewonnen wurden.

- Auch das Hauptspannungsproblem lässt sich sehr elegant lösen: Wenn man die Transformation 22.17 mit einem (zunächst unbekannten) Normalenvektor n mit dem Ziel ausführt, dass das Ergebnis ein Vektor s_n ist, der genau die Richtung von n hat, dann gibt es ausschließlich eine Normalspannung in der durch n definierten Schnittfläche. Das kann so formuliert werden:

$$s_n = S \cdot n = \sigma \cdot n \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}. \quad (22.19)$$

- Mit 22.19 ist ein homogenes Gleichungssystem²

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22.20)$$

entstanden, das nur dann nichttriviale Lösungen (zumindest einer der Werte n_1 bzw. n_2 ist ungleich Null) haben kann, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{11} - \sigma)(\sigma_{22} - \sigma) - \sigma_{12}^2 = 0. \quad (22.21)$$

Diese quadratische Gleichung liefert mit σ_1 und σ_2 genau die beiden Lösungen 22.6.

- Die zu den beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 gehörenden Richtungen n_1 bzw. n_2 können aus einer (beliebigen) der beiden Gleichungen 22.20 berechnet werden. Weil die Lösungen eines homogenen Gleichungssystems nur bis auf einen beliebigen Faktor bestimbar sind, sollte man n_1 und n_2 normieren (zu Einheitsvektoren machen).

Alle am Beispiel des ebenen Spannungszustandes noch anschaulich nachzuempfindenden Beziehungen können nun formal auf den räumlichen Spannungszustand übertragen werden.

² Unter www.TM-Mathe.de findet man eine ausführliche Darstellung des Themas „Homogene Gleichungssysteme“, siehe den Hinweis auf Seite 73.

Räumlicher Spannungszustand:

- ⇒ Die Koordinaten x , y und z werden durch x_1 , x_2 und x_3 ersetzt, und die Spannungen werden sämtlich mit dem Symbol σ bezeichnet, das durch zwei Indizes ergänzt wird:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \Rightarrow \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}. \quad (22.22)$$

- ⇒ Die Schnittebene in beliebiger Richtung wird durch den (auf ihr senkrecht stehenden) Einheitsvektor e_ξ beschrieben. Die $\cos \alpha_i$ sind die Richtungskosinusse (Abbildung 8.1 auf Seite 110 zeigt, wie diese gemessen werden):

$$e_\xi = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{bmatrix} . \quad (22.23)$$

- ⇒ Die Spannungen werden in einer (symmetrischen) Spannungsmatrix S zusammengestellt, für die in einer beliebigen Schnittfläche wirkenden Spannungen wird der Spannungsvektor s definiert:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} , \quad s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} . \quad (22.24)$$

- ⇒ Der Spannungsvektor s_ξ für die durch e_ξ definierte Ebene kann dann aus

$$s_\xi = S \cdot e_\xi \quad (22.25)$$

berechnet werden. Den Betrag der Normalspannung σ_ξ in dieser Schnittebene und den Betrag der resultierenden Schubspannung τ_ξ errechnet man dann so:

$$\sigma_\xi = s_\xi \cdot e_\xi , \quad \tau_\xi = \sqrt{|s_\xi|^2 - \sigma_\xi^2} . \quad (22.26)$$

- ⇒ Die Hauptspannungen ergeben sich aus der Transformation $S \cdot n = \sigma \cdot n$, die auf ein homogenes Gleichungssystem führt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (22.27)$$

Zu einem räumlichen Spannungszustand gehören also drei Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 in drei senkrecht aufeinanderstehenden Ebenen, die schubspannungsfrei sind (zur Lösung von 22.27 siehe nachfolgende Bemerkung). Eine der Hauptspannungen ist die größte, eine andere die kleinste aller Normalspannungen, die in beliebigen Schnittebenen auftreten können. Die dritte Hauptspannung liegt zwischen den beiden anderen.

- ⇒ Die größten Schubspannungen (Hauptschubspannungen) treten in Ebenen auf, die mit jeweils zwei Hauptspannungsebenen einen Winkel von 45° bilden. Wenn man (wie üblich) die größte Hauptspannung mit σ_1 und die kleinste mit σ_3 bezeichnet, errechnet sich die maximale Schubspannung nach

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) . \quad (22.28)$$

- ⇒ Das System 22.27 hat nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet (die immer existierende „triviale Lösung“ $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ ist nicht interessant):

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (22.29)$$

Diese Bedingung würde (mit etwas mühsamer Rechnung) auf eine Gleichung 3. Grades führen, aus der man (auch nicht ganz mühelos) drei (reelle) Lösungen errechnet³. Zu jeder Lösung gehört ein Normalenvektor, der die Schnittfläche definiert und auch aus 22.27 berechnet werden kann.



22.5 Festigkeitshypothesen

Die zulässigen Spannungen werden im Allgemeinen mit Hilfe der Spannungswerte ermittelt, die durch den Zugversuch (einachsiger Spannungszustand) gewonnen werden (Abschnitt 12.3 und Kapitel 13). Ein Bauteil ist aber in der Regel nicht nur einem einachsigen Spannungszustand unterworfen, so dass die Frage beantwortet werden muss, wie das gleichzeitige Auftreten verschiedener Spannungen (wie zum Beispiel beim ebenen Spannungszustand) beim Vergleich mit einer aus einem recht einfachen Modellversuch gewonnenen Spannung beurteilt werden muss.

Naheliegend ist die Berechnung der Hauptspannungen, um diese einzeln mit der zulässigen Spannung zu vergleichen. Dabei bleibt die Frage offen, welchen Einfluss die gleichzeitige Wirkung der anderen (beim Zugversuch nicht vorhandenen) Hauptspannungen hat.

Um einen beliebigen Spannungszustand mit dem σ_{zul} , das auf Versuchen mit einem einachsigen Spannungszustand basiert, vergleichen zu können, wurden zahlreiche *Festigkeitshypothesen* entwickelt, die alle der Ermittlung **einer** so genannten *Vergleichsspannung* σ_V dienen, mit der dann der Spannungsnachweis durchgeführt wird. Im Idealfall müsste die Vergleichsspannung als Repräsentant aller wirkenden Spannungen die Veränderungen des Materialverhaltens (insbesondere das Fließen und das Versagen durch Bruch) bei den gleichen Werten hervorrufen, bei denen sie bei einem einachsigen Spannungszustand (Zugversuch) auftreten.

Leider gibt es die ideale, für alle Werkstoffe gleichermaßen gültige Festigkeitshypothese nicht. Deshalb werden im Folgenden die drei gebräuchlichsten Hypothesen vorgestellt.

Bei mehrachsigen Spannungszuständen wird aus den ermittelten Spannungen auf der Basis einer geeigneten Hypothese eine *Vergleichsspannung* σ_V berechnet, mit der dann der Spannungsnachweis

$$\sigma_V \leq \sigma_{zul} \quad (22.30)$$

durchgeführt wird.

³So wird man natürlich 22.27 nicht lösen, denn diese Form des homogenen Gleichungssystems ist ein so genanntes *Spezielles Matrizeneigenwertproblem*. Dafür gibt es neben einer ausgefeilten Theorie eine große Anzahl leistungsfähiger Berechnungsverfahren. Ausführliche Informationen mit Beispielen findet man auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de), siehe auch den Hinweis auf Seite 419.

22.5.1 Normalspannungs- und Schubspannungshypothese

Die *Normalspannungshypothese* geht von der Annahme aus, dass „die größte auftretende Normalspannung für ein eventuelles Versagen des Materials verantwortlich ist“. Das Maximum der Absolutbeträge der Hauptspannungen ist also die Vergleichsspannung³ der

Normalspannungshypothese (Hypothese der größten Hauptspannung):

$$\sigma_{V,1} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_{zul} \quad . \quad (22.31)$$

Für den räumlichen Spannungszustand werden σ_1 , σ_2 und σ_3 aus 22.29 berechnet. Für den ebenen Spannungszustand entfällt σ_3 , und die beiden anderen Hauptspannungen berechnet man entsprechend 22.6 aus

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad . \quad (22.32)$$

Die Normalspannungshypothese wird vornehmlich für spröde Werkstoffe (z. B. Grauguss) verwendet.

Die *Schubspannungshypothese* geht von der Annahme aus, dass „die größte auftretende Schubspannung für ein eventuelles Versagen des Materials verantwortlich ist“. Also werden die maximalen Schubspannungen (Hauptschubspannungen) des ebenen bzw. räumlichen Spannungszustands 22.8 bzw. 22.28 mit der maximalen Schubspannung des einachsigen Spannungszustands, wie er beim Zugversuch entsteht, verglichen. Nach 22.3 (Seite 388) gilt für den einachsigen Spannungszustand

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_{max} \quad ,$$

und daraus folgt die Vergleichsspannung für die

Schubspannungshypothese:

$$\sigma_{V,2} = 2 \tau_{max} \leq \sigma_{zul} \quad . \quad (22.33)$$

Für den räumlichen Spannungszustand müssen zunächst σ_1 , σ_2 und σ_3 aus 22.29 berechnet werden, um dann τ_{max} aus 22.28 zu berechnen. Für den ebenen Spannungszustand kann bei bekannten Hauptspannungen τ_{max} aus 22.8 berechnet werden. Andernfalls liefert die Kombination von 22.33 mit 22.8 und 22.6 die Formel:

$$\sigma_{V,2} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{zul} \quad . \quad (22.34)$$

Die Schubspannungshypothese liefert für zähe Werkstoffe (z. B. Stahl) recht gute Ergebnisse, wird aber heute nur noch selten verwendet, weil im Allgemeinen mit der nachfolgend behandelten Gestaltänderungshypothese eine noch bessere Annäherung an die Realität erzielt wird.

³ Das Symbol für die Vergleichsspannung σ_V wird zur Unterscheidung der einzelnen Hypothesen mit einem zusätzlichen Index versehen. Es gilt $\sigma_{V,1}$ für die Normalspannungshypothese, $\sigma_{V,2}$ für die Schubspannungshypothese und $\sigma_{V,3}$ für die Gestaltänderungshypothese (von-Mises-Vergleichsspannung).

22.5.2 Gestaltänderungshypothese

Die *Gestaltänderungshypothese* geht von der Annahme aus, dass „die Materialbeanspruchung ausschließlich durch die Veränderung der Gestalt und nicht durch die Volumenänderung hervorgerufen wird“. Hier soll nur die sich nach dieser Theorie ergebende Formel ohne die (etwas aufwendige) Herleitung angegeben werden.

Gestaltänderungshypothese (von-Mises-Vergleichsspannung):

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{zul} \quad . \quad (22.35)$$

Für den räumlichen Spannungszustand werden σ_1 , σ_2 und σ_3 aus 22.29 berechnet. Für den ebenen Spannungszustand entfällt σ_3 in 22.35, so dass sich folgende Formel ergibt:

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_{zul} \quad . \quad (22.36)$$

Die Gestaltänderungshypothese ist die für zähe Werkstoffe gegenwärtig am häufigsten verwendete Hypothese. Deshalb soll am Beispiel 22.36 die Betrachtung einiger Spezialfälle auf die Besonderheiten dieser Hypothese aufmerksam machen:

- ⇒ Der einachsige Spannungszustand mit $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = 0$ und $\tau_{xy} = 0$ ist in der Gestaltänderungshypothese sinnvoll enthalten und führt auf

$$\sigma_{V,3} = \sigma_0 \leq \sigma_{zul} \quad .$$

- ⇒ Reine Schubbeanspruchung mit $\tau_{xy} = \tau_0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$ führt auf

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{3}\tau_0 \leq \sigma_{zul} \quad .$$

In der Gestaltänderungshypothese steckt also die Annahme $\frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}} = \sqrt{3}$ (in der Schubspannungshypothese steckt die Annahme $\frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}} = 2$). Wenn die durch Versuche ermittelten Werte deutlich von dieser Annahme abweichen, ist es üblich, die Hypothese mit einem Korrekturfaktor zu verfeinern (vgl. das im nächsten Abschnitt erwähnte *Anstrengungsverhältnis*).

- ⇒ Gleichmäßiger Zug (ohne Schub) mit $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ (gleiche Zugspannung in zwei senkrecht aufeinander stehenden Richtungen) führt auf

$$\sigma_{V,3} = \sigma_0 \leq \sigma_{zul}$$

und wird damit nach der Gestaltänderungshypothese als nicht gefährlicher für das Material als eine Zugspannung in nur einer Richtung angesehen.

- ⇒ Dagegen liefert Zug in einer Richtung und Druck in der dazu senkrechten Richtung nach der Gestaltänderungshypothese höhere Vergleichsspannungen, was mit der Vorstellung über diese Beanspruchung gut übereinstimmt (die Druckspannung „unterstützt“ genau die Verformung, die durch die Querkontraktion infolge der Zugspannung hervorgerufen wird), zum Beispiel erhält man mit $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = -\sigma_0$, $\tau_{xy} = 0$:

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{3}\sigma_0 \leq \sigma_{zul} \quad .$$

22.5.3 Berechnung von Wellen

Wellen, die für die Übertragung eines Drehmoments bestimmt sind (Antriebswellen, Getriebewellen, ...), werden fast immer auch auf Biegung beansprucht. Der mit der Biegebeanspruchung gleichzeitig auftretende Querkraftschub kann im Allgemeinen vernachlässigt werden, zumal die größte Schubbelastung aus der Querkraft mit der neutralen Faser der Biegung zusammenfällt.

Die Normalspannung aus der Biegung und die Schubspannung infolge Torsion bilden den Sonderfall eines ebenen Spannungszustandes, bei dem nur eine Normalspannung wirkt (**Abbildung 22.12**). Dementsprechend vereinfachen sich die Formeln für die Vergleichsspannungsberechnung. Nach der vorwiegend verwendeten Gestaltänderungshypothese (Wellen werden aus zähem Material gefertigt) ergibt sich aus der Biegespannung σ_b und der Torsionsschubspannung τ_t nach 22.36 die Vergleichsspannung

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2} .$$

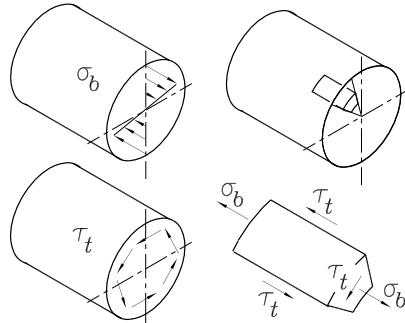


Abbildung 22.12: Getriebewelle, beansprucht auf Biegung und Torsion

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass diese Formel ein Verhältnis der zulässigen Spannungen von $\frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}} = \sqrt{3}$ voraussetzt, was bei den dynamisch belasteten Wellen auch durch unterschiedliche Belastungsarten (vgl. Abschnitt 13.1) für die Biege- bzw. Torsionsbelastung gestört sein kann. Dies kann ausgeglichen werden durch das *Anstrengungsverhältnis* α_0 (auch als Korrekturfaktor nach BACH bezeichnet), mit dem die Schubspannung in der Vergleichsspannungsformel multipliziert wird:

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2} .$$

Für Stahl nimmt dieser Korrekturfaktor Werte von $\alpha_0 \approx 0,7$ (Biegewechselbelastung, statische Torsionsbelastung) bis $\alpha_0 \approx 1,5$ (Torsionswechselbelastung, statische Biegebelastung) an. Im Allgemeinen ist $\alpha_0 \approx 1$ (beide Belastungsarten als Wechselbelastung) ein sinnvoller Wert, zumal statische Biegebelastung (und damit der größere Wert für α_0) bei umlaufenden Wellen ohnehin nicht gegeben ist.

Für *Wellen mit Kreis- oder Kreisringquerschnitten* gibt es auf dem Außenrand immer zwei Punkte, in denen die maximale Biegespannung mit der ebenfalls am Außenrand auftretenden maximalen Torsionsschubspannung zusammenfällt, so dass die maximale Vergleichsspannung in einem Querschnitt mit

$$\sigma_{b,max} = \frac{M_b}{W_b} , \quad \tau_{t,max} = \frac{M_t}{W_t}$$

berechnet werden kann. Dabei muss das Biegemoment M_b bei einer Belastung in zwei Ebenen stets vorab nach

$$M_b = \sqrt{M_{bx}^2 + M_{by}^2}$$

zum resultierenden Biegemoment zusammengesetzt werden. M_t ist das Torsionsmoment, W_b das Widerstandsmoment gegen Biegung, W_t das Widerstandsmoment gegen Torsion.

Bei einem Vergleich der Formeln für die Widerstandsmomente 16.18 und 21.6 stellt man fest, dass für den Kreis (und auch für den Kreisring) gilt:

$$W_t = 2W_b$$

gilt. Wenn dies in die Formel für die Vergleichsspannung eingesetzt wird, erhält man

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{\frac{M_b^2}{W_b^2} + 3 \left(\frac{\alpha_0 M_t}{2W_b} \right)^2} = \frac{1}{W_b} \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} (\alpha_0 M_t)^2} ,$$

und daraus ergibt sich eine einfache Vorschrift für die

Berechnung von Wellen mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt, die auf Biegung und Torsion beansprucht werden:

Es wird ein *Vergleichsmoment*

$$M_{V,3} = \sqrt{M_b^2 + 0,75 (\alpha_0 M_t)^2} \quad (22.37)$$

berechnet, das den gemischten Belastungsfall Biegung-Torsion auf einen (nach der Gestaltänderungshypothese) äquivalenten reinen Biegebelastungsfall reduziert, für den

$$\sigma_{V,3} = \frac{M_{V,3}}{W_b} \leq \sigma_{zul} \quad (22.38)$$

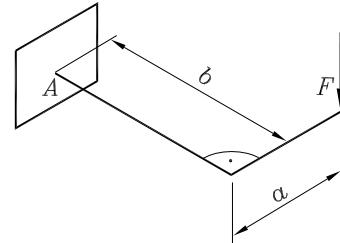
gelten muss. W_b ist das Widerstandsmoment gegen Biegung für den Kreis- bzw. Kreisringquerschnitt, α_0 das oben besprochene Anstrengungsverhältnis.

Beispiel:

Der skizzierte Winkel mit Kreisquerschnitt ist so zu dimensionieren, dass in keinem Querschnitt die nach der Gestaltänderungshypothese berechnete Spannung größer ist als σ_{zul} .

Gegeben: $a = 500 \text{ mm}$; $\sigma_{zul} = 200 \text{ N/mm}^2$;
 $b = 1000 \text{ mm}$; $F = 2 \text{ kN}$.

Berechnet werden soll der erforderliche Durchmesser d_{erf} bei einem Anstrengungsverhältnis $\alpha_0 = 1$.



Der Bereich der Länge a wird nur auf Biegung, der Bereich der Länge b auf Biegung und Torsion beansprucht. Da b größer als a ist, tritt das größte Biegemoment an der Einspannung auf, und der gefährdete Querschnitt ist der Einspannquerschnitt. Mit den Momenten $|M_b| = Fb$ und $|M_t| = Fa$ ergibt sich das Vergleichsmoment

$$M_{V,3} = F \sqrt{b^2 + 0,75 a^2} .$$

Mit dem Widerstandsmoment gegen Biegung 16.18 für den Kreisquerschnitt errechnet man:

$$W_{b,erf} = \frac{\pi d_{erf}^3}{32} = \frac{M_{V,3}}{\sigma_{zul}} \quad \Rightarrow \quad d_{erf} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{F}{\sigma_{zul}} \sqrt{b^2 + \frac{3}{4} a^2}} = 48,1 \text{ mm} .$$

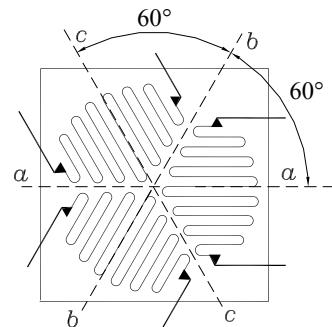
22.6 Aufgaben

Aufgabe 22.1: Mit der skizzierten Dehnmessstreifen-Rosette können die Dehnungen in drei Richtungen a , b und c gemessen werden, die jeweils um 60° gegeneinander gedreht sind.

Gegeben: ε_a , ε_b , ε_c , E , v .

Man ermittle die Formeln, nach denen bei bekannten Dehnungen in den drei Messrichtungen und bekannten Materialkennwerten (Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl)

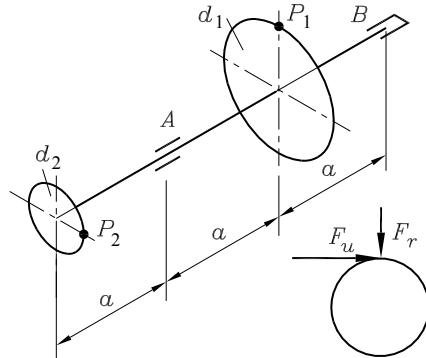
- die Hauptdehnungen,
- die Hauptspannungen berechnet werden können.



Aufgabe 22.2: Eine Getriebewelle mit konstantem Durchmesser d ist mit den geradverzahnten Rädern 1 und 2 besetzt. Zwischen der radialem Zahnkraft F_r und der Umfangskraft F_u besteht über den Zahneingriffswinkel der Zusammenhang

$$F_r = F_u \tan \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = 20^\circ .$$

Am Antriebsrad 2 wird im Punkt P_2 das Moment M_0 entgegen dem Uhrzeigersinn eingeleitet und am Abtriebsrad 1 im Punkt P_1 abgegeben.



Gegeben: $d_1 = 200 \text{ mm}$; $d_2 = 100 \text{ mm}$; $a = 500 \text{ mm}$; $d = 30 \text{ mm}$; $M_0 = 50 \text{ Nm}$; $\alpha_0 = 1$.

Man ermittle

- die Zahnkräfte F_{u1} , F_{r1} , F_{u2} und F_{r2} ,
- die zur Lagerauswahl erforderlichen Lagerkräfte,
- die Schnittgrößen in der Welle,
- Ort und Größe der maximalen Biegespannung in der Welle,
- Ort und Größe der maximalen Torsionsschubspannung in der Welle,
- Ort und Größe der maximalen Vergleichsspannung nach den im Abschnitt 22.5 behandelten drei Vergleichsspannungshypothesen.

Hinweis: Die Teilaufgaben a , b und c waren bereits Bestandteil der Aufgabe 8.4.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

23 Knickung

23.1 Stabilitätsprobleme der Elastostatik

Im Abschnitt 10.4 wurde gezeigt, dass die Gleichgewichtslage eines starren Körpers (alle Gleichgewichtsbedingungen sind erfüllt) instabil sein kann, wenn die Lagerung noch eine Bewegungsmöglichkeit zulässt (z. B. bei Lagerung durch elastische Federn). So ist die vertikale Lage des starren Stabes in Abbildung 23.1 nur stabil, wenn für die äußere Kraft die Bedingung

$$F < F_{kr} = cl$$

erfüllt ist (vgl. Beispiel 1 im Abschnitt 10.4). Wenn die kritische Kraft F_{kr} überschritten wird, weicht der Stab seitlich aus.

Für die Berechnung einer kritischen Kraft F_{kr} muss die *Theorie 2. Ordnung (Gleichgewicht am verformten System)* bemüht werden.

Das gleiche Phänomen kann bei deformierbaren Stäben auch dann auftreten, wenn die Lager starr sind. Ein auf Druck belasteter Stab weicht bei einer kritischen Belastung seitlich aus (Abbildung 23.2). In dem ursprünglich nur durch eine Normalkraft (Druckkraft) belasteten Stab entsteht eine Biegebeanspruchung: *Der Stab knickt*. Das Problem, die kritische Belastung von Knickstäben unter der Voraussetzung elastischen Materialverhaltens zu berechnen, wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

Die Stabknickung ist das in der Ingenieurpraxis wichtigste *Stabilitätsproblem* der Elastostatik. Nachfolgend werden noch einige weitere Probleme dieser Art, die in diesem Buch nicht behandelt werden können, vorgestellt.

Beim Drillknicken eines Torsionsstabes geht die ehemals gerade Stabachse bei Erreichen des kritischen Torsionsmomentes in eine räumliche Kurve über (Abbildung 23.3). Der auf Torsion belastete Stab wird dadurch einer räumlichen Biegebeanspruchung ausgesetzt.

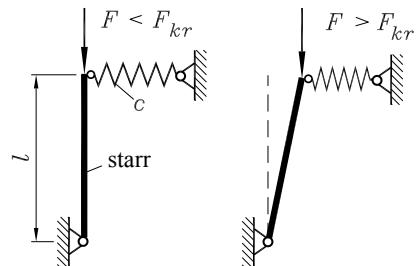


Abbildung 23.1: Gleichgewichtslage (linke Skizze) wird bei $F > F_{kr}$ instabil

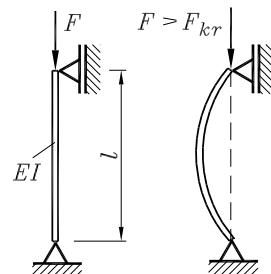


Abbildung 23.2: Knicken eines elastischen Stabes



Abbildung 23.3: Drillknicken

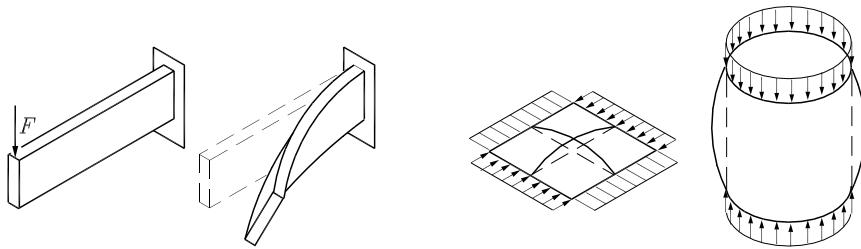


Abbildung 23.4: Kippen eines Kragträger, Beulen einer Platte und Beulen einer Schale

Wenn sehr schlanke („brettartige“) Träger mit stark unterschiedlichen Flächenträgheitsmomenten bezüglich der beiden Hauptachsen um die Achse des größeren Flächenträgheitsmoments gebogen werden, kann das so genannte *Kippen* auftreten. Die Kraft F , die in der **Abbildung 23.4** (links) nach der Theorie 1. Ordnung nur eine Durchbiegung in vertikaler Richtung erzeugt, verursacht bei Überschreiten einer kritischen Größe ein horizontales Ausweichen und eine Verdrehung. Aus einer einfachen Biegebeanspruchung wird Biegung um zwei Achsen (schiefe Biegung) und Torsion.

Auch bei Flächentragwerken (Beispiele: Rechteckplatte bzw. zylindrischer Behälter, **Abbildung 23.4** rechts) können Druckspannungen oberhalb einer kritischen Belastung zum seitlichen Ausweichen führen, so genanntem *Beulen*. Auch dabei kommt eine Biegebeanspruchung hinzu (aus einer auf Druck beanspruchten Scheibe wird z. B. eine auf Biegung beanspruchte Platte).

23.2 Stab-Knickung

Zur Einführung in die Problematik soll an dem nachfolgenden Beispiel 1 diese wichtige Aussage demonstriert werden:

Biegeträger können auch dann als Tragwerke versagen, wenn die maximale Spannung unterhalb der zulässigen Spannung liegt.

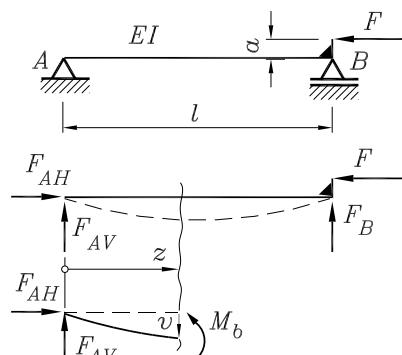
Beispiel 1: Der skizzierte Träger ist durch die Kraft F belastet. Die vertikale Abmessung a sei wesentlich kleiner als der Abstand der beiden Lager A und B .

Gegeben: $EI = \text{konstant}$, F , l , a ($a \ll l$) .

Es soll die Biegeverformung des horizontalen Teils zwischen den Lagern berechnet werden.

Aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die Lagerreaktionen zu

$$F_{AH} = F \quad , \quad F_{AV} = -F_B = F \frac{a}{l} \quad .$$



Da die vertikale Komponente F_{AV} der Lagerreaktion bei A (wegen $a \ll l$) deutlich kleiner ist als die Horizontalkomponente, ist es unter Umständen nicht mehr gerechtfertigt, den für die Verformungsberechnung benötigten Biegemomentenverlauf am unverformten System (nach der Theorie 1. Ordnung) zu berechnen, weil F_{AH} dann in die Verformungsberechnung gar nicht eingehen würde.

Deshalb wird („vorsichtshalber“) $M_b(z)$ durch eine Gleichgewichtsbetrachtung am verformten System ermittelt (Theorie 2. Ordnung). Natürlich müssten konsequenterweise dann auch die Lagerreaktionen am verformten System berechnet werden, was aber in diesem Fall auf die gleichen Ergebnisse führen würde. Am geschnittenen Teilabschnitt erhält man (mit der noch unbekannten Durchbiegung v an der Stelle z) für den Momentenverlauf:

$$M_b(z) = F_{AV} z + F_{AH} v = F a \frac{z}{l} + F v .$$

Nach der Theorie 1. Ordnung hätte sich nur der erste Summand für den Biegemomentenverlauf ergeben. Es ist einleuchtend, dass der zweite Summand dann nicht vernachlässigt werden darf, wenn a in der Größenordnung von v liegt.

Mit dieser Funktion $M_b(z)$ erhält man aus der Differenzialgleichung der Biegelinie 17.3

$$EI v'' = -M_b = -F a \frac{z}{l} - F v$$

für die Berechnung der Verschiebung v mit

$$v'' + \frac{F}{EI} v = -\frac{F}{EI} \frac{a}{l} z$$

eine *gewöhnliche inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* (man beachte, dass die Begriffe „Differenzialgleichung 2. Ordnung“ und „Theorie 2. Ordnung“ nichts miteinander zu tun haben).

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist etwas mühsamer als der einfache Integrationsprozess, der bei Rechnung nach der Theorie 1. Ordnung erforderlich ist. Der Leser, der mit der Theorie der Lösung solcher Differenzialgleichungen¹ noch nicht vertraut ist, darf (ohne Gefahr, die nachfolgenden Überlegungen nicht zu verstehen) einfach glauben, dass

$$v = C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} z \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} z \right) - a \frac{z}{l}$$

die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist (Skeptiker überzeugen sich durch Einsetzen, dass die Lösung die Differenzialgleichung erfüllt).



Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den geometrischen Randbedingungen

$$v(z=0) = 0 , \quad v(z=l) = 0$$

zu

$$C_1 = 0 , \quad C_2 = \frac{a}{\sin \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)} .$$

¹ Hilfreich ist sicher die Diskussion der Lösung der Differenzialgleichung 19.22. Man beachte besonders den Hinweis auf Seite 314 auf das Thema *Gewöhnliche Differenzialgleichungen* auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de).

Damit lautet die gesuchte Durchbiegungsfunktion nach der Theorie 2. Ordnung:

$$v(z) = \frac{a}{\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}l\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}z\right) - a \frac{z}{l} .$$

Diese Funktion ist in der Auswertung sicher etwas unbequemer als die Lösungsfunktion, die man nach der Theorie 1. Ordnung erhält (Fall d im Abschnitt 17.4, wenn für das Belastungsmoment $M = Fa$ gesetzt wird). Schon der Nachweis, dass sich für $F = 0$ (Träger ohne Belastung) für beliebiges z keine Durchbiegung v ergibt, erfordert eine Grenzwertbetrachtung.

Allerdings ist die Lösung nach der Theorie 2. Ordnung genauer. Interessant ist, dass die prozentualen Abweichungen der errechneten Verformungen nach den beiden Theorien (im Gegensatz zum Biegemoment) nicht von der Größe a abhängen, da a in beiden Fällen als linearer Faktor in der Verformungsfunktion $v(z)$ steht.

Viel wichtiger ist jedoch eine andere *Erkenntnis, die sich nur mit der Theorie höherer Ordnung gewinnen lässt*: Der Ausdruck im Nenner des ersten Lösungsanteils wird nicht nur dann Null, wenn $F = 0$ ist, sondern zum Beispiel auch für

$$\sqrt{\frac{F}{EI}}l = \pi .$$

Die Kraft, die sich aus dieser Formel zu

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

errechnet, wird *kritische Belastung* genannt, weil sie auch *bei beliebig kleinem a zu theoretisch unendlich großen Verschiebungen v führt*.

- ⇒ Durch Versuche kann dieses Ergebnis bestätigt werden: Auch der zentrisch belastete Druckstab knickt bei dieser Belastung. Eine „beliebig kleine“ Abweichung vom Schwerpunkt der Querschnittsfläche ist bei der Lasteinleitung praktisch ohnehin nicht zu vermeiden.
- ⇒ Die bei dem Beispiel 1 theoretisch ermittelten „unendlich großen“ Verschiebungen v bei Belastung mit der kritischen Kraft F_{kr} lassen sich allerdings durch Versuche nicht bestätigen. Es ergeben sich vielmehr auch jenseits der kritischen Belastung (im ausgeknickten Zustand) Gleichgewichtslagen, die auch mit der Theorie 2. Ordnung nicht zu berechnen sind. Diese geht mit der Verwendung der linearisierten Differentialgleichung für die Biegelinie 17.3 ja immer noch von kleinen Verformungen aus. Diese Voraussetzung ist im überkritischen Bereich natürlich nicht mehr erfüllt. Hier müsste mit der nichtlinearen Differentialgleichung der Biegelinie 17.2 gerechnet werden (Theorie 3. Ordnung). Die Theorie 2. Ordnung genügt nur zur Berechnung der (allerdings besonders wichtigen) kritischen Belastung, nicht zur Verformungsberechnung bei kritischer (oder überkritischer) Belastung.

Der „Umweg“, der im Beispiel 1 demonstriert wurde, über eine Exzentrizität a der Lasteinleitung (und schließlich das Nullsetzen dieser Exzentrizität) zur kritischen Belastung zu kommen, ist nicht typisch für die Lösung von Stabilitätsproblemen. Vielmehr ist es üblich, nach der Theorie 2. Ordnung die Gleichgewichtsbedingungen an einem System aufzuschreiben, das nach der Theorie 1. Ordnung momentenfrei wäre. Dies führt auf ein *Eigenwertproblem*, was aus mathematischer Sicht eine ganz andere Betrachtungsweise darstellt (nachfolgendes Beispiel 2). Beide Wege führen zum gleichen Ergebnis.

Beispiel 2:

Für den skizzierten Stab ist die kritische Kraft F_{kr} zu berechnen.

Gegeben: $EI = \text{konstant}$, l .

Da die Lagerung einfach statisch unbestimmt ist, muss eine Lagerreaktion im Momentenverlauf verbleiben (gewählt wird dafür F_{AV}). Am verformten System (Skizze) erhält man

$$M_b = F_{AV} z + F v .$$

M_b wird in die Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung 17.3

$$EI v'' = -M_b = -F_{AV} z - F v$$

eingesetzt, die folgendermaßen umgestellt wird:

$$v'' + \kappa^2 v = -\frac{F_{AV}}{EI} z \quad \text{mit} \quad \kappa^2 = \frac{F}{EI} .$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$v = C_1 \cos \kappa z + C_2 \sin \kappa z - \frac{F_{AV}}{EI \kappa^2} z$$

enthält mit C_1 , C_2 und F_{AV} drei unbekannte Größen, man kann (wie bei statisch unbestimmten Biegeproblemen, vgl. Abschnitt 17.5) Randbedingungen in gleicher Anzahl formulieren:

$$v(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 ,$$

$$v(z=l) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cos \kappa l + C_2 \sin \kappa l - \frac{F_{AV} l}{EI \kappa^2} = 0 ,$$

$$v'(z=l) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\kappa C_1 \sin \kappa l + \kappa C_2 \cos \kappa l - \frac{F_{AV}}{EI \kappa^2} = 0 .$$

Hier zeigt sich nun der prinzipielle Unterschied zu den bisher behandelten Biegeproblemen: Es ist ein *lineares homogenes Gleichungssystem*² (auf der rechten Seite steht ein Nullvektor)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \kappa l & \sin \kappa l & -\frac{l}{EI \kappa^2} \\ -\kappa \sin \kappa l & \kappa \cos \kappa l & -\frac{1}{EI \kappa^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ F_{AV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23.1)$$



entstanden, für das folgende Aussage gilt:

Ein **lineares homogenes Gleichungssystem** hat immer die so genannte triviale Lösung (hier: $C_1 = C_2 = 0$, $F_{AV} = 0$). Es kann auch nichttriviale Lösungen haben, wenn seine Koeffizientendeterminante den Wert Null hat. Die nichttrivialen Lösungen sind dann allerdings nicht eindeutig.

² Auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) findet man eine ausführliche Darstellung des Themas „Homogene Gleichungssysteme“, siehe den Hinweis auf Seite 73.

Die triviale Lösung ist für die Aufgabe uninteressant, denn sie besagt nur, dass $v \equiv 0$ (keine Verschiebung senkrecht zur Stabachse) auch eine mögliche (unter Umständen instabile) Lösung ist. Es interessiert gerade der Fall nichttrivialer Lösungen für C_2 und F_{AV} ($C_1 = 0$ gilt ohnehin immer), für den $v \neq 0$ (Knicken!) möglich ist. Eine Besonderheit ist, dass diese Lösungen nicht eindeutig sind, man kann z. B. (nach der Theorie 2. Ordnung) nicht berechnen, welche Kraft F_{AV} im ausgeknickten Zustand tatsächlich wirkt, man kommt jedoch zu der (wesentlich wichtigeren) Aussage, unter welchen Umständen $F_{AV} \neq 0$ (und damit $v \neq 0$) überhaupt möglich ist.

In den Koeffizienten der Matrix des homogenen Gleichungssystems steckt noch die äußere Kraft F (in dem Parameter κ), und es werden nun die Werte dieser Kraft berechnet, für die die Determinante der Matrix den Wert Null hat. Die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \kappa l & \sin \kappa l & -\frac{l}{EI \kappa^2} \\ -\kappa \sin \kappa l & \kappa \cos \kappa l & -\frac{1}{EI \kappa^2} \end{vmatrix} = -\frac{\sin \kappa l}{EI \kappa^2} + \frac{\kappa l \cos \kappa l}{EI \kappa^2} = 0$$



vereinfacht sich zu der *Eigenwertgleichung*

$$\kappa l - \tan \kappa l = 0 \quad ,$$

aus der κl (numerisch, siehe www.TM-aktuell.de) berechnet werden kann. Die Eigenwertgleichung hat unendlich viele Lösungen, von denen nur die kleinste positive interessiert, weil zu ihr der kleinste Wert für die äußere Kraft gehört, bei der ein Ausknicken möglich ist (kritische Kraft). Man erhält:

$$(\kappa l)_{min} = 4,4934 \quad \Rightarrow \quad F_{kr} = EI \kappa_{min}^2 = 20,19 \frac{EI}{l^2} \quad .$$

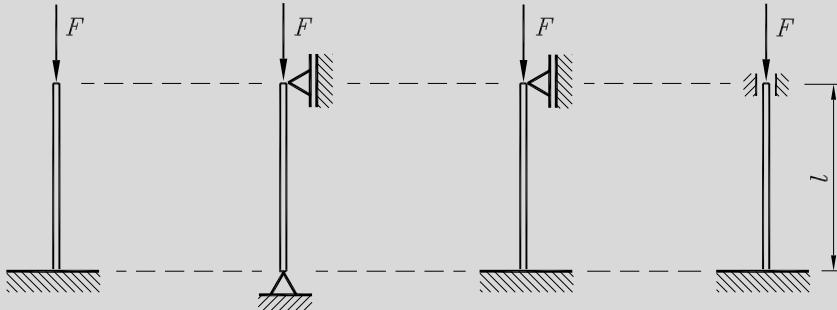
Damit ist das wichtigste Ergebnis erreicht. Man könnte nun durchaus diesen *Eigenwert* in die Matrix des Gleichungssystems einsetzen und die nichtriviale Lösung (bis auf einen unbestimmten Faktor) berechnen, in die Funktion v einsetzen, um auf diese Weise die *Eigenform* zu bestimmen. Man bekommt so eine Vorstellung von der „Knickfigur“, die tatsächliche Größe der Verschiebungen für eine Belastung jenseits der kritischen Kraft kann (wegen des unbestimmten Faktors in der Lösung) mit der Theorie 2. Ordnung nicht berechnet werden.

- ⇒ Die beiden Wege, die in den Beispielen 1 und 2 zu den kritischen Lasten führten, liefern identische Ergebnisse (Empfehlung: Man löse zur Übung das Problem des Beispiels 1 mit $a = 0$ als Eigenwertproblem, wie es mit dem Beispiel 2 demonstriert wurde). Das Beispiel 1 würde auch dann noch auf die gleiche kritische Last F_{kr} führen, wenn der horizontale Trägerteil A-B eine zusätzliche Querbelastung tragen würde. Die typischen Einwände gegen die „theoretischen Annahmen“ der Stabilitätstheorie (exakt zentrische Einleitung der Kraft, ideal gerader Träger, ...) sind damit gegenstandslos.
- ⇒ Die Ergebnisse der beiden Beispiele lassen einige wichtige (verallgemeinerungsfähige) Tatsachen erkennen: Die Stablänge l vergrößert (quadratisch) die Knickempfindlichkeit, ein großes Flächenträgheitsmoment verringert sie, „lange schlanke Stäbe“ sind besonders knickempfindlich. Im Gegensatz zu den bisher angestellten Festigkeitsuntersuchungen kann (im

elastischen Bereich) die Knickgefährdung nicht durch die Verwendung hochfester Materialien verringert werden, denn als Materialeigenschaft geht nur der Elastizitätsmodul in die kritische Kraft ein (und der ist z. B. für alle Stahlsorten annähernd gleich).

Die beiden behandelten Beispiele gehören zu den vier für den Praktiker wichtigsten Lagerungsfällen für Knickstäbe, deren Lösung schon LEONHARD EULER (1707-1783) gefunden hat und die nach ihm im Allgemeinen kurz bezeichnet werden als die vier

Euler-Fälle (die angegebenen Knicklasten gelten für konstante Biegesteifigkeit EI):



$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad F_{kr} = \frac{20, 19 EI}{l^2} \quad F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (23.2)$$

☞ Konstruktionen werden in der Regel nur dann als tragfähig angesehen, wenn die aufgebrachte Last kleiner als die kritische Belastung ist. Im Allgemeinen wird sogar die

$$\text{Knicksicherheit} \quad S_K = \frac{F_{kr}}{F_{\text{vorh}}} \quad (23.3)$$

größer gewählt als die übrigen Sicherheitsbeiwerte (zum Beispiel: $S_K = 2 \dots 5$).

Beispiel 3:

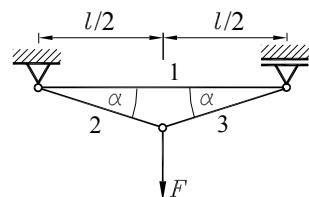
Die drei Stäbe des skizzierten Systems haben kreisförmige Querschnitte.

$$\text{Gegeben: } F = 5 \text{ kN} ; E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 ; \alpha = 20^\circ ; l = 300 \text{ mm}$$

Die Durchmesser sollen so gewählt werden, dass eine zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 200 \text{ N/mm}^2$ nicht überschritten wird und außerdem eine Sicherheit gegen Knicken von $S_K = 3$ garantiert ist.

Die Stabkräfte ergeben sich aus Gleichgewichtsbedingungen („Rundum-Schnitte“ um die Knoten):

$$F_1 = -\frac{F}{2 \tan \alpha}, \quad F_2 = F_3 = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$



Die auf Zug beanspruchten Stäbe 2 und 3 können mit der Forderung $\sigma_{2,3} = \frac{F_{2,3}}{A_{2,3}} = \sigma_{zul}$ dimensioniert werden, da bei Zugstäben keine Knickgefahr besteht. Es ergibt sich:

$$d_{2,3,erf} = 2 \sqrt{\frac{F_2}{\pi \sigma_{zul}}} = 2 \sqrt{\frac{F}{2\pi \sigma_{zul} \sin \alpha}} = 6,82 \text{ mm} .$$

Für Stab 1 würde eine entsprechende Rechnung $d_1 = 6,61 \text{ mm}$ ergeben. Die vorgegebene Knicksicherheit (Euler-Fall mit beidseitig gelenkiger Lagerung) erfordert dagegen, wie die folgende Rechnung zeigt, einen größeren Durchmesser des Stabes 1, so dass dieser die Dimensionierung bestimmt:

$$S_K = \frac{F_{kr}}{F_{vorh}} = \frac{\frac{\pi^2 EI_{erf}}{l^2}}{\frac{F}{2\tan \alpha}} \Rightarrow I_{erf} = \frac{S_K F l^2}{2\pi^2 E \tan \alpha} = \frac{\pi d_{1,erf}^4}{64} \Rightarrow d_{1,erf} = 2 \sqrt{\frac{2 S_K F l^2}{\pi^3 E \tan \alpha}} = 11,6 \text{ mm}.$$

Beispiel 4:

Die beiden skizzierten Fachwerke unterscheiden sich nur durch den zusätzlichen Stab 8, der im unteren Fachwerk eingezogen ist und den Untergurt in zwei Stäbe 6 und 7 teilt. Alle Stäbe sollen den gleichen Querschnitt haben. Die Knicksicherheit der Stäbe beider Fachwerke soll untersucht werden.

Gegeben: F, a .

Da der Stab 8 ein Nullstab ist (vgl. Abschnitt 6.4.2, Nullstab-Kriterien auf Seite 82), ergeben sich für beide Fachwerke die gleichen Stabkräfte. Für das Knickproblem sind nur die auf Druck belasteten Stäbe 3, 5 und 6 und 7 mit den Stabkräften

$$F_3 = F_5 = -\sqrt{2}F, \quad F_6 = F_7 = -2F$$

von Bedeutung (zur Berechnung von Fachwerken vgl. Abschnitt 6.4). Für die Stäbe 3 und 5 ergibt sich die Knicksicherheit nach 23.3 in Verbindung mit der zweiten Formel von 23.2:

$$S_{K,3} = S_{K,5} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}a)^2 \sqrt{2}F} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi^2 EI}{Fa^2} .$$

Für den Stab 6 im oberen Fachwerk ergibt sich die geringste Knicksicherheit

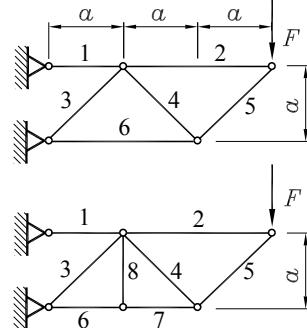
$$S_{K,6} = \frac{\pi^2 EI}{(2a)^2 2F} = \frac{1}{8} \frac{\pi^2 EI}{Fa^2} ,$$

im unteren Fachwerk dagegen hat der Stab 6 im Vergleich dazu die vierfache Knicksicherheit:

$$S_{K,6} = S_{K,7} = \frac{\pi^2 EI}{a^2 2F} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 EI}{Fa^2} ,$$

die sogar noch größer ist als die Knicksicherheit der Stäbe 3 und 5.

Mit *Nullstäben*, die keine Kraft aufnehmen und deshalb extrem materialsparend konstruiert werden dürfen, kann die Knicksicherheit in Fachwerken erheblich erhöht (und in der Regel problemlos in den zulässigen Bereich gebracht) werden.



- ⇒ Für die Fachwerkstäbe in den Beispielen 3 und 4 wurde (entsprechend der üblichen Idealisierung des Fachwerks) der Euler-Fall mit beidseitig gelenkiger Lagerung verwendet. Da Fachwerknoten in der Regel durch Knotenbleche realisiert werden, liegt man damit auf der sicheren Seite.
- ⇒ Wenn der Knickstab in eine beliebige Ebene ausweichen kann, ist stets das kleinste Flächenträgheitsmoment (Hauptträgheitsmoment I_2 , vgl. Abschnitt 16.2.5) in die Formeln einzusetzen. Es gibt jedoch auch Lagerungen, bei denen für verschiedene Ebenen unterschiedliche Euler-Fälle gelten. So darf zum Beispiel für ein Pleuel, für das in der Knickebene senkrecht zu Kolbenbolzen und Kurbelwelle die beidseitig gelenkige Lagerung zutrifft, in der anderen Ebene bei relativ breitem Lager auf der Kurbelwelle die günstigere Einspannung angenommen werden, so dass ein kleineres Flächenträgheitsmoment erforderlich ist (Pleuelquerschnitt elliptisch oder als **I**-Profil).
- ⇒ In Formelsammlungen findet man die Euler-Fälle häufig durch eine einzige Formel

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l_{red}^2} \quad (23.4)$$

- mit der *reduzierten Knicklänge* l_{red} repräsentiert. Diese hat, wie man sich durch einen Vergleich mit 23.2 überzeugt, für die vier Euler-Fälle die Werte $2l$, l , $0,7l$ und $\frac{l}{2}$.
- ⇒ Alle bisherigen Untersuchungen setzten voraus, dass die Knicklast erreicht wird, bevor der Druckstab den linear-elastischen Bereich verlässt. Um dies gleich mit zu überprüfen, ersetzt der Praktiker gern die Berechnung der kritischen Kraft durch die Ermittlung der *kritischen Spannung* (Spannung, die beim Erreichen der kritischen Kraft im Stab wirkt)

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_{red}^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (23.5)$$

mit dem *Schlankheitsgrad* $\lambda = \frac{l_{red}}{i}$ und dem *Trägheitsradius* $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$.

Die kritische Spannung darf für die Gültigkeit der Euler-Formeln nicht oberhalb der Proportionalitätsgrenze $|\sigma_P|$ des Materials liegen (vgl. Abschnitt 12.3), wobei der Wert im Druckbereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms verwendet werden muss. Wenn in der Formel für die kritische Spannung 23.5 diese durch die Proportionalitätsgrenze ersetzt wird, kann man den nur noch von Materialwerten abhängigen *Grenzschlankheitsgrad*

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{|\sigma_P|}} \quad (23.6)$$

berechnen, der die Gültigkeit der Euler-Formeln begrenzt. Beispiel: Für den Stahl S235JR (St37) mit $\sigma_P = 190 \text{ N/mm}^2$ und $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ errechnet man $\lambda_0 = 104$. Für gedrungenere Stäbe mit kleinerem Schlankheitsgrad gelten die Euler-Formeln nicht. Gegebenenfalls kann mit einem der Verfahren für den nicht-elastischen Bereich gerechnet werden, die hier nicht behandelt werden.

- ⇒ Der Ingenieur in der Praxis muss sich gerade bei Stabilitätsuntersuchungen vielfach an branchentypische Vorschriften halten. Die Berechnungen (auch die dafür zuständigen Normen) basieren allerdings auf den hier behandelten Grundlagen.

23.3 Differenzialgleichung 4. Ordnung

Bei Aufgaben, die auch nur etwas komplizierter sind als die im vorigen Abschnitt behandelten Probleme, kann es lästig sein, den Biegemomentenverlauf am verformten System aufzuschreiben zu müssen, der als Voraussetzung für die Benutzung der Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung erforderlich ist. Andererseits sind solche Probleme meist ohnehin nur numerisch lösbar, und es ist wünschenswert, diese Berechnungen so stark zu formalisieren, wie es im Abschnitt 18.1 am Beispiel des Biegeträgers mit dem Differenzenverfahren auf der Basis der Differenzialgleichung 4. Ordnung demonstriert wurde. Deshalb wird hier die Differenzialgleichung 4. Ordnung für das Knickproblem hergeleitet, wobei auch ein veränderlicher Querschnitt und eine verteilte Längsbelastung q_z (z. B. das Eigengewicht des Knickstabs) berücksichtigt werden.

Vorab sei noch einmal daran erinnert, dass die Theorie 2. Ordnung, die das Fundament für die Stabilitätsuntersuchungen darstellt, wie die Theorie 1. Ordnung von sehr kleinen Verformungen ausgeht. Somit dürfen alle geometrischen Vereinfachungsmöglichkeiten, die sich daraus ergeben, genutzt werden. Auch der differenzielle Zusammenhang zwischen Biegeverformung und Biegemoment (Differenzialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung)

$$M_b = -EI(z)v''(z) \quad (23.7)$$

gilt weiterhin. Nur die aus der Statik bekannten Differenzialbeziehungen der Schnittgrößen 7.1 (Seite 99) müssen modifiziert werden, weil z. B. am verformten System die Querkraft und die Normalkraft nicht mehr unabhängig voneinander sind.

Die Abbildung 23.5 zeigt ein aus dem verformten Stab herausgeschnittenes Element mit diesen Schnittgrößen an beiden Schnittufern. Um die Skizze nicht noch mehr zu überladen, wurden die natürlich auch wirkenden Biegemomente nicht eingezeichnet, zumal sich die Beziehung

$$F_Q = \frac{dM_b}{dz} \quad , \quad (23.8)$$

die aus der Statik für das unverformte Element bekannt ist (vgl. Abschnitt 7.2), auch am verformten Element ergibt (übrigens auch wie in der Statik aus einer Momentenbeziehung am Element).

Das obere Schnittufer ist zur Vertikalen um den Winkel α geneigt, die Schnittgrößen F_N und F_Q , die senkrecht bzw. parallel zur Schnittfläche liegen, verändern bis zum anderen Schnittufer sowohl ihre Größe als auch die Richtung. Deshalb wurden stellvertretend für die (gestrichelt angedeuteten) Schnittgrößen deren Horizontal- und Vertikalkomponenten

$$F_{NH} = F_N \sin \alpha \quad , \quad F_{NV} = F_N \cos \alpha \quad ,$$

$$F_{QH} = F_Q \cos \alpha \quad , \quad F_{QV} = F_Q \sin \alpha$$

und am anderen Schnittufer die „Komponenten plus Zuwächse“ angegeben.

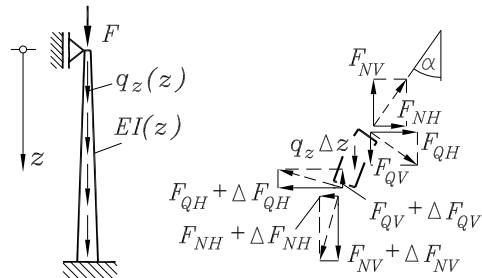


Abbildung 23.5: Schnittgrößen F_N und F_Q am verformten Element (Biegemomente M_b fehlen in der Zeichnung)

Der Winkel α ist der Biegewinkel der Verformungslinie, für den wegen der Kleinheit der Verformungen

$$\tan \alpha = \frac{dv}{dz} \approx \sin \alpha \quad , \quad \cos \alpha \approx 1$$

gesetzt werden darf. Aus dem Kräfte-Gleichgewicht in horizontaler Richtung

$$\Delta F_{NH} + \Delta F_{QH} = \Delta(F_N \sin \alpha) + \Delta(F_Q \cos \alpha) = 0$$

folgt nach Division durch Δz und dem Grenzübergang $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta(\dots)}{\Delta z} = \frac{d(\dots)}{dz} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dz} \left(F_N \frac{dv}{dz} \right) + \frac{dF_Q}{dz} = 0 \quad .$$

Werden in diese Gleichung die Beziehungen für F_Q und M_b (23.8 und 23.7) eingesetzt, ergibt sich die unten angegebene Differenzialgleichung 23.10.

In das Kräfte-Gleichgewicht am Element in vertikaler Richtung geht ein Anteil aus der Linienlast in Längsrichtung q_z ein:

$$q_z \Delta z + \Delta F_{NV} - \Delta F_{QV} = q_z \Delta z + \Delta(F_N \cos \alpha) - \Delta(F_Q \sin \alpha) = 0 \quad .$$

Hier liefert der Grenzübergang (wie oben nach Division durch Δz unter Ausnutzung der Vereinfachungen für kleine Verschiebungen):

$$\frac{d}{dz} \left(F_N - F_Q \frac{dv}{dz} \right) = -q_z \quad .$$

Dies ist eine nichtlineare Beziehung (die in F_Q enthaltenen Verschiebungsableitungen werden mit der ersten Ableitung der Verschiebung multipliziert), die aber linearisiert werden darf, weil das Produkt aus der Querkraft und der (sehr kleinen) Verschiebungsableitung im Vergleich mit der Normalkraft vernachlässigbar ist, und man erhält:

$$\frac{dF_N}{dz} = -q_z \quad . \tag{23.9}$$

Mit dieser Beziehung könnte die Normalkraft berechnet werden, die dann in die Differenzialgleichung 23.10 einzusetzen ist. Andererseits sagt die Formel 23.9 aus, dass die Normalkraft F_N am unverformten Stab berechnet werden darf (und bei $q_z \equiv 0$ konstant ist), so dass sicher diese einfachere Variante vorzuziehen ist.

Differenzialgleichung 4. Ordnung für den Knickstab:

$$[EI(z)v''(z)]'' - [F_N(z)v'(z)]' = 0 \quad . \tag{23.10}$$

Die in 23.10 eingehende Normalkraft $F_N(z)$ darf am unverformten Stab ermittelt werden.

Für den Spezialfall des *Knickstabs mit konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Normalkraft* vereinfacht sich 23.10 zu

$$v''' - \frac{F_N}{EI} v'' = 0 \quad . \tag{23.11}$$

Die Knickprobleme werden sowohl mit 23.10 als auch mit 23.11 durch *gewöhnliche lineare homogene Differenzialgleichungen 4. Ordnung beschrieben*.

23.4 Numerische Lösung von Knickproblemen

Die analytische Lösung von Knickproblemen gelingt nur für relativ wenige Spezialfälle (und auch dann erzwingt die Eigenwertgleichung häufig eine numerische Behandlung, vgl. Beispiel 2 im Abschnitt 23.2). Für die numerische Lösung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik sind das Differenzenverfahren und die Methode der finiten Elemente vorzüglich geeignet.

Die Methode der finiten Elemente erfordert einige theoretische Voraussetzungen, die an dieser Stelle noch nicht behandelt worden sind (im Kapitel 33 werden dafür die Grundlagen vermittelt). Deshalb soll hier nur die Lösung der Differentialgleichung 23.10 mit Hilfe des Differenzenverfahrens an einem Beispiel demonstriert werden.

Der erste Term in 23.10 ist identisch mit der linken Seite der Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung des Biegeproblems, wofür im Abschnitt 18.1.3 bereits die Differenzenformel 18.7 angegeben wurde, so dass nur noch die Umwandlung des zweiten Ausdrucks $(F_N v')'$ behandelt werden muss. Da man davon ausgehen kann, dass die Normalkraft nicht numerisch nach 23.9 berechnet werden muss, sondern für jeden Punkt des (unverformten) Knickstabs angegeben werden kann, empfiehlt sich für die Approximation der ersten Ableitungen eine leichte Modifikation der als 18.1 angegebenen Differenzenformel:

Es werden jeweils Nachbarpunkte im Abstand der halben Schrittweite links und rechts vom betrachteten Punkt einbezogen, so dass die erste Formel in 18.1 zu

$$y'_i \approx \frac{1}{h} \left(-y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

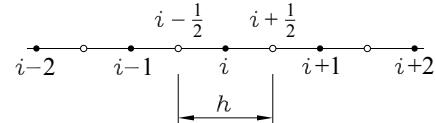


Abbildung 23.6: h für Zwischenpunkte

wird. Bei der erforderlichen zweifachen Anwendung dieser Formel liegen die v -Werte dann doch wieder auf dem gewählten Raster mit dem h -Abstand, während die F_N -Werte für die Zwischenpunkte „ $i - \frac{1}{2}$ “ und „ $i + \frac{1}{2}$ “ eingehen (Abbildung 23.6). In zwei Schritten entsteht der Ausdruck, der den zweiten Term in 23.10 annähert:

$$[F_N v']' \approx \frac{1}{h} \left[-(F_N v')_{i-\frac{1}{2}} + (F_N v')_{i+\frac{1}{2}} \right] \approx \frac{1}{h} \left[-F_{N,i-\frac{1}{2}} \frac{1}{h} (-v_{i-1} + v_i) + F_{N,i+\frac{1}{2}} \frac{1}{h} (-v_i + v_{i+1}) \right].$$

Damit und mit dem Ausdruck, der aus Formel 18.7 übernommen wird, kommt man zur

Differenzengleichung für den Knickstab:

$$\begin{aligned} \mu_{i-1} v_{i-2} - \left(2\mu_{i-1} + 2\mu_i + \frac{h^2 F_{N,i-\frac{1}{2}}}{EI_0} \right) v_{i-1} + \left[\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} + \frac{h^2 (F_{N,i-\frac{1}{2}} + F_{N,i+\frac{1}{2}})}{EI_0} \right] v_i \\ - \left(2\mu_i + 2\mu_{i+1} + \frac{h^2 F_{N,i+\frac{1}{2}}}{EI_0} \right) v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2} = 0 \quad \text{mit} \quad \mu_i = \frac{I_i}{I_0} \quad (\text{vgl. 18.7}) . \end{aligned} \quad (23.12)$$

Für den wichtigen Spezialfall konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Normalkraft vereinfacht sich 23.12 zur

Differenzengleichung des Knickstabs für $EI = \text{konst.}$ und $F_N = \text{konst.}$:

$$v_{i-2} - \left(4 + \frac{F_N h^2}{EI}\right) v_{i-1} + \left(6 + \frac{2F_N h^2}{EI}\right) v_i - \left(4 + \frac{F_N h^2}{EI}\right) v_{i+1} + v_{i+2} = 0 \quad . \quad (23.13)$$

Für die Anwendung werden die für die Verformungsberechnung gegebenen Empfehlungen (Seite 319) wie folgt modifiziert:

- ⇒ Ein Knickstab der Länge l wird in n_A äquidistante Abschnitte unterteilt ($h = \frac{l}{n_A}$). Dabei entstehen $n_A + 1$ Stützstellen $0 \dots n_A$ (Achtung, die hier empfohlene Nummerierung ist anders als bei der Verformungsberechnung). Die in die Differenzengleichungen eingehenden Außenpunkte erhalten die Nummern $-2, -1, n_A + 1, n_A + 2$.
- ⇒ Die für die Verformungsberechnung benötigten Vektoren qi und ki entfallen. Der Vektor mi (für die μ_i -Werte) wird so verwendet, wie es im Punkt ⑤ auf Seite 319 empfohlen wird.
- ⇒ Da das entstehende Gleichungssystem im Gegensatz zur Verformungsberechnung homogen wird, sollten die Gleichungen als Matrizeneigenwertproblem (vgl. nachfolgendes Beispiel) formuliert werden.
- ⇒ Im Gegensatz zur Verformungsberechnung wird für das Knickproblem nicht empfohlen, die Randbedingungen zu den übrigen Differenzengleichungen hinzuzufügen. Vielmehr ist es sinnvoll, die Randbedingungs-Gleichungen zu nutzen, um die Außenpunkte zu eliminieren, weil dann das Eigenwertproblem mit symmetrischen Matrizen formuliert werden kann, was für dessen numerische Auswertung von erheblichem Vorteil ist.
- ⇒ Wenn ein Randpunkt in einem starren Lager gelagert ist (Loslager, Festlager, Einspannung), sollte für diesen Punkt keine Differenzengleichung formuliert werden (seine Verschiebung ist ohnehin bekannt). Es geht dann nur ein Außenpunkt in die Rechnung ein, der mit Hilfe der anderen Randbedingung zu eliminieren ist.

Beispiel:

Der skizzierte Stab mit konstantem Querschnitt ist nur durch sein Eigengewicht belastet. Es soll ermittelt werden, bei welcher *kritischen Länge* er allein durch die Eigengewichts-Belastung knickt.

Gegeben: EI , Dichte ρ , Querschnittsfläche A .

Das Eigengewicht des Stabs bewirkt eine linear veränderliche Normalkraft (muss mit der über der Schnittstelle bei z liegenden Gewichtskraft im Gleichgewicht sein):

$$F_N = -\rho g A z \quad .$$

Da die Biegesteifigkeit aber konstant ist, kann die Differenzengleichung 23.12 wenigstens teilweise vereinfacht werden, so dass mit folgender Gleichung gearbeitet wird:

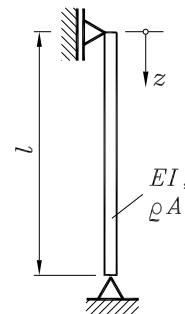


Abbildung 23.7: Stab, belastet durch sein Eigengewicht

$$v_{i-2} - \left(4 + \frac{h^2 F_{N,i-\frac{1}{2}}}{EI}\right) v_{i-1} + \left[6 + \frac{h^2 (F_{N,i-\frac{1}{2}} + F_{N,i+\frac{1}{2}})}{EI}\right] v_i - \left(4 + \frac{h^2 F_{N,i+\frac{1}{2}}}{EI}\right) v_{i+1} + v_{i+2} = 0.$$

In der Abbildung 23.8 ist die gewählte Nummerierung der Punkte angegeben (die zu eliminierenden Außenpunkte am oberen Rand haben negative Punktnummern bekommen). Die linear veränderliche Normalkraft kann mit der Punktnummer formuliert werden, für die Zwischenpunkte gilt:

$$F_{N,i \pm \frac{1}{2}} = -\rho g A \left(i \pm \frac{1}{2} \right) h .$$

Da an den beiden Rändern in v -Richtung unverschiebbliche Lager angebracht sind, werden die Differenzengleichungen nur für die Innenpunkte $1 \dots n_A - 1$ aufgeschrieben, so dass an jedem Rand nur ein Außenpunkt eingeht (der Punkt -2 am oberen Rand geht also in die Rechnung nicht ein).

Die Randbedingungen werden gleich so umgeformt, dass für die verbleibenden Außenpunkte die Verschiebungen durch Verschiebungen von Innenpunkten ersetzt werden können:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 & \Rightarrow & v_0 = 0 , \\ M_0 = 0 & \Rightarrow -\frac{EI}{h^2}(v_{-1} - 2v_0 + v_1) = 0 & \Rightarrow & v_{-1} = -v_1 , \\ v_{n_A} &= 0 & \Rightarrow & v_{n_A} = 0 , \\ M_{n_A} = 0 & \Rightarrow -\frac{EI}{h^2}(v_{n_A-1} - 2v_{n_A} + v_{n_A+1}) = 0 & \Rightarrow & v_{n_A+1} = -v_{n_A-1} . \end{aligned}$$

Es wird zunächst die sehr grobe Einteilung $n_A = 4$ gewählt, so dass die Differenzengleichungen nur für die Punkte $1, 2$ und 3 aufgeschrieben werden müssen:

$$\begin{aligned} v_{-1} - \left(4 - \frac{\rho g A h^3}{2EI} \right) v_0 + \left(6 - \frac{2\rho g A h^3}{EI} \right) v_1 - \left(4 - \frac{3\rho g A h^3}{2EI} \right) v_2 + v_3 &= 0 , \\ v_0 - \left(4 - \frac{3\rho g A h^3}{2EI} \right) v_1 + \left(6 - \frac{4\rho g A h^3}{EI} \right) v_2 - \left(4 - \frac{5\rho g A h^3}{2EI} \right) v_3 + v_4 &= 0 , \\ v_1 - \left(4 - \frac{5\rho g A h^3}{2EI} \right) v_2 + \left(6 - \frac{6\rho g A h^3}{EI} \right) v_3 - \left(4 - \frac{7\rho g A h^3}{2EI} \right) v_4 + v_5 &= 0 . \end{aligned}$$

Die Verschiebungen der beiden Randpunkte v_0 und v_4 und der beiden Außenpunkte v_{-1} und v_5 werden mit Hilfe der Randbedingungen eliminiert. Es wird die Abkürzung

$$\kappa = \frac{\rho g A h^3}{EI} = \frac{\rho g A l^3}{n_A^3 EI} = \frac{\rho g A l^3}{64EI}$$

eingeführt, und es verbleiben drei Gleichungen für die drei Verschiebungen v_1, v_2 und v_3 :

$$\begin{bmatrix} 5 - 2\kappa & -4 + 1,5\kappa & 1 \\ -4 + 1,5\kappa & 6 - 4\kappa & -4 + 2,5\kappa \\ 1 & -4 + 2,5\kappa & 5 - 6\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (23.14)$$

Es ist wie bei der analytischen Lösung des Beispiels 2 (Seite 409) wieder ein homogenes lineares Gleichungssystem entstanden, das prinzipiell nach der gleichen Strategie gelöst werden

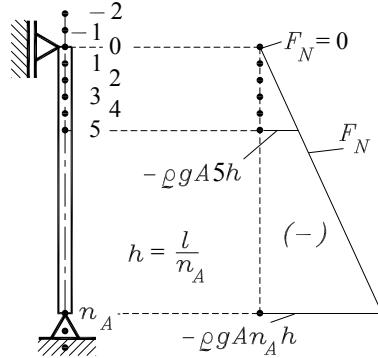


Abbildung 23.8: Nummerierung der Stützpunkte, linearer Normalkraftverlauf

könnte („Koeffizientendeterminante = 0 \Rightarrow Gleichung dritten Grades $\Rightarrow \kappa$ -Werte für nichttriviale Lösungen“). Dieser Weg wäre jedoch bei einer feineren Diskretisierung nicht mehr praktikabel.

Aber das System 23.14 unterscheidet sich in einer wesentlichen Eigenschaft angenehm vom Gleichungssystem 23.1, das bei der analytischen Lösung erzeugt wurde: Beim Differenzenverfahren tritt auch der Eigenwert κ nur linear auf, und es können alle Lösungsverfahren verwendet werden, die für Matrizeneigenwertprobleme verfügbar sind. Deshalb sollte 23.14 in der Form des so genannten *Allgemeinen Matrizeneigenwertproblems*

$$(A - \kappa B)x = 0$$

aufgeschrieben werden:

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} 2 & -1,5 & 0 \\ -1,5 & 4 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23.15)$$

Unter www.TM-aktuell.de findet man die Lösung dieses Matrizeneigenwertproblems (u. a. mit Matlab). Der kleinste Eigenwert κ des Systems 23.15 bestimmt die kritische Länge:

$$\kappa_1 = 0,2742 \Rightarrow l_{kr} = \sqrt[3]{\frac{n_A^3 EI}{\rho g A}} \kappa_1 = \sqrt[3]{\frac{64 EI}{\rho g A} \cdot 0,2742} = 2,60 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho g A}}.$$



Das Matlab-Script realisiert beliebig feine Diskretisierung n_A . Die folgende Tabelle zeigt einige Ergebnisse.

	$n_A = 4$	$n_A = 8$	$n_A = 100$	Exakt
l_{kr}	$2,599 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho g A}}$	$2,635 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho g A}}$	$2,648 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho g A}}$	$2,648 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho g A}}$

Dieses Beispiel wurde auch deshalb gewählt, weil es einer analytischen Lösung (gerade noch) zugänglich ist (unter anderem unter Verwendung Besselscher Funktionen für die Lösung der Differentialgleichung). Der Vergleich mit der exakten Lösung zeigt, dass selbst das Ergebnis für $n_A = 4$ praktischen Anforderungen genügt (aber es gibt natürlich keinen Grund, mit dem Computer „vorsichtshalber“ nicht auch noch feiner zu unterteilen).

WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Matrizeneigenwertprobleme auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) bietet u. a. folgende Themen:



- Allgemeines \Rightarrow Spezielles Matrizeneigenwertproblem
- Symmetrische Matrizen, dünn besetzte Matrizen, positiv definite Matrizen, größte und kleinste Eigenwerte
- Vektoriteration, Simultaniteration, Rayleighscher Quotient
- Jacobi- und Givens-Rotationen, Hessenberg-Form, QR-Algorithmus
- Lösen von Matrizeneigenwertproblemen mit Standard-Software



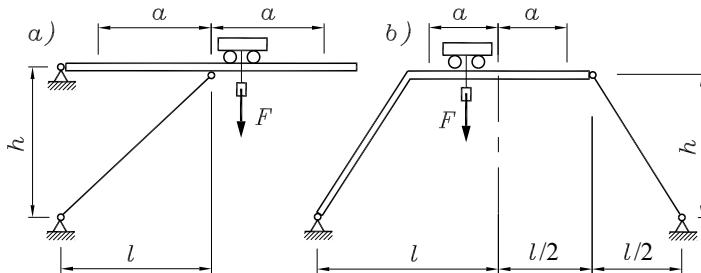
23.5 Aufgaben

Aufgabe 23.1:

Ein Wandkran a und ein Brückenkran b sind durch die Kraft F belastet (Gesamtgewicht der Laufkatze mit angehänger Last), deren Stellung jeweils im Bereich $2a$ veränderlich ist. Der Stützstab ist für die ungünstigste Laststellung bei vorgegebener Knicksicherheit S_K zu dimensionieren. Zu bestimmen ist sein Außendurchmesser D_a , wenn ein Rohr mit dem Durchmesserverhältnis $\frac{D_a}{D_i} = 1,2$ verwendet wird.

Gegeben:

$$\begin{aligned} F &= 20 \text{ kN}; \\ a &= 2 \text{ m}; \\ l &= 6 \text{ m}; \\ h &= 5 \text{ m}; \\ S_K &= 3; \\ E &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

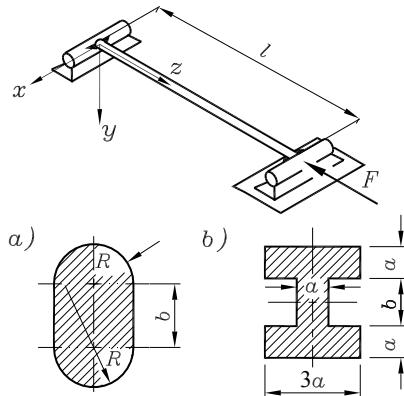


Aufgabe 23.2:

Ein Knickstab ist entsprechend der Abbildung gelagert. Die scharnierartigen Lager können keine Momente um die x -Achse aufnehmen, wirken jedoch in der x - z -Ebene wie Einspannungen. Das linke Lager ist unverschieblich, das rechte Lager ist in z -Richtung verschieblich.

Gegeben: F, l, E, a, R .

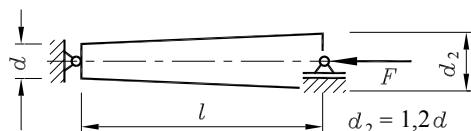
Es sollen die beiden skizzierten Querschnittsvarianten untersucht werden. Gesucht ist jeweils die Abmessung b , so dass sich für beide Ebenen die gleiche Knicksicherheit ergibt.



Aufgabe 23.3:

Ein Stab mit Kreisquerschnitt, dessen Durchmesser linear veränderlich ist, wird durch eine Einzelkraft auf Druck beansprucht.

Gegeben: d, E, l .



- Man ermittle
- die kritische Last F_{kr} mit dem Differenzenverfahren bei einer Einteilung der Länge l in $n_A = 4$ Abschnitte,
 - die Matrizen A und B des allgemeinen Matrizeneigenwertproblems $(A - \kappa B)x = o$ für die Einteilung der Länge l in $n_A = 8$ Abschnitte.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

24 Formänderungsenergie

Definition:

Mechanische *Arbeit* ist das Produkt des Weges, den der Angriffspunkt einer Kraft F zurücklegt, und der in *Wegrichtung wirkenden Komponente* dieser Kraft F_S . Weil die Kraft entlang des Weges s veränderlich sein kann, gilt für die Arbeit W folgende Formel:

$$W = \int_s F_S ds . \quad (24.1)$$

Auch bei der Deformation eines elastischen Bauteils leistet eine äußere Kraft eine Arbeit, die nach 24.1 berechnet werden muss, denn auch diese Kraft wächst entlang des Verformungsweges vom Wert Null auf ihren Endwert.

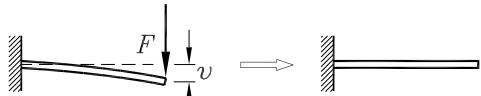


Abbildung 24.1: Belastung und Entlastung

Die geleistete Arbeit wird im Inneren des Bauteils als *Energie* („Arbeitsvermögen“) gespeichert, die wiederum dafür sorgt, dass ein elastisches Bauteil nach Entlastung wieder seine ursprüngliche Form annimmt (**Abbildung 24.1**).

24.1 Arbeitssatz

Betrachtet wird zunächst der in **Abbildung 24.2** skizzierte Zugstab, an dem eine Kraft F vom Anfangswert Null auf ihren Endwert F_0 anwächst, entsprechend wächst die Verschiebung w des Kraftangriffspunktes bis zu ihrem Endwert w_0 .

Während des gesamten Vorgangs gilt immer (Formel 14.6 im Abschnitt 14.1)

$$w = \frac{Fl}{EA} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{EA}{l} w ,$$

bis der Endzustand

$$w_0 = \frac{F_0 l}{EA}$$

erreicht ist. Dabei leistet die äußere Kraft die Arbeit

$$W_a = \int_{w=0}^{w_0} F dw = \int_{w=0}^{w_0} \frac{EA}{l} w dw = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} w_0^2 = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 l}{EA} = \frac{1}{2} F_0 w_0 , \quad (24.2)$$

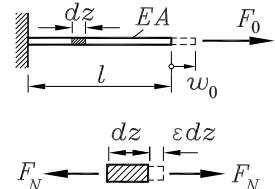


Abbildung 24.2: Äußere und innere Kräfte am Zugstab

die im Kraft-Verformungs-Diagramm (**Abbildung 24.4**) als Fläche unter der linearen Funktion $F(w)$ veranschaulicht werden kann. Eine entsprechende Formel (mit dem typischen Faktor $\frac{1}{2}$)

ergibt sich immer dann, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen einer Belastungsgröße und der durch sie an ihrem Angriffspunkt hervorgerufenen Verformung besteht.

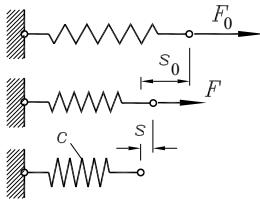


Abbildung 24.3: Spannen einer linear-elastischen Feder

Die Arbeit, die beim Spannen einer linear-elastischen Feder mit der Federkonstanten c zu leisten ist (**Abbildung 24.3**), kann zum Beispiel nach

$$W_a = \frac{1}{2} F_0 s_0 = \frac{1}{2} c s_0^2 \quad (24.3)$$

berechnet werden, wobei s_0 der Gesamtweg und F_0 der Endwert der Kraft ist.

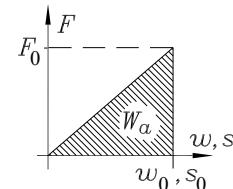


Abbildung 24.4: W_a im Kraft-Weg-Diagramm

Es wird nun für den Zugstab der **Abbildung 24.2** die *Arbeit der inneren Kräfte* (Normalkraft F_N) berechnet. Das herausgeschnittene differenziell kleine Element mit der Länge dz verlängert sich nach **14.4** um ϵdz , und weil die Normalkraft natürlich auch „von Null auf ihren Endwert“ anwächst, leistet sie am Element die Arbeit $\frac{1}{2} F_N \epsilon dz$ (die Gesamtverschiebung wurde in der **Abbildung 24.2** willkürlich an einem Schnittufer des Elements angetragen, so dass nur eine Kraft F_N Arbeit leistet, bei einer Aufteilung auf beide Schnittufer ändert sich insgesamt nichts). Die gesamte Arbeit der Normalkraft im Stab ergibt sich nach Integration über die Länge l , und mit $F_N = F_0$ für das betrachtete Beispiel und $\epsilon = \frac{F_N}{EA}$ nach **14.3** erhält man:

$$W_i = \int_{z=0}^l \frac{1}{2} F_N \epsilon dz = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l \frac{F_0^2}{EA} dz = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 l}{EA} . \quad (24.4)$$

Dies ist exakt der Wert, der sich bereits für die Arbeit der äußeren Kraft (Formel **24.2**) ergeben hat: Die Arbeit, die die innere Kraft F_N bei der Verformung leistet (*Formänderungsarbeit*) wird als *Formänderungsenergie* im verformten System gespeichert, und die an dem einfachen Beispiel gewonnene Erkenntnis gilt allgemein als

Arbeitssatz:

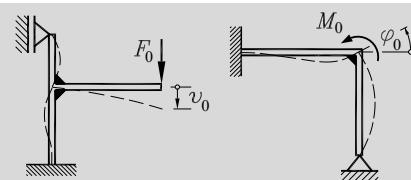
Die an einem elastischen System von den äußeren Belastungen geleistete Arbeit W_a wird als Formänderungsenergie W_i im verformten System gespeichert, und es gilt:

$$W_i = W_a . \quad (24.5)$$

Für die Berechnung der Arbeit W_a , die die äußeren Belastungen leisten, können die am Beispiel des Zugstabs gewonnenen Erkenntnisse verallgemeinert werden: Bei linear-elastischem Material (und kleinen Verformungen, so dass der Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung auch linear ist) gilt immer $W_a = \frac{1}{2} \cdot \text{„Endwert der Belastung“} \cdot \text{„Endwert der Verformung“}$. Ist die äußere Belastung ein Moment, wird als Verformungsgröße ein Winkel eingesetzt.

Äußere Arbeit infolge einer Kraft bzw. eines Moments:

$$W_{a,F} = \frac{1}{2} F_0 v_0 , \quad W_{a,M} = \frac{1}{2} M_0 \varphi_0 . \quad (24.6)$$



24.2 Formänderungsenergie für Grundbeanspruchungen

Für die Grundbeanspruchungsarten der „eindimensionalen Tragwerke“ (eine Abmessung ist deutlich größer als die beiden anderen), für die in den Kapiteln 14 bis 21 Spannungs- und Verformungsberechnungen behandelt wurden, werden nachfolgend die Formeln für die Formänderungsenergie ermittelt.

Die Abbildung 24.5 zeigt ein differenziell kleines Element mit der Länge dz und der Seitenfläche dA , das in dieser Fläche durch eine Normalspannung σ belastet ist (z. B. aus einem Zug/Druck-Stab oder einem Biegeträger herausgeschnitten). Es verlängert sich infolge der Spannung um εdz (vgl. das Einführungsbispiel im vorigen Abschnitt). Die Spannung wird über die Fläche zu einer Kraft σdA zusammengefasst, die die Formänderungsenergie des Elements ($, \frac{1}{2} \cdot \text{Kraft} \cdot \text{Verschiebung}$)

$$dW_{i,\sigma} = \frac{1}{2} \sigma dA \varepsilon dz = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV$$

liefert (es wurde das Volumen des Elements $dV = dA \cdot dz$ eingesetzt). Nach Division durch dV entsteht die (auf das Volumen bezogene) spezifische Formänderungsenergie infolge einer Normalspannung

$$W_{i,\sigma}^* = \frac{dW_{i,\sigma}}{dV} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} , \quad (24.7)$$

wobei die beiden Umformungen durch Einsetzen des Hookeschen Gesetzes 12.3 entstanden. Auf entsprechendem Wege kommt man zur spezifischen Formänderungsenergie infolge einer Schubspannung

$$W_{i,\tau}^* = \frac{dW_{i,\tau}}{dV} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} . \quad (24.8)$$

Wenn die zu einer bestimmten Schnittgröße gehörende Spannungsverteilung in 24.7 bzw. 24.8 eingesetzt wird, erhält man nach Integration über das Volumen die gesuchte Formel für die Formänderungsenergie. Für einen ausschließlich durch eine Normalkraft F_N beanspruchten Stab ist z. B. die Spannungsverteilung entsprechend 14.2 über den Querschnitt konstant, so dass man mit $\sigma = \frac{F_N}{A}$ und $dV = Adz$ zur Formel für die Formänderungsenergie für den Zug/Druck-Stab kommt:

$$W_i = \int_V W_{i,\sigma}^* dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{1}{2} \int_l \frac{F_N^2}{EA^2} Adz = \frac{1}{2} \int_l \frac{F_N^2}{EA} dz . \quad (24.9)$$

Für den ausschließlich durch ein Biegemoment M_b beanspruchten Träger wird die Rechnung etwas komplizierter, weil mit der Biegespannungsverteilung $\sigma_b = \frac{M_b}{I_{xx}} y$ nach 16.3 eine Veränderlichkeit mit y über die Querschnittshöhe zu berücksichtigen ist, so dass das Volumenelement $dV = dA \cdot dz$ verwendet werden muss (dA ist ein Flächenelement im Abstand y von der Schwerpunktlfaser). Es ergibt sich

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_b^2}{EI_{xx}^2} y^2 dAdz = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_b^2}{EI_{xx}^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dz = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_b^2}{EI_{xx}} dz , \quad (24.10)$$

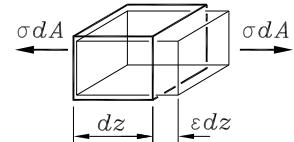


Abbildung 24.5: Spezifische Formänderungsenergie infolge Normalspannung

worin berücksichtigt wurde, dass unter dem Integral noch einmal das Flächenträgheitsmoment I_{xx} entsprechend 16.4 entstand.

Für die Beanspruchungsarten Torsion und Querkraftschub kommt man durch Einsetzen der Spannungsbeziehungen in die spezifische Formänderungsarbeit und Auswerten der Integrale zu den Formeln, die nachfolgend zusammengestellt wurden. Es sind auch die für verschiedene Anwendungen wichtigen Abhängigkeiten von den Verformungen angegeben, die entstehen, wenn die Schnittgrößen durch die entsprechenden Differenzialbeziehungen 14.3 (Normalkraft), 17.3 (Biegemoment), 21.11 (Torsionsmoment) und 20.5 (Querkraft) ersetzt werden:

Formänderungsarbeit infolge der Normalkraft

$$F_N \text{ (} w \text{ ist die Verschiebung in Längsrichtung, } EA \text{ die Dehnsteifigkeit):} \quad W_i = \frac{1}{2} \int_l \frac{F_N^2}{EA} dz = \frac{1}{2} \int_l EA w'^2 dz \quad (24.11)$$

Formänderungsarbeit infolge des Biegemoments M_b (v ist die Biegeverformung senkrecht zur Längsrichtung, EI die Biegesteifigkeit):

$$W_i = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_b^2}{EI} dz = \frac{1}{2} \int_l EI v''^2 dz \quad (24.12)$$

Formänderungsarbeit infolge des Torsionsmoments M_t (φ ist der Verdrehwinkel, GI_t die Torsionssteifigkeit):

$$W_i = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_t^2}{GI_t} dz = \frac{1}{2} \int_l GI_t \varphi'^2 dz \quad (24.13)$$

Formänderungsarbeit infolge der Querkraft F_Q (v_S ist die Schubverformung, G der Schubmodul, A die Querschnittsfläche und κ_S der Korrekturfaktor nach 20.4):

$$W_i = \frac{1}{2} \int_l \kappa_S \frac{F_Q^2}{GA} dz = \frac{1}{2} \int_l \frac{GA}{\kappa_S} v'_S^2 dz \quad (24.14)$$

Formänderungsarbeit infolge der Federkraft F_c in einer linearen Feder (s ist die Längenänderung der Feder, c die Federsteifigkeit):

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{F_c^2}{c} = \frac{1}{2} c s^2 \quad (24.15)$$

Formänderungsarbeit infolge des Federmoments M_c in einer Drehfeder (φ ist der Verdrehwinkel der Feder, c_T die Drehfedersteifigkeit):

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{M_c^2}{c_T} = \frac{1}{2} c_T \varphi^2 \quad (24.16)$$

Formänderungsarbeit infolge der Stabkraft F_S in einem Fachwerkstab (Δl ist die Verlängerung des Stabs, l die Stablänge, EA die konstante Dehnsteifigkeit):

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{F_S^2 l}{EA} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (\Delta l)^2 \quad (24.17)$$

Man beachte den ähnlichen Aufbau, den alle sieben Formeln haben. Bei gleichzeitiger Beanspruchung eines Bauteils durch mehrere Grundbeanspruchungsarten dürfen die Anteile aus 24.11 bis 24.17 addiert werden. Entsprechendes gilt für komplexe Bauteile: Die in den Arbeitssatz 24.5 eingehende Formänderungsenergie W_i bezieht sich immer auf das gesamte elastische System, darf aber bereichsweise formuliert und dann addiert werden.

24.3 Satz von MAXWELL und BETTI

Betrachtet wird ein durch zwei Einzelkräfte F_1 und F_2 an den Stellen 1 und 2 belasteter Biegeträger. Sowohl F_1 als auch F_2 haben einen Einfluss auf die Verschiebungen beider Punkte. Diese Einzelanteile können zum Beispiel mit der bekannten Biegelinie aufgeschrieben werden (das in der Abbildung 24.6 skizzierte Beispiel entspricht dem Fall a in der Zusammenstellung des Abschnitts 17.4 auf Seite 260).

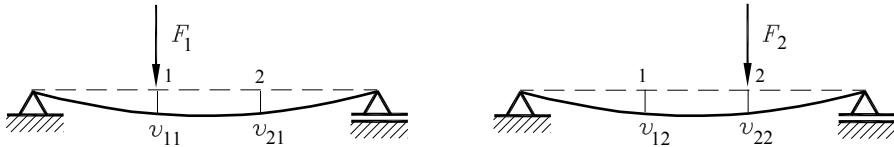


Abbildung 24.6: Jede Kraft trägt zu jeder Verformung einen ganz bestimmten Anteil bei

Die Verschiebungsanteile können formal so aufgeschrieben werden:

$$v_{11} = \alpha_{11} F_1 \quad , \quad v_{21} = \alpha_{21} F_1 \quad , \quad v_{12} = \alpha_{12} F_2 \quad , \quad v_{22} = \alpha_{22} F_2 \quad . \quad (24.18)$$

Die Faktoren α_{ij} heißen *Einflusszahlen* und dürfen als bekannt vorausgesetzt werden. Ihre Indizes deuten eine „Verschiebung an der Stelle i infolge einer Kraft an der Stelle j “ an. Die Verschiebungen an den Stellen 1 und 2 bei gleichzeitiger Wirkung beider Kräfte ergeben sich durch Superposition:

$$v_1 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 \quad , \quad v_2 = \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2 \quad . \quad (24.19)$$

Um die gesamte äußere Arbeit infolge der Wirkung beider Kräfte F_1 und F_2 korrekt aufzuschreiben, stellt man sich vor, dass sie nacheinander aufgebracht werden. Wird zuerst F_1 aufgebracht, so ist während des anschließenden Aufbringens von F_2 die Kraft F_1 schon vorhanden, so dass der zusätzlich durch F_2 an der Stelle 1 erzeugte Verformungsweg von F_1 in voller Größe absolviert wird und für diesen Anteil der Faktor $\frac{1}{2}$ entfällt (zur Erinnerung: Dieser Faktor entstand, wenn die Kraft „von Null auf ihren Endwert anwuchs“). Die von beiden Kräften geleistete Arbeit kann also in der Form

$$W_a = \frac{1}{2} v_{11} F_1 + \frac{1}{2} v_{22} F_2 + v_{12} F_1 \quad (24.20)$$

aufgeschrieben werden. Bei geänderter Reihenfolge des Aufbringens (zuerst F_2 , danach F_1) ist die Kraft F_2 in voller Größe vorhanden, wenn F_1 von Null auf den Endwert anwächst:

$$\bar{W}_a = \frac{1}{2} v_{22} F_2 + \frac{1}{2} v_{11} F_1 + v_{21} F_2 \quad .$$

Natürlich muss der Endzustand von der Reihenfolge des Aufbringens der Kräfte unabhängig sein, so dass $W_a = \bar{W}_a$ gesetzt werden darf. Daraus folgt:

$$v_{12} F_1 = v_{21} F_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} F_2 F_1 = \alpha_{21} F_1 F_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} \quad .$$

Dieses ebenso wichtige wie bemerkenswerte Ergebnis wurde von JAMES CLERK MAXWELL (1831 - 1879) und ENRICO BETTI (1823 - 1892) gefunden. Es gilt nicht nur für den betrachteten Biegeträger, sondern für beliebige Systeme der Elastostatik, und der hier für Kräfte und Verschiebungen demonstrierte Zusammenhang gilt auch für Momente und Verdrehungen. Nach seinen Entdeckern benannt, ist es der

Reziprozitätssatz von MAXWELL und BETTI:

Mit einer *Einflusszahl* α_{ij} kann die Verformung an einer Stelle i infolge einer Belastung an der Stelle j durch Multiplikation mit dieser Belastung berechnet werden. Es gilt

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} . \quad (24.21)$$

- ⇒ Das Beispiel in **Abbildung 24.7** demonstriert die Aussage des Maxwell-Bettischen Satzes: Im links gezeichneten System erzeugt die Kraft F an einer beliebig gewählten Stelle 1 des vertikalen Trägerteils die Horizontalverschiebung v_1 . Eine in Richtung dieser Verschiebung wirkende Kraft gleicher Größe (rechtes System) erzeugt ein ganz anderes Verformungsbild (mit wesentlich größeren Verformungen, das unbelastete Horizontalstück bleibt gerade), aber für die an der Stelle 2 gemessene Verformung gilt (dieses und weitere Beispiele unter www.TM-aktuell.de): $v_2 = v_1$. Wenn man die Kraft F durch ein Moment M ersetzt, ergibt sich die gleiche Aussage für die Biegewinkel: $\varphi_2 = \varphi_1$.
- ⇒ Selbst eine „gemischte Aussage“ ist möglich: Eine Kraft F am Punkt 2 möge am Punkt 1 den Biegewinkel $\varphi_1 = \beta_{12} F$ hervorrufen. Dann kann die Verschiebung am Punkt 2, die durch ein Moment M am Punkt 1 hervorgerufen wird, mit der gleichen Einflusszahl berechnet werden: $v_2 = \beta_{12} M$.
- ⇒ Die Aussage 24.21 garantiert auch die Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen bei der Methode der finiten Elemente (vgl. Kapitel 15.1 und Abschnitt 18.2), denn in den Steifigkeitsmatrizen stehen die (reziproken) Einflusszahlen. Auch die „gemischten Aussagen“ spiegeln sich in dieser Symmetrie wider.
- ⇒ Um Rechenprogramme für elastostatische Probleme (vgl. **Abbildung 24.8**) einem wirkungsvollen Test zu unterziehen, kann man Systeme mit unterschiedlichen Belastungen in der Form berechnen, dass die Ergebnisse nach 24.21 kontrolliert werden können (ist auch ein wirkungsvoller Test dafür, ob man diese Programme richtig bedient).

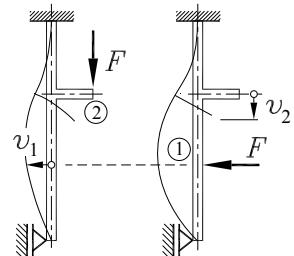


Abbildung 24.7: v_1 infolge F bei ② ist gleich v_2 infolge F bei ①

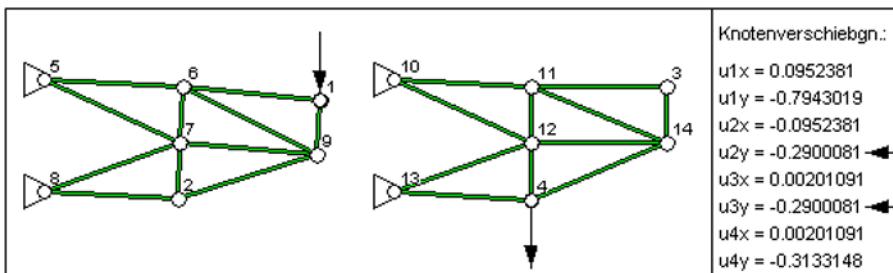


Abbildung 24.8: Maxwell-Betti für Fachwerke (u_2y im linken Fachwerk = u_3y im rechten Fachwerk, berechnet mit dem Programm „Statisch unbestimmte ebene Fachwerke (FEM)“ unter www.TM-interaktiv.de)

24.4 Verfahren auf der Basis der Formänderungsenergie

Neben der Lösung der Differentialgleichungen (Randwertprobleme), die die Verformungen elastischer Systeme beschreiben (Kapitel 14 bis 21), bieten sich als Alternative zahlreiche Verfahren auf der Basis der Formänderungsenergie an, die in der Mehrzahl der Fälle (insbesondere bei praxisrelevanten Problemen) effektiver, häufig sogar die einzige praktikablen Verfahren sind. Die wichtigsten Verfahren werden hier kurz vorgestellt (und bewertet), einige werden noch spezielle Abschnitte in diesem Buch gewidmet.

Die Verfahren sind für alle Belastungsarten (wie sie z. B. auf der Seite 424 zusammengestellt sind) anwendbar. Hier werden zunächst ausschließlich die Verformungen infolge von Biegemomenten betrachtet.

Arbeitssatz

Der Arbeitssatz 24.5 in der schlichten Formulierung $W_i = W_a$ eignet sich zur Berechnung von Verformungen am Angriffspunkt einer äußeren Last. Die Formänderungsenergie W_i kann (mit gegebenenfalls mehreren Summanden) nach den Formeln 24.11 bis 24.17 aufgeschrieben werden (hier soll nur 24.12 berücksichtigt werden), für die Arbeit der äußeren Last gilt 24.6.

Beispiel 1:

Für den skizzierten Träger soll die Absenkung v_F des Kraftangriffspunktes berechnet werden.

Gegeben: $EI = \text{konstant}$, F , a .

Die Skizze unten zeigt die Lagerreaktionen und die Koordinaten, auf die sich die Biegemomentenverläufe beziehen:

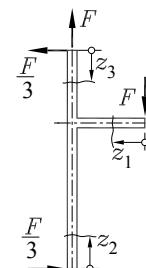
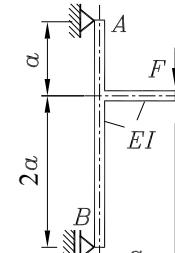
$$M_{b1} = -Fz_1, \quad M_{b2} = \frac{F}{3}z_2, \quad M_{b3} = -\frac{F}{3}z_3.$$

Damit kann der Arbeitssatz formuliert werden (auf der linken Seite steht die Arbeit der Kraft F entlang des Weges v_F , auf der rechten Seite die Summe der Formänderungsenergien der drei Trägerabschnitte):

$$\frac{1}{2}Fv_F = \frac{1}{2} \int_{z_1=0}^a \frac{(-Fz_1)^2}{EI} dz_1 + \frac{1}{2} \int_{z_2=0}^{2a} \frac{(\frac{F}{3}z_2)^2}{EI} dz_2 + \frac{1}{2} \int_{z_3=0}^a \frac{(-\frac{F}{3}z_3)^2}{EI} dz_3.$$

Die Integrale sind problemlos zu berechnen, Umstellen nach der gesuchten Verschiebung liefert:

$$v_F = \frac{2}{3} \frac{Fa^3}{EI}.$$



- ⇒ Da die Schnittgrößen in die Formeln für die Formänderungsenergie quadratisch eingehen, spielt ihr Vorzeichen keine Rolle. Deshalb dürfen auch die Koordinaten für die einzelnen Abschnitte eines Trägers beliebig gewählt werden (auch z. B. gegenläufig, was bei Anwendung der Differentialgleichung der Biegelinie zu höchster Aufmerksamkeit gezwungen hätte).

- ⇒ Eine Verformung ergibt sich positiv, wenn sie den gleichen Richtungssinn wie die äußere Belastungsgröße hat. Dies gilt für eine Verschiebung, die am Angriffspunkt einer äußeren Kraft berechnet wird, ebenso wie für eine Verdrehung, die am Angriffspunkt eines äußeren Moments berechnet wird (diese Aussage gilt auch für die beiden folgenden Verfahren).

Der Arbeitssatz in der Fassung 24.5 ist für die Mechanik von grundsätzlicher Bedeutung: Die von der äußeren Belastung bei der Verformung geleistete Arbeit bleibt als Energie im verformten System erhalten. Diese Aussage entspricht dem Energiesatz in der Kinetik (Abschnitte 28.4.2 und 29.5.3).

Für die Berechnung von Verformungen, wie es im Beispiel 1 demonstriert wurde, ist der Arbeitssatz in der Fassung 24.5 aus zwei Gründen nur bedingt (bzw. nicht) brauchbar:

- Mehrere äußere Belastungen können zwar berücksichtigt werden, weil diese aber mehrere unterschiedliche (unbekannte) Verformungen erzeugen, können diese nicht berechnet werden.
- Verformungen an Punkten, an denen keine Einzellast eingeleitet wird, können nicht berechnet werden.

Beide Mängel werden geheilt durch die beiden nachfolgend beschriebenen Verfahren, die unmittelbar auf dem Arbeitssatz basieren.

Satz von CASTIGLIANO

Betrachtet wird noch einmal der Biegeträger mit zwei Einzelkräften (Abbildung 24.9), für den im Abschnitt 24.3 die Beziehung für die Arbeit der äußeren Kräfte 24.20 hergeleitet wurde. Diese kann mit 24.18 so aufgeschrieben werden:

$$W_a = \frac{1}{2} \alpha_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} F_2^2 + \alpha_{12} F_1 F_2 \quad . \quad (24.22)$$

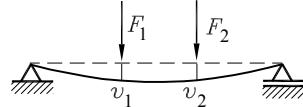


Abbildung 24.9: Biegeträger mit zwei Einzelkräften

Die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks¹ nach F_1 bzw. F_2 liefern mit

$$\frac{\partial W_a}{\partial F_1} = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 = v_1 \quad , \quad \frac{\partial W_a}{\partial F_2} = \alpha_{12} F_1 + \alpha_{22} F_2 = v_2$$

genau die Verschiebungen an den Kraftangriffspunkten 1 und 2 (vgl. Formeln 24.19).

Dieser Zusammenhang, der hier für einen Biegeträger mit zwei Einzelkräften hergeleitet wurde, lässt sich verallgemeinern auf beliebige linear-elastische Systeme. Ihre praktische Bedeutung erlangt die auf den italienischen Baumeister ALBERTO CASTIGLIANO (1847-1884) zurückgehende Aussage erst im Zusammenhang mit dem Arbeitssatz 24.5, indem nicht die äußere Arbeit partiell nach einer Belastungsgröße abgeleitet wird, sondern die über die Schnittgrößen nach den Formeln 24.11 bis 24.17 zu formulierende Formänderungsenergie W_i .

¹Erinnerung an die Mathematik: Beim Bilden der partiellen Ableitung nach einer Variablen werden alle anderen Größen wie Konstanten behandelt.

Satz von CASTIGLIANO:

Die partielle Ableitung der **gesamten** Formänderungsenergie W_i , die in einem linear-elastischen System gespeichert ist, nach einer äußeren Kraft F ergibt die Verschiebung des Kraftangriffspunktes, die partielle Ableitung nach einem äußeren Moment M ergibt den Verdrehwinkel am Angriffspunkt des Moments:

$$v_F = \frac{\partial W_i}{\partial F} \quad , \quad \varphi_0 = \frac{\partial W_i}{\partial M} . \quad (24.23)$$

- ⇒ Die Quadrate bei den Schnittgrößen in den Formeln für die Formänderungsenergie könnten bei der praktischen Handhabung (z. B. bei Momentenverläufen, die bereichsweise aufgeschrieben werden müssen) lästig sein, wenn nicht immer die Möglichkeit gegeben wäre, die „partielle Ableitung vor der Integration“ auszuführen. Die partielle Ableitung darf „in das Integral hineingezogen werden, wenn der Integrand stetig ist“. Diese Voraussetzung ist allerdings immer erfüllt, denn die (in den Verläufen durchaus vorhandenen) Unstetigkeiten liegen zwangsläufig an den Bereichsgrenzen, weil die Schnittgrößenverläufe gar nicht anders formuliert werden können. Man berechnet also z. B. die Verformung an der Stelle einer Kraft F , wenn nur Biegemomentanteile berücksichtigt werden, zweckmäßig so:

$$v_F = \frac{\partial W_i}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{1}{2} \int_l \frac{M_b^2}{EI} dz \right) = \frac{1}{2} \int_l \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{M_b^2}{EI} \right) dz = \int_l \frac{M_b}{EI} \frac{\partial M_b}{\partial F} dz . \quad (24.24)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass nur M_b^2 von F abhängt und bei der Ableitung die „Kettenregel“ zu beachten ist. Die Lösung des Integrals nach 24.24 ist im Allgemeinen deutlich weniger aufwendig als die Integration über das Quadrat der Schnittgröße. Die mit l symbolisch angedeuteten Integrationsgrenzen sind großzügig zu interpretieren als „über alle Trägerbereiche, die gegebenenfalls auch einen Rahmen oder ein verzweigtes System bilden können“. Das ist in der Regel nur bereichsweise möglich.

Beispiel 2:

Für den skizzierten Träger sollen die Absenkung v_F des Kraftangriffspunktes und die Horizontalverschiebung v_C des Punktes C berechnet werden.

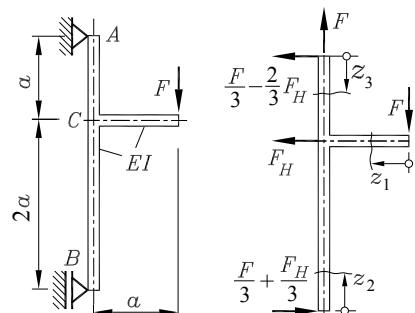
Gegeben: $EI = \text{konstant}$, F , a .

Weil am Punkt C keine Kraft wirkt, nach der partiell abgeleitet werden kann, wird dort eine (später wieder Null zu setzende) Hilfskraft F_H eingeführt. Die Skizze rechts zeigt die Lagerreaktionen und die Koordinaten, auf die sich die Biegemomentenverläufe beziehen:

$$M_{b1} = -Fz_1 \quad , \quad M_{b2} = \left(\frac{F}{3} + \frac{F_H}{3} \right) z_2 \quad , \quad M_{b3} = -\left(\frac{F}{3} - \frac{2}{3} F_H \right) z_3 .$$

Die für 24.24 benötigten partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial M_{b1}}{\partial F} = -z_1 \quad , \quad \frac{\partial M_{b2}}{\partial F} = \frac{z_2}{3} \quad , \quad \frac{\partial M_{b3}}{\partial F} = -\frac{z_3}{3} \quad , \quad \frac{\partial M_{b1}}{\partial F_H} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M_{b2}}{\partial F_H} = \frac{z_2}{3} \quad , \quad \frac{\partial M_{b3}}{\partial F_H} = \frac{2z_3}{3} .$$



Die Hilfskraft F_H hat damit ihre Schuldigkeit getan, sie kann für die Berechnung der Verschiebungen Null gesetzt werden. Die konstante Biegesteifigkeit EI wird vor die Integrale gezogen:

$$v_F = \frac{1}{EI} \left[\int_{z_1=0}^a -F z_1 \cdot (-z_1) dz_1 + \int_{z_2=0}^{2a} \frac{F}{3} z_2 \frac{z_2}{3} dz_2 + \int_{z_3=0}^a -\frac{F}{3} z_3 \cdot \left(-\frac{z_3}{3}\right) dz_3 \right] = \frac{2}{3} \frac{Fa^3}{EI} ,$$

$$v_C = \frac{1}{EI} \left[\int_{z_2=0}^{2a} \frac{F}{3} z_2 \frac{z_2}{3} dz_2 + \int_{z_3=0}^a -\frac{F}{3} z_3 \frac{2z_3}{3} dz_3 \right] = \frac{2}{9} \frac{Fa^3}{EI} .$$

- ⇒ Dass bei dieser Aufgabe in Anlehnung an die Definitionen der Schnittgrößen in der Statik zum Teil mit negativen Biegemomenten gerechnet wurde, ist nicht erforderlich, im Gegen teil: Weil M_b (wie auch die anderen Schnittgrößen) in der Formel für die Formänderungsenergie quadriert wird (bzw. mit der eigenen partiellen Ableitung multipliziert wird), sind für die Wahl der Koordinaten und der positiven Richtungen alle Freiheiten gegeben.

Arbeiten mit Einheitslasten²

Betrachtet wird wieder der Biegeträger mit zwei Einzelkräften (Abbildung 24.10), für den im Abschnitt 24.3 die Beziehung für die Arbeit der äußeren Kräfte 24.20 unter der Annahme hergeleitet wurde, dass diese nacheinander aufgebracht wurden (erst F_1 , dann F_2):

$$W_a = \frac{1}{2} v_{11} F_1 + \frac{1}{2} v_{22} F_2 + v_{12} F_1 . \quad (24.25)$$

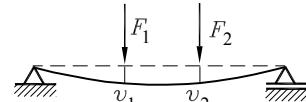


Abbildung 24.10: Kräfte werden nacheinander aufgebracht

Diese Arbeit der äußeren Kräfte kann nach dem Arbeitssatz mit der Formänderungsenergie des verformten Trägers gleichgesetzt werden. Wenn nur die Biegeanteile berücksichtigt werden, kann dies in der Form

$$W_a = \frac{1}{2} v_{11} F_1 + \frac{1}{2} v_{22} F_2 + v_{12} F_1 = W_i = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_b^2}{EI} dz = \frac{1}{2} \int_l \frac{(M_{b①} + M_{b②})^2}{EI} dz$$

aufgeschrieben werden. Darin soll $M_{b①}$ das Biegemoment bezeichnen, das bei Belastung des Trägers nur durch F_1 hervorgerufen wird, entsprechendes gilt für $M_{b②}$ (auch die Biegemomente können natürlich superponiert werden). Die Klammer unter dem Integral auf der rechten Seite wird aufgelöst:

$$\frac{1}{2} v_{11} F_1 + \frac{1}{2} v_{22} F_2 + v_{12} F_1 = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_{b①}^2}{EI} dz + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_{b②}^2}{EI} dz + \frac{1}{2} \int_l \frac{2M_{b①}M_{b②}}{EI} dz .$$

Der erste Summand auf der linken Seite ist die Arbeit der äußeren Kraft F_1 , wenn ausschließlich diese wirken würde, der erste Summand auf der rechten Seite genau die dann entstehende Formänderungsenergie. Beide sind nach dem Arbeitssatz gleich groß. Die gleiche Aussage gilt für

²Die Bezeichnung für die beschriebene Strategie wird unterschiedlich gehandhabt: Je nach Herleitung findet man Prinzip der virtuellen Kräfte ebenso wie Arbeitssatz oder auch Mohrsches Verfahren (nach O. Mohr, der in der Fußnote auf Seite 391 erwähnt wird). Das Verfahren wird (wie das Verfahren nach CASTIGLIANO) hier als eine spezielle Technik behandelt, den Arbeitssatz anzuwenden.

die zweiten Summanden, so dass sich diese vier Anteile aus der Beziehung herausheben, und es verbleibt:

$$v_{12} F_1 = \int_l \frac{M_{b(1)} M_{b(2)}}{EI} dz \quad .$$

Ein kleiner Trick führt zu einer weiteren Vereinfachung und einer wichtigen Aussage: Die Kraft F_1 wird durch eine Einheitslast „1“ (dimensionslos) ersetzt, so dass auf der linken Seite nur v_{12} verbleibt. Dann muss auch $M_{b(1)}$ durch das Biegemoment ersetzt werden, das durch diese Einheitslast erzeugt wird. Dieses wird mit \bar{M}_b bezeichnet:

$$v_{12} = \int_l \frac{\bar{M}_b M_{b(2)}}{EI} dz \quad .$$

Die Verschiebung v_{12} ist die „Verschiebung des Punktes 1 infolge einer Kraft am Punkt 2“, also die Verschiebung an der Stelle der Einheitslast infolge der übrigen Belastung. Es ist klar, dass diese Aussage auch gilt, wenn die „übrige“ Belastung nicht nur aus dieser einen Kraft bestehen würde. Deshalb wird auf der linken Seite nur v_1 geschrieben, wenn auf der rechten Seite $M_{b(2)}$ durch das Biegemoment M_b infolge aller Lasten (außer der Einheitslast) ersetzt wird:

Bei ausschließlicher Berücksichtigung von Biegeanteilen kann die Verschiebung v_1 an einer Stelle 1 berechnet werden nach

$$v_1 = \int_l \frac{M_b \bar{M}_b}{EI} dz \quad . \quad (24.26)$$

Darin ist M_b der Biegemomentenverlauf infolge der (Original-)Belastung des Systems, \bar{M}_b der Biegemomentenverlauf infolge ausschließlicher Belastung durch eine (dimensionslose) Einheitslast „1“ an der Stelle 1 in Richtung der zu berechnenden Verschiebung.

- ⇒ Wie beim Satz von Castigliano ist eine Modifikation von 24.26 zur Berechnung eines Verdrehwinkels möglich: Anstelle einer Einheitskraft wird an der interessierenden Stelle ein (dimensionsloses) Einheitsmoment aufgebracht, mit dem der Biegemomentenverlauf \bar{M}_b zu berechnen ist.
- ⇒ Auch 24.26 kann sinngemäß erweitert werden, so dass Formänderungsenergien infolge anderer Schnittgrößen berücksichtigt werden. Weil allerdings eine so elegante allgemeingültige Formulierung wie für den Satz von Castigliano mit 24.23 hier nicht möglich ist, wird nachfolgend die Erweiterung von 24.26 auf alle inneren Kräfte angegeben, für die mit den Formeln 24.11 bis 24.17 die Formänderungsenergien beschrieben werden (man erkennt leicht, dass sich alle Anteile mit der gleichen Überlegung herleiten lassen, die hier für den Biegeanteil demonstriert wurde):

$$v_1 = \int_l \frac{F_N \bar{F}_N}{EA} dz + \int_l \frac{M_b \bar{M}_b}{EI} dz + \int_l \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_t} dz + \int_l \kappa_s \frac{F_Q \bar{F}_Q}{GA} dz + \\ \sum_i \frac{F_{c,i} \bar{F}_{c,i}}{c} + \sum_i \frac{M_{c,i} \bar{M}_{c,i}}{c_{T,i}} + \sum_i \frac{F_{S,i} \bar{F}_{S,i} l_i}{EA_i} \quad . \quad (24.27)$$

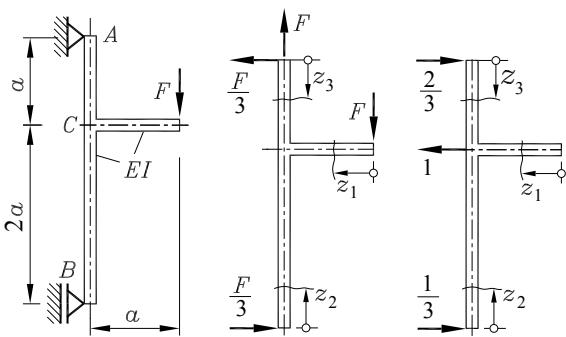
Die mit l symbolisch angedeuteten Integrationsgrenzen bedeuten auch hier „über alle Trägerbereiche“, das i bei den Summenzeichen bedeutet „über alle Federn bzw. Stäbe“.

Beispiel 3:

Für den skizzierten Träger sollen die Absenkung v_F des Kraftangriffspunktes und die Horizontalverschiebung v_C des Punktes C berechnet werden (Aufgabe ist identisch mit Beispiel 2).

Gegeben: $EI = \text{konstant}$, F , a .

Die mittlere Skizze zeigt die Lagerreaktionen und die Koordinaten, auf die sich die Biegemomentenverläufe für das Originalsystem beziehen:



$$M_{b1} = -Fz_1, \quad M_{b2} = \frac{F}{3}z_2, \quad M_{b3} = -\frac{F}{3}z_3.$$

Die für die Verschiebung des Kraftangriffspunktes erforderlichen \bar{M}_b -Verläufe infolge einer Einheitslast an dieser Stelle sehen genauso aus (allerdings eine 1 anstelle F). Die \bar{M}_b -Verläufe für die Berechnung der Verschiebung des Punktes C ergeben sich aus der rechten Skizze:

$$\bar{M}_{b1} = 0, \quad \bar{M}_{b2} = \frac{1}{3}z_2, \quad \bar{M}_{b3} = \frac{2}{3}z_3.$$

Damit können die gesuchten Verschiebungen nach 24.26 aufgeschrieben werden. Die konstante Biegesteifigkeit EI wird vor die Integrale gezogen:

$$v_F = \frac{1}{EI} \left[\int_{z_1=0}^a -Fz_1 \cdot (-z_1) dz_1 + \int_{z_2=0}^{2a} \frac{F}{3}z_2 \frac{z_2}{3} dz_2 + \int_{z_3=0}^a -\frac{F}{3}z_3 \cdot \left(-\frac{z_3}{3}\right) dz_3 \right] = \frac{2}{3} \frac{Fa^3}{EI},$$

$$v_C = \frac{1}{EI} \left[\int_{z_2=0}^{2a} \frac{F}{3}z_2 \frac{z_2}{3} dz_2 + \int_{z_3=0}^a -\frac{F}{3}z_3 \frac{2z_3}{3} dz_3 \right] = \frac{2}{9} \frac{Fa^3}{EI}.$$

⇒ Man erhält (selbstverständlich) die gleichen Ergebnisse wie bei der Berechnung nach dem Satz von Castigiano. Aber auch die Integrale, die zu den Ergebnissen führen, sind identisch. Auch wenn sich die beiden Strategien in der Begründung deutlich unterschieden, sieht man doch die enge Verwandtschaft der beiden Verfahren, die sich schon in den Formeln 24.24 und 24.26 zeigte: Die partielle Ableitung des Biegemoments nach einer Belastungsgröße, die in den Schnittgrößen immer nur als linearer Faktor auftaucht, macht diese zur „Einheitslast 1“, mit der das Biegemoment \bar{M}_b erzeugt wird.

⇒ Der Hinweis für die Anwendung des Arbeitssatzes und des Satzes von Castigiano, dass die Wahl der Koordinaten und die damit verbundene Festlegung positiver Schnittgrößen bedeutungslos ist, weil letztere in den Formeln der Formänderungsenergie quadratisch auftreten, gilt mit einer kleinen Einschränkung auch für das Arbeiten mit Einheitslasten: Die Festlegung kann für jeden Integrationsbereich beliebig erfolgen, muss jedoch für das Aufschreiben der Schnittgrößen für die Originalbelastung und der Schnittgrößen für die Einheitslast gleich sein.

Die beiden sich aus dem Arbeitssatz ableitenden Strategien zur Berechnung von Verformungen (**Satz von Castigiano** und das **Arbeiten mit Einheitslasten**) sind nicht nur verwandt, sondern beinahe identisch. Persönliche Präferenzen mögen entscheiden, ob man lieber die Schnittgrößen einmal berechnet und dann formal partielle Ableitungen bildet oder ob man zwei Schnittgrößenverläufe (aus Originalbelastung und aus Einheitsbelastung) ermittelt. Die Verfahren können deshalb einheitlich bewertet werden:

- Die Verfahren sind für die Berechnung von Verformungen an einzelnen speziellen Punkten außerordentlich effizient. Der Anwender kann frei entscheiden, welche Einflüsse berücksichtigt werden sollen (z. B.: Biegung mit oder ohne Erfassung der Querkraftanteile oder speziell bei Rahmen Berücksichtigung oder Vernachlässigung der Normalkraft).
- Der (vermeintliche) Nachteil (z. B. im Vergleich mit der Verformungsberechnung mittels Differenzialgleichung der Biegelinie), dass man die Verformung nur an speziellen Punkten erhält, ist (wegen der damit verbundenen Beschränkung des Aufwands) häufig als Vorteil zu sehen, wenn (wie für die Behandlung statisch unbestimmter Probleme) ohnehin nur diese Ergebnisse gefragt sind.
- Die für die Berechnung zu lösenden bestimmten Integrale enthalten (bei zumindest stückweise konstanter Biegesteifigkeit) nur Funktionen, die problemlos sogar per „Handrechnung“ zu behandeln sind.
- Die Universalität der Anwendbarkeit drückt sich besonders in der eleganten Formulierung des Satzes von Castigiano 24.23 aus. Diese Formeln gelten auch für linear-elastische Bauteile, die hier nicht behandelt werden (Platten, Schalen, ...). Aber natürlich ist auch eine Erweiterung von 24.27 möglich.

Aus den genannten Gründen wurden in der Vergangenheit die etwas aufwendigeren strukturmechanischen Probleme (Fachwerke, statisch unbestimmte Durchlaufträger, biegesteife Rahmen, Bauteile mit gemischter Belastung, ...) vornehmlich mit diesen Verfahren gelöst. Das ist (zumindest in der technischen Praxis) vorbei. Wenn ein Computerprogramm verfügbar ist, das für beliebig komplizierte Strukturen alle hier beschriebenen Einflüsse exakt erfasst, dann kann die Handrechnung natürlich nicht konkurrieren.

Solche Programme sind verfügbar. Das heißt nicht, dass die Verfahren damit überflüssig sind. Für spezielle Probleme ist ihre Anwendung immer noch sinnvoll, deshalb werden in den beiden folgenden Abschnitten auch noch einige Beispiele behandelt. Außerordentlich nützlich können die Verfahren auch zur Verifizierung von Ergebnissen der Computerrechnung sein.

Aber: Das Trainieren der Handrechnung mit speziellen Hilfsmitteln (Rechenschemata, Algorithmenblättern) ist nicht mehr zeitgemäß. Und auch die früher sehr beliebten „Koppeltafeln“ zur Auswertung der Integrale haben ausgedient, denn für die Probleme, für die die Verfahren heute noch angewendet werden, helfen sie meistens ohnehin nicht, und Integrale sind ja selbst für Taschenrechner kein Problem mehr.

Lösungen der Integrale $\int f(x) g(x) dx$	
	$f_1(x) = f_2(x) = a^2$
	$\frac{1}{2} x^2$
	$\frac{1}{2} x^3$
	$\frac{1}{2} x^4 + ax^2 + b^2$
	$\frac{1}{2} x^5$
	$\frac{1}{2} x^6$
	$\frac{1}{2} x^7 + ax^5 + bx^3$
	$\frac{1}{2} x^8$
	$\frac{1}{2} x^9 + ax^7 + bx^5 + cx^3$
	$\frac{1}{2} x^{10}$
	$\frac{1}{2} x^{11} + ax^9 + bx^7 + cx^5 + dx^3$
	$\frac{1}{2} x^{12}$
	$\frac{1}{2} x^{13} + ax^{11} + bx^9 + cx^7 + dx^5 + ex^3$
	$\frac{1}{2} x^{14}$
	$\frac{1}{2} x^{15} + ax^{13} + bx^{11} + cx^9 + dx^7 + ex^5 + fx^3$
	$\frac{1}{2} x^{16}$
	$\frac{1}{2} x^{17} + ax^{15} + bx^{13} + cx^{11} + dx^9 + ex^7 + fx^5 + gx^3$
	$\frac{1}{2} x^{18}$
	$\frac{1}{2} x^{19} + ax^{17} + bx^{15} + cx^{13} + dx^{11} + ex^9 + fx^7 + gx^5 + hx^3$
	$\frac{1}{2} x^{20}$
	$\frac{1}{2} x^{21} + ax^{19} + bx^{17} + cx^{15} + dx^{13} + ex^{11} + fx^9 + gx^7 + hx^5 + ix^3$
	$\frac{1}{2} x^{22}$
	$\frac{1}{2} x^{23} + ax^{21} + bx^{19} + cx^{17} + dx^{15} + ex^{13} + fx^{11} + gx^9 + hx^7 + ix^5 + jx^3$
	$\frac{1}{2} x^{24}$
	$\frac{1}{2} x^{25} + ax^{23} + bx^{21} + cx^{19} + dx^{17} + ex^{15} + fx^{13} + gx^{11} + hx^9 + ix^7 + jx^5 + kx^3$
	$\frac{1}{2} x^{26}$
	$\frac{1}{2} x^{27} + ax^{25} + bx^{23} + cx^{21} + dx^{19} + ex^{17} + fx^{15} + gx^{13} + hx^{11} + ix^{9} + jx^7 + kx^5 + lx^3$
	$\frac{1}{2} x^{28}$
	$\frac{1}{2} x^{29} + ax^{27} + bx^{25} + cx^{23} + dx^{21} + ex^{19} + fx^{17} + gx^{15} + hx^{13} + ix^{11} + jx^9 + kx^7 + lx^5 + mx^3$
	$\frac{1}{2} x^{30}$
	$\frac{1}{2} x^{31} + ax^{29} + bx^{27} + cx^{25} + dx^{23} + ex^{21} + fx^{19} + gx^{17} + hx^{15} + ix^{13} + jx^{11} + kx^9 + lx^7 + mx^5 + nx^3$
	$\frac{1}{2} x^{32}$
	$\frac{1}{2} x^{33} + ax^{31} + bx^{29} + cx^{27} + dx^{25} + ex^{23} + fx^{21} + gx^{19} + hx^{17} + ix^{15} + jx^{13} + kx^{11} + lx^9 + mx^7 + nx^5 + px^3$
	$\frac{1}{2} x^{34}$
	$\frac{1}{2} x^{35} + ax^{33} + bx^{31} + cx^{29} + dx^{27} + ex^{25} + fx^{23} + gx^{21} + hx^{19} + ix^{17} + jx^{15} + kx^{13} + lx^{11} + mx^{9} + nx^{7} + px^5 + qx^3$
	$\frac{1}{2} x^{36}$
	$\frac{1}{2} x^{37} + ax^{35} + bx^{33} + cx^{31} + dx^{29} + ex^{27} + fx^{25} + gx^{23} + hx^{21} + ix^{19} + jx^{17} + kx^{15} + lx^{13} + mx^{11} + nx^{9} + px^7 + qx^5 + rx^3$
	$\frac{1}{2} x^{38}$
	$\frac{1}{2} x^{39} + ax^{37} + bx^{35} + cx^{33} + dx^{31} + ex^{29} + fx^{27} + gx^{25} + hx^{23} + ix^{21} + jx^{19} + kx^{17} + lx^{15} + mx^{13} + nx^{11} + px^9 + qx^7 + rx^5 + sx^3$
	$\frac{1}{2} x^{40}$
	$\frac{1}{2} x^{41} + ax^{39} + bx^{37} + cx^{35} + dx^{33} + ex^{31} + fx^{29} + gx^{27} + hx^{25} + ix^{23} + jx^{21} + kx^{19} + lx^{17} + mx^{15} + nx^{13} + px^{11} + qx^9 + rx^7 + sx^5 + tx^3$
	$\frac{1}{2} x^{42}$
	$\frac{1}{2} x^{43} + ax^{41} + bx^{39} + cx^{37} + dx^{35} + ex^{33} + fx^{31} + gx^{29} + hx^{27} + ix^{25} + jx^{23} + kx^{21} + lx^{19} + mx^{17} + nx^{15} + px^{13} + qx^{11} + rx^9 + sx^7 + tx^5 + ux^3$
	$\frac{1}{2} x^{44}$
	$\frac{1}{2} x^{45} + ax^{43} + bx^{41} + cx^{39} + dx^{37} + ex^{35} + fx^{33} + gx^{31} + hx^{29} + ix^{27} + jx^{25} + kx^{23} + lx^{21} + mx^{19} + nx^{17} + px^{15} + qx^{13} + rx^{11} + sx^{9} + tx^7 + ux^5 + vx^3$
	$\frac{1}{2} x^{46}$
	$\frac{1}{2} x^{47} + ax^{45} + bx^{43} + cx^{41} + dx^{39} + ex^{37} + fx^{35} + gx^{33} + hx^{31} + ix^{29} + jx^{27} + kx^{25} + lx^{23} + mx^{21} + nx^{19} + px^{17} + qx^{15} + rx^{13} + sx^{11} + tx^9 + ux^7 + vx^5 + wx^3$
	$\frac{1}{2} x^{48}$
	$\frac{1}{2} x^{49} + ax^{47} + bx^{45} + cx^{43} + dx^{41} + ex^{39} + fx^{37} + gx^{35} + hx^{33} + ix^{31} + jx^{29} + kx^{27} + lx^{25} + mx^{23} + nx^{21} + px^{19} + qx^{17} + rx^{15} + sx^{13} + tx^{11} + ux^{9} + vx^7 + wx^5 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{50}$
	$\frac{1}{2} x^{51} + ax^{49} + bx^{47} + cx^{45} + dx^{43} + ex^{41} + fx^{39} + gx^{37} + hx^{35} + ix^{33} + jx^{31} + kx^{29} + lx^{27} + mx^{25} + nx^{23} + px^{21} + qx^{19} + rx^{17} + sx^{15} + tx^{13} + ux^{11} + vx^9 + wx^7 + yx^5 + zx^3$
	$\frac{1}{2} x^{52}$
	$\frac{1}{2} x^{53} + ax^{51} + bx^{49} + cx^{47} + dx^{45} + ex^{43} + fx^{41} + gx^{39} + hx^{37} + ix^{35} + jx^{33} + kx^{31} + lx^{29} + mx^{27} + nx^{25} + px^{23} + qx^{21} + rx^{19} + sx^{17} + tx^{15} + ux^{13} + vx^{11} + wx^9 + yx^7 + zx^5 + ux^3$
	$\frac{1}{2} x^{54}$
	$\frac{1}{2} x^{55} + ax^{53} + bx^{51} + cx^{49} + dx^{47} + ex^{45} + fx^{43} + gx^{41} + hx^{39} + ix^{37} + jx^{35} + kx^{33} + lx^{31} + mx^{29} + nx^{27} + px^{25} + qx^{23} + rx^{21} + sx^{19} + tx^{17} + ux^{15} + vx^{13} + wx^{11} + yx^9 + zx^7 + ux^5 + vx^3$
	$\frac{1}{2} x^{56}$
	$\frac{1}{2} x^{57} + ax^{55} + bx^{53} + cx^{51} + dx^{49} + ex^{47} + fx^{45} + gx^{43} + hx^{41} + ix^{39} + jx^{37} + kx^{35} + lx^{33} + mx^{31} + nx^{29} + px^{27} + qx^{25} + rx^{23} + sx^{21} + tx^{19} + ux^{17} + vx^{15} + wx^{13} + yx^{11} + zx^9 + ux^7 + vx^5 + wy^3$
	$\frac{1}{2} x^{58}$
	$\frac{1}{2} x^{59} + ax^{57} + bx^{55} + cx^{53} + dx^{51} + ex^{49} + fx^{47} + gx^{45} + hx^{43} + ix^{41} + jx^{39} + kx^{37} + lx^{35} + mx^{33} + nx^{31} + px^{29} + qx^{27} + rx^{25} + sx^{23} + tx^{21} + ux^{19} + vx^{17} + wx^{15} + yx^{13} + zx^{11} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3$
	$\frac{1}{2} x^{60}$
	$\frac{1}{2} x^{61} + ax^{59} + bx^{57} + cx^{55} + dx^{53} + ex^{51} + fx^{49} + gx^{47} + hx^{45} + ix^{43} + jx^{41} + kx^{39} + lx^{37} + mx^{35} + nx^{33} + px^{31} + qx^{29} + rx^{27} + sx^{25} + tx^{23} + ux^{21} + vx^{19} + wx^{17} + yx^{15} + zx^{13} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{62}$
	$\frac{1}{2} x^{63} + ax^{61} + bx^{59} + cx^{57} + dx^{55} + ex^{53} + fx^{51} + gx^{49} + hx^{47} + ix^{45} + jx^{43} + kx^{41} + lx^{39} + mx^{37} + nx^{35} + px^{33} + qx^{31} + rx^{29} + sx^{27} + tx^{25} + ux^{23} + vx^{21} + wx^{19} + yx^{17} + zx^{15} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{64}$
	$\frac{1}{2} x^{65} + ax^{63} + bx^{61} + cx^{59} + dx^{57} + ex^{55} + fx^{53} + gx^{51} + hx^{49} + ix^{47} + jx^{45} + kx^{43} + lx^{41} + mx^{39} + nx^{37} + px^{35} + qx^{33} + rx^{31} + sx^{29} + tx^{27} + ux^{25} + vx^{23} + wx^{21} + yx^{19} + zx^{17} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{66}$
	$\frac{1}{2} x^{67} + ax^{65} + bx^{63} + cx^{61} + dx^{59} + ex^{57} + fx^{55} + gx^{53} + hx^{51} + ix^{49} + jx^{47} + kx^{45} + lx^{43} + mx^{41} + nx^{39} + px^{37} + qx^{35} + rx^{33} + sx^{31} + tx^{29} + ux^{27} + vx^{25} + wx^{23} + yx^{21} + zx^{19} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{68}$
	$\frac{1}{2} x^{69} + ax^{67} + bx^{65} + cx^{63} + dx^{61} + ex^{59} + fx^{57} + gx^{55} + hx^{53} + ix^{51} + jx^{49} + kx^{47} + lx^{45} + mx^{43} + nx^{41} + px^{39} + qx^{37} + rx^{35} + sx^{33} + tx^{31} + ux^{29} + vx^{27} + wx^{25} + yx^{23} + zx^{21} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{70}$
	$\frac{1}{2} x^{71} + ax^{69} + bx^{67} + cx^{65} + dx^{63} + ex^{61} + fx^{59} + gx^{57} + hx^{55} + ix^{53} + jx^{51} + kx^{49} + lx^{47} + mx^{45} + nx^{43} + px^{41} + qx^{39} + rx^{37} + sx^{35} + tx^{33} + ux^{31} + vx^{29} + wx^{27} + yx^{25} + zx^{23} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{72}$
	$\frac{1}{2} x^{73} + ax^{71} + bx^{69} + cx^{67} + dx^{65} + ex^{63} + fx^{61} + gx^{59} + hx^{57} + ix^{55} + jx^{53} + kx^{51} + lx^{49} + mx^{47} + nx^{45} + px^{43} + qx^{41} + rx^{39} + sx^{37} + tx^{35} + ux^{33} + vx^{31} + wx^{29} + yx^{27} + zx^{25} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{74}$
	$\frac{1}{2} x^{75} + ax^{73} + bx^{71} + cx^{69} + dx^{67} + ex^{65} + fx^{63} + gx^{61} + hx^{59} + ix^{57} + jx^{55} + kx^{53} + lx^{51} + mx^{49} + nx^{47} + px^{45} + qx^{43} + rx^{41} + sx^{39} + tx^{37} + ux^{35} + vx^{33} + wx^{31} + yx^{29} + zx^{27} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{76}$
	$\frac{1}{2} x^{77} + ax^{75} + bx^{73} + cx^{71} + dx^{69} + ex^{67} + fx^{65} + gx^{63} + hx^{61} + ix^{59} + jx^{57} + kx^{55} + lx^{53} + mx^{51} + nx^{49} + px^{47} + qx^{45} + rx^{43} + sx^{41} + tx^{39} + ux^{37} + vx^{35} + wx^{33} + yx^{31} + zx^{29} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{78}$
	$\frac{1}{2} x^{79} + ax^{77} + bx^{75} + cx^{73} + dx^{71} + ex^{69} + fx^{67} + gx^{65} + hx^{63} + ix^{61} + jx^{59} + kx^{57} + lx^{55} + mx^{53} + nx^{51} + px^{49} + qx^{47} + rx^{45} + sx^{43} + tx^{41} + ux^{39} + vx^{37} + wx^{35} + yx^{33} + zx^{31} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{80}$
	$\frac{1}{2} x^{81} + ax^{79} + bx^{77} + cx^{75} + dx^{73} + ex^{71} + fx^{69} + gx^{67} + hx^{65} + ix^{63} + jx^{61} + kx^{59} + lx^{57} + mx^{55} + nx^{53} + px^{51} + qx^{49} + rx^{47} + sx^{45} + tx^{43} + ux^{41} + vx^{39} + wx^{37} + yx^{35} + zx^{33} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{82}$
	$\frac{1}{2} x^{83} + ax^{81} + bx^{79} + cx^{77} + dx^{75} + ex^{73} + fx^{71} + gx^{69} + hx^{67} + ix^{65} + jx^{63} + kx^{61} + lx^{59} + mx^{57} + nx^{55} + px^{53} + qx^{51} + rx^{49} + sx^{47} + tx^{45} + ux^{43} + vx^{41} + wx^{39} + yx^{37} + zx^{35} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{84}$
	$\frac{1}{2} x^{85} + ax^{83} + bx^{81} + cx^{79} + dx^{77} + ex^{75} + fx^{73} + gx^{71} + hx^{69} + ix^{67} + jx^{65} + kx^{63} + lx^{61} + mx^{59} + nx^{57} + px^{55} + qx^{53} + rx^{51} + sx^{49} + tx^{47} + ux^{45} + vx^{43} + wx^{41} + yx^{39} + zx^{37} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{86}$
	$\frac{1}{2} x^{87} + ax^{85} + bx^{83} + cx^{81} + dx^{79} + ex^{77} + fx^{75} + gx^{73} + hx^{71} + ix^{69} + jx^{67} + kx^{65} + lx^{63} + mx^{61} + nx^{59} + px^{57} + qx^{55} + rx^{53} + sx^{51} + tx^{49} + ux^{47} + vx^{45} + wx^{43} + yx^{41} + zx^{39} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{88}$
	$\frac{1}{2} x^{89} + ax^{87} + bx^{85} + cx^{83} + dx^{81} + ex^{79} + fx^{77} + gx^{75} + hx^{73} + ix^{71} + jx^{69} + kx^{67} + lx^{65} + mx^{63} + nx^{61} + px^{59} + qx^{57} + rx^{55} + sx^{53} + tx^{51} + ux^{49} + vx^{47} + wx^{45} + yx^{43} + zx^{41} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{90}$
	$\frac{1}{2} x^{91} + ax^{89} + bx^{87} + cx^{85} + dx^{83} + ex^{81} + fx^{79} + gx^{77} + hx^{75} + ix^{73} + jx^{71} + kx^{69} + lx^{67} + mx^{65} + nx^{63} + px^{61} + qx^{59} + rx^{57} + sx^{55} + tx^{53} + ux^{51} + vx^{49} + wx^{47} + yx^{45} + zx^{43} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{92}$
	$\frac{1}{2} x^{93} + ax^{91} + bx^{89} + cx^{87} + dx^{85} + ex^{83} + fx^{81} + gx^{79} + hx^{77} + ix^{75} + jx^{73} + kx^{71} + lx^{69} + mx^{67} + nx^{65} + px^{63} + qx^{61} + rx^{59} + sx^{57} + tx^{55} + ux^{53} + vx^{51} + wx^{49} + yx^{47} + zx^{45} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{94}$
	$\frac{1}{2} x^{95} + ax^{93} + bx^{91} + cx^{89} + dx^{87} + ex^{85} + fx^{83} + gx^{81} + hx^{79} + ix^{77} + jx^{75} + kx^{73} + lx^{71} + mx^{69} + nx^{67} + px^{65} + qx^{63} + rx^{61} + sx^{59} + tx^{57} + ux^{55} + vx^{53} + wx^{51} + yx^{49} + zx^{47} + ux^9 + vx^7 + wy^5 + zx^3 + yx^3 + yx^3$
	$\frac{1}{2} x^{9$

24.5 Statisch bestimmte Probleme

Bei der Berechnung statisch bestimmter Probleme sollten folgende Hinweise beachtet werden:

- ⇒ Beim Verfahren von Castigiano ist konsequent auf alle Abhängigkeiten von der Belastungsgröße, nach der abgeleitet wird, zu achten. Insbesondere sollten die Lagerreaktionen, die natürlich auch von der Belastungsgröße abhängen, (bei statisch bestimmten Systemen) vor der Bildung der partiellen Ableitung ersetzt werden. Für statisch unbestimmte Systeme kann diese Aussage etwas abgeschwächt werden (vgl. folgenden Abschnitt).
- ⇒ Die Bezeichnung der Belastungsgröße, nach der beim Verfahren von Castigiano abgeleitet wird, muss eindeutig sein. Wenn z. B. in der Aufgabenstellung mehrere Kräfte mit F bezeichnet sind, ist die Kraft, an deren Angriffspunkt eine Verformung berechnet werden soll, (vor dem Ermitteln von Lagerreaktionen, Schnittgrößen, ...) umzubenennen. Dies darf nach der partiellen Ableitung und damit vor der Integration rückgängig gemacht werden. Bei Nichtbeachtung dieses Hinweises ist das Ergebnis die Summe aller Verformungen unter den Belastungen mit gleichen Bezeichnungen, was im Ausnahmefall allerdings sogar sinnvoll sein kann. Die Beachtung dieses Hinweises kann auch beim Arbeiten mit Einheitslasten den Aufwand für das Aufschreiben der unterschiedlichen Schnittgrößenverläufe verringern.

Beispiel 1:

Ein in der Horizontalebene zweifach abgewinkelter Träger mit Kreisquerschnitt (Durchmesser d) ist in allen drei Abschnitten aus gleichem Material mit dem Elastizitätsmodul E und dem Gleitmodul G gefertigt.

Gegeben: F , E , G , a , b , c , d .

Unter Vernachlässigung des Querkrafeinflusses sollen folgende Verformungsgrößen bestimmt werden:

- Vertikalverschiebung v_F des Kraftangriffspunktes am freien Trägerende,
- Verdrehwinkel φ_{Fz} um die z_1 -Achse am freien Trägerende.

Folgende Lösungsschritte werden empfohlen:

- Für das Verfahren von Castigiano wird ein Hilfsmoment M_{Hz} zur Bestimmung des gesuchten Verdrehwinkels eingeführt, und die Kraft am freien Trägerende wird in F_1 umbenannt, um Eindeutigkeit für die partielle Ableitung zu bekommen (**Abbildung 24.12**).
- Bereitstellen der Schnittgrößen (Biegung um die horizontale Achse und Torsion in allen drei Abschnitten), beim Verfahren nach Castigiano für das System der **Abbildung 24.12**, für das Arbeiten mit Einheitslasten für die drei Systeme entsprechend **Abbildung 24.13**
- Beim Verfahren nach Castigiano werden die partiellen Ableitungen der Schnittgrößen nach F_1 und M_{Hz} gebildet, beim Arbeiten mit Einheitslasten sind die entsprechenden Funktionen als \bar{M}_{bi} bzw. \bar{M}_{ti} nach **Abbildung 24.13** gegeben.

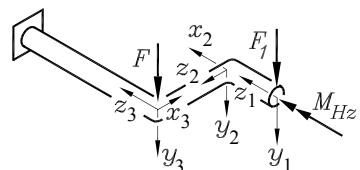
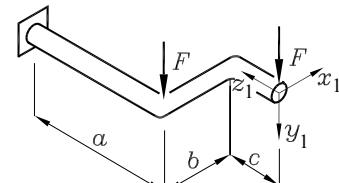


Abbildung 24.12: System für das Arbeiten nach Castigiano

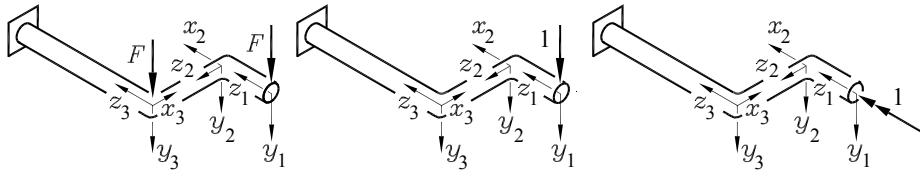


Abbildung 24.13: Systeme für das Arbeiten mit Einheitslasten

- Berechnen der Verformungen nach 24.23 unter Ausnutzung von 24.24 (Castigiano) bzw. 24.27 (Arbeiten mit Einheitslasten), wobei die Integration jeweils über alle drei Bereiche zu erstrecken ist. Die Rechnung ist für beide Verfahren identisch. Um dies zu demonstrieren, wird die Formel für v_F nach der Vorschrift von Castigiano aufgeschrieben, die Formel für φ_{Fz} nach der Vorschrift des Einheitslastverfahrens.

Die nachfolgende Tabelle enthält die Schnittgrößenverläufe M_{bi} und M_{ti} für die drei Abschnitte und die für die Verformungsberechnungen nach Castigiano benötigten partiellen Ableitungen nach F_1 und M_{Hz} , die mit den \bar{M}_{bi} bzw. \bar{M}_{ti} (für das Einheitslastverfahren) identisch sind (die in Klammern hochgestellten Indizes bei \bar{M}_{bi} bzw. \bar{M}_{ti} deuten an, ob diese Schnittgrößen für die Berechnung von v_F oder φ_{Fz} vorgesehen sind).

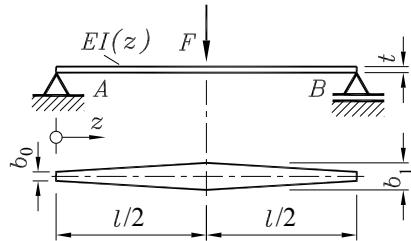
i	M_{bi}	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial F_1}$	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial M_{Hz}}$	M_{ti}	$\frac{\partial M_{ti}}{\partial F_1}$	$\frac{\partial M_{ti}}{\partial M_{Hz}}$
1	$-F_1 z_1$	$-z_1$	0	$-M_{Hz}$	0	-1
2	$-F_1 z_2 - M_{Hz}$	$-z_2$	-1	$F_1 c$	c	0
3	$-F_1(c + z_3) - F z_3$	$-(c + z_3)$	0	$-F_1 b - M_{Hz}$	$-b$	-1
	$F_1 = F, M_{Hz} = 0$	$\bar{M}_{bi}^{(v_F)}$	$\bar{M}_{bi}^{(\varphi_{Fz})}$	$F_1 = F, M_{Hz} = 0$	$\bar{M}_{ti}^{(v_F)}$	$\bar{M}_{ti}^{(\varphi_{Fz})}$

Vor der Integration dürfen $F_1 = F$ und $M_{Hz} = 0$ gesetzt werden. Man errechnet:

$$\begin{aligned}
 v_F &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{EI} \int_{z_i=0}^{l_i} M_{bi} \frac{\partial M_{bi}}{\partial F_1} dz_i + \frac{1}{GI_p} \int_{z_i=0}^{l_i} M_{ti} \frac{\partial M_{ti}}{\partial F_1} dz_i \right) \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^c (-F z_1)(-z_1) dz_1 + \int_0^b (-F z_2)(-z_2) dz_2 + \int_0^a -F(c + 2z_3)[-(-c + z_3)] dz_3 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{GI_p} \left[\int_0^b F c^2 dz_2 + \int_0^a F b^2 dz_3 \right] \\
 &= \frac{32F}{3E\pi d^4} [2(2a^3 + b^3 + c^3 + 3ac^2) + 9a^2c] + \frac{32F}{G\pi d^4} [c^2b + b^2a] \quad , \\
 \varphi_{Fz} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{EI} \int_{z_i=0}^{l_i} M_{bi} \bar{M}_{bi}^{(\varphi_{Fz})} dz_i + \frac{1}{GI_p} \int_{z_i=0}^{l_i} M_{ti} \bar{M}_{ti}^{(\varphi_{Fz})} dz_i \right) = \frac{32Fb}{\pi d^4} \left[\frac{b}{E} + \frac{a}{G} \right] \quad .
 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Für die skizzierte Biegefeder mit einem Rechteckquerschnitt konstanter Höhe t bei linear veränderlicher Breite soll die Absenkung des Kraftangriffspunktes berechnet werden.

Gegeben: t, b_0, b_1, l, F, E .



Mit dem Biegemomentenverlauf für die linke Symmetriehälfte (bezüglich der skizzierten Koordinate z) und seiner partiellen Ableitung nach F bzw. dem \bar{M}_b infolge einer Einheitslast in Trägermitte

$$M_b(z) = \frac{1}{2} F z \quad , \quad \frac{\partial M_b}{\partial F} = \frac{1}{2} z \quad , \quad \bar{M}_b = \frac{1}{2} z$$

und dem ebenfalls mit z veränderlichen Flächenträgheitsmoment

$$I(z) = \frac{t^3 b(z)}{12} = \frac{t^3}{12} \left[b_0 + 2(b_1 - b_0) \frac{z}{l} \right]$$

kann die Formänderungsenergie für eine Hälfte des Trägers aufgeschrieben werden. Für den gesamten Träger gilt dann der doppelte Wert, so dass sich entsprechend 24.24 bzw. 24.27 die Verschiebung v_F des Kraftangriffspunktes aus dem folgenden Integral berechnet:

$$\begin{aligned} v_F &= 2 \int_{z=0}^{\frac{l}{2}} \frac{M_b(z)}{EI(z)} \frac{\partial M_b(z)}{\partial F} dz = 2 \int_{z=0}^{\frac{l}{2}} \frac{M_b(z)}{EI(z)} \bar{M}_b(z) dz \\ &= 2 \int_{z=0}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} F z}{\frac{Et^3}{12} \left[b_0 + 2(b_1 - b_0) \frac{z}{l} \right]} \frac{1}{2} z dz = \frac{6Fl}{Et^3} \int_{z=0}^{\frac{l}{2}} \frac{z^2}{lb_0 + 2(b_1 - b_0)z} dz \quad . \end{aligned}$$

Die veränderliche Biegesteifigkeit führt auf ein Integral, dessen Lösung etwas mehr Mühe bereitet. In diesem Fall findet man die Lösung recht problemlos:

$$v_F = \frac{3Fl^3}{8Et^3b_0(\beta-1)^3} (\beta^2 - 4\beta + 3 + 2\ln\beta) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{b_1}{b_0} \quad .$$

- ⇒ Die Lösung gilt für jedes sinnvolle Breitenverhältnis β . Typisch für solche Probleme mit veränderlichem Querschnitt ist jedoch, dass bei $\beta = 1$ (Träger konstanter Breite) gerade für den einfachsten Spezialfall, mit dem man die Lösung gern kontrollieren würde, die Formel versagt. Eine Grenzwertbetrachtung entsprechend

$$v_F(\beta = 1) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \left[\frac{3Fl^3}{8Et^3b_0(\beta-1)^3} (\beta^2 - 4\beta + 3 + 2\ln\beta) \right] \quad ,$$

durchgeführt nach der aus der Mathematik bekannten Regel von DE L'HOSPITAL, liefert im dritten Versuch das Ergebnis, das als Fall a^* im Abschnitt 17.4 angegeben ist:

$$v_F(\beta = 1) = \frac{Fl^3}{4Et^3b_0} = \frac{Fl^3}{48EI_0} \quad \text{mit} \quad I_0 = \frac{b_0 t^3}{12} \quad .$$

24.6 Statisch unbestimmte Probleme

Systeme sind statisch unbestimmt gelagert, wenn man allein mit den Gleichgewichtsbedingungen die Lagerreaktionen (und damit die Schnittgrößen) nicht berechnen kann. In den Kapiteln 14 bis 21 wurde gezeigt, wie mit Verformungsbetrachtungen auch solche Probleme gelöst werden können (zusätzliche Lager gestatten immer zusätzliche Verformungsaussagen).

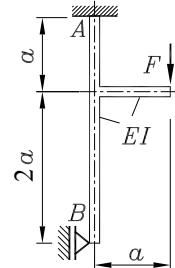
Da mit den Verfahren auf der Basis der Formänderungsenergie die Verformungen an einzelnen Punkten sehr effektiv berechnet werden können, eignen sich diese Verfahren in besonderem Maße für die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Das nachfolgende Beispiel demonstriert das typische Vorgehen im einfachsten Fall: Das „überzählige“ Lager B wird durch eine Kraft (Lagerkraft F_B) ersetzt. Dann kann man die Verschiebung des Kraftangriffspunktes v_B berechnen. Da aber an dieser Stelle gerade keine Verschiebung auftreten kann, liefert die Bedingung $v_B = 0$ eine Bestimmungsgleichung für die gesuchte Lagerkraft.

Beispiel 1:

Für das skizzierte System mit konstanter Biegesteifigkeit sollen die Lagerreaktionen bei A und B sowie die Horizontalverschiebung v_H und die Vertikalverschiebung v_F des Kraftangriffspunktes ermittelt werden (Normalkraft- und Querkraftanteile dürfen vernachlässigt werden).

Gegeben: $EI = \text{konstant}$, F , a .

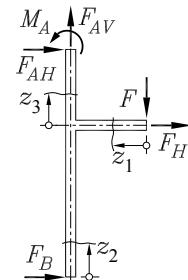
Das System ist einfach statisch unbestimmt. Als „Statisch Unbestimmte“ wird die Lagerkraft F_B gewählt. Dann dürfen die übrigen Lagerreaktionen in den Biegemomentenverläufen nicht vorkommen.



Da auch die Horizontalverschiebung des Kraftangriffspunktes gesucht ist, wird dort die Hilfskraft F_H angebracht³. Die Verschiebungen in Richtung der Kräfte F , F_H und F_B werden dann mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie des Gesamtsystems nach diesen Kräften (Verfahren von Castigliano) berechnet, wobei die Verschiebung am Lager B verhindert ist, so dass diese „Verschiebungsgleichung“ zur Bestimmungsgleichung für die Lagerkraft wird.

Die Tabelle enthält die Biegemomentenverläufe (bezogen auf die nebenstehend skizzierten Koordinaten) und die benötigten partiellen Ableitungen:

i	M_{bi}	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial F_B}$	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial F}$	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial F_H}$
1	$F z_1$	0	z_1	0
2	$F_B z_2$	z_2	0	0
3	$F_B(2a + z_3) + F_H z_3 - Fa$	$2a + z_3$	$-a$	z_3



³In den Abschnitten 24.4 und 24.5 wurde gezeigt, dass das Verfahren von Castigliano und das Einheitslastverfahren hinsichtlich Strategie und Aufwand identisch sind. Deshalb wird in diesem und den folgenden Beispielen nur noch ein Verfahren (Castigliano) demonstriert. Wer lieber zusätzliche Schnittgrößenverläufe (infolge von Einheitslasten) formuliert als partielle Ableitungen bildet, sollte das Einheitslastverfahren verwenden. Schon die Tabelle, in der die Schnittgrößen und ihre partiellen Ableitungen zusammengestellt werden, ist für beide Verfahren identisch.

Die Hilfskraft F_H darf wieder Null gesetzt werden, und die Lagerkraft F_B wird berechnet:

$$v_B = \frac{\partial W_i}{\partial F_B} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_{z_2=0}^{2a} F_B z_2^2 dz_2 + \int_{z_3=0}^a [F_B(2a+z_3) - Fa] (2a+z_3) dz_3 \right\} = 0 \Rightarrow F_B = \frac{5}{18} F .$$

Entsprechend berechnen sich die gesuchten Verschiebungen:

$$v_F = \frac{\partial W_i}{\partial F} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_{z_1=0}^a F z_1^2 dz_1 + \int_{z_3=0}^a [F_B(2a+z_3) - Fa] (-a) dz_3 \right\} = \frac{23}{36} \frac{Fa^3}{EI} ,$$

$$v_H = \frac{\partial W_i}{\partial F_H} = \frac{1}{EI} \int_{z_3=0}^a [F_B(2a+z_3) - Fa] z_3 dz_3 = -\frac{7}{54} \frac{Fa^3}{EI} .$$

Das Minuszeichen im Ergebnis für v_H deutet an, dass sich der Punkt entgegen der willkürlichen Annahme des Richtungssinns für die Hilfskraft F_H nach links verschiebt.

Die noch fehlenden Lagerreaktionen bei A werden aus Gleichgewichtsbedingungen ermittelt:

$$F_{AH} = -F_B = -\frac{5}{18} F , \quad F_{AV} = F , \quad M_A = Fa - F_B 3a = \frac{1}{6} Fa .$$

⇒ Dem Leser, der dieses Beispiel aufmerksam durchgearbeitet hat, wird aufgefallen sein, dass für die Verschiebungsberechnung z. B. die Ableitungen der Momentenverläufe nach F gebildet wurden, ohne die Abhängigkeit der darin noch vorkommenden Lagerreaktion F_B von F zu berücksichtigen. Dies ist erlaubt, obwohl bei diesen Abhängigkeiten

$$W_i = f(F, F_B(F)) = f^*(F)$$

die Ableitung nach F eigentlich entsprechend

$$\frac{df^*}{dF} = \frac{\partial f}{\partial F} + \frac{\partial f}{\partial F_B} \frac{dF_B}{dF}$$

berechnet werden müsste. Weil der erste Faktor des zweiten Anteils (Ableitung nach der „Statisch Unbestimmten“) Null wird, gilt aber:

Die beim Verfahren von Castiglione benötigten Ableitungen der Schnittgrößenverläufe nach Belastungsgrößen (dazu zählen auch die Hilfskräfte bzw. -momente) dürfen bei statisch unbestimmten Aufgaben gebildet werden, ohne die Abhängigkeit der „Statisch Unbestimmten“ von den Belastungsgrößen zu berücksichtigen.

Diese Aussage gilt nur für die gewählten „Statisch Unbestimmten“ (ihre Anzahl muss dem Grad der statischen Unbestimmtheit entsprechen), nicht z. B. für die übrigen Lagerreaktionen, die vorab aus den Schnittgrößenverläufen (wie bei statisch bestimmten Problemen) eliminiert werden sollten.

Im folgenden Beispiel wird eine Aussage genutzt, die im Abschnitt 24.5 den Anlass zu der Empfehlung gab, Belastungsgrößen, nach denen für eine Verformungsberechnung partiell abgeleitet werden soll, eindeutig zu bezeichnen, denn „wenn die Formänderungsenergie nach einer Belastungsgröße abgeleitet wird, die mehrfach im System vorkommt, erhält man die Summe aller Verformungen der Angriffspunkte“. Für einen Spezialfall ist dies sinnvoll:

Ein System sei (unter anderem) durch zwei gleich große, auf gleicher Wirkungslinie liegenden, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte F belastet. Dann liefert die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach F die relative Verschiebung der beiden Kraftangriffspunkte (Verringerung bzw. Vergrößerung ihres Abstandes).

Beispiel 2:

Für den skizzierten Rahmen, der in allen Teilen die gleiche Biegesteifigkeit hat, soll die relative Verschiebung der beiden Kraftangriffspunkte berechnet werden (Normalkraft- und Querkrafteinflüsse sind zu vernachlässigen).

Gegeben: $EI = \text{konstant}$, F , a .

Das System ist einfach statisch unbestimmt, als „Statisch Unbestimmte“ wird die Horizontalkomponente F_{AH} der Lagerkraft bei A gewählt. Dann dürfen die anderen Lagerkräfte in den Momentenverläufen nicht vorkommen.

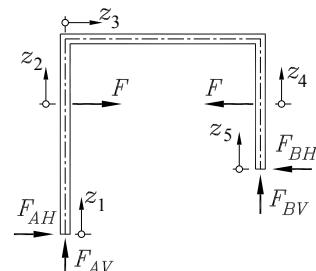
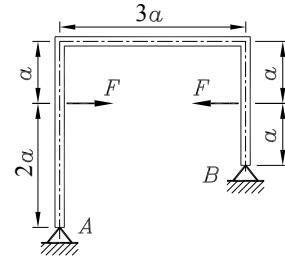
Da es beim Aufschreiben der M_b -Verläufe bequemer ist, zunächst auch F_{AV} und F_{BH} einfließen zu lassen, werden diese über zwei Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem durch F_{AH} ersetzt. Horizontales Kraft-Gleichgewicht und Momenten-Gleichgewicht um den Punkt B liefern:

$$F_{BH} = F_{AH} \quad , \quad F_{AV} = \frac{1}{3} F_{AH} \quad .$$

Diese Beziehungen wären nicht so einfach, wenn man die Kräfte (für die Verschiebungsberechnung **eines** Kraftangriffspunktes) unterschiedlich bezeichnet hätte, weil sie dann aus den Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr herausgefallen wären.

Die folgende Tabelle enthält die Momentenverläufe für die fünf Bereiche, die nur noch F und die „Statisch Unbestimmte“ F_{AH} enthalten.

i	M_{bi}	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial F_{AH}}$	$\frac{\partial M_{bi}}{\partial F}$
1	$F_{AH}z_1$	z_1	0
2	$F_{AH}(2a + z_2) + Fz_2$	$2a + z_2$	z_2
3	$F_{AH}3a + Fa - \frac{1}{3}F_{AH}z_3$	$3a - \frac{1}{3}z_3$	a
4	$F_{AH}(a + z_4) + Fz_4$	$a + z_4$	z_4
5	$F_{AH}z_5$	z_5	0



Es wird zunächst die Lagerkraft berechnet, anschließend die gesuchte relative Verschiebung:

$$\frac{\partial W_i}{\partial F_{AH}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^5 \int_{z_i=0}^{l_i} M_{bi} \frac{\partial M_{bi}}{\partial F_{AH}} dz_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AH} = -\frac{29}{92} F \quad ,$$

$$v_{F,rel} = \frac{\partial W_i}{\partial F} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^5 \int_{z_i=0}^{l_i} M_{bi} \frac{\partial M_{bi}}{\partial F} dz_i = \frac{57}{92} \frac{Fa^3}{EI} \quad .$$

- ⇒ Die wesentlich mühsamere Berechnung der beiden Verschiebungen der Kraftangriffspunkte liefert

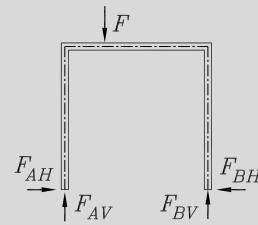
$$v_{F,links} = \frac{259}{276} \frac{Fa^3}{EI}, \quad v_{F,rechts} = -\frac{22}{69} \frac{Fa^3}{EI},$$

wobei das Minuszeichen bei $v_{F,rechts}$ anzeigt, dass die Verschiebung entgegen dem Richtungssinn der rechten Kraft F erfolgt (beide Kraftangriffspunkte verschieben sich also nach rechts). Der errechnete Wert $v_{F,rel}$ ist die Summe dieser beiden Verschiebungen (und damit die Verkürzung des Abstands der beiden Kraftangriffspunkte).

- ⇒ Die Wahl von F_{AH} als „Statisch Unbestimmte“ im Beispiel 2 war willkürlich. In diesem Fall hätte auch jede andere Lagerreaktion gewählt werden dürfen, weil keine von ihnen aus statischen Gleichgewichtsbedingungen allein zu berechnen ist. Genau diese Voraussetzung muss allerdings erfüllt sein:

Als „Statisch Unbestimmte“ dürfen nur Kräfte oder Momente gewählt werden, die nicht allein aus statischen Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen sind.

Das nebenstehend skizzierte Beispiel zeigt die Lagerreaktionen eines einfach statisch unbestimmt gelagerten Rahmens (zwei Festlager auf gleicher Höhe). F_{AV} und F_{BV} lassen sich aus dem Momenten-Gleichgewicht direkt berechnen. Als „Statisch Unbestimmte“ müssen F_{AH} oder F_{BH} gewählt werden.



Innerlich statisch unbestimmte Systeme

Die im Beispiel 2 genutzte Möglichkeit, die relative Verschiebung zweier Punkte zu berechnen, gestattet auch recht anschaulich die Behandlung so genannter *innerlich statisch unbestimmter Systeme*.

Der in Abbildung 24.14 skizzierte Rahmen ist äußerlich statisch bestimmt gelagert, die Lagerreaktionen bei A und B sind aus statischen Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen, ebenso die Schnittgrößen in den Stielen $A-C$ und $B-D$.

Die Schnittgrößenberechnung im geschlossenen Teil des Rahmens (z. B. in einem Schnitt bei dem beliebig gewählten Punkt P) ist mit den Hilfsmitteln der Statik allein nicht möglich. Erst durch zwei Schnitte (z. B. bei P und im oberen Querriegel bei Q) würden zwei Teilsysteme entstehen, an denen dann aber insgesamt sechs Schnittgrößen anzutragen wären, für die nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen: **Der geschlossene Rahmen ist innerlich dreifach statisch unbestimmt.**

Die Abbildung 24.15 zeigt den Rahmen, der bei P geschnitten wurde, mit den an beiden Schnittufern angebrachten Schnittgrößen (um diese einzeichnen zu können, wurden die Schnittufer, die am gleichen geometrischen Punkt liegen, auseinandergesogen).

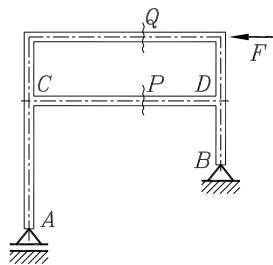


Abbildung 24.14: Innerlich statisch unbestimmtes System

Wären F_{NP} , F_{QP} und M_P bekannt, könnten alle Schnittgrößenverläufe und damit auch beliebige Verformungsgrößen berechnet werden, natürlich z. B. auch die relative Verschiebung der Kraftangriffspunkte der beiden Kräfte F_{NP} . Da diese aber Null sein muss (der verformte Rahmen würde sonst am Punkt P klapfen), steht mit der Verformungsbedingung eine Bestimmungsgleichung für F_{NP} zur Verfügung. Eine entsprechende Überlegung für F_{QP} und M_P führt zu zwei weiteren Gleichungen:

$$\frac{\partial W_i}{\partial F_{NP}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W_i}{\partial F_{QP}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W_i}{\partial M_P} = 0 \quad .$$

Dies sind die drei Bestimmungsgleichungen für die drei „Statisch Unbestimmten“. Es sind innere Kräfte bzw. Momente, die dafür (unter der Voraussetzung, nicht allein durch statisches Gleichgewicht berechenbar zu sein) genauso gewählt werden dürfen wie Lagerreaktionen und aus Gleichungen berechnet werden, wie sie auch für die Bestimmung statisch unbestimmter Lagerreaktionen aufgestellt wurden. Man darf sich vom Zwang zur Anschaulichkeit („verhinderte Verschiebung“) lösen und ganz allgemein formulieren:

Die partielle Ableitung der gesamten Formänderungsenergie, die in einem linear-elastischen System gespeichert ist, nach einer „Statisch Unbestimmten“ $F_{Stat. Unb.}$ wird immer Null:

$$\frac{\partial W_i}{\partial F_{Stat. Unb.}} = 0 \quad . \quad (24.28)$$

Beispiel 3: Für das skizzierte Fachwerk sind die Stabkräfte zu ermitteln. Alle Stäbe haben den gleichen Querschnitt und sind aus dem gleichen Material gefertigt.

Gegeben: F , a .

Wenn die Stäbe 1 und 3 jeweils als einwertige Lager angesehen werden, verbleiben 6 Stabkräfte und 4 Lagerreaktionen (2 Komponenten am unteren Festlager und die beiden Stabkräfte in den Stäben 1 und 3) für insgesamt 8 Gleichgewichtsbedingungen an 4 Knoten. Das Fachwerk ist zweifach statisch unbestimmt. Es ist sowohl äußerlich (4 Lagerreaktionen) als auch innerlich statisch unbestimmt (selbst bei bekannten Lagerreaktionen könnten die Stabkräfte nicht aus Gleichgewichtsbedingungen allein berechnet werden).

Es werden (willkürlich) die Stabkräfte F_{S1} und F_{S8} als „Statisch Unbestimmte“ gewählt. Dabei ist es unerheblich, ob F_{S1} als Lagerkraft des Festlagers („verhinderte Verschiebung“) oder als Stabkraft aufgefasst wird, in jedem Fall muss 24.28 für beide Stabkräfte gelten. Darin ist W_i die gesamte Formänderungsenergie in den 8 Stäben des Fachwerks, für die Formel 24.17 gilt.

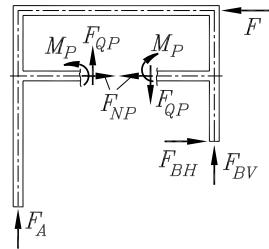


Abbildung 24.15: Ein geschlossener Rahmen ist dreifach statisch unbestimmt

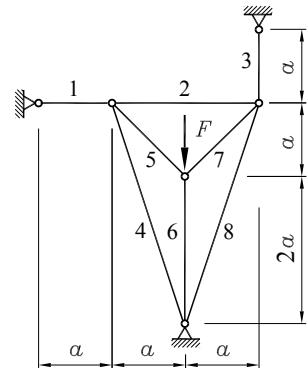


Abbildung 24.16: Fachwerk, innerlich und äußerlich statisch unbestimmt.

Mit den Stablängen l_i errechnet sich W_i aus der Summe der in allen Stäben gespeicherten Energien:

$$W_i = \sum_{i=1}^8 \frac{F_{Si}^2 l_i}{2EA} .$$

Damit werden die beiden Bestimmungsgleichungen 24.28 für F_{S1} und F_{S8} formuliert:

$$\frac{\partial W_i}{\partial F_{S1}} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^8 F_{Si} \frac{\partial F_{Si}}{\partial F_{S1}} l_i = 0 ,$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial F_{S8}} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^8 F_{Si} \frac{\partial F_{Si}}{\partial F_{S8}} l_i = 0 .$$

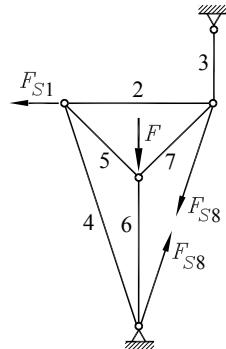


Abbildung 24.17: Statisch bestimmtes Fachwerk

Alle Stabkräfte müssen (vor dem Bilden der partiellen Ableitungen) als Funktionen der Kraft F und der beiden „Statisch Unbestimmten“ F_{S1} und F_{S8} aufgeschrieben werden. Dies gelingt an dem in **Abbildung 24.17** skizzierten statisch bestimmten Fachwerk (Stäbe 1 und 8 wurden durch die Stabkräfte ersetzt) nach den Verfahren des Abschnitts 6.4. Das Ergebnis sieht man in der dritten Spalte der nachfolgenden Tabelle.

i	l_i	$F_{Si} = f(F, F_{S1}, F_{S8})$	$\frac{\partial F_{Si}}{\partial F_{S1}}$	$\frac{\partial F_{Si}}{\partial F_{S8}}$	F_{Si}
1	a	F_{S1}	1	0	$-0,04301 F$
2	$2a$	$3F_{S1} + \frac{2}{\sqrt{10}}F_{S8}$	3	$\frac{2}{\sqrt{10}}$	$-0,17886 F$
3	a	$-3F_{S1}$	-3	0	$0,12903 F$
4	$\sqrt{10}a$	$\sqrt{10}F_{S1} + F_{S8}$	$\sqrt{10}$	1	$-0,21480 F$
5	$\sqrt{2}a$	$-3\sqrt{2}F_{S1} - \frac{3}{\sqrt{5}}F_{S8}$	$-3\sqrt{2}$	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	$0,28818 F$
6	$2a$	$-F - 6F_{S1} - \frac{6}{\sqrt{10}}F_{S8}$	-6	$-\frac{6}{\sqrt{10}}$	$-0,59245 F$
7	$\sqrt{2}a$	$-3\sqrt{2}F_{S1} - \frac{3}{\sqrt{5}}F_{S8}$	$-3\sqrt{2}$	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	$0,28818 F$
8	$\sqrt{10}a$	F_{S8}	0	1	$-0,07878 F$

Mit den partiellen Ableitungen liefert das Einsetzen in die Bestimmungsgleichungen für F_{S1} und F_{S8} zwei lineare Gleichungen, aus denen die beiden Unbekannten berechnet werden:

$$F_{S1} = -0,04301 F ; \quad F_{S8} = -0,07878 F .$$

Mit Hilfe der Formeln in der Spalte 3 der oben angegebenen Tabelle lassen sich die übrigen Stabkräfte ermitteln. Die Ergebnisse sind in Spalte 6 der Tabelle zu finden.

- ⇒ Am Ende dieses wichtigen Kapitels über die Formänderungsenergie sind zur richtigen Einordnung des behandelten Stoffs einige ergänzende Bemerkungen angebracht: *Energiemethoden* sind die Basis fast aller modernen Berechnungsverfahren der Technischen Mechanik.

Die auf der Grundlage der Finite-Elemente-Methode entwickelten Programmsysteme für komplexe Bauteile (Flächenträgerwerke, dreidimensionale Strukturen, ...), die dem Ingenieur heute zur Verfügung stehen, beziehen ihre theoretische Begründung fast ausschließlich aus Energiemethoden. Da aber ein erfolgreiches Benutzen dieser Programme (anders als in vielen anderen Zweigen der Ingenieurwissenschaft) kaum ohne Kenntnisse über die angewandten Verfahren möglich ist, ist ein grundlegendes Verständnis für die Energiemethoden außerordentlich wichtig.

Aber es gilt natürlich, was auf Seite 433 formuliert wurde: Wenn ein Computerprogramm verfügbar ist (und im Rahmen der verwendeten Theorie exakte Ergebnisse liefert), können „noch so elegante Verfahren“, wie es die in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren zweifelsfrei sind, nicht konkurrieren.



Die Autoren dieses Buches gestehen, sämtliche Aufgaben dieses Kapitels „vorsichtshalber“ mit einem Finite-Elemente-Programm nachgerechnet zu haben (siehe z. B. Abbildung 24.18).

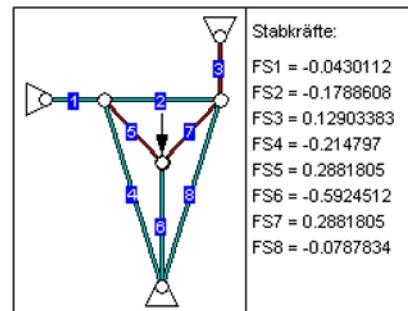
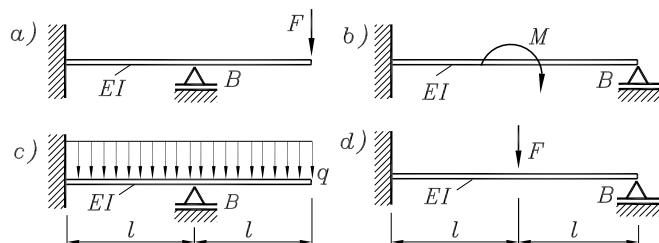


Abbildung 24.18: Beispiel 3, „vorsichtshalber“ nachgerechnet mit dem Angebot unter www.TM-interaktiv.de

24.7 Aufgaben

Aufgabe 24.1:



Gegeben:

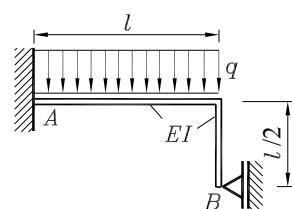
EI , l , F , M , q .

Gesucht: Lagerkraft F_B .

Aufgabe 24.2:

Für den skizzierten Träger sind alle Lagerreaktionen und die Verschiebung des Lagers B zu berechnen.

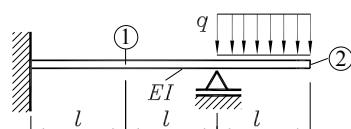
Gegeben: EI , l , q .



Aufgabe 24.3:

Es sind die Absenkungen v_1 und v_2 an den Punkten ① und ② und der Biegewinkel bei ② zu berechnen.

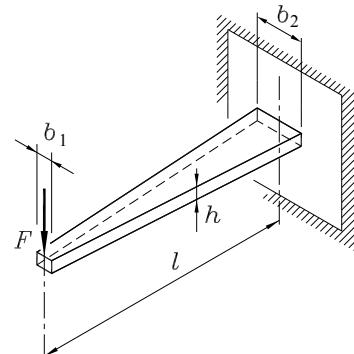
Gegeben: EI , l , q .



Aufgabe 24.4:

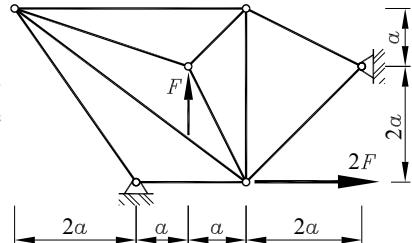
Für einen Kragträger mit konstanter Höhe und linear veränderlicher Breite ist die Absenkung des Kraftangriffspunktes zu berechnen. Es ist zu zeigen, dass das Ergebnis für den Sonderfall $b_1 = b_2$ (Träger mit konstantem Querschnitt) die Formel enthält, die für v_{max} des Lastfalls e in der Zusammenstellung des Abschnitts 17.4 angegeben ist.

Gegeben: l, h, b_1, b_2, F , Elastizitätsmodul E .

**Aufgabe 24.5:**

Für das skizzierte (statisch unbestimmte) Fachwerk sind sämtliche Stabkräfte zu berechnen. Die Dehnsteifigkeit EA ist für alle Stäbe gleich.

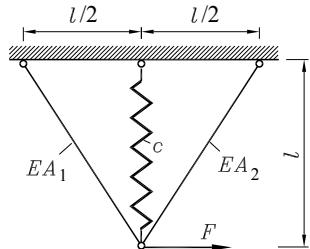
Gegeben: F, a, EA .

**Aufgabe 24.6:**

Für das System aus zwei Stäben und einer Feder berechne man:

- die Stabkräfte und die Federkraft,
- Horizontal- und Vertikalverschiebungskomponenten des Kraftangriffspunktes.

Gegeben: $F, l, EA_1, EA_2 = 2EA_1, c = 4 \frac{EA_1}{l}$.

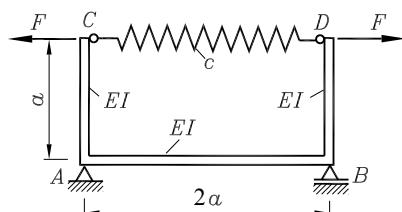
**Aufgabe 24.7:**

Für den skizzierten Halbrahmen mit der konstanten Biegesteifigkeit EI , dessen Punkte C und D durch eine Feder verbunden sind, berechne man

- die Kraft F_c in der Feder,
- die relative Verschiebung v_{CD} der beiden Kraftangriffspunkte.

- Man zeige, dass die berechneten Werte für F_c und v_{CD} dem Federgesetz genügen, und versuche, die Grenzwerte von F_c und v_{CD} für $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$ anschaulich zu deuten.

Gegeben: $F, a, EI, \gamma = \frac{ca^3}{EI}$.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

25 Rotationssymmetrische Modelle

Von den im Abschnitt 22.1 vorgestellten Modellen der Festigkeitsberechnung sind bisher ausschließlich die „eindimensionalen Modelle“ behandelt worden. In diesem Kapitel werden mit ausgewählten rotationssymmetrischen Berechnungsmodellen einige (einfache, aber für die Praxis wichtige) Probleme behandelt, die sich nicht eindimensional idealisieren lassen.

25.1 Rotationssymmetrische Scheiben

Scheiben sind ebene Flächentragwerke, die ausschließlich Belastungen aufnehmen, die in ihrer Mittelfläche liegen (vgl. Abschnitt 22.1). Betrachtet werden Kreis- und Kreisringscheiben, die rotationssymmetrisch belastet und gelagert sind. Für diesen besonders einfachen Fall kann der Spannungs- und Verformungszustand mit einer Koordinate beschrieben werden (Radius r), es ergibt sich jedoch ein *ebener Spannungszustand*.

Die Dicke t der Scheibe darf (mit r) veränderlich sein, Belastungen können am Außen- und Innenrand eingeleitet werden, außerdem sind Volumenlasten (auf das Volumenelement bezogene verteilte Belastungen) zugelassen. Wegen der vorausgesetzten Rotationssymmetrie können dies praktisch nur die (nach außen gerichteten) Zentrifugalkräfte einer rotierenden Scheibe sein.

Die Abbildung 25.1 zeigt eine typische rotationssymmetrische Scheibe. In Abbildung 25.2 ist vergrößert das aus der Scheibe herausgeschnittene Element mit den Abmessungen $r\Delta\phi$ (in Umfangsrichtung) und Δr (in radialer Richtung) zu sehen. Es ist durch Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_t belastet (Tangentialspannungen entstehen dadurch, dass sich die „einzelnen Ringe“ der Scheibe bei radialem Belastung aufweiten und dabei ihren Umfang verändern). Schubspannungen treten wegen der Rotationssymmetrie nicht auf. Eine mögliche Volumenlast f (Dimension: Kraft pro Volumen) ist durch die radial gerichteten Pfeile im Elementinneren angedeutet.

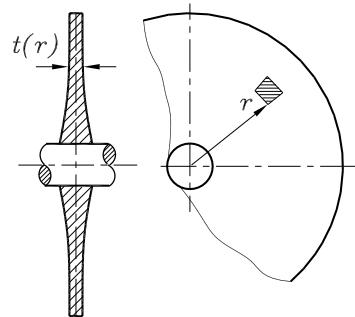


Abbildung 25.1: Rotationssymmetrische Scheibe, auch Belastung und Lagerung sind rotationssymmetrisch

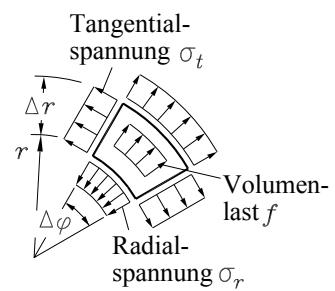


Abbildung 25.2: Belastungen, die am differenziell kleinen Element im Gleichgewicht sein müssen

Die Spannungen werden durch Multiplikation mit den Schnittflächen und die Volumenlast durch Multiplikation mit dem (angenäherten) Elementvolumen zu Kräften, die am Element eine Gleichgewichtsgruppe bilden müssen:

$$F_r = \sigma_r t r \Delta\varphi \quad , \quad F_t = \sigma_t t \Delta r \quad , \quad F = f t r \Delta\varphi \Delta r \quad .$$

Nur für die radial gerichtete Kraft ist von einem Schnittufer zum anderen ein Zuwachs ΔF_r zu berücksichtigen (Rotationssymmetrie!), dieser allerdings repräsentiert sowohl eine veränderliche Spannung σ_r als auch eine geänderte Schnittfläche (**Abbildung 25.3**). Das Kräfte-Gleichgewicht in radialer Richtung liefert:

$$\Delta F_r + F - 2F_t \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \quad .$$

Einsetzen der oben angegebenen Ausdrücke für F_r , F_t und F und Division der Gleichung durch $\Delta\varphi$ und Δr ergibt:

$$\frac{\Delta(\sigma_r t r)}{\Delta r} + f t r - \sigma_t t \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 0 \quad .$$

Der Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ und $\Delta\varphi \rightarrow 0$ und damit

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta(\dots)}{\Delta r} = \frac{d(\dots)}{dr} \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

führt nach einigen elementaren Umformungen auf folgende Beziehung:

$$\frac{r}{t} \frac{d}{dr} (\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t + r f = 0 \quad .$$

Da das Kräfte-Gleichgewicht in Umfangsrichtung identisch erfüllt ist, kann dieser Gleichung mit den beiden unbekannten Spannungen keine weitere Gleichgewichtsbedingung hinzugefügt werden. Dies ist typisch für Flächentragwerke:

Die Spannungsberechnung für Flächentragwerke ist (bis auf ganz wenige Ausnahmen) stets mit einer Verformungsbetrachtung gekoppelt. Diese Aussage gilt (im Gegensatz z. B. zu Biegeträgern) unabhängig von der Lagerung: *Flächentragwerke sind „innerlich statisch unbestimmt“* (vgl. die Erläuterung dieses Begriffs für Biegeträger auf Seite 440).

Die **Abbildung 25.4** zeigt (gestrichelt) das verformte Element: Der Öffnungswinkel $\Delta\varphi$ bleibt erhalten (die verformten Elemente dürfen nicht auseinanderklaffen), die Umfangsfasern werden gedehnt. Die Dehnung in radialer Richtung ergibt sich aus der Differenz der Verschiebungen der beiden Schnittufer:

$$\epsilon_r = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u) - u}{\Delta r} = \frac{du}{dr} \quad .$$

Die Faser in Umfangsrichtung hat vor der Verformung die Länge $r\Delta\varphi$ und nach der Verformung die Länge $(r + u)\Delta\varphi$. Aus der Differenz berechnet sich die *Tangentialdehnung*

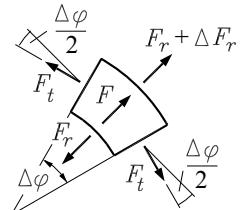


Abbildung 25.3: Kräfte am differenziell kleinen Element

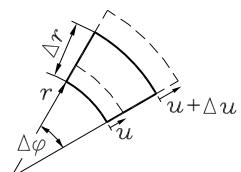


Abbildung 25.4: Verformtes Element

$$\varepsilon_t = \frac{(r+u)\Delta\varphi - r\Delta\varphi}{r\Delta\varphi} = \frac{u}{r} .$$

Diese Beziehung wird nach $u = r\varepsilon_t$ umgestellt und in die Formel für ε_r eingesetzt, so dass ein Zusammenhang zwischen den beiden Dehnungen entsteht:

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_t) = \varepsilon_t + r \frac{d\varepsilon_t}{dr} .$$

Ersetzt man in dieser Beziehung die Dehnungen nach dem Hookeschen Gesetz

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_t) , \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - v\sigma_r) \quad (25.1)$$

(vgl. Formeln 22.9) durch die Spannungen, ergibt sich eine zweite Gleichung für σ_r und σ_t . Die beiden Spannungen können also berechnet werden aus den beiden

Differenzialgleichungen für die Spannungen des rotationssymmetrischen ebenen Spannungszustandes:

$$\begin{aligned} \frac{r}{t} \frac{d}{dr}(\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t &= -rf , \\ \frac{vr}{1+v} \left(\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{v} \frac{d\sigma_t}{dr} \right) + \sigma_r - \sigma_t &= 0 . \end{aligned} \quad (25.2)$$

$$\text{Radialverschiebung:} \quad u = r\varepsilon_t = \frac{r}{E}(\sigma_t - v\sigma_r) . \quad (25.3)$$

- ⇒ Die Gleichungen 25.2 sind zwei gewöhnliche lineare gekoppelte Differenzialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Ihre allgemeine Lösung enthält zwei Integrationskonstanten, die aus Randbedingungen bestimmt werden müssen. Weil dafür auch Aussagen über die Radialverschiebung u gemacht werden können, wurden die Differenzialgleichungen 25.2 um die Formel 25.3 ergänzt.

Die Aussagen über die Spannung σ_r und/oder die Radialverschiebung u müssen am Innen- und Außenrand der Kreisringscheibe formuliert werden (Aussagen über σ_t sind nicht möglich, weil diese Spannung an keiner freien Fläche liegen kann). Bei einer Vollscheibe, die keinen Innenrand hat, wird die fehlende zweite Randbedingung durch die Aussage ersetzt, dass der Verschiebungszustand keine Singularität aufweisen darf, die sich in diesem Fall für $r = 0$ ergeben würde, und nur vermieden werden kann, wenn eine Integrationskonstante den Wert 0 annimmt (vgl. die Lösung für die Scheibe konstanter Dicke 25.6 auf Seite 449, die nur für $C_2 = 0$ sinnvolle Werte liefern kann).

- ⇒ Die allgemeine Lösung von 25.2 kann nur für wenige spezielle Funktionen $t(r)$, die die Veränderlichkeit der Scheibendicke bestimmen, berechnet werden (es gelingt z. B. für die recht wichtigen „hyperbolischen Profile“ mit $t = \frac{c}{r^n}$ bei beliebigem c und beliebigem n). Für alle denkbaren Funktionen $t(r)$ bieten sich natürlich numerische Methoden als Lösungsverfahren an (z. B. das Differenzenverfahren, weil die Differenzialgleichungen linear sind). Für Scheiben konstanter Dicke wird im folgenden Beispiel die geschlossene Lösung ermittelt.

Beispiel 1:

Für eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umlaufende Kreisscheibe konstanter Dicke t_0 sollen die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen 25.2 und die Radialverschiebung $u(r)$ nach 25.3 bereitgestellt werden.

Gegeben: ω , $t_0 = \text{konstant}$, Dichte ρ .

Die an einer rotierenden Masse auftretenden Fliehkräfte berechnen sich aus dem Produkt der Masse, ihrem Abstand vom Drehpunkt und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 29.2). An dem Volumenelement dV der Scheibe mit der Masse $dm = \rho dV$ im Abstand r von der Drehachse der Welle wirkt demnach

$$f dV = dm r \omega^2 = r \omega^2 \rho dV \quad \Rightarrow \quad f = r \rho \omega^2 .$$

Dies wird in die erste Differentialgleichung 25.2 eingesetzt, aus der sich außerdem die konstante Dicke herauskürzt. Sie wird nach σ_t aufgelöst, und

$$\sigma_t = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + r^2 \rho \omega^2 \quad (25.4)$$

wird in die zweite Differentialgleichung 25.2 eingesetzt. Man erhält mit

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2 \quad (25.5)$$

eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten für die Radialspannung σ_r . Differentialgleichungen des Typs 25.5 heißen *Eulersche Differentialgleichungen* (als Koeffizient steht bei der k -ten Ableitung eine Potenz der unabhängigen Variablen mit dem gleichen Exponenten k), die sich für verschiedene Probleme der Technischen Mechanik ergeben.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung¹ setzt sich entsprechend

$$\sigma_r(r) = \sigma_{r,part}(r) + \sigma_{r,hom}(r)$$

aus einer beliebigen Partikulärlösung $\sigma_{r,part}$ und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $\sigma_{r,hom}$ zusammen. Für die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$r^2 \sigma_r'' + 3r \sigma_r' = 0$$

führt ein Potenzansatz $\sigma_r = Cr^\lambda$ zum Ziel. Man erhält die *charakteristische Gleichung*

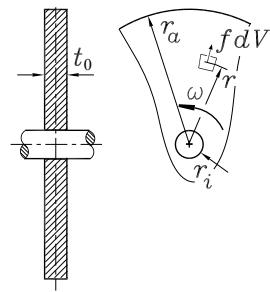
$$C\lambda(\lambda - 1)r^\lambda + 3C\lambda r^\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) + 3\lambda = 0 .$$

Diese liefert die Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$, damit ist $\sigma_r = C_1$ und $\sigma_r = C_2 r^{-2}$ ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung.

Man kann durch Einsetzen leicht bestätigen, dass

$$\sigma_{r,part.} = -\frac{1}{8} (3+\nu) \rho \omega^2 r^2$$

¹Leser, die mit der Theorie der Lösung von Differentialgleichungen noch nicht vertraut sind, dürfen die folgenden Passagen bis zum Ergebnis 25.6 ohne Einbuße des Verständnisses „überlesen“. Für alle Interessierten wird die Internet-Ergänzung zum Thema „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ hilfreich sein, auf die auf Seite 314 verwiesen wird.



die inhomogene Differenzialgleichung erfüllt und damit als Partikulärlösung verwendet werden kann (man findet diese Partikulärlösung, indem man z. B. mit dem naheliegenden Ansatz $\sigma_{r,part.} = A r^2$ in die Differenzialgleichung hineingeht und den Parameter A bestimmt).

Damit kann die allgemeine Lösung von 25.5 aufgeschrieben werden. Sie wird in 25.4 und 25.3 eingesetzt, und man erhält den

Spannungs- und Verschiebungszustand einer Scheibe konstanter Dicke unter Fliehkraftbelastung (allgemeine Lösung):

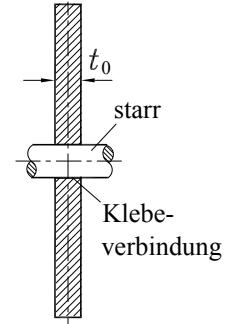
$$\begin{aligned}\sigma_r &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+v}{8} \rho \omega^2 r^2 , \\ \sigma_t &= C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3v}{8} \rho \omega^2 r^2 , \\ u &= \frac{r}{E} \left[C_1(1-v) - \frac{C_2}{r^2} (1+v) - \frac{1-v^2}{8} \rho \omega^2 r^2 \right] .\end{aligned}\quad (25.6)$$

Die allgemeine Lösung 25.6 muss noch den Randbedingungen des aktuellen Problems angepasst werden (Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 , vgl. nachfolgendes Beispiel).

Beispiel 2:

Eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Kreisscheibe konstanter Dicke t_0 ist auf eine starre Nabe aufgeklebt. Es soll untersucht werden, mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω_{max} die Scheibe umlaufen darf, so dass in der Klebeverbindung eine zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschritten wird, und welche Spannungsverteilungen σ_r und σ_t und Radialverschiebung sich bei dieser Winkelgeschwindigkeit in der Scheibe einstellen.

Gegeben: $r_i = 10\text{ cm}$; $\frac{r_a}{r_i} = 5$; $\sigma_{zul} = 80\text{ N/mm}^2$;
 $\rho = 7,85\text{ g/cm}^3$; $v = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ N/mm}^2$.



Die allgemeine Lösung 25.6 muss folgenden Randbedingungen angepasst werden:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r=r_a) &= 0 \quad (\text{keine Belastung am Außenrand}), \\ u(r=r_i) &= 0 \quad (\text{keine Verschiebung an der starren Nabe}).\end{aligned}$$

Die beiden Randbedingungsgleichungen werden aufgeschrieben und jeweils nach C_1 umgestellt:

$$C_1 = \frac{3+v}{8} \rho \omega^2 r_a^2 - \frac{C_2}{r_a^2}, \quad C_1 = \frac{C_2}{r_i^2} \frac{1+v}{1-v} + \frac{1+v}{8} \rho \omega^2 r_i^2 .$$

Gleichsetzen liefert eine Bestimmungsgleichung für C_2 , und man berechnet:

$$C_2 = \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{\left[(3+v) \frac{r_a^2}{r_i^2} - (1+v) \right] (1-v) r_a^2 r_i^2}{(1+v) \frac{r_a^2}{r_i^2} + 1 - v} .$$

Bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit könnte mit diesen Konstanten der Spannungs- und Verschiebungszustand nach 25.6 aufgeschrieben werden.

Die gesuchte maximale Winkelgeschwindigkeit, bei der in der Klebefuge die zulässige Spannung nicht überschritten wird, ergibt sich aus der Grenzbedingung

$$\sigma_r(r = r_i) = \sigma_{zul} .$$

Man errechnet

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{4 \left[(1 + \nu) \frac{r_a^2}{r_i^2} + 1 - \nu \right] \sigma_{zul}}{\rho (r_a^2 - r_i^2) \left[(3 + \nu) \frac{r_a^2}{r_i^2} + 1 - \nu \right]}}$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten: $\omega_{max} = 260,34 \text{ s}^{-1}$.

Die Abbildung 25.5 zeigt die grafische Darstellung der Spannungen und der Radialverschiebung. Es ist zu erkennen, dass die Randbedingungen und die Grenzbedingung für die Radialspannung erfüllt sind.

Die größte Radialspannung tritt am Innenrand auf. Bei der Tangentialspannung ergibt sich ein Extremwert von $\sigma_t = 41,7 \text{ N/mm}^2$ bei einem Radius zwischen 217 und 218 mm.

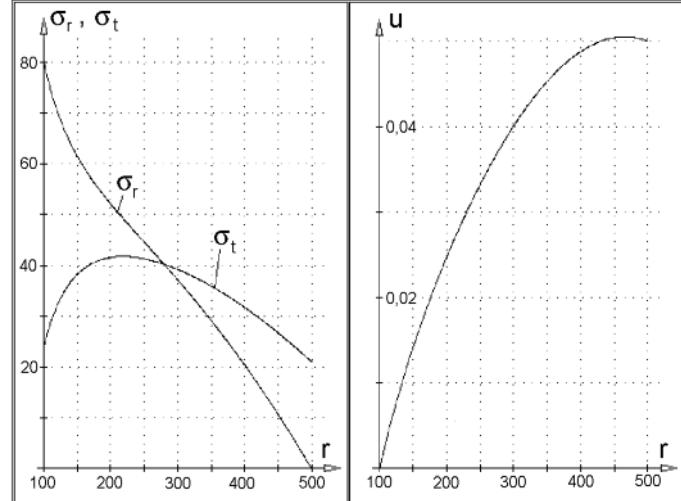


Abbildung 25.5: Spannungen und Verschiebungen in einer rotationssymmetrischen Scheibe konstanter Dicke unter Fliehkraftbelastung

25.2 Spezielle Anwendungsbeispiele

Die im Abschnitt 25.1 für die rotationssymmetrischen Scheiben entwickelte allgemeine Lösung wird (zum Teil mit geringfügiger Modifikation) auf eine Reihe praktischer Probleme angewendet, von denen hier zwei vorgestellt werden sollen.

Das *Aufschrumpfen einer Scheibe* auf eine Welle oder Hülse kann für die Scheibe konstanter Dicke unmittelbar auf der Basis der Formeln 25.6 behandelt werden. Der Innenradius der Scheibe wird mit einem Untermaß Δr gefertigt. Im einfachsten Fall (Beispiel 1) wird angenommen, dass die Scheibe aufgeweitet und auf die als starr angenommene Welle gezogen wird (praktische Realisierung: Erwärmung der Scheibe, Aufbringen auf die Welle, bei der Abkühlung entspricht die Verhinderung des Zusammenziehens auf das Fertigungsmaß der Aufweitung um Δr).

Beispiel 1:

Eine Kreisscheibe konstanter Dicke wird an ihrem Innenrand um den Betrag Δr aufgeweitet. Der Verformungs- und Spannungszustand $u(r)$, $\sigma_r(r)$ und $\sigma_t(r)$ und die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese sollen berechnet werden.

Gegeben: $r_a = 3r_i = 300 \text{ mm}$; $v = 0,3$;
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $\Delta r = 0,001 r_i$.

Die Gleichungen 25.6 mit $\omega = 0$ müssen den Randbedingungen

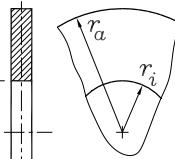
$$\sigma_r(r = r_a) = 0 \quad , \quad u(r = r_i) = \Delta r$$

angepasst werden. Daraus errechnen sich die Integrationskonstanten

$$C_1 = -\frac{C_2}{r_a^2} \quad , \quad C_2 = -\frac{\Delta r E r_i r_a^2}{(1-v)r_i^2 + (1+v)r_a^2} \quad ,$$

mit denen die gesuchten Funktionen aufgeschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{\Delta r E r_i}{(1-v)r_i^2 + (1+v)r_a^2} \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad , \\ \sigma_t(r) &= \frac{\Delta r E r_i}{(1-v)r_i^2 + (1+v)r_a^2} \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad , \\ u(r) &= \frac{\Delta r r_i r}{(1-v)r_i^2 + (1+v)r_a^2} \left(1 - v + (1+v)\frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad . \end{aligned}$$



Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese ergibt sich für den ebenen Spannungszustand (ohne Schubspannung, σ_r und σ_t sind Hauptspannungen) nach 22.36 zu

$$\sigma_{V,3} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t} \quad .$$

Die Abbildung 25.6 zeigt die Funktionen für die gegebenen Zahlenwerte. Man erkennt, dass die beiden Randbedingungen (für u am Innenrand und für σ_r am Außenrand) erfüllt sind.

Die größte Beanspruchung tritt erwartungsgemäß am Innenrand auf (Vergleichsspannung $\sigma_{V,max} = 264,5 \text{ N/mm}^2$).

Die komplette Berechnung findet man unter www.TM-aktuell.de.

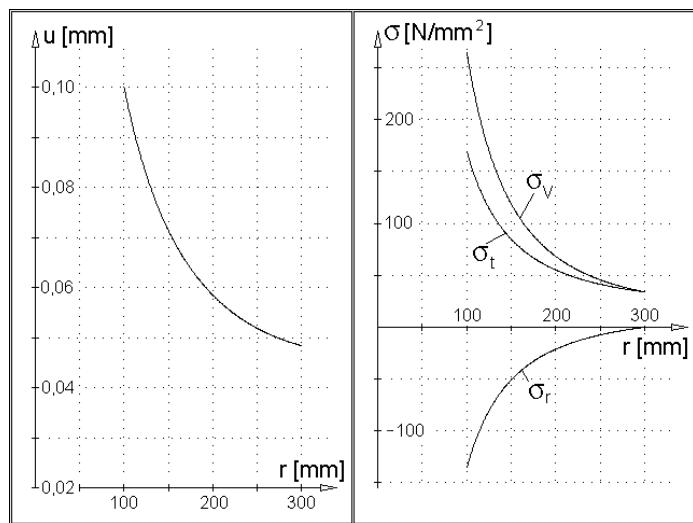


Abbildung 25.6: Aufgeschrumpfte Scheibe (Verschiebungen, Spannungen)

- ⇒ Mit der Annahme einer starren Welle wie im Beispiel 1 liegt man hinsichtlich der errechneten Spannungen in der Scheibe auf der sicheren Seite. Andererseits sind die Radialspannungen am Innenrand erwünscht, weil durch sie die Scheibe auf die Welle gepresst wird. Da sich diese Radialspannungen bei Rotation von Welle und Scheibe verringern (durch die Zentrifugalkräfte werden die Scheibenpunkte und damit auch der Innenrand nach außen verschoben), ist für diesen Fall eine Berechnung unter zumindest angenäherter Erfassung der Elastizität der Welle sinnvoll.

Eine übliche Näherung basiert auf der Idee, eine Scheibe der Welle mit der gleichen Breite wie die aufzuschrumpfende Scheibe in die Rechnung einzubeziehen, so dass „eine ringförmige Scheibe der Breite t_0 auf eine Vollscheibe der Breite t_0 aufgebracht wird“ (wird im Beispiel 2 demonstriert).

Beispiel 2:

Die Kreisringscheibe des Beispiels 1 wird auf eine Vollscheibe gleicher Dicke und gleichen Materials aufgeschrumpft. Der Außenradius der Vollscheibe und der Innenradius der Kreisringscheibe unterscheiden sich um den im Beispiel 1 angegebenen Wert Δr .

Berechnet werden sollen die Schrumpfspannung σ_s , die nach dem Aufbringen der Kreisringscheibe in der Schrumpffuge zwischen Vollscheibe und Kreisringscheibe wirkt, und die Winkelgeschwindigkeit ω_0 , bei der diese Spannung Null wird, wodurch sich die beiden Scheiben wieder voneinander lösen.

Die allgemeinen Lösungen nach 25.6 für die Kreisringscheibe 1 und die Vollscheibe 2 enthalten insgesamt drei Integrationskonstanten (für die Vollscheibe gilt $C_2 = 0$, siehe die entsprechende Bemerkung auf der Seite 447). Hier werden nur die Funktionen für σ_r und u angegeben, weil σ_t zur Beantwortung der untersuchten Fragen nicht erforderlich ist:

$$\begin{aligned} \text{Kreisringscheibe: } \sigma_{r1} &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+v}{8} \rho \omega^2 r^2 , \\ u_1 &= \frac{r}{E} \left[C_1(1-v) - \frac{C_2}{r^2} (1+v) - \frac{1-v^2}{8} \rho \omega^2 r^2 \right] , \\ \text{Vollscheibe: } \sigma_{r2} &= \bar{C}_1 - \frac{3+v}{8} \rho \omega^2 r^2 , \\ u_2 &= \frac{r}{E} \left[\bar{C}_1(1-v) - \frac{1-v^2}{8} \rho \omega^2 r^2 \right] . \end{aligned}$$

Folgende Rand- und Übergangsbedingungen sind zu erfüllen:

- 1.) $\sigma_{r1}(r_a) = 0$ (freier Außenrand der Kreisringscheibe),
- 2.) $\sigma_{r1}(r_i) = \sigma_{r2}(r_i)$ (Gleichheit der beiden Radialspannungen in der Schrumpffuge).
- 3.) Die Aufweitung des Innenrandes der Kreisringscheibe $u_{1i} = u_1(r_i)$ und die Zusammendrückung des Außenrandes der Vollscheibe $-u_{2i} = -u_2(r_i)$ müssen zusammen das Fehlmaß Δr ausgleichen (nebenstehende Skizze): $\Delta r = u_1(r_i) - u_2(r_i)$.

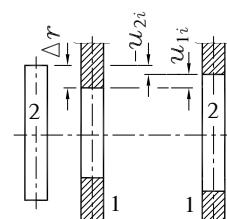


Abbildung 25.7: Ausgleich des Fehlmaßes

Aus diesen drei Bedingungen errechnet man (problemlos, wenn auch etwas mühsam) die drei Integrationskonstanten, mit denen die Fragestellungen der Aufgabe beantwortet werden können. Die Schrumpfspannung σ_s ergibt sich zu:

$$\sigma_s = \sigma_{r1}(r_i) = \sigma_{r2}(r_i) = \frac{1}{2} E \Delta r r_i \left(\frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_a^2 - r_i^2) \quad .$$

Die Spannung in der Schrumpffuge der nicht rotierenden Scheiben beträgt

$$\sigma_s(\omega = 0) = -93,3 \text{ N/mm}^2$$

(im Vergleich zu $\sigma_s = \sigma_r(r_i) = -135,5 \text{ N/mm}^2$ bei Annahme einer starren Welle im Beispiel 1). Die Spannung in der Schrumpffuge wird Null für

$$\omega_0 = 600 \text{ s}^{-1} \quad .$$

- ⇒ Bei der Übertragung des Berechnungsmodells des Beispiels 2 auf die Kreisringscheibe, die auf eine Welle aufgeschrumpft wird, ist zu beachten, dass die Welle tatsächlich steifer ist als eine aus ihr herausgeschnittene Vollscheibe (die Querdehnung kann behindert sein, in jedem Fall widersetzen sich auch die Nachbarscheiben der Welle einer Zusammendrückung). Eine genauere Rechnung, die auch dies berücksichtigt, ist aufwendig, mit den hier vorgestellten Berechnungsmodellen nicht zu realisieren, allerdings für die meisten praktischen Fälle auch nicht erforderlich. Man beachte, dass die Verwendung des Modells des Beispiels 1 eine zu starre Welle annehmen würde, so dass die tatsächlichen Ergebnisse von beiden Berechnungsmodellen eingegrenzt werden.

Dickwandige Rohre, dickwandige zylindrische Behälter

Mit nur geringfügiger Modifikation kann die für den ebenen Spannungszustand in einer Scheibe konstanter Dicke entwickelte allgemeine Lösung 25.6 für die Berechnung *dickwandiger Rohre und dickwandiger zylindrischer Behälter* verwendet werden.

Man betrachtet dafür eine von zwei Ebenen senkrecht zur Symmetrieachse des Rohrs bzw. Behälters herausgeschnittene Kreisringscheibe konstanter Dicke. Eine Vereinfachung ergibt sich zunächst dadurch, dass in 25.6 die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$ gesetzt werden darf.

Allerdings muss bei einem ebenen Spannungszustand vorausgesetzt werden, dass sich die Verschiebungen senkrecht zur Scheibenfläche frei ausbilden können (infolge der Querkontraktion ändert sich die Scheibendicke durch die Wirkung von σ_r und σ_t), so dass keine Spannungen in dieser Richtung entstehen. Diese Spannungsfreiheit ist natürlich bei einer Scheibe, die aus dem (zylindrischen) Mittelteil des Behälters in Abbildung 25.8 herausgeschnitten wird, nicht gegeben. Vielmehr rufen der auch auf die Stirnflächen des Behälters wirkende Innendruck Zugspannungen und der Außendruck Druckspannungen hervor (angedeutet als σ_z in der unter dem Behälter gezeichneten Scheibe), deren Auswirkungen auf den Spannungs- und Verformungszustand zu untersuchen sind (das Eigengewicht kann bei den für sehr hohen Druck ausgelegten dickwandigen Behältern vernachlässigt werden).

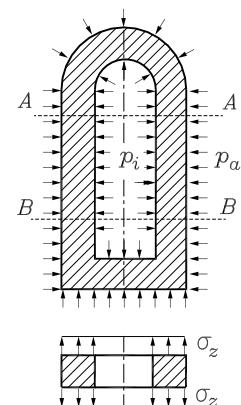


Abbildung 25.8: Behälter unter Innendruck p_i und Außendruck p_a

Mit guter Annäherung an die Realität darf vorausgesetzt werden, dass sich die Spannungen σ_z gleichmäßig über die Schnittfläche verteilen. Die Differenz der Kraft $p_i \pi r_i^2$, die der Innendruck auf die innere Stirnfläche ausübt, und der Kraft $p_a \pi r_a^2$, die der Außendruck auf die äußere Stirnfläche ausübt, muss mit der aus σ_z resultierenden Kraft $\sigma_z \pi(r_a^2 - r_i^2)$ im Gleichgewicht sein. Dieses Kraftgleichgewicht in vertikaler Richtung (z. B. am unteren Teil des bei *B-B* geschnittenen Behälters) wird durch die Querschnittsfläche $A = \pi(r_a^2 - r_i^2)$ des Kreisrings dividiert, und man erhält:

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} . \quad (25.7)$$

Diese Spannung wirkt sich natürlich auch auf die Verformungen in der Scheibenebene aus (Querkontraktion), so dass das Hookesche Gesetz des ebenen Spannungszustands 25.1 um einen Anteil zu erweitern ist (dreidimensionaler Spannungszustand):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t - \nu \sigma_z) , \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r - \nu \sigma_z) . \quad (25.8)$$

Wenn nun 25.8 anstelle von 25.1 für die Herleitung der Beziehungen 25.2 benutzt wird, zeigt sich, dass dies bei (vorausgesetzter) konstanter Spannung σ_z gar keine Auswirkungen auf die beiden Spannungs-Differenzialgleichungen hat, nur die Formel für die Radialverschiebung muss korrigiert werden:

$$u = r \varepsilon_t = \frac{r}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r - \nu \sigma_z) . \quad (25.9)$$

Damit gilt für die Spannungen σ_r und σ_t die allgemeine Lösung 25.6, die (mit $\omega = 0$) noch den Randbedingungen

$$\sigma_r(r_i) = -p_i , \quad \sigma_r(r_a) = -p_a$$

angepasst werden muss. Man erhält schließlich zusammen mit 25.7 die

Spannungsformeln für den dickwandigen Kreiszylinder unter Innen- und Außendruck:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left[p_i r_i^2 \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) + p_a r_a^2 \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right] , \\ \sigma_t &= \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left[p_i r_i^2 \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) - p_a r_a^2 \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (25.10)$$

Die (im Allgemeinen allerdings kaum interessierende) Radialverschiebung u kann bei bekannten Spannungen nach 25.9 berechnet werden.

- ⇒ Die Formeln 25.7 und 25.10 gelten nur für den mittleren zylindrischen Teil eines Behälters (in der Abbildung 25.8 etwa durch die Schnitte *A-A* und *B-B* angedeutet), weil die in der Herleitung der Formeln vorausgesetzte freie Radialverformung in der Nähe von Behälterboden und -deckel erheblich gestört ist. Diese Formeln sind also nur für eine grob überschlägige Dimensionierung geeignet. Der Ingenieur in der Praxis ist ohnehin gerade beim Sicherheitsnachweis für Druckbehälter im Allgemeinen an branchentypische Vorschriften und Normen (z. B. DIN EN 13480-3) gebunden.

25.3 Dünnewandige Behälter (Membranspannungen)

Wenn die Wanddicke eines Behälters oder Rohres gegenüber den anderen Abmessungen klein ist, dann kann die Radialspannung gegenüber der Tangentialspannung vernachlässigt und letztere als konstant über die Dicke angenommen werden. Ein so idealisierter Körper setzt der Verbiegung seiner Wand keinen Widerstand entgegen (Membranspannungszustand).

Für einfache geometrische Formen des Behälters können die Spannungen aus einfachen Gleichgewichtsbetrachtungen ermittelt werden. Für den zylindrischen Behälter unter Innendruck p mit der konstanten Wanddicke t und dem mittleren Radius r (**Abbildung 25.9**) erhält man so die Längsspannungen σ_l (in Schnitten quer zur Zylinderlängsachse) und σ_t (in Längsschnitten).

Die resultierende Kraft F_2 , die auf den Zylinderboden drückt, berechnet sich unabhängig von dessen geometrischer Form (Kraft = Druck · „projizierte Fläche“, die in jedem Fall ein Kreis ist) nach $F_2 = p \pi r^2$ (vgl. im Abschnitt 19.3.1, Beispiel 1: Resultierende bei konstanter Linienlast am Kreisbogenträger).

Die Resultierende der Längsspannung wird wegen der Dünnewandigkeit mit einer vereinfachten Kreisringfläche (Umfang · Dicke) ermittelt und muss mit F_2 im Gleichgewicht sein:

$$\sigma_l 2\pi rt = p \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_l = \frac{pr}{2t} .$$

Es ist einleuchtend, dass diese Formel auch für einen Kugelbehälter gilt. Die Tangentialspannung σ_t im Mittelteil des zylindrischen Behälters ergibt sich aus dem Gleichgewicht der resultierenden Kraft F_1 , berechnet für ein Zylinderstück beliebiger Länge l , mit der Resultierenden aus der Spannung entlang der beiden Schnittgeraden.

Die einfachen (nur eingeschränkt gültigen) Formeln, die sich auf diesem Weg ergeben, nennt der Praktiker

Kesselformeln für Zylinderbehälter:	$\sigma_t = \frac{pr}{t} , \quad \sigma_l = \frac{pr}{2t} ,$
Kugelbehälter:	$\sigma_l = \sigma_t = \frac{pr}{2t} .$

(25.11)

- ⇒ Die eingeschränkte Gültigkeit der Kesselformeln bezieht sich vor allen Dingen auf die nicht berücksichtigten Biegewirkungen am Zylinderboden und den unvermeidlichen Biegewirkungen an den Punkten, an denen der Behälter gelagert ist. Dagegen rechtfertigt sich die Vernachlässigung der Radialspannungen, die mit $\sigma_r = -p$ an der Innenwand ihren Maximalwert hätten: Die beiden anderen Spannungen enthalten jeweils den Faktor $\frac{r}{t}$, was zu wesentlich größeren Werten führt.

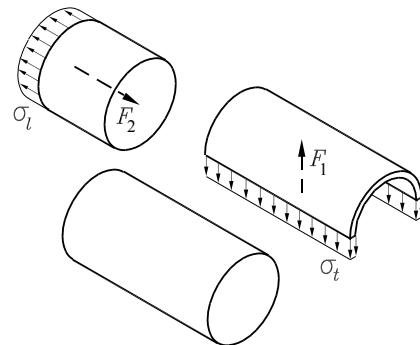


Abbildung 25.9: Dünnewandiger zylindrischer Behälter unter Innendruck p

In diesem Kapitel wurde ein ganz kleiner Einblick in die Berechnung von sehr einfachen Flächentragwerken gegeben. Trotzdem war es nicht zu vermeiden, dass immer wieder von „recht grober Näherung“ oder „eingeschränkter Gültigkeit“ die Rede war. Deshalb bleibt bei der praktischen Anwendung immer ein etwas unangenehmes Gefühl.

Eine genauere Berechnung (z. B. die Erfassung der Biegespannungen bei Schalen) ist auf analytischem Wege nur für wenige Ausnahmen und auch dann nur mit erheblichem Aufwand möglich. Deshalb ist die Benutzung eines der vielen Finite-Elemente-Programme, die auch die Berechnung von (beliebig räumlich gekrümmten) Schalen anbieten, im Allgemeinen eine gute Idee, aber eine deutliche Warnung muss ausgesprochen werden:

Man informiere sich genau, welche Eigenschaften die verwendeten Elemente haben. Das ist häufig nicht ganz einfach, denn die Hersteller dieser Programme sind nicht so sehr an skeptischen Anwendern interessiert, und deshalb sind diese Informationen in den Manuals nicht sehr umfangreich. Gerade für die Berechnung von Schalen werden aber sehr gern Elemente benutzt, die nicht (oder kaum) mehr als die Membranspannungen erfassen.

Diese Bemerkung soll nicht vor der Verwendung dieser Elemente warnen, aber man sollte schon wissen, was man tut, und wer sich bei der Anwendung der Kesselformeln unwohl fühlt, sollte sich nicht von den schönen bunten Grafiken der FEM-Programme eine hohe Genauigkeit suggerieren lassen, wenn nur Membranspannungselemente verwendet wurden.

25.4 Aufgaben

Aufgabe 25.1:

Für eine rotierende **Vollscheibe** konstanter Dicke sind der Spannungs- und Verformungszustand, die Spannungen im Mittelpunkt der Scheibe sowie die maximale Radialverschiebung zu berechnen und die Verläufe grafisch darzustellen.

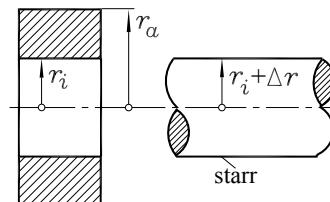
Gegeben: $\omega_0 = 260 \text{ s}^{-1}$; $r_a = 500 \text{ mm}$; $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$; $v = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Aufgabe 25.2:

Eine Buchse wird auf eine starre Welle aufgeschrumpft.

Gegeben: $r_a = 2r_i = 200 \text{ mm}$; $v = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$.

- Bei welchem Übermaß der Welle wird im Schrumpfsitz eine Druckspannung von 150 N/mm^2 erzeugt?
- Bei welcher Winkelgeschwindigkeit würde für das unter a ermittelte Übermaß die Schrumpfspannung auf 50 N/mm^2 abgebaut werden?



Aufgabe 25.3:

Ein dickwandiger zylindrischer Behälter ist ausschließlich durch den Innendruck p_i belastet. Man ermittle die Verläufe der Spannungen σ_r , σ_t und σ_z und der Radialverschiebung u in Abhängigkeit vom Radius r (einschließlich grafischer Darstellung).

Gegeben: $r_i = 30 \text{ cm}$; $r_a = 50 \text{ cm}$; $p_i = 6 \text{ MPa} = 6 \text{ N/mm}^2$; $v = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

26 Kinematik des Punktes

Die *Kinematik* ist die Lehre vom geometrischen und zeitlichen Ablauf von Bewegungen, ohne nach Ursachen (z. B. den Kräften) und Wirkungen zu fragen. Die *Kinetik* dagegen, die ab Kapitel 28 behandelt wird, untersucht die Wechselwirkungen zwischen Kräften und den Bewegungen von Massen (der vielfach auch gebräuchliche Begriff *Dynamik* schließt die Kinetik und die Statik als Lehre vom Gleichgewicht ruhender Körper ein).

Dem Prinzip der Darstellung in diesem Buch folgend, stets die einfachen Probleme an den Anfang zu stellen, um dann zu verallgemeinern, wird zunächst die *Kinematik des Punktes* behandelt. Dabei braucht man nicht die Vorstellung zu haben, nur den (unendlich kleinen) Punkt zu betrachten. Es wird die Bewegung eines einzelnen Punktes beschrieben, der durchaus zu einem Körper mit endlichen Abmessungen und komplizierter Struktur gehören darf. Vielfach werden sogar die wesentlichen Aussagen der Bewegung des Gesamtkörpers durch einen Punkt beschrieben (und deshalb können in den Kinematik-Beispielen durchaus Lokomotiven oder gar Planeten auftauchen).

Der wesentliche Unterschied der Kinematik des Punktes zur Kinematik des Körpers kann darin gesehen werden, dass ein Punkt keine Drehbewegung (um seine eigene Achse) ausführen kann (Beispiel: Planetenbahnen können so beschrieben werden, nicht aber die Rotation um eine Achse des Planeten).

26.1 Geradlinige Bewegung des Punktes

26.1.1 Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Die Bewegung eines Punktes (**Abbildung 26.1**) entlang einer geraden Linie wird vollständig beschrieben durch die Angabe einer Weg-Zeit-Funktion

$$s = s(t)$$

Dabei wird die *Wegkoordinate* s von einem beliebig festzulegenden Anfangspunkt aus gezählt, $s(t)$ gibt dann die Lage des Punktes zu jedem *Zeitpunkt* t an. Auch der Beginn der Zeitzählung ($t = 0$) muss eindeutig festgelegt werden. Es ist nicht zwingend (für die meisten Probleme aber sinnvoll), die Zeitmessung dann zu beginnen, wenn der Punkt den festgelegten Anfangspunkt der Wegmessung passiert.

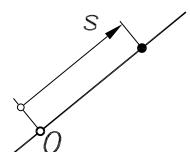


Abbildung 26.1:
Bewegung eines
Punktes auf einer
Geraden

Die *Geschwindigkeit* v ist ein Maß dafür, wie schnell sich die Wegkoordinate s mit der Zeit ändert. Der Quotient aus dem pro Zeitintervall Δt zurückgelegten Weg $\Delta s = s_2 - s_1$ und diesem $\Delta t = t_2 - t_1$ wird deshalb als *mittlere Geschwindigkeit* v_m im Zeitintervall definiert.

Analog dazu definiert man als Maß für die Geschwindigkeitsänderung die *Beschleunigung* a : Die Differenz der Geschwindigkeiten $\Delta v = v_2 - v_1$ am Ende und am Beginn eines Zeitintervalls Δt wird durch Δt dividiert, es ist die *mittlere Beschleunigung* a_m im Zeitintervall.

$$\text{Mittlere Geschwindigkeit: } v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} , \quad (26.1)$$

$$\text{Mittlere Beschleunigung: } a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} . \quad (26.2)$$

Während 26.1 und 26.2 die Mittelwerte über ein endliches Zeitintervall definieren, kommt man mit dem Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ zur Geschwindigkeit und zur Beschleunigung zu einem Zeitpunkt t .

$$\text{Momentangeschwindigkeit: } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) , \quad (26.3)$$

$$\text{Momentanbeschleunigung: } a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}(t) = \dot{v}(t) . \quad (26.4)$$

- ⇒ Wenn die Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ bekannt ist, so ist damit der Bewegungsvorgang vollständig beschrieben. Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t)$ und die Beschleunigungs-Zeit-Funktion $a(t)$ erhält man durch ein- bzw. zweimalige Differenziation der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit (der Punkt über der Funktion wird als Ableitungssymbol nach der Zeit t ver-einbart).
- ⇒ Bei bekannter Geschwindigkeits-Zeit-Funktion gewinnt man die Weg-Zeit-Funktion durch Integration über die Zeit. Für die Bestimmung der sich dabei ergebenden Integrationskonstanten ist eine zusätzliche Aussage erforderlich (z. B. die Angabe der Wegkoordinate s_0 zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0).
- ⇒ Bei bekannter Beschleunigungs-Zeit-Funktion (dies ist der typische Fall in der Kinetik) sind zur kompletten Beschreibung der Bewegung noch zwei zusätzliche Angaben erforderlich. Da dies bei den meisten Aufgaben die Aussagen über die Wegkoordinate s_0 und die Geschwindigkeit v_0 beim Beginn der Betrachtung der Bewegung (Zeitpunkt t_0) sind, nennt man diese zusätzlichen Aussagen *Anfangsbedingungen*. Natürlich können diese Zusatzbedingungen sich auf jeden beliebigen Zeitpunkt der Bewegung beziehen, auch auf verschiedene Zeitpunkte für Weg- und Geschwindigkeitsaussage, es können auch zwei Aussagen über die Wegkoordinate zu verschiedenen Zeitpunkten sein.
- ⇒ Empfehlung für die Zahlenrechnung mit unterschiedlichen Dimensionen der einzelnen Größen: Man beziehe die Dimensionen in die Rechnung mit ein, um auf diese Weise Umrechnungen möglichst sicher zu machen. Im nachfolgenden Beispiel 1 wird z. B. die Sekunde mit $s = \frac{h}{3600}$ durch die Stunde ersetzt, die 3600 geht in die Zahlenrechnung ein, die Sekunde s ersetzt die Stunde h in der Dimension des Ergebnisses.
- ⇒ **Besonders wichtig bei Aufgaben der Kinematik und Kinetik:** Wenn Zahlenwerte gegeben sind, dann rechne man bis zu einem bestimmten Punkt ausschließlich mit Formelsymbolen und ab diesem Punkt ausschließlich mit den Zahlenwerten (einschließlich ihrer

Dimensionen), weil sonst Verwechslungen nahezu unvermeidlich sind, denn die typischen Formelsymbole (z. B. s für den Weg oder h für eine Höhe) dürfen natürlich nicht mit den Dimensionen (z. B. s für Sekunde und h für die Stunde) vermischt werden. In diesem Buch wird diese Empfehlung konsequent eingehalten und damit eine doppelte Sicherheit erzeugt, weil Formelsymbole zusätzlich kursiv gesetzt sind (was leider bei der Handrechnung kaum nachzuahmen ist).

Beispiel 1:

Zwischen den Kilometersteinen 67,5 und 70 zeigt der Tachometer eines Autos konstant 130 km/h an. Tatsächlich werden für die Strecke 71 s benötigt.

Aus den Messwerten ergibt sich nach 26.1 eine mittlere Geschwindigkeit von

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{70 - 67,5}{71 - 0} \frac{\text{km}}{\text{s}} = \frac{2,5}{71} \frac{\text{km} \cdot 3600}{\text{h}} = 126,76 \frac{\text{km}}{\text{h}} ,$$

woraus sich ein relativer Fehler der Tachometeranzeige von 2,56% errechnet.

Beispiel 2:

Ein Pkw benötigt für eine 18 km lange Strecke bei konstanter Geschwindigkeit von 90 km/h eine Fahrzeit von 12 min. Auf der gleichen Strecke fährt ein zweiter Pkw die ersten 9 km (halbe Strecke) mit 120 km/h und den Rest mit 60 km/h, ein dritter Pkw fährt in den ersten 6 Minuten (halbe Zeit, die der erste Pkw für die Gesamtstrecke benötigt) mit 60 km/h und den Rest der Strecke mit 120 km/h. Gibt es Unterschiede in der Gesamtfahrzeit?

Berechnung der Gesamtfahrzeiten t_{ges} für Pkw 2 und Pkw 3:

$$\text{Pkw 2: } t_{ges,2} = \left(\frac{9}{120} + \frac{9}{60} \right) \text{h} = \frac{27}{120} \text{h} = 0,225 \text{h} = 13,5 \text{ min} ,$$

$$\text{Pkw 3: } s_1 = v_1 t_1 \Rightarrow t_{ges,3} = t_1 + \frac{s_2}{t_2} = t_1 + \frac{s_{ges} - v_1 t_1}{v_2} = 12 \text{ min} .$$

⇒ Man beachte, dass der Begriff „Mittlere Geschwindigkeit“ sich auf eine *Mittelwertbildung über die Zeit* bezieht. Im Beispiel 2 hat Pkw 3 (je 6 min mit 60 bzw. 120 km/h) eine mittlere Geschwindigkeit für die Gesamtstrecke von 90 km/h. Dagegen hat Pkw 2 (je 9 km mit 60 bzw. 120 km/h) nur eine mittlere Geschwindigkeit für die Gesamtstrecke von $v_m = \frac{18 \text{ km}}{13,5 \text{ min}} = 80 \text{ km/h}$.

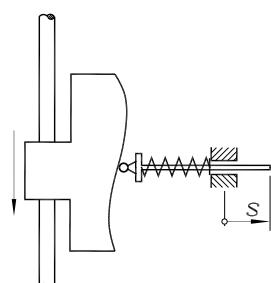
Beispiel 3:

Mit Kurvenscheibengetrieben sind fast beliebige Weg-Zeit-Funktionen zu realisieren. Der Endpunkt des skizzierten Stoßels bewegt sich nach dem Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t + k_4$$

$$\text{mit } k_1 = 0,004 \text{ m/s}^3 ; \quad k_2 = -0,04 \text{ m/s}^2 ; \\ k_3 = 0,1 \text{ m/s} ; \quad k_4 = 0,06 \text{ m} .$$

Damit ist die geradlinige Bewegung vollständig beschrieben. Man berechnet z. B. durch Differenzieren nach der Zeit:



$$v(t) = 3k_1 t^2 + 2k_2 t + k_3 \quad , \quad a(t) = 6k_1 t + 2k_2 \quad .$$

Für jeden Zeitpunkt sind alle Bewegungsgrößen berechenbar, nach $t = 4\text{ s}$ erhält man z. B.:

$$s(t = 4\text{ s}) = 0,076\text{ m} \quad ; \quad v(t = 4\text{ s}) = -0,028\text{ m/s} \quad ; \quad a(t = 4\text{ s}) = 0,016\text{ m/s}^2 \quad .$$

- ⇒ Interpretation der Vorzeichen: Eine negative Geschwindigkeit besagt, dass die momentane Bewegungsrichtung der Wegkoordinate s entgegengesetzt ist. Eine negative Beschleunigung bei positiver Geschwindigkeit bedeutet eine Verlangsamung (Verzögerung) der Geschwindigkeit, bei negativer Geschwindigkeit eine Vergrößerung des Absolutbetrags der Geschwindigkeit, im Beispiel bei $t = 4\text{ s}$: „Bewegung nach links, langsamer werdend“.

Die *Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit* ist als Sonderfall in der Formel 26.1 enthalten:

Wenn der Beginn der Zeitzählung $t = 0$ mit dem Passieren des Ursprungs der Wegkoordinate $s = 0$ zusammenfällt, gelten die einfachen **Formeln für die gleichförmige Bewegung**:

$$v_0 = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad s = v_0 t \quad (v_0 = \text{konstant}) \quad . \quad (26.5)$$

- ⇒ Da der Antrieb von Mechanismen vielfach mit konstanter Geschwindigkeit (oder konstanter Winkelgeschwindigkeit, vgl. Abschnitt 26.2.3) erfolgt, sind die Formeln 26.5 häufig der Einstieg in die Analyse der Bewegung (nachfolgendes Beispiel 4).

Beispiel 4:

Zwei Gleitsteine A und B sind durch eine starre Stange gekoppelt. Der Gleitstein A bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_A . Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich die Gleitsteine in der skizzierten Lage.

Gegeben: $a = 4\text{ m}$, $b = 3\text{ m}$, $v_A = 0,8\text{ m/s}$.

Für den Gleitstein B sollen die Funktionen $s_B(t)$, $v_B(t)$ und $a_B(t)$ ermittelt werden.

Die untere Skizze zeigt die geometrischen Verhältnisse des Mechanismus zu einem beliebigen Zeitpunkt t .

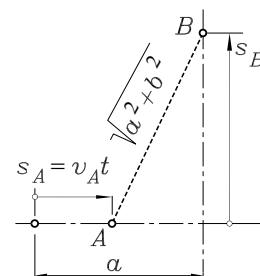
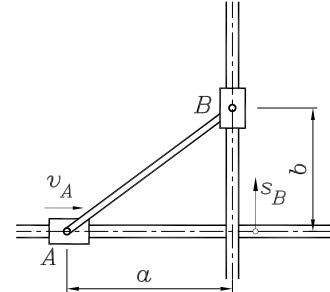
Der vom Gleitstein A bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg ist nach Formel 26.5: $s_A = v_A t$. Für s_B liest man aus der Skizze ab:

$$s_B = \sqrt{a^2 + b^2 - (a - v_A t)^2} = \sqrt{b^2 + 2av_A t - v_A^2 t^2} \quad .$$

Durch Differenzieren erhält man die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Gleitsteins B :

$$v_B = \frac{(a - v_A t) v_A}{\sqrt{b^2 + 2av_A t - v_A^2 t^2}} \quad ,$$

$$a_B = -\frac{b^2 + a^2}{\left(\sqrt{b^2 + 2av_A t - v_A^2 t^2}\right)^3} v_A^2 \quad .$$



Für die *Bewegung mit konstanter Beschleunigung* können $v(t)$ und $s(t)$ allgemein durch Integration ermittelt werden. Man gewinnt die

Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \quad , \\ v &= a_0 t + v_0 \quad , \\ s &= \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0 \quad . \end{aligned} \quad (26.6)$$

Die Integrationskonstanten v_0 und s_0 in 26.6 sind interpretierbar: Die *Anfangsgeschwindigkeit* v_0 ist die Geschwindigkeit zum Beginn der Zeitzählung $t = 0$ und s_0 ist der Wert, den die Wegkoordinate zu diesem Zeitpunkt hat.

Wenn die *Bewegung mit konstanter Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit mit der Zeitzählung $t = 0$ im Koordinatenursprung $s = 0$ beginnt*, vereinfachen sich die Formeln 26.6 zu

$$v = a_0 t \quad , \quad s = \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad , \quad v = \sqrt{2 a_0 s} \quad , \quad (26.7)$$

wobei die letzte dieser drei Formeln unmittelbar aus den beiden ersten folgt.

Beispiel 5:

In einem Transportsystem, bestehend aus Vakuumröhren, bewegen sich die Gegenstände über eine vertikale Strecke im freien Fall (ohne Anfangsgeschwindigkeit). Für einen nachfolgenden Sortierprozess wird die Information benötigt, aus welcher horizontalen Zuführung sie kommen. Mit einer Lichtschrankenmessung wird die Zeit t_{AB} ermittelt, die sie für das Durchfallen der Strecke s_{AB} benötigen. Nach welcher Formel kann aus t_{AB} und s_{AB} die Höhe h berechnet werden, die der fallende Körper bis zum Erreichen des Punktes A zurückgelegt hat?

Der *freie Fall ohne Luftwiderstand* ist als Sonderfall mit der *Erdbeschleunigung* $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in den Formeln 26.6 und 26.7 enthalten. Für die eingezeichnete Koordinate s kann das Weg-Zeit-Gesetz nach 26.6 mit $s_0 = 0$ aufgeschrieben werden, wenn die Zeitzählung beim Passieren des Punktes A beginnt:

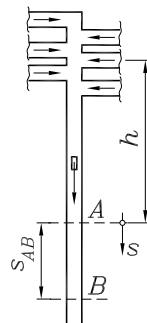
$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad \text{mit} \quad v_0 = \sqrt{2 g h} \quad ,$$

wobei sich die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , die der Körper am Beginn der Messstrecke hat, nach 26.7 errechnet (freier Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit von der horizontalen Zuführung bis zum Punkt A). Am Ende der Messstrecke gilt

$$s(t = t_{AB}) = s_{AB} \quad \Rightarrow \quad s_{AB} = \frac{1}{2} g t_{AB}^2 + \sqrt{2 g h} t_{AB} \quad ,$$

und durch Umstellen nach der gesuchten Höhe h ergibt sich daraus

$$h = \frac{\left(s_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}^2\right)^2}{2 g t_{AB}^2} \quad .$$



26.1.2 Kinematische Diagramme

Die grafische Darstellung der Funktionen $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ liefert einen guten Überblick über den Bewegungsablauf. Da die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion durch Ableitung der Funktion $s(t)$ entsteht, sind die Werte der Funktion $v(t)$ proportional zum Tangentenanstieg der Funktion $s(t)$. Eine analoge Aussage gilt für die Funktionen $v(t)$ und $a(t)$.

Gelegentlich ist es zweckmäßig, den Weg s als unabhängige Variable zu wählen und zum Beispiel die Geschwindigkeits-Weg-Funktion $v(s)$ darzustellen. Man erhält die Funktion $v(s)$, indem man aus den Funktionen $v(t)$ und $s(t)$ die Zeit eliminiert. Alle genannten grafischen Darstellungen bezeichnet man als *kinematische Diagramme*.

Beispiel:

Es sollen die kinematischen Diagramme der Funktionen $s_B(t)$, $v_B(t)$ und $a_B(t)$ für die Bewegung des Gleitsteins B des Beispiels 4 aus dem vorigen Abschnitt für den Bereich $0 \leq t \leq 11$ s gezeichnet und diskutiert werden.

In der Abbildung 26.2 sind die drei Diagramme in einer Skizze zusammengefasst (es wurden die Zahlenwerte der Aufgabenstellung verwendet). Folgende Aussagen lassen sich ablesen:

- Die Geschwindigkeit v_B hat einen Nulldurchgang zu dem Zeitpunkt, in dem die Wegkoordinate s_B ihren größten Wert annimmt. Das ist der obere Umkehrpunkt des Gleitsteins B . Die Umkehrzeit t_u kann z. B. aus

$$s_A(t = t_u) = v_A t_u = a$$

(Gleitstein A hat den Weg a zurückgelegt) berechnet werden: $t_u = \frac{a}{v_A} = 5$ s.

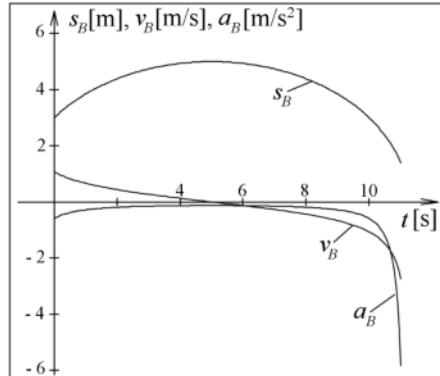


Abbildung 26.2: Kinematische Diagramme

- Die Beschleunigung a_B ist im gesamten Zeit-Bereich negativ (die Wahl der positiven Richtung von s_B definiert auch die positiven Richtungen von v_B und a_B). Während der Aufwärtsbewegung kennzeichnet dies die Verzögerung (kleiner werdende Geschwindigkeit), nach dem Passieren des Umkehrpunktes die wieder schneller werdende Bewegung (Geschwindigkeit und Beschleunigung sind dann abwärts gerichtet, gleicher Richtungssinn dieser beiden Größen bedeutet immer, dass sich der Absolutbetrag der Geschwindigkeit vergrößert).
- Die Beschleunigung hat zu keinem Zeitpunkt den Wert Null, selbstverständlich auch nicht im Moment des Stillstands im Umkehrpunkt (Beschleunigung gleich Null im Moment des Stillstands würde diesen Zustand andauern lassen).
- Geschwindigkeit v_B und Beschleunigung a_B nehmen gegen Ende des betrachteten Zeitraumes stark zu. Beide Funktionen hätten (theoretisch) an der Stelle einen Pol, an der die Kurve von s_B außerhalb des betrachteten Zeitraumes einen Nulldurchgang hat. Der Zeitpunkt t_e , bei dem dies eintreten würde, kann aus dieser Bedingung errechnet werden:

$$s_B = \sqrt{b^2 + 2av_A t_e - v_A^2 t_e^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_e = 11,25 \text{ s} .$$

26.2 Allgemeine Bewegung des Punktes

Für die Darstellung der allgemeinen Bewegung eines Punktes (auf einer beliebigen Bahn) bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- a) Die Bewegung erfolgt auf einer vorgeschriebenen Bahn und wird durch Angabe der Funktion $s = s(t)$ beschrieben. Die Wegkoordinate s folgt dabei allen Krümmungen der Bahn (**Abbildung 26.3**).

Vorteile dieser Darstellungsweise: Es gilt der gesamte (besonders einfache) Formelsatz 26.1 bis 26.7, der für die geradlinige Bewegung angegeben wurde, wobei die Beschleunigung allerdings jeweils nur die tangential zur Bahnkurve gerichtete so genannte *Bahnbeschleunigung* ist.

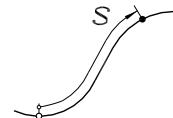


Abbildung 26.3: Die Wegkoordinate s folgt allen Krümmungen der Bahn

Nachteile: Die Funktion $s(t)$ enthält keine Informationen über die Bahnkurve, auch nicht über einen bei einer gekrümmten Bahn immer vorhandenen zusätzlichen Beschleunigungsanteil (*Normalbeschleunigung*).

Für viele Aufgabenstellungen ist diese (im Allgemeinen einfachere) Betrachtungsweise ausreichend (man denke an die „Fahrzeugaufgaben“ des vorigen Abschnitts, bei denen die Einschränkung auf eine geradlinige Bewegung ohne weiteres fallengelassen werden kann, s entspricht dabei z. B. der Anzeige des Tageskilometerzählers).

- b) Die Beschreibung der Bewegung in einem Koordinatensystem durch einen *Ortsvektor* \vec{r} , dessen Komponenten von der Zeit t abhängig sind, enthält die komplette Information über die Bahnkurve (die Komponenten des Ortsvektors definieren eine Parameterdarstellung der Bahnkurve) und die Lage des bewegten Punktes auf der Bahnkurve zu jedem beliebigen Zeitpunkt t .

26.2.1 Allgemeine Bewegung in einer Ebene

Betrachtet wird zunächst die ebene Bewegung eines Punktes, die in einem kartesischen Koordinatensystem durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

beschrieben wird (**Abbildung 26.4**). Gleichwertig damit ist die Angabe der Komponenten von \vec{r} , was der Parameterdarstellung der Bahnkurve entspricht:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad .$$

Als Maß für die Änderung des Ortsvektors mit der Zeit wird (analog zur Änderung des zurückgelegten Weges pro Zeit, vgl. Abschnitt 26.1.1) der *Geschwindigkeitsvektor* definiert. Der Zuwachs des Ortsvektors im Zeitintervall Δt kann als Differenz der benachbarten Ortsvektoren aufgeschrieben werden.

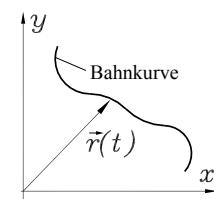


Abbildung 26.4: Der Ortsvektor verfolgt die Bahnkurve

Entsprechend **Abbildung 26.5** gilt:

$$\Delta \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta y(t) \end{bmatrix} = (\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \vec{r} \quad .$$

Diese Beziehung wird durch Δt dividiert. Dann liefert der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ (und damit $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$) die Definition und die Berechnungsvorschrift für den

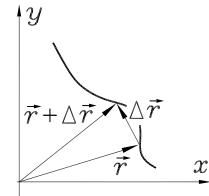


Abbildung 26.5: „Zuwachs“ $\Delta \vec{r}$

Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \frac{d \vec{r}}{dt} \quad . \quad (26.8)$$

- ⇒ Die Richtung des Sekantenvektors $\Delta \vec{r}$ wird beim Grenzübergang zur Tangentenrichtung der Bahnkurve, und damit wird \vec{v} ein tangential zur Bahnkurve gerichteter Vektor.
- ⇒ Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ ergibt sich durch Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit (ein Vektor wird nach einer skalaren Größe differenziert, indem seine Komponenten differenziert werden). Die Angabe eines „mittleren Geschwindigkeitsvektors“ (analog zur mittleren Geschwindigkeit in einem Zeitintervall) ist nicht sinnvoll.

Es bleibt noch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der sich aus der Ableitung der Wegkoordinate $s(t)$ nach der Zeit ergebenden Bahngeschwindigkeit $v(t)$ zu klären („Wie errechnet sich der auf dem Tachometer angezeigte Zahlenwert aus dem Ortsvektor?“). Der Betrag des Zuwachses des Ortsvektors $|\Delta \vec{r}|$ ist beim Übergang auf ein unendlich kleines Zeitintervall gleich dem Zuwachs der Bogenlänge der Bahnkurve (**Abbildung 26.6**):

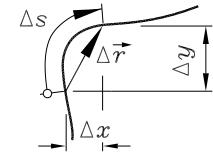


Abbildung 26.6: $\Delta \vec{r}$ und Δs

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \Delta s \quad \Rightarrow \quad |d \vec{r}| = ds$$

bzw.

$$\left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d \vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v \quad .$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Betrag des nach der Zeit abgeleiteten Ortsvektors, so dass der gesuchte Zusammenhang gefunden ist.

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors (Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner Komponenten) ist gleich der Bahngeschwindigkeit $v(t)$:

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d \vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad . \quad (26.9)$$

- ⇒ Der Geschwindigkeitsvektor muss also immer darstellbar sein als Produkt der (skalaren) Bahngeschwindigkeit mit einem tangential an die Bahnkurve gerichteten Einheitsvektor:

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}_t(t) \quad . \quad (26.10)$$

Der *Tangenteneinheitsvektor* \vec{e}_t hat die (konstante) Länge 1 und die (mit der Zeit t veränderliche) Richtung der Tangente an die Bahnkurve.

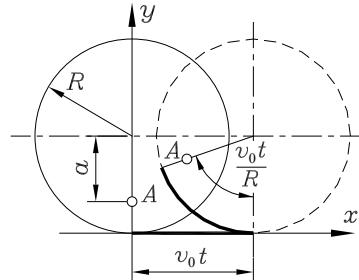
- ⇒ Durch bestimmte Integration von 26.9 über die Zeit erhält man den zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegten Weg (Länge $s_{1,2}$ eines Stücks der Bahnkurve):

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad . \quad (26.11)$$

Beispiel:

Ein Rad mit dem Radius R rollt (ohne zu gleiten) mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 auf der Horizontalen. Für einen Punkt A im Abstand a vom Radmittelpunkt sollen die Bahnkurve und die Bahngeschwindigkeit ermittelt werden.

Das Koordinatensystem wird (wie skizziert) so gelegt, dass sich das Rad zur Zeit $t = 0$ bei $x = 0$ befindet und der Punkt A senkrecht unter dem Radmittelpunkt liegt.



Nach einer Zeit t (gestrichelt gezeichnet) hat das Rad nach 26.5 den Weg $v_0 t$ zurückgelegt und die gleiche Strecke auf dem Umfang abgewälzt (fett gezeichnet), so dass der Punkt A unter dem eingezeichneten Winkel („Bogen/Radius“) zu finden ist. Für seine Lage zum Zeitpunkt t lassen sich die Koordinaten

$$x = v_0 t - a \sin \frac{v_0 t}{R} \quad , \quad y = R - a \cos \frac{v_0 t}{R} \quad (26.12)$$

ablesen. Es sind die Komponenten des Ortsvektors \vec{r} , der die Bewegung des Punktes A beschreibt. Seine Bahngeschwindigkeit errechnet sich nach 26.9:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 - 2 \frac{a}{R} \cos \frac{v_0 t}{R}} \quad .$$



Die Bahnkurve, die durch die Parameterdarstellung 26.12 beschrieben wird, heißt *Zykloide* (in Abhängigkeit vom Abmessungsverhältnis $\frac{a}{R}$ verkürzt, spitz oder verlängert). Animationen rollender Räder, die unterschiedliche Zykloiden erzeugen, kann man unter www.TM-aktuell.de sehen¹.

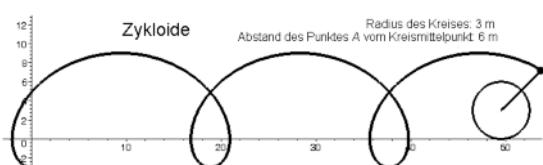


Abbildung 26.7: Bildschirm-Schnappschuss des rollenden Rades mit einem Punkt, der eine verlängerte Zykloide erzeugt

Die Berechnung des vom Punkt A zurückgelegten Weges (Länge der Bahnkurve für eine Umdrehung des Rades) nach 26.11 findet man unter www.TM-Mathe.de (numerische Integration).

¹Der Bildschirm-Schnappschuss der Abbildung 26.7 wurde von der Animation mit einem Maple-Script (im Internet verfügbar) erzeugt, das der Student Thomas Dulz geschrieben hat.

26.2.2 Beschleunigungsvektor, Bahn- und Normalbeschleunigung

Als Maß für die Änderung des Geschwindigkeitsvektors mit der Zeit wird der *Beschleunigungsvektor* \vec{a} als Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit definiert. Für die in einem kartesischen Koordinatensystem beschriebene ebene Bewegung ergibt sich der

Beschleunigungsvektor:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (26.13)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad .$$

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, bei dem sich sowohl der Betrag (Bahngeschwindigkeit v) als auch die Richtung mit der Zeit ändern können, ergibt sich *auch bei konstanter Bahngeschwindigkeit ein Beschleunigungsvektor, wenn die Bewegung nicht geradlinig ist*. Dies wird deutlich, wenn man den als Produkt von Bahngeschwindigkeit und Tangenteneinheitsvektor dargestellten Geschwindigkeitsvektor [26.10](#) nach der Zeit ableitet. Unter Beachtung der Produktregel erhält man:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [v(t) \cdot \vec{e}_t(t)] = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e}_t(t) + v(t) \cdot \frac{d\vec{e}_t}{dt} \quad . \quad (26.14)$$

Der erste Anteil ist die tangential zur Bahnkurve gerichtete Bahnbeschleunigung (mit dem Betrag, der sich auch nach [26.4](#) ergeben würde). Zur Interpretation des zweiten Anteils muss vorab untersucht werden, was für ein Vektor der nach der Zeit abgeleitete Tangenteneinheitsvektor ist. Dazu sollen zunächst zwei Spezialfälle betrachtet werden.

⇒ Sonderfall: Geradlinige Bewegung

Da der Tangenteneinheitsvektor bei der geradlinigen Bewegung konstant ist, gilt:

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_t = a_t \cdot \vec{e}_t$$

($\vec{0}$ ist der Nullvektor). Die Gesamtbeschleunigung ist bei der geradlinigen Bewegung identisch mit der Bahnbeschleunigung.

⇒ Sonderfall: Kreisbewegung

Betrachtet werden zwei sehr dicht benachbarte Lagen eines Punktes, der sich auf einem Kreis mit dem Radius R bewegt ([Abbildung 26.8](#)). Er legt dabei die Strecke $\Delta s = R\Delta\alpha$ zurück, der Tangenteneinheitsvektor ändert seine Richtung um den Winkel $\Delta\alpha$: Der Vektor $\vec{e}_{t,1}$ geht über in den Vektor $\vec{e}_{t,2}$, wobei er sich um $\Delta\vec{e}_t$ ändert. Die Länge des Differenzvektors $\Delta\vec{e}_t$ kann aus dem gleichschenkligen Dreieck abgelesen werden, das er mit den beiden Einheitsvektoren bildet:

$$|\Delta\vec{e}_t| = 2 \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \Delta\alpha \quad .$$

Für den Übergang zum unendlich kleinen Winkel entsprechend $\Delta\alpha \rightarrow d\alpha$ und damit $\Delta\vec{e}_t \rightarrow d\vec{e}_t$ liest man aus der [Abbildung 26.8](#) ab:

- $d\vec{e}_t$ steht senkrecht auf $\vec{e}_{t,1}$ bzw. $\vec{e}_{t,2}$, also senkrecht auf dem Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_t ,
- $d\vec{e}_t$ hat die Länge $d\alpha$,

Damit kann $d\vec{e}_t$ als Produkt eines Einheitsvektors \vec{e}_n (*Normaleneinheitsvektor*, weil er senkrecht auf dem Tangenteneinheitsvektor steht) und seines Betrages $d\alpha$ dargestellt werden:

$$d\vec{e}_t = d\alpha \cdot \vec{e}_n$$

(\vec{e}_n ist zum Kreismittelpunkt gerichtet). Jetzt kann die Frage beantwortet werden, wie die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors nach der Zeit bei der Kreisbewegung zu interpretieren ist (für das differenziell kleine Kreisbogenstück ds wird $ds = R d\alpha$ gesetzt):

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds} v = \frac{d\vec{e}_t}{R d\alpha} v = \frac{v}{R} \vec{e}_n .$$

Wenn dies in 26.14 eingesetzt wird, ergibt sich der

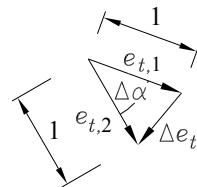
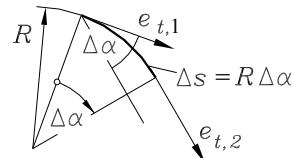


Abbildung 26.8: Die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors nach der Zeit t liefert einen Vektor, der zum Mittelpunkt des Kreises gerichtet ist

Beschleunigungsvektor für die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e}_t(t) + \frac{v^2(t)}{R} \cdot \vec{e}_n(t) = a_t \cdot \vec{e}_t + a_n \cdot \vec{e}_n . \quad (26.15)$$

- ⇒ Die *Tangentialbeschleunigung* (Bahnbeschleunigung) a_t ist immer dann vorhanden, wenn die Bahngeschwindigkeit v nicht konstant ist.
- ⇒ Die *Normalbeschleunigung* $a_n = \frac{v^2}{R}$ ist bei der Kreisbewegung **immer** vorhanden. Sie ist zum Kreismittelpunkt gerichtet.

Für die *allgemeine ebene Bewegung* eines Punktes (Bewegung auf einer beliebigen ebenen Bahn) führt eine entsprechende Überlegung auf eine ähnliche Beziehung, wobei der (konstante) Radius der Kreisbahn durch den (im Allgemeinen veränderlichen) Krümmungsradius ρ der Bahnkurve zu ersetzen ist ($ds = \rho d\alpha$). Dies ist jeweils der Radius des Krümmungskreises eines Kurvenpunktes. Der Krümmungskreis hat mit der Kurve im gemeinsamen Punkt die Koordinaten, die Tangente (Anstieg y') und die 2. Ableitung y'' gemeinsam².

Beschleunigungsvektor eines Punktes auf einer ebenen Bahn:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dot{v} \cdot \vec{e}_t(t) + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{e}_n(t) , \\ \rho &= \left| \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}} \right| . \end{aligned} \quad (26.16)$$



²Unter dem Stichwort „Krümmungskreis, Krümmungsradius“ findet man auf der Internet-Site www.TM-Mathe.de eine ausführliche Darstellung dieses Themas mit Herleitung der Formeln und einer Animation.

- ⇒ Der Beschleunigungsvektor der Bewegung eines Punktes setzt sich aus zwei senkrecht aufeinander stehenden Komponenten zusammen: Die Bahnbeschleunigung mit dem Betrag $a_t = \ddot{v}$ ist wie die Geschwindigkeit tangential zur Bahnkurve gerichtet (Tangentialbeschleunigung), die Normalbeschleunigung mit dem Betrag $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ist senkrecht dazu zum Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve gerichtet.
- ⇒ Die Bahnbeschleunigung hat den Wert Null, wenn die Bewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit erfolgt.
- ⇒ Die Normalbeschleunigung ist bei Bewegung auf einer beliebigen Bahnkurve nur dann gleich Null, wenn die Bahn nicht gekrümmmt ist (z. B. bei geradliniger Bewegung oder in Wendepunkten). Bei Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn ist die Normalbeschleunigung stets ungleich Null.
- ⇒ Der Betrag der Gesamtbeschleunigung kann nach

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (26.17)$$

berechnet werden. Dies ergibt den gleichen Wert wie die Berechnung des Betrages des Beschleunigungsvektors nach 26.13. Die Gesamtbeschleunigung ist stets zur konkaven Seite der Bahn gerichtet (bei verschwindender Normalbeschleunigung tangential zur Bahnkurve).

Beispiel:

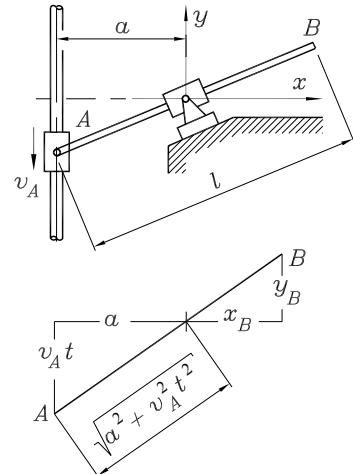
Ein Gleitstein A bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_A auf einer vertikalen Führung. Er nimmt die Stange $A-B$ mit, die durch eine drehbar gelagerte Hülse gleitet. Bei $t = 0$ nimmt die Stange eine horizontale Lage ein.

Es sollen die Bahnkurve, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes B ermittelt werden.

Gegeben: a , l , v_A , $l = 3a$.

Bezüglich des skizzierten Koordinatensystems wird die Lage des Punktes B durch die Koordinaten x_B und y_B beschrieben. Mit dem Weg $v_A t$ nach 26.5, den der Gleitstein A bis zum Zeitpunkt t zurückgelegt hat, und den gegebenen geometrischen Größen liest man aus nebenstehender Skizze z. B. ab:

$$\frac{x_B}{a} = \frac{l - \sqrt{a^2 + v_A^2 t^2}}{\sqrt{a^2 + v_A^2 t^2}}$$



(Strahlensatz). Eine entsprechende Beziehung (ebenfalls nach dem Strahlensatz) findet sich für y_B , und damit sind die Komponenten des Ortsvektors von B (Parameterdarstellung der Bahnkurve, siehe auch www.TM-aktuell.de) bekannt:

$$x_B = a \left(\frac{l}{\sqrt{a^2 + v_A^2 t^2}} - 1 \right) \quad , \quad y_B = v_A t \left(\frac{l}{\sqrt{a^2 + v_A^2 t^2}} - 1 \right) \quad .$$

Durch Differenzieren nach der Zeit t erhält man die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors und des Beschleunigungsvektors:

$$v_{Bx} = \dot{x}_B = -\frac{al v_A^2 t}{(a^2 + v_A^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} , \quad v_{By} = \dot{y}_B = v_A \left[\frac{a^2 l}{(a^2 + v_A^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right] ,$$

$$a_{Bx} = \ddot{x}_B = -\frac{al v_A^2}{(a^2 + v_A^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3v_A^2 t^2}{a^2 + v_A^2 t^2} - 1 \right) , \quad a_{By} = \ddot{y}_B = -\frac{3a^2 l v_A^3 t}{(a^2 + v_A^2 t^2)^{\frac{5}{2}}} .$$

Die Darstellung der Bahnkurve (**Abbildung 26.9**) zeigt die auf die Länge a bezogenen Koordinaten des Punktes B für $l = 3a$ entsprechend

$$\frac{x_B}{a} = \frac{\frac{l}{a}}{\sqrt{1 + \frac{v_A^2 t^2}{a^2}}} - 1 ,$$

$$\frac{y_B}{a} = \frac{v_A t}{a} \left(\frac{\frac{l}{a}}{\sqrt{1 + \frac{v_A^2 t^2}{a^2}}} - 1 \right)$$

für einen Bereich der „dimensionslosen Zeit“ $\bar{t} = \frac{v_A}{a} t$ von

$$-2 \leq \bar{t} = \frac{v_A}{a} t \leq +2 .$$

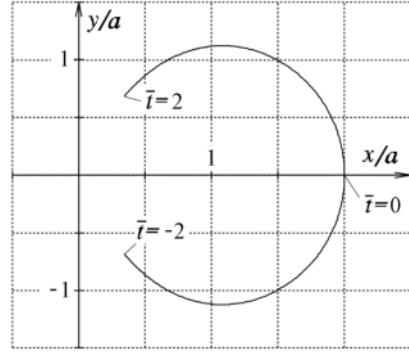


Abbildung 26.9: Bahnkurve

Für den Zeitpunkt $t = 0$ (horizontale Lage der Stange A-B) soll versucht werden, die Ergebnisse anschaulich zu deuten:

$$\vec{r}_B(t=0) = \begin{bmatrix} l-a \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{v}_B(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l-a}{a} v_A \end{bmatrix} , \quad \vec{a}_B(t=0) = \begin{bmatrix} -\frac{l}{a^2} v_A^2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Der Ortsvektor enthält die Koordinaten des Punktes B (Lage auf der x -Achse). Die verschwindende Horizontalkomponente der Geschwindigkeit $v_{Bx} = 0$ bestätigt die vertikale Tangente an die Bahnkurve zu diesem Zeitpunkt. Die (positive, also wie die y -Achse nach oben gerichtete) Geschwindigkeitskomponente v_{By} enthält das „Übersetzungsverhältnis“ $\frac{l-a}{a}$ für die horizontale Lage.

Die horizontale Komponente der Beschleunigung a_{Bx} kann (weil sie senkrecht zur Bahnkurve gerichtet ist) nur die Normalbeschleunigung sein, die sich auf anderem Wege bestätigen lässt. Nach 26.16 wird der Krümmungsradius der Bahn für $t = 0$ mit den bereits berechneten Größen aufgeschrieben. Bahngeschwindigkeit und Krümmungsradius liefern dann die Normalbeschleunigung:

$$\rho(t=0) = \left| \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \right|_{t=0} = l \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 \Rightarrow a_n(t=0) = \frac{v_B^2(t=0)}{\rho(t=0)} = \frac{l}{a^2} v_A^2 .$$

Man erhält auf diesem Wege den Betrag der Normalbeschleunigung, der (wie erwartet) in der vektoriellen Darstellung den gleichen Wert hat. Das Minuszeichen dort zeigt an, dass die Normalbeschleunigung zur konkaven Seite der Bahnkurve gerichtet ist.

26.2.3 Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung

Die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn ist ein wichtiger Spezialfall der allgemeinen Bewegung des Punktes. Zur Beschreibung der Lage des Punktes auf der Kreisbahn ist die Angabe einer Winkelkoordinate $\varphi(t)$ meist besser geeignet als die Wegkoordinate $s(t)$ (**Abbildung 26.10**) und wohl immer günstiger als die Beschreibung durch einen Ortsvektor.

Wenn R der Radius der Kreisbahn ist, dann gilt

$$\begin{aligned} s(t) &= R\varphi(t) \quad , \\ v(t) &= \dot{s}(t) = R\dot{\varphi}(t) \quad , \\ a_t(t) &= \ddot{v}(t) = R\ddot{\varphi}(t) \quad . \end{aligned} \quad (26.18)$$

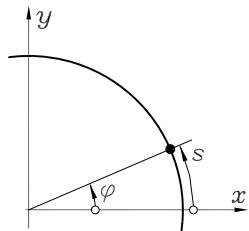


Abbildung 26.10: Wegkoordinate s und Winkelkoordinate φ

Es ist üblich und zweckmäßig, analog zur Winkelkoordinate $\varphi(t)$ auch eine *Winkelgeschwindigkeit* und eine *Winkelbeschleunigung* zur Beschreibung der Bewegung eines Punktes auf der Kreisbahn zu definieren:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit:} \quad \omega(t) = \dot{\varphi}(t) \quad , \quad (26.19)$$

$$\text{Winkelbeschleunigung:} \quad \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad . \quad (26.20)$$

- ⇒ Die Winkelgeschwindigkeit wird üblicherweise in s^{-1} angegeben, die Winkelbeschleunigung in s^{-2} .
- ⇒ Eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ bedeutet, dass sich der Winkel in einer Sekunde um 1 rad vergrößert ($1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$).
- ⇒ In der technischen Praxis wird bei Drehbewegungen gern die *Drehzahl* n (im Allgemeinen: Anzahl der Umdrehungen pro Minute) zur Beschreibung der Geschwindigkeit einer Rotationsbewegung verwendet. Es gilt ($1 \text{ Umdrehung} \rightarrow \text{Winkel } 2\pi$)

$$\omega = 2\pi n \quad , \quad (26.21)$$

wobei sich ω mit der gleichen Dimension wie n ergibt (gewarnt wird vor den Fehlerquellen bei Verwendung so genannter „Praktiker“-Formeln wie $\omega = \frac{\pi n}{30}$ oder gar $\omega \approx \frac{n}{10}$, in denen ω und n unterschiedliche Dimensionen haben).

- ⇒ Durch die Winkelbeschleunigung (als Maß für die Änderung der Winkelgeschwindigkeit) wird entsprechend $a_t = R\alpha$ nur die Bahnenbeschleunigung (als Maß für die Änderung der Bahngeschwindigkeit) repräsentiert. Natürlich gibt es bei einer Kreisbewegung immer (auch bei konstanter Winkelgeschwindigkeit) eine Normalbeschleunigung

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \quad . \quad (26.22)$$

- ⇒ Für den sehr wichtigen Sonderfall **konstanter Winkelgeschwindigkeit** berechnet sich der seit dem Beginn der Zeitzählung $t = 0$ zurückgelegte Winkel φ nach:

$$\varphi = \omega_0 t \quad (\omega_0 = \text{konstant}) \quad . \quad (26.23)$$

Während die meisten Menschen eine recht gute Vorstellung von Geschwindigkeiten haben (zumindest in den Größenordnungen, die von Autos erreicht werden), ist die Vorstellungskraft für Beschleunigungen im Allgemeinen nicht sehr groß (Autohersteller wissen das und verstecken den Begriff der Beschleunigung in einer Geschwindigkeitsaussage: „Beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 8,3 s“). Deshalb werden in den Beispielen 1 bis 4 einige Zahlenwerte berechnet.

Beispiel 1: Ein Pkw beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 8,3 s. Wie groß ist die mittlere Beschleunigung?

Nach 26.2 berechnet man:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 - 0 \text{ km}}{8,3 - 0 \text{ s}} = \frac{100 \cdot 1000 \text{ m}}{8,3 \cdot 3600 \text{ s}^2} = 3,35 \text{ m/s}^2 .$$

Dies ist für ein anfahrendes Auto ein beachtlicher Wert. Beim freien Fall (ohne Luftwiderstand) allerdings tritt die Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ auf, ein Wert, der von keinem Pkw erreicht wird (es sei denn, er durchbricht ein Brückengeländer und geht zum freien Fall über).

Beispiel 2: Ein Pkw fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 40 \text{ km/h}$ eine Kurve mit dem Radius $R = 20 \text{ m}$. Wie groß ist die Normalbeschleunigung?

Nach 26.22 berechnet man:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{40^2 \text{ (km)}^2}{20 \text{ h}^2 \text{ m}} = \frac{40^2 \cdot 10^6 \text{ m}^2}{20 \cdot 3600^2 \text{ m s}^2} = 6,173 \text{ m/s}^2 .$$

Auch dieses Ergebnis ist repräsentativ für die meisten technischen Bewegungsabläufe: Die Normalbeschleunigungen sind im Allgemeinen deutlich größer als die Bahnbeschleunigungen. Das folgende Beispiel zeigt allerdings eine Ausnahme von dieser Regel.

Beispiel 3: Bei einem Crash-Test prallt ein Pkw mit 50 km/h gegen eine starre Wand. Nach 80 ms sind Fahrzeug und Dummies auf die Geschwindigkeit 0 abgebremst. Wie groß ist die mittlere Beschleunigung während des Aufpralls?

Aus der Geschwindigkeitsdifferenz und der Abbremszeit ergibt sich nach 26.2:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 50 \text{ km}}{0,08 - 0 \text{ s}} = -\frac{50 \cdot 10^3 \text{ m}}{0,08 \cdot 3600 \text{ s}^2} = -173,6 \text{ m/s}^2 .$$

Beispiel 4: Ein Pkw-Motor läuft mit einer Drehzahl $n = 5000 \text{ min}^{-1}$. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω ? Welche Normalbeschleunigung a_n erfährt ein Punkt auf der Kurbelwelle, der $R = 6 \text{ cm}$ von der Drehachse entfernt ist?

Die Winkelgeschwindigkeit wird nach 26.21 berechnet:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 5000 \cdot \frac{1}{60} = 523,6 \text{ s}^{-1} .$$

Damit ergibt sich die sehr große Normalbeschleunigung für den Punkt auf der Kurbelwelle:

$$a_n = R \omega^2 = 16449 \text{ m/s}^2 .$$

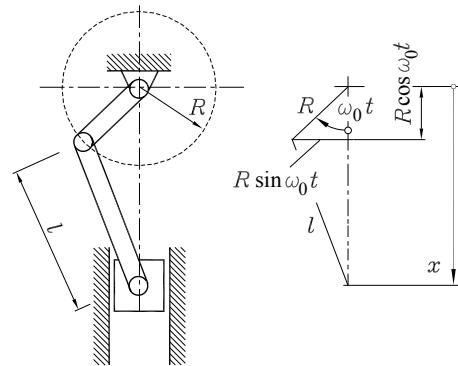
26.2.4 Koppelgetriebe

Koppelgetriebe wandeln eine vorgegebene (Antriebs-)Bewegung in eine gewünschte Bewegung um. In den weitaus meisten praktischen Fällen ist der Antrieb eine Rotation um einen festen Punkt mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Ein besonders einfacher Fall ist die Schubkurbel³, bei der eine kreisförmige Bewegung in eine geradlinige Bewegung umgewandelt wird (Beispiel: Kolbenpumpe), der häufigste Anwendungsfall ist dafür allerdings gerade die in Verbrennungsmotoren realisierte Umwandlung der geradlinigen Bewegung des Kolbens in die Rotation der Kurbelwelle.

Beispiel 1: Die skizzierte Schubkurbel (siehe www.TM-aktuell.de) wird mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 angetrieben. Bei $t = 0$ soll die Kurbel ihre tiefste Stelle einnehmen. Gesucht sind die Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$, die die Lage, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens beschreiben.

Gegeben: $R = 12 \text{ cm}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega_0 = 2 \text{ s}^{-1}$.

Rechts ist eine ausgelenkte Lage mit den wichtigsten Abmessungen skizziert. Die Kurbel hat sich entsprechend 26.23 um den Winkel $\omega_0 t$ gedreht.



Die durch die Koordinate x beschriebene Lage des Kolbens ergibt sich aus der Summe der beiden Katheten zweier rechtwinkliger Dreiecke:

$$x(t) = R \cos \omega_0 t + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \omega_0 t} .$$

Durch Differenzieren dieser Funktion kommt man zu $v(t)$ und $a(t)$:



$$v(t) = -R\omega_0 \sin \omega_0 t - \frac{R^2 \omega_0 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t}{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \omega_0 t}} = -R\omega_0 \left(\sin \omega_0 t + \frac{\lambda}{2} \frac{\sin 2\omega_0 t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega_0 t}} \right) ,$$

$$a(t) = -R\omega_0^2 \left(\cos \omega_0 t + \lambda \frac{\cos 2\omega_0 t + \lambda^2 \sin^4 \omega_0 t}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \omega_0 t)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{R}{l} .$$

An dem einfachen Beispiel werden die typischen Probleme der Untersuchung von Koppelgetrieben deutlich, die allerdings bei fast allen kinematischen Problemen ähnlich sind: Die Beziehungen sind hochgradig nichtlinear. Das Differenzieren des Weg-Zeit-Gesetzes mag schon bei diesem Beispiel lästig sein, immerhin konnte man auf diesem Wege $v(t)$ und $a(t)$ ermitteln, weil es möglich war, $x(t)$ als Funktion aufzuschreiben (und gegebenenfalls kann man das Differenzieren einem symbolisch rechnenden Programm übertragen).

³ Als Beispiel 1 wird hier die einfache Schubkurbel behandelt, bei der der Mittelpunkt der Kurbel auf der Geraden liegt, auf der sich der Kolben bewegt. Im Abschnitt 27.4 findet man den allgemeineren Fall der exzentrischen Schubkurbel.

Abbildung 26.11 zeigt die drei kinematischen Diagramme (erzeugt mit Matlab). Es wurden sogar fünf Kurven gezeichnet, $v(t)$ und $a(t)$ wurden zusätzlich durch numerisches Differenzieren gewonnen. Die Deckungsgleichheit der Kurven ist ein ziemlich verlässliches Indiz für die Richtigkeit.

Dass zur Kontrolle numerisch (und nicht symbolisch) differenziert wurde, hat einen guten Grund:

Wenn die Aufgaben auch nur unwesentlich komplizierter werden (nachfolgende Beispiele), kann die Bahnkurve nur noch punktweise ermittelt werden, so dass ohnehin nur numerisch differenziert werden kann.

Beispiel 2:

Eine so genannte *Viergelenkkette* besteht aus zwei Gliedern AB bzw. CD , die an jeweils einem Endpunkt (A bzw. D) fixiert sind (je nach Bewegungsmöglichkeit als *Kurbeln* oder *Schwingen* bezeichnet) und über den jeweils anderen Punkt über eine *Koppel* BC verbunden sind. Hier soll das Glied AB als Antrieb betrachtet werden, dessen Lage durch die Angabe eines Winkel φ bestimmt wird.

Gegeben sind die Koordinaten x_A und y_A des Punktes A im skizzierten Koordinatensystem und die Längen a , b und c der Getriebeglieder, gesucht sind die Koordinaten der Punkte B und C in Abhängigkeit von φ .

Die Koordinaten des Punktes B können unmittelbar aus der **Abbildung 26.12** abgelesen werden:

$$x_B = x_A - a \cos \varphi \quad , \quad y_B = y_A + a \sin \varphi \quad .$$

Mit den bekannten Punkten B und D findet man den Punkt C als Schnittpunkt der beiden Kreise um diese Punkte mit den Radien b bzw. c , und damit beginnen die typischen Schwierigkeiten. Die Kreisgleichungen können noch problemlos formuliert werden:

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = b^2 \quad , \quad x^2 + y^2 = c^2 \quad .$$

Man stellt eine Gleichung nach y um, setzt das Ergebnis in die andere ein, und nach etwas mühsamer Rechnung erhält man eine quadratische Gleichung für x :

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = -\frac{2x_B L^2}{x_B^2 + y_B^2} \quad , \quad q = \frac{L^4 - c^2 y_B^2}{x_B^2 + y_B^2} \quad , \quad L^2 = \frac{1}{2}(x_B^2 + y_B^2 - b^2 + c^2) \quad .$$

Bei der Lösung dieser Gleichung können folgende Fälle auftreten:

- Man erhält zwei reelle Lösungen. Dies sind die x -Werte der Punkte C und \bar{C} (siehe **Abbildung 26.12**), die für die Stellung φ möglich sind.

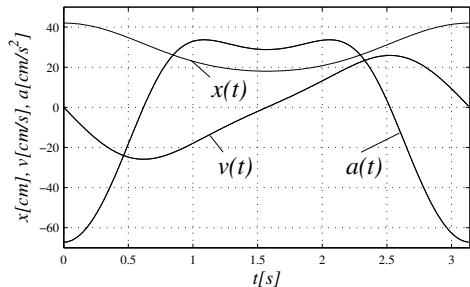


Abbildung 26.11: Kinematische Diagramme

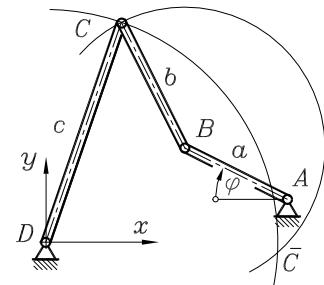


Abbildung 26.12: Viergelenkkette

- Man erhält eine (Doppel-)Lösung. Dann berühren sich die beiden Kreise nur. B , C und D liegen in diesem Fall auf einer Geraden.
- Es ergibt sich keine reelle Lösung, die Kreise schneiden sich nicht. Dann hat das Getriebe entweder eine unmögliche Geometrie, oder die durch φ beschriebene Stellung ist unmöglich.

Für den Fall zweier reeller Lösungen x_1 und x_2 müssen noch die zugehörigen y -Werte durch Einsetzen in die Kreisgleichungen ermittelt werden. Wegen der Doppeldeutigkeit der Wurzel erhält man zu jedem x -Wert jeweils zwei y -Werte, die die Kreisgleichung erfüllen. Deshalb müssen die y -Werte für beide Kreisgleichungen berechnet werden, und von den vier Wertepaaren sind die beiden x - y -Paare die Koordinaten der Punkte C und \bar{C} , die für beide Kreise gleich sind.

Schließlich muss noch entschieden werden, ob die Koordinaten für C oder \bar{C} verwendet werden sollen. Weil die gesamte beschriebene Rechnung für jede Stellung φ ausgeführt werden muss, wird man den Punkt wählen, der näher an dem entsprechenden Punkt der vorhergehenden Stellung liegt. Für den Sonderfall nur einer reellen Lösung muss speziell überlegt werden, denn aus dieser Speziallage (B , C und D liegen auf einer Geraden) ist die weitere Bewegung in beiden Richtungen möglich. Man wird dann die Entscheidung so fällen, dass die Bewegungsrichtung beibehalten wird.

Das Dilemma kann so formuliert werden: Der gesamte gerade beschriebene Entscheidungsprozess stellt für die Handrechnung gar kein Problem dar. Man sieht sofort, welche Lösung zu verwenden ist, und es ist auch klar, wie es nach einer Speziallage weitergeht. Bei der Computerrechnung sind aber alle Entscheidungen vorab zu programmieren, was nicht nur recht schwierig ist, es bleibt auch immer aus numerischen Gründen kritisch, denn die Speziallagen werden niemals genau getroffen, was häufig zu Überraschungen bei der Fortsetzung der Rechnung führt.

Aber natürlich gibt es zur Computerrechnung keine vernünftige Alternative, weil im Allgemeinen nicht nur die Bewegung der Viergelenkkette interessiert, sondern das Bewegungsgesetz von so genannten *Koppelpunkten* (Punkte, die mit einem Getriebeglied, vorzugsweise der Koppel, starr verbunden sind).

Die Abbildung 26.13 zeigt eine Viergelenkkette mit einem Koppelpunkt K , der mit der Koppel BC starr verbunden ist. Um die (in der Abbildung zu sehende) *Koppelkurve* zu ermitteln, müssen vorab die Koordinaten der Punkte B und C nach dem oben beschriebenen Algorithmus berechnet werden.

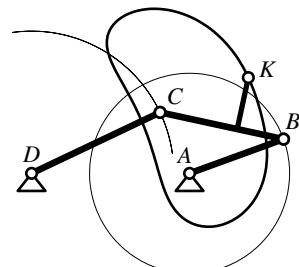


Abbildung 26.13: Kurbelschwingung mit Koppelpunkt K

In Abhängigkeit von den Abmessungen der drei Glieder und der Lage der beiden Lagerpunkte können die beiden gelagerten Glieder in ihren Bewegungsmöglichkeiten eingeschränkt sein. Man nennt sie *Kurbeln*, wenn sie eine komplette Kreisbewegung ausführen können, ansonsten *Schwingen*:



⇒ Die Abbildung 26.13 zeigt eine so genannte *Kurbelschwinge*, weil die (Antriebs-)Kurbel AB bei ihrem kompletten Umlauf eine schwingende Bewegung des Gliedes DC erzeugt (die von den Punkten B bzw. C durchlaufenen Bahnen sind in der Abbildung angedeutet).

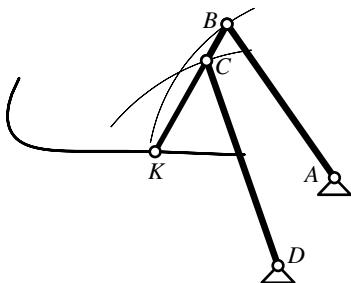


Abbildung 26.14: Doppelschwinge

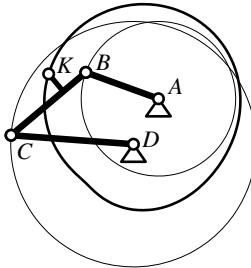


Abbildung 26.15: Doppelkurbel

☞ Die Abbildung 26.14 zeigt eine so genannte *Doppelschwinge*, weil bei dieser geometrischen Konfiguration beide gelagerten Glieder nur schwingende Bewegungen ausführen können (die von den Gelenken B bzw. C erreichbaren Punkte sind als Bahnkurven eingezeichnet).

Dieses Koppelgetriebe, bei der der mit der Koppel BC starr verbundene Punkt K auf der durch B und C definierten Geraden liegt, ist mit den hier dargestellten Abmessungen ein Beispiel für das Erzeugen einer speziell gewünschten Bahnkurve. Man erkennt, dass diese in einem gewissen Bereich eine fast ideale horizontale Gerade ist. Das wird für so genannte *Wippträne* ausgenutzt, bei denen die anhängende Last bei Transport in der Horizontalen in diesem Bereich weder gehoben noch gesenkt wird, so dass für diese Bewegung nur eine minimale Antriebsleistung erforderlich ist.

☞ Die Abbildung 26.15 zeigt eine *Doppelkurbel*, weil beide gelagerten Glieder eine komplett Kreisbewegung ausführen können. An diesem Beispiel wird auch gezeigt, dass die Bewegung (und damit auch die Bahnkurve eines Koppelpunktes) von der Anfangsstellung abhängig ist. Für die beiden völlig identischen Getriebe sind zwei Anfangstellungen möglich (entsprechend der beiden Punkte C und \bar{C} , wie im Beispiel 2 für die allgemeine Viergelenkkette gezeigt), die zu völlig unterschiedlichen Bewegungen führen. Man beachte, dass die Antriebskurbel AB in beiden Skizzen exakt die gleiche Lage einnimmt.

Weil die Ergebnisse für die Bahnkurven (z. B. die Komponenten $x_K(\varphi)$ und $y_K(\varphi)$ des Ortsvektors \vec{r}_K eines Koppelpunktes) nur punktweise ermittelt werden können, müssen alle weiteren gewünschten Ergebnisse numerisch berechnet werden. Die Komponenten des Vektors der Bahngeschwindigkeit \dot{x} und \dot{y} können nach der im Kapitel 18 auf Seite 275 angegebenen Differenzenformel für die erste Ableitung berechnet werden. Der Betrag der Bahngeschwindigkeit folgt dann aus 26.9.

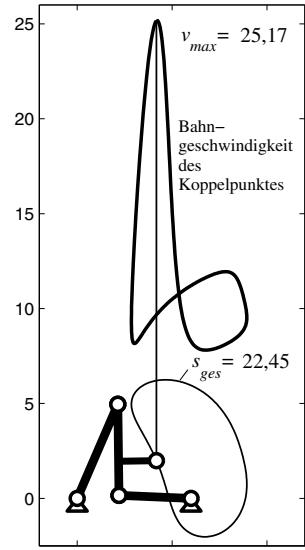
Abbildung 26.16: v_K , v_{max} , s_{ges}

Abbildung 26.16 (erzeugt mit Matlab) zeigt die Bahngeschwindigkeit für die Kurbelschwingung nach **Abbildung 26.13**, die hier für den Moment der maximalen Geschwindigkeit des Koppelpunktes

punktes dargestellt ist. Um den bei einem kompletten Umlauf zurückgelegten Weg zu berechnen, musste nach 26.11 integriert werden, was natürlich auch nur numerisch möglich ist. Weil die Bahnkurve punktweise bekannt ist, kann man allerdings auch die Länge des von den Punkten definierten Polygons berechnen.

Die Analyse der Bewegung solcher Getriebe birgt eine ganze Reihe von Fehlermöglichkeiten. Für eine besonders wirksame Kontrolle der durchgeföhrten Rechnung bieten sich deshalb Animationen an, bei denen man sofort erkennt, ob die gewünschte Bewegung auch berechnet wurde. Unter www.TM-aktuell.de findet man deshalb auch die „bewegten Bilder“ dieser Getriebe.

Schon mit Viergelenkketten sind interessante und für die technische Praxis wichtige Bewegungen zu erzeugen (siehe den Wippkranmechanismus in Abbildung 26.14). Wenn an die bewegten Punkte einer Viergelenkkette und/oder an Koppelpunkte weitere Getriebeglieder angeschlossen werden, sind praktisch beliebige Bewegungen zu realisieren. Allerdings ist die Aufgabe, eine Bewegung mit ganz bestimmten vorgegebenen Eigenschaften zu erzeugen (*Getriebesynthese*), sehr schwierig. Nachfolgend wird ein besonders gelungenes Beispiel vorgestellt.

Beispiel 3:

Der niederländische Künstler THEO JANSEN stellt Laufmaschinen her, die sich auf zahlreichen Beinen (vom Wind angetrieben) auf Sand sehr geschickt fortbewegen⁴.

Die Abbildung 26.17 zeigt den Mechanismus eines Beins eines solchen „Strandbeests“ maßstäblich mit den von Jansen gefundenen Abmessungen. Fixpunkte sind die beiden Gelenke O_1 und O_2 . Angetrieben wird der Mechanismus durch Drehung der Kurbel O_1A , die gleich zwei Viergelenkketten (O_1ABO_2 und O_1ACO_2) bewegt. Von der Schwinge O_2B der oberen Kurbelschwinge wird der Koppelpunkt D mitgenommen und dieser und der Punkt C der unteren Kurbelschwinge bestimmen die Lage des Punktes E . Schließlich ist mit dem Glied CE der Punkt F starr verbunden, dessen Bahnkurve die Bewegung des „Fusses“ ist.

Die Analyse dieses Mechanismus ist mit dem Algorithmus möglich, der ausführlich im Beispiel 2 beschrieben wurde, allerdings muss er fünfmal nacheinander angewendet werden, um die Lage eines Punktes F zu bestimmen.

Die Rechnung mit allen Entscheidungen, die am Beispiel 2 beschrieben wurden, ist also etwas aufwendiger. Das Ergebnis findet man als Animation des in Abbildung 26.17 dargestellten Mechanismus unter www.TM-aktuell.de. Die Bahnkurve des Punktes F ist auch in Abbildung 26.17 zu sehen. Man erkennt im unteren Bereich eine fast ideale Gerade. Dies ist der Bereich, in dem sich der Fuß des „Strandbeests“ am Boden befindet.

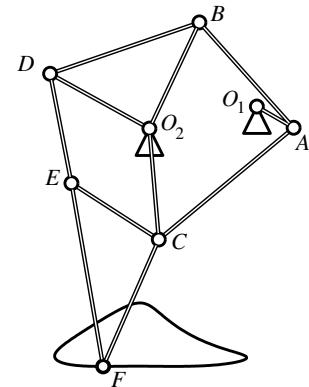


Abbildung 26.17: Mechanismus des Beins eines *Strandbeests*



⁴Der Künstler nennt seine beeindruckenden Werke *Strandbeesten* („Strandtiere“). Ein Besuch der Internet-Site www.strandbeest.com lohnt sich.

Mindestens so wichtig wie die Bahnkurve ist der Geschwindigkeitsverlauf: Der Fuß sollte sich während des Bodenkontakts mit möglichst konstanter Geschwindigkeit bewegen (weil natürlich alles relativ ist, bewegt sich beim laufenden Strandbeest während des Bodenkontakts des Fußes nicht dieser sondern der gesamte Mechanismus). Während des „Schritts nach vorn“ (der Fuß ist in der Luft) sollte dagegen die Geschwindigkeit deutlich größer sein.

Die Abbildung 26.18 zeigt den Verlauf der Bahngeschwindigkeit des Punktes F während eines kompletten Umlaufs der Kurbel O_1A (ein „Schritt“).

Man erkennt, dass die gewünschten Eigenschaften ausgezeichnet erfüllt werden. So richtig lässt sich allerdings die Realisierung der „schreitenden Bewegung“ erst beurteilen, wenn man sie als Animation des Mechanismus oder als Teil des sich bewegenden Strandbeests sieht.

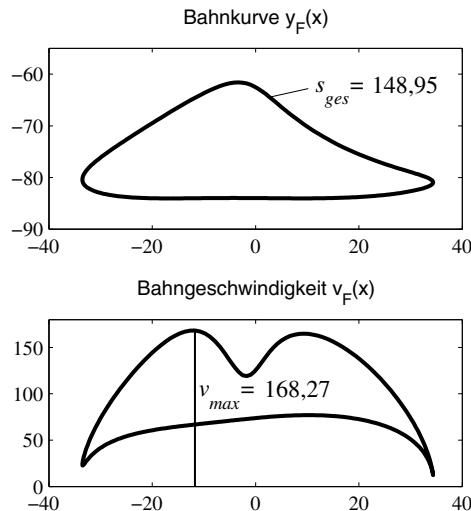


Abbildung 26.18: Bahnkurve und Geschwindigkeitsverlauf

26.2.5 Darstellung der Bewegung mit Polarkoordinaten

Die Willkürlichkeit, die der Komponentendarstellung eines Vektors bei Wahl eines kartesischen Koordinatensystems mit festen (zeitlich unveränderlichen) Einheitsvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y anhaftet, war der Grund dafür, im Abschnitt 26.2.2 die Beschleunigung in ihre „natürlichen Komponenten“ (tangential und normal zur Bahnkurve) zu zerlegen. Bei der Verwendung dieser *natürlichen Koordinaten* musste beachtet werden, dass die Einheitsvektoren \vec{e}_t und \vec{e}_n ständig ihre Richtung ändern (zeitabhängig sind), was beim Differenzieren nach der Zeit beachtet werden musste.

Eine ähnliche Situation liegt vor, wenn die Bewegung mit Hilfe von Polarkoordinaten beschrieben wird, was für eine Reihe von Problemen vorteilhaft sein kann. Zur Beschreibung der Lage des bewegten Punktes wird sein Abstand $r(t)$ von einem zu wählenden festen Punkt und der Winkel $\varphi(t)$ bezüglich einer Bezugsgesetzen benutzt (Abbildung 26.19). Mit dem Einheitsvektor \vec{e}_r , der stets die Richtung des Ortsvektors hat, kann der Ortsvektor in der Form

$$\vec{r}(t) = r(t) \cdot \vec{e}_r(t) \quad (26.24)$$

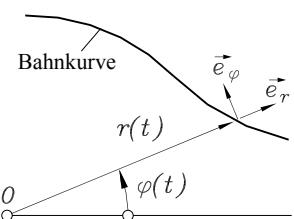


Abbildung 26.19: Polarkoordinaten

angegeben werden. Die Koordinate $\varphi(t)$ steckt bei dieser Darstellung in dem Einheitsvektor \vec{e}_r . Da Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor nicht die Richtung von \vec{e}_r haben, wurde in die Skizze auch gleich der zweite erforderliche Einheitsvektor \vec{e}_φ eingezeichnet.

Um aus 26.24 zum Geschwindigkeitsvektor zu kommen, muss geklärt werden, was aus \vec{e}_r beim Ableiten nach der Zeit wird. Die Abbildung 26.20 zeigt, wie sich für zwei eng benachbarte Punkte (φ ändert sich um $\Delta\varphi$) der Einheitsvektor \vec{e}_r um $\Delta\vec{e}_r$ ändert. $\Delta\vec{e}_r$ steht senkrecht auf \vec{e}_r (und hat damit die Richtung von \vec{e}_φ).

Die Länge von $\Delta\vec{e}_r$ kann für sehr kleine Winkel $\Delta\varphi$ (im rechtwinkligen Dreieck mit $\tan \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ und dem Einheitsvektor als Kathete mit der Länge 1) mit $\Delta\varphi$ angegeben werden, so dass der Zuwachs von \vec{e}_r als

$$\Delta\vec{e}_r = \Delta\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

aufgeschrieben werden kann.

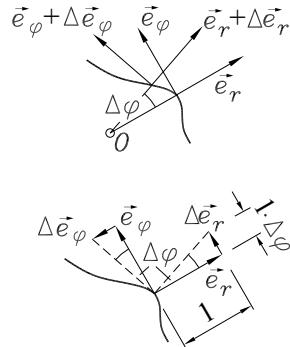


Abbildung 26.20: Einheitsvektoren für Polarkoordinaten

Entsprechend liest man ab, dass die Änderung von \vec{e}_φ gerade die entgegengesetzte Richtung von \vec{e}_r hat, die Länge von $\Delta\vec{e}_\varphi$ kann (wie die Länge von $\Delta\vec{e}_r$) als $\Delta\varphi$ angenommen werden, und für $\Delta\vec{e}_\varphi$ gilt also:

$$\Delta\vec{e}_\varphi = -\Delta\varphi \cdot \vec{e}_r .$$

Division durch $\Delta\varphi$ und der Grenzübergang $\Delta\varphi \rightarrow 0$ liefern die Ableitungen der Einheitsvektoren nach φ und damit auch nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} &= \vec{e}_\varphi & \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \dot{\varphi} , \\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} &= -\vec{e}_r & \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\vec{e}_r \dot{\varphi} . \end{aligned} \quad (26.25)$$

Nun kann der Ortsvektor 26.24 nach der Zeit t abgeleitet werden, und man erhält unter Beachtung von 26.25

Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi , \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r) \cdot \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi . \end{aligned} \quad (26.26)$$

- ⇒ Der **Sonderfall $r = \text{konstant}$ (Kreisbewegung)** ist in diesen Formeln enthalten (für die Kreisbewegung sind Polarkoordinaten die natürlichen Koordinaten). Man erkennt die Bahngeschwindigkeit $r\dot{\varphi}$, die Bahnbeschleunigung $r\ddot{\varphi}$ und die Normalbeschleunigung $r\dot{\varphi}^2$, deren Minuszeichen anzeigen, dass sie dem Einheitsvektor \vec{e}_r entgegengesetzt gerichtet ist.
- ⇒ In Erweiterung der Begriffe für die Kreisbewegung werden auch für die allgemeine Bewegung $\dot{\varphi}$ als Winkelgeschwindigkeit und $\ddot{\varphi}$ als Winkelbeschleunigung bezeichnet.
- ⇒ Man kann sich eine in **kartesischen Koordinaten** beschriebene allgemeine Bewegung als Überlagerung von zwei (rechtswinklig zueinander verlaufenden) geradlinigen Bewegungen vorstellen (wie z. B. bei der Fahrt eines Brückenkran, bei dem sich gleichzeitig die Laufkatze quer zur Fahrtrichtung bewegt).

Analog dazu darf man sich eine mit **Polarcoordinaten** beschriebene Bewegung als Überlagerung einer geradlinigen Bewegung und einer Drehbewegung vorstellen (Beispiel: Ein Baukran dreht sich und die Laufkatze bewegt sich nach außen). Dementsprechend findet man in 26.26 den Geschwindigkeitsanteil \dot{r} und den Beschleunigungsanteil \ddot{r} der geradlinigen Bewegung und die bereits diskutierten Anteile der Kreisbewegung. Eine gewisse Sonderstellung nimmt der Beschleunigungsanteil $2\dot{r}\dot{\varphi}$ ein. Für das „Baukran-Beispiel“ würde also neben den bekannten Anteilen noch eine zusätzliche Beschleunigung auch dann auftreten, wenn die Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ erfolgt und die Laufkatze sich mit konstanter Geschwindigkeit \dot{r} nach außen bewegt. Die beschleunigende Wirkung entsteht dadurch, dass sich die Laufkatze in Richtung von Kreisbahnen mit großem Umfang (und damit größerer Bahngeschwindigkeit) bewegt. Dieser etwas schwierige Sachverhalt wird im Abschnitt 27.2 ausführlicher diskutiert.

Beispiel:

Für den als Beispiel im Abschnitt 26.2.2 mit kartesischen Koordinaten untersuchten Mechanismus soll die Bahnkurve in Polarkoordinaten formuliert werden.

Gegeben: a , l , $v_A = \text{konstant}$.

Aus dem Bild der Aufgabenstellung liest man ab:

$$r(\varphi) = l - \frac{a}{\cos \varphi}$$

(siehe auch www.TM-aktuell.de).

Mehr Information enthält natürlich die Parameterdarstellung. Wenn die Zeitzählung mit $t = 0$ in dem Moment beginnt, wenn die Stange $A-B$ die horizontale Lage einnimmt, gilt entsprechend nebenstehender Skizze:

$$r(t) = l - \sqrt{a^2 + v_A^2 t^2} \quad , \quad \varphi(t) = \arctan \frac{v_A t}{a} \quad .$$

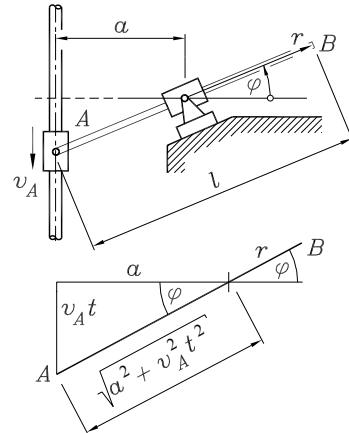
Diese Darstellung enthält alle Informationen über den Bewegungsablauf, und es ist im Allgemeinen nicht sinnvoll, nach 26.24 den Ortsvektor mit dem zeitlich veränderlichen Einheitsvektor

$$\vec{e}_r(t) = \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{bmatrix}$$

aufzuschreiben, zumal sämtliche Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile nach 26.26 durch Differenzieren von $r(t)$ und $\varphi(t)$ gewonnen werden können. Man erhält z. B.:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -\frac{v_A^2 t}{\sqrt{a^2 + v_A^2 t^2}} \quad , \quad \ddot{r}(t) = -\frac{a^2 v_A^2}{(a^2 + v_A^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{1 + \frac{v_A^2 t^2}{a^2}} \frac{v_A}{a} \quad , \quad \ddot{\varphi}(t) = -\frac{2 \frac{v_A^3 t}{a^3}}{\left(1 + \frac{v_A^2 t^2}{a^2}\right)^2} \quad . \end{aligned}$$

Damit kann man sämtliche Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile aufschreiben. Sie sind radial gerichtet bzw. senkrecht dazu (**nicht** normal bzw. tangential zur Bahnkurve).



26.2.6 Allgemeine Bewegung im Raum

Wenn die allgemeine Bewegung eines Punktes im Raum (**Abbildung 26.21**) analog zur Bewegung in der Ebene (Abschnitt 26.2.1) durch einen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

beschrieben wird, gelten in sinnvoller Erweiterung die Formeln 26.8 bis 26.14, die hier noch einmal zusammengestellt werden:

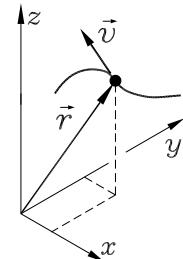


Abbildung 26.21: Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor

Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \quad (26.27)$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (26.28)$$

Länge der Bahnkurve:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (26.29)$$

Beschleunigungsvektor:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix} \quad (26.30)$$

Gesamtbeschleunigung:

$$a(t) = |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (26.31)$$

⇒ Auch für die Bewegung im Raum gilt, dass der Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt tangential zur Bahnkurve gerichtet ist und damit als Produkt aus Bahngeschwindigkeit und Tangenteneinheitsvektor dargestellt werden kann:

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}_t(t) \quad . \quad (26.32)$$

⇒ Durch Differenzieren von 26.32 nach der Zeit ergibt sich der Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_t + v \cdot \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{v} \cdot \vec{e}_t + v \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \dot{v} \cdot \vec{e}_t + v^2 \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \dot{v} \cdot \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{e}_n \end{aligned} \quad (26.33)$$

mit den gleichen Beschleunigungsanteilen (Bahnbeschleunigung \dot{v} und Normalbeschleunigung $\frac{v^2}{\rho}$) wie im ebenen Fall. Der Einheitsvektor \vec{e}_n ist der senkrecht zum Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_t gerichtete *Hauptnormalenvektor*, der zum Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve zeigt, ρ ist der Krümmungsradius.

- ⇒ Die Einheitsvektoren \vec{e}_t und \vec{e}_n spannen die *Schmiegeungsebene* der Bahnkurve in dem betrachteten Punkt auf. In ihr liegen der Geschwindigkeitsvektor und beide Beschleunigungsanteile (und damit auch der Vektor der Gesamtbeschleunigung). Es gibt also in jedem Punkt der Bahnkurve eine „beschleunigungsfreie“ Richtung. Es ist die Richtung des *Binormalenvektors* \vec{e}_b , der senkrecht zu \vec{e}_t und \vec{e}_n gerichtet ist und mit diesen das *begleitende Dreibein* der Bahnkurve bildet.

Wenn also die Beschleunigungswerte bei der räumlichen Bewegung eines Punktes nur für bestimmte Zeitpunkte interessieren, kann die Bewegung jeweils wie eine ebene Bewegung in der Schmiegeungsebene des aktuellen Punktes der Bahnkurve betrachtet werden.

26.3 Aufgaben

Aufgabe 26.1:

Ein Formel-1-Rennwagen beschleunigt (im Jahr 1993) aus dem Stand auf eine Geschwindigkeit von 100 km/h in 2,6 s. Aus einer Geschwindigkeit von 280 km/h stoppt er bei Vollbremsung nach 151,3 m.

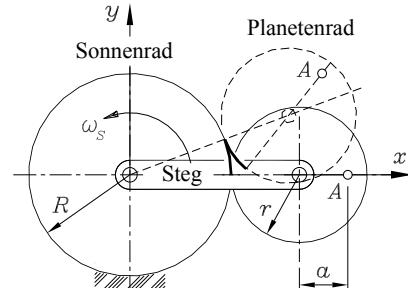
- Wie groß ist die mittlere Beschleunigung a_m in m/s^2 während des Anfahrvorgangs?
- Wie groß ist die mittlere Bremsverzögerung (negative Beschleunigung) bei dem beschriebenen Bremsvorgang?

Aufgabe 26.2:

Der Steg eines Planetengetriebes dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_s und treibt ein Planetenrad, das auf dem feststehenden Sonnenrad abrollt.

Die Bewegung des Punktes A im Abstand a vom Mittelpunkt des Planetenrades soll analysiert werden.

Gegeben: R , r , a , ω_s .



- Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Planetenrad in der skizzierten horizontalen Lage. Es ist die Bahnkurve des Punktes A in Parameterdarstellung $x(t)$ und $y(t)$ bezüglich des skizzierten Koordinatensystems zu ermitteln.
- Für welche Radienverhältnisse $\frac{r}{R}$ ist der Punkt A nach einem vollen Umlauf des Steges wieder in der skizzierten Lage?
- Man ermittle die Funktionen für die Bahngeschwindigkeit $v(t)$ und die Gesamtbeschleunigung $a(t)$.
- Mit einer geeigneten Software (www.TM-aktuell.de) stelle man die Bahnkurve des Punktes A für $\frac{a}{r} = 2$ und $\frac{R}{r} = 1,5$ grafisch dar und berechne die Länge des Weges, den er bei zwei vollen Stegumläufen zurücklegt.



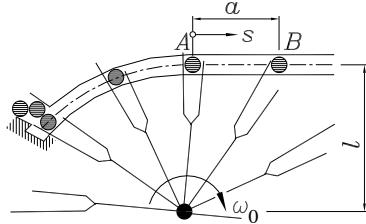
Aufgabe 26.3:

Ein sternförmiger Mitnehmer rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Er führt Werkstücke in einer Rinne. Betrachtet werden soll die Bewegung eines Werkstücks im geraden Rinnenabschnitt von A nach B.

Gegeben: $l = 10\text{cm}$; $a = 6\text{cm}$; $\omega_0 = 0,3\text{s}^{-1}$.

Man ermittle

- das Bewegungsgesetz $s(t)$ eines Werkstücks, wenn es bei $t = 0$ den Punkt A passiert,
- das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $v(t)$ und das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz $a(t)$,
- die Zeit t_{AB} , die das Werkstück für die Bewegung von A bis B benötigt,
- die Geschwindigkeit v_B des Werkstücks, die es bei Punkt B hat.

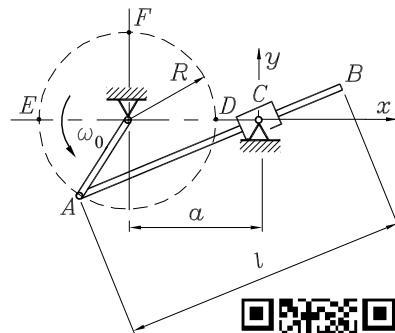
**Aufgabe 26.4:**

Eine Kurbel dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 und nimmt die Stange A-B mit. Bei $t = 0$ befindet sich A im Punkt D.

Gegeben: a , l , R , ω_0 .

Unter Verwendung des skizzierten Koordinatensystems ermittle man

- die Bahnkurve von B in Parameterdarstellung $x(t)$ und $y(t)$,
- die Komponenten v_{Bx} und v_{By} des Geschwindigkeitsvektors des Punktes B allgemein,
- die Beträge der Geschwindigkeiten des Punktes B für $\frac{a}{R} = 1,5$ und $\frac{l}{R} = 2$, wenn A sich in E bzw. F befindet.



Eine Animation der Bewegung findet man unter www.TM-aktuell.de.

Aufgabe 26.5:

Ein Zahnrad mit dem Radius R treibt eine horizontale Zahnstange nach dem Winkel-Zeit-Gesetz

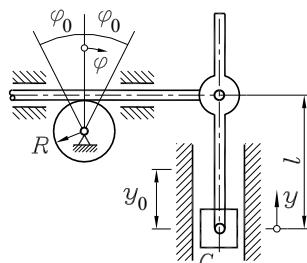
$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin k_1 t$$

an. Die Zahnstange ist über einen starren Hebel gelenkig mit dem auf einer vertikalen Bahn geführten Gleitstein G verbunden. Das System nimmt zur Zeit $t = 0$ die dargestellte Lage ein.

Gegeben: R , $l = 2R$, k_1 , $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.

Man ermittle

- das Bewegungsgesetz $y(t)$ des Gleitsteins G und seinen maximalen Hub y_0 ,
- die Zeit t_1 bis zum ersten Erreichen des oberen Totpunktes.



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

27 Kinematik starrer Körper

Ein *starrer Körper* besteht aus einer unendlichen Anzahl von Punkten, die ihre Lage zueinander nicht ändern. Für die weitaus meisten Probleme der Kinematik und Kinetik ist dieses fiktive Gebilde das völlig ausreichende Modell zur Untersuchung von Bewegungsvorgängen (wie in der Statik zur Untersuchung von Gleichgewichtszuständen).

27.1 Die ebene Bewegung des starren Körpers

Man könnte die ebene Bewegung des starren Körpers mit den Verfahren aus dem Kapitel 26 (Kinematik des Punktes) beschreiben, wenn man die Bewegung von zwei Punkten des Körpers beschreiben würde. Da der Abstand der Punkte konstant bleibt, genügt jedoch bereits die Angabe der zeitlichen Abhängigkeit

- der beiden Koordinaten eines Punktes und einer Koordinate eines zweiten Punktes oder
- der beiden Koordinaten eines Punktes und einer zusätzlichen Winkelkoordinate.

Der starre (durch keine Bindungen behinderte) Körper in der Ebene hat drei *Freiheitsgrade*. Seine Lage ist durch die Angabe von drei geeigneten Koordinaten eindeutig bestimmt, seine Bewegung wird durch die zeitliche Abhängigkeit dieser Koordinaten beschrieben.

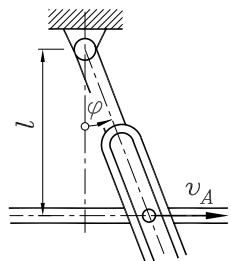
⇒ Durch zusätzliche Bindungen (z. B. an eine vorgeschriebene Bahn) kann die Anzahl der Freiheitsgrade eingeschränkt sein. Für die Probleme der technischen Praxis ist die Bewegung eines Körpers mit nur einem Freiheitsgrad sogar eher die Regel als die Ausnahme.

27.1.1 Reine Rotation

Die reine Rotation (ein Punkt des Körpers ist fixiert) ist ein besonders wichtiger Spezialfall der Bewegung eines starren Körpers. Die Bewegung wird mit nur einer Winkelkoordinate komplett beschrieben.

Beispiel 1: Der Mitnehmer der skizzierten Gabel bewegt sich mit $v_A = \text{konstant}$ nach rechts. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $\varphi = 0$. Für die Bewegung der Gabel sollen das Bewegungsgesetz $\varphi(t)$, die Winkelgeschwindigkeit $\omega_G(t)$ und die Winkelbeschleunigung $\alpha_G(t)$ ermittelt werden.

Gegeben: l , v_A .

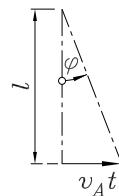


Mit dem Weg $v_A t$ nach 26.5, den der Mitnehmer bis zum Zeitpunkt t zurückgelegt hat, entnimmt man dem nebenstehend skizzierten rechtwinkligen Dreieck das Bewegungsgesetz:

$$\tan \varphi = \frac{v_A t}{l} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \frac{v_A t}{l} .$$

Durch Differenzieren erhält man die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Gabel:

$$\omega_G(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v_A t}{l}\right)^2} \frac{v_A}{l} = \frac{v_A l}{l^2 + v_A^2 t^2} , \quad \alpha_G(t) = \ddot{\varphi}(t) = -\frac{2 v_A^3 l t}{(l^2 + v_A^2 t^2)^2} .$$



Beispiel 2:

Eine Kurbel mit dem Radius R läuft mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um und nimmt dabei eine Schwinge mit (eine Animation unter www.TM-aktuell.de zeigt die Bewegung dieses Getriebes). Es sollen das Bewegungsgesetz der Schwinge $\varphi(t)$, ihre Winkelgeschwindigkeit $\omega_S(t)$ und Winkelbeschleunigung $\alpha_S(t)$ ermittelt werden.

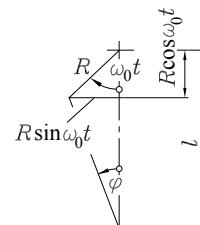
$$\text{Gegeben: } \omega_0, \beta = \frac{l}{R} = 3 .$$

Als Beginn der Zeitzählung $t = 0$ wird die vertikale Lage der Schwinge $\varphi = 0$ gewählt, bei der der Mitnehmer der Kurbel seine tiefste Lage hat. Dann ist der bis zum Zeitpunkt t von der (mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umlaufenden) Kurbel zurückgelegte Winkel nach 26.23 gleich $\omega_0 t$.



Die Schwinge hat sich bis zu diesem Zeitpunkt um den Winkel φ gedreht, und der Skizze rechts wird der geometrische Zusammenhang entnommen, der das Bewegungsgesetz der Schwinge liefert:

$$\tan \varphi = \frac{R \sin \omega_0 t}{l - R \cos \omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arctan \frac{\sin \omega_0 t}{\beta - \cos \omega_0 t} .$$



Differenzieren nach der Zeit liefert Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung:

$$\omega_S(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{\beta \cos \omega_0 t - 1}{\beta^2 - 2\beta \cos \omega_0 t + 1} \omega_0 ,$$

$$\alpha_S(t) = \ddot{\varphi}(t) = \frac{(1 - \beta^2) \beta \omega_0^2 \sin \omega_0 t}{(\beta^2 - 2\beta \cos \omega_0 t + 1)^2} .$$

Die Abbildung 27.1 zeigt die kinematischen Diagramme $\varphi(t)$, $\omega_S(t)$ und $\alpha_S(t)$ für einen vollen Umlauf der Kurbel (vgl. www.TM-aktuell.de). $\omega_S(t)$ und $\alpha_S(t)$ wurden zusätzlich durch numerisches Differenzieren ermittelt und doppelt gezeichnet.

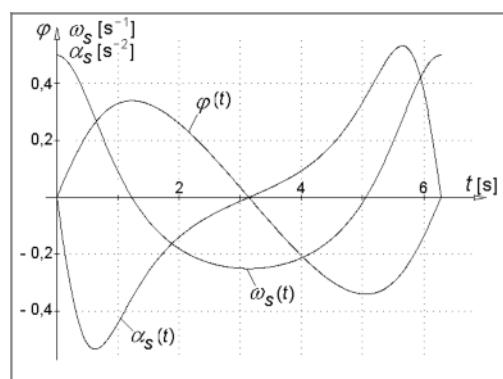


Abbildung 27.1: Kinematische Diagramme

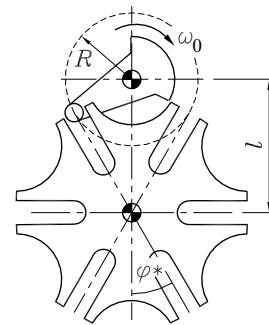
Diese Kontrollmöglichkeit wurde bereits im Beispiel 1 des Abschnitts 26.2.4 genutzt und ist bei Aufgaben dieser Art immer zu empfehlen: Wenn die grafischen Darstellungen der analytisch erzeugten Ableitungen mit den durch numerisches Differenzieren gewonnenen Kurven deckungsgleich sind, ist das ein vorzügliches Indiz für die Richtigkeit. Gleichwertig ist natürlich die Benutzung eines Programms, das symbolisch differenzieren kann.

- ⇒ Der Antrieb mit konstanter Winkelgeschwindigkeit über eine Schwinge, die die Bewegung umwandelt, ist in der technischen Praxis recht häufig anzutreffen. Neben der Möglichkeit, gleichmäßige Drehbewegungen in „Hin-und-Herbewegungen“ umzuformen (Werkzeugmaschinen, Schwingtische, ...), zeigt das nachfolgende Beispiel eine weitere Variante.

Beispiel 3:

Das so genannte *Malteserkreuz* ist ein Mechanismus, der eine kontinuierliche Drehbewegung in eine periodische (durch Rasten unterbrochene) Drehbewegung umwandelt.

Der Mitnehmer der sich mit ω_0 drehenden Kurbel nimmt nur auf einem Teil seines Weges (während des Eingriffs in einen Schlitz) das Malteserkreuz mit, das sich bei einem Eingriff um den Winkel $2\varphi^*$ weiterdreht. Die Skizze zeigt gerade das Ende eines Eingriffs und den Beginn der Ruhephase (vgl. www.TM-aktuell.de, dort auch als Animation).



Während des Eingriffs gilt genau das Bewegungsgesetz, das für die Schwinge des Beispiels 2 hergeleitet wurde. Die kinematischen Diagramme dieses Beispiels zeigten erwartungsgemäß, dass für den Punkt des größten Ausschlags der Schwinge (Umkehrpunkt ihrer Bewegung) die Winkelgeschwindigkeit ω_S gleich Null ist. Wenn nun das Malteserkreuz so konstruiert wird, dass der Austrittspunkt des Mitnehmers aus dem Schlitz (und aus Symmetriegründen damit auch der Eintrittspunkt) mit dem Stillstand des Malteserkreuzes zusammenfällt, dann beginnt dessen Ruhephase genau in dem Moment, in dem es ohnehin keine Winkelgeschwindigkeit hat, so dass es nicht zusätzlich gebremst werden muss (es wird allerdings sicherheitshalber während der Ruhephase vom hinteren Teil des Mitnehmers, der genau in die bogenförmigen Aussparungen des Malteserkreuzes passt, arretiert).

Aus den für das Beispiel 2 ermittelten Funktionen entnimmt man, dass $\omega_S = 0$ wird, wenn

$$\cos \omega_0 t^* = \frac{R}{l}$$

ist. R und l sind zum Zeitpunkt t^* also Kathete bzw. Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, der Winkel φ^* berechnet sich in diesem Dreieck aus



$$\varphi^* = \arcsin \frac{R}{l} .$$

Während des Mitnehmereingriffs dreht sich das Malteserkreuz um den Winkel $2\varphi^*$. Es ist klar, dass eine volle Umdrehung (360°) ein ganzzahliges Vielfaches von $2\varphi^*$ sein muss, so dass nur spezielle Abmessungsverhältnisse sinnvoll sind, von denen die nebenstehende Tabelle einige zeigt.

$2\varphi^*$	$\frac{R}{l}$
120°	0,866
90°	0,707
72°	0,588
60°	0,500

27.1.2 Translation und Rotation

Ein Körper führt eine *reine Translation* aus, wenn jede beliebige Gerade, die zwei Punkte des starren Körpers verbindet, während der Bewegung ihre Richtung beibehält. Bei einer solchen Bewegung mit zwei Freiheitsgraden bewegen sich alle Punkte des Körpers auf kongruenten Bahnen, so dass die Beschreibung der Bewegung eines Punktes genügt (Kinematik des Punktes, Kapitel 26). Dieser Spezialfall braucht also nicht noch einmal betrachtet zu werden. Man beachte:

- ⇒ Die Bahnen bei der translatorischen Bewegung können beliebige Kurven sein, zum Beispiel auch Kreise: Die Kabine eines Paternosters führt (zum Glück für verträumte Mitfahrer) während der gesamten Bewegung eine Translation aus, auch in den Umkehrbereichen, in denen sich alle Punkte der Kabine auf Kreisbahnen bewegen.

Es ist üblich (und meist zweckmäßig), die *allgemeine Bewegung* als eine Überlagerung einer Translation mit einer Rotation zu beschreiben.

Beispiel 1:

Das skizzierte Dreieck bewegt sich aus der Anfangslage ABC in die Endlage $A'B'C'$. Man kann diese Bewegung zum Beispiel auffassen als eine reine Translation aus ABC nach $A'B''C''$ (alle Punkte bewegen sich auf kongruenten Bahnen) und eine Drehung um den Punkt A' .

Bei dieser Betrachtung wurde der Punkt A als Bezugspunkt (zur Beschreibung der Translation und als Zentrum der Rotation) verwendet. Natürlich kann dafür auch jeder andere Punkt benutzt werden.

- ⇒ Die mit dem Beispiel 1 demonstrierte Betrachtungsweise ist selbst dann in vielen Fällen noch sinnvoll, wenn eine Bewegung mit nur einem Freiheitsgrad untersucht wird. Sie ist für die Analyse komplizierter Bewegungsabläufe so wichtig, dass sie nachfolgend an zwei einfachen Beispielen noch einmal verdeutlicht werden soll.

Beispiel 2:

Eine Walze, die auf einer schiefen Ebene eine reine (schlupffreie) Rollbewegung ausführt, hat nur einen Freiheitsgrad.

Die Translation (beschrieben durch eine Koordinate x , die die jeweilige Lage des Mittelpunktes angibt) erfolgt auf einer Geraden, und die Drehbewegung ist von der Translation nicht unabhängig, weil die auf dem Umfang abgewälzte Strecke gleich sein muss mit der Strecke, die der Mittelpunkt zurückgelegt hat. Es gilt die so genannte

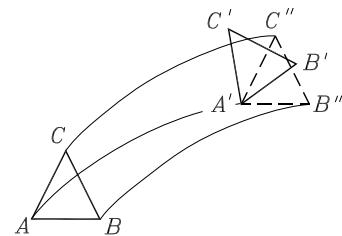


Abbildung 27.2: Die Bahnen $A-A'$, $B-B''$ und $C-C''$ sind deckungsgleich (auch wenn es nicht so aussieht)

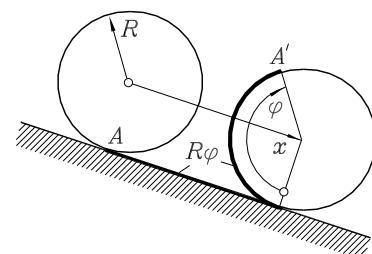


Abbildung 27.3: Reines Rollen

$$\text{Rollbedingung: } x = R\varphi \quad . \quad (27.1)$$

Obwohl Translation und Rotation gleichzeitig ablaufen, ist es vielfach zweckmäßig, auch bei der reinen Rollbewegung Translation und Rotation gesondert zu betrachten (**Abbildung 27.4**).

Aus der Rollbedingung ergibt sich durch Differenzierung nach der Zeit der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Mittelpunktes und der Winkelgeschwindigkeit der Rotation:

$$v = \dot{x} = R\dot{\phi} = R\omega .$$

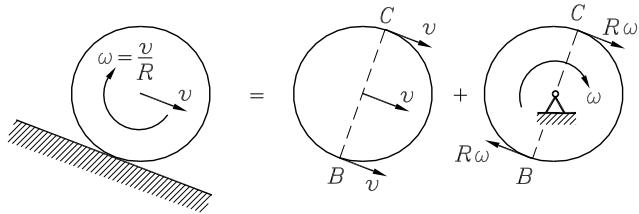


Abbildung 27.4: Reines Rollen = Translation + Rotation

Man beachte, dass durch Überlagerung der translatorischen und der rotatorischen Geschwindigkeit für jeden Punkt der Walze Betrag und Richtung der Geschwindigkeit bestimmt werden können. So erhält man zum Beispiel für den Punkt C

$$v_C = v + R\omega = 2v ,$$

während der Punkt B wegen $v_B = v - R\omega = 0$ **momentan** in Ruhe ist.

⇒ Die Wahl des Mittelpunktes im Beispiel 2 für die Beschreibung des Translationsanteils der Bewegung ist willkürlich. Natürlich kann dafür jeder beliebige Punkt benutzt werden. Dazu wird das folgende Beispiel betrachtet.

Beispiel 3:

Die Bewegung eines bei A drehbar gelagerten Stabes, der sich aus der vertikalen Lage um den Winkel φ gedreht hat, wird durch Überlagerung einer Translation, bei der der Stab die vertikale Lage beibehält, mit einer Rotation beschrieben.

Es werden unterschiedliche Punkte (A, B, C) zur Beschreibung der Translation benutzt. Um den gleichen Endzustand der Bewegung zu erreichen, muss der Stab (abhängig vom gewählten Bezugspunkt) unterschiedliche translatorische Wege zurücklegen (für den Bezugspunkt C ist der translatorische Weg am größten, bei Wahl des Punktes A ist er Null), während sich der Stab in allen drei betrachteten Varianten immer um den gleichen Winkel drehen muss. Da dies zu jedem Zeitpunkt der Bewegung gilt, ist auch die Ableitung der Winkelkoordinate nach der Zeit unabhängig vom gewählten Bezugspunkt für die Rotation:

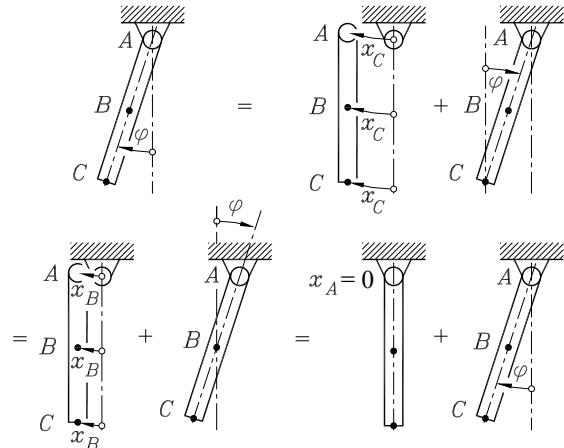


Abbildung 27.5: Unterschiedliche Translation, aber der Rotationswinkel φ ist immer gleich

Die Winkelgeschwindigkeit des rotatorischen Anteils der ebenen Bewegung eines starren Körpers ist von der Wahl des Bezugspunktes (Drehpunkt für die Rotation) unabhängig.

Im Beispiel 3 bietet sich Punkt A als Bezugspunkt an, weil dann kein translatorischer Anteil zu berücksichtigen ist. Es gibt jedoch (in der Kinetik) oft gute Gründe, den Schwerpunkt zu wählen, so dass selbst eine reine Rotation als Kombination aus Translation und Rotation betrachtet wird.

27.1.3 Der Momentanpol

Bei reiner Translation haben alle Punkte des Körpers die gleiche Geschwindigkeit v . Bei reiner Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist der Drehpunkt in Ruhe, alle anderen Punkte bewegen sich auf Kreisbahnen um den Drehpunkt mit Bahngeschwindigkeiten v_{rot} , die nach 26.18 entsprechend $v_{rot} = r\omega$ mit der Entfernung vom Drehpunkt linear anwachsen.

Bei gleichzeitiger Translation und Rotation können die Geschwindigkeiten aller Punkte des Körpers aus der Überlagerung der beiden Anteile ermittelt werden (**Abbildung 27.6**). Es ist einleuchtend, dass es in der Ebene genau einen Punkt geben muss, für den sich die beiden Geschwindigkeitsanteile gerade aufheben. Wenn dieser Punkt als Bezugspunkt für die Bewegung gewählt wird, entfällt also der translatorische Anteil.

Zu jedem Zeitpunkt der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers in der Ebene kann der Geschwindigkeitszustand wie bei einer (momentanen) reinen Rotation um einen festen Punkt, den so genannten *Momentanpol*, analysiert werden.

- ⇒ Der Momentanpol befindet sich in dem betrachteten Augenblick in Ruhe, während alle übrigen Punkte des Körpers Rotationen um ihn ausführen. Die Geschwindigkeiten dieser Punkte sind tangential an die (konzentrischen) Kreise um den Momentanpol gerichtet.
- ⇒ Der Momentanpol liegt in der Bewegungsebene (muss kein Punkt des bewegten Körpers selbst sein). Er ändert im Allgemeinen ständig seine Lage. Er ist im betrachteten Moment geschwindigkeitsfrei, in der Regel aber nicht beschleunigungsfrei.

Beispiel 1:

Im Beispiel 2 des vorigen Abschnitts wurde herausgefunden, dass der Berührungsrand zwischen Rad und Unterlage momentan in Ruhe ist. Dieser Punkt ist der *Momentanpol* M der Bewegung. Die Geschwindigkeit des beliebigen Punktes B des Rades ist dann senkrecht zur Verbindungslinie MB gerichtet. Wenn die Geschwindigkeit v_A eines Punktes A des starren Körpers bekannt ist (hier soll es die horizontale Geschwindigkeit des Radmittelpunktes sein), kann die momentane Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers nach

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} \quad (27.2)$$

berechnet werden (r_A ist der Abstand des Punktes A vom Momentanpol M). Da für jeden Punkt des Körpers eine entsprechende Formel gilt, kann z. B. für den Punkt B im Abstand r_B vom Momentanpol die Geschwindigkeit nach

$$v_B = r_B \omega \quad (27.3)$$

berechnet werden. Diese am speziellen Beispiel gewonnenen Erkenntnisse gelten allgemein.

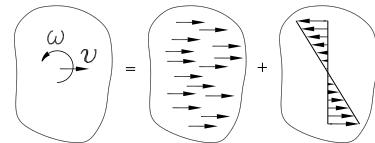


Abbildung 27.6: Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten

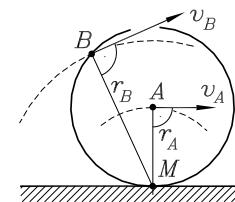


Abbildung 27.7: Geschwindigkeiten sind proportional zum Abstand vom Momentanpol

Die Geschwindigkeiten zweier Punkte A und B eines starren Körpers verhalten sich wie ihre Abstände vom Momentanpol:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B} . \quad (27.4)$$

Die Geschwindigkeiten sind senkrecht zu den Verbindungslien der Punkte A bzw. B mit dem Momentanpol gerichtet.

Diese Aussagen ermöglichen es, die Geschwindigkeiten beliebiger Punkte eines starren Körpers anzugeben, wenn die Lage des Momentanpols und die Geschwindigkeit eines Punktes bekannt sind. Andererseits kann die Lage des Momentanpols auf der Grundlage dieser Erkenntnisse gefunden werden.

Im Allgemeinen kann man die Lage des Momentanpols mit einer der vier folgenden Aussagen finden:

- ⇒ Bei *reinem Rollen* eines starren Körpers (ohne Schlupf) auf einer ruhenden Unterlage ist immer der Berührungs punkt zwischen Körper und Unterlage der Momentanpol (**Abbildung 27.8, oben**).
- ⇒ Wenn die *nicht parallelen Geschwindigkeitsrichtungen* zweier Punkte A und B bekannt sind, findet man den Momentanpol als Schnittpunkt der Senkrechten zu diesen Richtungen (**Abbildung 27.8, Mitte**).
- ⇒ Bei bekannten *parallelen Geschwindigkeitsrichtungen* zweier Punkte A und B (**Abbildung 27.8, unten**) müssen zusätzlich auch Richtungssinn und Größe der Geschwindigkeiten bekannt sein. Der Momentanpol liegt auf der Verbindungsgeraden beider Punkte, die Abstände der Punkte vom Momentanpol sind nach 27.4 proportional zu den Beträgen ihrer Geschwindigkeiten (Strahlensatz-Figur).
- ⇒ Bei parallelen Geschwindigkeiten zweier Punkte mit gleichem Richtungssinn und gleicher Größe liegt der Momentanpol „im Unendlichen“ (reine Translation).

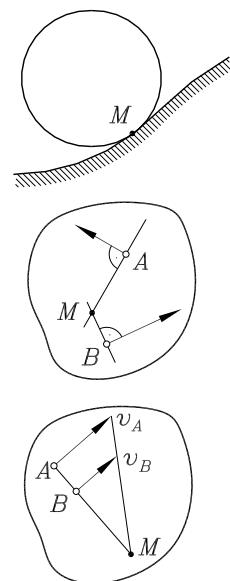


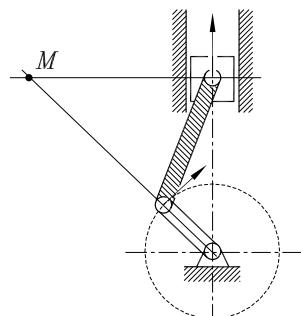
Abbildung 27.8: Lage des Momentanpols

Beispiel 2:

Für das (schraffiert gezeichnete) Pleuel einer Schubkurbel (Animation unter www.TM-aktuell.de) soll der Momentanpol für die skizzierte Lage bestimmt werden.

Für die beiden Endpunkte des Pleuels sind die Geschwindigkeitsrichtungen bekannt, da sich der Kolben nur vertikal bewegen kann und die Kurbel eine Kreisbewegung (mit tangential gerichteter Geschwindigkeit) ausführt. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf die Geschwindigkeitsrichtungen ist der gesuchte Momentanpol M .

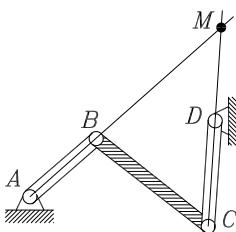
Die Drehrichtung der Kurbel (hier rechtsdrehend gezeichnet) hat keinen Einfluss auf die Lage des Momentanpols.



Beispiel 3:

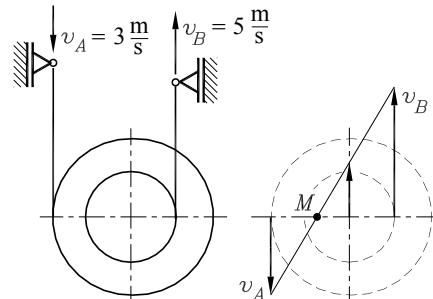
Die Koppel BC der skizzierten Viergelenkkette führt bei Antrieb durch eines der beiden gelagerten Glieder (z. B. AB) eine relativ komplizierte Bewegung aus (Animation unter www.TM-aktuell.de, siehe auch Abschnitt 26.2.4).

Für jede Lage findet man den Momentanpol auf der Verlängerungslinie der beiden gelagerten Glieder, weil sich die Punkte B und C auf Kreisen um A bzw. D mit tangential zu den Kreisen gerichteten Geschwindigkeiten bewegen.

**Beispiel 4:**

Die Endpunkte zweier Seile, die auf unterschiedlichen Radien eine Walze umschlingen, werden wie skizziert bewegt.

Man findet den Momentanpol der Bewegung der Walze nach der Strahlensatz-Figur und könnte bei gegebenen Radien für jeden Punkt der Walze die Geschwindigkeit ermitteln. Der Skizze ist zu entnehmen, dass die Walze eine Linksdrehung ausführt und der Mittelpunkt (mit der eingezeichneten Geschwindigkeit) angehoben wird.

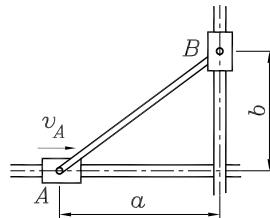
**Beispiel 5:**

Die Gleitsteine A und B sind durch eine starre Stange gekoppelt. In der skizzierten Stellung bewegt sich Gleitstein A mit v_A . Die Geschwindigkeit v_B des Punktes B sowie Richtung und Betrag der Geschwindigkeit v_C des Mittelpunktes C der Stange AB sollen ermittelt werden (Animation unter www.TM-aktuell.de).

Gegeben: v_A , $a = 2b$.

Die beiden Senkrechten zu den Geschwindigkeiten in den Punkten A und B schneiden sich im Momentanpol M . Nach 27.4 errechnet man

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{a}{b} v_A = 2 v_A .$$

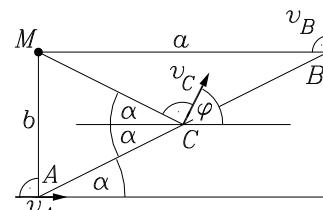


Der Punkt C liegt in der Mitte der Stange, sein Abstand zum Momentanpol ist also gleich der halben Diagonalen:

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{\sqrt{5}}{2} v_A .$$

Wegen der Gleichschenkligkeit von MAC liest man ab:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \arctan \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 63,43^\circ .$$



27.1.4 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Entsprechend der Idee, die Bewegung eines starren Körpers durch die Translation eines Punktes des Körpers und eine Rotation um diesen Punkt zu beschreiben, wird dieser ausgewählte Punkt O mit dem Ortsvektor \vec{r}_O verfolgt.

Dieser Vektor beschreibt die *Translation* des Körpers nach den Regeln der Kinematik des Punktes (Kapitel 26), wofür ein geeignetes raumfestes Koordinatensystem verwendet wird (in der Abbildung 27.9 wurde willkürlich ein kartesisches Koordinatensystem eingezeichnet, es könnten z. B. durchaus auch Polarkoordinaten sein).

Für die Beschreibung der *Rotation* um den Punkt O werden Polarkoordinaten mit dem Ursprung in O gewählt (in der Abbildung 27.9 wurde die Lage eines beliebigen Punktes P des Körpers durch r^* und φ festgelegt). Weil für den starren Körper der Abstand r^* der Punkte O und P konstant bleibt, ist in dem Vektor \vec{r}^* , der die Lage von P relativ zu O beschreibt, nur der Einheitsvektor \vec{e}_r von der Zeit abhängig.

Für den beliebigen Punkt P des Körpers, dessen Lage im raumfesten Koordinatensystem durch

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_O(t) + \vec{r}^*(t) = \vec{r}_O(t) + r^* \cdot \vec{e}_r(t) \quad (27.5)$$

beschrieben wird, können der Geschwindigkeitsvektor und der Beschleunigungsvektor durch ein- bzw. zweimaliges Ableiten von 27.5 nach der Zeit ermittelt werden. Mit den Formeln 26.25 für die Ableitung der zeitabhängigen Einheitsvektoren (Abschnitt 26.2.5) erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}^*}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + r^* \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + r^* \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \quad , \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + r^* \ddot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + r^* \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + r^* \ddot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi - r^* \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{e}_r \quad . \end{aligned}$$

Die Ableitung des Winkels φ nach der Zeit ist nach 26.19 die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation um den Punkt O . Damit erhält man (wegen $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_t$ und $\vec{e}_r = -\vec{e}_n$ für die Kreisbewegung um den Punkt O) die

Vektoren der Gesamtgeschwindigkeit und Gesamtbeschleunigung eines beliebigen Punktes P des starren Körpers:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + r^* \omega \cdot \vec{e}_t = \vec{v}_{trans} + \vec{v}_{rot} \quad , \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + r^* \dot{\omega} \cdot \vec{e}_t + r^* \omega^2 \vec{e}_n = \vec{a}_{trans} + \vec{a}_{t,rot} + \vec{a}_{n,rot} \quad . \end{aligned} \quad (27.6)$$

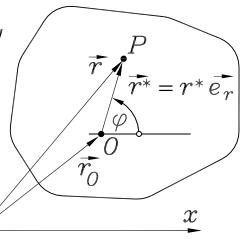
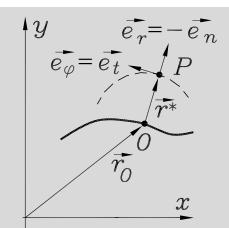


Abbildung 27.9: Translation und Rotation



- ⇒ Die *ebene Bewegung des starren Körpers* wird beschrieben durch die Translation eines beliebigen Bezugspunktes O , der eine Rotation um den Bezugspunkt überlagert ist. Die *Translation* des Bezugspunktes kann auf einer beliebigen (im Allgemeinen gekrümmten) Bahnkurve

erfolgen und wird nach den Regeln der „Kinematik des Punktes“ (Kapitel 26) beschrieben. Die *Rotation* um den Bezugspunkt erfolgt mit der (im Allgemeinen zeitlich veränderlichen) Winkelgeschwindigkeit ω um den Bezugspunkt, wobei jeder Punkt des starren Körpers eine Kreisbewegung um den Bezugspunkt ausführt.

- ⇒ Die *Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P* setzt sich aus einem translatorischen Anteil v_{trans} und dem rotatorischen Anteil v_{rot} zusammen. Dabei ist

- v_{trans} die Bahngeschwindigkeit des Bezugspunktes O ,
- $v_{rot} = r^* \omega$ die Bahngeschwindigkeit der Kreisbewegung von P auf einem Kreis mit dem Radius r^* um den Bezugspunkt O .

Die beiden Anteile v_{trans} und v_{rot} sind vektoriell zur Gesamtgeschwindigkeit v des Punktes P zu überlagern.

Hinweis: Um die momentane Geschwindigkeit eines Punktes P des starren Körpers zu bestimmen, ist es meist günstiger, als Bezugspunkt O den Momentanpol zu wählen, so dass sich für Punkt P nur ein Rotationsanteil ergibt.

- ⇒ Die *Beschleunigung eines beliebigen Punktes P* setzt sich aus einem translatorischen Anteil a_{trans} und dem rotatorischen Anteil a_{rot} zusammen. Dabei ist

- a_{trans} die Gesamtbeschleunigung des Bezugspunktes O , die sich im Allgemeinen nach 26.16 aus der Bahnbeschleunigung des Bezugspunktes $a_{t,trans}$ und seiner Normalbeschleunigung

$$a_{n,trans} = \frac{v_{trans}^2}{\rho}$$

zusammensetzt (ρ ist der Krümmungsradius der Bahn des Bezugspunktes),

- a_{rot} die sich im Allgemeinen auch aus zwei Anteilen ($a_{t,rot}$ und $a_{n,rot}$) zusammensetzen Beschleunigung der Kreisbewegung des Punktes P um den Bezugspunkt O :

$$a_{t,rot} = r^* \dot{\omega} \quad , \quad a_{n,rot} = r^* \omega^2 \quad .$$

Im allgemeinen Fall ist also die Gesamtbeschleunigung des Punktes P aus vier Anteilen vektoriell zusammenzusetzen.

Beispiel 1: Ein Planetenrad mit dem Radius r rollt auf einem feststehenden Sonnenrad (Radius R) ab. Der Steg dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_S .

Gegeben: R , r , ω_S .

Für den Außenpunkt B und den Punkt C (Berührungs punkt mit dem Sonnenrad) des Planetenrades sollen die Beträge der Geschwindigkeiten v_B bzw. v_C und die Beträge der Gesamtbeschleunigungen a_B bzw. a_C ermittelt werden.

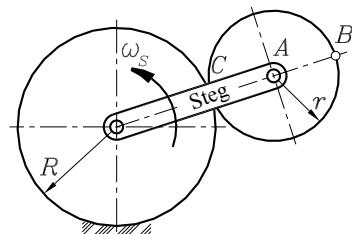


Abbildung 27.10: Sonnenrad und Planetenrad

Infolge der Drehbewegung des Steges mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt sich der Punkt A, der zum Steg und zum Planetenrad gehört, nach 26.18 mit der Geschwindigkeit

$$v_A = (R + r) \omega_S$$

auf einer Kreisbahn. Für die Ermittlung der Geschwindigkeiten der Punkte B und C werden die beiden Wege a) und b) demonstriert, unter c) werden die Beschleunigungen berechnet:

- a) Der *Momentanpol* M_P des Planetenrades ist der Berührungs-
punkt C des rollenden Rades mit dem feststehenden Sonnen-
rad (**Abbildung 27.11**). Die Geschwindigkeit des Punktes A
ist bekannt, und damit ergibt sich nach 27.4:

$$v_B = 2v_A = 2(R + r) \omega_S , \quad v_C = 0 .$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Planetenrades errechnet sich
nach 27.2:

$$\omega_P = \frac{v_A}{r} = \left(1 + \frac{R}{r} \right) \omega_S .$$

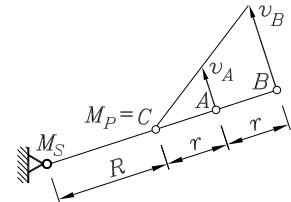


Abbildung 27.11: Momentan-
pol und Geschwindigkeiten

- b) Für die *Überlagerung einer Translation mit einer Rotation* nach 27.6 wird der Mittelpunkt A als Bezugspunkt gewählt. Allen Punkten des Planetenrades wird die translatorische Geschwindigkeit v_A zugeordnet, und der Translation wird die Rotation um den Punkt A mit der Winkelgeschwindigkeit ω_P überlagert. Die Überlagerung nach 27.6 liefert:

$$v_B = v_A + r \omega_P = 2(R + r) \omega_S , \quad v_C = v_A - r \omega_P = 0 .$$

- c) Die *Beschleunigungen* werden ebenfalls durch Überlagerung nach 27.6 ermittelt. Da die Translation eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_S ist, gibt es nur eine Normalbeschleunigung als translatorischen Anteil, der für alle Punkte des Planetenrades in gleicher Größe und Richtung gilt.

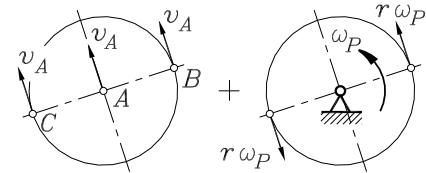


Abbildung 27.12: Translation und Rotation

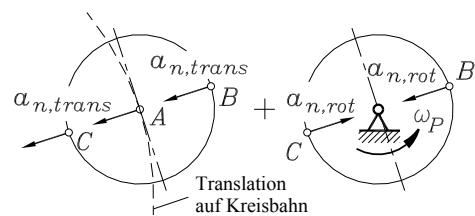


Abbildung 27.13: Beschleunigungsanteile

Auch die Rotation erfolgt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_P , so dass auch der rotatorische Anteil nur eine Normalbeschleunigung liefert, die aber immer vom betrachten Punkt zum Bezugspunkt A gerichtet ist und vom Abstand des Punktes zum Drehpunkt A abhängt. In der **Abbildung 27.13** sind die Beschleunigungsanteile in den Punkten B und C angetragen. Da sie gleich bzw. entgegengesetzt zu den Translationsanteilen gerichtet sind, können sie skalar zusammengefasst werden, und es entsteht:

$$a_B = a_{n,trans} + a_{n,rot} = (R + r) \omega_S^2 + r \omega_P^2 = \left(3R + 2r + \frac{R^2}{r} \right) \omega_S^2 ,$$

$$a_C = a_{n,trans} - a_{n,rot} = (R + r) \omega_S^2 - r \omega_P^2 = -R \left(1 + \frac{R}{r} \right) \omega_S^2 .$$

- ⇒ Für die Ermittlung der Geschwindigkeiten erweist sich die Methode, den Momentanpol der Bewegung zu bestimmen, um dann auf sehr einfache Weise für alle Punkte zu den gewünschten Aussagen zu kommen, fast immer als der günstigere Weg.
- ⇒ Die (hier nicht behandelte) Möglichkeit, die Analyse des Beschleunigungszustandes mit Hilfe des *Beschleunigungspols* (Punkt, der momentan keine Beschleunigung erfährt) durchzuführen, kann nicht empfohlen werden. Die Betrachtung der Bewegung als Translation (beschrieben durch die Bewegung eines Punktes) mit überlagerter Rotation ist dafür im Allgemeinen deutlich übersichtlicher und auch einfacher.

Beispiel 2:

Die Achse eines Rades wird mit der konstanten horizontalen Geschwindigkeit v_0 geführt. Das Rad durchfährt eine Bodenwelle, die man im Bereich A...B als kreisförmig ansehen darf. Beim Passieren des Punktes A sei $t = 0$.

Gegeben: R , r , v_0 .

Berechnet werden sollen

- die Bahngeschwindigkeit $v_S(t)$ und die Gesamtbeschleunigung $a_S(t)$ des Radmittelpunktes und die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ sowie die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ des Rades,
- für $\varphi = 45^\circ$ die Geschwindigkeit v_D und die Gesamtbeschleunigung a_D des Punktes D.
- Der Radmittelpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R - r$. Für diese Bewegung wird das Bewegungsgesetz $\varphi(t)$ formuliert, um dann nach 26.18 die Bahngeschwindigkeit und die Bahnbeschleunigung zu berechnen.

Nach 26.5 ist v_{0t} der bei konstanter Geschwindigkeit v_0 bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte (horizontale) Weg, und aus der nebenstehenden Skizze liest man ab (rechteckiges Dreieck):

$$\sin \varphi = \frac{v_{0t}}{R - r} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arcsin \frac{v_{0t}}{R - r} .$$

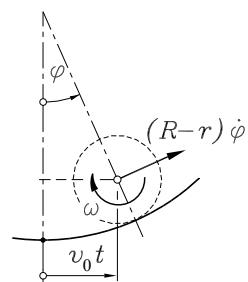
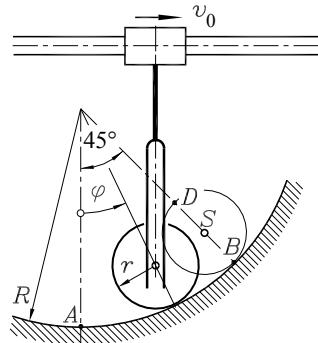
Nach 26.18 erhält man die Bahngeschwindigkeit

$$v_S = (R - r) \dot{\varphi} = \frac{(R - r) v_0}{\sqrt{(R - r)^2 - v_0^2 t^2}}$$

und die Bahnbeschleunigung

$$a_{t,S} = (R - r) \ddot{\varphi}(t) = (R - r) \frac{v_0^2 t}{[(R - r)^2 - v_0^2 t^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

Die Gesamtbeschleunigung berechnet sich nach 26.17 aus der Bahnbeschleunigung $a_{t,S}$ und der Normalbeschleunigung $a_{n,S}$, für die 26.22 gilt:



$$a_S = \sqrt{a_{t,S}^2 + a_{n,S}^2} = \sqrt{a_{t,S}^2 + \left(\frac{v_S^2}{R-r}\right)^2} = \frac{(R-r)^2 v_0^2}{[(R-r)^2 - v_0^2 t^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

Der Berührungs punkt zwischen Rad und Boden ist der Momentanpol der Bewegung des Rades. Der Radmittelpunkt mit der Geschwindigkeit v_S hat vom Momentanpol den Abstand r , so dass man nach 27.2 die Winkelgeschwindigkeit des Rades erhält:

$$\omega(t) = \frac{v_S}{r} = \left(\frac{R}{r} - 1\right) \frac{v_0}{\sqrt{(R-r)^2 - v_0^2 t^2}} .$$

Die Winkelbeschleunigung des Rades ergibt sich nach 26.20:

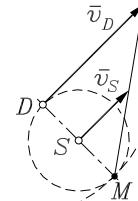
$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \left(\frac{R}{r} - 1\right) \frac{v_0^3 t}{[(R-r)^2 - v_0^2 t^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

- b) Aus dem Bewegungsgesetz $\varphi(t)$ errechnet sich die Zeit t_B , nach der ein Winkel von $\varphi = 45^\circ$ erreicht wird:

$$t_B = \frac{R-r}{v_0} \sin 45^\circ = \frac{R-r}{\sqrt{2} v_0} .$$

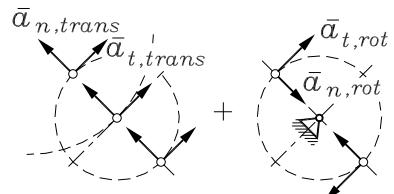
Dies wird in die Formel für v_S eingesetzt, und man erhält die Geschwindigkeit des Mittelpunktes zum Zeitpunkt t_B . Der Punkt D mit der doppelten Entfernung vom Momentanpol (nebenstehende Skizze) hat die doppelte Geschwindigkeit:

$$\bar{v}_S = v_S(t_B) = \sqrt{2} v_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_D = 2 \sqrt{2} v_0 .$$



Für die Berechnung der Beschleunigung des Punktes D wird die Bewegung als Translation des Mittelpunktes S und Rotation um diesen Punkt betrachtet: Beide Bewegungen liefern je einen Bahnbeschleunigungsanteil \bar{a}_t und einen Normalbeschleunigungsanteil \bar{a}_n , so dass sich die Beschleunigung des Punktes D aus vier Anteilen zusammensetzt.

Die für den Punkt S (Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R-r$) geltenden Anteile werden als Translations-Beschleunigung für alle Punkte des Rades (mit Betrag und Richtung) übernommen (nebenstehende Skizze), für die Rotation um diesen Punkt (mit ω und α) gelten 26.18 und 26.22.



Aus den vier Beschleunigungsanteilen errechnet sich die Gesamtbeschleunigung für den Punkt D :

$$\bar{a}_{t,trans} = a_{t,S}(t_B) = \frac{2 v_0^2}{R-r} , \quad \bar{a}_{n,trans} = \frac{v_S^2(t_B)}{R-r} = \frac{2 v_0^2}{R-r} ,$$

$$\bar{a}_{t,rot} = r \alpha(t_B) = \frac{2 v_0^2}{R-r} , \quad \bar{a}_{n,rot} = r \omega^2(t_B) = \frac{2 v_0^2}{r} .$$

$$\bar{a}_D = \sqrt{(\bar{a}_{t,trans} + \bar{a}_{t,rot})^2 + (\bar{a}_{n,trans} - \bar{a}_{n,rot})^2} = \frac{2 v_0^2}{R-r} \sqrt{8 - 4 \frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r}\right)^2} .$$

27.2 Ebene Relativbewegung eines Punktes

Jede Bewegung kann nur relativ zu einem Bezugssystem beschrieben werden. Bewegt sich das Bezugssystem selbst, so stellt sich die Bewegung relativ zum Bezugssystem bzw. relativ zu einem „festen System“ unterschiedlich dar (die Anführungsstriche sollen andeuten, dass es ein solches System eigentlich nicht gibt).

Beispiel 1: In einem sich bewegenden Fahrzeug wird ein Gegenstand senkrecht nach oben geworfen: Die Beobachter im Fahrzeug bzw. außen stehende Beobachter (im ruhenden System) sehen unterschiedliche Bahnkurven (**Abbildung 27.14**).

Ein Punkt auf dem Umfang eines Rades führt aus der Sicht des Mitfahrers eine Kreisbewegung aus, für den ruhenden Beobachter bewegt sich der Punkt auf einer Zykloide (vgl. Beispiel auf Seite 465).

In diesem Abschnitt sollen Probleme behandelt werden, bei denen sich ein *Punkt relativ zu einem sich ebenfalls bewegenden starren Körper bewegt*. Natürlich kann die Bewegung des Punktes immer mit Bezug auf ein festes Koordinatensystem betrachtet werden. Vielfach ist es jedoch zweckmäßiger, die Führungsbewegung (Bewegung des starren Körpers im festen Koordinatensystem) und die Relativbewegung (des Punktes relativ zum starren Körper) gesondert zu betrachten und die beiden Bewegungen anschließend zu überlagern. Das folgende Beispiel zeigt, was dabei zu beachten ist.

Beispiel 2: Eine Kreisscheibe rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt ein Punkt P vom Außenrand aus eine Bewegung mit konstanter Relativgeschwindigkeit v_{rel} radial nach innen.

Gegeben: R , ω_0 , v_{rel} .

In einem festen (nicht mitrotierenden) Koordinatensystem sollen der Ortsvektor, der Geschwindigkeitsvektor und der Beschleunigungsvektor für den Punkt P ermittelt werden.

Bis zum Zeitpunkt t hat sich die Scheibe nach 26.23 um den Winkel $\omega_0 t$ gedreht, der Punkt ist nach 26.5 um $v_{rel} t$ radial nach innen gewandert. Bezüglich des skizzierten (festen) Koordinatensystems wird seine Lage durch folgenden Ortsvektor beschrieben:

$$\vec{r}(t) = (R - v_{rel} t) \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix}$$

Die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit liefert den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor:

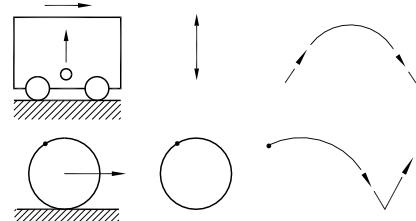
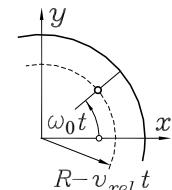
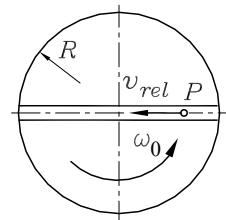


Abbildung 27.14: Bahnkurven aus der Sicht von mitfahrenden und nicht mitfahrenden Beobachtern



$$\vec{v}(t) = (R - v_{rel} t) \omega_0 \begin{bmatrix} -\sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{bmatrix} + v_{rel} \begin{bmatrix} -\cos \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t \end{bmatrix} ,$$

$$\vec{a}(t) = (R - v_{rel} t) \omega_0^2 \begin{bmatrix} -\cos \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t \end{bmatrix} + 2v_{rel}\omega_0 \begin{bmatrix} \sin \omega_0 t \\ -\cos \omega_0 t \end{bmatrix} .$$

Die Vektoren

$$\vec{e}_t = \begin{bmatrix} -\sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} -\cos \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t \end{bmatrix}$$

sind der tangentiale Einheitsvektor bzw. der (nach innen gerichtete) Normalen-Einheitsvektor, so dass die Faktoren vor diesen Vektoren deren Beträge sind.

Das Ergebnis gestattet eine anschauliche Interpretation der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile:

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} setzt sich wie erwartet aus der *Führungs geschwindigkeit* mit dem Betrag

$$v_f = (R - v_{rel} t) \omega_0$$

(Bahngeschwindigkeit des Punktes der rotierenden Scheibe, in dem sich P zur Zeit t gerade befindet) und der *Relativgeschwindigkeit* mit dem Betrag v_{rel} zusammen. Die nebenstehende Skizze zeigt diese beiden Anteile.

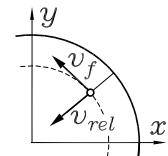


Abbildung 27.15:
Führungs geschwindigkeit und Relativ geschwindigkeit

Auch bei der Beschleunigung wird der erste Summand des Ergebnisses durch die Führungs bewegung (Drehung der Scheibe) verursacht: Es ist die Normalbeschleunigung der Punkte der Scheibe, die sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $(R - v_{rel} t)$ bewegen (dort befindet sich P gerade). Diese so genannte *Führungs beschleunigung* a_f könnte im allgemeinen Fall noch um die Bahnbeschleunigung dieses Punktes ergänzt werden müssen, wenn die Führungsgeschwindigkeit (hier die Winkelgeschwindigkeit ω_0) nicht konstant ist.

Eine im Allgemeinen auch mögliche *Relativbeschleunigung* a_{rel} kommt im Ergebnis nicht vor, weil die Relativgeschwindigkeit des Punktes P gegenüber der Scheibe konstant ist.

Dafür tritt ein Beschleunigungsanteil auf, der nur in der Kombination der beiden Bewegungen seine Ursache haben kann, da diese so genannte *Coriolis beschleunigung*

$$a_C = 2 \omega_0 v_{rel}$$

(nach dem französischen Physiker GUSTAVE GASPARD CORIOLIS, 1792 - 1843) das Produkt der Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung und der Relativgeschwindigkeit enthält (a_C tritt nicht auf, wenn nicht ω_0 und v_{rel} gleichzeitig vorhanden sind). In dem betrachteten Beispiel kann die Coriolisbeschleunigung als „Verzögerung“ interpretiert werden, die der Punkt P erfährt, weil er sich aus Bereichen höherer Führungsgeschwindigkeit auf das Niveau geringerer Führungsgeschwindigkeit (kleinerer Radius bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω_0) begibt. Dementsprechend ist dieser Beschleunigungsanteil in diesem Fall der Führungsgeschwindigkeit entgegengerichtet (**Abbildung 27.16**).

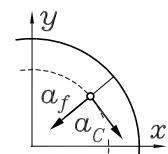


Abbildung 27.16:
Führungs beschleuni gung und Coriolis beschleunigung

Das Phänomen der Coriolisbeschleunigung kann mit folgendem Gedanken-Experiment gut veranschaulicht werden: Auf einem Kinder-Karussell, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 dreht, seien die Mitfahrerplätze (Pferde, Feuerwehr-Autos, ...) in zwei Reihen angeordnet. Auf dem inneren Kreis mit dem kleineren Radius r_i fahren die Kinder mit der Bahngeschwindigkeit $v_i = r_i \omega_0$. Die Kinder auf den „Außen-Pferden“, die auf einem Kreis mit dem größeren Radius r_a angeordnet sind, fahren mit der größeren Geschwindigkeit $v_a = r_a \omega_0$. Der Karussell-Betreiber, der während der Fahrt (z. B. zum Kassieren) von einem „Innen-Pferd“ zu einem „Außen-Pferd“ geht, wird vorher vom Karussell mit v_i bewegt, danach mit v_a , wird also schneller. Seine Beschleunigung von v_i auf v_a ist die Coriolisbeschleunigung.

Aber auch dann, wenn die Relativbewegung nicht in radialer Richtung erfolgt (der Karussell-Betreiber geht z. B. von einem „Außen-Pferd“ zum nächsten), ergibt sich ein entsprechender Beschleunigungsanteil, wie das nachfolgende Beispiel einer Relativbewegung in Umfangsrichtung zeigt.

Beispiel 3:

Ein Punkt P bewegt sich in einer kreisförmigen Rinne mit dem Radius r auf einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierenden Scheibe. Die ebenfalls konstante Relativgeschwindigkeit v_{rel} habe die gleiche Richtung wie die Führungsgeschwindigkeit

$$v_f = r \omega_0$$

(Bahngeschwindigkeit des Scheibenpunktes, in dem sich P gerade befindet), so dass sich P mit der konstanten Gesamtgeschwindigkeit

$$v = r \omega_0 + v_{rel}$$

auf einem Kreis mit dem Radius r bewegt. Dann erfährt er ausschließlich eine Normalbeschleunigung, die nach 26.22 aufgeschrieben werden kann:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \omega_0 + v_{rel})^2}{r} = r \omega_0^2 + \frac{v_{rel}^2}{r} + 2 \omega_0 v_{rel} = a_f + a_{rel} + a_C .$$

Auch in diesem Fall kommt zur Führungsbeschleunigung a_f (Normalbeschleunigung infolge der Kreisbewegung mit ω_0) und zur Relativbeschleunigung a_{rel} (Normalbeschleunigung infolge der Kreisbewegung mit v_{rel}) noch der Anteil der Coriolisbeschleunigung a_C (Beschleunigung infolge Überlagerung zweier Kreisbewegungen) hinzu.

- ⇒ Die Coriolisbeschleunigung des Beispiels 3 hat den gleichen Betrag wie bei der radial gerichteten Relativbewegung im Beispiel 2 und ist wie dort senkrecht zur Relativgeschwindigkeit gerichtet. Man darf also schlussfolgern, dass eine beliebig gerichtete Relativgeschwindigkeit (diese ließe sich in eine tangentiale und eine radiale Komponente zerlegen) eine Coriolisbeschleunigung $a_C = 2 \omega v_{rel}$ hervorruft, die senkrecht zur Relativgeschwindigkeit gerichtet ist.
- ⇒ Schon bei der Beschreibung der Bewegung eines Punktes mit Polarkoordinaten (Abschnitt 26.2.5) war in der Beschleunigungsformel 26.26 ein Anteil aufgetaucht, der der Coriolisbeschleunigung entsprach, weil man sich eine Bewegung in Polarkoordinaten als Drehung um den Winkel $\varphi(t)$ vorstellen kann, der eine radiale „Relativbewegung“ $r(t)$ überlagert wird.

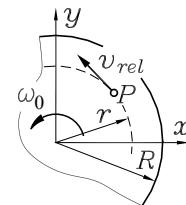
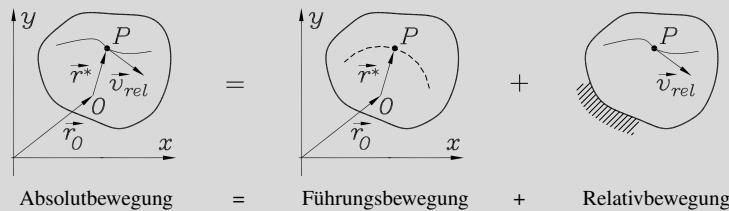


Abbildung 27.17:
Relativbewegung in
Tangentialrichtung

Die an den Beispielen 2 und 3 angestellten Überlegungen demonstrierten zwei grundsätzlich unterschiedliche Betrachtungsweisen für die Behandlung der Bewegung eines Punktes relativ zu einem sich ebenfalls bewegenden starren Körper:

- Die Bewegung des Punktes wird mit einem Ortsvektor bezüglich eines festen Koordinatensystems beschrieben. Dann lassen sich Geschwindigkeit und Beschleunigung (bezogen auf das ruhende System) nach den Regeln der Kinematik des Punktes (Kapitel 26) durch Differenzieren ermitteln. Dieser Weg ist in vielen Fällen recht aufwendig.
- Die Führungsbewegung bezüglich eines festen Koordinatensystems und die Relativbewegung werden gesondert betrachtet. Dann können die Absolutgeschwindigkeit und die Absolutbeschleunigung (Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung bezüglich des ruhenden Systems) durch Überlagerung ermittelt werden nach folgenden Regeln für die

Relativbewegung eines Punktes bezüglich eines starren Körpers in der Ebene:



Die *Führungsbewegung* des starren Körpers wird in einem festen Koordinatensystem beschrieben. Für den Punkt des starren Körpers, in dem sich der Punkt P , der die Relativbewegung ausführt, gerade befindet, werden nach den Formeln 27.6 die *Führungsgeschwindigkeit* \vec{v}_f (maximal zwei Anteile) und die *Führungsbeschleunigung* \vec{a}_f (maximal vier Anteile) ermittelt.

Für die Untersuchung der *Relativbewegung* des Punktes P darf man das Führungssystem als in Ruhe befindlich ansehen. Nach den Regeln der Kinematik des Punktes werden die *Relativgeschwindigkeit* v_{rel} und die *Relativbeschleunigung* a_{rel} (maximal zwei Anteile) ermittelt.

Die *Absolutgeschwindigkeit* (Geschwindigkeit des Punktes P bezüglich des festen Koordinatensystems) ergibt sich durch Addition von Führungs- und Relativgeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \vec{v}_f + \vec{v}_{rel} . \quad (27.7)$$

Die *Absolutbeschleunigung* (Beschleunigung des Punktes P bezüglich des festen Koordinatensystems) ergibt sich durch Addition von Führungs-, Relativ- und Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a} = \vec{a}_f + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_C . \quad (27.8)$$

Der Vektor der *Coriolisbeschleunigung* hat den Betrag

$$a_C = 2 \omega_f v_{rel} \quad (27.9)$$

(ω_f ist die Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung). Die Richtung von \vec{a}_C findet man durch Drehung des Vektors \vec{v}_{rel} um 90° mit dem Drehsinn von ω_f .

Beispiel 4:

Der Mittelpunkt einer starren Scheibe bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 und der Winkelbeschleunigung α_0 auf einer Kreisbahn mit dem Radius R . Die Scheibe dreht sich um ihren Mittelpunkt mit ω_1 und α_1 (alle vier Werte beziehen sich auf die „ruhende Welt“).

In einer kreisförmigen Rinne (Radius r) bewegt sich relativ zur Scheibe ein Punkt P mit v_{rel} und a_{rel} . Zum betrachteten Zeitpunkt hat P den Abstand r^* vom Mittelpunkt der Scheibe.

Gegeben: ω_0 , α_0 , R , ω_1 , α_1 , r^* , v_{rel} , a_{rel} , r .

Bei diesem Beispiel kommen alle Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile vor, die für den Punkt P überhaupt möglich sind. Die Führungsbewegung, die P erfährt, wird als Translation mit dem Scheibenmittelpunkt als Bezugspunkt (Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius R) und einer Rotation um diesen Punkt (Radius r^*) betrachtet. Die Relativbewegung ist eine Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius r .

Der translatorische Anteil der Führungs geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit des Scheibenmittelpunktes) gilt für alle Scheibenpunkte und damit auch für P (in der Abbildung 27.18 in der linken Skizze gestrichelt angedeutet). Hinzu kommt die Bahngeschwindigkeit der Rotation um den Mittelpunkt. Zusammen mit der Relativgeschwindigkeit muss die Absolutgeschwindigkeit also aus drei Anteilen vektoriell zusammengesetzt werden.

Die Führungsbeschleunigung besteht aus vier Anteilen: Der Bezugspunkt (Scheibenmittelpunkt) erfährt eine Bahnbeschleunigung und eine Normalbeschleunigung, beide gelten auch für P (in der linken Skizze der Abbildung 27.19 gestrichelt angedeutet), die Rotation um den Bezugspunkt (Kreisbahn mit dem Radius r^*) liefert ebenfalls zwei Anteile. Die Relativbewegung (Punkt P auf Kreisbahn mit dem Radius r) steuert noch einmal zwei Anteile bei, gemeinsam mit der Coriolisbeschleunigung (senkrecht zu v_{rel} , in Drehrichtung von ω_1 gedreht), setzt sich die Absolutbeschleunigung also aus sieben Anteilen vektoriell zusammen.

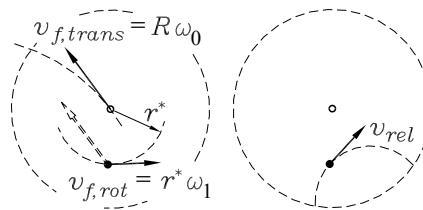
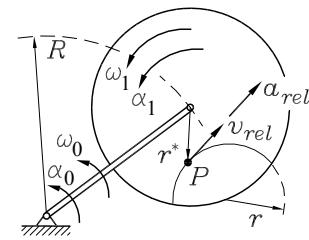


Abbildung 27.18: Führungsgeschwindigkeit (Translation + Rotation) und Relativgeschwindigkeit

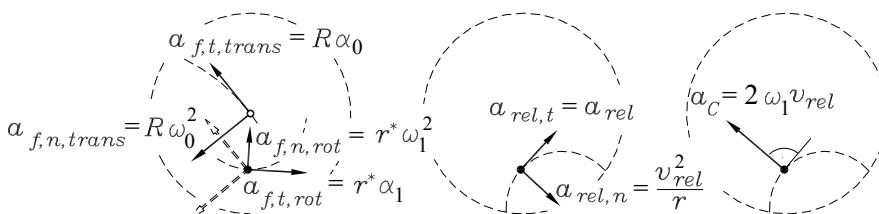


Abbildung 27.19: Vier Anteile aus der Führungsbeschleunigung (links), zwei Anteile aus der Relativbeschleunigung (Mitte) und die Coriolisbeschleunigung setzen sich zur Absolutbeschleunigung zusammen.

27.3 Bewegung des starren Körpers im Raum

Die Lage zweier Punkte eines starren Körpers im Raum sei durch die Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 gegeben. Dann sind einerseits die sechs Koordinaten in den beiden Vektoren nicht unabhängig voneinander, weil der feste Abstand der beiden Punkte

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (27.10)$$

in jeder Lage des starren Körpers eingehalten wird. Andererseits ist die Lage des starren Körpers noch nicht eindeutig beschrieben, weil er sich noch um die Verbindungsgeraden der beiden Punkte drehen kann. Die Lage des starren Körpers im Raum ist also z. B. durch fünf Koordinaten zweier Punkte und eine sechste (Winkel-)Koordinate, die die Drehung um die Verbindungsgeraden der beiden Punkte beschreibt, eindeutig festgelegt. Allgemein gilt:

Der starre (durch keine Bindungen behinderte) Körper im Raum hat sechs Freiheitsgrade. Seine Lage ist durch die Angabe von sechs geeigneten Koordinaten eindeutig bestimmt (z. B. drei Koordinaten eines Punktes und drei Winkel um drei senkrecht aufeinander stehende Achsen), seine Bewegung wird durch die zeitliche Abhängigkeit der Koordinaten beschrieben.

Eine *reine Translation* eines starren Körpers im Raum ist eine Bewegung mit drei Freiheitsgraden (jede beliebige Gerade, die zwei Punkte des starren Körpers verbindet, behält ihre Richtung, alle Punkte bewegen sich auf kongruenten Bahnen). Die reine Translation wird durch die Bewegung eines einzelnen Punktes eindeutig beschrieben, und es gilt der komplette Formelsatz 26.27 bis 26.31, der für die allgemeine Bewegung des Punktes im Raum bereitgestellt wurde.

27.3.1 Reine Rotation

Wenn ein Punkt O des starren Körpers festgehalten wird, kann der Körper nur noch eine reine Rotation ausführen. Zunächst wird angenommen, dass sich alle Punkte auf Kreisbahnen um eine durch O gehende raumfeste Achse bewegen. Die Richtung dieser Achse wird durch einen Einheitsvektor \vec{e}_ω festgelegt. Diese *Rotation um eine feste Achse* wird also durch den Punkt O , den Einheitsvektor \vec{e}_ω und eine skalare Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ eindeutig beschrieben.

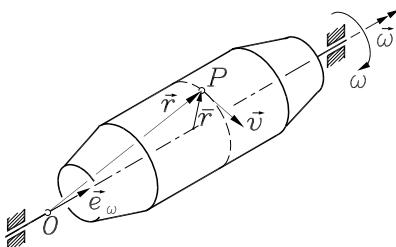


Abbildung 27.20: Rotation um eine feste Achse

Bahngeschwindigkeit, Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung beliebiger Punkte des Körpers können nach 26.18 bis 26.22 ermittelt werden (allgemeine Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn), wenn als Radius ihr jeweiliger senkrechter Abstand von der Drehachse eingesetzt wird (**Abbildung 27.20**).

Es ist üblich und zweckmäßig, einen *Vektor der Winkelgeschwindigkeit* entsprechend

$$\vec{\omega}(t) = \vec{e}_\omega \cdot \omega(t)$$

zu definieren, wobei der Einheitsvektor \vec{e}_ω neben der Drehachse auch noch den Drehsinn nach der „Rechtsschrauben-Regel“ festlegt (Daumen in Pfeilrichtung, dann zeigen die gekrümmten Finger die Drehrichtung an).

Mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit kann für einen beliebigen Punkt P des Körpers, der durch einen Vektor \vec{r} beschrieben wird, der Geschwindigkeitsvektor nach

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(t) \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}(t) \quad (27.11)$$

berechnet werden (\vec{r} zeigt von einem beliebigen Punkt O der Drehachse zum Punkt P , siehe Abbildung 27.20).

Zur Erinnerung: Das Vektorprodukt liefert als Ergebnis wieder einen Vektor, dessen Betrag in diesem Fall $\omega |\vec{r}| \sin \alpha$ ist (α ist der von \vec{r} und \vec{e}_ω eingeschlossene Winkel). Da $|\vec{r}| \sin \alpha$ gerade der senkrechte Abstand \bar{r} des Punktes P von der Drehachse ist, hat der Ergebnisvektor \vec{v} den Betrag der Bahngeschwindigkeit $\bar{r}\omega$. Außerdem liegt der Ergebnisvektor des Vektorprodukts senkrecht zu beiden Faktoren (und damit zwangsläufig tangential an der Kreisbahn von P). Die Vektoren \vec{e}_ω , \vec{r} und \vec{v} bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, so dass die Definition des Drehsinns für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit und die sich daraus ergebende Richtung der Bahngeschwindigkeit „zueinander passen“.

Die Ableitung von 27.11 nach der Zeit (unter Beachtung der Produktregel) ergibt

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\omega}(t) \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}(t) + \omega(t) \cdot \vec{e}_\omega \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad .$$

In diesem Ausdruck taucht noch einmal die Bahngeschwindigkeit des Punktes P

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(t) \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}(t)$$

auf, und es ergibt sich schließlich der Vektor der Beschleunigung bei Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse:

$$\vec{a} = \dot{\omega}(t) \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}(t) + \omega^2(t) \cdot \vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{r}(t)) = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad . \quad (27.12)$$

Man erkennt, dass der erste Anteil wie die Geschwindigkeit nach 27.11 tangential zur Bahnkurve von P gerichtet ist (man vergleiche die Diskussion zur Formel für den Geschwindigkeitsvektor). Es ist die Bahnbeschleunigung \vec{a}_t auf der Kreisbahn mit dem Betrag $\bar{r}\dot{\omega}$. Das zweifache Vektorprodukt des zweiten Summanden liefert (in der durch die Klammer vorgegebenen Reihenfolge, das Vektorprodukt ist weder kommutativ noch assoziativ) einen Vektor, der zur Drehachse weist. Es ist die Normalbeschleunigung \vec{a}_n mit dem Betrag $\bar{r}\omega^2$.

Übrigens: Dass die Regeln des Vektorprodukts so hervorragend zu diesem Problem passen (wie z. B. auch schon zur Definition des Momentes, vgl. Abschnitt 8.3.2), ist durchaus kein Zufall. Sie sind vielmehr speziell für die Anwendungen in der Mechanik (und in einigen anderen Gebieten der Physik) so sinnvoll definiert worden.

Der allgemeine Fall der Rotation liegt vor, wenn nur noch ein Punkt O des starren Körpers festgehalten wird, so dass die Drehachse keine raumfeste Lage mehr hat (und selbst eine Rotation um O ausführt). Dann wird auch der Einheitsvektor $\vec{e}_\omega(t)$, der ihre Lage kennzeichnet, zeitabhängig.

Die Lage des Punktes P wird durch einen vom Punkt O ausgehenden Vektor \vec{r} beschrieben. Durch Ableitung von \vec{r} nach der Zeit, wobei zusätzlich die Zeitabhängigkeit von $\vec{e}_\omega(t)$ beachtet werden muss, erhält man *Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor für die Rotation des starren Körpers um einen festen Punkt*:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}(t) , \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \cdot \frac{d\vec{e}_\omega}{dt} \times \vec{r} + \dot{\omega} \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r} + \omega^2 \cdot \vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{r}) .\end{aligned}\quad (27.13)$$

Bis auf den ersten Term im Ausdruck für die Beschleunigung, der die Veränderlichkeit der Drehachse kennzeichnet, stehen in 27.13 wieder die bekannten Anteile.

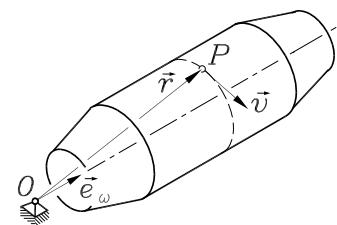


Abbildung 27.21: Rotation um einen festen Punkt

27.3.2 Allgemeine Bewegung

Die allgemeine Bewegung des starren Körpers im Raum wird (wie in der Ebene, vgl. Abschnitt 27.1.4) als Translation, die durch die Bewegung eines Bezugspunktes O beschrieben wird, mit einer überlagerten Rotation um diesen Punkt aufgefasst.

Die **Abbildung 27.22** zeigt die beiden Vektoren (Bezeichnungen für die Vektoren wie im Abschnitt 27.1.4), die mit ihren zeitlich veränderlichen Komponenten die Bewegung beschreiben.

Mit den Formeln für die Bewegung des Punktes im Raum 26.27 bis 26.31 und den im vorigen Abschnitt entwickelten Formeln für die Rotation des starren Körpers um einen Punkt ergeben sich die Beziehungen für die allgemeine

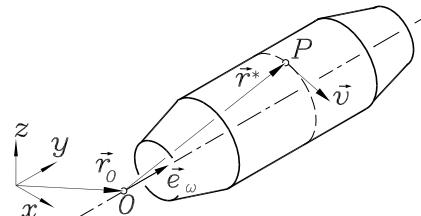


Abbildung 27.22: Translation + Rotation um den Punkt O

Bewegung eines starren Körpers im Raum:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_O + \vec{r}^* , \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \omega \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}^* , \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + \omega \cdot \frac{d\vec{e}_\omega}{dt} \times \vec{r}^* + \dot{\omega} \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{r}^* + \omega^2 \cdot \vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{r}^*) .\end{aligned}\quad (27.14)$$

27.3.3 Relativbewegung eines Punktes

Zunächst muss diskutiert werden, welche Konsequenzen der im Abschnitt 27.2 für die ebene Relativbewegung verwendete „Trick“, mit zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen zu operieren (festes System für die Führungsbewegung und bewegtes System für die Relativbewegung), für das Arbeiten mit Vektoren hat. Der Führungsgeschwindigkeit, beschrieben im ruhenden Koordinatensystem nach 27.14 durch

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^*$$

(siehe Abbildung 27.22), wird die Relativgeschwindigkeit \vec{v}_{rel} überlagert, die sich für einen Beobachter im bewegten System als Änderung des Vektors \vec{r}^* darstellt:

$$\vec{v}_{rel} = \frac{d^*\vec{r}^*}{dt}$$

Der Stern beim Ableitungssymbol deutet an, dass es die „Ableitung im bewegten System“ ist, die nicht berücksichtigt, dass sich \vec{r}^* auch durch die Bewegung des starren Körpers ändert.

Die Absolutgeschwindigkeit kann also entweder nach

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* + \vec{v}_{rel} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* + \frac{d^*\vec{r}^*}{dt} \quad (27.15)$$

oder durch Ableitung des Ortsvektors im ruhenden System

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}^*}{dt}$$

ermittelt werden. Ein Vergleich dieser beiden Formeln liefert mit

$$\frac{d\vec{r}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}^* + \frac{d^*\vec{r}^*}{dt} \quad (27.16)$$

den *allgemeingültigen Zusammenhang der Ableitung eines Vektors nach der Zeit im ruhenden bzw. bewegten Koordinatensystem*, der z. B. auch für die Ableitung von \vec{v}_{rel} gilt:

$$\frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \frac{d^*\vec{v}_{rel}}{dt}$$

Nach 27.15 kann die *Absolutgeschwindigkeit* also durch die einfachere Betrachtung in zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen gewonnen werden.

Um auch zu einer entsprechenden Formel für die *Absolutbeschleunigung* zu kommen, wird 27.15 nach der Zeit abgeleitet:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} \\ &= \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^* + \frac{d^*\vec{r}^*}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \frac{d^*\vec{v}_{rel}}{dt} \\ &= \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \frac{d^*\vec{v}_{rel}}{dt} \\ &= \vec{a}_f + \vec{a}_C + \vec{a}_{rel}. \end{aligned} \quad (27.17)$$

⇒ Die Formel 27.17 bestätigt, dass die Strategie, die für die ebene Bewegung (Abschnitt 27.2) empfohlen wurde, ungeändert für die Bewegung im Raum übernommen werden kann:

- Die ersten drei Glieder in 27.17 entsprechen exakt der Beschleunigungsformel 27.14. Es ist die *Führungsbeschleunigung* des Punktes P des starren Körpers, die ohne Berücksichtigung der Relativbewegung ermittelt werden kann.
- Der letzte Term in 27.17 ist die *Relativbeschleunigung, betrachtet im bewegten Koordinatensystem*. Man darf für ihre Berechnung den starren Körper also als momentan in Ruhe befindlich ansehen.
- Schließlich ergibt sich als dritter Anteil wie im ebenen Fall die *Coriolisbeschleunigung*, für die folgende Vektorformel gilt:

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} . \quad (27.18)$$

⇒ Für die ebene Bewegung, bei der der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung $\vec{\omega}$ konstante Richtung (senkrecht zur Ebene und damit senkrecht zur Relativgeschwindigkeit) hat, ergibt sich auch nach 27.18 der Betrag, den die Formel 27.9 ausweist. Bei der räumlichen Bewegung können $\vec{\omega}$ und \vec{v}_{rel} einen beliebigen Winkel bilden. Nach der Definition des Vektorprodukts gilt für den Betrag der Coriolisbeschleunigung

$$a_C = 2 \omega v_{rel} \sin \alpha \quad (27.19)$$

mit dem von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel α . Die Coriolisbeschleunigung ist gleich Null, wenn $\vec{\omega}$ und \vec{v}_{rel} parallel sind.

Beispiel:

Ein Pkw auf der Autobahn in Richtung Norden kurz vor Hamburg (etwa $53,5^\circ$ nördlicher Breite) fährt mit 200 km/h (kurzzeitig bei sehr schönem Wetter im Sommer um 4:30 Uhr, wenn es schon hell und die Autobahn noch leer ist und eigentlich ohnehin nur wegen dieser Aufgabe). Welcher Coriolisbeschleunigung infolge der Erddrehung ist das Fahrzeug ausgesetzt?

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung $\vec{\omega}_{Erde}$ und der Vektor der Relativgeschwindigkeit \vec{v}_{rel} des Fahrzeugs schließen den Winkel $\alpha = 53,5^\circ$ ein (**Abbildung 27.23**). Mit der Drehzahl der Erde $n_{Erde} = 1 \text{ d}^{-1}$ (eine Umdrehung pro Tag) und der Winkelgeschwindigkeit ω nach 26.21 errechnet man nach 27.19:

$$\begin{aligned} a_C &= 2 \omega_{Erde} v_{rel} \sin \alpha = 2 \cdot 2 \pi \cdot 200 \frac{\text{km}}{\text{d}} \sin 53,5^\circ \\ &= 800 \pi \sin 53,5^\circ \frac{1000 \text{ m}}{86400 \cdot 3600 \text{ s}^2} = 0,00650 \text{ m/s}^2 . \end{aligned}$$

Sie ist nach Westen gerichtet¹. Der Fahrer hat sie nicht bemerkt.

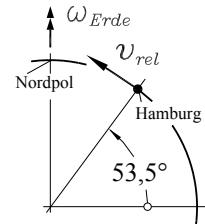


Abbildung 27.23: Die Vektoren $\vec{\omega}_{Erde}$ und \vec{v}_{rel} schließen einen Winkel ein, der dem Breitengrad entspricht

¹ „Warum nach Westen?“ Mathematische Antwort: „Weil das Vektorprodukt $\vec{\omega}_{Erde} \times \vec{v}_{rel}$ einen solchen Vektor erzeugt.“ Anschauliche Erklärung: In München (etwa $48,1^\circ$ nördlicher Breite) wird man auf dem Breitenkreis mit dem Radius $r_M = R \cos 48,1^\circ \approx 4256 \text{ km}$ (R ist der Erdradius) mit $v_M = r_M \omega_{Erde} \approx 1114 \text{ km/h}$ Richtung Osten bewegt, ein Hamburger fährt auf der Erde nur mit $v_H \approx 992,5 \text{ km/h}$ mit. Wer von München nach Hamburg fährt, muss sich also den deutlich langsameren Norddeutschen anpassen: \vec{v} Richtung Osten → \vec{a}_C (Verzögerung) Richtung Westen.

27.4 Systeme starrer Körper

Der durch keine Bindungen gefesselte starre Körper hat im Raum 6 Freiheitsgrade (vgl. Abschnitt 27.3), in der Ebene 3 Freiheitsgrade (vgl. Abschnitt 27.1). Um seine Lage eindeutig zu beschreiben, sind 6 bzw. 3 geeignete Koordinaten erforderlich.

Häufig ist die Bewegungsmöglichkeit des Körpers durch Bindung an vorgeschriebene Bahnen oder Fixierung einzelner Punkte eingeschränkt. So hat z. B. ein Körper mit einem festgehaltenen Punkt in der Ebene noch einen Freiheitsgrad (Drehung), im Raum noch drei Freiheitsgrade (Drehungen um drei Achsen).

Bei einem aus verschiedenen starren Körpern bestehenden *System starrer Körper* kann jeder einzelne solchen Bindungen unterworfen sein, außerdem können sie untereinander gekoppelt sein. Diese Kopplungen können starr (z. B. Gelenke, starre Seile oder Stäbe) oder nicht starr (z. B. elastische Federn) sein.

Kopplungen, die nicht starr sind, schränken die Anzahl der Freiheitsgrade nicht ein, es wirken aber über die Kopplungselemente Kräfte zwischen den Körpern, die bei den Problemen in der Kinetik berücksichtigt werden müssen. Starre Kopplungen (*kinematische Kopplungen*) schränken die Anzahl der Freiheitsgrade ein, da zwischen den Koordinaten, die die Lage der Körper beschreiben, feste Beziehungen bestehen (*Zwangsbedingungen*). Ein sehr häufig auftretendes Problem ist es, die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade zu ermitteln.

Die Anzahl der Koordinaten, die mindestens erforderlich ist, um die Lage eines Systems starrer Körper eindeutig zu beschreiben, entspricht der **Anzahl der Freiheitsgrade** des Systems.

- ⇒ Häufig ist folgendes Gedankenexperiment recht nützlich: Man behindert nacheinander die einzelnen Freiheitsgrade der starren Körper des Systems durch Arretieren (entspricht dem Einführen einer notwendigen Koordinate). Wenn das System keine Bewegungsmöglichkeit mehr hat, entspricht die Anzahl der Arretierungen der Anzahl der Freiheitsgrade.

Beispiel 1:

Das in **Abbildung 27.24** skizzierte kinematische Modell eines Satelliten mit „Sonnenpaddeln“ besteht aus 5 starren Körpern und hat 10 Freiheitsgrade: Die Lage eines Körpers (z. B. des Satellitenkörpers) ist durch die Angabe von 6 Koordinaten eindeutig festgelegt. Nach Fixierung des Satellitenkörpers durch Arretierung dieser 6 Bewegungsmöglichkeiten können die beiden unmittelbar an ihm befestigten Paddel nur noch je eine (von der Lage des Satelliten unabhängige) Drehbewegung ausführen, die durch jeweils eine weitere Koordinate beschrieben wird. Entsprechendes gilt für die Außenpaddel, nachdem auch die Lage der Innenpaddel festgelegt wurde.

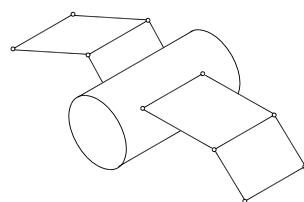


Abbildung 27.24: System mit 10 Freiheitsgraden

Zur Beschreibung der Bewegung eines Systems starrer Körper (insbesondere in der Kinetik) ist es meist vorteilhaft, eine größere Anzahl von Koordinaten einzuführen.

Fast immer ist man jedoch gezwungen, irgendwann die Anzahl der Koordinaten auf die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems zu reduzieren. Dafür müssen die Zwangsbedingungen, die die Koordinaten untereinander verknüpfen, formuliert werden.

Zwangsbedingungen sind Gleichungen, die von den einzelnen Koordinaten anzunehmenden Werte auf die geometrisch verträglichen Möglichkeiten einschränken. Dementsprechend können sie im Allgemeinen aus Geometriebetrachtungen gewonnen werden. Ihre Ableitungen nach der Zeit führen auf die Zwangsbedingungen, die für die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen gelten müssen.

Vielfach ist es (besonders bei ebener Bewegung) einfacher, unter Ausnutzung der Eigenschaften des Momentanpols (vgl. Abschnitt 27.1.3) zunächst die Zwangsbedingungen für die Geschwindigkeiten zu formulieren, um dann durch Integration auf die Bedingungen für die Bewegungs-koordinaten zu kommen. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten werden durch Vergleich der Werte für die einzelnen Koordinaten zu einem speziellen Zeitpunkt bestimmt, was jedoch meist unproblematisch ist. Da man im Allgemeinen den Koordinatenursprung für jede einzelne Koordinate willkürlich festlegen kann, ist es zweckmäßig, folgende Regel einzuhalten:

Alle Koordinaten, die die Lage eines Systems starrer Körper beschreiben und durch Zwangsbedingungen verknüpft sind, sollten (wenn es irgendwie möglich ist) zum gleichen Zeitpunkt den Wert Null annehmen.

An den nachfolgenden Beispielen wird das Aufschreiben der Zwangsbedingungen für typische Fälle der technischen Praxis demonstriert.

Beispiel 2: Die skizzierte Seilwinde mit Gegengewicht wird von dem Antriebsrad 3 angetrieben. Es darf angenommen werden, dass das Seil und die Verbindungsstangen zwischen den Körpern 1 und 2 bzw. 4 und 5 dehnstarr sind und dass sich das Seil schlupffrei über die Rollen bewegt.

Gegeben: r_2, r_3, r_4 .

Die Körper 2 und 4 führen jeweils eine allgemeine Bewegung aus (Translation und Rotation), das Antriebsrad 3 eine reine Rotation, das Gegengewicht 5 und der Körper 1 jeweils eine reine Translation. In der Skizze sind dementsprechend 7 Koordinaten eingetragen, die unter den genannten Voraussetzungen natürlich nicht unabhängig voneinander sind.

Das System hat nur einen Freiheitsgrad. Bei Vorgabe einer Bewegung (z. B. des Antriebsrades 3) bewegen sich alle anderen Körper zwangsläufig, so dass 6 Zwangsbedingungen formuliert und die 7 Koordinaten durch eine ersetzt werden können. Als verbleibende Koordinate wird der Winkel φ_3 des Antriebsrades gewählt.

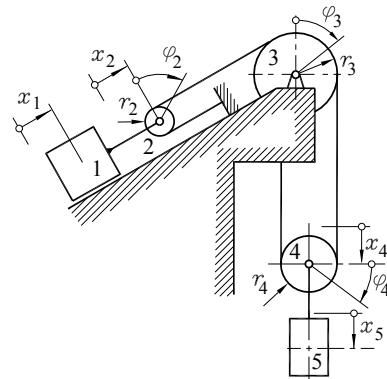


Abbildung 27.25: System mit einem Freiheitsgrad

Die Zwangsbedingungen werden zunächst für die Geschwindigkeiten aufgeschrieben. Die Abbildung 27.26 zeigt die Umfangsgeschwindigkeit des Antriebsrades $r_3 \dot{\phi}_3$, die über das Seil an die Rollen 2 und 4 weitergegeben wird. Der untere Seilstrang an der Rolle 2 ist in Ruhe, diese kann deshalb nur „auf diesem Seilstrang rollen“. Der Momentanpol M_2 dieser Rollbewegung ist eingezeichnet. Da sich die Geschwindigkeiten der Punkte der Rolle 2 nach 27.4 wie die Abstände vom Momentanpol verhalten, hat der Mittelpunkt die halbe Geschwindigkeit des oberen Punktes. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Rolle 2 dreht, berechnet sich nach 27.2 zu

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\dot{x}_2}{r_2} .$$

Entsprechende Überlegungen führen zu den Geschwindigkeiten an der Rolle 4, die auf dem in Ruhe befindlichen linken Seilstrang rollt.

Die Geschwindigkeiten der Mittelpunkte der Rollen 2 bzw. 4 werden auf den Körper 1 bzw. das Gegengewicht 5 übertragen. Nachfolgend werden die 6 Zwangsbedingungen in der Form zusammengestellt, die alle Geschwindigkeiten durch $\dot{\phi}_3$ ausdrücken:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{r_3}{2} \dot{\phi}_3 ; \quad \dot{x}_2 = \frac{r_3}{2} \dot{\phi}_3 ; \quad \dot{\phi}_2 = \frac{r_3}{2r_2} \dot{\phi}_3 ; \\ \dot{x}_4 &= \frac{r_3}{2} \dot{\phi}_3 ; \quad \dot{\phi}_4 = \frac{r_3}{2r_4} \dot{\phi}_3 ; \quad \dot{x}_5 = \frac{r_3}{2} \dot{\phi}_3 .\end{aligned}$$

- ⇒ Die *Zwangsbedingungen für die Beschleunigungen* haben die gleiche Form („mit einem zusätzlichen Punkt über den Koordinaten“). Unter der Voraussetzung, dass alle Koordinaten gleichzeitig Null werden (es braucht nicht unbedingt der Zeitpunkt $t = 0$ zu sein, für den dies gilt, aber meistens ist es sinnvoll, die Zeitzählung zu beginnen, wenn die Koordinaten den Wert Null haben), gelten die für die Geschwindigkeit formulierten Bedingungen auch für die Koordinaten selbst („ohne Punkt über den Koordinaten“).
- ⇒ Es ist im Allgemeinen zweckmäßig, die Bewegungscoordinaten so einzuführen, dass alle gleichzeitig positiv werden. So werden Minuszeichen in Zwangsbedingungen vermieden.

Beispiel 3:

Das skizzierte Planetengetriebe (Umlaufgetriebe, Animation unter www.TM-aktuell.de) kann mit einem Freiheitsgrad oder mit zwei Freiheitsgraden betrieben werden.

Gegeben: r_1, r_2 .

Bei feststehendem Gehäuse 3 (Getriebe hat einen Freiheitsgrad) gibt es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Drehzahl des Steges 4 und der Drehzahl des Sonnenrades 1.

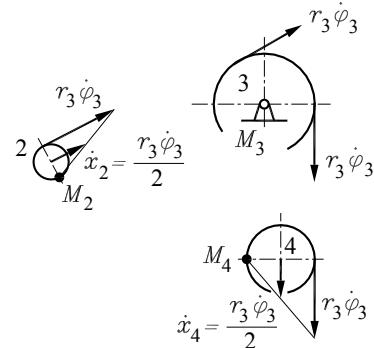


Abbildung 27.26: Momentanpole und Geschwindigkeiten

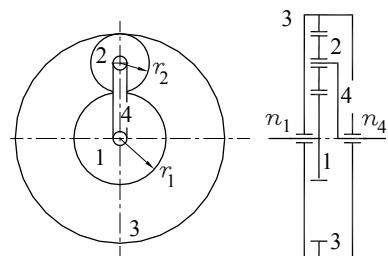


Abbildung 27.27: Planetengetriebe

Es wird angenommen, dass der Steg 4 mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_4 = 2\pi n_4$ umläuft. Der sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $(r_1 + r_2)$ bewegende äußere Stegpunkt treibt den Mittelpunkt des Planetenrades 2 mit seiner Bahngeschwindigkeit $(r_1 + r_2)\omega_4$.

Das Planetenrad kann bei feststehendem Gehäuse nur eine Rollbewegung auf dessen Innenverzahnung ausführen, der Berührungsrand ist der Momentanpol M_2 für die Bewegung des Planetenrades. Dessen Eingriffspunkt mit dem Sonnenrad 1 hat die doppelte Geschwindigkeit des Mittelpunktes (doppelte Entfernung vom Momentanpol, siehe Abbildung 27.28). Diese Geschwindigkeit ist gleichzeitig die Umfangsgeschwindigkeit für das Sonnenrad, dessen Winkelgeschwindigkeit sich daraus errechnen lässt:

$$\omega_1 = \frac{2(r_1 + r_2)\omega_4}{r_1} \quad \Rightarrow \quad n_1 = 2 \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) n_4 .$$

Wenn auch das *Gehäuse drehbar* gelagert ist (Getriebe hat zwei Freiheitsgrade), können zwei Drehzahlen vorgegeben werden, die sich überlagern (*Differenzial*) und in dem dritten Getriebeglied eine eindeutige Drehzahl erzeugen. Es wird angenommen, dass der Steg 4 mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_4 = 2\pi n_4$ umläuft und sich das Gehäuse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_3 = 2\pi n_3$ dreht (Abbildung 27.29).

Dann sind zwei Punkte des Planetenrades 2 zwangsgeführt: Der Eingriffspunkt am Gehäuse muss sich mit der Bahngeschwindigkeit der Innenverzahnung $(r_1 + 2r_2)\omega_3$ bewegen, der Mittelpunkt mit der Bahngeschwindigkeit $(r_1 + r_2)\omega_4$, die der Steg ihm aufzwingt. Beide Geschwindigkeiten sind parallel, so dass sich der Momentanpol M_2 des Planetenrades 2 nach der Strahlensatzfigur finden ließe (vgl. Abschnitt 27.1.3). Es ist aber nicht erforderlich, die Strecke a , die die Lage von M_2 kennzeichnet, zu berechnen, weil man der Skizze auch entnimmt, dass die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Planetenrades das arithmetische Mittel der beiden Geschwindigkeiten an den Eingriffspunkten mit Gehäusezahnkrank und Sonnenrad sein muss:

$$(r_1 + r_2)\omega_4 = \frac{1}{2} [v_1 + (r_1 + 2r_2)\omega_3] \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2(r_1 + r_2)\omega_4 - (r_1 + 2r_2)\omega_3 .$$

Mit der berechneten Bahngeschwindigkeit v_1 des Sonnenrades sind auch dessen Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}$ und natürlich auch seine Drehzahl bekannt. Man errechnet:

$$n_1 = 2 \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) n_4 - \left(1 + 2 \frac{r_2}{r_1}\right) n_3 .$$

Dieses Ergebnis gestattet für zwei vorgegebene Drehzahlen die Berechnung der Drehzahl des dritten Getriebegliedes. Da alle Winkelgeschwindigkeiten linksdrehend angenommen wurden, müsste eine Rechtsdrehung mit negativem Vorzeichen eingehen.

Die willkürliche Annahme, dass die Bahngeschwindigkeit der Innenverzahnung des Gehäuses kleiner als die des äußeren Punktes des Steges ist (und die sich daraus ergebende Lage des Momentanpols des Planetenrades) hat natürlich keinen Einfluss auf das Ergebnis.

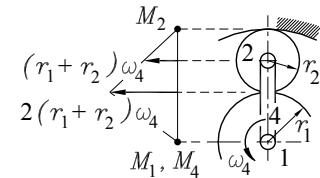


Abbildung 27.28: Feststehendes Gehäuse 3

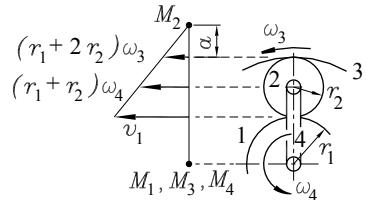


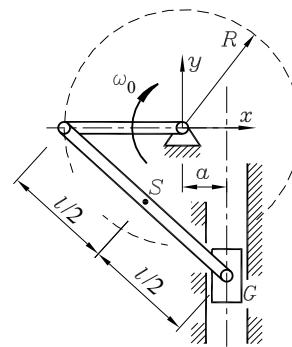
Abbildung 27.29: Drehbar gelagertes Gehäuse

Beispiel 4:

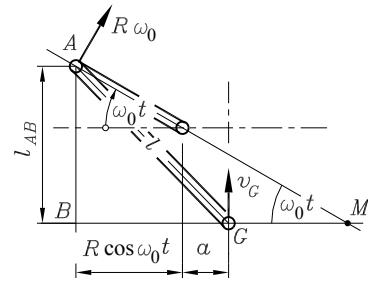
Der skizzierte Mechanismus (exzentrische Schubkurbel, siehe auch die Animation unter www.TM-aktuell.de) ist ein System aus drei starren Körpern. Die Kurbel dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 und befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der dargestellten Lage.

Gegeben: R , l , a , ω_0 .

Für den Gleitstein G und den Mittelpunkt S der Verbindungsstange sollen die Geschwindigkeits-Zeit-Gesetze $v_G(t)$ bzw. $v_S(t)$, für die Verbindungsstange auch das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Gesetz $\omega_S(t)$ ermittelt werden.



Die nebenstehende Skizze zeigt das System zum Zeitpunkt t , die Kurbel hat sich nach 26.23 um den Winkel $\omega_0 t$ gedreht. Für die Verbindungsstange sind zwei Geschwindigkeitsrichtungen bekannt: Ihr Momentanpol M ist der Schnittpunkt der Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Punktes G und der Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Punktes A , der auf dem Kurbelkreis mit der konstanten Bahngeschwindigkeit $R\omega_0$ umläuft (Geschwindigkeit ist tangential zum Kreis mit dem Radius R gerichtet).



Im Dreieck ABG errechnet man die Länge l_{AB} und damit im Dreieck ABM den Abstand l_{AM} des Punktes A vom Momentanpol M und die Länge l_{BM} (Abstand des Punktes B von M):

$$l_{BG} = a + R \cos \omega_0 t \quad , \quad l_{AB} = \sqrt{l^2 - l_{BG}^2} \quad , \quad l_{AM} = \frac{l_{AB}}{\sin \omega_0 t} \quad , \quad l_{BM} = \frac{l_{AB}}{\tan \omega_0 t} \quad .$$

Für $t = 0$ (und allgemein für $\omega_0 t = k\pi$, dies sind die horizontalen Lagen der Kurbel) werden l_{AM} und l_{BM} unendlich. Zu diesen Zeitpunkten bewegt sich die Verbindungsstange rein translatorisch („Momentanpol liegt im Unendlichen“).

Für die Verbindungsstange ist die Geschwindigkeit des Punktes A bekannt. Mit dem Abstand dieses Punktes vom Momentanpol l_{AM} ergibt sich nach 27.2 ihre Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_S(t) = \frac{R\omega_0}{l_{AM}} = \frac{R\omega_0}{l_{AB}} \sin \omega_0 t$$

und nach 27.3 die Geschwindigkeit des Punktes G :

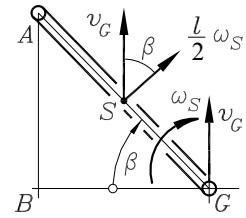
$$v_G(t) = (l_{BM} - l_{BG}) \omega_S = \left(\frac{l_{AB}}{\tan \omega_0 t} - l_{BG} \right) \frac{R\omega_0}{l_{AB}} \sin \omega_0 t = R\omega_0 \left(\cos \omega_0 t - \frac{l_{BG}}{l_{AB}} \sin \omega_0 t \right)$$

ist auch die gesuchte Geschwindigkeit des Gleitsteins.

Für die Berechnung der Geschwindigkeit des Mittelpunktes $v_S(t)$ stehen nun verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung.

- Es wird der Abstand des Punktes S vom Momentanpol ermittelt (S liegt in horizontaler Richtung um $\frac{1}{2}l_{BG}$ und in vertikaler Richtung um $\frac{1}{2}l_{AB}$ von B entfernt, der Abstand von M errechnet sich aus einem rechtwinkligen Dreieck). Dann kann $v_S(t)$ wie $v_G(t)$ berechnet werden. Hier sollen zwei andere Möglichkeiten demonstriert werden:

- b) Mit $v_G(t)$ ist die Geschwindigkeit eines Punktes der Verbindungsstange und mit $\omega_S(t)$ ist ihre Winkelgeschwindigkeit bekannt. Man kann den damit vollständig beschriebenen Bewegungszustand als Translation mit dem Bezugspunkt G und Rotation um G ansehen. Die Geschwindigkeit $v_G(t)$ ist dann allen Punkten des Körpers (auch S , siehe Skizze) zuzuordnen, der die Bahngeschwindigkeit der Rotation um G zu überlagern ist (für den Punkt S : $v_{rot} = \frac{l}{2} \omega_S$).



Es werden zunächst die Komponenten in horizontaler bzw. vertikaler Richtung aufgeschrieben, aus denen sich dann die Gesamtgeschwindigkeit des Punktes S errechnet:

$$v_x = \frac{l}{2} \omega_S \sin \beta = \frac{l}{2} \omega_S \frac{l_{AB}}{l} = \frac{R \omega_0}{2} \sin \omega_0 t ,$$

$$v_y = v_G + \frac{l}{2} \omega_S \cos \beta = v_G + \frac{l}{2} \omega_S \frac{l_{BG}}{l} = R \omega_0 \left(\cos \omega_0 t - \frac{l_{BG}}{2l_{AB}} \sin \omega_0 t \right) ,$$

$$v_S(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} .$$



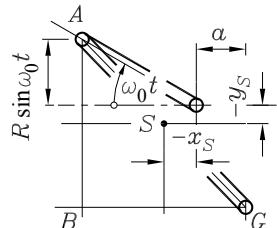
- c) Schließlich kann $v_S(t)$ auch nach den Regeln der Kinematik des Punktes (Kapitel 26) ermittelt werden. Die Komponenten des Ortsvektors werden in einem geeigneten Koordinatensystem aufgeschrieben. Nach 26.9 ergibt sich dann die Bahngeschwindigkeit.

Bezüglich des in der Aufgabenstellung angegebenen Koordinatensystems liest man aus nebenstehender Skizze ab:

$$-x_S + a = \frac{1}{2} l_{BG} , \quad -y_S + R \sin \omega_0 t = \frac{1}{2} l_{AB} .$$

Die Bahnkurve des Punktes S wird also beschrieben durch

$$x_S(t) = a - \frac{1}{2} l_{BG} , \quad y_S(t) = R \sin \omega_0 t - \frac{1}{2} l_{AB} ,$$



und das Differenzieren dieser beiden Komponenten des Ortsvektors nach der Zeit ergibt wieder die bereits angegebenen Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y .

Typisch für die Analyse der Bewegung von Mechanismen ist, dass die Funktionen ziemlich unbequem in der Handhabung werden. Der Ehrgeiz, durch „Einsetzen und Vereinfachen“ zu möglichst „schönen Endformeln“ zu kommen, rächt sich häufig durch Rechenfehler. Deshalb sollte man mit einem Funktionensatz arbeiten, wie ihn **Abbildung 27.30** für das Mathematikprogramm Maple zeigt.

```
> comt      := t -> cos(omega[0]*t);
> somt      := t -> sin(omega[0]*t);
> l[BG]     := t -> a+R*comt(t);
> l[AB]     := t -> sqrt(l^2-l[BG](t)^2);
> x[S]      := t -> a-l[BG](t)/2;
> y[S]      := t -> R*somt(t)-l[AB](t)/2;
> v[X]      := diff(x[S](t),t);
> v[Y]      := diff(y[S](t),t);
> v[S]      := sqrt(v[X]^2+v[Y]^2);
> omega[S]  := t -> R*omega[0]/l[AB](t)*somt(t);
> v[G]      := t -> R*omega[0]*(comt(t)-
>                                l[BG](t)/l[AB](t)*somt(t));
```

Abbildung 27.30: Funktionensatz in Maple

In einem *Funktionensatz* enthalten alle Funktionen (neben der unabhängigen Variablen, hier ist das die Zeit t) nur die gegebenen Größen und die vorab definierten Funktionen. Ein Mathematik-Programm sollte damit umgehen können und z. B. die so definierten Funktionen auch grafisch darstellen und differenzieren können.

Die **Abbildung 27.31** zeigt die in der Aufgabenstellung geforderten kinematischen Diagramme $\omega_S(t)$, $v_S(t)$ und $v_G(t)$ für einen vollen Umlauf der Kurbel bei Annahme folgender Abmessungsverhältnisse:

$$\frac{R}{a} = 2 \quad ; \quad \frac{l}{a} = 4 \quad .$$

Zusätzlich ist im rechten unteren Fenster die Bahnkurve des Mittelpunktes S der Verbindungsstange dargestellt (siehe auch www.TM-aktuell.de).

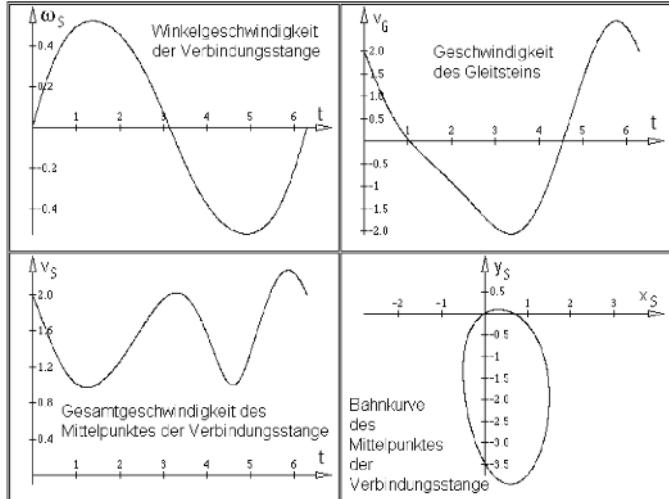


Abbildung 27.31: Kinematische Diagramme und Bahnkurve von S

- ⇒ Das Beispiel 4 am Ende dieses Kapitels über die Kinematik des starren Körpers soll noch einmal eine wichtige Tatsache verdeutlichen, die bereits in einem einleitenden Beispiel erläutert und dann immer wieder genutzt wurde:

Bei der Bewegung eines starren Körpers hat zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Regel jeder Punkt eine andere Geschwindigkeit (Ausnahme ist die reine Translation), es gibt zu einem Zeitpunkt aber **immer nur eine Winkelgeschwindigkeit**, die für den gesamten Körper gilt.

Diese Aussage gilt auch für die Bewegung im Raum, bei der es zu jedem Zeitpunkt nur einen (für den gesamten Körper gültigen) Winkelgeschwindigkeitsvektor gibt. Es ist also nicht sinnvoll, von der „Winkelgeschwindigkeit bezüglich eines Punktes“ zu sprechen.

Da diese Aussage erfahrungsgemäß dem Anfänger erhebliche Schwierigkeiten bereitet, soll die Starrkörperbewegung der Verbindungsstange, die im Beispiel 4 als „Translation mit dem Bezugspunkt G und Rotation um G “ behandelt wurde, noch einmal mit einem anderen Bezugspunkt analysiert werden:

Die Geschwindigkeit des Punktes A ist bekannt: $v_A = R\omega_0$ ist tangential zum Kurbelkreis gerichtet. Wenn die Bewegung der Verbindungsstange nun als Translation mit dem Punkt A als Bezugspunkt und Drehung um A betrachtet wird, ist diese Geschwindigkeit allen Punkten (und damit auch S , siehe **Abbildung 27.32**) zuzuordnen. Für die Rotation ist aber wieder die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω_S wie für die Berechnung mit G als Bezugspunkt zu verwenden. Sie erzeugt allerdings eine andere Bahngeschwindigkeit für den Punkt S .

Das Ergebnis aus der Überlagerung dieser beiden Geschwindigkeiten ist aber unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes, was hier nur für die y -Komponente gezeigt werden soll:

Der vertikale Anteil der Translation beträgt $R\omega_0 \cos \omega_0 t$, der Betrag der Bahngeschwindigkeit von S infolge der Rotation um A ist wieder (wie beim Bezugspunkt G) $\frac{l}{2} \omega_S$, allerdings genau in der entgegengesetzten Richtung. Auch davon geht nur die vertikale Komponente in v_y ein:

$$v_y = R\omega_0 \cos \omega_0 t - \frac{l}{2} \omega_S \cos \beta = R\omega_0 \left(\cos \omega_0 t - \frac{l_{BG}}{2l_{AB}} \sin \omega_0 t \right) .$$

Dies ist exakt die Formel, die auch bei der Betrachtung mit G als Bezugspunkt gefunden wurde.

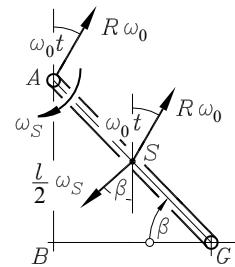
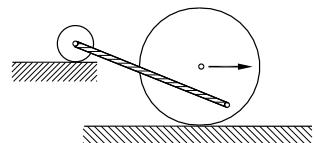


Abbildung 27.32: Translation des Punktes A und Rotation um A

27.5 Aufgaben

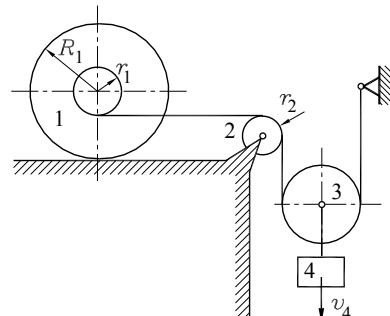
Aufgabe 27.1: Eine große Walze bewegt sich (reine Rollbewegung ohne Schlupf) auf der Horizontalen und zieht über eine exzentrisch angebrachte Stange eine kleine Walze nach, die ebenfalls auf einer Horizontalen rollt. Man zeichne für den dargestellten Bewegungszustand den Momentanpol der Bewegung der (schräffiert dargestellten) Verbindungsstange ein.



Aufgabe 27.2: Die skizzierte Walze führt eine reine Rollbewegung aus, die Seile sind starr und laufen ohne Schlupf über die Rollen. Die Masse 4 bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_4 abwärts.

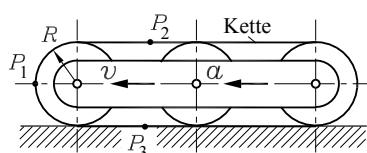
Gegeben: $R_1 = 2r_1$, r_2 , v_4 .

Man ermittle die Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Umlenkrolle 2 und die Geschwindigkeit v_1 des Mittelpunkts der Walze 1.



Aufgabe 27.3: Ein Kettenfahrzeug bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a . Man ermittle die Geschwindigkeiten der Kettenpunkte P_1 , P_2 und P_3 und die Gesamtbeschleunigung für P_1 .

Gegeben: v , a , R .

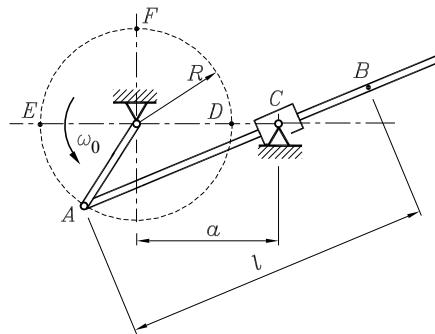


Aufgabe 27.4:

In dem skizzierten Mechanismus dreht sich die Kurbel mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 .

$$\text{Gegeben: } R; \omega_0; \frac{a}{R} = 1,5; \frac{l}{R} = 2.$$

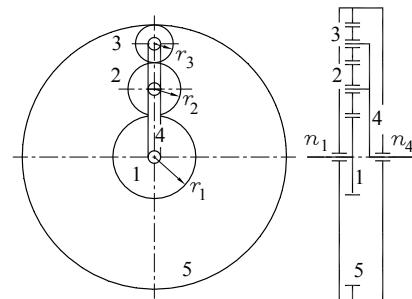
Man ermittle die Momentanpole der Bewegung der Stange AB für die spezielle Lagen, wenn der Punkt A die Punkte E bzw. F passiert. Für beide Lagen sind mit Hilfe des Momentanpols die Geschwindigkeiten des Punktes B zu berechnen und mit den Ergebnissen der Aufgabe 26.4 zu vergleichen.

**Aufgabe 27.5:**

Bei dem skizzierten Planetengetriebe treibt der Steg 4 die beiden Planetenräder 2 und 3, die mit dem Sonnenrad 1 bzw. dem Gehäuse 5 im Eingriff sind (eine Animation findet man unter www.TM-aktuell.de).

$$\text{Gegeben: } r_1, r_2, r_3.$$

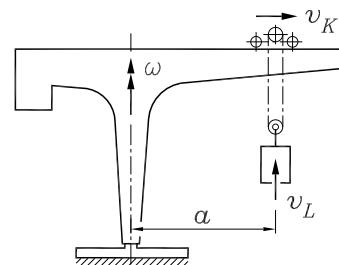
- Man ermittle das Drehzahlverhältnis $\frac{n_1}{n_4}$ unter der Annahme, dass das Gehäuse 5 festgehalten wird.
- Welche Drehzahl n_1 hat das Sonnenrad, wenn der Steg mit n_4 und das Gehäuse (gleichsinnig) mit n_5 gedreht werden?

**Aufgabe 27.6:**

Die Laufkatze eines Drehkrans bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_K nach außen und hebt dabei eine Last mit der konstanten Geschwindigkeit v_L an, während sich der Kran mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

$$\text{Gegeben: } v_K = 0,5 \text{ m/s} ; \omega = 0,1 \text{ s}^{-1} ; \\ v_L = 0,3 \text{ m/s} ; a = 4,5 \text{ m} .$$

Für die skizzierte Laststellung ermittle man die resultierende Geschwindigkeit der Last, die Führungs- und die Coriolisbeschleunigung (Führungsbewegung ist die Drehung des Krans).



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

28 Kinetik des Massenpunktes

Während in der Statik das Gleichgewicht der Kräfte in ruhenden Systemen betrachtet wurde und die Kinematik die Bewegungsabläufe ohne Frage nach ihren Ursachen (Kräfte) untersucht, wird in der *Kinetik* der Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen (Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, ...) und den Kräften behandelt.

Die Beschränkung in diesem Kapitel auf den *Massenpunkt* hat nichts mit der Größe der Abmessungen des Körpers zu tun (vgl. die entsprechende Bemerkung am Anfang des Kapitels 26). Die Abmessungen dürfen allerdings keinen Einfluss auf die zu untersuchende Bewegung haben, und nach den Ausführungen in den Kapiteln 26 und 27 ist die Konsequenz dieser Beschränkung klar: Ein Massenpunkt kann keine (bzw. nur eine zu vernachlässigende) Rotationsbewegung ausführen.

28.1 Dynamisches Grundgesetz

Zu den Axiomen der Statik (Abschnitt 1.2), die auch weiterhin gelten, kommt in der Kinetik nur ein weiteres hinzu. Es ist das

2. Newtonsche Gesetz (nach ISAAC NEWTON, 1643 - 1727):

Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in Richtung dieser Kraft.

Als *Bewegungsgröße* ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit zu verstehen, die zeitliche Änderung ist die erste Ableitung nach der Zeit t :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (28.1)$$

ist das *dynamische Grundgesetz* mit dem *Vektor des Impulses* $\vec{p} = m\vec{v}$.

- ⇒ Das 1. Newtonsche Gesetz ist ein Sonderfall des 2. Gesetzes: *Die Bewegungsgröße ändert sich nicht, wenn keine Kraft auf den Massenpunkt einwirkt.* Das 3. Newtonsche Gesetz ist das bereits aus der Statik bekannte Wechselwirkungsgesetz (*actio = reactio*).
- ⇒ Wenn die Masse m zeitlich unveränderlich ist, vereinfacht sich 28.1 zu

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (28.2)$$

(„Kraft = Masse · Beschleunigung“).

- ⇒ Die Gültigkeit von 28.1 und 28.2 ist an zwei Bedingungen geknüpft: Die Geschwindigkeit muss wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein (diese Bedingung ist in der Technischen Mechanik wohl immer erfüllt, anderenfalls ist die Relativitätstheorie zuständig), und das Bezugssystem muss ein Inertialsystem (beschleunigungsfreies System) sein. Da Beschleunigungsfreiheit nur bei Bewegung auf gerader Bahn möglich ist (vgl. Abschnitt 26.2), kann es ein Inertialsystem auf der Erde nicht geben. Für die weitaus meisten technischen Anwendungen darf die Erde jedoch als ruhendes Bezugssystem angesehen werden.
- ⇒ Weil zwei Vektoren nur gleich sein können, wenn jede Komponente des einen Vektors gleich der entsprechenden Komponente des anderen Vektors ist, stehen 28.1 bzw. 28.2 für drei skalare Gleichungen (für die drei Freiheitsgrade des Massenpunktes im Raum).
- ⇒ Das 2. Newtonsche Gesetz setzt natürlich voraus, dass die angreifenden Kräfte die Beschleunigungen auch tatsächlich hervorrufen können (und nicht etwa durch Führungen, Lager oder ähnliches auch nur teilweise daran gehindert werden, dazu mehr im Abschnitt 28.2.2). Das nachfolgende Beispiel behandelt einen der wenigen Sonderfälle (schiefer Wurf unter Vernachlässigung von Bewegungswiderständen), für den dies erfüllt ist.

Beispiel:

Ein Leichtathlet stößt die Kugel $w = 22\text{ m}$ weit (diese Aufgabe stammt aus der Zeit vor der Einführung der strengen Dopingkontrollen). Unter der Annahme, dass der Luftwiderstand vernachlässigt werden darf und dass die Kugel die Hand in einer Höhe $h = 2\text{ m}$ unter einem Winkel zur Horizontalen von $\alpha = 44^\circ$ verlässt, ist ihre Anfangsgeschwindigkeit v_0 (beim Verlassen der Hand) zu ermitteln. Welche Weite w_1 würde erzielt werden, wenn mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit und bei gleicher Abwurfhöhe unter einem Winkel von $\alpha_1 = 45^\circ$ gestoßen würde, bei welchem Abwurfwinkel α_0 würde die größte Weite erzielt werden? Hinweis: Eine Aufgabe, die dieses Problem mit einer geänderten Fragestellung behandelt, findet man unter www.TM-aktuell.de.

Während des Fluges wirkt auf die Kugel nur ihr (konstantes) Eigengewicht mg (senkrecht nach unten). Die Flugbahn ist eine ebene Kurve, so dass 28.2 nur für zwei Komponenten aufzuschreiben ist. In einem kartesischen Koordinatensystem mit nach oben gerichteter positiver y -Achse gilt also:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad .$$



Nach 26.27 und 26.30 ist der Geschwindigkeitsvektor die Ableitung des Ortsvektors und der Beschleunigungsvektor die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit. Dieser Weg muss also in umgekehrter Richtung (Integration) beschritten werden, er wird für die einzelnen Komponenten aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & , \quad a_y &= -g & , \\ v_x &= C_1 & , \quad v_y &= -gt + C_3 & , \\ x &= C_1 t + C_2 & , \quad y &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4 & . \end{aligned}$$

Für die vier Integrationskonstanten müssen vier Anfangsbedingungen formuliert werden. Wenn das Koordinatensystem (willkürlich, siehe Abbildung 28.1) so gelegt wird, dass sich der Ab-

wurfpunkt bei $x = 0$ und $y = h$ befindet, und die Abwurfgeschwindigkeit in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegt wird, lauten diese (Zeitzählung beginnt beim Abwurf):

$$\begin{aligned}x(t=0) &= 0 \quad , \quad v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha \quad , \\y(t=0) &= h \quad , \quad v_y(t=0) = v_0 \sin \alpha \quad .\end{aligned}$$

Mit den daraus berechneten Konstanten

$$C_1 = v_0 \cos \alpha \quad , \quad C_2 = 0 \quad , \quad C_3 = v_0 \sin \alpha \quad , \quad C_4 = h$$

erhält man die Komponenten des Ortsvektors der Bahnkurve

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad , \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha + h \quad ,$$

die (in Parameterdarstellung) die Flugbahn der Kugel beschreiben. Wenn man die Zeit t aus den beiden Gleichungen eliminiert, wird deutlich, dass es eine Parabel ist (*Wurfparabel*):

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + h \quad .$$

Am Auftreffpunkt ist $y = 0$ (und $x = w$):

$$-\frac{1}{2} g \frac{w^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + w \tan \alpha + h = 0$$

muss zur Beantwortung der Fragestellungen einmal nach v_0 und einmal nach w umgestellt werden. Die für die Aufgabenstellung relevanten Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned}v_0 &= w \sqrt{\frac{g}{w \sin 2\alpha + 2h \cos^2 \alpha}} \quad , \\w &= \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha + \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2} \sin^2 2\alpha + 2 \frac{v_0^2}{g} h \cos^2 \alpha} \quad .\end{aligned}$$



- ⇒ Hier soll auf ein typisches Problem bei der Lösung von Aufgaben aus der Kinetik aufmerksam gemacht werden: Es gibt mehrere Ergebnisse, von denen nicht alle für die Aufgabenstellung relevant sind. Hier ist es einfach zu übersehen und zu interpretieren: Das mathematische Modell (die Parabel) hat den Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$ und damit zwei (in diesem Fall reelle) Nullstellen (zwei Ergebnisse für w). Die Nullstelle im negativen Bereich ist hier nicht relevant, aber prinzipiell nicht nur richtig, sondern auch physikalisch möglich, denn die Wurfparabel sieht auch für ein negatives v_0 , mit dem man bei der anderen Nullstelle landen würde, nicht anders aus.

Bei einem Abwurfwinkel von $\alpha = 44^\circ$ wird die Wurfweite von 22 m bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 14,05 \text{ m/s}$ erreicht. Mit diesem v_0 ergibt sich bei $\alpha_1 = 45^\circ$ eine Wurfweite $w_1 = 21,95 \text{ m}$. Die Berechnung des Extremwertes der Funktion $w(\alpha)$ bereitet analytisch schon einige Mühe. Empfohlen wird deshalb die Extremwertberechnung mit einem geeigneten Programm (siehe www.TM-aktuell.de). Man erhält für $\alpha_0 = 42,41^\circ$ die Wurfweite $w_0 = 22,03 \text{ m}$. Der günstigste Abwurfwinkel zur Erzielung großer Wurfweiten beträgt nur dann 45° , wenn Abwurf- und Auftreffpunkt auf gleicher Höhe liegen.

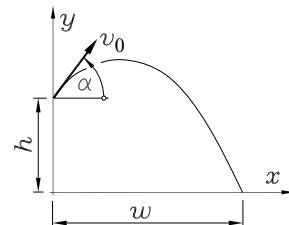


Abbildung 28.1: Anfangsbedingungen, Wurfweite w

28.2 Kräfte am Massenpunkt

Wie in der Statik ist es sinnvoll, zu unterscheiden zwischen *eingeprägten Kräften* (Gewicht, Antriebskräfte, Magnetkräfte, ...) und *Reaktionskräften* (Zwangskräfte, die durch Bewegungseinschränkung hervorgerufen werden, z. B.: Kräfte an Führungen, die Normalkraft zwischen Masse und schiefen Ebene, Lagerreaktionen, Federkräfte, Haftkräfte, ...). Bei bewegten Massen kommen noch *Bewegungswiderstände* und die so genannten *Massenkräfte* hinzu, die in den folgenden beiden Unterabschnitten behandelt werden.

28.2.1 Geschwindigkeitsabhängige Bewegungswiderstände

Einem sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Massenpunkt können durch das umgebende Medium oder eine Führung Widerstandskräfte entgegenwirken. Obwohl diese Kräfte von ihrem Charakter her Reaktionskräfte sind, werden sie hier gesondert aufgeführt, denn in der Rechnung müssen sie eher wie die eingeprägten Kräfte behandelt werden. Diese Besonderheit wird noch mehrfach an Beispielen verdeutlicht.

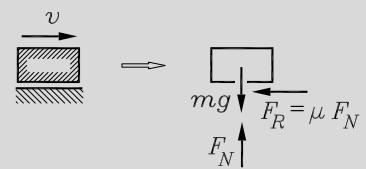
Die Erfassung der geschwindigkeitsabhängigen Widerstandskräfte ist immer mit einer gewissen Unsicherheit verbunden, weil die Kennwerte von zahlreichen Einflüssen abhängen. Hier werden die drei wichtigsten Varianten zur Einbeziehung dieser Kräfte in die Berechnung vorgestellt.

Der Widerstand, den die Oberfläche eines Körpers aufbringt, über den eine bewegte Masse gleitet, wird (auch bei einer Schmierschicht zwischen den Flächen) berücksichtigt durch die

Coulombsche Reibung (Gleitreibung):

$$F_R = -\mu F_N \operatorname{sgn} v \quad . \quad (28.3)$$

Die Geschwindigkeit dient nur als Steuergröße für die Richtung der Kraft F_R , die immer der Geschwindigkeit der sich bewegenden Masse entgegengesetzt gerichtet ist.



- ⇒ In 28.3 ist F_N die Normalkraft (senkrecht zu den sich berührenden Gleitflächen), μ ist der *Gleitreibungskoeffizient*, der vom Material und der Oberflächenbeschaffenheit der Gleitflächen abhängig ist. Da er auch von anderen Größen (Temperatur, Feuchtigkeit, unter Umständen auch von der Größe von F_N) beeinflusst wird, ist eine gewisse Vorsicht geboten, wenn man diesen Kennwert aus Tabellenbüchern entnimmt. Für höhere Genauigkeitsanforderungen an die Rechnung sind gegebenenfalls Versuche zur Ermittlung von μ (möglichst unter Betriebsbedingungen) empfehlenswert.
- ⇒ Die sgn -Funktion eignet sich nicht für die analytische Rechnung (bei numerischen Auswertungen kann sie durchaus nützlich sein). Deshalb sollte man die Kraft F_R entgegen der *angenommenen Geschwindigkeitsrichtung* antragen. Wenn sich die angenommene Richtung im Verlauf der Rechnung als falsch herausstellt, muss man die Rechnung mit *korrigierter Richtung* wiederholen.

⇒ Da die Gleitreibung wie die im Kapitel 9 behandelte Haftung mit dem Namen Coulomb verbunden ist und das Haftungsgesetz 9.1 sich von 28.3 formal kaum unterscheidet, muss nachdrücklich auf die Unterschiede aufmerksam gemacht werden:

- Der Haftungskoeffizient μ_0 ist in der Regel größer als der Gleitreibungskoeffizient μ .
- Besonders wichtig ist die Beachtung des unterschiedlichen Charakters der beiden Kräfte. Die Gleitreibungskraft geht in der von 28.3 gegebenen Größe (wie eine eingeprägte Kraft) in das Gleichgewicht der Kräfte ein. Die Haftkraft wird (wie eine Lagerreaktion) aus dem Gleichgewicht der Kräfte berechnet, denn die durch das Haftungsgesetz zu ermittelnde Größe definiert nur das obere Limit (und nicht die tatsächliche Größe) der Haftkraft (vgl. Beispiel 1 im Abschnitt 9.1 auf Seite 134).

Neben der Coulombschen Reibung sind noch die beiden folgenden Annahmen für die Berücksichtigung von Bewegungswiderständen in der technischen Praxis gebräuchlich:

Eine geschwindigkeitsproportionale Widerstandskraft

$$F_{W1} = -k_1 v \quad (28.4)$$

gilt mit häufig ausreichender Annäherung an die Realität für laminare Strömungen (in Medien mit relativ großer Zähigkeit). Der von der Körperform der Masse und dem Medium, in dem sich die Masse bewegt, abhängige Proportionalitätsfaktor k_1 wird durch Versuche ermittelt.

Eine Widerstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit

$$F_{W2} = -k_2 v^2 \operatorname{sgn} v \quad (28.5)$$

wird für die Erfassung des Widerstands infolge turbulenter Strömung verwendet. Der Proportionalitätsfaktor k_2 muss dabei sowohl den Reibungswiderstand als auch den Druckwiderstand (infolge des Unterdrucks durch Strömungsablösung und Wirbelbildung) erfassen.

⇒ Der lineare Ansatz 28.4, mit dem z. B. die Wirkung von Stoßdämpfern recht gut erfasst wird, ist für theoretische Untersuchungen sehr beliebt, weil er auf lineare Differenzialgleichungen führt. In der Schwingungslehre werden die unterschiedlichsten Dämpfungsursachen deshalb gern pauschal in dieser Form (oft nur näherungsweise) berücksichtigt.

⇒ Der Proportionalitätsfaktor in 28.5 kann in der Form

$$k_2 = c_W \frac{\rho A_p}{2} \quad (28.6)$$

angesetzt werden. In 28.6 ist ρ die Dichte des umströmenden Mediums, A_p die Projektionsfläche (Schattenfläche) des sich darin bewegenden Körpers und der „ c_W -Wert“ eine dimensionslose Widerstandszahl, die von der Körperform (und in einigen Fällen auch von der Reynold-Zahl, dem Maß für die Zähigkeit des umströmenden Mediums) abhängt und durch Versuche ermittelt werden muss, einige Beispiele: Für den langen Kreiszylinder gilt $c_W = 1$, für eine Kreisplatte $c_W = 1,11$ und für eine Kugel in Abhängigkeit von der Reynold-Zahl $c_W = 0,09 \dots 0,47$. Moderne Pkw-Formen liegen im Bereich $c_W = 0,3 \dots 0,4$.

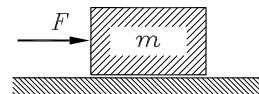
⇒ Man beachte, dass mit den mathematischen Modellen für die Bewegungswiderstände 28.3 bis 28.5 die Realität in den meisten Fällen nur unvollkommen angenähert wird.

28.2.2 Massenkraft, das Prinzip von d'Alembert

In dem Beispiel des Abschnitts 28.1 zur Anwendung des dynamischen Grundgesetzes (schiefer Wurf) durfte vorausgesetzt werden, dass alle auf den Körper einwirkenden Kräfte (im Beispiel nur die Gewichtskraft) in Beschleunigungen umgesetzt werden können. Bei geführten Bewegungen und bei geschwindigkeitsabhängigen Bewegungswiderständen (Abschnitt 28.2.1) gibt es natürlich Anteile der eingeprägten Kräfte, die sich nicht in Beschleunigungen umsetzen, sondern von den Reaktionskräften bzw. den Widerstandskräften im Gleichgewicht gehalten werden.

Beispiel 1:

Die eingeprägten Kräfte F und mg haben unterschiedliche Wirkungen auf die nebenstehend skizzierte Masse m . Bei reibungsfreier Bewegung wirkt die Kraft F beschleunigend auf m , bei reibungsbehafteter Bewegung nur die Differenz zwischen F und der Widerstandskraft.



Die Gewichtskraft mg wirkt nicht beschleunigend, da sie mit der Normalkraft (Reaktionskraft der Unterlage) im Gleichgewicht ist.

Aus dieser Überlegung resultiert folgende Schlussfolgerung: Man muss bei geführten Massen und auftretenden Bewegungswiderständen in die Formeln des dynamischen Grundgesetzes 28.1 bzw. 28.2 alle eingeprägten Kräfte, die Zwangskräfte und die Bewegungswiderstände einsetzen:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_Z + \vec{F}_W - m\vec{a} = 0 \quad . \quad (28.7)$$

Diese Vektorgleichung repräsentiert im Fall des betrachteten Beispiels zwei skalare Gleichungen (a_h ist die Beschleunigung in horizontaler und a_v in vertikaler Richtung):

$$\begin{aligned} F - F_R - ma_h &= 0 \quad , \\ -mg + F_N - ma_v &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man wegen $F_N = mg$ in diesem Fall für die vertikale Beschleunigungskomponente $a_v = 0$ (eingeprägte Kraft mg erzeugt keine Beschleunigung).

Nicht unabsichtlich wurde in der Gleichung 28.7 das Produkt $m\vec{a}$ auf die linke Seite geschrieben, denn in dieser Form verdeutlicht die Gleichung eine sehr elegante Strategie für das Aufschreiben der Bewegungs-Differenzialgleichungen, das

Prinzip von d'Alembert (nach JEAN LE ROND D'ALEMBERT, 1717 - 1783):

Der bewegte Körper wird freigeschnitten, es werden angetragen

- alle eingeprägten Kräfte,
- alle Zwangskräfte (Reaktionskräfte) infolge äußerer Bindungen und Führungen,
- die Bewegungswiderstände,
- die Massenkräfte $-m\vec{a}$ (*d'Alembertsche Kräfte*).

Danach können die *Gleichgewichtsbedingungen* (wie in der Statik) aufgeschrieben werden.

- ⇒ Die Idee der Einführung negativer Massenkräfte gestattet die Behandlung von Problemen der Kinetik mit den aus der Statik vertrauten Gleichgewichtsbedingungen. Diese Massenkräfte werden hier wie üblich als *d'Alembertsche Kräfte* bezeichnet, obwohl sie erstmals bereits bei JOHANNES KEPLER (1571 - 1630) auftauchen.
- ⇒ Das Minuszeichen vor der *d'Alembertschen Kraft* fordert, dass diese *entgegen der positiven Beschleunigungsrichtung* angetragen werden muss, was (bei gekrümmter Bahn) sowohl für die Bahnbeschleunigung als auch für die Normalbeschleunigung (und bei Relativbewegung auch für die Coriolisbeschleunigung) gilt. Die positive Richtung der Bahnbeschleunigung kann selbst bei einfachen Problemen nicht immer vorausgesagt werden (ob sich eine Masse auf der schiefen Ebene unter Einwirkung einer aufwärts gerichteten Kraft auch aufwärts bewegt, ist vom Anstiegswinkel, der Größe der Kraft und der Größe der Masse abhängig). Die *d'Alembertschen Kräfte für die Bahnbeschleunigungen werden deshalb entgegen der frei zu wählenden Koordinatenrichtung angetragen*, was automatisch auch bei negativen Beschleunigungen und Richtungsumkehr der Bewegung zu richtigen Ergebnissen führt.
- ⇒ Die Richtung der Massenkraft, die für die *Normalbeschleunigung* angetragen werden muss, ist dagegen eindeutig vorgegeben, weil die Normalbeschleunigung immer zum Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve gerichtet ist:

Bei der Bewegung eines Massenpunktes auf einer gekrümmten Bahn ist immer eine vom *Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve nach außen gerichtete Massenkraft* infolge der zum Krümmungsmittelpunkt weisenden Normalbeschleunigung 26.15 zu berücksichtigen. Es ist die *Zentrifugalkraft (Fliehkraft)*

$$ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (28.8)$$

(ρ ist der Krümmungsradius und v die Bahngeschwindigkeit). Speziell für die *Bewegung auf einem Kreis mit dem Radius R* gilt:

$$ma_n = mR\omega^2 = mR\dot{\phi}^2 \quad . \quad (28.9)$$

Hinweise für das Lösen von Aufgaben:

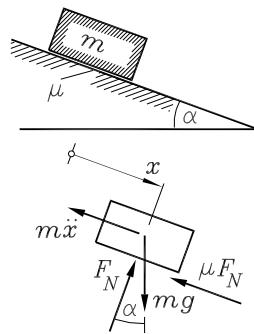
- ⇒ Es wird eine geeignete Bewegungskoordinate eingeführt, die die Bewegung des Massenpunktes verfolgt (z. B. x für eine geradlinige Bewegung bzw. φ für eine Kreisbewegung). Wenn die Aufgabenstellung nichts anderes vorschreibt, sollte die Bewegungskoordinate zum Zeitpunkt $t = 0$ auch den Wert Null annehmen.
- ⇒ Es wird eine Skizze des von äußeren Bindungen befreiten Massenpunkts (zum beliebigen Zeitpunkt t) angefertigt, in die alle Kräfte eingetragen werden, die auf der Seite 520 in vier Kategorien eingeteilt wurden (man sollte sich an diese Kategorien halten, um keine Kraft zu vergessen). Wichtig ist dabei die Einhaltung der **Vorzeichenregeln** (*d'Alembertschen Kräfte für Bahnbeschleunigungen entgegen der gewählten Bewegungskoordinate, Bewegungswiderstände zur Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt*), wobei zu beachten ist: Während sich die Rechnung bei Umkehr der Bewegungsrichtung für die *d'Alembertschen Kräfte* immer von selbst korrigiert, gilt diese Aussage für die *Bewegungswiderstände* nur dann, wenn mit der (für die analytische Rechnung ungeeigneten) Signum-Funktion gearbeitet wird.

Beispiel 2:

Auf einer schiefen Ebene beginnt eine Masse m zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhelage heraus abwärts zu rutschen. Unter Berücksichtigung von Gleitreibung zwischen der Masse und der schiefen Ebene sollen das Weg-Zeit-Gesetz und das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz ermittelt werden.

Gegeben: m , α , μ .

Es wird eine x -Koordinate zur Verfolgung der Masse vom Startpunkt der Bewegung aus eingeführt. Die Skizze zeigt die freigeschnittene Masse mit der Gewichtskraft mg (eingeprägte Kraft), der Normalkraft F_N (Zwangskraft, die die Masse an ihre Bahn bindet), dem Bewegungswiderstand $F_R = \mu F_N$ und der d'Alembertschen Kraft, die entgegen der eingeführten Bewegungsrichtung angetragen wurde.



Die Gleichgewichtsbedingungen in Hangrichtung bzw. senkrecht dazu liefern mit

$$m\ddot{x} + \mu F_N - mg \sin \alpha = 0 \quad ,$$

$$F_N - mg \cos \alpha = 0$$

zwei Gleichungen, aus denen die nicht interessierende Kraft F_N eliminiert wird. Es verbleibt ein Ausdruck für die (in diesem Fall konstante) Beschleunigung, der zweimal integriert wird:

$$\ddot{x} = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g = a \quad , \quad \dot{x} = at + C_1 \quad , \quad x = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2 \quad .$$

Für die Berechnung der Integrationskonstanten stehen zwei Anfangsbedingungen zur Verfügung. Es ist typisch, dass eine durch die Problemstellung („aus der Ruhelage heraus“) vorgegeben ist, die andere von der (willkürlichen) Wahl des Koordinatensystems bestimmt wird:

$$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad ,$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad .$$

Damit können die gesuchten Bewegungsgesetze aufgeschrieben werden:

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g t^2 \quad , \quad \dot{x}(t) = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g t \quad .$$

- ⇒ Eigentlich hätte man bei diesem Beispiel noch überprüfen müssen, ob die Bewegung aus der Ruhelage heraus überhaupt beginnt. Dazu wäre allerdings die Kenntnis des Haftungskoeffizienten μ_0 nötig.
- ⇒ Auf jeden Fall muss das Ergebnis mit dem Zusatz gekennzeichnet werden, dass es nur für positive Geschwindigkeit $\dot{x} \geq 0$ gilt, weil diese Bedingung bei der Annahme der Richtung der Gleitreibkraft vorausgesetzt wurde. Der Einwand, dass diese Bedingung ja wohl automatisch erfüllt ist, weil eine Masse, die nur durch ihr Eigengewicht belastet ist, aus der Ruhe heraus keine Aufwärtsbewegung beginnen kann, ist für die Praxis richtig, die errechneten Bewegungsgesetze lassen dies zu (man setze z. B. die sehr sinnvollen Werte $\mu = 0,3$ und $\alpha = 15^\circ$ ein, und schon geht es aufwärts). Die Bewegungsgesetze des Beispiels 2 müssen also unbedingt mit dem Zusatz

$$\sin \alpha \geq \mu \cos \alpha \quad \text{bzw.} \quad \tan \alpha \geq \mu$$

versehen werden.

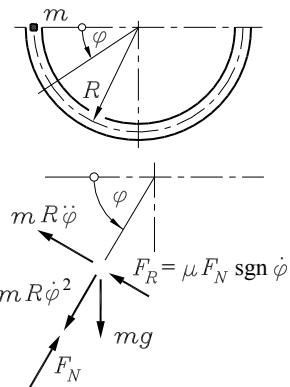
Beispiel 3:

Ein Massenpunkt m wird wie skizziert in eine halbkreisförmige Rinne gelegt und ohne Anfangsgeschwindigkeit freigegeben. Das Bewegungsgesetz $\varphi(t)$ soll

- bei Vernachlässigung der Gleitreibung,
- bei Berücksichtigung der Gleitreibung zwischen Massenpunkt und Rinne berechnet werden.

Gegeben: $R = 1 \text{ m}$; $\mu = 0,05$.

Die untere Skizze zeigt den freigeschnittenen Massenpunkt mit allen wirkenden Kräften.



Die Zentrifugalkraft wurde entgegen der (zum Kreismittelpunkt gerichteten) Normalbeschleunigung angetragen, die d'Alembertsche Kraft infolge der Bahnbeschleunigung entgegen der gewählten Koordinatenrichtung (die positive Richtung von φ gilt natürlich auch für $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$). Auch bei Umkehr der Bewegungsrichtung ergeben sich für diese Kräfte die korrekten Richtungen, die für die Reibkraft durch Multiplikation mit der sgn -Funktion erreicht werden. Das Kräfte-Gleichgewicht in Bahnrichtung bzw. senkrecht dazu

$$mR\ddot{\varphi} + \mu F_N \text{sgn } \dot{\varphi} - mg \cos \varphi = 0 ,$$

$$F_N - mR\dot{\varphi}^2 - mg \sin \varphi = 0$$

liefert nach Elimination der Normalkraft F_N die Differenzialgleichung

$$R\ddot{\varphi} + \mu(R\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi) \text{sgn } \dot{\varphi} - g \cos \varphi = 0 .$$

Für die analytische Berechnung müsste zunächst $\text{sgn } \dot{\varphi} = 1$ gesetzt werden, um die Differenzialgleichung für die „Bewegung von m nach rechts“ zu lösen, nach Ermittlung des Umkehrpunktes (Zeitpunkt, zu dem $\dot{\varphi} = 0$ wird), wäre dann mit neuen Anfangsbedingungen und $\text{sgn } \dot{\varphi} = -1$ die „Lösung für den Rückweg“ zu berechnen, wieder bis zum (linken) Umkehrpunkt, dann könnte (mit wieder neuen Anfangsbedingungen) wieder die Lösung der ersten Differenzialgleichung (mit $\text{sgn } \dot{\varphi} = 1$) verwendet werden, wenn es überhaupt gelingen würde, diese Lösung analytisch zu berechnen. Weil dies aber ohnehin nicht möglich ist, scheidet dieser mühsame Weg aus.

Auch die Vereinfachung (Fragestellung a), die sich ergibt, wenn die Gleitreibung vernachlässigt wird, führt mit

$$R\ddot{\varphi} - g \cos \varphi = 0$$

auf eine Differenzialgleichung, die in geschlossener Form (zumindest bei Verwendung der elementaren Funktionen) nicht lösbar ist.

- ⇒ Die Bewegungs-Differenzialgleichungen, die das sehr einfache Beispiel 3 lieferte, charakterisieren das typische Problem bei Aufgaben der Kinetik. Bis auf wenige „akademische Beispiele“ führen sie auf nichtlineare Differenzialgleichungen, die sich einer geschlossenen Lösung entziehen¹. Die Ermittlung der Bewegungsgesetze des Massenpunktes des Beispiels 3 wird deshalb zurückgestellt und am Ende des folgenden Abschnitts 28.3 nachgeliefert.

¹Der sich reibungsfrei auf einer Kreisbahn bewegende Massenpunkt entspricht der Bewegung des „mathematischen Pendels“, das im Physikunterricht im Allgemeinen auch nur mit der Beschränkung auf „sehr kleine Ausschläge“ behandelt wird.

Beispiel 4:

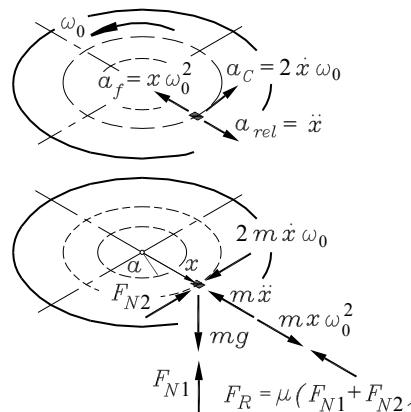
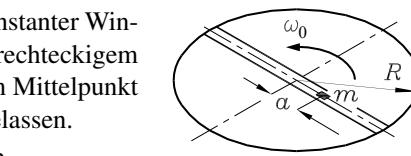
Eine horizontale Scheibe dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 . In einer radialen Rinne (mit rechteckigem Querschnitt) wird ein Massenpunkt m im Abstand a vom Mittelpunkt der Scheibe festgehalten und zum Zeitpunkt $t = 0$ freigelassen.

Gegeben: $a = 1 \text{ m}$; $R = 10 \text{ m}$; $\omega_0 = 2 \text{ s}^{-1}$; $\mu = 0,3$.

Unter Berücksichtigung der Gleitreibung zwischen der Masse m und der Rinne soll der Zeitpunkt t_R ermittelt werden, zu dem der Massenpunkt die Rinne verlässt (die konstante Winkelgeschwindigkeit ω_0 soll durch die Bewegung von m nicht beeinflusst werden).

Das Problem wird als Relativbewegung des Punktes mit einer Koordinate x behandelt, die die Bewegung des Massenpunktes in der Rinne verfolgt und die Drehbewegung der Scheibe mitmacht (der Punkt $x = 0$ soll im Scheibenmittelpunkt liegen).

Für eine beliebige Lage des Punktes zeigt die obere Skizze die Beschleunigungen, die sich nach den Regeln der Relativbewegung des Punktes (Abschnitt 27.2) ergeben: Die Führungsbewegung (Drehung der Scheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) trägt nur einen Anteil bei (Normalbeschleunigung des Punktes, in dem sich m gerade befindet), die Relativbeschleunigung der geradlinigen Bewegung ist nach außen gerichtet, während die Coriolisbeschleunigung tangentielle Richtung hat (der Vektor der Winkelgeschwindigkeit steht senkrecht auf der Scheibenebene, die Relativgeschwindigkeit ist radial nach außen gerichtet). Die untere Skizze zeigt die Massenkräfte, die nach dem d'Alembertschen Prinzip gegen die Beschleunigungsrichtungen angetragen wurden.



Gleitreibkräfte treten am Boden der Rinne und an der Seitenführung auf. Sie werden zu einer Kraft F_R zusammengefasst, die bei dieser Aufgabe nur nach innen zeigen kann, weil die Relativgeschwindigkeit nach außen gerichtet ist, eine Bewegungsumkehr ist unmöglich.

Die Gleichgewichtsbedingungen werden für drei Richtungen formuliert:

$$F_{N1} = mg, \quad F_{N2} = 2m\dot{x}\omega_0, \quad m\ddot{x} - mx\omega_0^2 + \mu(F_{N1} + F_{N2}) = 0.$$

Nach Elimination der Normalkräfte erhält man mit

$$\ddot{x} + 2\mu\omega_0\dot{x} - \omega_0^2x = -\mu g$$

eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die in geschlossener Form lösbar ist. Die beiden Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung werden mit den Randbedingungen

$$x(t=0) = a, \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

bestimmt, die Frage der Aufgabenstellung kann aus dem dann bekannten Bewegungsgesetz der Masse m über die Bedingung $x(t=t_R) = R$ berechnet werden. Man erhält mit den gegebenen Zahlenwerten $t_R = 2,69 \text{ s}$ (ausführliche Rechnung unter www.TM-aktuell.de).



28.3 Lösungen für Bewegungs-Differenzialgleichungen

28.3.1 Problemstellung

Das Beispiel 2 des vorigen Abschnitts, das auf eine konstante Beschleunigung führte, ist ein Vertreter der wenigen „akademischen Beispiele“, die problemlos lösbar sind. Dagegen ist das einfache Beispiel 3 repräsentativ für viele Probleme der Kinetik: Die Bewegungs-Differenzialgleichungen sind nichtlinear und entziehen sich einer geschlossenen Lösung.

Lineare Differenzialgleichungen sind in der Kinetik selten. Wenn sie dann auch noch konstante Koeffizienten haben (wie im Beispiel 4, weil ω_0 konstant ist), sind sie geschlossen lösbar².

Bis auf ganz wenige Ausnahmen sind die Bewegungs-Differenzialgleichungen der Kinetik nichtlineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung, die nur numerisch gelöst werden können.

Das für verschiedene Aufgaben der Festigkeitsberechnung (lineare Randwertprobleme) so erfolgreich verwendete Differenzenverfahren (vorgestellt im Kapitel 18) scheidet für die Lösung nichtlinearer Differenzialgleichungen aus. Das Ersetzen der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten an einer großen Anzahl ausgewählter Punkte würde auf ein nichtlineares Gleichungssystem und damit in der Regel zu unüberwindlichen Schwierigkeiten führen.

Glücklicherweise treten die nichtlinearen Probleme der Kinetik im Allgemeinen als Anfangswertaufgaben³ auf (an einem bestimmten Punkt, in der Regel am Anfang der Bewegung, sind alle interessierenden Größen bekannt). Für diesen Aufgabentyp stehen leistungsfähige numerische Verfahren zur Verfügung. Der nachfolgend gegebene kurze Einblick vermittelt nur die nötigsten Erkenntnisse, auf die auch dann nicht verzichtet werden kann, wenn ein fertiges Computerprogramm genutzt werden soll.

Die Anfangswertprobleme bestehen aus einer Differenzialgleichung 2. Ordnung und zwei Anfangsbedingungen (bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden sind es mehrere Differenzialgleichungen und eine entsprechend größere Anzahl von Anfangsbedingungen). Umgestellt nach der Beschleunigung, sieht das Anfangswertproblem für das Beispiel 3 aus dem vorigen Abschnitt so aus:

$$\ddot{\varphi} = -\mu \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \sin \varphi \right) \operatorname{sgn} \dot{\varphi} + \frac{g}{R} \cos \varphi , \quad \varphi(t=0) = 0 , \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0 . \quad (28.10)$$

Das Anfangswertproblem für das Beispiel 4 kann so formuliert werden:

$$\ddot{x} = -\mu g - 2\mu \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x , \quad x(t=0) = a , \quad \dot{x}(t=0) = 0 . \quad (28.11)$$

²Man sollte sich allerdings die geschlossene Lösung unter www.TM-aktuell.de einmal anschauen. Die entstehenden Ausdrücke sind für die Handrechnung kaum zumutbar, und nach der Lösung der Differenzialgleichung führt die Frage der Aufgabenstellung schließlich auf eine nichtlineare Gleichung, die nur numerisch gelöst werden kann, so dass man durchaus berechtigt fragen darf: „Warum dann nicht gleich numerisch?“

³Und wenn es einmal keine Anfangswertaufgabe ist (es soll z. B. ein bestimmter Punkt am Ende der Bewegung erreicht werden), dann muss man doch die Algorithmen für Anfangswertprobleme verwenden, die dann iterativ mehrfach angewendet werden („Zielschießen“), bis die vorgeschriebene Endbedingung erfüllt ist

28.3.2 Numerische Integration von Anfangswertproblemen

Die Verfahren für die numerische Integration von Anfangswertproblemen werden üblicherweise für eine Differentialgleichung 1. Ordnung formuliert⁴, weil damit auch der allgemeine Fall abgedeckt wird: Differentialgleichungen höherer Ordnung (auch Differentialgleichungssysteme) lassen sich immer durch Einführen von zusätzlichen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführen.

Der erste Schritt zur numerischen Lösung einer Bewegungs-Differentialgleichung ist also das Umschreiben auf ein System 1. Ordnung. Man führt dazu für die erste Ableitung der Variablen ($\dot{\varphi}$ bzw. \dot{x}) neue Bezeichnungen ein, sinnvollerweise die Symbole für die Geschwindigkeiten. Das Anfangswertproblem 28.11 wird also z. B. folgendermaßen formuliert:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v & , \quad x(t=0) &= a & , \\ \dot{v} &= -\mu g - 2\mu \omega_0 v + \omega_0^2 x & , \quad v(t=0) &= 0 & .\end{aligned}\quad (28.12)$$

Allgemein sieht ein solches Anfangswertproblem mit zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung und den zugehörigen Randbedingungen so aus:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(t, x, v) & , \quad x(t=t_0) &= x_0 & , \\ \dot{v} &= f_2(t, x, v) & , \quad v(t=t_0) &= v_0 & .\end{aligned}\quad (28.13)$$

Gesucht sind die Funktionen $x(t)$ und $v(t)$, die die Differentialgleichungen und die Anfangsbedingungen in 28.13 erfüllen. Ausgehend vom einzigen Zeitpunkt, für den der gesuchte x -Wert und der gesuchte v -Wert bekannt sind, dem *Anfangspunkt* t_0 mit den Werten x_0 und v_0 , sucht man die Werte x_1 und v_1 für den Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$, um anschließend auf gleiche Weise zum nächsten Zeitpunkt zu kommen usw.

Dieser Prozess sei bis zum Zeitpunkt t_i abgelaufen, x_i und v_i sind bekannt. Dann ist das Berechnen von x_{i+1} und v_{i+1} für den Zeitpunkt $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ der typische Integrationsschritt des Verfahrens, der am Beispiel der ersten Differentialgleichung in 28.13 demonstriert werden soll:

Beide Seiten der Differentialgleichung $\dot{x} = f_1(t, x, v)$

werden über das Zeitintervall Δt integriert:

$$\begin{aligned}\int_{t=t_i}^{t_{i+1}} \dot{x}(t) dt &= \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} f_1(t, x, v) dt & , \\ [x(t)]_{t_i}^{t_{i+1}} &= x_{i+1} - x_i = \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} f_1(t, x, v) dt & , \\ x_{i+1} &= x_i + \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} f_1(t, x, v) dt & .\end{aligned}\quad (28.14)$$

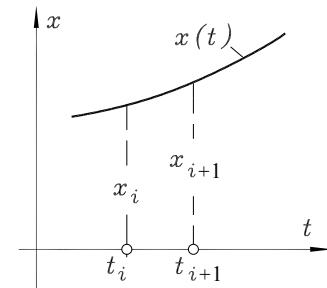


Abbildung 28.2: Integrationsschritt für $x(t)$

⁴Es gibt auch Formelsätze für Differentialgleichungen höherer Ordnung (z. B. das Verfahren von Runge-Kutta-Nyström für die in der Kinetik typischen Differentialgleichungen 2. Ordnung), die aber im Wesentlichen eine Zusammenfassung der Formeln für die Differentialgleichungen 1. Ordnung sind und keine nennenswerten Vorteile bringen

Das Integral auf der rechten Seite von 28.14, das den Zuwachs des Funktionswertes vom Punkt i zum Punkt $i+1$ repräsentiert, muss näherungsweise gelöst werden, weil die im Integranden enthaltenen Funktionen $x(t)$ und $v(t)$ nicht bekannt sind. Die verschiedenen Verfahren der numerischen Integration von Anfangswertproblemen unterscheiden sich im Wesentlichen in der Art und Qualität, wie dieses Integral angenähert wird.

Die gröbste Näherung für das Integral in 28.14 ist die Annahme, der Integrand $f_1(t, x, v)$ sei im gesamten Integrationsintervall $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ konstant und kann durch den Wert $f_1(t_i, x_i, v_i)$ am linken Rand des Integrationsintervalls ersetzt werden (t_i , x_i und v_i sind bekannt). Mit

$$\int_{t=t_i}^{t_{i+1}} f_1(t, x, v) dt \approx [t f_1(t_i, x_i, v_i)]_{t_i}^{t_{i+1}} = f_1(t_i, x_i, v_i)(t_{i+1} - t_i) = \dot{x}_i \Delta t$$

wird aus 28.14 die nach LEONHARD EULER (1707 - 1783) und AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 - 1857) benannte *Integrationsformel von Euler-Cauchy*:

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t \quad , \quad v_{i+1} = v_i + \dot{v}_i \Delta t \quad , \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (28.15)$$

(die auf gleichem Wege zu gewinnende Formel für v_{i+1} wurde in 28.15 ergänzt).

Dies ist die einfachste Näherungsformel für die numerische Integration eines Anfangswertproblems, die Lösungen $x(t)$ und $v(t)$ werden durch Polygonzüge approximiert. Die einfache Berechnungsvorschrift verdeutlicht in besonderer Schärfe das Problem aller Integrationsformeln für Anfangswertprobleme: Die Näherungslösung für das Integral in 28.14 erzeugt einen Fehler (*Quadraturfehler*), der in die Berechnung von \dot{x} und \dot{v} für den nächsten Integrationsschritt eingeht und dabei einen weiteren Fehler (*Steigungsfehler*) erzeugt.

Eine Verbesserung der Näherung für das Integral in 28.14 kann durch das Einbeziehen weiterer Punkte des Integrationsintervalls Δt erreicht werden. Natürlich ist auch das problematisch, denn die Werte für den Integranden können ja nur am linken Rand mit bekannten Größen berechnet werden. Zwischenwerte erfordern vorab die Berechnung der (wieder nur näherungsweise zu gewinnenden) Werte von $x(t)$ und $v(t)$ an diesen Stellen.

Nach CARL RUNGE (1856 - 1927) und MARTIN WILHELM KUTTA (1867 - 1944) ist eine besonders beliebte Verfahrensfamilie benannt, bei denen man mit einem Formelsatz vom Zeitpunkt t_i zum Zeitpunkt t_{i+1} so gelangt, dass die Genauigkeit der Berücksichtigung einer bestimmten Anzahl von Gliedern der Taylorreihen-Entwicklung der Lösung entspricht. Ein Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, das für einen Integrationsschritt vier Funktionswerte berechnet, arbeitet z. B. mit folgendem Formelsatz:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{\Delta t}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \quad , \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad , \\ v_{i+1} &= v_i + \frac{\Delta t}{6}(k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}) \quad , \\ k_{1x} &= f_1(t_i, x_i, v_i) \quad , \quad k_{1v} = f_2(t_i, x_i, v_i) \quad , \\ k_{2x} &= f_1(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{1x}, v_i + \frac{\Delta t}{2} k_{1v}) \quad , \quad k_{2v} = f_2(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{1x}, v_i + \frac{\Delta t}{2} k_{1v}) \quad , \\ k_{3x} &= f_1(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{2x}, v_i + \frac{\Delta t}{2} k_{2v}) \quad , \quad k_{3v} = f_2(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{2x}, v_i + \frac{\Delta t}{2} k_{2v}) \quad , \\ k_{4x} &= f_1(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t k_{3x}, v_i + \Delta t k_{3v}) \quad , \quad k_{4v} = f_2(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t k_{3x}, v_i + \Delta t k_{3v}) \quad . \end{aligned} \quad (28.16)$$

28.3.3 Schrittweiten, Fehler, Kontrollen

Die Anzahl der verfügbaren Verfahren für die numerische Integration von Anfangswertproblemen ist kaum zu überblicken. Dass die Formeln wie z. B. der Formelsatz 28.16 etwas unhandlich aussehen, ist unbedeutend, denn eine Handrechnung verbietet sich in der Regel von selbst, zumal leistungsfähige Software-Produkte verfügbar sind. Allen Verfahren gemeinsam ist, dass mit kleinen Schrittweiten die Genauigkeit verbessert und der Aufwand vergrößert wird⁵. Leider gibt es weder das ideale Verfahren noch eine sichere Möglichkeit der Fehlerabschätzung.

Bei einem Verfahren 4. Ordnung (Übereinstimmung mit den ersten 5 Gliedern der Taylorreihen-Entwicklung) wie 28.16 entsteht in jedem Schritt ein Fehler in der Größenordnung $(\Delta t)^5$, der bei genügend kleiner Schrittweite sehr klein ist, andererseits reagiert das Verfahren bei zu großer Schrittweite sehr empfindlich. Es gibt zwei praktikable Strategien, den Fehler abzuschätzen:

- Jeder Schritt wird ein zweites Mal mit halber Schrittweite gerechnet. Dann kann einerseits eine Fehlerabschätzung (und eine Korrektur der berechneten Werte) vorgenommen werden, außerdem kann man bei zu großen Abweichungen die Schrittweite verkleinern.
- Es wird nach zwei verschiedenen Verfahren gerechnet. Dafür gibt es feinsinnig ausgedachte Strategien, bei denen die für den aktuellen Schritt berechneten Funktionswerte für beide Verfahren genutzt werden können (realisiert z. B. in den so genannten „Eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren“). Auch damit kann die Schrittweite gesteuert werden.

Aber es bleibt schwierig, besonders für den Praktiker. Die Fragen „Wie groß ist eine *zu große* Abweichung in einem Integrationsschritt?“ oder „Wie wirkt sich ein kleiner Fehler bei den ersten Integrationsschritten auf die Funktionswerte am Ende des gesamten Zeitbereichs aus?“ können nicht generell beantwortet werden.

Eine Alternative zu den so genannten *Einschrittverfahren* (Runge-Kutta-Verfahren), bei denen nur die Werte zum Zeitpunkt t_i als Basis für die Berechnung der Werte zum Zeitpunkt t_{i+1} benutzt werden, sind die *Mehrschrittverfahren*, die durch das Einbeziehen auch vorab berechneter Werte die Genauigkeit steigern. Für diese Verfahren sollte jedoch die Schrittweite möglichst konstant sein, so dass die beschriebenen Strategien für die Schrittweitensteuerung ungeeignet sind.

Es gibt kaum ein anderes Gebiet der Technischen Mechanik, in dem die mathematischen Hilfsmittel mit so viel Vorsicht zu benutzen sind wie bei der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen, zu der es allerdings auch keine Alternative gibt.

Auch die Hinweise in Handbüchern von Mathematik-Software, dass modernste Verfahren eingesetzt werden und dem Anwender die Wahl einer geeigneten Schrittweite durch integrierte automatische Schrittweitensteuerung erspart bleibt, sollten auf keinen Fall zur Akzeptanz der errechneten Ergebnisse ohne eigene wirkungsvolle Kontrollmaßnahmen verführen. Zahlreiche Beispiele (www.TM-aktuell.de) zeigen, dass die Standard-Einstellungen bei den kommerziellen Software-Produkten nicht ausreichen, um Anfangswertprobleme auch über nur begrenzte Zeitintervalle korrekt zu lösen.



⁵ Auch diese Aussage ist zu relativieren, denn bei sehr kleinen und damit sehr vielen Schritten steigt mit der Anzahl der Rechenoperationen auch die Gefahr der Rundungsfehler.

Beispiel 1:

Das Beispiel 3 im Abschnitt 28.2.2 auf Seite 523 (siehe auch nebenstehende Skizze) führte auf das Anfangswertproblem 28.10 (Seite 525). Durch Einführen der neuen Variablen $\omega = \dot{\varphi}$ kommt man zu Differenzialgleichungen 1. Ordnung:

$$\dot{\varphi} = \omega \quad , \quad \varphi(t=0) = 0 \quad ,$$

$$\dot{\omega} = -\mu \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \sin \varphi \right) \operatorname{sgn} \omega + \frac{g}{R} \cos \varphi \quad , \quad \omega(t=0) = 0 \quad .$$

In dieser Form kann es einschlägigen Programmen angeboten werden. **Abbildung 28.3** zeigt die Lösung der beiden Anfangswertprobleme für die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Werte ($R = 1 \text{ m}$ und $\mu = 0$ bzw. $\mu = 0,05$) im Zeitbereich $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$.

In den beiden oberen Diagrammen ist die Funktion $\varphi_a(t)$ bei Vernachlässigung der Gleitreibung (Fragestellung a) zu sehen, darunter sind $\varphi_b(t)$ und $\omega_b(t)$ bei Berücksichtigung der Reibung dargestellt.

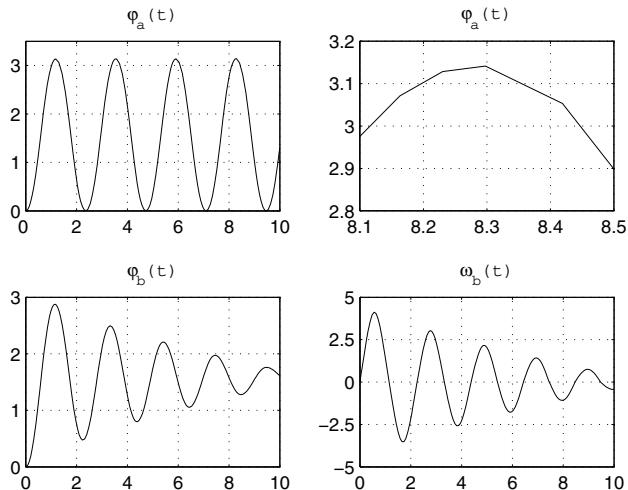
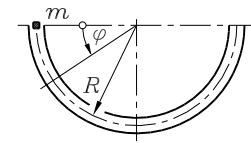


Abbildung 28.3: Kinematische Diagramme für reibungsfreie (oben) und reibungsbehaftete Bewegung (unten), berechnet mit Matlab

Die Verläufe der Funktionen, die sich ohne Gleitreibung ergeben, zeigen, dass die numerische Rechnung „gesund“ ist: Der Massenpunkt muss theoretisch immer wieder die Ausgangshöhe erreichen. Der Zoom oben rechts zeigt einerseits, dass das Ergebnis natürlich nur ein Polygonzug ist, andererseits hat der letzte positive Maximalwert für φ_a im untersuchten Intervall den erwarteten Wert. Die Lösung dieser Aufgabe findet man unter www.TM-aktuell.de, wo auch gezeigt wird, wie man durch Vergleich der Funktionswerte am Ende des Zeitbereichs bei Rechnung mit unterschiedlichen Schrittweiten einen für das Problem angemessenen Wert findet.

WWW - Mathematik für die Technische Mechanik - WWW



Numerische Integration von Anfangswertproblemen auf der Internet-Site
Mathematik für die Technische Mechanik (www.TM-Mathe.de) bietet u. a.:



- Skript „Numerische Integration von Anfangswertproblemen“, Teil 1 (Grundlagen) und Teil 2 (Praxis)
- Demonstration an zahlreichen Beispielen: Schrittweitenwahl, Kopplung in den Beschleunigungsgliedern, „Ereignisse“ (Anschlag an Federn, An- und Abschalten von Antriebskräften, ...), Kontrollfunktionen, Animation des Bewegungsablaufs, ...



Beispiel 2:

Ein Gleitstein mit der Masse m kann auf einer vertikalen Führung reibungsfrei gleiten. Er ist durch eine (lineare) Feder gefesselt, die im entspannten Zustand die Länge b hat. Der Gleitstein wird um x_{anf} ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit freigelassen (Animation der Bewegung unter www.TM-aktuell.de).



Für das Intervall $0 \leq t \leq 20\text{s}$ sollen die Bewegungsgesetze $x(t)$ für die Anfangsauslenkungen

$$x_{anf,1} = -8a, \quad x_{anf,2} = -4,493a, \quad x_{anf,3} = -4,492a$$

ermittelt werden.

$$\text{Gegeben: } \frac{ca}{mg} = 1; \quad \frac{b}{a} = 4; \quad \frac{g}{a} = 9,81\text{s}^2.$$

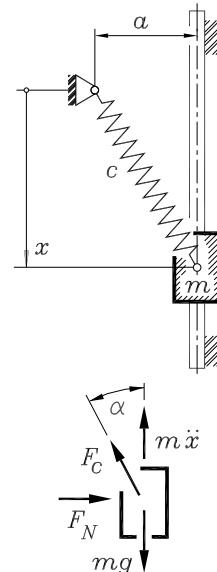
Die untere Skizze zeigt die freigeschnittene Masse mit der eingeprägten Kraft mg , den Reaktionskräften F_N und F_c (Federkraft) und der d'Alembertschen Kraft $m\ddot{x}$, die der Weg-Koordinate x entgegengerichtet ist (kein Bewegungswiderstand, weil reibungsfreie Führung).

Die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen Kraftkomponenten wird nicht benötigt, weil die Normalkraft F_N nicht gefragt ist und wegen der Vernachlässigung der Gleitreibung in der Gleichgewichtsbedingung für die vertikalen Kraftkomponenten nicht erscheint. Das Kräfte-Gleichgewicht in vertikaler Richtung

$$m\ddot{x} + F_c \cos \alpha - mg = 0$$

enthält die Federkraft, für die nach dem Federgesetz

$$F_c = c \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b \right)$$



eingesetzt werden kann („Federkonstante · Differenz aus Federlänge und Länge der entspannten Feder“, vgl. Abschnitt 10.1). Für die Winkelfunktion liest man aus der Skizze ab:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

und damit erhält man die (nichtlineare) Bewegungs-Differenzialgleichung:

$$m\ddot{x} + c \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b \right) \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - mg = 0.$$

Division dieser Gleichung durch mg und Ausklammern des Faktors a , um die gegebenen (dimensionslosen) Größen zu erzeugen, zeigt, dass es sinnvoll ist, auch noch zu einer dimensionslosen Bewegungskoordinate überzugehen. Dafür wird $\bar{x} = \frac{x}{a}$ gewählt, und nach einigen elementaren Umrechnungen erhält man das (nichtlineare) Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} &= \frac{g}{a} \left[1 - \frac{ca}{mg} \left(\sqrt{1 + \bar{x}^2} - \frac{b}{a} \right) \frac{\bar{x}}{\sqrt{1 + \bar{x}^2}} \right], \\ \bar{x}(t=0) &= \frac{x_{anf}}{a}, \quad \dot{\bar{x}}(t=0) = 0. \end{aligned}$$

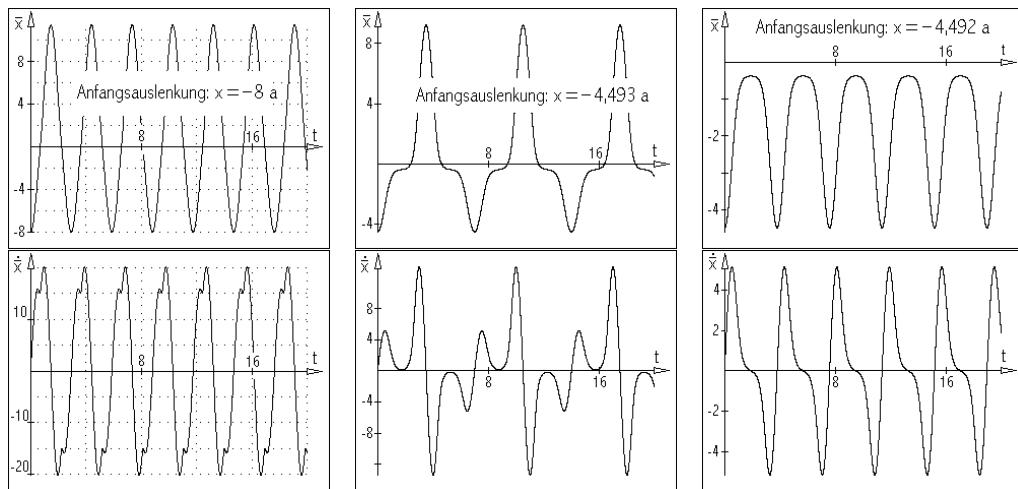


Abbildung 28.4: Die Folgen unterschiedlicher Anfangsbedingungen

Die Abbildung 28.4 zeigt links den Bewegungsablauf für die Anfangsauslenkung $x_{anf,1} = -8 \text{ a}$. Es ergibt sich eine „fast normale Schwingung“, bei der nur die „kleinen Zacken“ im Geschwindigkeitsdiagramm andeuten, dass die Masse sich auf ihrem Weg nach unten und oben am Lager bei stark zusammengedrückter Feder „vorbeidrängeln“ muss.

Bei einem Fall aus der geringeren Höhe $x_{anf,2} = -4,493 \text{ a}$ gelingt es der Masse gerade noch, am Lager vorbeizukommen (Abbildung 28.4, Mitte). Die Geschwindigkeit wird sowohl bei der Abwärts- als auch bei der Aufwärtsbewegung vorübergehend fast Null. Dies geschieht an dem Punkt der größten Zusammendrückung der Feder (dies ist übrigens - vgl. Kapitel 10 - die instabile statische Gleichgewichtslage der Masse). Bei der nur unwesentlich geringeren Anfangsauslenkung $x_{anf,3} = -4,492 \text{ a}$ (Abbildung 28.4, rechts) kommt die Masse an diesem Punkt nicht vorbei: Der Punkt der größten Federzusammendrückung wird zum Umkehrpunkt der Bewegung.

Da keine Reibungsverluste berücksichtigt werden, muss die Masse in jedem Fall die Ausgangshöhe immer wieder erreichen. Die grafischen Darstellungen der Funktionen bestätigen das.

Dieses Beispiel verdeutlicht mit den völlig unterschiedlichen Bewegungsverläufen bei nur geringfügigen Änderungen der Anfangsbedingungen auch, wie kritisch sich Verfahrensfehler bei der numerischen Integration von Anfangswertproblemen auswirken können, denn in jedem Integrationszyklus haben die (mehr oder weniger fehlerbehafteten) Ergebnisse des vorherigen Schrittes den Charakter von Anfangsbedingungen für die gesamte nachfolgende Rechnung (und das hier behandelte Beispiel liefert bei zu grober Schrittweite tatsächlich falsche Bewegungsverläufe, siehe www.TM-aktuell.de).

Dieses Thema wird deshalb noch mehrmals mit etwas anspruchsvollerem Aufgaben aufgegriffen. Dann wird auch (neben der immer zu empfehlenden Mehrfachrechnung mit unterschiedlichen Schrittweiten) die Möglichkeit diskutiert, „Kontrollfunktionen“ zusätzlich zu berechnen (die theoretische Basis dafür wird im nachfolgenden Abschnitt 28.4 behandelt).



28.4 Integration des dynamischen Grundgesetzes

In Abhängigkeit von der Aufgabenstellung kann es zweckmäßig sein, das Prinzip von d'Alembert (Abschnitt 28.2.2) zu nutzen und über die *Gleichgewichtsbedingungen mit anschließender Integration* zu den Bewegungsgleichungen zu kommen oder aber einen der in den Abschnitten 28.4.2 und 28.4.3 behandelten Wege der *Integration des dynamischen Grundgesetzes* zu wählen. Nachfolgend werden zunächst einige Definitionen wichtiger mechanischer Größen vorangestellt.

28.4.1 Arbeit, Energie, Leistung

Mechanische Arbeit (vgl. auch die Definition auf Seite 421) ist das Produkt aus dem Weg und der tangential zur Bahnrichtung wirkenden Kraft:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_S ds \quad . \quad (28.17)$$

- ⇒ Das skalare Produkt zweier Vektoren ist gerade so definiert, dass es zur Definition des mechanischen Arbeitsbegriffs passt. Dagegen muss in der skalaren Form der Gleichung 28.17 für F_S der Betrag der Komponente des Kraftvektors in Richtung der Bahntangente des Weges eingesetzt werden. Die Arbeit W ist eine skalare Größe mit der Dimension „Kraft · Länge“ und wird z. B. in Nm („Newtonmeter“) oder J („Joule“) gemessen:

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} \quad .$$

- ⇒ Erfolgt die Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius R , dann hat die tangential gerichtete Kraftkomponente F_S bezüglich des Mittelpunktes ein Drehmoment $M = F_S R$ und mit $ds = R d\varphi$ bzw. $F_S ds = F_S R d\varphi = M d\varphi$ erhält man die Formel für die *Arbeit bei einer Drehbewegung*:

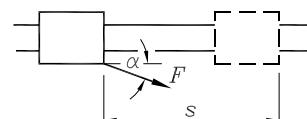
$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \quad . \quad (28.18)$$

Bei dreidimensionalen Problemen ist zu beachten, dass M in 28.18 nur der Betrag der Komponente des Momentvektors parallel zur Drehachse ist.

- ⇒ Arbeit kann immer nur von den an einem System angreifenden äußeren Kräften bzw. Momenten geleistet werden (vgl. die im Kapitel 24 angestellten Überlegungen zur Formänderungsarbeit in elastischen Systemen).

Beispiel 1:

Ein Waggon wird mit einer Kraft $F = 12 \text{ kN}$, die unter einem Winkel $\alpha = 25^\circ$ angreift, über eine Strecke $s = 50 \text{ m}$ bewegt. Welche Arbeit wird dabei geleistet.

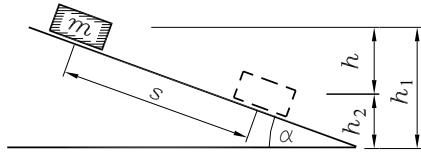


Da die Kraft konstant ist und nur die Komponente in Wegrichtung Arbeit leistet, errechnet man:

$$W = F \cos \alpha \cdot s = 544 \text{ kN m} = 544 \text{ kJ} \quad .$$

Beispiel 2:

Es soll die Arbeit berechnet werden, die von der Gewichtskraft einer Masse m geleistet wird, die auf einer schießen Ebene reibungsfrei entlang des Weges s abwärts gleitet und dabei den Höhenunterschied $h = h_1 - h_2$ überwindet.



Auch hier leistet nur die in Wegrichtung fallende Komponente der Gewichtskraft $mg \sin \alpha$ eine Arbeit, und man erhält:

$$W = mg \sin \alpha \cdot s = mg \sin \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = mg h = mg(h_1 - h_2) .$$

- ⇒ In das Ergebnis des Beispiels 2 gehen weder die Strecke s noch der Winkel α ein. Eine steilere schieße Ebene und ein kürzerer Weg s würde wie eine flachere schieße Ebene und ein längerer Weg s dann die gleiche Arbeit der Gewichtskraft liefern, wenn die Höhendifferenzen von Ausgangs- und Endpunkt gleich sind. Es ist klar, dass dies nicht nur für die schieße Ebene (mit einer geradlinigen Wegstrecke) gilt, denn das am Beispiel 2 ermittelte Ergebnis gilt für die geleistete Arbeit der Gewichtskraft entlang einer beliebigen differenziell kleinen Wegstrecke ds und damit auch für das Integral 28.17, mit dem die differenziell kleinen Arbeitsanteile summiert werden.

Die Arbeit der Gewichtskraft einer Masse m ist vom Weg unabhängig, in das Ergebnis geht nur die Höhendifferenz $h = h_1 - h_2$ des Anfangs- und Endpunktes der Bewegung ein:

$$W = mg h = mg(h_1 - h_2) . \quad (28.19)$$

- ⇒ Das Arbeitsvermögen der Gewichtskraft einer Masse m (das *Potenzial* der Gewichtskraft) hängt also ausschließlich von der Höhe h ab, in der sich die Masse über einer willkürlich zu definierenden Bezugsebene befindet. Die Arbeit, die sie bei einer Bewegung bis zum Erreichen dieser Bezugsebene leistet, ist nach 28.19 vom Weg dahin völlig unabhängig. Das Arbeitsvermögen (die Fähigkeit, Arbeit zu leisten) wird als *Energie* bezeichnet: Eine Masse m in der Höhe h über einer Bezugsebene hat die *potenzielle Energie*

$$U = mg h . \quad (28.20)$$

- ⇒ Kräfte, die (wie die Gewichtskraft) ein Potenzial besitzen, so dass die von ihnen geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung abhängt (und nicht von dem Weg, der dabei zurückgelegt wird), nennt man *konservative Kräfte*. Neben der Gewichtskraft ist die Federkraft ein Beispiel dafür: Eine Feder mit der Federkonstanten c hat (vgl. Abschnitt 24.1) die potenzielle Energie

$$U = \frac{1}{2} c s_0^2 \quad (28.21)$$

(s_0 ist der *Federweg*, die Verlängerung oder Verkürzung bezüglich der Länge der entspannten Feder).

- ⇒ Arbeit und Energie sind äquivalente Größen und werden dementsprechend mit den gleichen physikalischen Einheiten gemessen.

Weil in die Arbeit die Zeit, in der sie verrichtet wird, nicht eingeht, definiert man als *Maß für die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit* die

$$\text{Leistung: } P = \frac{dW}{dt} . \quad (28.22)$$

Für eine *in Wegrichtung konstante Kraft* F gilt

$$P = F \frac{ds}{dt} = F v \quad (28.23)$$

und für eine Drehbewegung mit konstantem Moment M :

$$P = M \omega . \quad (28.24)$$

⇒ Die Leistung ist eine skalare Größe mit der Dimension „Arbeit/Zeit“, z. B.:

$$1 \text{ Nm/s} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W} .$$

Die Leistungseinheiten W (Watt) und kW (Kilowatt) werden auch häufig als Ws (Wattsekunde) bzw. kWh (Kilowattstunde) für die Arbeit verwendet.

28.4.2 Der Impulssatz

Aus dem dynamischen Grundgesetz 28.1 ergibt sich durch bestimmte Integration von

$$\vec{F} dt = d(m\vec{v})$$

über die Zeit der

Impulssatz: Das Zeitintegral über die Kraftwirkung ergibt die Impulsänderung.

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = (m\vec{v})_1 - (m\vec{v})_0 = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 . \quad (28.25)$$

Der Impulssatz 28.25 eignet sich für die Lösung von Problemen, bei denen nach einer Geschwindigkeit bei bekannter Kraftwirkung über die Zeit gefragt wird.

Beispiel: Durch Einwirkung einer konstanten Bremskraft $F = 3 \text{ kN}$ über $\Delta t = 5 \text{ s}$ wird ein Pkw mit der Masse $m = 1000 \text{ kg}$, der sich mit $v = 150 \text{ km/h}$ bewegte, abgebremst. Wie groß ist danach seine Geschwindigkeit v_e ?

Da die Kraft während des Bremszeitraumes konstant ist und der Bewegungsrichtung entgegen gesetzt wirkt, folgt aus dem Impulssatz:

$$\begin{aligned} -F \Delta t &= m v_e - m v , \\ v_e &= v - \frac{F}{m} \Delta t = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}} - \frac{3000 \text{ N}}{1000 \text{ kg}} \cdot 5 \text{ s} = 96 \text{ km/h} . \end{aligned}$$

Für den einzelnen Massenpunkt hat der Impulssatz 28.25 nur untergeordnete Bedeutung, er wird deshalb im Kapitel 30 (Kinetik des Massenpunktsystems) ausführlicher behandelt.

28.4.3 Der Energiesatz

Die Integration des dynamischen Grundgesetzes 28.2 über den Weg

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{v} d\vec{v}$$

(Voraussetzung: Masse m ist konstant) liefert unter Ausnutzung von 28.17 für das Integral auf der linken Seite den

Arbeitssatz: $\int_{s_1}^{s_2} F_S ds = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 = T_2 - T_1$.

(28.26)

Die von der (tangential an die Bahnkurve gerichteten) äußeren Kraft F_S längs des Weges s geleistete Arbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energie des Massenpunktes m zwischen Endpunkt und Anfangspunkt der Bewegung.

Die *kinetische Energie*

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$
(28.27)

ist das Arbeitsvermögen des Massenpunktes m infolge seiner Bewegung mit der Geschwindigkeit v .

Im Abschnitt 28.4.1 wurde am Beispiel der Gewichtskraft der Masse m gezeigt, dass das Integral auf der linken Seite von 28.26 für Potenzialkräfte vom Integrationsweg unabhängig ist. Bei ausschließlicher Wirkung der Gewichtskraft des Massenpunktes m kann dieses Integral durch 28.19 ersetzt werden. Aus

$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

folgt mit

$$mg h_1 + \frac{1}{2} mv_1^2 = mg h_2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$
(28.28)

die einfachste Form des *Energiesatzes*, weil die Arbeit der äußeren Kraft (Gewichtskraft des Massenpunktes m) durch Terme in Form der potenziellen Energie des Massenpunktes 28.20 ausgedrückt wurde. Mit 28.20 und 28.27 wird aus 28.28 der

Energiesatz für die Bewegung eines Massenpunktes:

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2 = \text{konstant}$$
. (28.29)

Unter der Voraussetzung, dass ausschließlich konservative Kräfte (Potenzialkräfte) auf den Massenpunkt einwirken, ist die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie konstant.

- ⇒ Die Entwicklung des Energiesatzes, die unter ausschließlicher Berücksichtigung der Gewichtskraft für das Integral auf der linken Seite des Arbeitssatzes auf 28.28 führte, würde bei Berücksichtigung anderer Potenzialkräfte entsprechend verlaufen, so dass der Energiesatz in der Fassung 28.29 bei Wirkung beliebiger Potenzialkräfte gilt, z. B. auch für Federkräfte, deren potenzielle Energie nach 28.21 einfließen kann.
- ⇒ Bei ausschließlicher Wirkung konservativer Kräfte fließen in die Gleichung des Energiesatzes 28.29 nur Zustandsgrößen zweier ausgewählter Zeitpunkte der Bewegung ein (und die Zeit kommt in dieser Gleichung nicht einmal explizit vor). Der Energiesatz 28.29 vergleicht gewissermaßen zwei „Momentaufnahmen“, ohne den Verlauf der Bewegung im Detail zu verfolgen. Er ermöglicht gerade bei komplizierten Bewegungen vielfach einige spezielle Aussagen über das Verhalten des bewegten Massenpunktes.

Wenn neben den konservativen noch andere („nicht-konservative“) Kräfte auf den Massenpunkt einwirken (ihre Wirkung kann nicht über die potenzielle Energie erfasst werden), so muss die von ihnen verrichtete Arbeit über das Arbeitsintegral (linke Seite des Arbeitssatzes) in die Energiebilanz einbezogen werden. Nachfolgend wird angenommen, dass die Arbeit dieser Kräfte (Antriebskraft, Gleitreibungskraft, ...) nach 28.17 berechnet wird. Wenn mit dem Symbol W die gesamte Arbeit der Nichtpotenzialkräfte erfasst wird, erfährt der Energiesatz mit diesem Anteil (der linken Seite des Arbeitssatzes) folgende sinnvolle Erweiterung.

Erweiterter Energiesatz für die Bewegung eines Massenpunktes:

$$U_1 + T_1 + W = U_2 + T_2 \quad . \quad (28.30)$$

Die Gleichung 28.30 vergleicht zwei Bewegungszustände 1 und 2 mit den zugehörigen potenziellen Energien U_1 und U_2 und den kinetischen Energien T_1 und T_2 .

W ist die während der Bewegung von 1 nach 2 durch die Nichtpotenzialkräfte verrichtete Arbeit, die nach 28.17 berechnet werden kann. W enthält positive Anteile, wenn Energie zugeführt wird (Antriebskräfte), und negative Anteile, wenn Energie abgeführt wird (Abtriebskräfte, Reibung).

Empfohlenes Vorgehen bei der Lösung von Problemen mit Hilfe des Energiesatzes:

- ① Definition der beiden zu betrachtenden Zustände 1 und 2,
- ② Festlegen des *Null-Potenzials* (horizontale Ebene) als Bezugsfläche für die potenzielle Energie der Lage (infolge der Gewichtskraft),
- ③ Aufstellen der Energiebilanz:

Summe aus kinetischer und potenzieller Energie im Zustand 1

+

Zugeführte Energie (Antrieb) während der Bewegung von 1 nach 2

-

Abgeführte Energie während der Bewegung von 1 nach 2 (Abtrieb, Reibung)

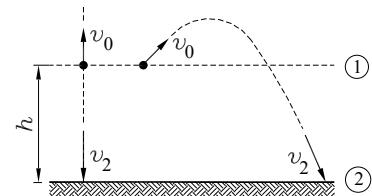
=

Summe aus kinetischer und potenzieller Energie im Zustand 2

- ⇒ Aus den Energiebilanz-Gleichungen 28.29 und 28.30 wird deutlich, dass die Höhe, in der das Null-Potenzial angesiedelt wird, beliebig gewählt werden darf, denn unterschiedliche Höhen resultieren in unterschiedlichen additiven Konstanten, die auf beiden Seiten der Gleichungen in gleicher Größe auftauchen.
- ⇒ Da in die Energiebetrachtungen im Wesentlichen Geschwindigkeiten und Wege eingehen, liefert der Energiesatz unmittelbar einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Massenpunktes und seiner Lage (im Unterschied zur Behandlung von Problemen mit dem Prinzip von d'Alembert, die primär auf Abhängigkeiten von der Zeit führt).
- ⇒ Natürlich können mit dem Energiesatz nicht nur die Bewegungsgrößen zu speziellen Zeitpunkten betrachtet werden. Wenn man z. B. den Zustand 2 als den Bewegungszustand zu einem beliebigen Zeitpunkt t ansieht, erhält man ein Bewegungsgesetz, das den Verlauf der Bewegung beschreibt. Es ist eine Geschwindigkeits-Weg-Funktion, die gegebenenfalls durch Differenzieren nach der Zeit in eine Beschleunigungs-Zeit-Funktion umgewandelt werden kann (vgl. nachfolgendes Beispiel 2).

Beispiel 1:

Eine Masse m wird in der Höhe h mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit beim Aufprall auf dem Erdboden (Luftwiderstand ist zu vernachlässigen)? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Masse in beliebiger Richtung abgeworfen wird?



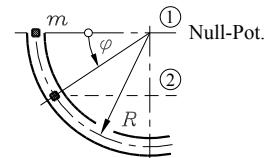
Als Bewegungszustand 1 wird der Abwurf (Masse hat in der Höhe h die Geschwindigkeit v_0) und als Bewegungszustand 2 wird das Auftreffen auf dem Boden definiert. Das Null-Potenzial wird bei 2 angenommen, so dass aus der Energiebilanz nach 28.29 die Aufprallgeschwindigkeit berechnet werden kann:

$$mg h + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad . \quad (28.31)$$

- ⇒ Die Größe der Aufprallgeschwindigkeit ist von der Abwurfrichtung unabhängig, nicht aber ihre Richtung, auch nicht die von der Masse während des Flugs erreichte Höhe.

Beispiel 2:

Ein Massenpunkt m wird bei $\varphi = 0$ in eine kreisförmige Rinne gelegt und ohne Anfangsgeschwindigkeit freigegeben. Seine Bewegung wird durch die Koordinate φ verfolgt. Unter Vernachlässigung von Reibungseinflüssen soll $\dot{\varphi}$ in Abhängigkeit von φ ermittelt werden.



Die Startposition wird (wie skizziert) als Bewegungszustand 1 definiert und der beliebige Zeitpunkt, zu dem der Winkel φ erreicht wird, als Zustand 2. Das Null-Potenzial soll mit Zustand 1 zusammenfallen. Dann lautet die Energiebilanz nach 28.29 mit der Bahngeschwindigkeit $R\dot{\varphi}$:

$$0 = -mgR \sin \varphi + \frac{1}{2} m (R\dot{\varphi})^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{R} \sin \varphi} \quad . \quad (28.32)$$

- ⇒ Die Null auf der linken Seite in der Energiebilanz 28.32 sagt aus, dass keine kinetische Energie im Zustand 1 vorhanden ist, weil die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt, und auch keine potenzielle Energie wegen der Wahl des Null-Potenzials auf dieser Höhe. Im Zustand 2 wird die potenzielle Energie negativ, weil der Massenpunkt unter dem gewählten Null-Potenzial liegt.
- ⇒ Die erstaunlich problemlose Berechnung der Aufprallgeschwindigkeit aus der Energiebilanz 28.31 beim schießen Wurf und die einfache Berechnung der Funktion $\dot{\varphi}(\varphi)$ aus der Bilanz 28.32 stehen im Gegensatz zu den Schwierigkeiten, die mit der Ermittlung der Bewegungsgesetze für die gleichen Aufgaben (Beispiel im Abschnitt 28.1 bzw. Beispiel 3 im Abschnitt 28.2.2) verbunden waren.

Das mit dem Energiesatz für den schießen Wurf mühelos ermittelte Ergebnis wäre mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert nur unter erheblichem Aufwand zu erlangen. Andererseits gibt die Energiebilanz (im Gegensatz zur d'Alembert-Rechnung) keine Auskünfte über Wurfweite, Auftreffwinkel und Flugzeiten.

- ⇒ Mit 28.32 ist natürlich auch eine hervorragende Kontrollmöglichkeit (für jedes einzelne Wertepaar) der numerisch ermittelten Funktionen $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$ gegeben (siehe Seite 529).
- ⇒ Auch über den Energiesatz kann man zu den zeitabhängigen Funktionen gelangen: Differenziation von 28.32 auf beiden Seiten nach der Zeit entsprechend

$$\ddot{\varphi} = \frac{g \cos \varphi}{R \sqrt{2 \frac{g}{R} \sin \varphi}} \dot{\varphi} = \frac{g \cos \varphi}{R \dot{\varphi}} \dot{\varphi} = \frac{g}{R} \cos \varphi$$

führt auf die gleiche Differenzialgleichung, die sich auch nach dem Prinzip von d'Alembert ergab (Seite 523). Sie ist der Ausgangspunkt für die Berechnung von $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$.

- ⇒ Ausdrücklich gewarnt werden muss vor dem (naheliegenden) Versuch, 28.32 direkt numerisch lösen zu wollen, denn eigentlich liegt mit

$$\dot{\varphi} = f(t, \varphi) = \sqrt{2 \frac{g}{R} \sin \varphi} \quad , \quad \varphi(t=0) = 0$$

genau das Anfangswertproblem 28.13 (mit sogar nur einer Differenzialgleichung) vor, für das im Abschnitt 28.3.2 die numerischen Lösungsmöglichkeiten vorgestellt wurden. Dass sich als Lösung

$$\varphi \equiv 0$$

ergibt, darf auch nicht dem numerischen Lösungsverfahren angelastet werden, denn es ist tatsächlich eine Lösung dieses Anfangswertproblems (man überzeugt sich leicht durch Einsetzen). In der Mathematik wird gezeigt, dass die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems an die Erfüllung der so genannten *Lipschitz-Bedingung* (nach RUDOLF LIPSCHITZ, 1832 - 1903)

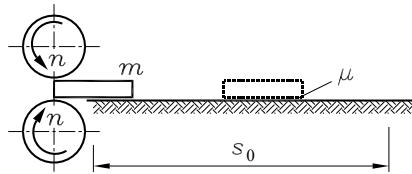
$$\left| \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi} \right| \leq K \tag{28.33}$$

gebunden ist (mit der beliebigen, aber endlichen *Lipschitz-Konstanten K*). Für $\varphi = 0$ ist 28.33 aber bei dem betrachteten Anfangswertproblem nicht erfüllt. Dies ist typisch für solche mit dem Energiesatz formulierten Anfangswertprobleme.

Beispiel 3:

Die Walzen eines Walzwerks (Durchmesser d) drehen sich mit der Drehzahl n . Ein Stahlblock mit der Masse m , der das Walzwerk verlässt, kommt auf einer horizontalen Bremsstrecke nach s_0 zur Ruhe.

Gegeben: $n = 300 \text{ min}^{-1}$; $s_0 = 28 \text{ m}$;
 $d = 480 \text{ mm}$; $m = 500 \text{ kg}$.



Wie groß ist der Gleitreibungskoeffizient μ auf der Bremsstrecke? Wie stark würde ein masseloser elastischer Puffer (Federzahl $c = 1000 \text{ N/cm}$) bei $s = 20 \text{ m}$ von dem aufprallenden Stahlblock zusammengedrückt werden?

Beim Verlassen des Walzwerkes hat der Stahlblock die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen. Seine kinetische Energie (potenzielle Energie braucht nicht berücksichtigt zu werden, weil der Stahlblock sich immer auf gleicher Höhe bewegt) wird um die Reibarbeit vermindert und im Zustand 2 (Ruhe) ist auch keine kinetische Energie mehr vorhanden. Aus der Bilanz nach 28.30 berechnet man mit der Umfangsgeschwindigkeit der Walzen nach 26.18 bis 26.21 und der Reibarbeit $W = -F_R s_0$ (konstante Reibkraft infolge konstanter Normalkraft):

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \mu F_N s_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(2\pi n \frac{d}{2}\right)^2 - \mu m g s_0 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{(\pi d n)^2}{2 g s_0} = 0,103 \quad .$$

Wird der Block schon vorher durch die Pufferfeder abgebremst, lautet die Energiebilanz mit der im Zustand 2 um den Federweg x zusammengedrückten Feder, deren potenzielle Energie sich nach 28.21 berechnet:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \mu F_N s = \frac{1}{2} c x^2 \Rightarrow x = 28,5 \text{ cm} \quad .$$

Der unwesentliche Anteil der auf dem Federweg noch anfallenden Reibarbeit wurde vernachlässigt, wäre jedoch relativ problemlos durch den Weg $s + x$ (anstelle von s) im Reibarbeitsanteil zu berücksichtigen.

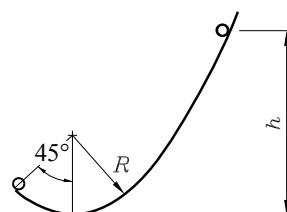
28.5 Aufgaben

Aufgabe 28.1:

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei eine Schanze hinab. Er beginnt die Bewegung in der Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit und verlässt die Schanze aus dem letzten kreisförmigen Teil unter einem Winkel von 45° .

Wie groß ist seine Anfangsgeschwindigkeit für den sich anschließenden schießen Wurf?

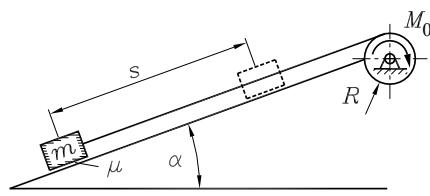
Gegeben: $h = 2 \text{ m}$; $R = 0,5 \text{ m}$.



Aufgabe 28.2: Eine Winde zieht mit konstantem Moment M_0 eine Masse m eine schiefe Ebene hinauf. Zwischen der Masse m und der schiefen Ebene ist Gleitreibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ zu berücksichtigen. Die Masse der Winde kann vernachlässigt werden. Die Bewegung beginnt aus der Ruhe heraus.

Gegeben: M_0 , m , α , s , R , μ .

Wie groß ist die Geschwindigkeit v der Masse m , nachdem sie den Weg s zurückgelegt hat?

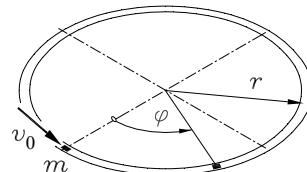


Aufgabe 28.3: Ein Massenpunkt m wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in eine Kreisbahn mit dem Radius r geschossen.

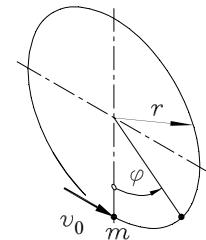
Gegeben: $m = 1 \text{ kg}$; $r = 1 \text{ m}$;
 $v_0 = 4 \text{ m/s}$; $\mu = 0,2$.

- a) Die Kreisbahn liegt als Rinne in der Horizontalebene. Reibung ist am Boden der Rinne und am Außenrand zu berücksichtigen.

Man ermittle die grafischen Darstellungen der Funktionen $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$ sowie den Winkel φ_{end} und die Zeit t_{end} am Ende der Bewegung.

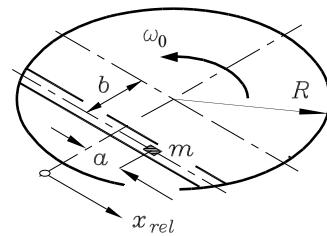


- b) Die Kreisbahn liegt in der Vertikalebene. Unter Berücksichtigung von Gleitreibung sind die grafischen Darstellungen der Funktionen $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ und der Normalkraft $F_N(t)$ zu ermitteln.



Aufgabe 28.4: Eine horizontale Scheibe dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 . In einer geraden Rinne wird ein Massenpunkt m in der skizzierten Lage festgehalten und zum Zeitpunkt $t = 0$ freigelassen.

- a) Bei Vernachlässigung von Reibungseinflüssen ermittle man für den Massenpunkt die Bewegungsgesetze $x_{rel}(t)$ und $\dot{x}_{rel}(t)$ bezüglich der mitrotierenden Koordinate x_{rel} und die horizontale Normalkraftkomponente $F_N(t)$, mit der der Massenpunkt seitlich gegen die Führung drückt.



- b) Zu welchem Zeitpunkt t_R verlässt der Massenpunkt die Rinne, welche Relativgeschwindigkeit und welche Absolutgeschwindigkeit hat er in diesem Moment?

Gegeben: $a = 10 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $R = 80 \text{ cm}$; $\omega_0 = 1,5 \text{ s}^{-1}$; $m = 2 \text{ kg}$.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

29 Kinetik starrer Körper

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers wird aufgefasst (vgl. Kapitel 27) als Translation, beschrieben durch die Bewegung eines Bezugspunktes, und Rotation aller übrigen Körperpunkte um diesen Punkt. Zunächst werden einige wichtige Sonderfälle untersucht.

29.1 Reine Translation

Für die translatorische Bewegung (alle Punkte bewegen sich auf kongruenten Bahnen) kann man sich die Masse des Körpers in einem Punkt konzentriert denken und die Gesetze für die Kinetik des Massenpunktes anwenden.

In den nachfolgenden Abschnitten wird gezeigt, dass der starre Körper, der keinen äußeren Zwängen unterliegt, immer dann wie ein Massenpunkt behandelt werden darf, wenn die Wirkungslinien aller angreifenden Kräfte durch den Schwerpunkt des Körpers gehen (und keine Momente angreifen). Man beachte, dass diese Forderung auch die Zwangskräfte (durch Führungen) einschließt, da der auf eine Bahn gezwungene starre Körper unter Umständen auch Rotationen ausführen muss (z. B.: Schienenfahrzeug in der Kurve). Andererseits können Führungen auch eine rein translatorische Bewegung erzwingen (z. B.: Paternoster).

Wenn der starre Körper eine rein translatorische Bewegung ausführt, gelten für die kinetischen Untersuchungen die Regeln der *Kinetik des Massenpunktes*.

29.2 Rotation um eine feste Achse

Zunächst wird der einfachste Fall betrachtet, für den die Bewegung des starren Körpers nicht mehr durch die Bewegung eines einzelnen Punktes beschrieben werden kann:

Eine Masse m rotiert um eine feste Achse \bar{z} , so dass alle Punkte Kreisbewegungen um diese Achse ausführen. In der Abbildung 29.1 ist eine Ebene des Körpers dargestellt, \bar{z} verläuft senkrecht zur Zeichenebene. Es muss (der Querstrich deutet dies an) **keine spezielle Achse** (z. B. eine Schwerpunktachse) sein.

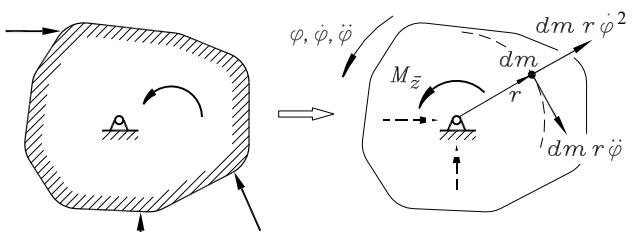


Abbildung 29.1: $M_{\bar{z}}$ repräsentiert alle äußeren Momentwirkungen

Alle Untersuchungen für diesen Fall dürfen zunächst in der Ebene angestellt werden, weil Kraftkomponenten parallel zur Drehachse nur eine Translation in Achsrichtung hervorrufen könnten und die Achse die Momente, die nicht um die Achse drehen, aufnehmen würde.

Alle äußeren Kräfte und Momente werden nach den Regeln der Statik (Abschnitt 3.5) zu einer resultierenden Kraft, deren Wirkungslinie die Drehachse schneidet, und einem resultierenden Moment zusammengefasst. Die resultierende Kraft (in der Abbildung 29.1 durch ihre beiden gestrichelt gezeichneten Komponenten angedeutet) wird von der Drehachse aufgenommen, so dass nur noch das resultierende Moment $M_{\bar{z}}$ eine Bewegung hervorrufen kann. Diese soll nun (ausschließlich unter Verwendung der für den Massenpunkt bereits behandelten Hilfsmittel) untersucht werden.

Ein beliebiger (differenziell kleiner) Massenpunkt dm im Abstand r von der Drehachse führt eine Kreisbewegung aus mit einer Bahnbeschleunigung nach 26.18 und einer (radial zum Drehpunkt gerichteten) Normalbeschleunigung nach 26.22:

$$a_t = r \ddot{\phi} \quad , \quad a_n = r \dot{\phi}^2 \quad .$$

Nach dem Prinzip von d'Alembert (Abschnitt 28.2.2) sind also die Massenkräfte

$$dm r \ddot{\phi} \quad \text{und} \quad dm r \dot{\phi}^2$$

(den Beschleunigungsrichtungen entgegengesetzt) anzutragen. Auch ihre resultierende Kraft wird (wie die Resultierende der äußeren Kräfte) von der Drehachse aufgenommen.

Die Wirkungslinien der Zentrifugalkräfte $dm r \dot{\phi}^2$ gehen für alle Massenpunkte durch den Drehpunkt, so dass nur die tangential gerichteten Massenkräfte eine Momentwirkung (jeweils mit dem Hebelarm r) haben. Diese Momentwirkungen aller Massenpunkte werden addiert (integriert) und müssen mit dem äußeren Moment $M_{\bar{z}}$ im Gleichgewicht sein:

$$M_{\bar{z}} = \int_m r^2 \dot{\phi} dm = \dot{\phi} \int_m r^2 dm = J_{\bar{z}} \dot{\phi} = J_{\bar{z}} \dot{\omega} \quad . \quad (29.1)$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung und der *Drehbewegung einer Masse um eine feste Achse* bekannt. Der Integralausdruck in 29.1 ist das

Massenträgheitsmoment der Masse m :

$$J_{\bar{z}} = \int_m r^2 dm \quad . \quad (29.2)$$

⇒ Analog zur d'Alembertschen Kraft („Masse · Bahnbeschleunigung“, angetragen entgegen der gewählten Bahnkoordinate, vgl. Abschnitt 28.2.2) wird

$$J_{\bar{z}} \ddot{\phi} \quad (29.3)$$

(„Massenträgheitsmoment · Winkelbeschleunigung“, angetragen entgegen der gewählten Winkelkoordinate) als *d'Alembertsches Moment* bezeichnet. Es repräsentiert die Trägheitswirkung eines Körpers gegen eine Drehbewegung.

- ⇒ Die kinetische Energie einer Masse, die sich um eine feste Achse dreht, berechnet sich auf der Basis von 28.27 analog zur Herleitung von 29.1 als Summe der kinetischen Energien der differenziell kleinen Massenelemente dm , die sich auf Kreisbahnen mit den Bahngeschwindigkeiten $r\dot{\phi}$ bewegen. Aus

$$T_{rot} = \int_m \frac{1}{2}(r\dot{\phi})^2 dm = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \int_m r^2 dm$$

ergibt sich die *kinetische Rotationsenergie*

$$T_{rot} = \frac{1}{2}J_{\bar{z}}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}J_{\bar{z}}\omega^2 . \quad (29.4)$$

- ⇒ Analog zum Impuls mv (vgl. Abschnitt 28.1) wird für die Drehbewegung der *Drehimpuls* (auch: *Drall*)

$$L_{\bar{z}} = J_{\bar{z}}\omega \quad (29.5)$$

definiert. Damit kann 29.1 auch in der Form

$$M_{\bar{z}} = \dot{L}_{\bar{z}} \quad (29.6)$$

aufgeschrieben werden und ist in dieser Form eine einfache Variante des später noch ausführlicher zu behandelnden *Drallsatzes* (auch: *Impulsmomentensatz*):

Die zeitliche Änderung des Dralls ist gleich der Wirkung des resultierenden äußeren Moments.

- ⇒ Man beachte die Analogien, die sich in den Formeln für die Translation bzw. Rotation widerspiegeln. Wenn man den

$$\begin{array}{lll} \text{Translationsgrößen} & s & , \quad v & , \quad a & , \quad m & , \quad F \\ \text{die Rotationsgrößen} & \varphi & , \quad \omega & , \quad \alpha & , \quad J & , \quad M \end{array}$$

zuordnet, ergeben sich alle „Rotationsformeln“ durch Austausch der äquivalenten Größen aus den „Translationsformeln“, z. B.:

	Translation	Rotation
Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit	$v = \dot{s}$	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung/Winkelbeschleunigung	$a = \dot{v}$	$\alpha = \dot{\omega}$
Arbeit	$\int F_S ds$	$\int M d\varphi$
Leistung	$F v$	$M \omega$
d'Alembertsche Kraft/d'Alembertsches Moment	$m\ddot{x}$	$J\ddot{\varphi}$
Kinetische Energie	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}J\omega^2$
Impuls/Drehimpuls	mv	$J\omega$

Die Behandlung der Rotation eines Körpers um eine feste Achse als ebenes Problem (hier ausgeführt unter alleiniger Wirkung des Moments $M_{\bar{z}}$) ist für die Analyse der Drehbewegung ausreichend. Für die in der Praxis besonders wichtige Berechnung der auftretenden Kräfte und Momente, speziell in den Lagern, die die Drehachse fixieren, ist eine dreidimensionale Untersuchung erforderlich.

Es wird auch weiterhin angenommen, dass der Rotor um die \bar{z} -Achse rotiert, \bar{x} -Achse und \bar{y} -Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegen also parallel zum Rotorquerschnitt. Die Drehbewegung wird durch die Winkelkoordinate φ (und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$) beschrieben.

Zur Erinnerung: Der Querstrich über den Koordinaten bedeutet, dass es (außer der hier gültigen Besonderheit, dass \bar{z} mit der Rotationsachse übereinstimmt) ein allgemeines Koordinatensystem ist (der Schwerpunkt des Körpers braucht weder auf der Rotationsachse noch auf einer der Koordinatenachsen zu liegen).

Eine andere über dieses Koordinatensystem zu treffende Vereinbarung muss bei den nachfolgenden Untersuchungen (und vor allen Dingen bei der Anwendung der herzleitenden Formeln) unbedingt beachtet werden: *Das verwendete \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem ist mit dem Rotor fest verbunden, macht also die Rotationsbewegung mit.*

Nach dem Freischneiden des Rotors werden sämtliche äußeren Kräfte (einschließlich der Kräfte in den Lagern) zu einer resultierenden Kraft und einem resultierenden Moment zusammengefasst (**Abbildung 29.2**, untere Skizze).

Die **Abbildung 29.2** zeigt jeweils die drei Komponenten dieser beiden Größen, die mit den Massenkräften (d'Alembertschen Kräften) des Rotors ein Gleichgewichtssystem bilden müssen.

- ⇒ Eine erste Konsequenz des mitrotierenden Koordinatensystems wird schon deutlich: Da auch die äußeren Kräfte und Momente auf dieses System bezogen werden müssen, erhält man z. B. bei der Bestimmung der Lagerreaktionen „mitrotierende Lagerkraftkomponenten“. Dies stellt keinen nennenswerten Nachteil dar. Bei Berücksichtigung des Eigengewichts (und nicht vertikal stehender Rotationsachse) muss allerdings beachtet werden, dass die Richtung dieser Kraft (im Gegensatz zu ihrem Angriffspunkt) natürlich nicht mitrotiert und bezüglich des \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystems zeitlich veränderlich ist.

Da alle Punkte des starren Körpers auf ebenen Kreisbahnen um die \bar{z} -Achse rotieren, sind am differenziell kleinen Massenpunkt dm (wie bereits bei der Herleitung von 29.1 besprochen) nur die beiden Kräfte anzutragen, die die **Abbildung 29.3** zeigt. Da keine Massenkräfte in \bar{z} -Richtung wirken, wird die äußere Kraft $F_{\bar{z}}$ nicht weiter betrachtet (wenn eine äußere Kraft $F_{\bar{z}}$ vorhanden ist, muss sie entweder durch entsprechende Lager abgefangen werden, oder der Rotor bewegt sich translatorisch in \bar{z} -Richtung, was hier nicht untersucht wird).

Die Massenkräfte $dm r \dot{\varphi}^2$ und $dm r \ddot{\varphi}$ werden jeweils in zwei Komponenten in Richtung der Achsen \bar{x} bzw. \bar{y} zerlegt ($\bar{\varphi}$ ist wie \bar{x} und \bar{y} fest mit dem Rotor verbunden) und über den gesamten Rotor addiert (integriert). Sie müssen im Kraftgleichgewicht mit $F_{\bar{x}}$ bzw. $F_{\bar{y}}$ sein:

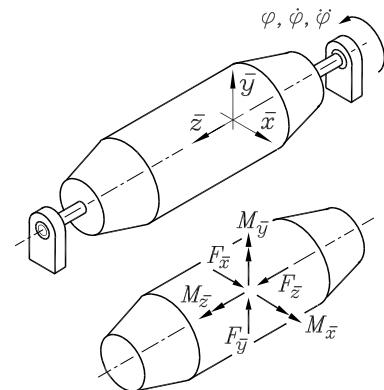


Abbildung 29.2: Mit dem Rotor rotierendes \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem, auch die äußeren Kräfte und Momente machen die Rotationsbewegung mit

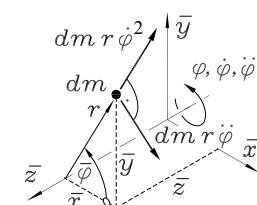


Abbildung 29.3: Massenpunkt dm mit Kräften

$$F_{\bar{x}} + \int_m r \dot{\phi}^2 \cos \bar{\varphi} dm + \int_m r \ddot{\phi} \sin \bar{\varphi} dm = 0 \quad ,$$

$$F_{\bar{y}} + \int_m r \dot{\phi}^2 \sin \bar{\varphi} dm - \int_m r \ddot{\phi} \cos \bar{\varphi} dm = 0 \quad .$$

Diese Gleichungen lassen sich mit den aus der **Abbildung 29.3** abzulesenden Beziehungen

$$\bar{x} = r \cos \bar{\varphi} \quad , \quad \bar{y} = r \sin \bar{\varphi}$$

umformen zu

$$F_{\bar{x}} = -\dot{\phi}^2 \int_m \bar{x} dm - \ddot{\phi} \int_m \bar{y} dm \quad ,$$

$$F_{\bar{y}} = -\dot{\phi}^2 \int_m \bar{y} dm + \ddot{\phi} \int_m \bar{x} dm \quad .$$

Die Integrale auf den rechten Seiten sind die aus der Statik (Berechnung von Schwerpunkten) bekannten statischen Momente der Masse m bezüglich der \bar{z} -Achse (vgl. Abschnitt 4.1). Mit den Gleichungen 4.3 in der Form

$$\int_m \bar{x} dm = m \bar{x}_S \quad , \quad \int_m \bar{y} dm = m \bar{y}_S$$

(m - Gesamtmasse des Körpers, \bar{x}_S , \bar{y}_S - Schwerpunktkoordinaten) erhält man:

$$\begin{aligned} F_{\bar{x}} &= -m \bar{x}_S \dot{\phi}^2 - m \bar{y}_S \ddot{\phi} \quad , \\ F_{\bar{y}} &= -m \bar{y}_S \dot{\phi}^2 + m \bar{x}_S \ddot{\phi} \quad . \end{aligned} \tag{29.7}$$

⇒ Die Formeln 29.7 zeigen einen ersten Vorteil des mitrotierenden Koordinatensystems: Die Schwerpunktkoordinaten des starren Körpers \bar{x}_S und \bar{y}_S sind unveränderliche Größen.

Die rechten Seiten von 29.7 sind die durch die Rotation hervorgerufenen Massenkräfte, und man liest aus den Gleichungen ab:

Bei der Rotation einer Masse um eine feste Achse treten keine resultierenden Massenkräfte auf, wenn ihr Schwerpunkt mit der Rotationsachse zusammenfällt.

Diese Aussage gilt sowohl bei Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit als auch bei veränderlicher Winkelgeschwindigkeit (Anfahr- und Bremsvorgänge).

Das Momentengleichgewicht um die \bar{z} -Achse wurde bereits untersucht und lieferte Gleichung 29.1. Die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen um die \bar{x} -Achse und die \bar{y} -Achse lauten (die Komponenten der differenziell kleinen Massenkräfte haben jeweils den Hebelarm \bar{z}):

$$M_{\bar{x}} - \int_m \bar{z} r \dot{\phi}^2 \sin \bar{\varphi} dm + \int_m \bar{z} r \ddot{\phi} \cos \bar{\varphi} dm = 0 \quad ,$$

$$M_{\bar{y}} + \int_m \bar{z} r \dot{\phi}^2 \cos \bar{\varphi} dm + \int_m \bar{z} r \ddot{\phi} \sin \bar{\varphi} dm = 0 \quad .$$

Die gleichen Umformungen wie bei den Kraft-Gleichgewichtsbedingungen führen auf:

$$\begin{aligned} M_{\bar{x}} &= \dot{\phi}^2 \int_m \bar{z} \bar{y} dm - \ddot{\phi} \int_m \bar{z} \bar{x} dm , \\ M_{\bar{y}} &= -\dot{\phi}^2 \int_m \bar{z} \bar{x} dm - \ddot{\phi} \int_m \bar{z} \bar{y} dm . \end{aligned} \quad (29.8)$$

Die Integralausdrücke auf den rechten Seiten der Momentengleichungen 29.8 brauchen im Unterschied zu den Kraftgleichungen 29.7 auch dann nicht den Wert Null zu haben, wenn der Schwerpunkt des rotierenden Körpers auf der Rotationsachse liegt. Sie werden als *Deviationsmomente* (auch: *Zentrifugalmomente*)

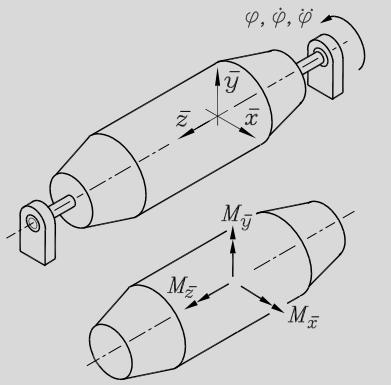
$$J_{\bar{x}\bar{z}} = - \int_m \bar{x} \bar{z} dm , \quad J_{\bar{y}\bar{z}} = - \int_m \bar{y} \bar{z} dm \quad (29.9)$$

in Anlehnung an das ähnliche Integral aus der Biegetheorie (vgl. Abschnitt 16.2.1) auch mit einem Minuszeichen definiert und im Abschnitt 29.3.3 ausführlich behandelt. Die Gleichungen 29.8 nennt man in Verbindung mit 29.1 den

Momentensatz für die Rotation einer Masse um eine feste Achse \bar{z} :

$$\begin{aligned} M_{\bar{x}} &= -J_{\bar{y}\bar{z}} \dot{\phi}^2 + J_{\bar{x}\bar{z}} \ddot{\phi} , \\ M_{\bar{y}} &= J_{\bar{x}\bar{z}} \dot{\phi}^2 + J_{\bar{y}\bar{z}} \ddot{\phi} , \\ M_{\bar{z}} &= J_{\bar{z}} \ddot{\phi} . \end{aligned} \quad (29.10)$$

\bar{x} , \bar{y} und \bar{z} sind mitrotierende Koordinaten, die äußeren Momente $M_{\bar{x}}$, $M_{\bar{y}}$ und $M_{\bar{z}}$ beziehen sich auf dieses Koordinatensystem.



- ⇒ Bei den Beziehungen 29.10 zeigt sich der entscheidende Vorteil des mitrotierenden Koordinatensystems, weil die Deviationsmomente sich auch auf dieses System beziehen und damit (wie die Masse, die Schwerpunktkoordinaten und die Massenträgheitsmomente) als Kennwerte des Körpers unveränderliche Größen sind.
- ⇒ Für die Analyse der Bewegung ist die dritte Gleichung in 29.10 ausreichend. Die Achse ist die feste Rotationsachse, sonst muss sie keine speziellen Bedingungen erfüllen. Die beiden anderen Gleichungen in 29.10 werden im Zusammenhang mit den Gleichungen 29.7 für die Berechnung der äußeren Kräfte (z. B.: Lagerreaktionen) benötigt.
- ⇒ Die *Rotation um eine feste Achse* ist ein besonders wichtiger Spezialfall der allgemeinen Bewegung des starren Körpers. Trotzdem wird hier auf Beispiele zunächst verzichtet, weil im nachfolgenden Abschnitt erst die Massenträgheitsmomente und die Deviationsmomente ausführlich behandelt werden. Den Beispielen zu dem Thema, für das in diesem Abschnitt die theoretischen Grundlagen gelegt wurden, ist ein eigener Abschnitt 29.4 gewidmet.

29.3 Massenträgheitsmomente

Das Massenträgheitsmoment einer Masse m berechnet sich nach der Formel 29.2. Es wird z. B. mit der Dimension kg cm^2 angegeben. Als Maß für die Drehträgheit der Masse bezieht es sich immer auf eine ganz bestimmte Drehachse, so dass zu jeder Angabe eines Massenträgheitsmoments die Angabe der Drehachse gehört.

In die Formel 29.2 geht der Abstand der Masseteilchen quadratisch ein, so dass mit der Anordnung von Teilmassen in großem Abstand von der Drehachse ein sehr großes Massenträgheitsmoment erreicht werden kann. Das wird in der technischen Praxis vielfach genutzt (z. B.: Schwungräder).

Die formale Ähnlichkeit der Formel 29.2 mit den Formeln für die Flächenträgheitsmomente 16.9 (Seite 220) hat letzteren zu dem etwas unpassenden Namen verholfen. Viele im Abschnitt 16.2 besprochene Eigenschaften der Flächenträgheitsmomente sind übertragbar, z. B. folgt aus der Definition 29.2 für Körper, die sich aus mehreren Teilmassen zusammensetzen:

Massenträgheitsmomente, die sich auf gleiche Drehachsen beziehen, dürfen addiert bzw. subtrahiert werden.

29.3.1 Massenträgheitsmomente einfacher Körper

Man darf sich vom Massenträgheitsmoment eines Körpers die Modellvorstellung machen, dass die gesamte Masse in einem (unendlich) dünnen Ring mit dem Radius R konzentriert ist. Das Integral 29.2 degeneriert in diesem Fall zu einem Ergebnis, das man näherungsweise für sehr **dünne Zylinder** (z. B.: Wand einer Zentrifuge, Radreifen eines Schienenfahrzeugs) verwenden darf: $J_S = mR^2$. Für alle anderen Körper muss die Massenverteilung berücksichtigt werden.

Beispiel 1:

Für einen **dünnen Stab** (Masse m , Länge l) darf angenommen werden, dass alle Massenelemente in einem Querschnitt den gleichen Abstand r von der Drehachse haben. Mit dem differenziell kleinen Massenelement (A - Querschnittsfläche, ρ - Dichte)

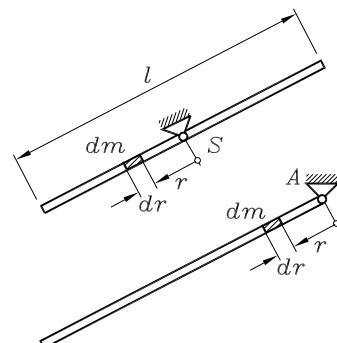
$$dm = \rho A dr$$

berechnet man die Massenträgheitsmomente bezüglich einer Drehachse im Schwerpunkts S

$$J_S = \int_{r=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \rho A dr = \frac{1}{12} \rho A l^3 = \frac{1}{12} m l^2 \quad (29.11)$$

bzw. einer Drehachse im Endpunkt A :

$$J_A = \int_{r=0}^l r^2 \rho A dr = \frac{1}{3} \rho A l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \quad . \quad (29.12)$$



Beispiel 2:

Für die Berechnung des Massenträgheitsmoments eines kreiszylindrischen Körpers (Voll- bzw. Hohlzylinder) bezüglich der Zylinderachse wählt man zweckmäßig als Massenelement dm einen unendlich dünnen Hohlzylinder (unterste der drei Skizzen):

$$dm = 2\pi r dr l \rho .$$

Hinweis: Im allgemeinen Fall ist 29.2 ein Volumenintegral. Durch geschicktes Aufschreiben von dm kann daraus ein Flächenintegral oder ein einfaches Integral werden. Natürlich müssen alle in dm einfließenden Massenteilchen den gleichen Abstand von der Drehachse haben.

Für den **Hohlzylinder** errechnet man

$$J_S = \int_{r_i}^{r_a} r^2 2\pi r l \rho dr = \frac{1}{2} \pi l \rho (r_a^4 - r_i^4) ,$$

was mit der Gesamtmasse $m = \pi \rho l (r_a^2 - r_i^2)$ umgeformt werden kann zu:

$$J_S = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2) , \quad (29.13)$$

Mit $r_i = 0$ und $r_a = R$ entsteht ein **Vollzylinder**:

$$J_S = \frac{1}{2} m R^2 . \quad (29.14)$$

Der Hohlzylinder könnte natürlich auch als Differenz zweier Vollzylinder angesehen werden, wobei zu beachten ist, dass in den Formeln 29.11 bis 29.14 das Symbol m immer für die Gesamtmasse des Körpers steht, so dass bei der Differenzbildung zwei unterschiedliche Massen einzusetzen sind (großer Vollzylinder und kleiner Vollzylinder).

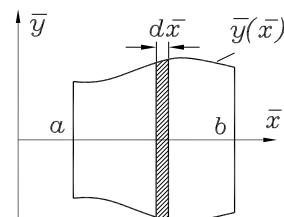
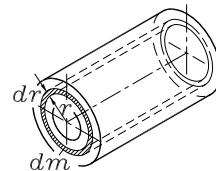
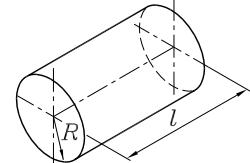
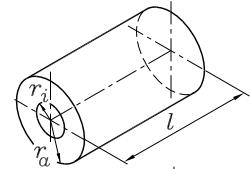
Beispiel 3:

Rotoren haben vornehmlich eine rotationssymmetrische Form. Wenn diese durch eine Konturlinie $\bar{y}(\bar{x})$ beschrieben wird (Skizze), kann man sich den Rotor aus unendlich vielen unendlich dünnen Scheiben zusammengesetzt denken (Scheibendicke jeweils $d\bar{x}$, Scheibenradius \bar{y}). Eine solche Scheibe hat die Masse $dm = \rho \pi \bar{y}^2 d\bar{x}$ und bei Rotation um die \bar{x} -Achse das Massenträgheitsmoment $\frac{1}{2} dm \bar{y}^2$.

Die Summation der differenziell kleinen Trägheitsmomente (Integration von a bis b) ergibt eine Formel für das **Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers**:

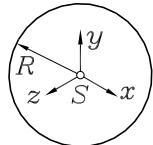
$$J_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\pi}{2} \rho \int_{\bar{x}=a}^b \bar{y}^4 d\bar{x} = \frac{m}{2} \frac{\int_{\bar{x}=a}^b \bar{y}^4 d\bar{x}}{\int_{\bar{x}=a}^b \bar{y}^2 d\bar{x}} , \quad (29.15)$$

wobei die Formel mit der Gesamtmasse des Rotationskörpers m durch Einsetzen der Volumenformel für Rotationskörper entstand. Aus Gründen, die im Abschnitt 29.3.3 erläutert werden, wurde in 29.15 ein Doppelindex für die Kennzeichnung der Bezugsachse verwendet. Das gilt auch für die folgende Zusammenstellung einiger wichtiger Formeln.



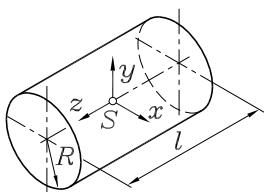
Die Querstriche über den Koordinaten wurden in der Zusammenstellung weggelassen, weil es nicht mehr beliebige Bezugssachsen, sondern Schwerpunktachsen sind. In diesem Sinne sind es

Massenträgheitsmomente ausgewählter homogener Körper:



Kugel:

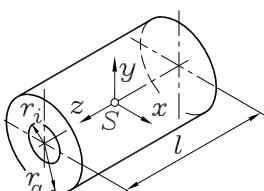
$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{5} m R^2$$



Kreiszylinder:

$$J_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$$

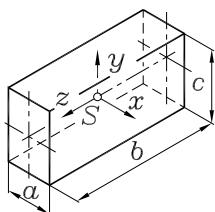
$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12} m (3R^2 + l^2)$$



Hohlzylinder:

$$J_{zz} = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)$$

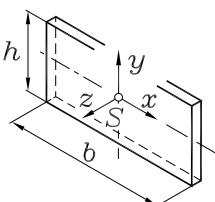
$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12} m (3r_a^2 + 3r_i^2 + l^2)$$



Quader:

$$J_{xx} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) \quad , \quad J_{yy} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

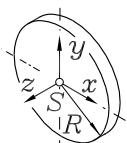
$$J_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$



Dünne Rechteckscheibe:

$$J_{xx} = \frac{1}{12} m h^2 \quad , \quad J_{yy} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$J_{zz} = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$$



Dünne Kreisscheibe:

$$J_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{4} m R^2$$

29.3.2 Der Satz von Steiner

Analog zum Steinerschen Satz für Flächenträgheitsmomente (Abschnitt 16.2.3) gibt es auch für die Massenträgheitsmomente eine Formel, mit der bei gegebenem Trägheitsmoment bezüglich einer Schwerpunktachse das Trägheitsmoment für eine parallele Achse zu berechnen ist.

Die Achsen x und y gehen durch den Schwerpunkt des Körpers. Gegeben sind das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich einer Achse z senkrecht zu x und y und die Masse des Körpers m , gesucht ist das Massenträgheitsmoment J_A für eine zur Achse z parallele Achse durch den Punkt A im Abstand \bar{r}_S von S .

Aus der Abbildung 29.4 kann man die Beziehung

$$\bar{r}^2 = (\bar{x}_S + x)^2 + (\bar{y}_S + y)^2$$

ablesen. Dieser Ausdruck wird in die Formel für das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Punkt A eingesetzt:

$$\begin{aligned} J_A &= \int_m \bar{r}^2 dm = \int_m (\bar{x}_S^2 + 2\bar{x}_S x + x^2) dm + \int_m (\bar{y}_S^2 + 2\bar{y}_S y + y^2) dm \\ &= \int_m (\bar{x}_S^2 + \bar{y}_S^2) dm + \int_m (x^2 + y^2) dm = \bar{r}_S^2 \int_m dm + \int_m r^2 dm , \end{aligned}$$

wobei berücksichtigt wurde, dass die statischen Momente

$$\int_m x dm \quad \text{und} \quad \int_m y dm ,$$

die sich auf die Schwerpunktachsen beziehen, verschwinden (vgl. Abschnitt 4.1). Es verbleibt die gesuchte Formel, auch für die Massenträgheitsmomente bezeichnet als

Steinerscher Satz:

$$J_A = J_S + m\bar{r}_S^2 . \quad (29.16)$$

- ⇒ Bei der Anwendung der Formel 29.16 ist zu beachten, dass A ein beliebiger Punkt ist, während S der **Schwerpunkt** des Körpers sein muss. Die beiden durch diese Punkte gehenden Achsen, auf die sich J_A bzw. J_S beziehen, müssen parallel sein. Ihr Abstand ist \bar{r}_S , und m ist die Gesamtmasse des Körpers.
- ⇒ Aus 29.16 folgt, dass das auf eine Schwerpunktachse bezogene Massenträgheitsmoment immer kleiner ist als ein beliebiges Massenträgheitsmoment, das sich auf eine parallele Achse bezieht.

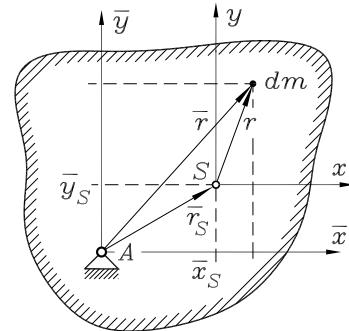


Abbildung 29.4: Generelle Vereinbarung: Schwerpunktkoordinaten werden ohne Querstrich (x, y, z), beliebige andere Koordinaten mit Querstrich geschrieben ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)

Beispiel 1:

Als Beispiel 1 im Abschnitt 29.3.1 wurden die Massenträgheitsmomente des dünnen Stabes bezüglich des Schwerpunktes S und des Endpunktes A berechnet. Natürlich lässt sich J_A bei bekanntem J_S auch nach 29.16 berechnen. Mit dem Abstand $\frac{l}{2}$ des Punktes A vom Schwerpunkt S ergibt der Steinersche Satz mit

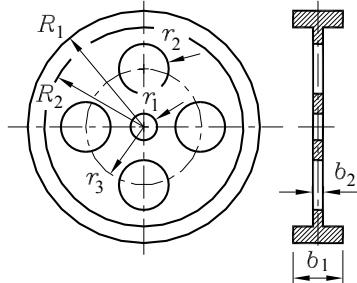
$$J_A = J_S + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

wieder das Ergebnis 29.12.

Beispiel 2:

Das skizzierte Schwungrad dreht sich mit der Drehzahl n . Es soll die kinetische Energie berechnet werden, die in dem sich drehenden Rad gespeichert ist.

Gegeben: $b_1 = 120 \text{ mm}$; $R_1 = 800 \text{ mm}$;
 $b_2 = 30 \text{ mm}$; $R_2 = 750 \text{ mm}$;
 $r_1 = 80 \text{ mm}$; $r_2 = 180 \text{ mm}$;
 $r_3 = 400 \text{ mm}$; $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$;
 $n = 800 \text{ min}^{-1}$.



Das Massenträgheitsmoment wird entsprechend Abbildung 29.5 zusammengesetzt aus zwei Hohlzylindern (Kranz mit der Breite b_1 und Scheibe mit der Breite b_2), von denen die vier zylindrischen Bohrungen (Radius r_3) subtrahiert werden.

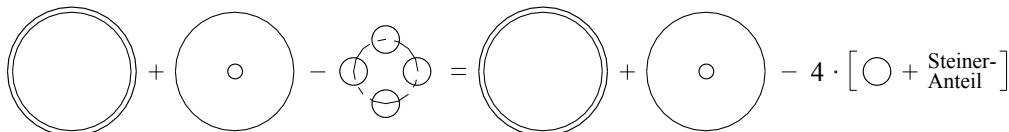


Abbildung 29.5: „Kranz“ (Hohlzylinder) + „Gelochte Scheibe“ (Hohlzylinder) - „Ausschnitte“ (Zylinder)

Die Massenträgheitsmomente entnimmt man der Zusammenstellung auf Seite 549. Nur für die vier Bohrungen sind Steiner-Anteile (Abstand r_3 von der Drehachse) zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} J_S &= \frac{1}{2} m_{\text{Kranz}} (R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{2} m_{\text{Gelochte Scheibe}} (R_2^2 + r_1^2) - 4 \left[\frac{1}{2} m_{\text{Ausschnitt}} r_2^2 + m_{\text{Ausschnitt}} r_3^2 \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \rho \pi (R_1^2 - R_2^2) b_1}_{m_{\text{Kranz}}} (R_1^2 + R_2^2) + \underbrace{\frac{1}{2} \rho \pi (R_2^2 - r_1^2) b_2}_{m_{\text{Gelochte Scheibe}}} (R_2^2 + r_1^2) - \underbrace{4 \left[\frac{1}{2} \rho \pi r_2^2 b_2 r_2^2 + \rho \pi r_2^2 b_2 r_3^2 \right]}_{\text{Ausschnitt + Steiner-Anteil}} \\ &= \frac{\pi}{2} \rho [b_2 (R_2^4 - r_1^4 - 4 r_2^4 - 8 r_2^2 r_3^2) + b_1 (R_1^4 - R_2^4)] = 238 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Die kinetische Energie errechnet sich nach 29.4 in Verbindung mit 26.21:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_S (2\pi n)^2 = \frac{1}{2} \cdot 238 \text{ kgm}^2 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{800}{60 \text{ s}} \right)^2 = 0,835 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 835 \text{ kJ}$$

29.3.3 Deviationsmomente, Hauptachsen

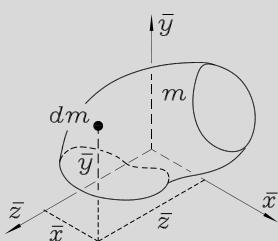
Die Definition des Massenträgheitsmoments 29.2 lässt entsprechend

$$J_{\bar{z}\bar{z}} = \int_m r^2 dm = \int_m \bar{x}^2 dm + \int_m \bar{y}^2 dm$$

(\bar{z} ist die Rotationsachse) die mathematische Verwandtschaft mit den Flächenträgheitsmomenten 16.9 erkennen, bei den Deviationsmomenten 29.9 ist die Ähnlichkeit mit 16.9 sogar unmittelbar gegeben. Der Unterschied besteht im nummehr dreidimensionalen Integrationsgebiet über die Masse gegenüber der zweidimensionalen Fläche bei den Flächenkennwerten der Biegetheorie.

Die Fragestellungen, die sich ergeben, sind ebenfalls ähnlich (Achsen für minimale und maximale Trägheitsmomente, Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes, ...), sie werden mit entsprechenden (etwas aufwendigeren) Überlegungen beantwortet, wie sie im Abschnitt 16.2 demonstriert wurden. Nachfolgend werden die wichtigsten Aussagen zusammengestellt.

Axiale Massenträgheitsmomente:



$$\begin{aligned} J_{\bar{x}\bar{x}} &= \int_m (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) dm , \\ J_{\bar{y}\bar{y}} &= \int_m (\bar{x}^2 + \bar{z}^2) dm , \\ J_{\bar{z}\bar{z}} &= \int_m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) dm . \end{aligned} \quad (29.17)$$

Deviationsmomente (Zentrifugalmomente):

Die Definitionen der Massenträgheitsmomente und der Deviationsmomente beziehen sich auf ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem.

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}\bar{y}} &= - \int_m \bar{x}\bar{y} dm , \\ J_{\bar{x}\bar{z}} &= - \int_m \bar{x}\bar{z} dm , \\ J_{\bar{y}\bar{z}} &= - \int_m \bar{y}\bar{z} dm . \end{aligned} \quad (29.18)$$

- ⇒ Die axialen Massenträgheitsmomente sind stets positiv, Deviationsmomente können positiv oder negativ sein.
- ⇒ Die Größe der Massenträgheitsmomente und der Deviationsmomente ist von der Lage des Koordinatenursprungs und den Richtungen der Achsen abhängig. Für jeden Koordinatenursprung gibt es mindestens drei Achsen, für die die Deviationsmomente Null werden. Es sind die *Hauptachsen* für den gewählten Koordinatenursprung. In Punkten mit genau drei solcher Achsen stehen diese senkrecht aufeinander.
- ⇒ Jede Senkrechte zu einer Symmetrieebene ist Hauptachse.

- ⇒ Ein *Hauptachsensystem* ist dadurch gekennzeichnet, dass ein axiales Massenträgheitsmoment ein Maximum und das Massenträgheitsmoment um eine zweite dieser Koordinatenachsen ein Minimum wird. Das Massenträgheitsmoment um die dritte Hauptachse liegt zwischen diesen beiden Werten.
- ⇒ Hauptachsen im Schwerpunkt des Körpers nennt man *Hauptzentralachsen*. Schnittlinien zweier Symmetrieebenen eines Körpers (damit auch jede Rotationssymmetrielinie) sind immer Hauptzentralachsen. Wenn das größte und das kleinste Massenträgheitsmoment bezüglich der Hauptzentralachsen den gleichen Wert haben (Kugel, Würfel, ...), sind sämtliche Achsen durch den Schwerpunkt Hauptzentralachsen.

Häufig lassen sich die Massenträgheitsmomente von Körpern zusammensetzen aus den bekannten Massenträgheitsmomenten von Teilkörpern (in der Regel auf Schwerpunktachsen der Teilkörper bezogen, vgl. Tabelle auf Seite 549). Da sie nur addiert bzw. subtrahiert werden dürfen, wenn sie sich auf gleiche Achsen beziehen, müssen der Steinersche Satz (für Parallelverschiebung) und Transformationsformeln für die Drehung des Koordinatensystems benutzt werden. Die folgenden Formeln setzen zunächst voraus, dass keine Drehung des Koordinatensystems erforderlich ist. In diesem Sinne sind es die

**Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente
zusammengesetzter Körper:**

$$\begin{aligned}
 J_{\bar{x}\bar{x}} &= \sum_i [J_{xx_i} + (\bar{y}_i^2 + \bar{z}_i^2)m_i] \quad , \\
 J_{\bar{y}\bar{y}} &= \sum_i [J_{yy_i} + (\bar{z}_i^2 + \bar{x}_i^2)m_i] \quad , \\
 J_{\bar{z}\bar{z}} &= \sum_i [J_{zz_i} + (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)m_i] \quad , \\
 J_{\bar{x}\bar{y}} &= \sum_i [J_{xy_i} - \bar{x}_i \bar{y}_i m_i] \quad , \\
 J_{\bar{y}\bar{z}} &= \sum_i [J_{yz_i} - \bar{y}_i \bar{z}_i m_i] \quad , \\
 J_{\bar{x}\bar{z}} &= \sum_i [J_{xz_i} - \bar{x}_i \bar{z}_i m_i] \quad .
 \end{aligned} \tag{29.19}$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - Koordinatensystem für das Trägheitsmoment des Gesamtkörpers,
 x_i, y_i, z_i - Koordinatensystem im Schwerpunkt S_i des i -ten Teilkörpers parallel zum $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -System.

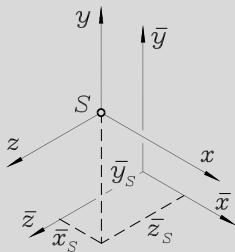
Auch die axialen Massenträgheitsmomente in 29.17 bzw. 29.19 wurden aus formalen Gründen mit zwei Indizes versehen, weil es üblich und sinnvoll ist, sie mit den Deviationsmomenten zum *Trägheitstensor* zusammenzufassen. Die sechs zu einem speziellen Koordinatensystem gehörenden Werte werden als symmetrische Matrix angeordnet:

$$J_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \begin{bmatrix} J_{\bar{x}\bar{x}} & J_{\bar{x}\bar{y}} & J_{\bar{x}\bar{z}} \\ J_{\bar{x}\bar{y}} & J_{\bar{y}\bar{y}} & J_{\bar{y}\bar{z}} \\ J_{\bar{x}\bar{z}} & J_{\bar{y}\bar{z}} & J_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \quad . \tag{29.20}$$

Der Übergang vom beliebigen \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem zu einem parallelen x - y - z -System, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Gesamtkörpers liegt, ist durch den im vorigen Abschnitt behandelten Steinerschen Satz gegeben, der auch schon für das Aufschreiben von 29.19 genutzt wurde. Der Zusammenhang zwischen dem Trägheitstensor nach 29.20 und einem Trägheitstensor J_{xyz} , der sich auf das parallele Schwerpunktsystem bezieht, ist unmittelbar aus 29.19 abzulesen („Körper, der aus nur einem Teilkörper besteht“) als

Steinerscher Satz für Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente:

$$J_{xyz} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} = J_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} - m \begin{bmatrix} \bar{y}_S^2 + \bar{z}_S^2 & -\bar{x}_S \bar{y}_S & -\bar{x}_S \bar{z}_S \\ -\bar{x}_S \bar{y}_S & \bar{z}_S^2 + \bar{x}_S^2 & -\bar{y}_S \bar{z}_S \\ -\bar{x}_S \bar{z}_S & -\bar{y}_S \bar{z}_S & \bar{x}_S^2 + \bar{y}_S^2 \end{bmatrix} \quad (29.21)$$



mit den Koordinaten des Gesamtschwerpunkts \bar{x}_S , \bar{y}_S , \bar{z}_S der Masse m , gemessen im allgemeinen \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem.

Man beachte, dass 29.21 in der Form „Übergang vom allgemeinen zum speziellen Koordinatensystem“ aufgeschrieben wurde, weil diese Formel vornehmlich so gebraucht wird (deshalb das Minuszeichen vor dem „Steiner-Anteil“).

Auch die Drehung des Koordinatensystems ist nach den aus der Mathematik bekannten Regeln formalisierbar. Der Trägheitstensor nach 29.21 möge für ein x - y - z -Koordinatensystem gegeben sein, es sollen die axialen Massenträgheitsmomente und die Deviationsmomente für ein gedrehtes ξ - η - ζ -System bestimmt werden (Hinweis: Die nachfolgend angegebenen Transformationsformeln, hier aufgeschrieben für das Schwerpunkt-Koordinatensystem mit x , y und z , gelten uningeschränkt auch für das beliebige \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -System). Wenn

- α_1 , β_1 und γ_1 die Winkel zwischen x -, y - bzw. z -Achse und der ξ -Achse,
- α_2 , β_2 und γ_2 die Winkel zwischen x -, y - bzw. z -Achse und der η -Achse,
- α_3 , β_3 und γ_3 die Winkel zwischen x -, y - bzw. z -Achse und der ζ -Achse

sind (Abbildung 29.6) zeigt als Beispiel die Winkel, die die Lage der ξ -Achse definieren), dann gilt für die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (29.22)$$

mit $C = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix}$

(C^T ist die transponierte Matrix). Damit ergibt sich die

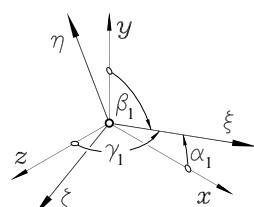


Abbildung 29.6: Winkel, die die Lage der ξ -Achse definieren

Transformation der Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\mathbf{J}_{\xi \eta \zeta} = \mathbf{C}^T \mathbf{J}_{xyz} \mathbf{C} \quad (29.23)$$

mit der Transformationsmatrix \mathbf{C} nach 29.22 und \mathbf{J}_{xyz} nach 29.21 oder auch 29.20.

In der Transformationsmatrix \mathbf{C} ist jede Spalte ein Einheitsvektor, der die Richtung einer Koordinatenachse des ξ - η - ζ -Systems im x - y - z -Koordinatensystem hat. Wenn nun eine Transformation 29.23 gefunden werden kann, die \mathbf{J}_{xyz} in eine Diagonalmatrix überführt (die auf den Nichtdiagonalpositionen stehenden Deviationsmomente sollen Null werden), dann würden die Spalten dieser speziellen Transformationsmatrix \mathbf{C}_H die Richtungen der Hauptzentralachsen definieren (bei einem allgemeinen Koordinatensystem die Richtungen der Hauptachsen für den entsprechenden Koordinatenursprung), und die Transformation

$$\mathbf{J}_{123} = \mathbf{C}_H^T \mathbf{J}_{xyz} \mathbf{C}_H = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (29.24)$$



liefert die drei Hauptträgheitsmomente J_1 , J_2 und J_3 .

Das Finden einer *Hauptachsentransformation* 29.24 für eine gegebene Matrix \mathbf{J}_{xyz} entspricht genau der Aufgabenstellung des *speziellen Matrizeneigenwertproblems*

$$(\mathbf{J}_{xyz} - \kappa \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad , \quad (29.25)$$

für dessen Lösung die Verwendung eines geeigneten Computerprogramms empfohlen wird (siehe www.TM-aktuell.de¹). Weil man allerdings mit einer 3×3 -Matrix auch noch ohne Computer operieren kann, soll hier kurz eine (für dieses kleine Problem durchaus zumutbare) Lösungsmöglichkeit für die Handrechnung beschrieben werden:

29.25 ist ein homogenes lineares Gleichungssystem (\mathbf{E} steht für eine Einheitsmatrix), die drei *Eigenwerte* κ_i , für die es nichttriviale Lösungen hat, sind die gesuchten Hauptträgheitsmomente J_1 , J_2 und J_3 . Die zugehörigen (bis auf einen Faktor bestimmbar) nichttrivialen Lösungsvektoren \mathbf{x}_i (*Eigenvektoren*) sind die Spalten der gesuchten Transformationsmatrix \mathbf{C} (und damit die Richtungsvektoren der Hauptzentralachsen bzw. Hauptachsen).

Da ein homogenes Gleichungssystem nur dann nichttriviale Lösungen haben kann, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, können aus der Bedingung

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \kappa & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} - \kappa & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} - \kappa \end{vmatrix} = 0$$

die drei gesuchten κ -Werte berechnet werden (die Entwicklung der Determinante führt auf eine Gleichung dritten Grades). Für jeden κ -Wert findet man einen Lösungsvektor des homogenen Gleichungssystems 29.25. Sinnvoll ist es, diese Lösungsvektoren durch ihre Beträge zu dividieren, so dass Einheitsvektoren entstehen, deren Komponenten dann die Richtungskosinusse der Hauptzentralachsen (bzw. Hauptachsen) sind.

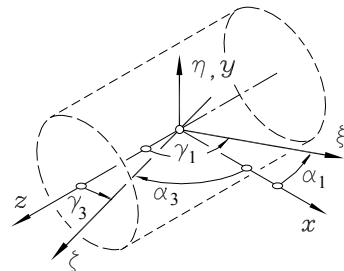
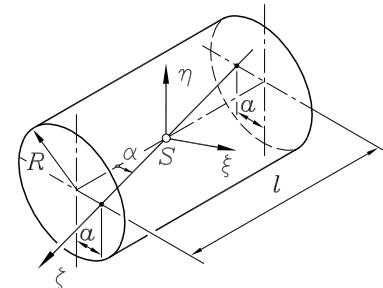
¹Man beachte auch die beiden Hinweise auf die Themen *Matrizenrechnung* und *Matrizeneigenwertprobleme* in den Boxen auf den Seiten 199 bzw. 419.

Beispiel 1:

Für den skizzierten Kreiszylinder soll der Trägheitstensor bezüglich des eingezeichneten Schwerpunkt-Koordinatensystems ermittelt werden (die ζ -Achse durchstößt die Stirnflächen jeweils im Abstand a vom Kreismittelpunkt).

Gegeben: m , a , $R = 2a$, $l = 6a$.

Da es ein typisches Problem ist, die Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente für ein Koordinatensystem zu suchen, das gegenüber dem System der Hauptzentralachsen nur um eine Achse gedreht ist (hier: Drehung um die y -Achse um den Winkel α), soll die Rechnung zunächst allgemein ausgeführt werden. Die Skizze zeigt von den neun Winkeln, die die Transformationsmatrix 29.22 bilden, nur die vier, die von 0° und 90° verschieden sind.



Zur Erinnerung: Die Winkel α_1 , β_1 und γ_1 zählen von der x -, y - bzw. z -Achse bis zur ξ -Achse, entsprechend die Winkel mit den Indizes 2 und 3 bis zur η - bzw. ζ -Achse. Aus der Skizze liest man ab:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha & ; \quad \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} & ; \quad \alpha_3 &= \frac{\pi}{2} - \alpha & ; \\ \beta_1 &= \frac{\pi}{2} & ; \quad \beta_2 &= 0 & ; \quad \beta_3 &= \frac{\pi}{2} & ; \\ \gamma_1 &= \frac{\pi}{2} + \alpha & ; \quad \gamma_2 &= \frac{\pi}{2} & ; \quad \gamma_3 &= \alpha & ; \end{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{bmatrix} .$$

mit den Abkürzungen $c_\alpha = \cos \alpha$ und $s_\alpha = \sin \alpha$. Damit erhält man nach 29.23 eine allgemeingültige Beziehung für die Berechnung der Massenträgheits- und Deviationsmomente bezüglich eines Koordinatensystems, das sich aus dem System der Hauptzentralachsen durch Drehung um die y -Achse ergibt:

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} J_{xx}c_\alpha^2 + J_{zz}s_\alpha^2 & 0 & (J_{xx} - J_{zz})s_\alpha c_\alpha \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ (J_{xx} - J_{zz})s_\alpha c_\alpha & 0 & J_{xx}s_\alpha^2 + J_{zz}c_\alpha^2 \end{bmatrix} . \quad (29.26)$$

Für das aktuelle Beispiel sind die Massenträgheitsmomente für die Hauptzentralachsen bekannt. Man entnimmt der Tabelle auf Seite 549

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12}m(3R^2 + l^2) \quad , \quad J_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$$

und errechnet mit den gegebenen Größen:

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} J_{\xi\xi} & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ J_{\xi\eta} & J_{\eta\eta} & J_{\eta\zeta} \\ J_{\xi\zeta} & J_{\eta\zeta} & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{5} \begin{bmatrix} 19 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 0 \\ 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} .$$

Beispiel 2:

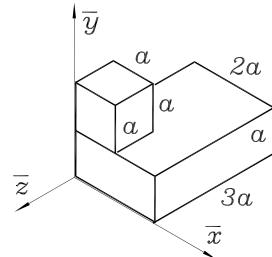
Für den aus einem Quader und einem Würfel zusammengesetzten homogenen Körper sollen

- alle Komponenten des Trägheitstensors bezüglich des skizzierten Koordinatensystems und
- die Lage der Hauptzentralachsen und die zugehörigen Hauptträgheitsmomente ermittelt werden.

Gegeben: a , Dichte ρ .

- Die Massenträgheitsmomente der beiden Teilkörper (jeweils bezogen auf die Teilkörperschwerpunkte, der Würfel ist natürlich auch nur ein Sonderfall des Quaders) können der Tabelle auf Seite 549 entnommen werden. Nach 29.19 ist für jeden Summanden (Teilkörper Quader bzw. Würfel) ein Steiner-Anteil zu berücksichtigen, und man berechnet z. B.:

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = \underbrace{\frac{1}{12} \rho \cdot 6a^3 \cdot [(3a)^2 + a^2]}_{m_{\text{Quader}}} + \underbrace{\rho \cdot 6a^3 \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \right]}_{\text{Steiner-Anteil Quader}} \\ + \underbrace{\frac{1}{12} \rho a^3 \cdot (a^2 + a^2)}_{m_{\text{Würfel}}} + \underbrace{\rho a^3 \left[\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]}_{\text{Steiner-Anteil Würfel}} = \frac{68}{3} \rho a^5 .$$



Bei der Berechnung der Deviationsmomente ist zu beachten, dass die Symmetrieachsen der Teilkörper Hauptzentralachsen sind und nur für den Gesamtkörper infolge der Steiner-Anteile in 29.19 Deviationsmomente entstehen, z. B.:

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = \underbrace{-\rho \cdot 6a^3 \frac{2a}{2} \frac{a}{2}}_{\text{Steiner-Anteil Quader}} - \underbrace{\rho a^3 \frac{a}{2} \frac{3a}{2}}_{\text{Steiner-Anteil Würfel}} = -\frac{15}{4} \rho a^5 .$$

Entsprechend errechnen sich die anderen Elemente des Trägheitstensors, man erhält:

$$J_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = \frac{\rho a^5}{12} \begin{bmatrix} 272 & -45 & 111 \\ -45 & 320 & 63 \\ 111 & 63 & 152 \end{bmatrix} .$$

- Die Schwerpunktberechnung wurde im Kapitel 4 behandelt. Nach 4.4 erhält man:

$$\bar{x}_S = \frac{1}{a^3 + 6a^3} \left(a^3 \cdot \frac{a}{2} + 6a^3 \cdot \frac{2a}{2} \right) = \frac{13}{14} a , \\ \bar{y}_S = \frac{1}{a^3 + 6a^3} \left(a^3 \cdot \frac{3a}{2} + 6a^3 \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{9}{14} a , \\ \bar{z}_S = \underbrace{\frac{1}{a^3 + 6a^3}}_{\text{Gesamt-Volumen}} \left[a^3 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + 6a^3 \cdot \left(-\frac{3a}{2}\right) \right] = -\frac{19}{14} a .$$

Der Trägheitstensor \mathbf{J}_{xyz} bezüglich eines Koordinatensystems im Schwerpunkt mit Achsen parallel zum \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -System kann nun nach 29.21 mit den laut Aufgabenstellung a errechneten Werten und der Gesamtmasse $m = 7\rho a^3$ aufgeschrieben werden:

$$\mathbf{J}_{xyz} = \mathbf{J}_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} - 7\rho a^3 \begin{bmatrix} \bar{y}_S^2 + \bar{z}_S^2 & -\bar{x}_S \bar{y}_S & -\bar{x}_S \bar{z}_S \\ -\bar{x}_S \bar{y}_S & \bar{z}_S^2 + \bar{x}_S^2 & -\bar{y}_S \bar{z}_S \\ -\bar{x}_S \bar{z}_S & -\bar{y}_S \bar{z}_S & \bar{x}_S^2 + \bar{y}_S^2 \end{bmatrix} = \frac{\rho a^5}{42} \begin{bmatrix} 289 & 18 & 18 \\ 18 & 325 & -36 \\ 18 & -36 & 157 \end{bmatrix} .$$

Die Eigenvektoren dieser Matrix \mathbf{J}_{xyz} definieren die Richtungen der Hauptzentralachsen des Körpers, die Eigenwerte sind die zugehörigen Hauptträgheitsmomente. Mit einem geeigneten Programm für die Lösung des speziellen Matrizeneigenwertproblems berechnet man (siehe www.TM-aktuell.de):

$$\mathbf{C}_H = \begin{bmatrix} 0,2953 & 0,9438 & -0,1485 \\ 0,9420 & -0,2618 & 0,2098 \\ -0,1591 & 0,2018 & 0,9664 \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{J}_{123} = \mathbf{C}_H^T \mathbf{J}_{xyz} \mathbf{C}_H = \rho a^5 \begin{bmatrix} 8,017 & 0 & 0 \\ 0 & 6,854 & 0 \\ 0 & 0 & 3,486 \end{bmatrix} .$$



Die normierten Spalten der Matrix \mathbf{C}_H sind Einheitsvektoren, die die Richtungen der drei Hauptzentralachsen anzeigen. In der durch die Transformation entstehenden Diagonalmatrix \mathbf{J}_{123} stehen die zugehörigen Hauptträgheitsmomente.

Die Abbildung 29.7 zeigt den Einheitsvektor (dritte Spalte der Matrix \mathbf{C}_H)

$$\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} -0,1485 \\ 0,2098 \\ 0,9664 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 98,5^\circ \\ \cos 77,9^\circ \\ \cos 14,9^\circ \end{bmatrix} ,$$

der die Hauptzentralachse mit dem kleinsten Hauptträgheitsmoment

$$J_3 = 3,486 \rho a^5$$

definiert.

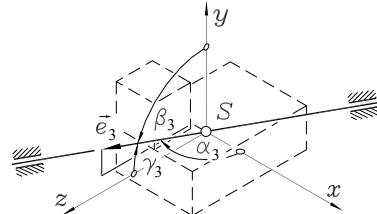


Abbildung 29.7: Die Winkel α_3 , β_3 und γ_3 definieren die Richtung der Achse mit dem kleinsten Massenträgheitsmoment

- ⇒ Das kleinste der drei Hauptträgheitsmomente bezüglich der Schwerpunktachsen ist immer das kleinste Massenträgheitsmoment des Körpers überhaupt (wegen der immer positiven Steiner-Anteile der axialen Massenträgheitsmomente haben alle parallelen Achsen größere Trägheitsmomente). Die in der Abbildung 29.7 eingezeichnete Drehachse ist für diesen Körper also die Achse mit der geringsten Drehträgeit.
- ⇒ Zur Erinnerung: Nur bei Rotation um eine der drei Hauptzentralachsen (im gerade behandelten Beispiel durch die Spalten der Matrix \mathbf{C}_H definiert) werden die Lager ausschließlich durch die Gewichtskraft der Masse (und eventuell weitere äußere Kräfte) und nicht durch die Trägheitskräfte der Bewegung belastet.

29.4 Beispiele zur Rotation um eine feste Achse

29.4.1 Allgemeine Beispiele

Beispiel 1:

Der skizzierte dünne Stab mit der Masse m wird in der horizontalen Lage gehalten und beginnt nach Durchtrennen des Fadens infolge seines Eigengewichts eine Drehbewegung um den Punkt A.

Gegeben: m, l .

Gesucht sind das Anfangswertproblem für die Berechnung des Bewegungsgesetzes $\varphi(t)$ und die Lagerreaktionen im Lager A unmittelbar nach Durchtrennen des Fadens.

Für die Analyse der Bewegung des Stabs genügt die dritte Gleichung von 29.10, das Massenträgheitsmoment des dünnen Stabs ist durch die Formel 29.12 gegeben. Das Eigengewicht erzeugt ein Moment um A, das infolge des sich ständig ändernden Hebelarms auch veränderlich ist.

Nach den Definitionen der positiven Koordinatenrichtungen, die den Formeln 29.10 zugrunde liegen, ist (bei linksdrehend positivem Winkel φ) das Moment $M_{\bar{z}}$ linksdrehend positiv einzusetzen. Aus

$$M_{\bar{z}} = -mg \frac{l}{2} \sin \varphi$$

und mit dem Massenträgheitsmoment nach 29.12 ergibt sich die Bewegungs-Differenzialgleichung:

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l} \sin \varphi .$$

Mit den Anfangsbedingungen (Start aus der Horizontalen ohne Anfangsgeschwindigkeit) erhält man das Anfangswertproblem

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l} \sin \varphi , \quad \varphi(t=0) = \frac{\pi}{2} , \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0 .$$

Selbst dieses einfache Problem führt auf eine nichtlineare Differenzialgleichung, die nicht in geschlossener Form lösbar ist (Lösung siehe www.TM-aktuell.de). Für den speziellen Zeitpunkt $t = 0$ kann man jedoch die Bewegungsgrößen auch ohne Integration des Anfangswertproblems angeben. Abbildung 29.9 zeigt die äußeren Kräfte. Mit den Schwerpunktkoordinaten

$$\bar{x}_S = \frac{l}{2} , \quad \bar{y}_S = 0$$

und den Bewegungsgrößen für den Startzeitpunkt

$$\dot{\varphi}(t=0) = 0 , \quad \ddot{\varphi}(t=0) = -\frac{3g}{2l}$$

errechnet man aus den Gleichungen 29.7:

$$F_{\bar{x}} = F_{AH} = 0 , \quad F_{\bar{y}} = F_{AV} - mg = m \frac{l}{2} \left(-\frac{3g}{2l} \right) \Rightarrow F_{AV} = \frac{1}{4} mg .$$

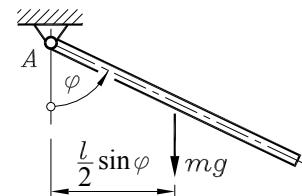
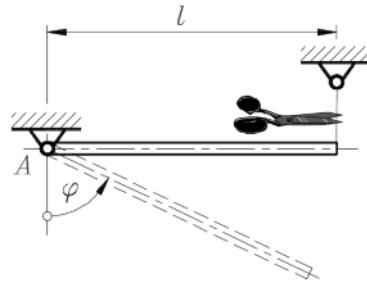


Abbildung 29.8: mg erzeugt ein Moment um A

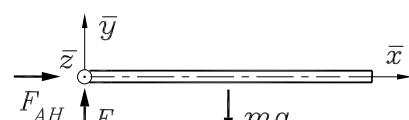


Abbildung 29.9: Lagerreaktionen

Beispiel 2:

Ein Kreiszylinder kann um eine vertikale Achse rotieren, die durch seinen Schwerpunkt geht, aber nicht mit der Zylinderachse übereinstimmt. Er wird durch ein konstantes Moment M_0 angetrieben.

Gegeben: m , a , M_0 , $R = 2a$, $l = 6a$, h .

Die Abmessungen des Zylinders entsprechen denen des Beispiels 1 im vorigen Abschnitt (Seite 556), die Lage der Drehachse entspricht der ζ -Achse dieses Beispiels.

Die Bewegung beginnt aus der Ruhe heraus. Es sollen die zeitabhängigen Lagerreaktionen und die Gesamtzeit t_1 berechnet werden, die für die erste volle Umdrehung benötigt wird.

Die Analyse der Bewegung ist in diesem Fall einfach. Für die in der Skizze angegebene Koordinate (φ hat den gleichen Drehsinn wie das äußere Moment) und die Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0)=0 \quad , \quad \dot{\varphi}(t=0)=0$$

(die Bedingung für φ ist willkürlich, die für $\dot{\varphi}$ durch die Aufgabenstellung vorgegeben) kann die dritte Gleichung von 29.10 aufgeschrieben und integriert werden:

$$M_0 = J_{zz} \ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{M_0}{J_{zz}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{M_0}{J_{zz}} t \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{M_0}{J_{zz}} t^2 \quad .$$

Die Integrationskonstanten wurden Null wegen der speziellen Anfangsbedingungen. Für J_{zz} kann der auf Seite 556 errechnete Wert $J_{\zeta\zeta}$ eingesetzt werden, so dass die Frage nach der Zeit für die erste volle Umdrehung bereits zu beantworten ist:

$$t_1 = t(\varphi = 2\pi) = \sqrt{4\pi \frac{J_{zz}}{M_0}} = \sqrt{4\pi \frac{11ma^2}{5M_0}} = 5,26a \sqrt{\frac{m}{M_0}} \quad .$$

Da die Drehachse durch den Schwerpunkt der rotierenden Masse verläuft, gibt es keine resultierenden Massenkräfte infolge der Bewegung. Aus Gleichgewichtsgründen muss deshalb

$$F_{Ax} = -F_{Bx} \quad , \quad F_{Ay} = -F_{By}$$

gelten, und die Gewichtskraft wird von der Vertikalkomponente bei B aufgenommen:

$$F_{Bz} = mg \quad .$$

Die Momenten-Gleichgewichtsbedingungen um die x -Achse und um die y -Achse werden von den ersten beiden Gleichungen 29.10 erfüllt. Dabei ist für die Momentwirkung der äußeren Kräfte (Lagerkraftkomponenten, siehe Abbildung 29.10) die Vereinbarung über die Drehrichtung zu beachten (Momentenpfeile haben den Richtungssinn der x - bzw. y -Achse):

$$M_x = -F_{Ay} \frac{h}{2} + F_{By} \frac{h}{2} = -F_{Ay} h = -J_{yz} \dot{\varphi}^2 + J_{xz} \ddot{\varphi} \quad ,$$

$$M_y = F_{Ax} \frac{h}{2} - F_{Bx} \frac{h}{2} = F_{Ax} h = J_{xz} \dot{\varphi}^2 + J_{yz} \ddot{\varphi} \quad .$$

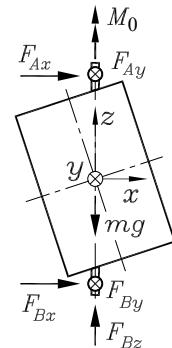
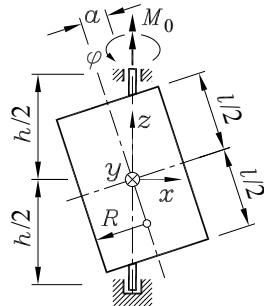


Abbildung 29.10:
Kräfte am rotierenden Zylinder

Massenträgheitsmoment und Deviationsmomente werden von der Rechnung auf Seite 556 übernommen:

$$J_{zz} = J_{\zeta \zeta} = \frac{11}{5} ma^2 \quad , \quad J_{xz} = J_{\xi \zeta} = \frac{3}{5} ma^2 \quad , \quad J_{yz} = J_{\eta \zeta} = 0 \quad ,$$

und man erhält die Lagerreaktionen:

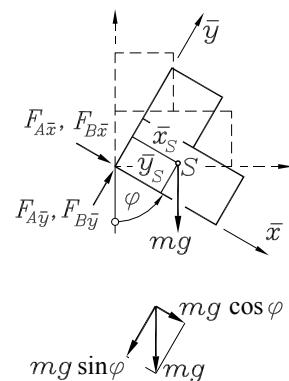
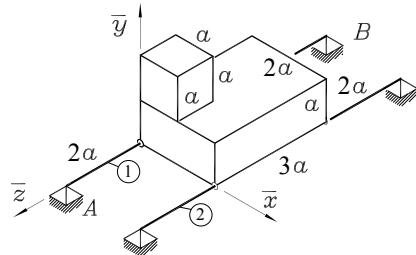
$$\begin{aligned} F_{Ay} &= -F_{By} = -\frac{1}{h} J_{xz} \ddot{\phi} = -\frac{1}{h} J_{xz} \frac{M_0}{J_{zz}} = -\frac{3}{11} \frac{M_0}{h} \quad , \\ F_{Ax} &= -F_{Bx} = \frac{1}{h} J_{xz} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{h} J_{xz} \left(\frac{M_0}{J_{zz}} t \right)^2 = \frac{15}{121} \frac{M_0 t^2}{ma^2 h} \quad . \end{aligned}$$

- ⇒ Die Komponenten der Lagerreaktionen im gerade behandelten Beispiel beziehen sich auf die Richtungen der x - bzw. y -Achse des Rotors, machen also die Drehbewegung mit und haben damit bezüglich des rotierenden Körpers immer die Richtung der in der Skizze zur Aufgabenstellung eingezeichneten Koordinaten. Man erkennt, dass die x -Komponenten der Lagerreaktionen dem durch die Fliehkräfte erzeugten Moment um die y -Achse entgegenwirken müssen. Dieses Moment, das natürlich auch bei konstanter Drehzahl vorhanden ist, wird bei diesem Beispiel ausschließlich durch die Schiefstellung der Masse hervorgerufen (der „Rotor ist nicht dynamisch ausgewuchtet“, vgl. Abschnitt 29.4.2), und die Vorzeichen der Lagerreaktionen zeigen, dass der **Rotor die Tendenz hat, die Schiefstellung zu vergrößern** (und dies auch tun würde, wenn die durch die umlaufenden Kräfte erheblich belasteten Lager dies nicht verhindern würden).

Beispiel 3: Die skizzierte Masse wird von den beiden Stäben ① und ② gehalten. Infolge eines Bruchs von Stab ② beginnt die Masse eine Drehbewegung um den Stab ①. Es sollen der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit, die die Drehbewegung beschreiben, sowie die Lagerreaktionen bei A und B in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt werden.

Der komplette Trägheitstensor für diese Masse wurde im Beispiel 2 des vorigen Abschnitts (Seite 557) berechnet. Es wird deshalb auch das dort verwendete Koordinatensystem benutzt, um die benötigten Massenträgheitsmomente und Deviationsmomente übernehmen zu können (Schwerpunkt-Koordinatensystem kann nicht benutzt werden, weil die \bar{z} -Achse mit der Drehachse übereinstimmen muss).

Die nebenstehende Skizze zeigt die Definition des Drehwinkels (linksdrehend positiv, passend zum Koordinatensystem). Er verfolgt die Unterkante der Masse. Das Koordinatensystem rotiert mit, so dass die Schwerpunktkoordinaten unveränderlich sind. Auch die Komponenten der Lagerreaktionen folgen der Drehbewegung, so dass nur das Eigengewicht mg nicht die Richtung der Koordinatenachsen hat und wie skizziert in zwei Komponenten zerlegt wird.



Das Bewegungsgesetz folgt aus der dritten Gleichung von 29.10. Die äußeren Kräfte (Komponenten des Eigengewichts) drehen entgegen der positiven φ -Richtung, das Moment wird negativ:

$$-mg\bar{x}_S \sin \varphi - mg\bar{y}_S \cos \varphi = J_{\bar{z}\bar{z}} \ddot{\varphi} .$$

Für die Berechnung der vier Lagerkraftkomponenten stehen die beiden restlichen Gleichungen von 29.10 und die Gleichungen 29.7 zur Verfügung. Die Abbildung 29.11 zeigt noch einmal die Kräfte, die in der \bar{y} - \bar{z} -Ebene bzw. der \bar{x} - \bar{z} -Ebene wirken. Die Gleichungen 29.7 liefern:

$$F_{A\bar{x}} + F_{B\bar{x}} + mg \cos \varphi = -m\bar{x}_S \dot{\varphi}^2 - m\bar{y}_S \ddot{\varphi} ,$$

$$F_{A\bar{y}} + F_{B\bar{y}} - mg \sin \varphi = -m\bar{y}_S \dot{\varphi}^2 + m\bar{x}_S \ddot{\varphi} .$$

Beim Aufschreiben der restlichen Momentenbeziehungen nach 29.10 ist zu beachten, dass die Schwerpunktkoordinate \bar{z}_S einen negativen Wert hat:

$$-F_{A\bar{y}} \cdot 2a + F_{B\bar{y}} \cdot 5a - mg \sin \varphi \cdot (-\bar{z}_S) = -J_{\bar{y}\bar{z}} \dot{\varphi}^2 + J_{\bar{x}\bar{z}} \ddot{\varphi} ,$$

$$F_{A\bar{x}} \cdot 2a - F_{B\bar{x}} \cdot 5a - mg \cos \varphi \cdot (-\bar{z}_S) = J_{\bar{x}\bar{z}} \dot{\varphi}^2 + J_{\bar{y}\bar{z}} \ddot{\varphi} .$$

Diese fünf Gleichungen beschreiben die Bewegung und gestatten die Berechnung der Lagerreaktionen. Vom Beispiel 2 des Abschnitts 29.3.3 (Seite 557) werden übernommen:

$$\begin{aligned} \bar{x}_S &= \frac{13}{14}a & \bar{y}_S &= \frac{9}{14}a & \bar{z}_S &= -\frac{19}{14}a \\ J_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{38}{3} \rho a^5 = \frac{38}{21} ma^2 & J_{\bar{x}\bar{z}} &= \frac{37}{4} \rho a^5 = \frac{37}{28} ma^2 & J_{\bar{y}\bar{z}} &= \frac{21}{4} \rho a^5 = \frac{3}{4} ma^2 , \end{aligned}$$

wobei für die Gesamtmasse $m = 7a^3 \rho$ eingesetzt wurde. Damit kann z. B. die Bewegungsdifferentialgleichung folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} -mg \left(\frac{13}{14}a \sin \varphi + \frac{9}{14}a \cos \varphi \right) &= \frac{38}{21} ma^2 \ddot{\varphi} , \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{3}{76} (13 \sin \varphi + 9 \cos \varphi) \frac{g}{a} . \end{aligned}$$

Zunächst muss diese Differentialgleichung unter Beachtung der Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = \frac{\pi}{2} , \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

gelöst werden, was nur numerisch gelingt. Die Aufbereitung der Gleichungen für die Computerrechnung soll zum Anlass genommen werden, die (gerade für die numerische Rechnung) besonders elegante Verwendung ausschließlich dimensionsloser Größen zu demonstrieren.

Die Winkelkoordinate φ ist ohnehin dimensionslos, von den veränderlichen Größen sind nur die Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung und die Zeit dimensionsbehaftet. Der Faktor auf der rechten Seite der Differentialgleichung gibt den Hinweis, dass man mit der „dimensionslosen Zeit“

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

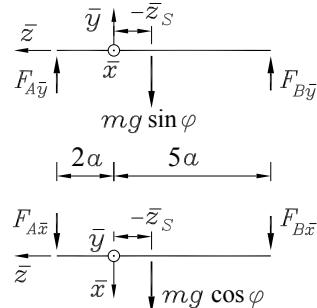


Abbildung 29.11: Eigengewicht und Lagerkraftkomponenten

und den entsprechend umgeschriebenen Ableitungen der Winkelkoordinate nach der Zeit

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \varphi' \sqrt{\frac{g}{a}} \quad , \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \varphi'' \frac{g}{a}$$

zu einer dimensionslosen Bewegungs-Differenzialgleichung kommen kann (der Strich symbolisiert die Ableitung nach τ):

$$\varphi'' = -\frac{3}{76}(13 \sin \varphi + 9 \cos \varphi) \quad .$$

In den vier Gleichungen für die Berechnung der vier Lagerkraftkomponenten werden ebenfalls die Ableitungen nach t durch Ableitungen nach τ ersetzt, und die Werte für die Schwerpunktkoordinaten und die Deviationsmomente werden eingesetzt. Dann verbleiben zweimal zwei Gleichungen mit je zwei unbekannten Lagerkräften, die nach diesen auflösbar sind:

$$\begin{aligned} F_{A\bar{x}} &= \frac{1}{196}(-102 \cos \varphi - 93 \varphi'^2 - 69 \varphi'') mg \quad , \\ F_{A\bar{y}} &= \frac{1}{196}(-102 \sin \varphi - 69 \varphi'^2 + 93 \varphi'') mg \quad , \\ F_{B\bar{x}} &= \frac{1}{196}(-94 \cos \varphi - 89 \varphi'^2 - 57 \varphi'') mg \quad , \\ F_{B\bar{y}} &= \frac{1}{196}(-94 \sin \varphi - 57 \varphi'^2 + 89 \varphi'') mg \quad . \end{aligned}$$

Der Vorteil der dimensionslosen Rechnung wird deutlich: In den Klammern stehen nur dimensionslose Größen, und natürlich geht man nach Division der vier Gleichungen durch mg auch noch zu dimensionslosen Kräften über. Dann fließen weder aktuelle Werte für die Abmessung a noch für die Masse m in die Rechnung ein. Die numerische Berechnung wird „parametrisiert“.

Die Ergebnisse können dann mit den speziellen Parametern für ein aktuelles Problem multipliziert werden, falls z. B. für die Kräfte die Aussage nicht ohnehin schon ausreichend ist, dass „die maximale Lagerkraftkomponente etwa das 1,4-fache des Eigengewichts ist“.

Die **Abbildung 29.12** (die Berechnung dieses Beispiels mit verschiedenen Programmen findet man unter www.TM-aktuell.de) zeigt links die numerisch ermittelten Funktionen $\varphi(t)$ und $\varphi'(t)$, rechts oben die Lagerkraftkomponenten und rechts unten die aus den Komponenten berechneten resultierenden Lagerkräfte.

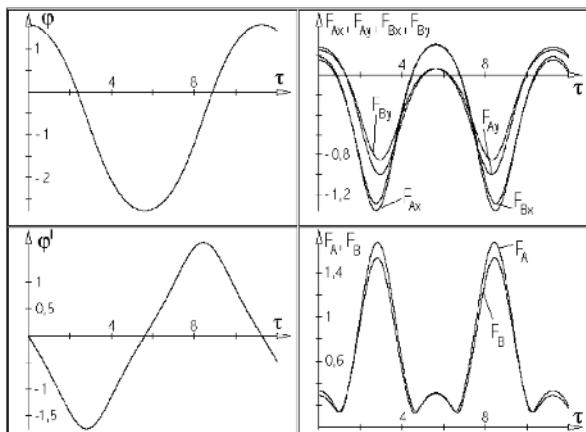


Abbildung 29.12: Kinematische Diagramme und Lagerkräfte

29.4.2 Auswuchten von Rotoren

Rotoren werden im Allgemeinen so ausgelegt, dass die Rotationsachse eine Hauptzentralachse ist. Wenn dies praktisch exakt zu realisieren sein würde, wäre der Rotor „ideal ausgewuchtet“. Die Lager würden dann nicht durch die Massenkräfte zusätzlich belastet werden.

Definition: Bringt man an einen ideal ausgewuchteten Rotor im Abstand r von der Rotationsachse eine Masse m an, dann hat der Rotor die *Unwucht*

$$\vec{U} = m \vec{r} . \quad (29.27)$$

Der so definierte *Unwuchtvektor* kennzeichnet die Richtung und mit seinem Betrag auch die Größe der Unwucht.

Von einer *statischen Unwucht* spricht man, wenn die Drehachse parallel zu einer Hauptzentralachse des Rotors liegt. Die **Abbildung 29.13** zeigt dafür eine Modellvorstellung: Eine Zusatzmasse wurde am ideal ausgewuchteten Rotor in der zur Rotationsachse senkrechten Schwerpunktebene angebracht.

Die Zusatzmasse m im Abstand r von der Drehachse des Rotors mit der Masse M ruft die Unwucht $m\vec{r}$ hervor und verschiebt den Schwerpunkt und damit die Hauptzentralachse des Rotors um

$$e = \frac{mr}{M+m}$$

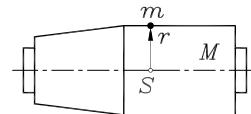


Abbildung 29.13: Modell einer *statischen Unwucht*

(zur Berechnung von Schwerpunkten siehe Kapitel 4). Das Produkt aus der Summe der beiden Massen $m_{ges} = M + m$ und dem Abstand e des Gesamtschwerpunkts von der Rotationsachse

$$(M+m)e = \frac{(M+m)mr}{M+m} = mr$$

zeigt, dass bei bekannter Gesamtmasse m_{ges} und der Exzentrizität des Schwerpunkts e die Unwucht auch nach

$$\vec{U} = m_{ges} \vec{e}$$

berechnet werden kann.

Der Begriff „statische Unwucht“ besagt, dass sie auch mit den Mitteln der Statik nachweisbar ist: Der nur durch sein Eigengewicht belastete Rotor wäre nur im stabilen statischen Gleichgewicht, wenn der Unwuchtvektor nach unten zeigte, und würde sich selbstständig in diese Lage drehen.

Dies ist bei einer „rein dynamischen Unwucht“ nicht der Fall. Die **Abbildung 29.14** zeigt ein Modell dafür: Dieser Rotor wäre in jeder Lage im statischen Gleichgewicht, aber seine Hauptzentralachse weicht von der Rotationsachse ab.

Der allgemeine Fall liegt vor, wenn in verschiedenen Querschnittsebenen des Rotors unterschiedliche Unwuchten existieren.

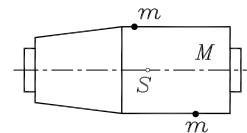


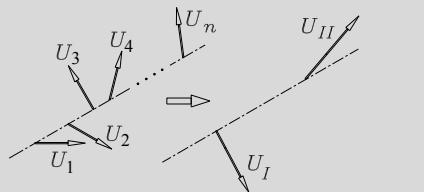
Abbildung 29.14: „Rein dynamische Unwucht“

- ⇒ Immer dann, wenn die Rotationsachse nicht mit einer Hauptzentralachse des Rotors zusammenfällt, spricht man von einer *dynamischen Unwucht*. In diesem Begriff sind die statische und die rein dynamische Unwucht als Sonderfälle enthalten.

Dem Ziel, die dynamische Unwucht eines Rotors zu beseitigen, kommt man durch Klärung folgender Frage sehr nahe: „Wie kann der allgemeine Fall eines Unwuchtzustands durch möglichst wenige Unwuchtvektoren beschrieben werden?“ Da die Unwuchtvektoren sich nur durch den skalaren Faktor ω^2 von den Fliehkräften unterscheiden, bietet sich folgende für Kräfte erlaubte Überlegung an:

Man zerlegt alle Unwuchtvektoren in zwei Komponenten in x - bzw. y -Richtung (naheliegend, aber nicht zwingend, ist die Verwendung kartesischer Koordinaten, es können jedoch zwei beliebige, aber für alle Unwuchtvektoren gleiche Richtungen senkrecht zur Rotationsachse sein, die nicht senkrecht zueinander sein müssen). Dann können alle x -Komponenten nach den Regeln der Zusammenfassung paralleler Kräfte zu einer Unwucht in einer bestimmten Ebene zusammengefasst werden, dementsprechend die y -Komponenten, wobei sich im Allgemeinen eine andere Ebene für diese Resultierende ergeben wird. Die Richtungen von x und y sind dabei natürlich frei wählbar, bei anderen Richtungen wird sich ein anderes Unwuchtpaar in zwei anderen Ebenen ergeben. Aus dieser Überlegung folgt:

Der allgemeine Unwuchtzustand (*dynamische Unwucht*) ist darstellbar durch zwei Unwuchtvektoren in zwei verschiedenen (frei wählbaren) Ebenen.



Damit ist die Möglichkeit des *Auswuchten*s (Beseitigen der Unwucht) vorgezeichnet: Man bringt in den beiden Ebenen der resultierenden Unwuchten die entsprechenden „negativen Unwuchten“ (Zusatzmassen gerade auf der entgegengesetzten Seite des Rotors) an.

In der Praxis sind dabei meist die beiden Ebenen vorgeschrieben, in denen die „Gegenunwuchten“ angebracht werden können (beim Auswuchten von Kraftfahrzeugräder werden im Allgemeinen Bleigewichte an den Felgenrändern befestigt). Die Aufgabe, einen Unwuchtvektor in einer Ebene durch ein Paar äquivalenter Unwuchtvektoren in zwei parallelen Ebenen zu ersetzen, ist in gleicher Weise wie das statisch äquivalente Ersetzen einer Kraft durch zwei parallele Kräfte zu lösen: Die beiden „Ersatzunwuchten“ sind parallel zur „Originalunwucht“ und haben gemeinsam gleiche „Kraftwirkung“ und „Momentwirkung“ bezüglich einer beliebigen Achse wie die Originalunwucht (vgl. nachfolgendes Beispiel 2).

⇒ Folgende Möglichkeiten werden in der technischen Praxis genutzt, um den Unwuchtzustand eines Rotors auszugleichen:

- Man ermittelt (experimentell, eventuell auch durch Rechnung) die tatsächliche Hauptzentralachse des Rotors, markiert sie (z. B. durch Zentrierbohrungen) und passt die Lagerzapfen entsprechend an (*Wuchtzentrieren*).
- Dazu alternativ ist die Korrektur der Hauptzentralachse des Rotors, bis sie mit der Rotationsachse übereinstimmt durch *Zugabe von Material* (z. B. Bleigewichte, ...), *Wegnahme von Material* (Abschleifen, Anbringen von Bohrungen, ...), *Verlagern von Material* (z. B. durch Verändern der Einschraubtiefe von Schrauben, die in der Konstruktion für diesen Zweck vorgesehen sind, ...).

Beispiel 1:

Eine Stiftwalze besteht aus dem zylindrischen Grundkörper und vier jeweils um 90° versetzt angebrachten Massen m , deren Schwerpunkte sich im Abstand R von der Walzenachse befinden.

Der Unwuchtzustand infolge der Zusatzmassen m soll durch Betrag und Richtung zweier Unwuchtvektoren angegeben werden, die in den Ebenen 1 bzw. 4 liegen.

Die vier Unwuchtvektoren in den Ebenen 1 bis 4 haben alle den gleichen Betrag

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = mR$$

bei unterschiedlichen Richtungen. Um den Unwuchtzustand nur durch zwei Vektoren in den beiden Ebenen 1 bzw. 4 beschreiben zu können, müssen zunächst die beiden Vektoren der Ebenen 2 und 3 durch jeweils ein äquivalentes Vektorpaar ersetzt werden.

Die Abbildung 29.15 zeigt das für die Unwucht U_2 , die durch die beiden Unwuchten $U_{2,1}$ (in der Ebene 1) und $U_{2,4}$ (in der Ebene 4) ersetzt wird.

Äquivalenz ist gegeben, wenn U_2 einerseits und $U_{2,1}$ und $U_{2,4}$ andererseits gleiche resultierende „Kraftwirkung“ und gleiche resultierende „Momentwirkung bezüglich einer beliebigen Achse“ haben (vgl. Kapitel 3).

Um eine beliebige vertikale Achse in der Ebene 1 hat $U_{2,1}$ keine Momentwirkung, die Gleichheit der Momentwirkungen von U_2 bzw. $U_{2,4}$ um eine solche Achse liefert

$$U_{2,4}l = U_2 \frac{1}{3}l \quad \Rightarrow \quad U_{2,4} = \frac{1}{3}U_2 = \frac{1}{3}mR \quad .$$

Die Äquivalenz der Momentwirkungen um eine vertikale Achse in der Ebene 4 ergibt:

$$U_{2,1}l = U_2 \frac{2}{3}l \quad \Rightarrow \quad U_{2,1} = \frac{2}{3}U_2 = \frac{2}{3}mR \quad .$$

Auf entsprechende Weise wird die Unwucht U_3 äquivalent ersetzt:

$$U_{3,1} = \frac{1}{3}U_3 = \frac{1}{3}mR \quad , \quad U_{3,4} = \frac{2}{3}U_3 = \frac{2}{3}mR \quad .$$

Die vier Unwuchten in vier Ebenen sind durch sechs Unwuchten in zwei Ebenen ersetzt worden. Innerhalb der Ebenen werden die jeweils drei Unwuchten (Abbildung 29.16) nach den „Regeln des Kräfteparallelogramms“ zusammengefasst:

$$U_{1,red} = \sqrt{(U_1 - U_{3,1})^2 + U_{2,1}^2} = 0,943mR \quad ,$$

$$U_{4,red} = \sqrt{(U_4 - U_{2,4})^2 + U_{3,4}^2} = 0,943mR \quad ,$$

$$\alpha_1 = 45^\circ \quad , \quad \alpha_4 = 225^\circ \quad .$$

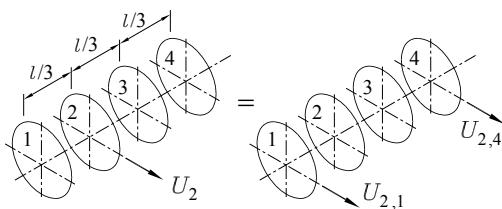
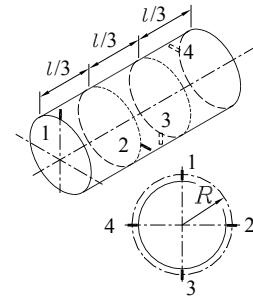


Abbildung 29.15: Ersetzen von U_2 durch ein Unwuchtpaar in den Ebenen 1 und 4

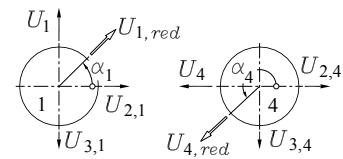


Abbildung 29.16: 6 Unwuchten in 2 Ebenen \rightarrow 2 Unwuchten in 2 Ebenen

Beispiel 2:

Mit Hilfe einer Auswuchtmachine wurden in den Lagerebenen 1 und 2 (Abstand l) die Unwuchten U_1 und U_2 unter den Winkeln α_1 bzw. α_2 gemessen. Der Unwuchtzustand soll durch Zusatzmassen m_I und m_{II} in den Ebenen I und II ausgeglichen werden. Die Ausgleichsmassen m_I und m_{II} werden in den Abständen r_I bzw. r_{II} von der Drehachse angebracht.

Gegeben: $U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2, a, b, r_I, r_{II}, l$.

Gesucht: $m_I, m_{II}, \alpha_I, \alpha_{II}$.

Zunächst werden die gemessenen Unwuchten in zwei zueinander senkrechte Komponenten in Richtung der Koordinaten x und y zerlegt:

$$U_{1,x} = U_1 \cos \alpha_1, \quad U_{1,y} = U_1 \sin \alpha_1, \quad U_{2,x} = U_2 \cos \alpha_2, \quad U_{2,y} = U_2 \sin \alpha_2.$$

Es werden nun in den Ebenen I und II auch je zwei Unwuchtkomponenten in x - bzw. y -Richtung definiert, die den äquivalenten Unwuchtzustand beschreiben sollen. Wie im Beispiel 1 wird äquivalente Momentwirkung (hier um vertikale und horizontale Achsen in den Ebenen I und II) gefordert, z. B. kann aus

$$U_{1,x}(l-b) - U_{2,x}b = U_{I,x}(l-b-a)$$

(Äquivalenz der Momentwirkungen um eine vertikale Achse in der Ebene II) die Unwucht $U_{I,x}$ berechnet werden, und aus drei weiteren Gleichungen dieser Art errechnet man:

$$\begin{aligned} U_{I,x} &= \frac{U_1(l-b) \cos \alpha_1 - U_2 b \cos \alpha_2}{(l-b-a)}, & U_{I,y} &= \frac{U_1(l-b) \sin \alpha_1 - U_2 b \sin \alpha_2}{(l-b-a)}, \\ U_{II,x} &= \frac{U_2(l-a) \cos \alpha_2 - U_1 a \cos \alpha_1}{(l-b-a)}, & U_{II,y} &= \frac{U_2(l-a) \sin \alpha_2 - U_1 a \sin \alpha_1}{(l-b-a)}. \end{aligned}$$

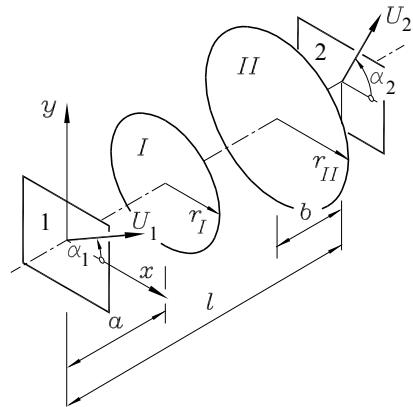
Aus diesen Komponenten ergeben sich die äquivalenten Unwuchten in den Ebenen I und II und die Winkel, die Ihre Vektoren mit der x -Richtung einschließen:

$$\begin{aligned} U_I &= \sqrt{U_{I,x}^2 + U_{I,y}^2}, & U_{II} &= \sqrt{U_{II,x}^2 + U_{II,y}^2}, \\ \tan \alpha_I &= \frac{U_{I,y}}{U_{I,x}}, & \tan \alpha_{II} &= \frac{U_{II,y}}{U_{II,x}}. \end{aligned}$$

In welchen Quadranten des Koordinatensystems die Winkel α_I und α_{II} liegen, muss über die Vorzeichen der Unwuchtkomponenten entschieden werden. Der damit auf die Ebenen I und II reduzierte Unwuchtzustand kann in diesen Ebenen ausgeglichen werden, indem Zusatzmassen

$$\begin{aligned} m_I &= \frac{U_I}{r_I} \quad \text{bei} \quad \alpha_I^* = \alpha_I + 180^\circ \\ \text{und} \quad m_{II} &= \frac{U_{II}}{r_{II}} \quad \text{bei} \quad \alpha_{II}^* = \alpha_{II} + 180^\circ \end{aligned}$$

angebracht werden.



29.5 Ebene Bewegung starrer Körper

Die in den folgenden drei Abschnitten für die ebene Bewegung des starren Körpers herzuleitenden Aussagen beziehen sich auf die im Kapitel 27 behandelte Kinematik dieser Bewegung. Die Grundlagen der Kinetik, die dafür benötigt werden, sind komplett bereits im Kapitel 28 bei der Kinetik des Massenpunkts besprochen worden.

Es wird stets die gleiche Strategie sein: Die für den einzelnen Massenpunkt gefundene Gesetzmäßigkeit wird auf die unendlich vielen Massenpunkte des starren Körpers übertragen, die voraussetzungsgemäß untereinander konstante Abstände behalten.

29.5.1 Schwerpunktsatz, Drallsatz

Die Bewegung des starren Körpers wird betrachtet als Translation, beschrieben durch die Bewegung eines ausgewählten Bezugspunktes O , der eine reine Rotation um diesen Punkt überlagert wird (vgl. Abschnitt 27.1). Für einen im ortsfesten Koordinatensystem durch x und y verfolgten beliebigen Punkt werden zunächst die Beschleunigungsanteile zusammengestellt:

Die Beschleunigungskomponenten des Bezugspunktes \ddot{x}_0 und \ddot{y}_0 (translatorischer Anteil) sind auch dem betrachteten Punkt zuzuordnen (in der Abbildung 29.17 gestrichelt), und die Bewegung des Punktes auf einem Kreis mit dem unveränderlichen Radius r (starrer Körper) steuert zwei weitere Anteile bei, die Bahnbeschleunigung $r\ddot{\varphi}$ und die Normalbeschleunigung $r\dot{\varphi}^2$.

Diese vier Beschleunigungsanteile werden zu zwei Komponenten in Richtung der Koordinaten zusammengefasst. Dazu wird noch ein Hilfskoordinatensystem \tilde{x}, \tilde{y} mit dem Ursprung in O eingeführt, das der Bewegung des Punktes O folgt, nicht aber die Rotation des Körpers mitmacht. Dementsprechend sind der Winkel $\tilde{\varphi}$ und auch

$$\tilde{x} = r \cos \tilde{\varphi} \quad , \quad \tilde{y} = r \sin \tilde{\varphi}$$

veränderlich. Der Winkel $\tilde{\varphi}$ unterscheidet sich von dem Winkel φ , der (gemeinsam mit x_0 und y_0) die Lage des starren Körpers beschreibt und von einer beliebig festzulegenden ortsfesten Geraden bis zu einer fest mit dem Körper verbundenen Geraden gemessen wird, während $\tilde{\varphi}$ gemeinsam mit r die Lage eines beliebigen Punktes des starren Körpers kennzeichnet. Damit sind die Beschleunigungskomponenten aus der Abbildung 29.17 abzulesen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_0 - r\ddot{\varphi} \sin \tilde{\varphi} - r\dot{\varphi}^2 \cos \tilde{\varphi} = \ddot{x}_0 - \ddot{\varphi} \tilde{y} - \dot{\varphi}^2 \tilde{x} \quad , \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_0 + r\ddot{\varphi} \cos \tilde{\varphi} - r\dot{\varphi}^2 \sin \tilde{\varphi} = \ddot{y}_0 + \ddot{\varphi} \tilde{x} - \dot{\varphi}^2 \tilde{y} \quad . \end{aligned} \quad (29.28)$$

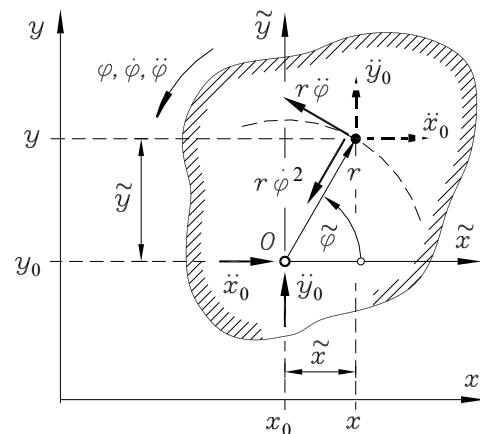


Abbildung 29.17: Starkörper-Bewegung als Translation des Punktes O und Drehung um O

Dem für den Massenpunkt behandelten Prinzip von d'Alembert (Abschnitt 28.2.2) folgend, werden alle angreifenden äußeren Belastungen (eingeprägte Kräfte, Zwangskräfte, Bewegungswiderstände) und die Massenkräfte (d'Alembertsche Kräfte, den gewählten Koordinatenrichtungen entgegengerichtet) angetragen.

In der Abbildung 29.18 sind die äußeren Belastungen durch zwei Kraftkomponenten F_x und F_y , deren Wirkungslinien durch den Bezugspunkt O gehen, und das Moment M repräsentiert (eine solche Zusammenfassung einer beliebigen ebenen Belastung ist nach den Regeln der Statik starrer Körper immer möglich). Stellvertretend für die (unendlich vielen) d'Alembertschen Kräfte der differenziell kleinen Massenpunkte dm wurden für einen Punkt die beiden Komponenten gezeichnet.

Die Summe (Integral) der Wirkungen der differenziellen Massenkräfte muss mit den äußeren Belastungen F_x , F_y und M im Gleichgewicht sein, formuliert werden horizontales und vertikales Kräfte-Gleichgewicht und Momenten-Gleichgewicht bezüglich des Punktes O :

$$\begin{aligned} F_x &= \int_m \ddot{x} dm = \ddot{x}_0 \int_m dm - \ddot{\varphi} \int_m \ddot{y} dm - \ddot{\varphi}^2 \int_m \ddot{x} dm , \\ F_y &= \int_m \ddot{y} dm = \ddot{y}_0 \int_m dm + \ddot{\varphi} \int_m \ddot{x} dm - \ddot{\varphi}^2 \int_m \ddot{y} dm , \\ M &= - \int_m \ddot{x} \ddot{y} dm + \int_m \ddot{y} \ddot{x} dm = -\ddot{x}_0 \int_m \ddot{y} dm + \ddot{\varphi} \int_m \ddot{y}^2 dm + \ddot{\varphi}^2 \int_m \ddot{x} \ddot{y} dm \\ &\quad + \ddot{y}_0 \int_m \ddot{x} dm + \ddot{\varphi} \int_m \ddot{x}^2 dm - \ddot{\varphi}^2 \int_m \ddot{y} \ddot{x} dm \\ &= -\ddot{x}_0 \int_m \ddot{y} dm + \ddot{y}_0 \int_m \ddot{x} dm + \ddot{\varphi} \int_m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) dm . \end{aligned} \quad (29.29)$$

Die verbleibenden Integrale in 29.29 sind interpretierbar. Es gilt:

$$\int_m dm = m , \quad \int_m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) dm = \int_m r^2 dm = J_0 . \quad (29.30)$$

Für das Massenträgheitsmoment J_0 bezüglich einer Achse durch den Punkt O (senkrecht zur Zeichenebene) dürfen die im Abschnitt 29.3 für körperfeste Koordinaten ermittelten Formeln verwendet werden, weil sich r (im Gegensatz zu \ddot{x} und \ddot{y}) während der Bewegung nicht ändert. Die beiden übrigen Integrale in 29.29 sind wieder (wie bei der Rotation um eine feste Achse, vgl. Abschnitt 29.2) die aus der Statik bekannten statischen Momente der Masse, wofür nach den Formeln 4.3

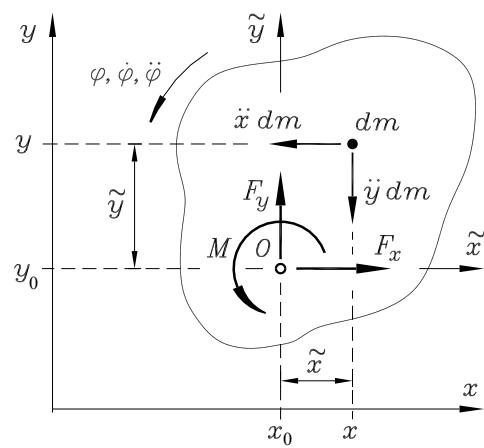


Abbildung 29.18: Äußere Belastung und d'Alembertsche Kräfte für einen Massenpunkt dm

$$\int_m \tilde{x} dm = m \tilde{x}_S \quad , \quad \int_m \tilde{y} dm = m \tilde{y}_S \quad (29.31)$$

geschrieben werden kann, wobei zu beachten ist, dass \tilde{x}_S und \tilde{y}_S sich während der Bewegung ändern, so dass nicht die für ein körperfestes Koordinatensystem ermittelten Schwerpunktkoordinaten eingesetzt werden dürfen. Mit 29.30 und 29.31 wird aus 29.29:

$$\begin{aligned} F_x &= m \ddot{x}_0 - m \tilde{y}_S \dot{\phi} - m \tilde{x}_S \dot{\phi}^2 \quad , \\ F_y &= m \ddot{y}_0 + m \tilde{x}_S \dot{\phi} - m \tilde{y}_S \dot{\phi}^2 \quad , \\ M &= -m \tilde{y}_S \ddot{x}_0 + m \tilde{x}_S \ddot{y}_0 + J_0 \dot{\phi} \quad . \end{aligned} \quad (29.32)$$

Die ersten beiden Gleichungen 29.32 gehen für $\ddot{x}_0 = 0$ und $\ddot{y}_0 = 0$ „beinahe“ in die Formeln 29.7 über, die für die Rotation um eine feste Achse gefunden wurden. Die Frage, weshalb anstelle von \tilde{x} und \tilde{y} nicht wie dort ein mitrotierendes \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem verwendet wurde, so dass wie in 29.7 die festen Schwerpunktkoordinaten in den Formeln auftauchen, findet eine recht pragmatische Antwort: Auch die äußeren Kräfte sind jeweils auf das verwendete Koordinatensystem bezogen. „Mitrotierende äußere Kräfte“ (z. B. „mitrotierende Lagerreaktionen“) sind bei Rotation um eine feste Achse kein nennenswerter Nachteil, bei der allgemeinen ebenen Bewegung würden sie erheblich stören. Sie sind deshalb vermieden worden, zumal die Unbequemlichkeit, die mit den sich ändernden Schwerpunktkoordinaten in den Gleichungen 29.32 verbunden ist, dann nicht auftaucht, wenn man den Schwerpunkt S der Masse als Bezugspunkt O wählt. Dann gehen die ersten beiden Gleichungen über in den

Schwerpunktsatz:

$$F_x = m \ddot{x}_S \quad , \quad F_y = m \ddot{y}_S \quad . \quad (29.33)$$

Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich so, als würden alle äußeren Kräfte an ihm angreifen und die Gesamtmasse des Körpers in ihm konzentriert sein.

29.33 sagt nichts über eine mögliche Drehung des Körpers. Dies führt zu bemerkenswerten Konsequenzen des Schwerpunktsatzes:

- ⇒ Eine an einem Körper angreifende Kräftegruppe darf beliebig verschoben (nicht gedreht) werden, ohne dass sich die Bewegung des Schwerpunkts ändert. Die Bewegungen der anderen Körperpunkte werden natürlich beeinflusst.
- ⇒ Ein äußeres Moment hat auf die Bewegung des Schwerpunkts allein keinen Einfluss. Das Gegenargument, dass ein Rad durch das Aufbringen eines Moments zum Rollen (und damit auch zu einer Bewegung seines Schwerpunkts) gebracht wird, ist leicht zu widerlegen: Ein äußeres Moment versetzt ein Rad zunächst nur in Rotation (man denke an die vom Drehmoment des Motors angetriebenen Räder eines Fahrzeugs auf spiegelblanker Eisfläche). Erst durch die Haftkraft zwischen Rad und Untergrund wird auch der Schwerpunkt des Rades in Bewegung gesetzt. Genau diese Kraft wäre in 29.33 einzusetzen.

Auch die dritte Gleichung 29.32 vereinfacht sich erheblich, wenn man als Bezugspunkt O den Schwerpunkt S wählt. Da die gleiche Vereinfachung sich auch bei beschleunigungsfreiem Bezugspunkt ($\ddot{x}_0 = 0$ und $\ddot{y}_0 = 0$) ergibt, formuliert man diesen Spezialfall etwas allgemeiner. Es ist der

Drallsatz:

$$M = J_A \ddot{\varphi} = J_A \dot{\omega} = \dot{L}_A \quad . \quad (29.34)$$

Die zeitliche Änderung des Dralls ist gleich der Summe aller angreifenden äußeren Momente. Als Bezugspunkt A sind der Schwerpunkt oder ein beschleunigungsfreier Punkt des Körpers zugelassen.

- ⇒ Die dritte Gleichung von 29.10, mit der die Drehbewegung um eine starre Achse beschrieben wurde, ist der Sonderfall des Drallsatzes 29.34 mit ruhendem Bezugspunkt. Die Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik 5.1 sind die Sonderfälle von Schwerpunkt- und Drallsatz für den ruhenden Körper ($\ddot{x}_0 = 0, \ddot{y}_0 = 0, \ddot{\varphi} = 0$).

Schwerpunktsatz und Drallsatz werden im Abschnitt 29.6 und im Kapitel 30 noch einmal mit erweiterter Gültigkeit behandelt. Für die ebene Bewegung des starren Körpers sind sie die Basis für das Aufschreiben der Bewegungsgleichungen und gestatten, die für den Massenpunkt behandelte Strategie (Abschnitt 28.2.2), Aufgaben der Kinetik formal auf das Formulieren von Gleichgewichtsbedingungen zurückzuführen, auf den starren Körper zu erweitern.

29.5.2 Das Prinzip von d'Alembert

Die Herleitung von Schwerpunkt- und Drallsatz im vorigen Abschnitt erfolgte unter Verwendung der d'Alembertschen Kräfte für den differenziell kleinen Massenpunkt, deren Wirkung dann summiert (integriert) wurde. Mit dem Schwerpunkt als Bezugspunkt der Bewegung blieben nur zwei Integrale über die Gesamtmasse mit jeweils vertrauten Größen als Ergebnis übrig: Die Gesamtmasse m darf man sich laut Schwerpunktsatz „im Schwerpunkt konzentriert“ vorstellen (damit ist für den translatorischen Anteil die Situation exakt wie beim Massenpunkt), und das Massenträgheitsmoment J_S repräsentiert die Trägheitswirkung der Masse gegenüber der Drehbewegung um den Schwerpunkt.

Die Konsequenzen für die Erweiterung des Prinzips von d'Alembert, das im Abschnitt 28.2.2 für den Massenpunkt formuliert wurde, sind damit klar: Die d'Alembertschen Kräfte müssen im Schwerpunkt des Körpers (den Richtungen der eingeführten Bewegungskoordinaten entgegengesetzt) angetragen werden und sind zu ergänzen durch das *d'Alembertsche Moment* $J_S \ddot{\varphi}$, das der positiven Drehrichtung der für die Rotationsbewegung eingeführten Koordinate entgegengerichtet ist.

Damit kann das kinetische Problem durch das Aufschreiben von Gleichgewichtsbedingungen gelöst werden (wie in der Statik kommt für das ebene Problem eine Momenten-Gleichgewichtsbedingung hinzu). Das d'Alembertsche Prinzip in dieser Form gestattet die Analyse von Bewegungsvorgängen auch mit mehreren Freiheitsgraden und die Berechnung der auftretenden Zwangskräfte, bei Systemen starrer Körper einschließlich der Kräfte in den Verbindungsgliedern (sollten diese Kräfte nicht interessieren und nur der Bewegungsablauf analysiert werden, ist für kompliziertere Systeme häufig eine spezielle Fassung des Prinzips von d'Alembert zu bevorzugen, die im Kapitel 33 behandelt wird). Bewährt für die Behandlung von Aufgaben hat sich ein schrittweises Vorgehen entsprechend den nachfolgend gegebenen

Empfehlungen für das Lösen von Problemen nach dem Prinzip von d'Alembert:

- ① *Wahl geeigneter Bewegungskoordinaten:* Zweckmäßig ist es, für jede Bewegungsmöglichkeit des starren Körpers eine eigene Koordinate zu wählen (z. B. für das rollende Rad eine Weg- und eine Winkelkoordinate), auch wenn zwischen den eingeführten Koordinaten Zwangsbedingungen zu berücksichtigen sind. Man sollte darauf achten, dass alle gewählten Koordinaten gleichzeitig positiv werden.
- ② *Freischneiden des starren Körpers von allen äußeren Bindungen:* Es ist sinnvoll, den (oder die) Körper in einer ausgelenkten Lage (alle Koordinaten ungleich Null und positiv) zu skizzieren. Bei Systemen starrer Körper ist es ratsam (und wird dringend empfohlen), auch die Bindungen zwischen den einzelnen Körpern zu schneiden (für kompliziertere Systeme ist gelegentlich das Arbeiten mit dem Prinzip von d'Alembert in der Fassung günstiger, die im Abschnitt 33.3 behandelt wird).
- ③ *Antragen aller wirkenden Kräfte und Momente:*
 - *Eingeprägte Kräfte und Momente:* Eigengewicht, Antriebskräfte und -momente, ...
 - *Zwangskräfte und -momente,* die durch das Freischneiden sichtbar werden: Dies sind die aus der Anwendung des Schnittpunktprinzips in der Statik bekannten Lagerreaktionen, Seilkräfte, Kräfte zwischen den starren Körpern und Führungen, Haftkräfte, ...
 - *Bewegungswiderstände,* z. B.: Gleitreibung, Rollreibung (**nicht:** Haftkräfte, die zu den Zwangskräften gehören und sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben), Luftwiderstand. Bewegungswiderstände sind immer entgegen der tatsächlichen Bewegungsrichtung anzutragen. Wenn diese nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann, ist die Rechnung gegebenenfalls mit den korrigierten Richtungen für die Bewegungswiderstände zu wiederholen.
 - *d'Alembertsche Kräfte* (im Schwerpunkt) und *d'Alembertsche Momente* (Massenträgheitsmomente bezogen auf Schwerpunktachsen), die entgegen den Richtungen der eingeführten Bewegungskoordinaten anzutragen sind. Dabei spielt die tatsächliche Bewegungsrichtung keine Rolle, da sich die Bewegungsgrößen (Bahnbeschleunigung und Geschwindigkeit) mit dem sich ergebenden Vorzeichen auf die gewählten Koordinaten beziehen. Bei der Bewegung des Schwerpunkts auf einer gekrümmten Bahn ist entsprechend 28.8 oder 28.9 die vom Krümmungsmittelpunkt der Bahn nach außen gerichtete Zentrifugalkraft zu ergänzen, die von der Bewegungsrichtung ohnehin unabhängig ist.
- ④ *Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:* Dabei muss der Bezugspunkt für das Momentengleichgewicht natürlich nicht der Schwerpunkt sein. Es ist häufig (wie bei statischen Problemen) vorteilhaft, die Momentenbezugspunkte so zu wählen, dass die für die weitere Rechnung nicht interessierenden Kräfte gar nicht in den Gleichgewichtsbedingungen erscheinen.
- ⑤ *Einsetzen der kinematischen Zwangsbedingungen in die Gleichgewichtsbeziehungen:* Die Anzahl der erforderlichen Zwangsbedingungen entspricht der Differenz der Anzahl der eingeführten Bewegungskoordinaten n und der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems, bei einem System mit nur einem Freiheitsgrad müssen also $n - 1$ Zwangsbedingungen berücksichtigt werden. Nach Einsetzen der Zwangsbedingungen in die Gleichgewichtsbeziehungen muss die Anzahl der Unbekannten (Zwangskräfte, Beschleunigungen) mit der Anzahl der

Gleichungen übereinstimmen. Wenn nur nach Zwangskräften oder Beschleunigungen gefragt ist, können diese aus dem entstandenen Gleichungssystem direkt berechnet werden.

Wenn nach den Bewegungsgesetzen (Geschwindigkeit-Zeit, Weg-Zeit, Geschwindigkeit-Weg) gefragt ist, müssen zusätzlich noch folgende Schritte abgearbeitet werden:

- ⑥ *Elimination der Zwangskräfte* aus den Gleichgewichtsbeziehungen, so dass die Anzahl der verbleibenden Gleichungen der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems entspricht. Diese Gleichungen enthalten noch die Bewegungskoordinaten und deren Ableitungen nach der Zeit (Geschwindigkeiten, Beschleunigungen).
- ⑦ *Integration dieser Gleichungen* und Ermittlung der dabei anfallenden Integrationskonstanten aus Zusatzbedingungen, z. B. Anfangsbedingungen. Man erhält direkt das Geschwindigkeits-Zeit- und das Weg-Zeit-Gesetz, aus denen bei Bedarf auch das Geschwindigkeits-Weg-Gesetz bestimmt werden kann.

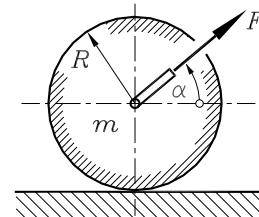
Das schrittweise Vorgehen nach diesen Empfehlungen soll zunächst an nachfolgendem einfachen Beispiel, das jedoch fast alle typischen Probleme zeigt, demonstriert werden. Im Bereich „Schnittprinzip“ unter www.TM-aktuell.de gibt es auch ein ausführlich kommentiertes Beispiel zum Prinzip von d'Alembert. Weitere Beispiele finden sich im Abschnitt [29.5.4](#).



Beispiel:

Eine zylindrische Walze mit der Masse m beginnt unter Einwirkung einer Kraft F zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus eine Bewegung auf einer horizontalen Bahn.

Gegeben: m ; $F = \frac{1}{2}mg$; $\alpha = 40^\circ$; $R = 500\text{ mm}$.



- Welchen Weg hat die Walze nach $t = 5\text{ s}$ zurückgelegt und um welchen Winkel hat sie sich gedreht, wenn eine reine Rollbewegung vorausgesetzt werden darf?
- Wie groß muss der Haftungskoeffizient μ_0 zwischen Walze und Untergrund mindestens sein, damit sich eine reine Rollbewegung einstellt?
- Wie ändern sich die unter a gefragten Werte, wenn für den Haftungskoeffizienten $\mu_0 = 0,12$ und den Gleitreibungskoeffizienten $\mu = 0,1$ gilt?

- Als Bewegungskoordinaten werden x (nach rechts positiv) zur Verfolgung des Schwerpunkts und φ (rechtsdrehend positiv) für die Drehbewegung gewählt, beide nehmen gleichzeitig positive Werte an. Die Abbildung 29.19 zeigt den von äußeren Bindungen (Unterlage) freigeschnittenen Körper, angetragen wurden die eingeprägten Kräfte F und das Eigengewicht mg , als Zwangskräfte die Normalkraft F_N und die Haftkraft F_H . Bewegungswiderstände gibt es bei der Aufgabenstellung a nicht, die d'Alembertsche Kraft und das d'Alembertsche Moment wurden jeweils entgegen der zugehörigen positiven Koordinatenrichtung eingezeichnet.

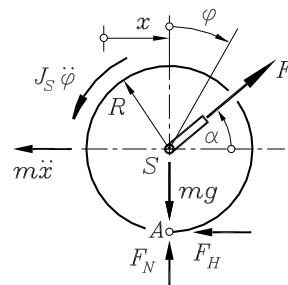


Abbildung 29.19: Freigeschnittenes System

Da die Aufgabenstellung *a* nach den Zwangskräften F_N und F_H nicht fragt, wird (bei Verzicht auf zwei weitere Gleichgewichtsbedingungen) nur die Momenten-Gleichgewichtsbedingung bezüglich des Punktes A aufgeschrieben, in die diese beiden Kräfte nicht eingehen. Mit dem Massenträgheitsmoment für den Kreiszylinder $J_S = \frac{1}{2}mR^2$ nach 29.14 ergibt sich:

$$A2 \quad F \cos \alpha \cdot R - m\ddot{x}R - J_S \dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{1}{2}R\dot{\varphi} = \frac{F}{m} \cos \alpha \quad .$$

Die kinematische Zwangsbedingung $\varphi = \frac{x}{R}$ für die reine Rollbewegung nach 27.1 und das Einsetzen des für F gegebenen Wertes führen auf:

$$\ddot{x} = \frac{2F}{3m} \cos \alpha = \frac{1}{3}g \cos \alpha \quad , \quad \dot{x} = \frac{1}{3}gt \cos \alpha + C_1 \quad , \quad x = \frac{1}{6}gt^2 \cos \alpha + C_1 t + C_2 \quad .$$

Die Integration war wegen der konstanten Beschleunigung besonders einfach, aus den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$ (willkürlich) und $\dot{x}(t=0) = 0$ (Aufgabenstellung) ergeben sich die Integrationskonstanten $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$, so dass das Bewegungsgesetz

$$x = \frac{1}{6}gt^2 \cos \alpha \quad (29.35)$$

gemeinsam mit der kinematischen Zwangsbedingung die ersten Fragen beantworten kann:

$$x(t=5\text{s}) = 31,3\text{ m} \quad ; \quad \varphi(t=5\text{s}) = \frac{x(t=5\text{s})}{R} = \frac{31,3}{R} = 62,62 = 3588^\circ \quad .$$

- b) Eine reine Rollbewegung stellt sich nur ein, wenn das Coulombsche Haftungsgesetz 9.1 $|F_H| \leq |F_{H,max}| = \mu_0 F_N$ erfüllt ist. F_H und F_N können aus den bisher nicht genutzten Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen an der freigeschnittenen Walze berechnet werden:

$$\begin{aligned} \uparrow \quad F_N &= mg - F \sin \alpha = mg \left(1 - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \quad , \\ \leftarrow \quad F_H &= F \cos \alpha - m\ddot{x} = F \cos \alpha - \frac{2}{3}F \cos \alpha = \frac{1}{6}mg \cos \alpha \quad . \end{aligned}$$

Damit errechnet man aus 9.1 die Bedingung für reines Rollen der Walze:

$$\mu_0 \geq \frac{|F_H|}{F_N} = 0,188 \quad .$$

- c) Die Bedingung für reines Rollen ist mit dem Haftungskoeffizienten, der für die Aufgabenstellung *c* gegeben ist, nicht mehr erfüllt. Damit gilt auch die Zwangsbedingung für die beiden Bewegungskoordinaten (Rollbedingung) nicht mehr. Die Walze führt eine Bewegung mit zwei Freiheitsgraden aus. An die Stelle der Haftkraft (Zwangskraft) tritt die Gleitreibungskraft (Bewegungswiderstand, Abbildung 29.20), für die nach 28.3 die Formel für die Coulombsche Gleitreibung gilt (im Unterschied zur Haftkraft, die aus einer Gleichgewichtsbedingung berechnet wurde). In diesem Fall werden alle drei Gleichgewichtsbedingungen benötigt:

$$\begin{aligned} \uparrow \quad F_N - mg + F \sin \alpha &= 0 \quad , \quad \leftarrow \quad m\ddot{x} - F \cos \alpha + \mu F_N = 0 \quad , \\ S \triangleleft \quad J_S \ddot{\varphi} - \mu F_N R &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Für das Momenten-Gleichgewicht wurde der Bezugspunkt S gewählt, um gleich zu entkoppelten Beschleunigungsgleichungen zu kommen. Die Normalkraft wird eliminiert, und nach Einsetzen von $J_S = \frac{1}{2}mR^2$ und des gegebenen Wertes für F verbleiben:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} g (\cos \alpha + \mu \sin \alpha - 2\mu) , \quad \ddot{\varphi} = \mu \frac{g}{R} (2 - \sin \alpha) .$$

Beschleunigung und Winkelbeschleunigung sind konstant und können problemlos integriert werden. Mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = 0$, $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ werden alle Integrationskonstanten Null, und aus

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} g t^2 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha - 2\mu) , \\ \varphi &= \frac{1}{2} \mu \frac{g}{R} t^2 (2 - \sin \alpha) \end{aligned} \quad (29.36)$$

ergeben sich die Antworten auf die Fragestellungen:

$$x(t=5\text{s}) = 38,6\text{m} ; \quad \varphi(t=5\text{s}) = 33,29 = 1907^\circ .$$

⇒ Das Ergebnis des gerade behandelten Beispiels ist im Hinblick auf den im folgenden Abschnitt behandelten Energiesatz interessant: Bei Gleitreibung wird ein Teil der von der Kraft F geleisteten Arbeit als Reibarbeit „verbraucht“, die als Wärme abgeführt wird (und damit nicht zur Bewegung beiträgt). Trotzdem bewegt sich die rutschende Walze weiter als die Walze bei reiner Rollbewegung, weil sie nur einen geringeren Teil der geleisteten Arbeit in Rotationsenergie umsetzt (sie hat sich dementsprechend auch nur um einen wesentlich kleineren Winkel gedreht).

⇒ Und noch einmal der so wichtige **Unterschied zwischen Haftung und Gleitreibung:**

Das unter *a* gefundene Bewegungsgesetz 29.35 gilt immer, wenn tatsächlich reines Rollen vorausgesetzt werden darf, auch dann, wenn man für die Haftkraft einen falschen Richtungssinn angenommen hat. Da diese aus einer Gleichgewichtsbedingung berechnet wird, korrigiert sich ein falscher Richtungssinn über das Vorzeichen des Ergebnisses.

Das unter *c* gefundene Bewegungsgesetz 29.36 gilt nur, wenn der für die Gleitreibungskraft angenommene Richtungssinn (nach links) richtig ist, wenn sich die Walze also tatsächlich nach rechts bewegt. Dem Ergebnis entnimmt man, dass dies nur erfüllt ist, wenn folgende Bedingung gilt:

$$\cos \alpha + \mu \sin \alpha - 2\mu > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu < \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha} . \quad (29.37)$$

Für die Werte der Aufgabenstellung *c* ist diese Bedingung erfüllt, aber z. B. bei einem Winkel $\alpha = 85^\circ$ (bei ansonsten ungeänderten Werten) müsste $\mu < 0,0868$ für die Gültigkeit von 29.36 gefordert werden. Im Gegensatz zu der ähnlichen Diskussion nach dem Beispiel 2 im Abschnitt 28.2.2 (Seite 522) würde bei Nichterfüllung von 29.37 die Masse nicht in Ruhe bleiben, sondern eine Rollbewegung beginnen, weil dann die Bedingung für reines Rollen (Fragestellung *b*) erfüllt ist. Auf keinen Fall aber würde sie das tun, was 29.36 dafür ergeben würde, die „sich bei Rechtsdrehung nach links bewegende Walze“.

⇒ Eigentlich müsste auch noch überprüft werden, ob die Walze nicht „abhebt“ (Indikator dafür ist eine negative Normalkraft), was genau dann passiert, wenn die Vertikalkomponente von F größer als das Eigengewicht der Walze ist. Mit dem Wert $F = \frac{1}{2} mg$ aus der Aufgabenstellung besteht aber in dieser Hinsicht keine Gefahr.

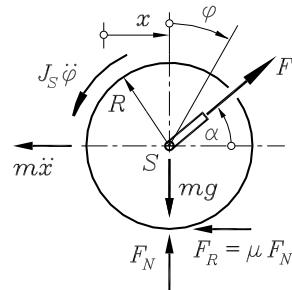


Abbildung 29.20: Freigeschnittenes System mit Gleitreibung

29.5.3 Energiesatz

Die im Abschnitt 28.4.3 demonstrierte Integration des dynamischen Grundgesetzes über den Weg kann auf den starren Körper übertragen werden, wenn für die kinetische Energie, die dort für den Massenpunkt definiert wurde, ein entsprechender Ausdruck für die unendlich vielen differenziell kleinen Massenpunkte dm verwendet wird.

Die Abbildung 29.21 zeigt den Bezugspunkt O des starren Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt (gezeichnet sind die Komponenten \dot{x}_0 und \dot{y}_0). Der Massenpunkt dm bewegt sich zusätzlich auf einer Kreisbahn um O mit der Bahngeschwindigkeit $r\dot{\phi}$. Wie bei der Herleitung von Schwerpunkt- und Drallsatz im Abschnitt 29.5.1 wird wieder ein Hilfskoordinatensystem \tilde{x}, \tilde{y} mit dem Ursprung in O eingeführt, das (wie auch $\tilde{\phi}$) der Bewegung des Punktes O folgt, nicht aber die Rotation des Körpers mitmacht. Damit sind die Komponenten der Geschwindigkeit des Massenpunktes dm aus der Skizze ablesbar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}_0 - r\dot{\phi} \sin \tilde{\phi} = \dot{x}_0 - \dot{\phi} \tilde{y} \quad , \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 + r\dot{\phi} \cos \tilde{\phi} = \dot{y}_0 + \dot{\phi} \tilde{x} \quad .\end{aligned}\quad (29.38)$$

Nun kann die kinetische Energie für den Massenpunkt dm aufgeschrieben werden, und nach Integration über die gesamte Masse m erhält man die gesuchte Formel:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dm \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) \int_m dm + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int_m (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) dm + \dot{y}_0 \dot{\phi} \int_m \tilde{x} dm - \dot{x}_0 \dot{\phi} \int_m \tilde{y} dm \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 \int_m dm + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int_m r^2 dm + \dot{\phi} \left(\dot{y}_0 \int_m \tilde{x} dm - \dot{x}_0 \int_m \tilde{y} dm \right) \\ &= \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}^2 + \dot{\phi} (m \tilde{x}_S \dot{y}_0 - m \tilde{y}_S \dot{x}_0) \quad ,\end{aligned}$$

wobei wieder 29.30 und 29.31 genutzt wurden, und wie bei der Herleitung von Schwerpunkt- und Drallsatz im Abschnitt 29.5.1 verschwindet der Ausdruck in der Klammer bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes.

Kinetische Energie bei der ebenen Bewegung des starren Körpers:

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad . \quad (29.39)$$

Die kinetische Energie setzt sich aus einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil zusammen. Als Bezugspunkt A sind der Schwerpunkt oder ein momentan in Ruhe befindlicher Punkt des Körpers zugelassen.

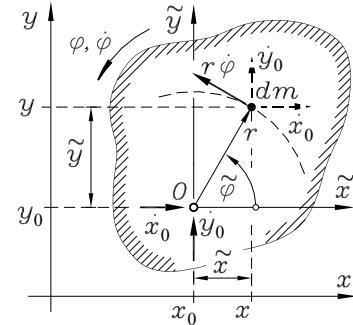


Abbildung 29.21: Starrkörper-Bewegung als Translation des Punktes O und Drehung um O

- ⇒ Man beachte den feinen (aber nicht ganz unwichtigen) Unterschied in der Gültigkeitsbeschränkung für den Drallsatz 29.34 und für die Formel der kinetischen Energie 29.39, wenn nicht der Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt wird. Für das Aufschreiben der kinetischen Energie zu einem bestimmten Zeitpunkt darf auch der Momentanpol als Bezugspunkt gewählt werden, während für den Drallsatz 29.34 ein beschleunigungsfreier Punkt gefordert wird, so dass der Momentanpol in der Regel dafür ausscheidet.
 - ⇒ Der im Abschnitt 28.4.3 für den Massenpunkt formulierte Energiesatz 28.30 einschließlich der für seine Anwendung gegebenen Empfehlungen (Seite 536) können auf die ebene Bewegung des starren Körpers unter Beachtung folgender Besonderheiten übertragen werden:
 - Die kinetischen Energien T_1 und T_2 der beiden betrachteten Bewegungszustände 1 und 2 sind nach 29.39 aufzuschreiben.
 - Die Höhe h (relativ zum Null-Potenzial) in der Formel für die potenzielle Energie 28.20 bezieht sich beim starren Körper auf den Schwerpunkt. Bei einem System aus mehreren Körpern darf für jeden Körper ein eigenes Null-Potenzial festgelegt werden.

29.5.4 Beispiele

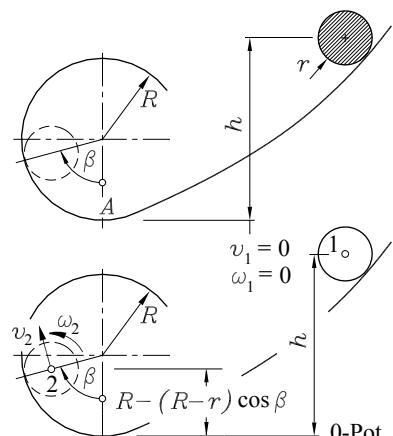
Zur Analyse der ebenen Bewegung starrer Körper wurden bisher der *Schwerpunktsatz*, der *Drallsatz*, das *Prinzip von d'Alembert* und der *Energiesatz* behandelt. Für das Lösen von Problemen sind Schwerpunkt- und Drallsatz einerseits und das Prinzip von d'Alembert, wie es im Abschnitt **29.5.2** dargestellt wurde, gleichwertig. Man darf die gegebenen „Empfehlungen für das Lösen von Problemen nach dem Prinzip von d'Alembert“ (Seite 572) durchaus auch als Strategie des möglichst sicheren Anwendens von Schwerpunkt- und Drallsatz ansehen.

Der Energiesatz dagegen hat seine eigenen Stärken und Schwächen. Die folgenden Beispiele sollen auch die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren zu verdeutlichen.

Beispiel 1: Eine Kugel mit dem Radius r beginnt in der Höhe h aus der Ruhe heraus eine reine Rollbewegung, die im Punkt A in eine kreisförmige Loopingbahn mit dem Radius R mündet.

Gegeben: h , r , R .

- a) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit des Kugelmittelpunkts in Abhängigkeit von β ?
 - b) Aus welcher Höhe h^* muss sie starten, damit sie sich bei $\beta^* = 120^\circ$ von der Kreisbahn löst, bei welcher Starthöhe h^{**} erreicht sie den höchsten Punkt der Loopingbahn?



Nur über den Energiesatz ist ein Einstieg in die Lösung zu finden, weil über die Bahnkurve vor dem Eintritt in die Loopingbahn nichts bekannt ist. Betrachtet werden (untere Skizze) die Bewegungszustände 1 (Start) und 2 (durch β gekennzeichneter Punkt der Loopingbahn). Das

Null-Potenzial wird (willkürlich) auf dem Niveau des tiefsten Bahnpunktes festgelegt. Im Zustand 1 hat die Kugel nur potenzielle Energie (Höhe h über dem Null-Potenzial), im Zustand 2 befindet sie sich in der Höhe $R - (R - r) \cos \beta$, ihr Mittelpunkt hat die Geschwindigkeit v_2 , und sie dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 . Auf dem Weg von 1 nach 2 wird weder Energie zugeführt (kein Antrieb) noch abgeführt (keine Reibung), so dass die Energiebilanz lautet:

$$mg h = mg [R - (R - r) \cos \beta] + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} J_S \omega_2^2 .$$

Nach Einsetzen der Zwangsbedingung $\omega_2 = \frac{v_2}{r}$ (reines Rollen) und des Massenträgheitsmoments für die Kugel, das man der Tabelle auf Seite 549 entnimmt, kürzt sich m aus der Energiebilanz heraus, die nach v_2 aufgelöst werden kann:

$$v_2 = \sqrt{\frac{10}{7} g [h - R + (R - r) \cos \beta]} .$$

Um die Fragestellung b zu beantworten, müssen die wirkenden Kräfte betrachtet werden. Die Abbildung 29.22 zeigt alle Kräfte, die bei Arbeit mit dem Prinzip von d'Alembert anzutragen wären: Eigengewicht (eingeprägte Kraft), Normalkraft und Haftkraft (Zwangskräfte), keine Bewegungswiderstände, d'Alembertsche Kräfte (entgegen der Bahnbeschleunigung des Schwerpunkts und die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft) und das d'Alembertsche Moment. Bei der Zentrifugalkraft nach 28.8 ist der Radius $R - r$ der Kreisbahn einzusetzen, auf der sich der Schwerpunkt der Kugel bewegt.

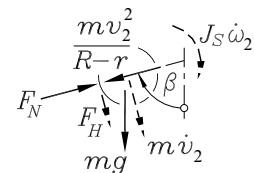


Abbildung 29.22: Freigeschnittene Kugel

Wenn die Normalkraft F_N negativ wird, löst sich die Kugel von der Führung. Zur Berechnung der Normalkraft genügt die Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung

$$F_N - mg \cos \beta - \frac{mv_2^2}{R - r} = 0 ,$$

in die neben einer Komponente des Eigengewichts nur die Zentrifugalkraft eingeht, die mit der bereits bekannten Geschwindigkeit aufgeschrieben werden kann, so dass die unbekannten Bewegungsgrößen (Bahnbeschleunigung v_2 und Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_2$) nicht benötigt werden. Einsetzen von v_2 und Nullsetzen der Normalkraft liefert die Bestimmungsgleichung für den Punkt, bei dem sich die Kugel von der Bahn löst. Diese lässt sich vereinfachen zu

$$\cos \beta = -\frac{10}{17} \frac{h - R}{R - r}$$

und liefert für $\beta^* = 120^\circ$ bzw. $\beta^{**} = 180^\circ$ (höchster Punkt der Loopingbahn):

$$h^* = \frac{1}{20} (37R - 17r) \quad , \quad h^{**} = \frac{1}{10} (27R - 17r) .$$

- ⇒ Wenn die Kugel bei β^* die Loopingbahn verlässt, beginnt sie eine freie Bewegung (ohne Zwangskräfte). Ihr Schwerpunkt bewegt sich nach 29.33 wie ein Massenpunkt, so dass die im Beispiel des Abschnitts 28.1 für den schießen Wurf des Massenpunktes entwickelten Formeln bei einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v_2(\beta^*)$ und einem Abwurfwinkel $\alpha = 60^\circ$ gelten. Da keine äußeren Momente mehr wirken, bleibt nach dem Drallsatz 29.34 die Winkelgeschwindigkeit der Kugel während des Fluges gleich $\omega_2(\beta^*)$.

Beispiel 2:

Eine Winde wird mit einem konstanten Moment M_0 angetrieben und zieht über ein (dehnstarres, masseloses) Seil eine Walze auf einer schiefen Ebene aufwärts. Die Bewegung möge zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus beginnen. Die Walze führt eine reine Rollbewegung aus.

Gegeben: $m_1, m_2, J_{S1}, J_{S2}, R_1, R_2, M_0, \alpha$.

Der Index S bei den Massenträgheitsmomenten deutet an, dass sie sich jeweils auf den Schwerpunkt beziehen, der bei der Walze mit ihrem Mittelpunkt und bei der Winde mit dem Drehpunkt A zusammenfällt.

Es sollen die Beschleunigung des Walzenmittelpunkts und die Kräfte im Seil sowie die Lagerkräfte bei A für den Bewegungszustand ermittelt werden.

In der Skizze sind die drei gewählten Bewegungsgrößen eingetragen, mit x_1 wird die Bewegung des Walzenmittelpunkts verfolgt. Das System hat einen Freiheitsgrad, so dass zwei Zwangsbedingungen formuliert werden können. Für die Walze gilt die Rollbedingung $\dot{\varphi}_1 = \frac{x_1}{R_1}$. Ihr Momentanpol ist der Berührungsrand mit der schiefen Ebene, der obere Punkt, an dem das Seil angreift, hat (wegen der doppelten Entfernung vom Momentanpol) die doppelte Geschwindigkeit des Mittelpunktes $2\dot{x}_1$. Dies ist dann auch die Geschwindigkeit des Seils und damit die Bahngeschwindigkeit am Außenradius der Winde, für deren Winkelgeschwindigkeit also $\dot{\varphi}_2 = \frac{2\dot{x}_1}{R_2}$ gelten muss. Alle Koordinaten sollen bei $t = 0$ ebenfalls Null sein, so dass die Zwangsbedingungen in gleicher Form für Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung gelten.

Wegen der gesuchten Kräfte wird das Prinzip von d'Alembert benutzt. Die Abbildung 29.23 zeigt die freigeschnittenen Massen mit allen angreifenden Kräften und Momenten. Für fünf unbekannte Kräfte und die unbekannte Beschleunigung stehen sechs Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Da F_H und F_N für die Walze nicht gefragt sind, wird nur eine Momenten-Gleichgewichtsbedingung (mit dem Angriffspunkt dieser Kräfte als Bezugspunkt) für die Walze formuliert, für die Winde werden drei Gleichgewichtsbedingungen aufgeschrieben:

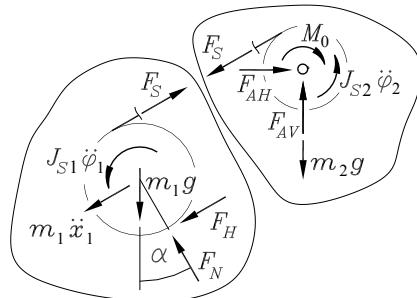
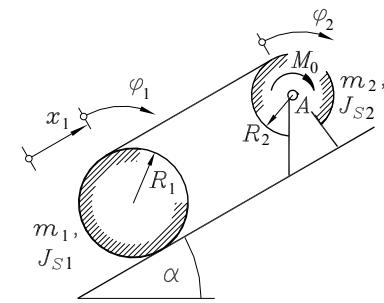


Abbildung 29.23: Freigeschnittene Massen

$$F_S \cdot 2R_1 - m_1 \ddot{x}_1 \cdot R_1 - J_{S1} \ddot{\varphi}_1 - m_1 g \sin \alpha \cdot R_1 = 0 \quad ,$$

$$M_0 - J_{S2} \ddot{\varphi}_2 - F_S \cdot R_2 = 0 \quad , \quad F_{AH} - F_S \cos \alpha = 0 \quad , \quad F_{AV} - m_2 g - F_S \sin \alpha = 0 \quad .$$

In den beiden Momenten-Gleichgewichtsbedingungen werden die Winkelbeschleunigungen durch die Beschleunigung des Walzenmittelpunkts ersetzt (Zwangsgleichungen), und man erhält mit

$$\left(m_1 + \frac{J_{S1}}{R_1^2} \right) \ddot{x}_1 = 2F_S - m_1 g \sin \alpha \quad , \quad 2 \frac{J_{S2}}{R_2^2} \ddot{x}_1 = \frac{M_0}{R_2} - F_S$$

zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten F_S und \ddot{x}_1 . Nach Elimination von F_S erhält man

$$\ddot{x}_1 = \frac{2 \frac{M_0}{R_2} - m_1 g \sin \alpha}{m_1 + \frac{J_{S1}}{R_1^2} + 4 \frac{J_{S2}}{R_2^2}} ,$$

und damit sind auch die gesuchten Kräfte bekannt:

$$F_S = \frac{M_0}{R_2} - 2 \frac{J_{S2}}{R_2^2} \ddot{x}_1 , \quad F_{AH} = F_S \cos \alpha , \quad F_{AV} = m_2 g + F_S \sin \alpha .$$

- ⇒ Das System des Beispiels 2 bewegt sich mit konstanter Beschleunigung, so dass auch das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz und das Weg-Zeit-Gesetz durch Integration problemlos zu berechnen wären. Der Ausdruck für die Beschleunigung \ddot{x}_1 zeigt einen typischen Aufbau (Kontrollmöglichkeit): Im Nenner stehen (sämtlich positiv) die „trägen Massen“, im Zähler haben die antreibenden Größen (hier: M_0) ein positives und die bremsenden Größen (hier: Eigengewicht der Walze) ein negatives Vorzeichen.
- ⇒ Wenn nur die Beschleunigung zu ermitteln gewesen wäre, hätte dafür auch der Energiesatz effektiv angewendet werden können: Für beide Massen werden getrennte Null-Potenziale in Höhe ihrer Schwerpunkte (bei $t = 0$) festgelegt, so dass im Zustand 1 (Start der Bewegung) weder potentielle noch kinetische Energie zu berücksichtigen ist. Auf dem Weg zum Zustand 2 (beliebiger Zeitpunkt t) wird die äußere Arbeit $M_0 \varphi_2$ geleistet, im Zustand 2 liegt m_1 um $x_1 \sin \alpha$ über dem Null-Potenzial, und für beide Massen sind kinetische Energien nach 29.39 zu berücksichtigen. In der Energiebilanz

$$M_0 \varphi_2 = m_1 g x_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_{S1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{S2} \dot{\varphi}_2^2$$

werden die Winkelkoordinate φ_2 und die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ unter Verwendung der Zwangsbedingungen ersetzt, und man erhält mit

$$\left(2 \frac{M_0}{R_2} - m_1 g \sin \alpha \right) x_1 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{J_{S1}}{R_1^2} + 4 \frac{J_{S2}}{R_2^2} \right) \dot{x}_1^2$$

primär eine Geschwindigkeits-Weg-Beziehung (typisch bei Anwendung des Energiesatzes). Diese Beziehung wird auf beiden Seiten nach der Zeit t abgeleitet:

$$\left(2 \frac{M_0}{R_2} - m_1 g \sin \alpha \right) \dot{x}_1 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{J_{S1}}{R_1^2} + 4 \frac{J_{S2}}{R_2^2} \right) 2 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 .$$

Die Geschwindigkeit \dot{x}_1 hebt sich heraus, und nach Umstellung erhält man die gleiche Beschleunigung wie nach dem Prinzip von d'Alembert.

- ⇒ Die konstante Beschleunigung führt natürlich dazu, dass die Bewegung des Systems immer schneller wird. Ursache dafür ist die Annahme eines konstanten Antriebsmoments. Dies ist in der technischen Praxis in der Regel nicht realistisch. Vielmehr geben Motoren ein drehzahlabhängiges Moment ab, der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehzahl wird als *Kennlinie* des Antriebs bezeichnet (vgl. folgendes Beispiel).

Beispiel 3:

Eine Seilwinde wird von einem Antrieb mit „fallender Kennlinie“ (Antriebsmoment wird bei größerer Drehzahl kleiner) angetrieben. Aus der Ruhe heraus wird eine Masse m angehoben (das Seil sei dehnstarr und masselos).

Für den Anfahrvorgang sollen die Winkelgeschwindigkeit der Winde und das Antriebsmoment in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt werden.

$$\text{Gegeben: } \frac{M_0}{mgR} = 3 \quad ; \quad \frac{J_S}{mR^2} = 1,5 \quad ; \quad \frac{g}{R} = 19,62 \text{ s}^{-2} \quad ; \quad \omega_0 = 30 \text{ s}^{-1} .$$

Die Abbildung 29.24 zeigt die freigeschnittenen Massen mit allen zu berücksichtigenden Kräften und Momenten (einschließlich der Kräfte im Lagerzapfen und des Eigengewichts der Winde, die nicht benötigt werden). Es werden das Momenten-Gleichgewicht an der Winde und das vertikale Kraft-Gleichgewicht für die Masse m formuliert:

$$M - J_S \dot{\omega} - F_S R = 0 \quad , \quad F_S - mg - m\dot{v} = 0 .$$

F_S wird eliminiert, und es verbleibt noch eine Gleichung. Mit der Zwangsbedingung $\omega = \frac{v}{R}$ und der gegebenen Kennlinienfunktion erhält man:

$$(J_S + mR^2) \ddot{\omega} = M_0 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] - mgR .$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\ddot{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{J_S}{mR^2}} \frac{g}{R} \left\{ \frac{M_0}{mgR} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] - 1 \right\} .$$

Diese nichtlineare Differenzialgleichung lässt sich ausnahmsweise noch geschlossen lösen. Darauf darf man bei praxisnahen Problemen in der Regel nicht hoffen. Kennlinien sind meist gar nicht mit den klassischen Funktionen zu beschreiben, sondern liegen nur punktweise vor (und man sollte dann ein Programm benutzen, das punktweise definierte Funktionen interpolieren und bei der Lösung des Anfangswertproblems verwenden kann). Die Abbildung 29.25 zeigt die Funktionen $\omega(t)$ und $M^*(t) = \frac{M}{mgR}$ (für die Lösung mit verschiedenen Programmen siehe www.TM-aktuell.de).

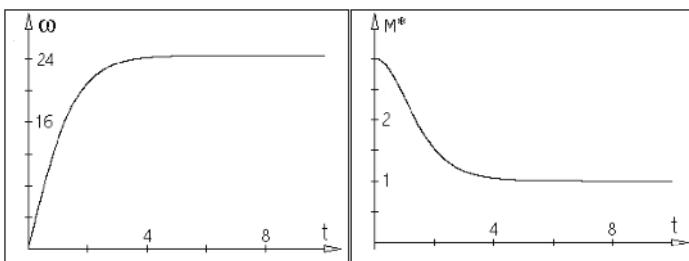


Abbildung 29.25: „Fallende Kennlinie“ → Geschwindigkeit wächst nicht unbegrenzt

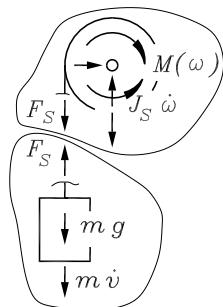
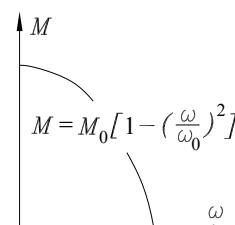
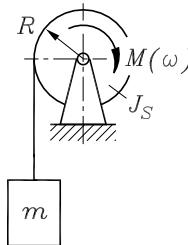


Abbildung 29.24: Freigeschnittene Massen



Beispiel 4:

Zwei Massen m_1 und m_2 können auf einer vertikalen bzw. einer horizontalen Führung reibungsfrei gleiten. Sie sind durch eine starre Stange (Masse m_S und Massenträgheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunktes S) gekoppelt. Das gesamte System wird aus der skizzierten Lage ohne Anfangsgeschwindigkeit freigelassen. Für den Bewegungsvorgang sollen die Kräfte in den Bolzen berechnet werden, die die Massen mit der Stange verbinden.

$$\text{Gegeben: } \frac{J_S}{m_S l^2} = \frac{1}{12} ; \quad \frac{m_1}{m_S} = 0,5 ; \quad \frac{m_2}{m_S} = 2 ; \quad \frac{g}{l} = 29,43 \text{ s}^{-2} .$$

Während sich die Massen m_1 und m_2 rein translatorisch bewegen, führt die Stange eine allgemeine ebene Bewegung aus (Animation der Bewegung unter www.TM-aktuell.de). Die Abbildung 29.26 zeigt die gewählten Koordinaten: Der Schwerpunkt der Stange wird durch x und y verfolgt, die Drehung der Stange durch den Winkel φ , für die beiden Massen wurden die Koordinaten y_1 bzw. x_2 definiert.

Die Massen werden von den Führungen gelöst, und die Stange wird von den Massen getrennt (Abbildung 29.27).

Es müssen die eingeprägten Kräfte (Eigengewicht), die durch das Freischneiden sichtbar werdenden Zwangskräfte (Normalkräfte an den Führungen und die Kraftkomponenten in den Verbindungsbolzen) und die d'Alembertschen Kräfte und für die Verbindungsstange das d'Alembertsche Moment angetragen werden. Für die zentralen Kraftsysteme an den Massen m_1 und m_2 können jeweils 2 und für die Stange 3 Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Da die beiden Normalkräfte nicht interessieren, wird an jeder Masse auf eine Gleichgewichtsbedingung (und damit auf eine Unbekannte) verzichtet, so dass noch 5 Bedingungen aufzuschreiben sind:

$$\begin{aligned} \uparrow_1 \quad & F_{1y} - m_1 g - m_1 \ddot{y}_1 = 0 , \\ \rightarrow_2 \quad & F_{2x} - m_2 \ddot{x}_2 = 0 , \\ \uparrow_s \quad & -F_{1y} + F_{2y} - m_S g - m_S \ddot{y} = 0 , \\ \rightarrow_s \quad & F_{1x} - F_{2x} - m_S \ddot{x} = 0 , \\ S2 \quad & F_{1x} \frac{y_1}{2} + F_{2x} y - F_{1y} x - F_{2y} \frac{x_2}{2} - J_S \ddot{\varphi} = 0 . \end{aligned} \quad (29.40)$$

Dies sind 5 Gleichungen für 4 unbekannte Kräfte und die unbekannten Beschleunigungen. Da das System nur einen Freiheitsgrad hat, können alle Beschleunigungen durch eine ausgedrückt werden (Zwangsbedingungen), so dass (wie beim Beispiel 2) die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt.

Trotzdem können die gesuchten Kräfte nicht unmittelbar aus diesen Gleichungen berechnet werden, weil die Zwangsbedingungen auch die anderen Bewegungsgrößen enthalten. Aus relativ

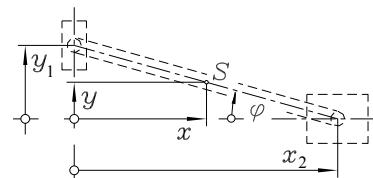
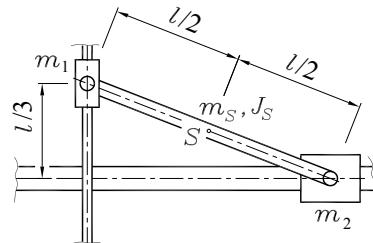


Abbildung 29.26: Koordinaten

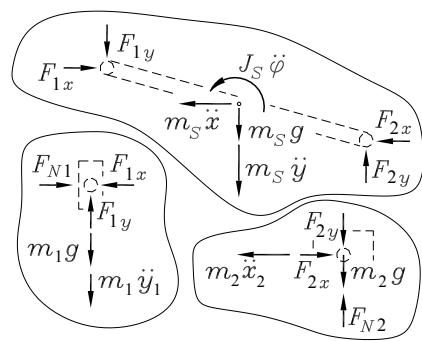


Abbildung 29.27: Freigeschnittene Massen

einfachen geometrischen Zusammenhängen für die eingeführten Koordinaten erhält man für die Beschleunigungen wesentlich kompliziertere Ausdrücke. Es gilt z. B.:

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \cos \varphi & \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) & , \\ y &= \frac{l}{2} \sin \varphi & \Rightarrow \quad \ddot{y} = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) & , \\ x_2 &= l \cos \varphi & \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = -l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) & , \\ y_1 &= l \sin \varphi & \Rightarrow \quad \ddot{y}_1 = l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) & . \end{aligned} \quad (29.41)$$

Auch wenn alle Koordinaten durch eine ersetzt werden (z. B. durch φ), kann diese nicht direkt eliminiert werden, weil sie auch durch ihre beiden Ableitungen nach der Zeit in den Gleichungen vertreten ist. Zuerst muss also das Bewegungsgesetz ermittelt werden, danach erst sind auch die Kräfte berechenbar.

Die ersten 4 Gleichgewichtsbedingungen 29.40 können nach den Kräften aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= m_S \ddot{x} + m_2 \ddot{x}_2 & , \quad F_{1y} = m_1 g + m_1 \ddot{y}_1 & , \\ F_{2x} &= m_2 \ddot{x}_2 & , \quad F_{2y} = m_S g + m_S \ddot{y} + m_1 g + m_1 \ddot{y}_1 & . \end{aligned} \quad (29.42)$$

Die Kräfte nach 29.42 werden in die fünfte Gleichung 29.40 eingesetzt, in der auch noch alle Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen 29.41 durch φ ersetzt werden, und man erhält die Bewegungs-Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} + 2 \frac{m_2}{m_S} \sin^2 \varphi + 2 \frac{m_1}{m_S} \cos^2 \varphi + 2 \frac{J_S}{m_S l^2} \right) \ddot{\varphi} \\ &+ \left(\frac{m_2}{m_S} - \frac{m_1}{m_S} \right) \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + \left(2 \frac{m_1}{m_S} + 1 \right) \frac{g}{l} \cos \varphi = 0 \quad , \end{aligned}$$



die natürlich nur numerisch integriert werden kann (siehe www.TM-aktuell.de).

Danach können über die Zwangsbedingungen 29.41 auch die anderen Koordinaten und Beschleunigungen berechnet werden und mit diesen dann die gesuchten Kräfte 29.42. Dabei sollte die Integration des Anfangswertproblems gleich mit der Auswertung weiterer Funktionen gekoppelt werden. Die Grafik zeigt die Bewegungsgesetze für die Stange $\varphi(t)$ und $\omega = \dot{\varphi}(t)$ und die resultierenden Kräfte in den Bolzen der Massen 1 und 2. Dargestellt sind die dimensionslosen Kräfte

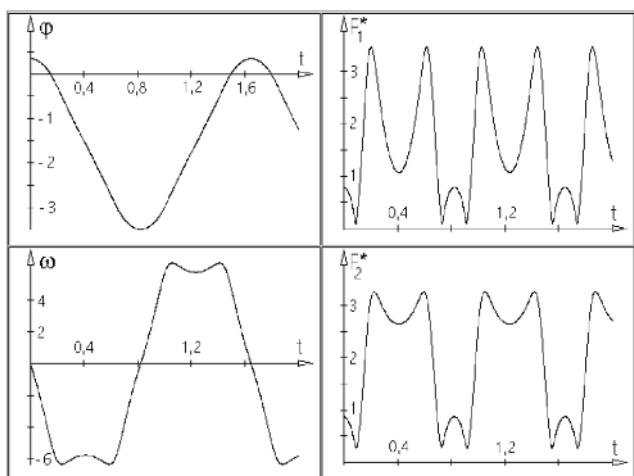


Abbildung 29.28: Kinematische Diagramme, Kräfte in den Bolzen

$$F_1^* = \frac{F_1}{m_S g} = \frac{1}{m_S g} \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} \quad , \quad F_2^* = \frac{F_2}{m_S g} = \frac{1}{m_S g} \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} \quad .$$

☞ Aufgaben dieser Art können mit dem Energiesatz allein nicht gelöst werden. Dieser eignet sich jedoch sehr gut zur Kontrolle einzelner Ergebnisse.

Hier werden als Zustand ① der Start der Bewegung und als Zustand ② die horizontale Lage der Stange betrachtet (**Abbildung 29.29**).

Mit dem Null-Potenzial in Höhe der horizontalen Führung hat das System nur im Zustand ① potentielle Energie. Im Zustand ② befindet sich Masse 2 im Umkehrpunkt ihrer Bewegung, hat also keine kinetische Energie. Da sich damit auch der Bolzen 2 der Stange in Ruhe befindet, ist er der Momentanpol für die Stange, deren kinetische Energie in der Form $\frac{1}{2} J_2 \bar{\omega}^2$ aufgeschrieben werden darf. Dies ist nach 29.39 erlaubt, wenn (mit dem Steinerschen Satz) für $J_2 = J_S + m_S \frac{l^2}{4}$ das Massenträgheitsmoment bezüglich des Momentanpols eingesetzt wird.

Für die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ der Stange und die Geschwindigkeit \bar{v}_1 der Masse m_1 gilt im Bewegungszustand ② die Zwangsbedingung $\bar{v}_1 = \bar{\omega}l$, so dass aus der Energiebilanz

$$m_1 g \frac{l}{3} + m_S g \frac{l}{6} = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \bar{\omega}^2$$

die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ berechnet werden kann:

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\frac{m_1}{m_S} + \frac{1}{2}}{\frac{m_1}{m_S} + \frac{J_S}{m_S l^2} + \frac{1}{4}} \frac{g}{l}} = 4,85 \text{ s}^{-1} \quad .$$

Dieser Wert stimmt exakt mit dem Zwischenergebnis überein, das sich für diese spezielle Lage aus der Integration der Bewegungs-Differenzialgleichung ergibt. Die komplette Berechnung einschließlich der Verifizierung der Ergebnisse mit dem Energiesatz findet man unter www.TM-aktuell.de.

☞ Wäre im Beispiel 4 nur die Bewegung zu untersuchen gewesen, hätte sich auch der Energiesatz angeboten. Man müsste dann als Zustand ① den Start und als Zustand ② eine beliebige (durch die Bewegungskoordinaten definierte) Lage betrachten und dafür die Energiebilanz aufstellen.

☞ **Anwendbarkeit des Energiesatzes:** Am Ende des Abschnitts, in dem an Beispielen die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Verfahren demonstriert wurden, muss noch darauf hingewiesen werden, dass der für viele Probleme auf recht einfache Weise anwendbare Energiesatz sich (im Gegensatz zum Prinzip von d'Alembert, vgl. Beispiel im Abschnitt 29.5.2) nicht für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden eignet, weil er **nur eine Bilanzgleichung** liefert. Das Aufschreiben von Bewegungs-Differenzialgleichungen aus Energiebetrachtungen für kompliziertere Systeme wird im Abschnitt 33.4 gesondert behandelt.

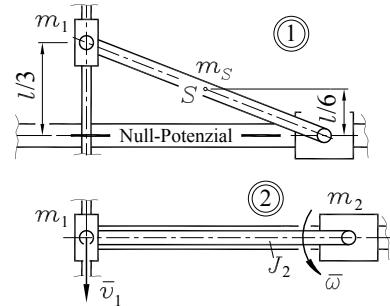


Abbildung 29.29: Null-Potenzial, Bewegungszustände ① und ②

29.6 Räumliche Bewegung starrer Körper

Die Strategie der Herleitung der Aussagen über die Kinetik der räumlichen Bewegung starrer Körper folgt dem bewährten Muster, das bereits für die ebene Bewegung im Abschnitt 29.5 verwendet wurde: Die Wirkung der (nun drei) Komponenten der d'Alembertschen Kraft am unendlich kleinen Massenpunkt dm wird über die gesamte Masse m summiert (integriert) und mit der Wirkung der äußeren Belastung ins Gleichgewicht gebracht.

Zur Vereinfachung der Schreibarbeit werden die (in einem raumfesten Koordinatensystem gemessenen) Koordinaten, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten zu Vektoren zusammengefasst:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}. \quad (29.43)$$

Auch die Koordinaten des Schwerpunkts der Masse m nach 4.3 werden vektoriell formuliert (**Abbildung 29.30**):

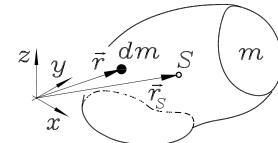


Abbildung 29.30: Vektoren \vec{r} und \vec{r}_S

$$\vec{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \int_m \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dm = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm \quad \Rightarrow \quad \int_m \vec{r} dm = m \vec{r}_S. \quad (29.44)$$

29.6.1 Schwerpunktsatz, Drallsatz

Gewählt wird ein (zunächst beliebiger) körperfester Bezugspunkt O , auf den alle angreifenden äußeren Lasten reduziert werden. In der **Abbildung 29.31** sind die Komponenten der resultierenden äußeren Lasten angedeutet, die ab sofort durch einen Kraftvektor und einen Momentvektor repräsentiert werden:

$$\vec{F}_0 = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ F_{0z} \end{bmatrix}, \quad \vec{M}_0 = \begin{bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{bmatrix}. \quad (29.45)$$

Die drei Komponenten der d'Alembertschen Kräfte des Massenpunkts dm werden entsprechend 29.43 im Vektor $\vec{a} dm$ zusammengefasst. Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte mit den über die Gesamtmasse integrierten Massenkräften liefert unter Berücksichtigung von 29.44:

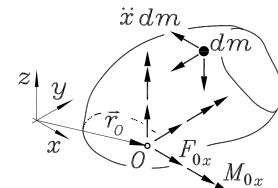


Abbildung 29.31: Kraft- und Momentvektor (Komponenten)

$$\vec{F}_0 = \int_m \vec{a} dm = \int_m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} dm = \frac{d^2}{dt^2} \int_m \vec{r} dm = \frac{d^2}{dt^2} (m \vec{r}_S) = m \vec{a}_S. \quad (29.46)$$

Dies entspricht dem schon für die ebene Bewegung hergeleiteten *Schwerpunktsatz*: Auch im Raum bewegt sich der Schwerpunkt eines Körpers so, als würden alle äußeren Kräfte an ihm angreifen und die Gesamtmasse des Körpers in ihm konzentriert sein.

Für das Momenten-Gleichgewicht aller Massenkräfte mit dem Moment der äußeren Belastung wird der Vektor \vec{r}^* (vom Bezugspunkt O zum Massenpunkt dm) eingeführt (**Abbildung 29.32**):

$$\vec{M}_0 = \int_m \vec{r}^* \times \vec{a} dm = \int_m \vec{r}^* \times \frac{d\vec{v}}{dt} dm . \quad (29.47)$$

Mit der Identität

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}^* \times \vec{v}) = \vec{r}^* \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}^*}{dt} \times \vec{v}$$

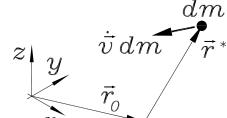


Abbildung 29.32: „Hebelarm“ \vec{r}^*

(Differenziation eines Produkts) und den aus der Kinematik bekannten Beziehungen **27.14**

$$\frac{d\vec{r}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}^* , \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \quad (29.48)$$

lässt sich **29.47** folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \int_m \vec{r}^* \times \frac{d\vec{v}}{dt} dm = \int_m \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}^* \times \vec{v}) - \frac{d\vec{r}^*}{dt} \times \vec{v} \right] dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_m \vec{r}^* \times \vec{v} dm - \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^*) dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_m \vec{r}^* \times \vec{v} dm - \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \times \vec{v}_0 dm - \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_m \vec{r}^* \times \vec{v} dm - \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \times \vec{v}_0 dm . \end{aligned}$$

Das erste Integral wird als *Drall (Drehimpuls)* der Masse bezüglich des Punktes O

$$\vec{L}_0 = \int_m \vec{r}^* \times \vec{v} dm \quad (29.49)$$

bezeichnet, im zweiten Integral ist nur der mittlere Faktor über das Volumen der Masse veränderlich (das dritte Integral ist bereits verschwunden wegen $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$ bei beliebigem Vektor \vec{c}):

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} - \left(\vec{\omega} \times \int_m \vec{r}^* dm \right) \times \vec{v}_0 . \quad (29.50)$$

Man erkennt, dass sich **29.50** wesentlich vereinfacht, wenn der Bezugspunkt O sich nicht bewegt. Um den von der ebenen Bewegung bekannten besonderen Einfluss des Schwerpunkts zu klären, wird \vec{r}^* entsprechend **Abbildung 29.33** ersetzt. Der „Umweg über den Schwerpunkt“ liefert:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} - \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{r}_{0S} \int_m dm + \int_m \vec{r}_S^* dm \right) \right] \times \vec{v}_0 .$$

Der Vektor \vec{r}_{0S} als Verbindung zweier fester Punkte des Körpers durfte vor das Integral gezogen werden, das zweite Integral verschwindet (statisches Moment bezüglich des Schwerpunkts):

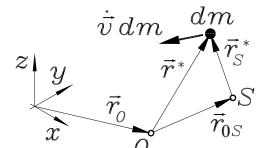


Abbildung 29.33: $\vec{r}^* = \vec{r}_{0S} + \vec{r}_S^*$

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}_{0S}) \times \vec{v}_0 . \quad (29.51)$$

Damit wird noch eine zweite Möglichkeit erkennbar, das Momenten-Gleichgewicht des bewegten Körpers im Raum besonders einfach zu formulieren. Es ist der

Drallsatz (Momentensatz):

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} . \quad (29.52)$$

Die zeitliche Änderung des Drallvektors entspricht der Wirkung des resultierenden Momentenvektors aller äußerer Belastungen. Als Bezugspunkt A sind der beliebig bewegte Schwerpunkt oder ein ruhender Punkt des Körpers zugelassen.

Der Drallvektor in 29.52 wird nach 29.49 berechnet, wobei die Geschwindigkeit nach 29.48 eingesetzt werden kann:

$$\vec{L}_A = \int_m \vec{r}^* \times \vec{v} dm = \int_m \vec{r}^* \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}^*) dm = \int_m \vec{r}^* dm \times \vec{v}_A + \int_m \vec{r}^* \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) dm .$$

Der erste Summand verschwindet in jedem Fall, denn A muss ein ruhender Punkt ($\vec{v}_A = \vec{0}$) oder der Schwerpunkt sein (dann ist das Integral als statisches Moment gleich Null):

$$\vec{L}_A = \int_m \vec{r}^* \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) dm . \quad (29.53)$$

Wenn für \vec{r}^* und $\vec{\omega}$ die Komponentendarstellungen in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} , \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

in 29.53 eingesetzt werden, entstehen beim Ausmultiplizieren der Vektorprodukte genau die Integrale, die im Abschnitt 29.3.3 als axiale Massenträgheitsmomente 29.17 und Deviationsmomente 29.18 definiert wurden:

$$\vec{L}_A = \begin{bmatrix} L_{Ax^*} \\ L_{Ay^*} \\ L_{Az^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx}^* \omega_x + J_{xy}^* \omega_y + J_{xz}^* \omega_z \\ J_{xy}^* \omega_x + J_{yy}^* \omega_y + J_{yz}^* \omega_z \\ J_{xz}^* \omega_x + J_{yz}^* \omega_y + J_{zz}^* \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx}^* & J_{xy}^* & J_{xz}^* \\ J_{xy}^* & J_{yy}^* & J_{yz}^* \\ J_{xz}^* & J_{yz}^* & J_{zz}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{x^*y^*z^*} \vec{\omega} . \quad (29.54)$$

⇒ Man beachte, dass der Drallsatz 29.52 für ein raumfestes Koordinatensystem formuliert wurde, so dass auch die Elemente des Trägheitstensors in 29.54 sich auf dieses System beziehen müssen und nicht einfach aus der üblichen Berechnung im körperfesten Koordinatensystem übernommen werden können. Gegebenenfalls kann die Drehung des Körpers während der Bewegung über die Transformation 29.23 erfasst werden.

In vielen Fällen ist es jedoch günstiger, mit körperfesten Koordinaten zu arbeiten. Dies wird im nachfolgenden Abschnitt besprochen.

29.6.2 Körperfeste Koordinaten, Eulersche Gleichungen, Kreiselbewegung

Im Bezugspunkt O des bewegten Körpers wird ein *körperfestes* ξ - η - ζ -Koordinatensystem definiert. Die Komponenten des Vektors $\vec{\omega}$ werden auf diese Koordinatenrichtungen bezogen, die Elemente des Trägheitstensors sind bezüglich dieses Systems konstant. Der analog zu 29.54 im bewegten Koordinatensystem aufzuschreibende Drallvektor

$$\vec{L}_A = \begin{bmatrix} L_A \xi \\ L_A \eta \\ L_A \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\xi \xi} & J_{\xi \eta} & J_{\xi \zeta} \\ J_{\xi \eta} & J_{\eta \eta} & J_{\eta \zeta} \\ J_{\xi \zeta} & J_{\eta \zeta} & J_{\zeta \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\xi \eta \zeta} \vec{\omega} \quad (29.55)$$

darf natürlich nicht in 29.52 eingesetzt werden, weil sich die Zeitableitung in 29.52 auf das raumfeste Koordinatensystem bezieht. Im Abschnitt 27.3.3 wurde der Zusammenhang 27.16 zwischen der Ableitung eines Vektors im ruhenden bzw. bewegten Koordinatensystem hergeleitet, der hier für die Ableitung des Drallvektors genutzt wird:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}_A + \frac{d^* \vec{L}_A}{dt} \quad . \quad (29.56)$$

Der Stern beim Ableitungssymbol, deutet die „Ableitung im bewegten (körperfesten) System“ an. Mit dieser „Transformation der zeitlichen Ableitung“ wird aus 29.52 mit 29.55 der *Drallsatz bezüglich des bewegten (körperfesten) Systems*:

$$\vec{M}_A = \vec{\omega} \times \vec{L}_A + \frac{d^* \vec{L}_A}{dt} = \vec{\omega} \times (\mathbf{J}_{\xi \eta \zeta} \vec{\omega}) + \mathbf{J}_{\xi \eta \zeta} \frac{d^* \vec{\omega}}{dt} \quad . \quad (29.57)$$

- ⇒ Der Vektor $\vec{\omega}$ in 29.57 ist mit seinen Komponenten für das bewegte System zu formulieren. Er beschreibt natürlich trotzdem die Drehung des Körpers (oder besser: „Drehung des körperfesten Koordinatensystems“) gegenüber der „ruhenden Umwelt“.

Wenn man sich für das Arbeiten mit einem körperfesten Koordinatensystem entscheidet, können (und sollten) dessen Achsen natürlich mit den Hauptachsen für den Punkt A zusammenfallen. Dann wird die Matrix in 29.55 zur Diagonalmatrix mit den Hauptträgheitsmomenten, die (vgl. Abschnitt 29.3.3) nach 29.24 als J_1 , J_2 und J_3 bezeichnet werden. Dementsprechend sollen auch die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und des äußeren Momentvektors um diese Achsen die Indizes 1, 2 und 3 haben. Die Beziehung 29.57 vereinfacht sich erheblich. Man erhält nach Ausführen der Multiplikationen die Komponenten des Momentvektors, nach LEONARD EULER (1707 - 1783) bezeichnet als

Eulersche Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_1 &= J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \quad , \\ M_2 &= J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 \quad , \\ M_3 &= J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \quad . \end{aligned} \quad (29.58)$$

Die Gleichungen gelten für ein *körperfestes Hauptachsensystem*, dessen Ursprung im Schwerpunkt oder in einem ruhenden Punkt des Körpers liegt.

- ⇒ Der wesentliche Vorteil des Arbeitens mit körperfesten Koordinaten zeigt sich in den Gleichungen 29.58: Die Massenträgheitsmomente sind keine zeitabhängigen Größen. Allerdings beschreiben die Eulerschen Gleichungen nur die Drehbewegung des Körpers um die körperfesten Achsen, deren (sich während der Bewegung ändernde) Lage im Raum kann allein aus diesen Gleichungen nicht berechnet werden. Wenn allerdings die Bewegung der Achsen (z. B. bei Zwangsführung) bekannt ist, können die Gleichungen 29.58 recht nützlich sein.
- ⇒ Als *Kreisel* wird ein starrer Körper bezeichnet, der eine Bewegung um einen festen Punkt ausführen kann (drei Freiheitsgrade). Die Berechnung von Kreiselbewegungen ist ein typischer Anwendungsfall für die Eulerschen Gleichungen.

Für die Beschreibung der Bewegung der (körperfesten) Hauptachsen eines Kreisels sind drei Winkelkoordinaten erforderlich, die (auch auf einen Vorschlag Eulers zurückgehend) entsprechend **Abbildung 29.34** definiert werden. Im ruhenden Punkt des Kreisels liegt ein raumfestes x - y - z -Koordinatensystem.

Die Neigung der Hauptachse 3 zur der z -Achse wird durch den Winkel ϑ beschrieben (die Wahl der Hauptachse 3 ist willkürlich). Die körperfesten Hauptachsen 1 und 2 behalten ihre rechtwinklige Lage zu 3 natürlich bei, die von 1 und 2 aufgespannte (körperfeste) Ebene schneidet die (raumfeste) x - y -Ebene entlang der so genannten *Knotenachse*.

Die Drehung der Knotenachse in der x - y -Ebene wird durch den Winkel ψ verfolgt. Da die Hauptachse 3 senkrecht auf der von 1 und 2 gebildeten Ebene steht, ist auch die Knotenachse stets senkrecht zur Hauptachse 3 gerichtet.

Die beiden Koordinaten ϑ und ψ beschreiben die Lage der Hauptachse 3 eindeutig, der Kreisel kann allerdings noch eine Rotation um diese Achse ausführen, die durch eine dritte Koordinate beschrieben wird: Der Winkel ϕ wird in der durch 1 und 2 aufgespannten Ebene gemessen, beginnend an der Knotenachse wird von ihm die Lage der Achse 1 verfolgt.

Die Koordinaten ϑ , ψ und ϕ werden *Eulersche Winkel* genannt, die Hauptachse 3 wurde von Euler als *Figurennachse* des Kreisels bezeichnet.

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ beschreibt also die Eigendrehung um die Figurennachse, die selbst mit ψ um die raumfeste z -Achse rotiert. Zur Berechnung des Bewegungsgesetzes eines Kreisels, das durch die Funktionen $\vartheta(t)$, $\psi(t)$ und $\phi(t)$ eindeutig beschrieben wird, können die Eulerschen Gleichungen 29.58 verwendet werden, es muss jedoch vorab der Zusammenhang zwischen den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 und ω_3 (bezüglich der körperfesten Achsen) und den durch $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ und $\dot{\phi}$ definierten Winkelgeschwindigkeiten geklärt werden.

Die **Abbildung 29.35** zeigt, dass $\dot{\phi}$ die Richtung der Hauptachse 3 und damit der Winkelgeschwindigkeit ω_3 hat. Die Richtung der Knotenachse bestimmt die Richtung von $\dot{\vartheta}$, die also in der von den Hauptachsen 1 und 2 aufgespannten Ebene liegt.

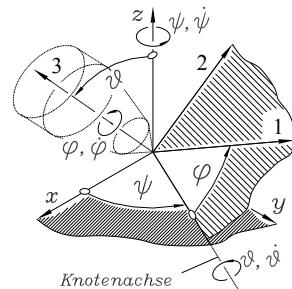


Abbildung 29.34: Definition der Eulerschen Winkel

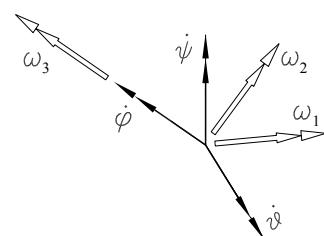


Abbildung 29.35: Winkelgeschwindigkeiten

Die nebenstehende Skizze zeigt die von 1 und 2 aufgespannte Ebene (gesehen aus Hauptachsenrichtung 3). Eine Komponente von $\dot{\vartheta}$ hat die Richtung der Hauptachse 1 (und damit die Richtung von ω_1), die andere ist der Hauptachse 2 (und damit ω_2) entgegengerichtet.

Die raumfeste Lage von ψ führt dazu, dass diese Winkelgeschwindigkeit Komponenten für alle drei Hauptachsen liefert:

Die erste Zerlegung in der von der z -Achse und der Achse 3 aufgespannten Ebene liefert die beiden in **Abbildung 29.36** skizzierten Komponenten. Die Komponente in der von 1 und 2 aufgespannten Ebene bildet mit der Achse 1 den Winkel ($90^\circ - \varphi$) und wird noch einmal zerlegt. Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \quad , \\ \omega_2 &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \quad , \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \quad .\end{aligned}\quad (29.59)$$

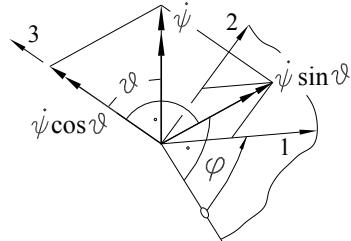
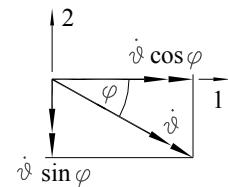


Abbildung 29.36: Zerlegung von ψ

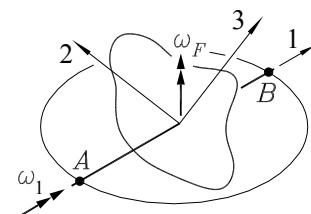
Für die Eulerschen Gleichungen werden noch die Ableitungen nach der Zeit benötigt:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \ddot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \quad , \\ \dot{\omega}_2 &= -\ddot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi \quad , \\ \dot{\omega}_3 &= \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \quad .\end{aligned}\quad (29.60)$$

Nach dem Einsetzen von 29.59 und 29.60 in die Eulerschen Gleichungen entsteht ein Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung für die drei Winkelkoordinaten. Es ist hochgradig nicht-linear und im Allgemeinen nur numerisch lösbar. Erschwerend kommt hinzu, dass die Differenzialgleichungen auch in den zweiten Ableitungen gekoppelt sind².

Beispiel:

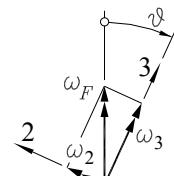
Ein starrer Körper rotiert um seine Hauptachse 1 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Die Punkte A und B der Rotationsachse bewegen sich auf einer horizontalen Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit, so dass dem rotierenden Körper eine Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_F um eine vertikale Achse überlagert wird („geführter Kreisel“). Es soll untersucht werden, welche Momente erforderlich sind, um diese Bewegung hervorzurufen.



Gegeben: $\omega_1, \omega_F, J_1, J_2, J_3$.

Für das mitrotierende Hauptachsensystem gelten die Eulerschen Gleichungen, wenn ω_F in zwei Komponenten in Richtung dieser Achsen zerlegt wird. Die nebenstehende Skizze zeigt eine beliebige (durch den Winkel ϑ gekennzeichnete) Lage. Man liest ab:

$$\omega_2 = \omega_F \sin \vartheta \quad , \quad \omega_3 = \omega_F \cos \vartheta \quad .$$



²Man beachte hierzu den Hinweis auf Seite 529 auf dieses Thema im Internet. Das Problem „Kopplung in den Beschleunigungsgleidern“ wird ausführlich im Bereich „Mathematik für die Technische Mechanik“ behandelt.

Diese Winkelgeschwindigkeitskomponenten sind veränderlich, deshalb ergeben sich auch Winkelbeschleunigungskomponenten. Bei der Ableitung nach der Zeit taucht dabei auch die Ableitung des Winkels ϑ auf. Weil die Hauptachse 1 stets in der Horizontalebene bleibt (der Euler-Winkel φ ist immer Null), liefert 29.59 dafür $\dot{\vartheta} = \omega_1$. Damit erhält man die Ableitungen von ω_2 und ω_3 :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= \omega_F \dot{\vartheta} \cos \vartheta = \omega_F \omega_1 \cos \vartheta , \\ \dot{\omega}_3 &= -\omega_F \dot{\vartheta} \sin \vartheta = -\omega_F \omega_1 \sin \vartheta .\end{aligned}$$

Damit (und mit $\dot{\omega}_1 = 0$) ergeben die Eulerschen Gleichungen die gesuchten Momente:

$$\begin{aligned}M_1 &= -(J_2 - J_3) \omega_F^2 \sin \vartheta \cos \vartheta , \\ M_2 &= J_2 \omega_F \omega_1 \cos \vartheta - (J_3 - J_1) \omega_F \omega_1 \cos \vartheta , \\ M_3 &= -J_3 \omega_F \omega_1 \sin \vartheta - (J_1 - J_2) \omega_F \omega_1 \sin \vartheta .\end{aligned}$$

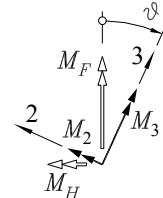
Bemerkenswert ist, dass ein (sich periodisch änderndes) Moment M_1 erforderlich wäre, wenn ω_1 auch bei zusätzlicher Drehung um eine vertikale Achse konstant bleiben soll. Wird dieses Moment nicht aufgebracht (und praktisch ist dies kaum möglich), dann wäre ω_1 nicht konstant. Vor einer Diskussion der anderen Ergebnisse werden die mitrotierenden Momente M_2 und M_3 in ein Moment M_F mit vertikaler und ein Moment M_H mit horizontaler Drehachse umgerechnet.

Aus der nebenstehenden Skizze liest man ab:

$$M_F = M_2 \sin \vartheta + M_3 \cos \vartheta , \quad M_H = M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta .$$

Nach dem Einsetzen der berechneten Werte für M_2 und M_3 ergibt sich:

$$\begin{aligned}M_F &= (J_2 - J_3) \omega_F \omega_1 \sin 2\vartheta , \\ M_H &= (J_2 - J_3) \omega_F \omega_1 \cos 2\vartheta + J_1 \omega_F \omega_1 .\end{aligned}$$



- ⇒ Auch um die vertikale Achse ist ein (praktisch kaum realisierbares) Moment erforderlich, um die Bewegung mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten zu erzwingen. Allerdings verschwinden sowohl M_1 als auch M_F , wenn die Massenträgheitsmomente bezüglich der beiden Hauptachsen senkrecht zur Achse 1 gleich sind.
- ⇒ Wenn $J_2 = J_3$ gilt, spricht man vom *symmetrischen Kreisel* (alle Achsen senkrecht zur Rotationsachse sind Hauptachsen). Der symmetrische Kreisel ist ein für die Praxis besonders wichtiger Sonderfall (rotierende Massen sind häufig sogar rotationssymmetrisch).
- ⇒ Das Moment M_H verschwindet jedoch auch beim symmetrischen Kreisel nicht. Das verbleibende Moment

$$M_H = J_1 \omega_1 \omega_F \quad (29.61)$$

muss von den Lagern aufgebracht werden. Bemerkenswert ist, dass es um eine horizontale Achse dreht: Die Lager müssen vertikal gerichtete Kräfte auf das System aufbringen, damit es sich mit ω_F um eine vertikale Achse dreht (der Kreisel reagiert auf das Aufbringen eines Moments mit einer Drehung um eine Achse senkrecht zur Drehachse des Moments).

Das Moment 29.61 kann infolge des Produkts der beiden Winkelgeschwindigkeiten sehr groß werden. Es wird noch intensiver diskutiert, nachdem im folgenden Abschnitt ein allgemeinerer Fall untersucht wurde, der die weitaus meisten praktisch wichtigen Fälle erfasst.

29.6.3 Das Kreiselmoment

Die folgenden Untersuchungen beschränken sich auf den für die technische Praxis besonders wichtigen *symmetrischen Kreisel*, für den alle Achsen senkrecht zur Rotationsachse Hauptachsen sind (er braucht nicht rotationssymmetrisch zu sein, zwei Hauptachsen senkrecht zur Rotationsachse mit gleichen Massenträgheitsmomenten garantieren die Erfüllung der genannten Bedingung). Für solche Körper bringt das mitrotierende Koordinatensystem keine Vorteile, es ist sogar lästig, weil Winkelgeschwindigkeitsvektoren mit raumfester Richtung ($\vec{\omega}_F$ im Beispiel des vorigen Abschnitts) auf die rotierenden Achsen umgerechnet werden müssen.

Ein kleiner Trick hilft: Man wählt ein Koordinatensystem, das die Bewegung des Körpers nur insofern mitmacht, dass der Drallvektor bezüglich dieses Systems konstant bleibt. Die verbleibende Bewegung wird als *Führungsbewegung dem Koordinatensystem überlagert* und durch die Formel 29.56 erfasst. Weil die Ableitung des Drallvektors sich in dieser Formel auf das bewegte Koordinatensystem bezieht, verschwindet dieser Anteil, wenn der Drallvektor im bewegten Koordinatensystem konstant ist. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor im ersten Anteil ist dann nur die überlagerte Führungsbewegung (folgendes Beispiel), und der Drallsatz vereinfacht sich zu

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\omega}_F \times \vec{L}_A \quad . \quad (29.62)$$

Diese vereinfachte Form darf also angewendet werden, wenn der Drallvektor konstant ist bezüglich des verwendeten Koordinatensystems, das sich selbst jedoch gegenüber einem festen System mit der „Führungs-Winkelgeschwindigkeit“ $\vec{\omega}_F$ dreht.

Beispiel: Ein symmetrischer Kreisel rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_K in einem Rahmen um seine Hauptzentralachse 1. Der Rahmen wird mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_F gedreht. Die Masse des Rahmens soll vernachlässigt werden, um die Wirkung des „geführten Kreisels“ zu untersuchen.

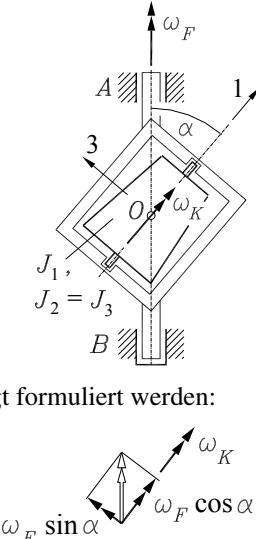
Gegeben: $J_1, J_2 = J_3, \omega_K, \omega_F, \alpha$.

Die Gesamt-Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ergibt bei Überlagerung von ω_K und ω_F die beiden Komponenten in Richtung der Achsen 1 und 3 (Skizze unten rechts):

$$\omega_1 = \omega_K + \omega_F \cos \alpha \quad , \quad \omega_3 = \omega_F \sin \alpha \quad .$$

Weil Hauptachsen vorausgesetzt werden, kann der Drallvektor wie folgt formuliert werden:

$$\vec{L}_0 = \begin{bmatrix} J_1 \omega_1 \\ J_2 \omega_2 \\ J_3 \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\omega_K + \omega_F \cos \alpha) \\ 0 \\ J_3 \omega_F \sin \alpha \end{bmatrix} \quad . \quad (29.63)$$



Der Bezugspunkt O für den Drall \vec{L}_0 ist der in Ruhe befindliche Punkt des Kreisels (Schnittpunkt der beiden Drehachsen), es braucht nicht der Schwerpunkt zu sein. Der Drall 29.63 mit konstanten Massenträgheitsmomenten gilt eigentlich für das mit dem Kreisel bewegte Hauptachsensystem.

Da sich aber bei der Drehung um die Achse 1 die Massenträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels nicht ändern, darf das Bezugssystem auch am Rahmen befestigt werden (**Abbildung 29.37**) und ist dann nur noch der „Führungsrotation“ ω_F unterworfen, die in die vereinfachte Form des Drallsatzes **29.62** mit ihren beiden Komponenten eingeht:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_F \times \vec{L}_0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_F \cos \alpha & 0 & \omega_F \sin \alpha \\ J_1(\omega_K + \omega_F \cos \alpha) & 0 & J_3 \omega_F \sin \alpha \end{vmatrix} \\ = [J_1 \omega_K + (J_1 - J_3) \omega_F \cos \alpha] \omega_F \sin \alpha \cdot \vec{e}_2$$

(das Vektorprodukt wurde mit Hilfe der Determinanten-Regel aufgelöst).

Der Vektor des äußeren Moments, das die Lager auf den Rahmen aufbringen müssen, steht senkrecht auf beiden Winkelgeschwindigkeitsvektoren. Wenn J_3 nicht wesentlich größer als J_1 ist, wirkt auf den Rahmen ein rechtsdrehendes Moment (**Abbildung 29.38**).

- ⇒ Das Ergebnis dieses Beispiels ist auf viele Probleme anwendbar.
Vor der weiteren Diskussion wird es etwas umgeformt:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \left[J_1 + (J_1 - J_3) \frac{\omega_F}{\omega_K} \cos \alpha \right] \omega_F \omega_K \sin \alpha \cdot \vec{e}_2 \\ &= \left[J_1 + (J_1 - J_3) \frac{\omega_F}{\omega_K} \cos \alpha \right] \vec{\omega}_F \times \vec{\omega}_K . \end{aligned}$$

Dies ist das Moment, das auf den Rahmen wirkt. Es ist üblich, gerade das entgegengesetzt wirkende Moment, das auf die Lager wirkt, anzugeben (realisiert durch Vertauschen der Faktoren des Vektorprodukts). Es ist das

Kreiselmoment:

$$\vec{M}_K = \left[J_1 + (J_1 - J_3) \frac{\omega_F}{\omega_K} \cos \alpha \right] \vec{\omega}_K \times \vec{\omega}_F . \quad (29.64)$$

Ein symmetrischer Kreisel (Rotor) dreht sich um seine Hauptzentrallachse 1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_K (J_1 ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse 1, J_3 das Hauptträgheitsmoment einer dazu senkrechten Achse). Der Bewegung des Kreisels wird eine Führungsbewegung ω_F überlagert (die Drehachsen von ω_K und ω_F schließen den Winkel α ein).

Dann müssen die Lager (zusätzlich zu den anderen Belastungen, z. B. das Eigengewicht) das Kreiselmoment **29.64** aufnehmen, dessen Vektor stets senkrecht auf den Drehachsen von ω_K und ω_F steht, so dass die Lagerreaktionen mit ω_F umlaufen.

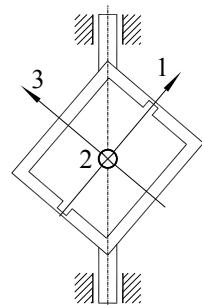


Abbildung 29.37: Bezugssystem rotiert mit dem Rahmen

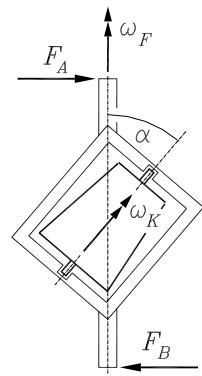


Abbildung 29.38: Lagerreaktionen erzeugen das Moment \vec{M}

- ⇒ In der Maschinendynamik wird häufig nur der erste Summand von 29.64 berücksichtigt. Dies ist korrekt, wenn die Drehachsen von ω_K und ω_F senkrecht zueinander sind (dann gilt: $\cos \alpha = 0$), aber auch dann gerechtfertigt, wenn ω_F wesentlich kleiner als ω_K ist. Die vereinfachte Formel

$$\vec{M}_K = J_1 \vec{\omega}_K \times \vec{\omega}_F \quad (\omega_F \ll \omega_K) \quad (29.65)$$

darf z. B. verwendet werden, um den Einfluss der Drehung um eine Querachse eines Flugzeugs beim Start und bei der Landung bzw. um eine vertikale Achse beim Kurvenflug auf die Lager der Triebwerksturbine zu untersuchen. Auch die Drehungen um die Querachse eines Schiffes („Stampfen“) auf die Lagerkräfte der (in Längsrichtung liegenden) Antriebswelle werden nach 29.65 erfasst.

- ⇒ Auch für den Sonderfall $\omega_K = 0$ kann 29.64 nützlich sein. Die kleine Umformung

$$\vec{M}_K = \left[J_1 + (J_1 - J_3) \frac{\omega_F}{\omega_K} \cos \alpha \right] \omega_K \vec{e}_1 \times \vec{\omega}_F = [J_1 \omega_K + (J_1 - J_3) \omega_F \cos \alpha] \vec{e}_1 \times \vec{\omega}_F$$

(\vec{e}_1 ist der Einheitsvektor in Richtung der Hauptzentralachse 1) gestattet das Nullsetzen von ω_K (der Kreisel rotiert nicht mehr), und man erhält:

$$\begin{aligned} \vec{M}_S &= (J_1 - J_3) \omega_F \cos \alpha \cdot \vec{e}_1 \times \vec{\omega}_F \\ &= (J_3 - J_1) \omega_F^2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \vec{e}_2 . \end{aligned} \quad (29.66)$$

Damit können die Lagerreaktionen von Wellen mit „schief aufgebrachten“ Scheiben und Zylindern (**Abbildung 29.39**) berechnet werden (vgl. Beispiel 2 im Abschnitt 29.4.1 auf Seite 560). Vielfach wird auch der Effekt, der sich durch die schief aufgebrachten Scheiben und Zylinder ergibt, als *Kreiselwirkung* bezeichnet.

Sicher ist es besser, von „dynamischer Unwuchtwirkung“ (vgl. Abschnitt 29.4.2) zu sprechen. Leider hat sich der von RICHARD GRAMMEL (1889 - 1964) in seinem grundlegenden Werk über den Kreisel³ für den Ausdruck 29.66 vorgeschlagene Begriff *Schleudermoment* nicht durchgesetzt.

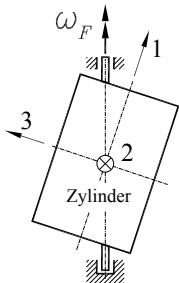


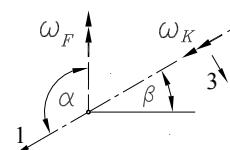
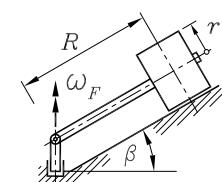
Abbildung 29.39: Schief aufgesetzter Zylinder

Beispiel 2:

In Kollermühlen verstärkt die Kreiselwirkung die Kraft, die der Läufer auf die Mahlplatte auf bringt. Der skizzierte Läufer wird mit der Winkelgeschwindigkeit ω_F um eine zentrale Achse bewegt. Er rollt auf einem Kreis mit dem Radius $r^* = R \cos \beta + r \sin \beta$ mit der Bahngeschwindigkeit v , so dass sich der Läufer (reines Rollen vorausgesetzt) mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_K = \frac{v}{r} = \omega_F \left(\frac{R}{r} \cos \beta + \sin \beta \right) .$$

um seine eigene Längsachse dreht. Da die beiden Winkelgeschwindigkeiten von gleicher Größenordnung sind, muss das Kreiselmoment nach 29.64 aufgeschrieben werden. Die Skizze unten zeigt die Richtungen der Hauptachsen für die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_3 .



³R. Grammel: Der Kreisel. Verlag Friedrich Vieweg & Sohn Braunschweig, 1920

Mit dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ erhält man nach der Definition des Vektorprodukts ein rechtsdrehendes Moment mit dem Betrag

$$M_K = \left[J_1 + (J_1 - J_3) \frac{\omega_F}{\omega_K} \cos \alpha \right] \omega_K \omega_F \sin \alpha = \left[J_1 \frac{R}{r} \cos \beta + J_3 \sin \beta \right] \omega_F^2 \cos \beta \quad ,$$

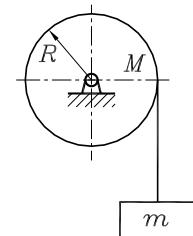
das (zusätzlich zur Komponente, die das Eigengewicht des Läufers liefert) eine Kraft $F_N = \frac{M_K}{R}$ auf die Mahlplatte aufbringt (senkrecht zur Oberfläche der Mahlplatte).

29.7 Aufgaben

Aufgabe 29.1: Die an einem masselosen Seil hängende Masse m wird zur Zeit $t = 0$ freigelassen. Bei der Abwärtsbewegung rollt das Seil von der sich reibungsfrei drehenden zylindrischen Rolle (Masse M , Radius R) ab.

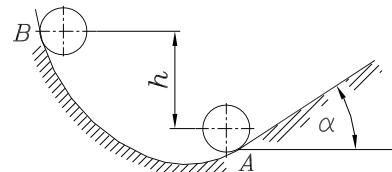
Gegeben: $M = 20\text{kg}$; $m = 5\text{kg}$.

- Man bestimme für die Masse m den nach 5 s zurückgelegten Weg und ihre Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.
- Wie groß ist die Kraft F_S im Seil während der Bewegung?



Aufgabe 29.2: Eine Kugel mit der Masse m rollt (ohne zu gleiten) von B (aus der Ruhelage heraus) nach A und dann auf einer schiefen Ebene aufwärts.

Gegeben: $h = 1\text{m}$; $\alpha = 30^\circ$; $m = 1\text{kg}$.



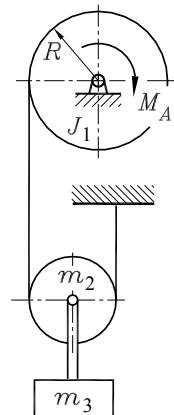
- Man ermittle die Zeit, die vom Passieren des Punktes A bis zum Erreichen des höchsten Punktes auf der schiefen Ebene vergeht.
- Wie groß sind die Normalkraft F_N und die Haftungskraft F_H zwischen Kugel und schiefen Ebene?

Aufgabe 29.3: Ein konstantes Antriebsmoment M_A an einer Scheibe mit dem auf den Drehpunkt bezogenen Massenträgheitsmoment J_1 hebt die Massen m_2 (zylindrische Rolle) und m_3 , die durch einen masselosen starren Stab verbunden sind.

Gegeben: R , m_1 , $J_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$, $m_2 = 4m_1$, $m_3 = 12m_1$.

Man ermittle

- die Beschleunigung a_3 der Masse m_3 ,
- die Kraft F_S im Stab zwischen den Massen m_2 und m_3 .
- Wie groß muss das Antriebsmoment M_A mindestens sein, damit sich die Masse m_3 aufwärts bewegt?

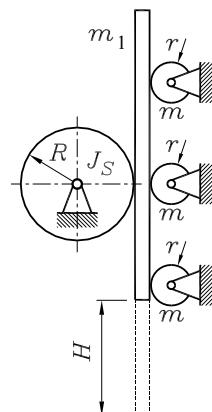


Aufgabe 29.4:

Um das Massenträgheitsmoment J_S eines Zahnrades mit dem Radius R zu ermitteln, wird der skizzierte Versuchsaufbau verwendet: Eine Zahnstange mit der Masse m_1 wird aus der Ruhe heraus fallengelassen. Sie nimmt bei ihrer Bewegung das Zahnrad und drei zylindrische Führungsrollen schlupffrei mit. Die Führungsrollen haben alle den gleichen Radius und jeweils die Masse m . Die Zeit T , die die Zahnstange für das Durchfallen der Höhe H benötigt, wird gemessen.

Gegeben: $R = 60 \text{ mm}$; $m_1 = 2 \text{ kg}$; $m = 0,4 \text{ kg}$; $H = 500 \text{ mm}$; $T = 1,5 \text{ s}$.

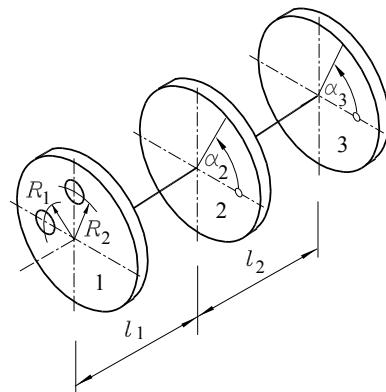
Es sind das Massenträgheitsmoment J_S und die Geschwindigkeit v_{END} der Zahnstange am Ende der Messstrecke zu ermitteln.

**Aufgabe 29.5:**

Ein Rotor besteht aus einer Welle mit drei zylindrischen Scheiben gleicher Dicke. An der Scheibe 1 des ideal ausgewuchteten Rotors müssen nachträglich wie skizziert noch zwei Bohrungen (Durchmesser d) angebracht werden. Durch jeweils eine zusätzliche Bohrung gleichen Durchmessers in den Scheiben 2 und 3 soll der ausgewuchte Zustand des Rotors wieder hergestellt werden.

In welchen Abständen r_2 bzw. r_3 von der Drehachse und unter welchen Winkeln α_2 bzw. α_3 müssen die Zusatzbohrungen angebracht werden?

Gegeben: $R_1 = 30 \text{ mm}$; $R_2 = 40 \text{ mm}$; $l_1 = 45 \text{ mm}$; $l_2 = 90 \text{ mm}$.

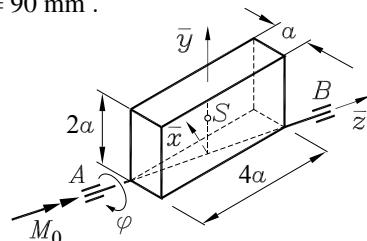
**Aufgabe 29.6:**

Ein Quader kann sich um seine untere Flächendiagonale drehen.

Gegeben: ρ , a , M_0 .

- Man berechne den Trägheitstensor des Körpers bezüglich des \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystems.
- Es sind das Anfangswertproblem für die Berechnung der Drehbewegung um die \bar{z} -Achse (aus der dargestellten Ruhelage heraus) und die Bestimmungsgleichungen für die Lagerreaktionen bei A und B (beschrieben durch Komponenten im mitrotierenden \bar{x} - \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem) zu formulieren. Die Lager haben jeweils den Abstand a von den Eckpunkten des Körpers.
- Mit einem geeigneten Programm ist die numerische Lösung (Bewegungsablauf, Lagerreaktionen) für zwei volle Umdrehungen bei Verwendung des folgenden Parameters zu erzeugen:

$$\frac{M_0}{mg a} = \frac{M_0}{8\rho g a^4} = 1$$



Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

30 Kinetik des Massenpunktsystems

Ein *Massenpunktsystem* setzt sich aus n Massenpunkten zusammen, zwischen denen starre oder nicht starre Bindungen bestehen können. Seine Lage kann in jedem Fall durch $3n$ Koordinaten im Raum eindeutig beschrieben werden. Die $3n$ Freiheitsgrade, die das freie Massenpunktsystem hätte, können durch starre Lager und starre (kinematische) Bindungen der Punkte untereinander reduziert werden (Zwangsbedingungen). Auf die einzelnen Punkte können äußere Kräfte (einschließlich der Lagerkräfte) einwirken.

Der *starre Körper* (Kapitel 27 und 29) ist ein Sonderfall des Massenpunktsystems mit unendlich vielen unendlich kleinen Massenpunkten, die sämtlich starr miteinander verbunden sind.

30.1 Schwerpunktsatz, Impulssatz, Drallsatz

Die Lage der n Massenpunkte wird in einem raumfesten Koordinatensystem beschrieben. Der i -te Massenpunkt m_i wird vom Ortsvektor \vec{r}_i verfolgt, die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts aller Massenpunkte (vgl. Formel 4.1 im Abschnitt 4.1) durch den Vektor

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \text{mit} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i \quad . \quad (30.1)$$

Die auf m_i wirkenden äußeren Kräfte (einschließlich der Lagerreaktionen) werden in einem Vektor zusammengefasst, der mit dem Index i gekennzeichnet ist. Die nach dem Freischneiden des Massenpunktes sichtbar werdenden inneren Kräfte erhalten zwei Indizes (**Abbildung 30.1**). Es gilt das Wechselwirkungsgesetz:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (30.2)$$

Nach dem dynamischen Grundgesetz 28.2 muss für jeden Massenpunkt gelten:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^k \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (30.3)$$

(k ist die Anzahl der inneren Bindungen des Massenpunkts m_i). Summiert man die n Gleichungen 30.3, so heben sich alle inneren Kräfte wegen 30.2 auf, und unter Ausnutzung der Ableitung von 30.1 nach der Zeit für die Summe auf der rechten Seite erhält man den

Schwerpunktsatz:
$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \frac{d^2 \vec{r}_S}{dt^2} = mas \quad . \quad (30.4)$$

Der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems konzentriert wäre und als ob alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

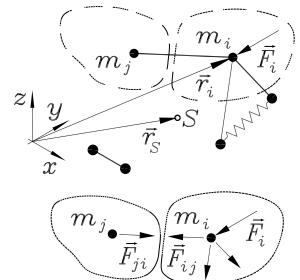


Abbildung 30.1: m_j und m_i im Massenpunktsystem

Der Ausdruck auf der rechten Seite von 30.3 ist die Ableitung des Impulses $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ des Massenpunkts m_i nach der Zeit (bei vorausgesetzter konstanter Masse m_i). Wenn der Gesamtimpuls des Massenpunktsystems als Summe der Impulse der einzelnen Massenpunkte entsprechend $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ definiert wird, kann 30.4 auch in der Form

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (30.5)$$

geschrieben werden. Mit der Ableitung von 30.1 nach der Zeit wird daraus der

Impulssatz: $\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$ mit $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_S$.

$$(30.6)$$

Die Ableitung des Gesamtimpulses eines Massenpunktsystems nach der Zeit ist gleich der Resultierenden aller äußeren Kräfte. Der Gesamtimpuls kann als Summe der Impulse aller Einzelmassen oder als Produkt aus Gesamtmasse und Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Massenpunktsystems gebildet werden.

Sonderfall: Ist die Resultierende der äußeren Kräfte gleich Null, dann bleibt der Gesamtimpuls eines Massenpunktsystems konstant (*Impulserhaltungssatz*).

Beispiel 1:

Ein Mensch in einem Boot, das sich in Ruhe befindet, schießt ein Geschoss (Masse $m = 50 \text{ g}$) mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 800 \text{ m/s}$ in horizontaler Richtung ab. Mensch, Boot und Gewehr haben die Gesamtmasse $M = 150 \text{ kg}$.

Unter der Annahme, dass die Einwirkung äußerer Kräfte vernachlässigt werden darf, kann die Geschwindigkeit, die die Masse M unmittelbar nach dem Schuss hat, mit dem Impulserhaltungssatz berechnet werden. Vor dem Schuss ist der Gesamtimpuls des Systems (Mensch, Boot, Gewehr, Geschoss) gleich Null (alles ist in Ruhe), nach dem Schuss tragen sowohl M als auch m einen Beitrag zum Gesamtimpuls bei, dessen Summe aber unverändert Null ist:

$$0 = m v_0 + M v_M \quad \Rightarrow \quad v_M = -\frac{m}{M} v_0 = -0,267 \text{ m/s} .$$

Da die Geschwindigkeit des Geschosses positiv angenommen wurde, bedeutet das negative Vorzeichen für v_M , dass sich das Boot in entgegengesetzter Richtung bewegt. Der errechnete Wert ist eine gute Näherung für die Anfangsgeschwindigkeit des Bootes, die sich natürlich sehr schnell durch Einwirkung äußerer Kräfte (Bewegungswiderstände) verringert.

⇒ Man beachte, dass beim Impulssatz die Wirkungslinie der Resultierenden der äußeren Kräfte (wie beim Schwerpunktsatz) nicht durch den Schwerpunkt des Massenpunktsystems verlaufen muss, beim Impulserhaltungssatz dürfen die äußeren Kräfte durchaus ein resultierendes Moment haben. Deshalb liefern diese Sätze auch keine Aussage über eine eventuelle Drehung des Massenpunktsystems.

Wenn (wie bei der Herleitung des Impulssatzes) der Ausdruck auf der rechten Seite von 30.3 als Ableitung des Impulses $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ des Massenpunkts m_i nach der Zeit aufgefasst wird, erhält man nach Multiplikation der Gleichung auf beiden Seiten mit \vec{r}_i :

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^k \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (30.7)$$

Es werden wieder alle n Gleichungen 30.7 addiert. Dabei heben sich sämtliche Momentanteile der inneren Kräfte auf, da die Kräfte paarweise (an unterschiedlichen Angriffspunkten, aber auf gleicher Wirkungslinie entgegengesetzt gleich groß) vorhanden sind. Auf der linken Seite entsteht das resultierende Moment aller äußeren Kräfte:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)] \quad . \quad (30.8)$$

Die Ableitung nach der Zeit auf der rechten Seite von 30.8 durfte vor das Vektorprodukt gezogen werden, weil beim Differenzieren des Produkts

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)] = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times (m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i)$$

der erste Summand verschwindet (\vec{v}_i und $m_i \vec{v}_i$ haben gleiche Richtung). Der Ausdruck

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \quad (30.9)$$

ist das *Impulsmoment* (Drall) des Massenpunktes m_i bezüglich des **festen** Koordinatenursprungs. Die Summe der Impulsmomente 30.9 aller Massenpunkte ist der Gesamtdrall des Massenpunkt- systems, und 30.8 geht damit über in den

$$\text{Impulsmomentensatz (Drallsatz):} \quad \vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \quad . \quad (30.10)$$

Die Ableitung des Gesamtdralls eines Massenpunkt- systems nach der Zeit ist gleich dem resultierenden äußeren Moment.

Sonderfall: Ist das resultierende äußere Moment gleich Null, dann bleibt der Gesamtdrehimpuls eines Massenpunkt- systems konstant (*Drallerhaltungssatz*).

⇒ Die formale Übereinstimmung von 30.10 mit dem für den starren Körper gefundenen Drallsatz 29.52 bestätigt, dass der starre Körper als Sonderfall des Massenpunkt- systems angesehen werden darf. Wenn die Summe in 30.10 über „unendlich viele unendlich kleine“ Massenpunkte dm erstreckt wird, entsteht die Integral-Formel 29.49.

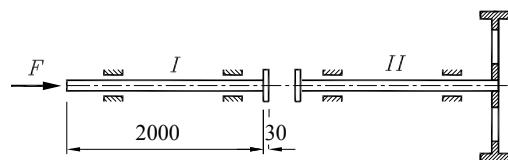
⇒ Der Drallsatz 30.10 für ein Massenpunkt- system darf also als allgemeine Formulierung angesehen werden (für Massenpunkt- systems **und** starre Körper). Der Drall setzt sich gegebenenfalls summarisch aus Anteilen (für Massenpunkte) nach 30.9 und (für starre Körper) nach 29.54 zusammen. Die (praktisch sehr wichtigen) Sonderfälle „Rotation um eine feste Achse“ bzw. „ebene Bewegung“ mit den für den starren Körper besonders einfachen Formeln 29.6 bzw. 29.34 sind auch in 30.10 enthalten. Für den Massenpunkt, der um eine feste Achse rotiert (bzw. eine ebene Rotation um einen festen Punkt ausführt), vereinfacht sich 30.9 zu

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega \quad . \quad (30.11)$$

⇒ Der Drallsatz für das Massenpunkt- system 30.10 gilt für einen festen Bezugspunkt. Es lässt sich zeigen (ist aber praktisch von untergeordneter Bedeutung), dass auch der Gesamtschwerpunkt (wie beim starren Körper) als Bezugspunkt verwendet werden darf.

Beispiel 2:

Eine zylindrische Welle I (Länge: 2 m, Durchmesser: 160 mm) ist mit einer zylindrischen Kupplungsscheibe (Dicke: 30 mm, Durchmesser: 300 mm) starr verbunden (Dichte des Materials von Welle und Kupplungsscheibe: $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$).



Die Welle I ist zunächst in Ruhe und soll durch eine Kraft F gegen eine mit der Drehzahl $n_{II} = 800 \text{ min}^{-1}$ rotierende Welle II gedrückt werden, bis beide Wellen gleiche Drehzahl haben. Welle II hat einschließlich Kupplungsscheibe die gleichen Abmessungen wie Welle I, ist aber am anderen Ende noch wie skizziert mit einem Schwungrad verbunden (Abmessungen und Material des Schwungrades wie im Beispiel auf Seite 551). Der Kupplungsvorgang geschieht im Leerlauf, so dass keine äußeren Momente auf die Wellen wirken. Es sollen die gemeinsame Drehzahl n der Wellen nach dem Kupplungsvorgang und der prozentuale Energieverlust infolge des Kupplungsvorgangs ermittelt werden.

Da keine äußeren Momente während des Kupplungsvorgangs wirken, gilt der Drallerhaltungssatz. Vor dem Kuppeln hat nur die Welle II einen Drehimpuls (Drall) und nach dem Kuppeln das Gesamtsystem, das sich dann mit der Drehzahl n dreht, so dass gilt:

$$J_{II} \omega_{II} = (J_I + J_{II}) \omega \quad \Rightarrow \quad J_{II} 2\pi n_{II} = (J_I + J_{II}) 2\pi n .$$

Diese Beziehung wird nach n aufgelöst und dabei beachtet, dass sich J_{II} aus den Massenträgheitsmomenten von Welle mit Kupplung J_{W+K} und dem Schwungrad J_S zusammensetzt und $J_I = J_{W+K}$ gilt:

$$n = \frac{J_{II}}{J_I + J_{II}} n_{II} = \frac{J_{W+K} + J_S}{2J_{W+K} + J_S} n_{II} = \frac{1 + \frac{J_S}{J_{W+K}}}{2 + \frac{J_S}{J_{W+K}}} n_{II} .$$

Die Größe der Drehzahl nach dem Kuppeln hängt wesentlich vom Massenträgheitsmoment des Schwungrades ab. Ohne Schwungrad würde sich die Drehzahl wegen der Gleichheit beider Wellen halbieren. Mit den gegebenen Abmessungen berechnet man

$$J_{W+K} = 1,197 \text{ kgm}^2 ; \quad J_S = 238 \text{ kgm}^2 ; \quad n = 796 \text{ min}^{-1} .$$

Der Energieverlust ist die Differenz der kinetischen Energien im System vor bzw. nach dem Kuppeln, so dass für den prozentualen Verlust p_V gilt:

$$\begin{aligned} p_V &= \frac{\frac{1}{2} J_{II} (2\pi n_{II})^2 - \frac{1}{2} (J_I + J_{II}) (2\pi n)^2}{\frac{1}{2} J_{II} (2\pi n_{II})^2} 100\% = \left(1 - \frac{J_I + J_{II}}{J_{II}} \frac{n^2}{n_{II}^2} \right) 100\% \\ &= \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I + J_{II}} \right) 100\% = \frac{J_I}{J_I + J_{II}} 100\% = \frac{1}{2 + \frac{J_S}{J_{W+K}}} 100\% \approx 0,5\% . \end{aligned}$$

- ⇒ Die Kupplungskraft F , Einzelheiten des Kupplungsvorgangs und die Bauart der Kupplung (z. B.: Reibscheiben, ruckartiges oder sanftes Kuppeln) gehen in die Berechnung nicht ein, wirken sich weder auf die Drehzahl noch auf den Energieverlust aus. Natürlich haben sie auf die Kupplungszeit und die Beanspruchung der Kupplungselemente einen großen Einfluss. Dies ist typisch: Mit dem Drallerhaltungssatz, dem Impulserhaltungssatz und dem Energiesatz können Aussagen zu Bewegungszuständen gefunden werden, ohne die Übergangsphase analysieren zu müssen.

30.2 Stoß

Als *Stoß* wird das Aufeinandertreffen zweier Körper bezeichnet, wobei sich eine Bewegungsänderung ergibt. Die nachfolgend behandelte Theorie basiert auf folgenden Annahmen:

- Die Dauer t_S des Stoßvorgangs und die Deformationen der Körper sind so klein, dass die Lageänderung der Körper während des Stoßvorgangs nicht berücksichtigt werden muss. Die Bewegungen dürfen nach der Theorie der starren Körper analysiert werden.
- Die Kräfte an der Stoßstelle sind so groß, dass dagegen die Wirkungen aller übrigen auf die Körper wirkenden Kräfte während des Stoßvorgangs vernachlässigt werden dürfen.

Der Berührungsrand der am Stoß beteiligten Körper wird *Stoßpunkt* genannt, die durch den Stoßpunkt gehende Gerade senkrecht zur Berührungsfläche (Tangentialebene beider Körper) heißt *Stoßnormale* (**Abbildung 30.2**).

Liegen die Geschwindigkeiten der Stoßpunkte der beiden Massen unmittelbar vor dem Stoß in Richtung der Stoßnormalen, so ist es ein *gerader Stoß*, anderenfalls ein *schiefer Stoß*. Wenn die Schwerpunkte der beiden Massen auf der Stoßnormalen liegen, spricht man von einem *zentrischen Stoß*, anderenfalls von einem *exzentrischen Stoß*.

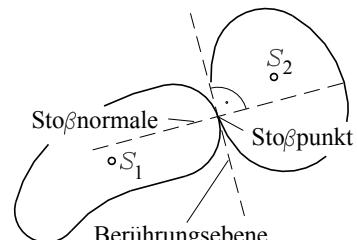


Abbildung 30.2: Definitionen

30.2.1 Der gerade zentrische Stoß

Die beiden Massen m_1 und m_2 haben vor dem Stoß die Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 ($v_1 > v_2$), nach dem Stoß die Geschwindigkeiten \bar{v}_1 bzw. \bar{v}_2 (**Abbildung 30.3**). Da äußere Kräfte vernachlässigt werden dürfen und die Kräfte an der Stoßstelle für das Massensystem innere Kräfte sind, gilt immer der Impulserhaltungssatz:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 \quad . \quad (30.12)$$

Diese Gleichung enthält bei bekannten Massen und bekannten Geschwindigkeiten vor dem Stoß als Unbekannte die beiden Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stoß. Für zwei Sonderfälle lässt sich eine zweite Gleichung aufschreiben:

- ⇒ Beim *vollkommen plastischen Stoß* nimmt man an, dass die beiden Massen sich nach dem Stoß gemeinsam bewegen, und damit gilt: $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$.
- ⇒ Beim *vollkommen elastischen Stoß* wird angenommen, dass sich alle durch den Stoß hervorgerufenen Deformationen elastisch zurückbilden, so dass kein Energieverlust entsteht:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 \quad .$$

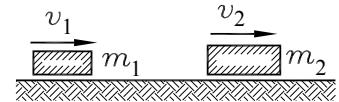


Abbildung 30.3: Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stoß

Für diese beiden Idealfälle können die Geschwindigkeiten \bar{v}_1 und \bar{v}_2 aus jeweils zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten errechnet werden. Man erhält folgende

Geschwindigkeiten der Massen nach idealisiertem geraden zentrischen Stoß:

Vollkommen plastisch: $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. (30.13)

Vollkommen elastisch: $\bar{v}_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$,
 $\bar{v}_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$. (30.14)

Für den interessanten Sonderfall gleicher Massen liefern diese Formeln mit $m_1 = m_2 = m$:

- ⇒ Beim *vollkommen plastischen Stoß gleicher Massen* bewegen sich diese danach mit dem arithmetischen Mittel ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stoß:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) .$$

- ⇒ Beim *vollkommen elastischen Stoß gleicher Massen* tauschen diese ihre Geschwindigkeiten aus:

$$\bar{v}_1 = v_2 , \quad \bar{v}_2 = v_1 .$$

Der vollkommen plastische und der vollkommen elastische Stoß sind die Grenzzustände des realen Stoßvorgangs. Um diesen zu untersuchen, muss der Impulssatz für beide Massen gesondert formuliert werden. Dabei ist zu beachten, dass dann die zwischen den Massen wirkende Stoßkraft $F(t)$ für die einzelne Masse jeweils zur äußeren Kraft wird (**Abbildung 30.4**).

Das Erfassen des realen Ablaufs eines Stoßes ist sehr schwierig. Deshalb basieren die weiteren Überlegungen auf folgender Hypothese über den Stoßvorgang: Während einer Kompressionsperiode ($0 \leq t \leq t_K$) baut sich die Kraft $F(t)$ von Null bis zu ihrem Maximalwert auf. Zum Zeitpunkt t_K bewegen sich die Massen mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v_K . In der so genannten Restitutionsperiode ($t_K \leq t \leq t_S$) geht die Kraft $F(t)$ auf den Wert Null zurück. Zum Zeitpunkt t_S ist der Stoßvorgang beendet. Auf der Basis dieser Annahmen werden für beide Massen jeweils der Impulssatz 28.25 für die Kompressionsphase formuliert:

$$m_1 (v_K - v_1) = - \int_{t=0}^{t_K} F(t) dt = -f_K , \quad m_2 (v_K - v_2) = \int_{t=0}^{t_K} F(t) dt = f_K .$$

Für die Restitutionsphase lauten die Impulssätze für die beiden Massen:

$$m_1 (\bar{v}_1 - v_K) = - \int_{t=t_K}^{t_S} F(t) dt = -f_R , \quad m_2 (\bar{v}_2 - v_K) = \int_{t=t_K}^{t_S} F(t) dt = f_R .$$

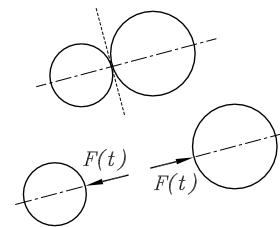


Abbildung 30.4: Stoßkraft $F(t)$ wird zur äußeren Kraft

Das Verhältnis der Kraftstöße in beiden Stoßperioden wird als *Stoßzahl* k definiert.

$$k = \frac{f_R}{f_K} \quad (30.15)$$

Die Stoßzahl k kann experimentell ermittelt werden und wird für die weiteren Betrachtungen als bekannt vorausgesetzt. Damit stehen für fünf Unbekannte (\bar{v}_1 , \bar{v}_2 , v_K , f_K , und f_R) fünf Gleichungen zur Verfügung, die vier Impulssätze für Kompressions- und Restitionsphase beider Massen und 30.15. Wenn v_K , f_K und f_R eliminiert werden, verbleiben die beiden

Gleichungen für den geraden zentrischen Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 \quad , \quad k = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{v_2 - v_1} \quad . \quad (30.16)$$

- ⇒ Es ist ein positiver Richtungssinn zu definieren, der dann für alle vier Geschwindigkeiten in den Formeln 30.16 gilt.
- ⇒ Die erste Gleichung 30.16 ist der Impulserhaltungssatz, die zweite kann als Definitionsgleichung für die Stoßzahl k angesehen werden. Diese nimmt Werte im Bereich

$$0 \leq k \leq 1$$

an. Mit den Grenzwerten für k sind die beiden Idealfälle des Stoßvorgangs in den allgemeinen Gleichungen 30.16 enthalten:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2 && \text{(vollkommen plastisch)} \\ k = 1 &\Rightarrow \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = v_2 - v_1 && \text{(vollkommen elastisch)} \end{aligned}$$

Während der Gesamtimpuls bei einem Stoßvorgang erhalten bleibt, ergibt sich (mit Ausnahme des vollkommen elastischen Stoßes) ein *Energieverlust* (exakter: Verlust an kinetischer Energie). Aus der Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß

$$\Delta T_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 - \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2$$

ergibt sich mit \bar{v}_1 und \bar{v}_2 aus 30.16 nach etwas mühsamer Umformung die Formel für den

Energieverlust beim geraden zentrischen Stoß:

$$\Delta T_{kin} = \frac{1}{2} (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad . \quad (30.17)$$

Beispiel 1:

Zur Ermittlung der Stoßzahl wird ein so genannter *Rücksprungversuch* ausgeführt: Eine Masse m_1 wird in der Höhe H fallengelassen und trifft auf eine ruhende sehr große Masse m_2 . Die von m_1 erreichte Rücksprunghöhe h wird gemessen. Unter der Voraussetzung, dass die Versuchsbedingungen die Vernachlässigung des Luftwiderstands gestatten und die Masse m_2 als sehr groß gegenüber m_1 angesehen werden darf ($m_2 \rightarrow \infty$), kann die Stoßzahl k berechnet werden.

Aus dem Impulssatz folgt (nach Division durch m_2) mit $m_2 \rightarrow \infty$ und $v_2 = 0$ (Geschwindigkeit vor dem Stoß), dass m_2 auch nach dem Stoß in Ruhe ist ($\bar{v}_2 = 0$). Die Auftreffgeschwindigkeit (Geschwindigkeit vor dem Stoß) der Masse m_1 folgt aus dem Energiesatz

$$m_1 g H = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gH} \quad ,$$

ebenso die Geschwindigkeit nach dem Stoß mit der gemessenen Rücksprunghöhe h :

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_1^2 = m_1 g h \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_1 = -\sqrt{2gh} .$$

Das negative Vorzeichen für \bar{v}_1 muss gewählt werden, weil Auf treff- und Rücksprunggeschwindigkeit unterschiedliche Richtungen haben. Die Stoßzahl errechnet sich nach 30.16:

$$k = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{v_2 - v_1} = \frac{-\sqrt{2gh} - 0}{0 - \sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}} .$$

- ⇒ Die Stoßzahl k darf nicht als Materialkonstante angesehen werden. Neben den Materialeigenschaften beider am Stoß beteiligter Körper ist sie von zahlreichen anderen Einflüssen (Körperformen, Aufprallgeschwindigkeiten, umgebendes Medium) abhängig, so dass für genauere Untersuchungen spezielle Versuche (möglichst realitätsnah) zur Ermittlung von k erforderlich sind.

Beispiel 2:

Ein Fahrzeug mit der Masse $m_1 = 1200\text{kg}$ fährt auf ein stehendes Fahrzeug (Masse $m_2 = 1000\text{kg}$) auf, das mit blockierten Rädern dadurch um die Strecke $s_2 = 16\text{m}$ verschoben wird. Wie groß war die Auffahrgeschwindigkeit v_1 , wenn die Stoßzahl $k = 0,15$ und ein Gleitreibungskoeffizient zwischen Fahrzeug und Straße von $\mu = 0,5$ angenommen werden dürfen?

Der Energiesatz für die Bewegung von m_2 nach dem Stoß (Abbildung 30.5, untere Skizze) liefert die Geschwindigkeit \bar{v}_2 , die dieses Fahrzeug unmittelbar nach dem Stoß hat:

$$\frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 - \mu m_2 g s_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_2 = \sqrt{2\mu g s_2} .$$

Für den Stoß gelten die Gleichungen 30.16:

$$m_1 v_1 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 , \quad k = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{-v_1} .$$

Nach Elimination der nicht interessierenden Unbekannten \bar{v}_1 (Geschwindigkeit von m_1 unmittelbar nach dem Stoß) verbleibt eine Gleichung für v_1 :

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1(1+k)} \bar{v}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1(1+k)} \sqrt{2\mu g s_2} = 19,97\text{m/s} = 71,9\text{km/h} .$$

Beispiel 3:

Für verschiedene technologische Verfahren (Hämmern, Schmieden, Rammen, ...), bei denen ein Werkzeug (Masse m_1) mit der Geschwindigkeit v_1 auf ein ruhendes Werkstück (Masse m_2) stößt, ist der mit 30.17 zu berechnende „relative Energieverlust“ $\bar{\varphi} = \frac{\Delta T_{kin}}{T_{kin}}$ ein Maß für die Effektivität des Verfahrens ($T_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ist die kinetische Energie des Werkzeugs m_1 unmittelbar vor dem Stoß, der Querstrich bei $\bar{\varphi}$ soll Verwechslungen mit dem in der Umformtechnik anders definierten *Umformgrad* φ vorbeugen). Mit $v_2 = 0$ in 30.17 errechnet man:

$$\bar{\varphi} = \frac{\Delta T_{kin}}{T_1} = (1-k^2) \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1-k^2}{\frac{m_1}{m_2}+1} .$$

Bemerkenswert ist, dass die Geschwindigkeit des Werkzeugs v_1 in das Ergebnis nicht eingeht. Wenn große Werte für $\bar{\varphi}$ gewünscht sind (z. B. beim Schmieden), sollte das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ klein

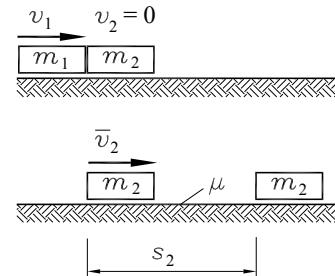


Abbildung 30.5: Bewegung der Masse m_2 nach dem Stoß

sein (da der Hammer des Schmieds nicht beliebig klein sein kann und das Werkstück vorgegeben ist, muss m_2 durch einen schweren Amboss „künstlich vergrößert“ werden). Dagegen ist die Verwendung eines leichten Hammers der sicherste Weg, den Nagel, der eingeschlagen werden soll, zu verbiegen. Die Tatsache, dass es Menschen gibt, die mit jedem Hammer jeden Nagel krumm schlagen, widerspricht dieser Aussage nicht.

30.2.2 Der schiefe zentrische Stoß

Bei der Behandlung des schiefen zentrischen Stoßes (Schwerpunkte liegen auf der Stoßnormalen, Geschwindigkeiten vor dem Stoß haben jedoch beliebige Richtungen) wird vorausgesetzt, dass die Oberflächen am Stoßpunkt glatt sind, so dass die Stoßkraft nur in Richtung der Stoßnormalen übertragen werden kann. Die x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems wird so gelegt, dass sie mit der Stoßnormalen zusammenfällt (**Abbildung 30.6**), die Geschwindigkeiten werden jeweils in zwei Komponenten in Richtung der Koordinaten zerlegt.

In x -Richtung dürfen wieder die Beziehungen des geraden zentrischen Stoßes aufgeschrieben werden. Da keine Kraftkomponente in y -Richtung übertragen wird, gilt für jede Masse der Impulserhaltungssatz für die Impuls-Komponenten in y -Richtung:

$$m_1 \bar{v}_{1,y} - m_1 v_{1,y} = 0 \quad , \quad m_2 \bar{v}_{2,y} - m_2 v_{2,y} = 0 \quad .$$

Zusammen mit [30.16](#) hat man damit die vier erforderlichen

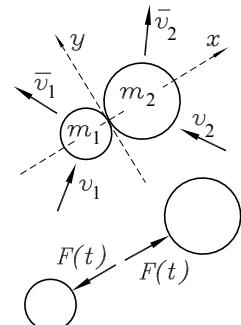


Abbildung 30.6: Stoßkraft hat die Richtung der Stoßnormalen, auf der beide Schwerpunkte liegen

Gleichungen für den schießen zentrischen Stoß:

$$m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x} = m_1 \bar{v}_{1,x} + m_2 \bar{v}_{2,x} \quad , \quad k = \frac{\bar{v}_{1,x} - \bar{v}_{2,x}}{v_{2,x} - v_{1,x}} \quad , \quad (30.18)$$

$$\bar{v}_{1,y} = v_{1,y} \quad , \quad \bar{v}_{2,y} = v_{2,y} \quad .$$

Der *schiefe Stoß gegen eine starre glatte Wand* ist als wichtiger Sonderfall in [30.18](#) enthalten. Mit $v_2 = 0$ und $m_2 \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$\bar{v}_y = v_y \quad , \quad \bar{v}_x = -k v_x \quad (30.19)$$

(Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Stoßnormalen bleibt konstant, Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Stoßnormalen wird mit dem Faktor k reduziert und ändert ihre Richtung). Außerdem entnimmt man der **Abbildung 30.7**:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad , \quad \tan \bar{\alpha} = -\frac{\bar{v}_y}{\bar{v}_x} \quad ,$$

und damit errechnen sich $\bar{\alpha}$ und \bar{v} aus:

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{1}{k} \tan \alpha \quad , \quad \bar{v} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} \quad . \quad (30.20)$$

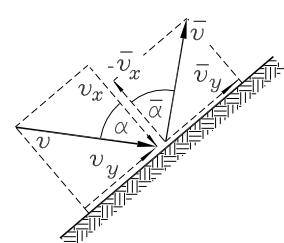


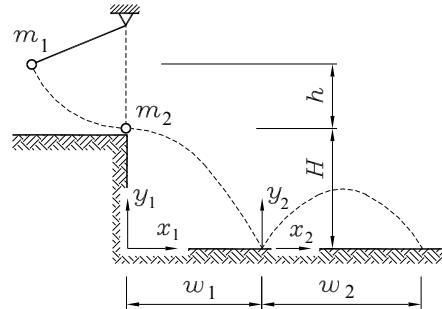
Abbildung 30.7: Stoß gegen eine starre glatte Wand

Beispiel:

Ein an einem Faden hängender Massenpunkt m_1 wird ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen und stößt auf einen ruhenden Massenpunkt m_2 (Stoßzahl k_1). Die Bewegungen beider Massenpunkte nach dem Stoß sollen analysiert werden (k_2 ist die Stoßzahl für den Aufprall der Masse m_2 auf den starren Untergrund).

Gegeben: $h = 50 \text{ cm}$; $k_1 = 0,6$;

$$H = 30 \text{ cm} ; k_2 = 0,5 ; \frac{m_2}{m_1} = 3 .$$



Die Geschwindigkeit v_1 der Masse m_1 vor dem Stoß ergibt sich aus dem Energiesatz:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh} .$$

Aus den Formeln für den geraden zentrischen Stoß 30.16 werden die Geschwindigkeiten beider Massen nach dem Stoß ermittelt:

$$\bar{v}_1 = \frac{1 - k_1 \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 = -\frac{v_1}{5} = -\frac{1}{5} \sqrt{2gh} , \quad \bar{v}_2 = k_1 v_1 + \bar{v}_1 = \frac{2}{5} v_1 = \frac{2}{5} \sqrt{2gh} .$$

Dies sind die Anfangsgeschwindigkeiten der Bewegungen beider Massen nach dem Stoß. Die Masse m_1 pendelt nach links zurück (\bar{v}_1 ist negativ), und die Masse m_2 führt eine Wurfbewegung aus. Diese wird mit den Gleichungen, die das Beispiel auf Seite 516 lieferte, mit $\alpha = 0$ (horizontale Abwurfgeschwindigkeit) im x_1 - y_1 -Koordinatensystem beschrieben:

$$x_1 = \bar{v}_2 t , \quad y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + H \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{g}{2 \bar{v}_2^2} x_1^2 + H , \\ \dot{x}_1 = \bar{v}_2 , \quad \dot{y}_1 = -gt .$$

Die Wurfweite w_1 ergibt sich mit $y_1 = 0$ für den Auftreffpunkt:

$$w_1 = \sqrt{2 \bar{v}_2^2 \frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{16}{25} h H} = \frac{4}{5} \sqrt{hH} = 30,98 \text{ cm} .$$

Die Geschwindigkeitskomponenten am Auftreffpunkt berechnen sich entsprechend:

$$v_x^* = \bar{v}_2 = \frac{2}{5} \sqrt{2gh} , \quad t^* = \sqrt{2 \frac{H}{g}} \quad \Rightarrow \quad v_y^* = \dot{y}_1(t^*) = -\sqrt{2gh} .$$

Nach 30.19 ergeben sich daraus die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit der zweiten Wurfbewegung:

$$\bar{v}_x^* = v_x^* = \frac{2}{5} \sqrt{2gh} , \quad \bar{v}_y^* = -k_2 v_y^* = \frac{1}{2} \sqrt{2gH} .$$

Damit kann das Bewegungsgesetz der zweiten Wurfbewegung aufgeschrieben werden:

$$x_2 = \bar{v}_x^* t , \quad y_2 = \bar{v}_y^* t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{\bar{v}_y^*}{\bar{v}_x^*} \left(x_2 - \frac{1}{2} \frac{g}{\bar{v}_x^* \bar{v}_y^*} x_2^2 \right) .$$

Daraus errechnet sich z. B. die Wurfweite w_2 :

$$w_2 = x_2(y_2 = 0) = \frac{4}{5} \sqrt{hH} = 30,98 \text{ cm} .$$

30.2.3 Der exzentrische Stoß

Da beim exzentrischen Stoß (vgl. die Definition am Anfang des Abschnitts 30.2) die Stoßnormale nicht durch die Schwerpunkte der beiden Massen verläuft, ergibt sich für mindestens einen der beiden Körper ein Moment der Stoßkraft bezüglich seines Schwerpunkts. Dadurch wird zusätzlich zur Translation noch eine Rotation hervorgerufen.

Im allgemeinen Fall bewegen sich die Massen vor dem Stoß mit v_1 bzw. v_2 (Translationsbewegungen der Schwerpunkte) und ω_1 bzw. ω_2 (Winkelgeschwindigkeiten der Rotationen). Nach dem Stoß werden die Bewegungen dann durch die Geschwindigkeiten \bar{v}_1 , \bar{v}_2 und die Winkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ beschrieben. Die Bestimmungsgleichungen für die zusätzlichen Unbekannten liefert der Drallsatz (bei rauen Oberflächen kommen gegebenenfalls auch kinematische Zwangsbedingungen hinzu).

Wie beim schießen zentrischen Stoß werden für die folgenden Untersuchungen glatte Oberflächen angenommen, es soll auch weiter die Definition der Stoßzahl

$$k = \frac{\bar{v}_{1,x} - \bar{v}_{2,x}}{v_{2,x} - v_{1,x}} \quad (30.21)$$

gelten (x ist die Richtung der Stoßnormalen): Zähler bzw. Nenner sind die Differenzen der Geschwindigkeitskomponenten des Stoßpunktes in Richtung der Stoßnormalen vor bzw. nach dem Stoß (Reihenfolge so, dass k positiv wird).

Im Regelfall müssen Drallsatz und Impulssatz auf jeden Körper einzeln angewendet werden, so dass die an der Stoßstelle übertragene Kraft in die Beziehungen eingeht (die zusätzliche Gleichung zur Elimination dieser zusätzlichen Unbekannten ist durch 30.21 gegeben). Nur im Ausnahmefall (nachfolgendes Beispiel 1) kann der Drallerhaltungssatz gemeinsam für beide Körper (mit Bezug auf einen gemeinsamen festen Punkt) aufgeschrieben werden, so dass die an der Stoßstelle übertragene Kraft als innere Kraft nicht in die Rechnung eingeht.

Besondere Bedeutung haben die Fälle, bei denen mindestens einer der beiden am Stoß beteiligten Körper (drehbar) gelagert ist. Dabei ist zu beachten, dass durch den Stoß auch in den Lagern Kräfte hervorgerufen werden, die nicht gegenüber den Kräften an der Stoßstelle vernachlässigt werden dürfen, weil sie in der gleichen Größenordnung wie diese sind.

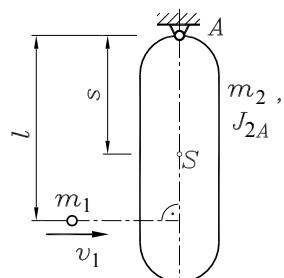
Beispiel 1:

Ein Massenpunkt m_1 stößt gegen einen bei A drehbar gelagerten Körper (Masse m_2 , Massenträgheitsmoment bezüglich des Punktes A : J_{2A}), der sich vor dem Stoß in Ruhe befand. Gesucht sind \bar{v}_1 und $\bar{\omega}_2$ unmittelbar nach dem Stoß.

Gegeben: m_1 , v_1 , m_2 , J_{2A} , l , s , k .

Da m_2 vor dem Stoß in Ruhe ist und nach dem Stoß eine reine Drehbewegung mit $\bar{\omega}_2$ ausführt (der Stoßpunkt bewegt sich dann mit der Bahngeschwindigkeit $\bar{v}_2 = \bar{\omega}_2 l$), gilt

$$k = \frac{\bar{v}_1 - \bar{\omega}_2 l}{-v_1} .$$



Als zweite Bestimmungsgleichung darf der Drallerhaltungssatz bezüglich des Punktes A aufgeschrieben werden (Gesamtdrall beider Massen vor bzw. nach dem Stoß):

$$m_1 v_1 l = m_1 \bar{v}_1 l + J_{2A} \bar{\omega}_2 .$$

Aus diesen beiden Gleichungen errechnet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1+k}{1+\frac{J_{2A}}{m_1 l^2}} \frac{v_1}{l} , \quad \bar{v}_1 = \frac{1-k \frac{J_{2A}}{m_1 l^2}}{1+\frac{J_{2A}}{m_1 l^2}} v_1 . \quad (30.22)$$

Die für viele Probleme in der technischen Praxis interessante Frage, unter welchen Bedingungen die infolge des Stoßes im Lager A hervorgerufene Kraft Null ist, kann mit folgender Überlegung beantwortet werden: Die Lagerkraft als für das Massensystem (einzig) äußere Kraft müsste beim Aufschreiben des Impulssatzes mit einem entsprechenden Integralausdruck berücksichtigt werden. Wenn sie Null wird, kann dieser Anteil entfallen, und **nur für diesen Fall darf der Impulserhaltungssatz verwendet werden:**

$$m_1 v_1 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 s .$$

Mit den bereits berechneten Werten für \bar{v}_1 und $\bar{\omega}_2$ ergibt sich daraus ein verallgemeinerungsfähiges Ergebnis. Es ist die

Lage des Stoßmittelpunktes:	$l^* = \frac{J_{2A}}{m_2 s} . \quad (30.23)$
------------------------------------	--

Der Stoßmittelpunkt liegt im Abstand l^* von der Wirkungslinie der Stoßkraft auf einer Senkrechten zur Wirkungslinie, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht. In 30.23 sind s der Abstand des Schwerpunkts vom Stoßmittelpunkt, J_{2A} das auf den Stoßmittelpunkt bezogene Massenträgheitsmoment, m_2 die Masse des Körpers.

- ⇒ Wenn im Beispiel 1 das Lager A in dem durch 30.23 gegebenen Abstand vom Stoßpunkt liegt, treten in ihm keine Kräfte infolge des Stoßes auf. Bei stoßartig belasteten Bauteilen (Schlagwerke, Typenhebel, ...) sollte diese einfache Art, Lagerbelastungen zu minimieren, unbedingt genutzt werden. Ein Schmied weiß gefühlsmäßig (im wahrsten Sinne des Wortes) sehr genau, wo der Stoßmittelpunkt seines Hammers ist.
- ⇒ Die hohe Geschwindigkeit einer kleinen Masse (Geschoss) kann mit einer Versuchsanordnung nach Beispiel 1 experimentell ermittelt werden. Der hängende Körper m_2 wird so gefertigt, dass m_1 eindringt und stecken bleibt (ideal plastischer Stoß). Man misst den maximalen Winkelausschlag φ_{max} der Masse m_2 . Ihr Schwerpunkt hebt sich also um $s(1 - \cos \varphi_{max})$, und man kann mit dem Energiesatz

$$\frac{1}{2} J_{2A} \bar{\omega}_2^2 = m g s (1 - \cos \varphi_{max})$$

$\bar{\omega}_2$ ermitteln. Damit ergibt sich aus 30.22 unter Beachtung von $k = 0$:

$$v_1 = \left(1 + \frac{J_{2A}}{m_1 l^2} \right) l \bar{\omega}_2 .$$

Das nachfolgende Beispiel behandelt den typischen Fall: Der Drallsatz muss für jeden Körper gesondert formuliert werden, weil unterschiedliche Bezugspunkte gewählt werden müssen. Dabei wird der Drallsatz 30.10 über die gesamte Stoßzeit t_S integriert (die unterschiedlichen Verhältnisse in Kompressions- und Restitutionsperiode, die auf die Definition der Stoßzahl führen, werden auch weiterhin über diese erfasst). Für das ebene Problem kann auf eine vektorielle Formulierung verzichtet werden:

$$\int_{t=0}^{t_S} M_0(t) dt = \bar{L}_0 - L_0 \quad (30.24)$$

(der Querstrich kennzeichnet den Wert des Dralls nach dem Stoß). M_0 ist das durch die Kraft an der Stoßstelle hervorgerufene Moment bezüglich des Bezugspunktes, wobei über die Stoßzeit t_S ein konstanter Hebelarm angenommen werden darf.

Beispiel 2:

Ein bei A drehbar gelagerter Körper 1 (Massenträgheitsmoment bezüglich A: J_{1A}) stößt mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 auf einen bei B drehbar gelagerten Körper 2 (Massenträgheitsmoment bezüglich B: J_{2B}), der sich vor dem Stoß in Ruhe befindet.

Gegeben: $\omega_1, J_{1A}, J_{2B}, l_1, l_2, k$.

Es sollen die Gleichungen aufgeschrieben werden, mit denen die Winkelgeschwindigkeiten beider Körper unmittelbar nach dem Stoß berechnet werden können.

Mit den Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Stoßnormalen $v_1 = l_1 \omega_1$ und $v_2 = 0$ vor dem Stoß und den Werten $\bar{v}_1 = l_1 \bar{\omega}_1$ bzw. $\bar{v}_2 = -l_2 \bar{\omega}_2$ nach dem Stoß (rechtsdrehende Winkelgeschwindigkeiten sollen für beide Körper positiv sein) gilt nach 30.21:

$$k = \frac{l_1 \bar{\omega}_1 + l_2 \bar{\omega}_2}{-l_1 \omega_1} .$$

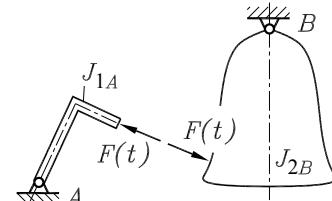
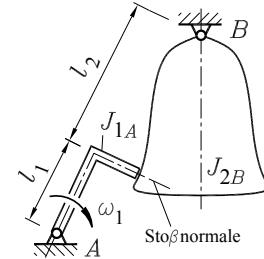


Abbildung 30.8: Stoßkraft $F(t)$

Für die beiden Körper werden Gleichungen nach 30.24 mit den Bezugspunkten A bzw. B formuliert, in die die Stoßkraft $F(t)$ eingeht (glatte Flächen, $F(t)$ in Stoßnormalen-Richtung):

$$\int_{t=0}^{t_S} M_A(t) dt = -l_1 \int_{t=0}^{t_S} F(t) dt = -l_1 f_S = J_{1A} \bar{\omega}_1 - J_{1A} \omega_1 ,$$

$$\int_{t=0}^{t_S} M_B(t) dt = -l_2 \int_{t=0}^{t_S} F(t) dt = -l_2 f_S = J_{2B} \bar{\omega}_2$$

(in beiden Gleichungen wurden rechtsdrehende Winkelgeschwindigkeiten und rechtsdrehende Momente positiv eingesetzt, diese Vereinbarung gilt dann auch für die Ergebnisse). Damit stehen insgesamt drei Gleichungen zur Verfügung, aus denen nach Elimination des Kraftstoßes f_S die beiden Winkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ berechnet werden können.

⇒ Natürlich könnte auch der Kraftstoß f_S berechnet werden. Mit dem Impulssatz (je zwei Gleichungen für die beiden Körper) könnten vier weitere Gleichungen formuliert werden, in die die vier Komponenten der von den Lagern aufzunehmenden Kraftstöße eingehen, so dass diese berechnet werden könnten. Allerdings sind damit **nicht die durch den Stoß hervorgerufenen Kräfte** bekannt, so dass diese Berechnung wenig praktischen Nutzen hat.

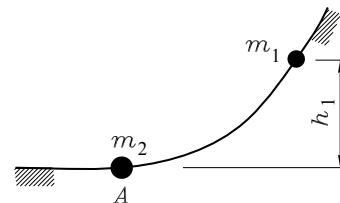
30.3 Aufgaben

Aufgabe 30.1:

Die Masse m_1 wird in der Höhe h_1 ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen, bewegt sich reibungsfrei und stößt bei A auf die ruhende Masse m_2 (Stoßzahl k).

Gegeben: $\frac{m_2}{m_1} = 4$; $k = 0,8$; h_1 .

Auf welche Höhe h_2 gleitet m_1 nach dem Stoß zurück, wie groß ist die Geschwindigkeit von m_2 unmittelbar nach dem Stoß?

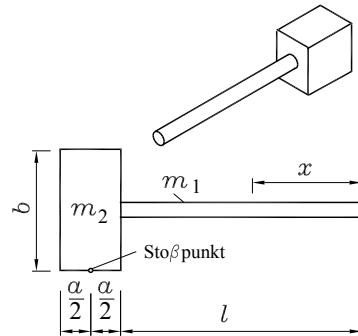


Aufgabe 30.2:

Der skizzierte Holzhammer besteht aus einem Quader und einem zylindrischen Griff, der als dünner Stab angesehen werden darf.

Gegeben: $m_1 = 170 \text{ g}$; $a = 8 \text{ cm}$; $m_2 = 720 \text{ g}$; $b = 14 \text{ cm}$; $l = 30 \text{ cm}$.

Wo muss man den Hammer anfassen (Stoßmittelpunkt), damit die Hand beim Schlag möglichst gering belastet wird?



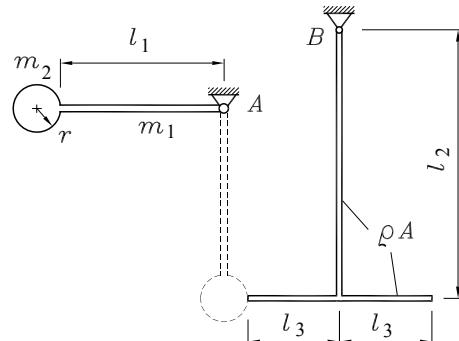
Aufgabe 30.3:

Ein Pendel 1 besteht aus einem dünnen Stab (Masse m_1) und einer Kreisscheibe (Masse m_2), das Pendel 2 aus zwei dünnen Stäben (Masseebelagung ρA). Pendel 1 wird aus der horizontalen Ruhelage freigegeben und stößt in seiner tiefsten Lage (Stoßzahl k) gegen Pendel 2.

Gegeben: $k = 0,5$; $l_1 = 5r$; $m_1 = m_2$; $l_2 = 8r$; $\rho A = \frac{m_1}{r}$; $l_3 = 3r$; $r = 0,1 \text{ m}$.

Man ermittle

- die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Pendels 1 unmittelbar vor dem Zusammenstoß,
- die Winkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ der Pendel 1 und 2 unmittelbar nach dem Stoß,
- den maximalen Pendelausschlag des Pendels 1 nach dem Stoß.



31 Schwingungen

Wenn sich bei einer Bewegung, die durch $x(t)$ beschrieben wird, die Bewegungsrichtung mehrmals ändert (Wechsel des Vorzeichens der Geschwindigkeit \dot{x}) und $x(t)$ mehrfach den gleichen Wert wieder annimmt, so spricht man von einer *Schwingung*.

Eine Bewegung, die sich regelmäßig nach einer Zeit T wiederholt, so dass

$$x(t+T) = x(t)$$

gilt (vgl. Beispiel auf Seite 530), wird *periodische Schwingung* genannt. Die für eine *Schwingungsperiode* benötigte Zeit T heißt *Schwingungsdauer*. Ihr reziproker Wert

$$f = \frac{1}{T} \quad (31.1)$$

ist die *Schwingungsfrequenz* und gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an. Die Frequenz wird mit der physikalischen Einheit Hz (Hertz) gemessen:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

31.1 Harmonische Schwingungen

Die Masse m in der Abbildung 31.1 ist durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten c gefestigt. Sie soll sich auf der Unterlage reibungsfrei bewegen können. Aus der statischen Ruhelage (Feder ist entspannt) wird sie um den Betrag x_0 nach rechts verschoben und dann losgelassen.

Nach dem Prinzip von d'Alembert wirken in horizontaler Richtung nur die d'Alembertsche Kraft der Masse m und die Rückstellkraft der Feder. Die Kraftgleichgewichtsbedingung in dieser Richtung liefert:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad . \quad (31.2)$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Lösung¹

$$x = A \cos \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t \right) \quad . \quad (31.3)$$

Die Integrationskonstanten A und B ergeben sich aus den Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = x_0 \quad , \quad B = 0 \quad .$$

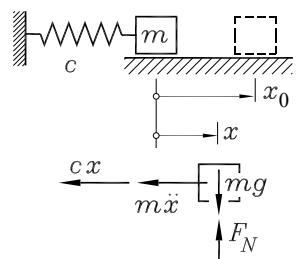


Abbildung 31.1: Einfaches Feder-Masse-System

¹Man überzeuge sich durch Einsetzen und/oder konsultiere das Thema „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ auf der Internet-Site *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de), siehe Hinweis auf Seite 314.

Damit ist das Bewegungsgesetz für die Masse m bekannt:

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}} t\right) . \quad (31.4)$$

Da die cos-Funktion die Extremwerte -1 und $+1$ annimmt, ist x_0 der jeweils größte (positive und negative) Wert, den x während einer Schwingungsperiode annimmt, die *Amplitude*. Besondere praktische Bedeutung hat das Argument der cos-Funktion: Weil diese Funktion periodisch mit 2π ist, entspricht die Zeit, die bis zum Erreichen dieses Werts vergeht, der *Schwingungsdauer* T einer Periode, und nach 31.1 ergibt sich die *Schwingungsfrequenz*:

$$\sqrt{\frac{c}{m}} T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} . \quad (31.5)$$

In der technischen Praxis ist es üblich, mechanische Schwingungen durch die Angabe der *Kreisfrequenz*

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (31.6)$$

zu charakterisieren, die sich von der Frequenz f nur durch den Faktor 2π unterscheidet. Der Begriff „Kreisfrequenz“ erklärt sich aus folgender Analogie: Ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn umlaufender Punkt hat dieselbe „Frequenz“ (Anzahl von Umläufen) wie ein Schwinger mit der entsprechenden Kreisfrequenz. Man beachte die Analogie der Zusammenhänge (vgl. Gleichung 26.21 im Abschnitt 26.2.3):

$$\begin{array}{ll} \omega = 2\pi f & \omega = 2\pi n \\ \text{Kreisfrequenz} \leftrightarrow \text{Frequenz} & \text{Winkelgeschwindigkeit} \leftrightarrow \text{Drehzahl} \end{array} \quad (31.7)$$

Schwingungen, die durch eine Differenzialgleichung

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (31.8)$$

beschrieben werden, nennt man *harmonische Schwingungen*. Ihr Bewegungsgesetz wird durch cos- bzw. sin-Funktionen beschrieben. Die allgemeine Lösung von 31.8 ist durch 31.3 gegeben, kann jedoch auch folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$x(t) = C \cos(\omega t - \alpha) . \quad (31.9)$$

Die Lösung 31.9 mit den Integrationskonstanten C und α ist wegen

$$C \cos(\omega t - \alpha) = C \cos \alpha \cos \omega t + C \sin \alpha \sin \omega t$$

mit 31.3 identisch. Für die Integrationskonstanten der beiden Lösungen gilt der Zusammenhang:

$$A = C \cos \alpha , \quad B = C \sin \alpha .$$

Daraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- ⇒ Die Anfangsbedingungen haben auf die Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung keinen Einfluss. Wenn der Masse im eingangs behandelten Beispiel neben der Anfangsauslenkung auch noch eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird, werden beide Integrationskonstanten in 31.3 ungleich Null. Die Überlagerung von cos- und sin-Funktion mit gleicher Kreisfrequenz

ω führt aber entsprechend 31.9 wieder auf eine harmonische Bewegung mit der gleichen Kreisfrequenz. Es ergibt sich allerdings eine vergrößerte Amplitude

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} .$$

- ⇒ Die Lösung 31.9 hat den Vorteil, dass beide Integrationskonstanten interpretierbar sind. C ist die Amplitude der Schwingung und die so genannte *Phasenverschiebung* α bestimmt den Zeitpunkt t_0 , zu dem die Schwingung erstmalig die Amplitude erreicht:

$$\cos(\omega t_0 - \alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{\alpha}{\omega} .$$

31.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

Ein schwingungsfähiges System, das nach einmaligem Anstoß (z. B.: Anfangsauslenkung oder Anfangsgeschwindigkeit) sich selbst überlassen wird (und keinen äußeren „Erregerkräften“ mehr ausgesetzt ist), führt eine *freie Schwingung (Eigenschwingung)* aus. Fließt während der Bewegung keine Energie ab, ist es eine *freie ungedämpfte Schwingung*.

Wenn bei einem *Schwinger mit einem Freiheitsgrad* (wie im Beispiel des vorigen Abschnitts) die Rückstellkraft linear von der Bewegungscoordinate abhängt, wird die freie ungedämpfte Schwingung immer durch eine Bewegungs-Differenzialgleichung der Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{31.10}$$

beschrieben, und der Schwinger führt eine harmonische Bewegung aus. Die Kreisfrequenz der Eigenschwingung wird *Eigenkreisfrequenz* genannt und ist bei linearen Schwingern, die durch eine Differenzialgleichung des Typs 31.10 beschrieben werden, von den Anfangsbedingungen unabhängig (die Beispiele 1 und 2 im Abschnitt 28.3.3 behandelten dagegen nichtlineare ungedämpfte freie Schwingungen, deren Frequenzen von den Anfangsbedingungen abhängig sind).

Wenn der tatsächliche Bewegungsverlauf einer linearen Schwingung nicht interessiert (bei den meisten Problemen der technischen Praxis ist dies der Fall), kann auf die Lösung der Differenzialgleichung 31.10 verzichtet werden, weil die wichtigste Kenngröße, die Eigenkreisfrequenz, direkt aus der Differenzialgleichung ablesbar ist.

Auch komplizierte Schwingungsprobleme können häufig mit ausreichender Genauigkeit durch 31.10 beschrieben werden, wenn eine Beschränkung auf *kleine Ausschläge* (Vermeiden „geometrischer Nichtlinearitäten“) gerechtfertigt ist und die schwingende Masse von der Federmasse getrennt werden kann. Die berechtigte Frage, was denn „kleine Ausschläge“ sind, kann zwar nicht generell beantwortet werden, zwei Hinweise aber sollen gegeben werden: Sehr viele Schwingungen in der technischen Praxis sind Vibratoren, die man zwar fühlen, aber mit bloßem Auge kaum wahrnehmen kann. Dafür ist die Annahme „kleiner Ausschläge“ gewiss gerechtfertigt. Die Aussage „Ausschläge sind klein, wenn sie auf lineare Differenzialgleichungen führen“ ist sicher nicht korrekt. Sie würde in diesem Buch deshalb auch nicht zu finden sein, wenn sie nicht doch ein wichtiger Hinweis auf ein pragmatisches Herangehen an komplizierte Probleme wäre.

31.2.1 Schwingungen mit kleinen Ausschlägen

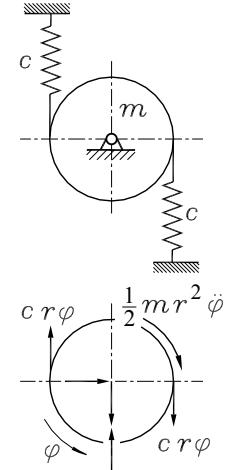
In diesem Abschnitt werden ausschließlich Beispiele demonstriert, die auf Differenzialgleichungen des Typs 31.10 führen. Man beachte besonders, welche Idealisierungen (kleine Ausschläge) getroffen werden müssen, damit sich diese linearen Differenzialgleichungen ergeben.

Beispiel 1:

Eine zylindrische Kreisscheibe ist im Schwerpunkt drehbar gelagert und durch zwei Federn am Rand gefesselt. Für kleine Ausschläge soll die Eigenkreisfrequenz der Drehschwingung ermittelt werden.

Gegeben: c, m .

An der freigeschnittenen Scheibe werden für die gewählte Koordinatenrichtung das d'Alembertsche Moment (reine Drehbewegung, Massenträgheitsmoment der zylindrischen Scheibe: $J_S = \frac{1}{2}mr^2$) und die Feder-Rückstell-Kräfte angetragen. Bei Voraussetzung kleiner Ausschläge dürfen die Federkräfte in Richtung der unbelasteten Feder (tangential an den Kreis) angetragen und ihre Verlängerung näherungsweise durch $r\varphi$ erfasst werden. Für große Winkel müsste die Schräglage der verformten Feder durch die genaue Erfassung der Geometrie berücksichtigt werden, was zu nichtlinearen Zusammenhängen führen würde.



Die Bewegungs-Differenzialgleichung ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht um den Lagerpunkt. Die Eigenkreisfrequenz der Schwingung kann direkt abgelesen werden:

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} + 2cr\varphi r = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{4c}{m}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}} .$$

⇒ Für das Aufschreiben der Bewegungsgleichung des freien ungedämpften Schwingers mit einem Freiheitsgrad (Beispiel 1) bietet sich auch der Energiesatz in der Form

$$U + T = \text{konstant} \quad (31.11)$$

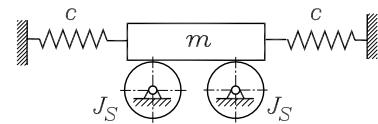
an. Potenzielle und kinetische Energie werden für die beliebige Lage (in Abhängigkeit von der Bewegungskoordinate) formuliert, und die Ableitung von 31.11 nach der Zeit (vgl. nachfolgendes Beispiel 2) führt auf die Bewegungs-Differenzialgleichung 31.10.

Beispiel 2:

Eine Zahnstange der Masse m ist auf zwei Zahnrädern mit dem Radius r (Massenträgheitsmomente J_S bezüglich der Drehpunkte) gelagert und durch zwei Federn gefesselt.

Die Eigenkreisfrequenz des Schwingungssystems (einfaches Modell eines Schwingsiebs) soll ermittelt werden.

Gegeben: $c, m, J_S = 3,5mr^2$.



Wenn für die Bewegung von m eine Koordinate x eingeführt wird und für die Drehung der Zahnräder jeweils eine Winkelkoordinate φ , so dass alle Koordinaten gleichzeitig positiv werden, gilt die Zwangsbedingung $x = r\varphi$. Beim Aufschreiben des Energiesatzes ist potenzielle Energie nur für die Federn zu berücksichtigen (alle Massen bleiben stets auf ihrer Ausgangshöhe):

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2\left(\frac{1}{2}J_S\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}cx^2\right) = \text{konst.} \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 3,5mr^2\frac{\dot{x}^2}{r^2} + cx^2 = \text{konst.}$$

Die Beziehung wird noch vereinfacht und dann nach der Zeit abgeleitet. Aus der Differenzialgleichung des Typs 31.10 kann die Eigenkreisfrequenz direkt abgelesen werden:

$$4m\dot{x}^2 + cx^2 = \text{konst.} \Rightarrow 8m\ddot{x}\dot{x} + 2cx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{4m}x = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}} .$$

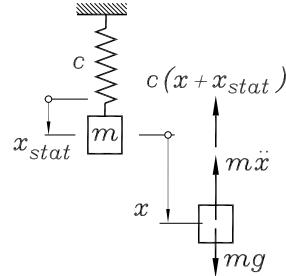
Beispiel 3:

An dem skizzierten einfachen Feder-Masse-Schwinger soll der Einfluss des Eigengewichts der Masse auf die Eigenkreisfrequenz untersucht werden.

Die Bewegungscoordinate x wird von der statischen Gleichgewichtslage aus gezählt, in der die Feder bereits vorgespannt ist. Die Skizze zeigt alle zu berücksichtigenden Kräfte in der beliebigen ausgelenkten Lage, und nach dem Prinzip von d'Alembert liefert die Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung:

$$m\ddot{x} + cx + cx_{\text{stat}} - mg = 0 .$$

Wegen $cx_{\text{stat}} = mg$ ergibt sich die gleiche Differenzialgleichung wie beim horizontalen Feder-Masse-Schwinger (Einführungsbeispiel im Abschnitt 31.1): $m\ddot{x} + cx = 0$.



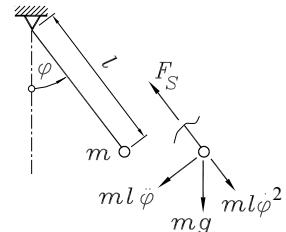
- ⇒ Die vertikal hängende Masse m schwingt mit der gleichen Eigenkreisfrequenz wie die reibungsfrei gelagerte horizontal schwingende Masse m . Diese exemplarisch gefundene Aussage darf wie folgt verallgemeinert werden: *Beim Aufstellen der Bewegungs-Differenzialgleichung kann die statische Vorspannung der Feder unberücksichtigt bleiben, wenn gleichzeitig die diese Vorspannung hervorrufende Kraft (hier: Eigengewicht der Masse m) nicht berücksichtigt wird und der Koordinatenursprung mit der statischen Ruhelage zusammenfällt.*

Das Eigengewicht kann selbstverständlich nicht aus der Rechnung herausgelassen werden, wenn es selbst zur Rückstellkraft beiträgt (Rückstellkräfte werden durchaus nicht immer durch Federn hervorgerufen, siehe nachfolgendes Beispiel 4).

Beispiel 4:

Beim so genannten *mathematischen Pendel* (Punktmasse am masselosen Faden) ist die in Bahnrichtung gerichtete Komponente des Eigengewichts die Rückstellkraft, und man erhält aus dem Kraftgleichgewicht in Bahnrichtung:

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0 \Rightarrow l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 .$$



Dies ist eine nichtlineare Differenzialgleichung, deren Lösung zwar einen periodischen Vorgang beschreibt, dessen Frequenz allerdings von den Anfangsbedingungen abhängt. Nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Pendelausschläge, für die $\sin \varphi \approx \varphi$ gesetzt werden darf, ergibt sich eine lineare Differenzialgleichung, aus der die Eigenkreisfrequenz abgelesen werden kann:

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

31.2.2 Elastische Systeme

Bei den elastischen Systemen, für die in den Kapiteln 14 bis 24 die Verformungsberechnungen behandelt wurden, ergab sich unter der Voraussetzung kleiner Verformungen stets ein linearer Zusammenhang zwischen den Belastungsgrößen (Kräfte und Momente) und den Verformungsgrößen (Verschiebungen und Verdrehwinkel).

Für die beiden einfachen elastischen Systeme der Abbildung 31.2 (Zugstab, Biegeträger) soll gezeigt werden, dass dieser Zusammenhang für einen ausgewählten belasteten Punkt in der Form des linearen Federgesetzes aufgeschrieben werden kann. Für den Zugstab ist die benötigte Formel mit 14.6 gegeben, für den Biegeträger entnimmt man sie der Tabelle auf Seite 260:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{EA}{l} \Delta l = c_S \Delta l \quad \text{mit} \quad c_S = \frac{EA}{l} ,$$

$$v_F = \frac{Fl^3}{48EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{48EI}{l^3} v_F = c_B v_F \quad \text{mit} \quad c_B = \frac{48EI}{l^3} .$$

⇒ Wenn sich an der Stelle, für die der Zusammenhang von Kraft und Verschiebung als Federgesetz formuliert wurde, eine Masse m befindet und das elastische System als masselos angesehen werden darf, kann das gesamte Feder-Masse-System durch das Modell des einfachen Schwingers aus dem Beispiel 3 im vorigen Abschnitt ersetzt werden, und die Eigenkreisfrequenz ergibt sich aus $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

Beispiel 1: Die skizzierte Biegefeder (konstante Dicke t , linear veränderliche Breite) trägt eine Masse m . Es soll die Eigenkreisfrequenz dieses Schwingungssystems ermittelt werden (Biegefeder ist masselos).

Gegeben: t , b , l , E , m .

Im Abschnitt 24.5 (Beispiel 2 auf Seite 436) wurde die Absenkung des Mittelpunktes des Trägers unter einer dort angreifenden Einzelkraft für ein beliebiges Breitenverhältnis β berechnet, für das hier $\beta = 2$ gesetzt werden muss. Die dort gefundene Formel wird als Federgesetz formuliert:

$$v_F = \frac{3Fl^3}{4Eb t^3} (-1 + 2 \ln 2) \quad \Rightarrow \quad F = 3,45 \frac{Eb t^3}{l^3} v_F = c_B v_F .$$

Die Eigenkreisfrequenz ist die des einfachen Feder-Masse-Schwingers:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_B}{m}} \quad \text{mit} \quad c_B = 3,45 \frac{Eb t^3}{l^3} .$$

⇒ Die Federkonstanten, die sich für den Kraft-Verschiebungs-Zusammenhang ergeben, haben die Dimension „Kraft/Länge“, der Zusammenhang von Torsionsmoment und Verdrehwinkel wird durch eine Drehfeder-Konstante mit der Dimension „Moment/Winkel“ beschrieben (folgendes Beispiel).

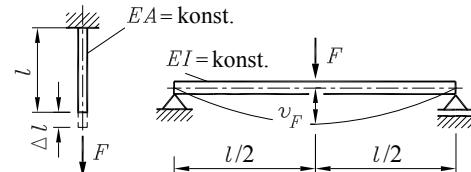
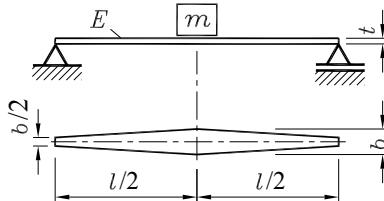


Abbildung 31.2: Elastische Bauteile als Federn

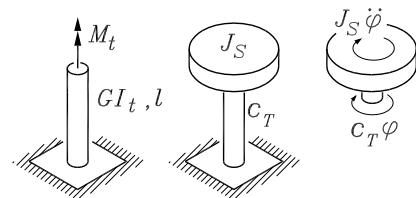


Beispiel 2:

Die Beziehung 21.13 (Seite 366), mit der der Verdrehwinkel infolge eines Torsionsmoments berechnet wird, liefert:

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_t} \quad \Rightarrow \quad M_t = \frac{G I_t}{l} \varphi = c_T \varphi$$

mit der Drehfeder-Konstanten $c_T = \frac{G I_t}{l}$. (31.12)



Für die Berechnung der Torsionsschwingungen einer Scheibe mit dem Massenträgheitsmoment J_S (bezüglich der vertikalen Achse) kann aus dem Momenten-Gleichgewicht des d'Alembertschen Moments mit dem Rückstellmoment der Drehfeder die Differenzialgleichung

$$J_S \ddot{\varphi} + c_T \varphi = 0$$

aufgeschrieben werden, die wieder vom Typ 31.10 ist, so dass unmittelbar die Eigenkreisfrequenz abzulesen ist:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_T}{J_S} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{c_T}{J_S}} .$$

⇒ Die im Abschnitt 10.1 behandelte Möglichkeit, mehrere lineare Federn zu einer äquivalenten Ersatzfeder zusammenzufassen, gestattet es, auch kompliziertere elastische Systeme durch den einfachen Feder-Masse-Schwinger zu simulieren (folgendes Beispiel).

Beispiel 3:

Eine Masse m ist wie skizziert über eine Feder (Federkonstante c) an einem elastischen Kreisbogenträger befestigt (κ ist der nach 19.17 auf der Seite 328 definierte Querschnittsparameter für den gekrümmten Träger). Es soll die Eigenkreisfrequenz der Vertikalschwingungen der Masse ermittelt werden (Feder und Kreisbogen sind masselos).

Gegeben: m , c , R , EA , κ .

Im Abschnitt 19.3.3 wurde als Beispiel auf der Seite 336 der mit einer Kraft $2F$ belastete Kreisbogenträger behandelt (Kraftangriffspunkt war der Punkt, an dem hier die Feder befestigt ist). Die dort ermittelte Kraft-Verformungs-Beziehung wird für $\varphi = 0$ (und F anstelle von $2F$) als Federgesetz formuliert:

$$v_F = \frac{FR}{2\kappa EA} \left(2 - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\pi} - \kappa \frac{\pi}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2\kappa EA}{\left(2 - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\pi} - \kappa \frac{\pi}{2} \right) R} v_F = c_B v_F .$$

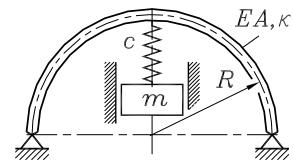


Abbildung 31.3: Reihenschaltung zweier Federn

Mit der so definierten Federkonstanten c_B wird der Kreisbogenträger durch eine Feder ersetzt, die mit der anderen Feder (Federkonstante c) „in Reihe geschaltet“ ist und mit dieser nach 10.3 zu einer Ersatzfeder (Federkonstante c_{ers}) zusammengefasst wird, so dass sich wieder das Modell des einfachen Feder-Masse-Schwingers (Beispiel 3 im vorigen Abschnitt) ergibt:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{ers}}{m}} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{c_{ers}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_B} \quad \text{und} \quad c_B = \frac{2\kappa EA}{\left(2 - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\pi} - \kappa \frac{\pi}{2} \right) R} .$$

- ⇒ Bei den bisher behandelten Beispielen wurden masselose Federn vorausgesetzt. Wenn die Bewegungs-Differenzialgleichung mit dem Energiesatz formuliert wird, kann häufig auf relativ einfache Weise die Wirkung der Federmasse wenigstens näherungsweise erfasst werden, indem sie bei der kinetischen Energie berücksichtigt wird. Die dabei zu treffende Näherungsannahme wird am nachfolgenden einfachen Beispiel demonstriert.

Beispiel 4: Die Eigenkreisfrequenz der Vertikalschwingung der Masse m soll bei genauerer Berücksichtigung der Masse m_B des Biegeträgers ermittelt werden.

Die Federkonstante ergibt sich aus dem Modell „Kragträger mit Einzelkraft am freien Ende“ (Fall e im Abschnitt 17.4 auf Seite 261):

$$\nu_F = \frac{F l^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3EI}{l^3} \nu_F = c_B \nu_F \quad .$$

Die Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit \dot{x} . Es wird angenommen, dass sich das Massenteilchen des Trägers $dm = m_B \frac{dz}{l}$ an der Stelle z mit einer Geschwindigkeit \dot{x}^* bewegt, die sich zu \dot{x} verhält wie die statische Durchbiegung $v(z)$ (infolge F) zur statischen Durchbiegung ν_F .

Die statische Biegelinie $v(z)$ wird ebenfalls der Zusammenstellung auf Seite 261 entnommen, und man kann mit

$$\dot{x}^* = \frac{v(z)}{\nu_F} \dot{x} = \frac{\dot{x}}{2} \left[2 - 3 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]$$

die kinetische Energie aufschreiben:

$$T_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int_{z=0}^l \dot{x}^{*2} dm = \frac{\dot{x}^2}{2} \left\{ m + m_B \int_{z=0}^l \frac{1}{4l} \left[2 - 3 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]^2 dz \right\} \quad .$$

Das Integral

$$\int_{z=0}^l \frac{1}{4l} \left[2 - 3 \frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]^2 dz = \frac{33}{140}$$

liefert den Faktor, mit dem aus der Masse m_B des Biegeträgers der für die Schwingung zu berücksichtigende Anteil \bar{m}_B berechnet wird, und das Gesamtsystem darf wieder durch den einfachen Feder-Masse-Schwinger ersetzt werden:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_B}{m + \bar{m}_B}} \quad \text{mit} \quad c_B = \frac{3EI}{l^3} \quad \text{und} \quad \bar{m}_B = \frac{33}{140} m_B \quad .$$

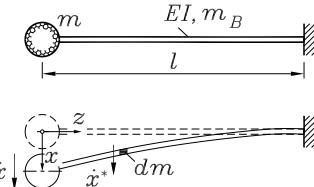


Abbildung 31.4: Masse der Biegefeder wird näherungsweise berücksichtigt

- ⇒ Die mit dem Beispiel 4 demonstrierte Erfassung der Federmasse ist eine (im Allgemeinen recht gute) Näherung. Für Federn, deren Massenteilchen in Feder-Längsrichtung schwingen (Stab, Schraubenfeder) darf eine lineare Geschwindigkeitsverteilung angenommen werden, die auf $\frac{1}{3} m_C$ als zusätzlich zu berücksichtigende Masse führt (m_C ist die Federmasse).

31.2.3 Nichtlineare Schwingungen

Wenn die Bewegungs-Differenzialgleichung nichtlinear ist, kann sie bis auf wenige Ausnahmen nur numerisch gelöst werden (zahlreiche Beispiele hierzu unter www.TM-aktuell.de). Dies kann fast immer nur die Analyse eines ganz speziellen Bewegungsvorgangs sein, weil im Gegensatz zu den linearen Problemen auch bei freien ungedämpften Schwingungen die Bewegungsabläufe (und damit die Eigenfrequenzen) von den Anfangsbedingungen abhängig sind. Dies soll an einem (bereits im Abschnitt 28.3.3 behandelten) relativ einfachen Beispiel verdeutlicht werden.



Beispiel:

Die Masse m kann auf der vertikalen Führung reibungsfrei gleiten, so dass nach einmaliger Auslenkung eine freie ungedämpfte Schwingung mit konstanter Amplitude entsteht. Die Aufgabe wurde im Abschnitt 28.3.3 für verschiedenen Anfangsauslenkungen gelöst. Die Diagramme auf Seite 531 zeigen, dass sich in jedem Fall eine freie ungedämpfte Schwingung ergibt, allerdings mit stark unterschiedlichen Formen und Zeiten, die für eine volle Schwingung benötigt werden (Schwingungsdauer).

Hier wird die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von der Anfangsauslenkung $\frac{x_0}{a}$ für die bereits im Abschnitt 28.3.3 benutzten Parameter $\frac{ca}{mg} = 1$, $\frac{b}{a} = 4$ und $\frac{g}{a} = 9,81 \text{ s}^{-2}$ berechnet (b ist die Länge der entspannten Feder).

Die nichtlineare Differenzialgleichung, die den Bewegungsvorgang beschreibt (siehe Seite 530) muss für jede Anfangsauslenkung $\frac{x_0}{a}$ gesondert numerisch integriert werden. Die Rechnung kann abgebrochen werden, wenn die Masse wieder die Ausgangslage erreicht hat. Die bis dahin vergangene Zeit ist die Schwingungsdauer T für die spezielle Anfangsauslenkung.

Das Diagramm in Abbildung 31.5 zeigt die Funktion $T(\frac{x_0}{a})$, in dem einige markante Punkte auffallen. Mit den Verfahren, die im Kapitel 10 behandelt wurden, kann man nachweisen, dass für die Masse drei statische Gleichgewichtslagen existieren (bei $\frac{x_0}{a} = -2,76; -0,362; 4,92$), von denen eine instabil ist ($\frac{x_0}{a} = -0,362$). Bei kleinen Anfangsauslenkungen aus einer stabilen Gleichgewichtslage schwingt die Masse mit einer Schwingungsdauer, die sich mit der Größe der Auslenkung nur unwesentlich ändert.

Eine besondere Rolle spielt die instabile statische Gleichgewichtslage, um die keine Schwingung möglich ist. Bei Anfangsauslenkungen mit $\frac{x_0}{a} \approx -0,362$ entstehen bei nur geringen Abweichungen völlig unterschiedliche Bewegungen. Gleichermaßen gilt für die beiden Punkte bei $\frac{x_0}{a} = -4,49$ und $\frac{x_0}{a} = 9,22$: Kleine Abweichungen von diesen Anfangsauslenkungen nach oben bzw. unten führen zu völlig anderen Bewegungsgesetzen, abhängig davon, ob sich die Masse bei $\frac{x_0}{a} \approx -0,362$ „vorbeidrägneln“ kann oder nicht.

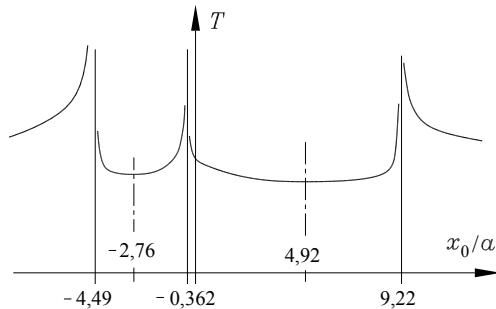
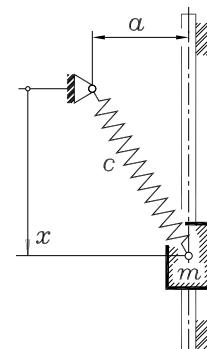


Abbildung 31.5: Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Anfangsauslenkung

31.3 Freie gedämpfte Schwingungen

Der Idealfall der ungedämpften Schwingung ist praktisch kaum realisierbar. Reibungswiderstände und Dämpfungskräfte (teilweise beabsichtigt, z. B.: Stoßdämpfer) sorgen dafür, dass die Amplituden einer freien Schwingung mit der Zeit kleiner werden. Hier soll nur der Spezialfall geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung untersucht werden, bei dem die Widerstandskraft, die der Dämpfer der Bewegung entgegengesetzt, nach 28.4 in der Form $F_W = -kv$ mit einer *Dämpfungskonstanten* k anzusetzen ist (zur Übereinstimmung dieser Annahme mit dem Verhalten realer Dämpfer beachte man die Bemerkung dazu auf der Seite 519).

Die Abbildung 31.6 zeigt den einfachen Schwinger aus Masse, Feder und Dämpfungselement und die freigeschnittene Masse mit d'Alembertscher Kraft, Federkraft und Bewegungswiderstand. Die Koordinate x zählt von der statischen Ruhelage aus (Eigengewicht wurde deshalb nicht angetragen, vgl. Beispiel 3 auf Seite 615).

Das Kräfte-Gleichgewicht in vertikaler Richtung liefert mit

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \quad (31.13)$$

eine lineare homogene Differentialgleichung (vgl. Lösung unter www.TM-aktuell.de), die sich in entsprechender Form auch bei komplizierteren Systemen ergibt, wenn die Masse konstant ist, die Dämpfung linear von der Geschwindigkeit und die Rückstellkräfte linear vom Weg abhängig sind.

Im Folgenden wird die Dämpfungskonstante k durch eine dimensionslose Größe, das so genannte

$$\text{Lehrsche Dämpfungsmaß} \quad D = \frac{k}{2\sqrt{mc}} \quad (31.14)$$



ersetzt (nach ERNST LEHR, 1896 - 1945). Damit geht 31.13 über in

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad , \quad (31.15)$$

wobei die Abkürzung ω für die **Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung** entsprechend 31.6 steht. 31.15 ist wieder eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung aber im Gegensatz zur Lösung von 31.10 in Abhängigkeit von den Parametern ganz unterschiedliche Bewegungen beschreiben kann.

Mit dem Exponentialansatz $x = Ce^{\lambda t}$ liefert 31.15 eine charakteristische Gleichung, deren Lösungen reell oder komplex sein können:

$$\lambda^2 + 2D\omega\lambda + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \omega \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right) \quad . \quad (31.16)$$

⇒ Für $D > 1$ (*starke Dämpfung*, zwei unterschiedliche reelle Lösungen für λ) kann die Lösung der Differentialgleichung 31.15 in der Form

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-D\omega t} \left(C_1 e^{\omega\sqrt{D^2-1}t} + C_2 e^{-\omega\sqrt{D^2-1}t} \right)$$

aufgeschrieben werden. Der Faktor vor der Klammer sorgt dafür, dass sich x asymptotisch dem Wert Null nähert. Entsprechendes gilt für $D = 1$ (*aperiodischer Grenzfall*, reelle Doppellösung für λ) mit der Lösung von 31.15:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = e^{-D\omega t} (C_1 + C_2 t) \quad .$$

Beide Bewegungen (manchmal erwünscht, z. B. als Zeigerbewegungen in Messinstrumenten) sind keine Schwingungsvorgänge und werden hier nicht weiter betrachtet.

- ⇒ Nur für den Fall $D < 1$ (*schwache Dämpfung*, zwei konjugiert komplexe Lösungen für λ) ergibt sich eine Schwingung (i ist die imaginäre Einheit, es wird die so genannte Euler-Relation $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ verwendet, der letzte Schritt entspricht der bereits für die harmonische Schwingung im Abschnitt 31.1 vorgenommenen Umformung):

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-D\omega t} \left(C_1 e^{\omega i \sqrt{1-D^2} t} + C_2 e^{-\omega i \sqrt{1-D^2} t} \right) \\ &= e^{-D\omega t} (C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}) \\ &= e^{-D\omega t} [C_1 (\cos \omega_D t + i \sin \omega_D t) + C_2 (\cos \omega_D t - i \sin \omega_D t)] \\ &= e^{-D\omega t} (A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t) \\ &= C e^{-D\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad . \end{aligned} \quad (31.17)$$

Aus dem Bewegungsgesetz für die freie gedämpfte Schwingung 31.17 liest man ab:

Auch das (geschwindigkeitsproportional) gedämpfte Schwingungssystem schwingt mit konstanter Eigenfrequenz. Die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - D^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (31.18)$$

ist kleiner als die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers, die Schwingungsdauer $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$ dementsprechend größer.

Die Abbildung 31.7 zeigt eine durch 31.17 beschriebene Bewegung. Analytisch lässt sich leicht bestätigen, was die Kurven erkennen lassen: Das Weg-Zeit-Gesetz $x(t)$ der Schwingung wird von zwei Funktionen

$$x_o = C e^{-D\omega t} \quad \text{und} \quad x_u = -C e^{-D\omega t}$$

„eingehüllt“. Die Schnittpunkte dieser beiden „Einhüllenden“ mit $x(t)$ liegen an den Stellen, an denen die cos-Funktion in 31.17 ihre Extremwerte annimmt. Dies sind nicht die Punkte, an denen die gedämpfte Schwingung ihre Amplituden hat.

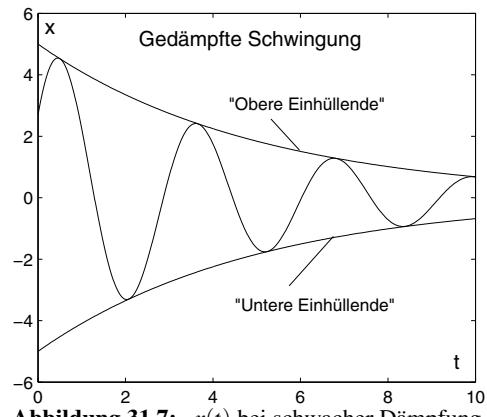


Abbildung 31.7: $x(t)$ bei schwacher Dämpfung

- ⇒ Die Schwingungsdauer T_D kann gemessen werden zwischen zwei aufeinander folgenden Amplituden gleichen Vorzeichens oder zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten einer Einhüllenden mit der Funktion $x(t)$ oder zwischen zwei aufeinander folgenden gleichgerichteten Null-Durchgängen (z. B. von negativen zu positiven x -Werten).

- ⇒ Die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit liefert das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $\dot{x}(t)$ der Schwingung. Beide Funktionen können als Parameterdarstellung einer Funktion $\dot{x}(x)$ angesehen werden, der so genannten *Phasenkurve* („Darstellung in der Phasenebene“), deren geometrische Gestalt allein schon wichtige Eigenschaften der Schwingung charakterisiert.

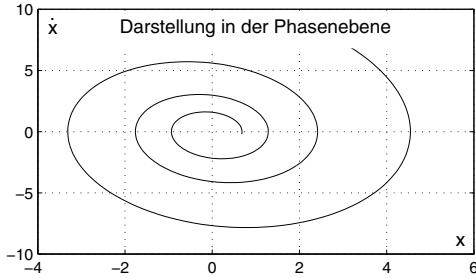


Abbildung 31.8: Phasenkurve $\dot{x}(x)$

Während Phasenkurven für ungedämpfte Schwingungen stets geschlossen sind, zeigt die Abbildung 31.8 den typischen spiralförmigen Verlauf für die gedämpfte Schwingung, deren Weg-Zeit-Gesetz $x(t)$ in Abbildung 31.7 dargestellt ist.

- ⇒ Das Verhältnis zweier Schwingungsausschläge x im zeitlichen Abstand einer Schwingungsdauer (z. B. das Verhältnis der Amplituden zweier aufeinander folgender Perioden) ist konstant, wie sich mit 31.17 bestätigen lässt:

$$q = \frac{x(t)}{x(t+T_D)} = \frac{C e^{-D\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha)}{C e^{-D\omega(t+T_D)} \cos[\omega_D(t+T_D) - \alpha]} = e^{\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} = \text{konstant} \quad .$$

Der natürliche Logarithmus von q wird als *logarithmisches Dekrement* Λ bezeichnet und steht mit dem Dämpfungsmaß D in folgendem Zusammenhang:

$$\Lambda = \ln q = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad . \quad (31.19)$$

Wenn also z. B. die Amplitudengröße experimentell ermittelt werden kann, ist es möglich, aus dem Verhältnis der Amplituden zweier aufeinander folgender Perioden das Lehrsche Dämpfungsmaß nach 31.19 zu bestimmen.

Beispiel:

Um eine Vorstellung vom Einfluss der Dämpfung auf die Eigenkreisfrequenz zu geben, soll angenommen werden, dass bei einem Schwingungsvorgang die Amplituden in jeder Periode auf die Hälfte des Wertes der vorhergehenden Periode zurückgehen. Dann erhält man mit $q = \frac{1}{0.5} = 2$ ein logarithmisches Dekrement von $\Lambda = 0,693$ und das Dämpfungsmaß $D = 0,110$. Nach 31.18 errechnet sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_D = \omega \sqrt{1-D^2} = 0,994 \omega \quad .$$

Bei $q = 2$ verringert sich die Amplitude recht schnell. Die Schwingung ist nach wenigen Perioden praktisch abgeklungen. Trotzdem ist der Einfluss dieser (relativ starken) Dämpfung auf die Eigenkreisfrequenz des Schwingers außerordentlich gering, und die Aussage dieses Beispiels darf als wichtigste Erkenntnis aus den Betrachtungen in diesem Abschnitt gelten:

Wenn nur die Eigenkreisfrequenz des freien gedämpften Schwingers interessiert, ist dafür mit der Eigenkreisfrequenz ω des ungedämpften Schwingers im Allgemeinen eine sehr gute Näherung gegeben. Nur bei sehr starker Dämpfung muss das Lehrsche Dämpfungsmaß (gegebenenfalls experimentell) ermittelt und ω_D nach (31.18) berechnet werden.

31.4 Erzwungene Schwingungen

Im Gegensatz zu den freien Schwingungen, bei denen die Bewegung nur durch die Anfangsbedingungen (Anfangsauslenkung, Anfangsgeschwindigkeit) verursacht wird, ist eine Schwingungsbewegung, die durch ständige Einwirkung einer zeitlich veränderlichen Kraft erzeugt wird, eine *erzwungene Schwingung*. Von besonderer praktischer Bedeutung sind harmonisch veränderliche Erregerkräfte der Form $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ (Abbildung 31.9), wobei Ω die *Erregerkreisfrequenz* ist.

Aus der Schnittskizze liest man die Bewegungs-Differenzialgleichung ab²:

$$m\ddot{x} + kx + cx = F_0 \cos \Omega t \quad . \quad (31.20)$$

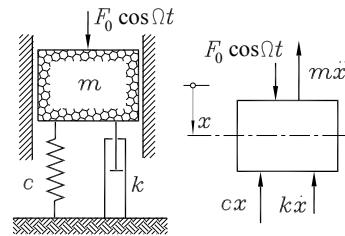


Abbildung 31.9: Harmonisch erregter Schwinger mit Dämpfung



31.4.1 Schwingungen mit harmonischer Erregung der Masse

Mit den bereits verwendeten Symbolen (ω für die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften freien Schwingung und dem Lehrschen Dämpfungsmaß D) wird aus 31.20:

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \frac{\omega^2}{c} \cos \Omega t \quad . \quad (31.21)$$

Die Lösung der inhomogenen linearen Differenzialgleichung setzt sich aus der Lösung x_{hom} der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und einer Partikulärlösung x_{part} zusammen:

$$x = x_{hom} + x_{part} \quad . \quad (31.22)$$

Für x_{hom} kann die Lösung 31.17 der Differenzialgleichung 31.15 übernommen werden, für das Suchen nach einer Partikulärlösung wird der Ansatz

$$x_{part} = A \cos(\Omega t - \varphi) \quad (31.23)$$

in 31.21 eingesetzt. Man erhält nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{F_0 \omega^2}{c} - A \Omega^2 \cos \varphi + 2AD\omega\Omega \sin \varphi + A\omega^2 \cos \varphi \right) \cos \Omega t \\ & + (-A\Omega^2 \sin \varphi - 2AD\omega\Omega \cos \varphi + A\omega^2 \sin \varphi) \sin \Omega t = 0 \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann für beliebiges t nur erfüllt sein, wenn jede Klammer auf der linken Seite einzeln verschwindet. Nullsetzen der zweiten Klammer liefert:

$$\tan \varphi = \frac{2D\omega\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{2D\frac{\omega}{\Omega}}{1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2} \quad . \quad (31.24)$$

²Das Stichwort „Erzwungene Schwingung“ unter www.TM-Mathe.de führt zu einer Seite, auf der die Lösung von 31.20 als typisches Beispiel einer gewöhnlichen Differenzialgleichung ausführlich demonstriert wird.

Das Nullsetzen der ersten Klammer führt nach Einsetzen von 31.24 und einigen elementarmathematischen Umformungen (sin- und cos-Funktionen werden durch tan ersetzt) auf:

$$A = \frac{F_0}{c} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}} . \quad (31.25)$$

Damit ist die Lösung von 31.21 komplett. Beide Lösungsanteile enthalten die cos-Funktion, so dass man sich die Bewegung als Überlagerung zweier Schwingungen vorstellen darf. Während der Anteil

$$x_{hom} = C e^{-D\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha)$$

nach 31.17 wegen der Exponentialfunktion mit negativem Exponenten mit der Zeit immer kleiner wird, ist die Partikulärlösung 31.23 eine cos-Funktion mit der konstanten Amplitude 31.25. Die Abbildung 31.10 zeigt dies für zwei typische Fälle:

Sowohl für $\omega > \Omega$ (obere Kurve) als auch für $\omega < \Omega$ (untere Kurve) erkennt man das Abklingen der Eigenschwingung infolge der Dämpfung, und nach einer gewissen Zeit schwingt die Masse mit der Erregerkreisfrequenz Ω und der Amplitude A .

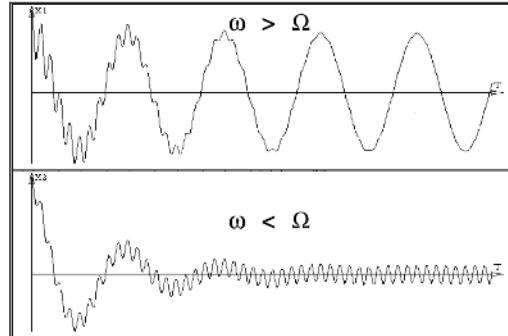


Abbildung 31.10: Eigenschwingungen klingen infolge der Dämpfung in jedem Fall ab

Nach einer bestimmten Einschwingzeit schwingt der durch die harmonisch veränderliche Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ erregte gedämpfte Schwinger nach einem Bewegungsgesetz, das nur noch durch die Partikulärlösung der Bewegungs-Differenzialgleichung bestimmt wird. Diese heißt deshalb *stationäre Lösung*

$$x_{st} = \frac{F_0}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (31.26)$$

mit dem *Abstimmungsverhältnis*

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} , \quad (31.27)$$

das als Quotient von Erregerkreisfrequenz Ω und Eigenkreisfrequenz ω des ungedämpften Schwingers definiert wird. *Die Schwingung im stationären Zustand erfolgt mit der Erregerkreisfrequenz Ω .* Die Phasenverschiebung φ in 31.26 berechnet sich aus

$$\tan \varphi = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} . \quad (31.28)$$

D ist das Lehrsche Dämpfungsmaß nach 31.14.

⇒ Der Ausdruck vor der cos-Funktion in 31.26 ist die Amplitude der Schwingung. Die Amplitude der stationären Schwingung ist konstant. Im Zähler des Bruchs, der die Größe der

Amplitude bestimmt, steht mit $x_{\text{statisch}} = \frac{F_0}{c}$ die Auslenkung der Feder unter einer konstanten statischen Last F_0 . Für sehr kleine Erregerkreisfrequenzen wird der Nenner des Bruchs näherungsweise 1, und die Schwingungsamplitude entspricht etwa der statischen Auslenkung.

- ⇒ Für beliebige Erregerkreisfrequenz Ω (bzw. ein beliebiges Abstimmungsverhältnis η) wird die Änderung der Amplitude im Verhältnis zur statischen Auslenkung durch die *Vergrößerungsfunktion*

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \quad (31.29)$$

beschrieben. Aus der **Abbildung 31.11**, die die Funktion $V(\eta)$ für verschiedene Dämpfungs- werte zeigt, können folgende Erkenntnisse abgelesen werden:

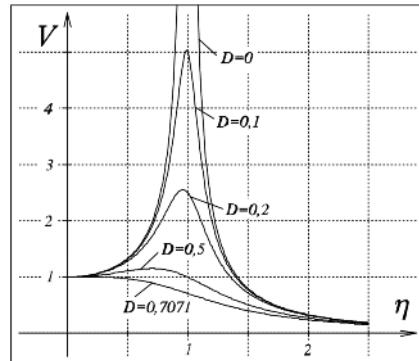


Abbildung 31.11: Vergrößerungsfunktion

- ⇒ Bei sehr kleiner Dämpfung nimmt die Vergrößerungsfunktion in der Nähe von $\eta = 1$ sehr große Werte an (für $D = 0$ hat sie bei $\eta = 1$ eine Polstelle). Eine Erregung mit einer Kreisfrequenz Ω , die der Eigenkreisfrequenz ω des ungedämpften Schwingers entspricht, führt bei kleiner Dämpfung zu sehr großen Amplituden (Resonanz).
- ⇒ Für $\eta > 1$ streben die Vergrößerungsfunktionen gegen den Wert Null. Bei *überkritischer Erregung* mit $\Omega > \omega$ ($\Omega = \omega$ wird als *kritische Erregerkreisfrequenz* bezeichnet) sind die Amplituden deutlich geringer als im unterkritischen Bereich $\Omega < \omega$.
- ⇒ Die relativen Maxima der Vergrößerungsfunktionen liegen stets vor dem Punkt $\eta = 1$. Bei Dämpfungen oberhalb $D = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$ treten keine Maxima in der Nähe der Resonanzstelle mehr auf.
- ⇒ Die Phasenverschiebung φ , die nach 31.28 berechnet werden kann, ist wie folgt zu interpretieren: Maxima, Minima und Nullstellen der Erregerkraft fallen mit den entsprechenden Punkten des Bewegungsgesetzes des Schwingers 31.26 zeitlich nicht zusammen. Bei sehr kleiner Dämpfung ist φ im unterkritischen Bereich annähernd Null, die Bewegung erfolgt phasengleich zur Erregung. Im überkritischen Bereich gilt wegen des negativen Nenners von 31.28 bei kleiner Dämpfung $\varphi \approx \pi$, und die Bewegungsrichtung des Schwingers ist stets der Richtung der Erregerkraft entgegengerichtet. Für $\eta = 1$ (Resonanzfall) gilt immer: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

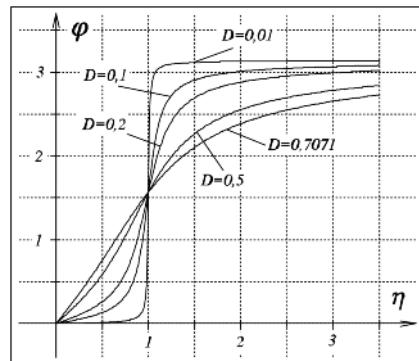


Abbildung 31.12: Phasenverschiebung

Die **Abbildung 31.12** zeigt die Phasenverschiebung in Abhängigkeit vom Abstimmungsverhältnis für verschiedene Dämpfungen.

31.4.2 Erregung über Feder und Dämpfer

Unabhängig davon, ob eine Schwingung erwünscht ist (z. B.: Schwing sieb) oder nicht (z. B.: Kraftfahrzeug), ist es meist sinnvoll, die Erregung über eine Feder oder einen Dämpfer in das System einzuleiten. Dabei darf häufig angenommen werden, dass sich ein Punkt (der Feder oder des Dämpfers) nach einem vorgegebenen (harmonischen) Bewegungsgesetz bewegt.

Betrachtet wird zunächst das Masse-Feder-Dämpfer-System der **Abbildung 31.13**, bei dem der Feder-Fußpunkt nach dem angegebenen Weg-Zeit-Gesetz bewegt wird. Dementsprechend nimmt die Masse über die Feder eine Kraft auf, die der Änderung der Federlänge (Differenz aus Weg des Feder-Fußpunktes und dem Weg x , den m zurückgelegt hat) proportional ist.

Das vertikale Gleichgewicht aller Kräfte

$$m\ddot{x} + k\dot{x} - c(x_0 \cos \Omega t - x) = 0$$

liefert nach Umstellen, Division durch m und Einführen der bekannten Abkürzungen mit

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = x_0 \omega^2 \cos \Omega t \quad (31.30)$$

eine Differenzialgleichung der Form 31.21, so dass nach Einführen von $x_0 = \frac{F_0}{c}$ alle im vorigen Abschnitt ermittelten Ergebnisse und die getroffenen Aussagen gelten.

Für den *Schwinger, dessen Feder-Fußpunkt dem Bewegungsgesetz $x_c = x_0 \cos \Omega t$ unterworfen ist*, gilt die stationäre Lösung

$$x_{st} = x_0 V(\eta) \cos(\Omega t - \varphi) \quad (31.31)$$

mit der Phasenverschiebung φ nach 31.28 und der Vergrößerungsfunktion V nach 31.29.

Wenn der *Fußpunkt des Dämpfers* einer harmonischen Bewegung folgen muss (**Abbildung 31.14**), erhält man über

$$m\ddot{x} - k(\dot{x}_D - \dot{x}) + cx = 0$$

die Bewegungs-Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = -2D\eta x_0 \omega^2 \sin \Omega t ,$$

für die auf dem gleichen Wege, der im Abschnitt 31.4.1 zur Lösung der Differenzialgleichung 31.21 führte, eine Partikulärlösung gefunden wird.

Man erhält für den *Schwinger, dessen Dämpfer-Fußpunkt dem Bewegungsgesetz $x_D = x_0 \cos \Omega t$ unterworfen ist*, die stationäre Lösung

$$x_{st} = -2D\eta x_0 V(\eta) \sin(\Omega t - \varphi) = -x_0 V_D(\eta) \sin(\Omega t - \varphi) \quad (31.32)$$

mit der Phasenverschiebung φ , die wieder nach 31.28 berechnet werden kann, und der Vergrößerungsfunktion V_D , die sich mit 31.29 berechnen lässt:

$$V_D(\eta) = 2D\eta V(\eta) . \quad (31.33)$$

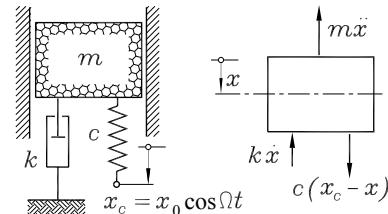


Abbildung 31.13: Schwinger mit Feder-Fußpunkt-Erregung

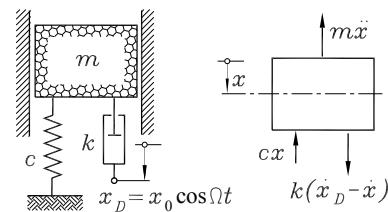


Abbildung 31.14: Schwinger mit Dämpfer-Fußpunkt-Erregung

Wenn sowohl Feder-Fußpunkt als auch Dämpfer-Fußpunkt dem gleichen harmonischen Bewegungsgesetz unterworfen werden (so genannte *Stützenerregung* mit $x_S = x_0 \cos \Omega t$, Abbildung 31.15) kann die Lösung dafür wegen der Linearität der Bewegungs-Differenzialgleichungen durch Überlagerung von 31.31 und 31.32 gewonnen werden:

$$x_{st} = x_0 V(\eta) [\cos(\Omega t - \varphi) - 2D\eta \sin(\Omega t - \varphi)] \quad . \quad (31.34)$$

Nach etwas mühsamer (aber nicht schwieriger) Rechnung ergibt sich auch für 31.34 die Form des Bewegungsgesetzes, aus dem die Amplitude und die Phasenverschiebung abgelesen werden können:

$$x_{st} = x_0 \sqrt{1 + 4D^2\eta^2} V(\eta) \cos(\Omega t - \bar{\varphi}) = x_0 V_S(\eta) \cos(\Omega t - \bar{\varphi}) \quad (31.35)$$

mit der *Vergrößerungsfunktion für die Stützenerregung*

$$V_S(\eta) = \sqrt{1 + 4D^2\eta^2} V(\eta) \quad . \quad (31.36)$$

Während für alle übrigen betrachteten Fälle die Phasenverschiebung nach 31.28 berechnet wird, ergibt sich ein davon abweichender Wert für die *Phasenverschiebung $\bar{\varphi}$ bei der Stützenerregung*:

$$\tan \bar{\varphi} = \frac{2D\eta^3}{1 - \eta^2 + 4D^2\eta^2} \quad . \quad (31.37)$$

Für die Feder-Fußpunkt-Erregung sind die Vergrößerungsfunktionen identisch mit den Funktionen $V(\eta)$ für die harmonische Erregung (Abschnitt 31.4.1, Abbildung 31.11), in den Abbildungen 31.16 und 31.17 sieht man die Vergrößerungsfunktionen für die Dämpfer-Fußpunkt-Erregung bzw. die Stützenerregung.

- ⇒ Bei Schwingungserregung über den Dämpfer haben alle Vergrößerungsfunktionen ihr Maximum $V_{D,max} = 1$ bei $\eta = 1$. Die Masse schwingt in keinem Fall mit einer Amplitude, die größer als die Erregeramplitude ist.
- ⇒ Bei den Vergrößerungsfunktionen der Stützenerregung fällt der Punkt $\eta = \sqrt{2}$ auf: Bei einer Erregerkreisfrequenz, die der $\sqrt{2}$ -fachen Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers entspricht, schwingt die Masse unabhängig von der Größe der Dämpfung mit der gleichen Amplitude wie die bewegte Stütze.

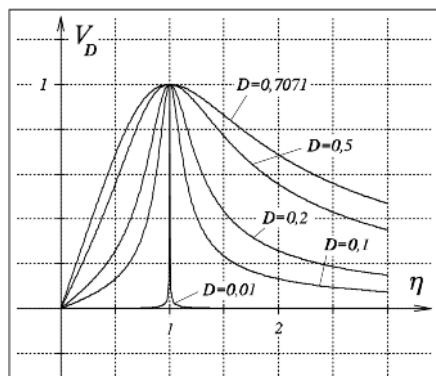


Abbildung 31.16: Dämpfer-Fußpunkt-Erregung

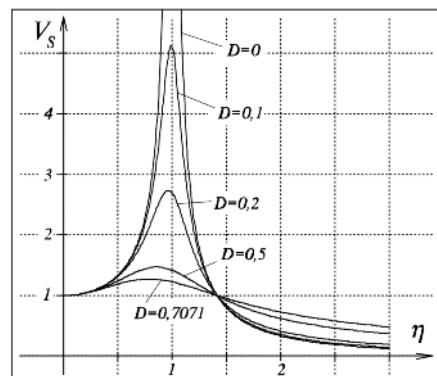


Abbildung 31.17: Stützenerregung

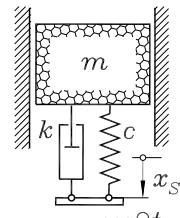


Abbildung 31.15:
Stützenerregung

- ⇒ Der stützenerregte Schwinger ist auch ein geeignetes Modell, um die Wirkung von *Schwingungsisolierungen* zu analysieren. Man geht davon aus, dass eine Arbeitsmaschine (z. B. infolge einer Unwucht, siehe folgenden Abschnitt) eine Schwingungsbewegung x_S erzeugt, die über Feder und Dämpfer auf das Fundament übertragen wird (man denke sich die **Abbildung 31.15** auf der Seite 627 um 180° gedreht, m ist dann die Fundamentmasse). Dann kann man V_S als „Durchlässigkeit der Isolierung“ interpretieren und dem Diagramm der **Abbildung 31.17** entnehmen, dass Schwingungsisolierung erst für $\eta > \sqrt{2}$ möglich ist. Die Arbeitsmaschine sollte möglichst mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Omega > \sqrt{2}\omega$ betrieben werden.

Bemerkenswert ist, dass im Bereich $\eta > \sqrt{2}$ ein kleinerer Dämpfungswert vorteilhafter ist. Andererseits darf D nicht zu klein sein, um die Schwingungen in der Nähe von $\eta = 1$ nicht zu groß werden zu lassen (immerhin muss auch dieser Bereich beim Hochlaufen und beim Abbremsen der Arbeitsmaschine durchfahren werden).

31.4.3 Unwuchterregung

Der in der Praxis häufigste Fall ist die *Unwuchterregung* eines Schwingers: Eine mit der Winkelgeschwindigkeit Ω umlaufende Unwucht $m_u r$ erregt das System in vertikaler Richtung mit der Komponente der Fliehkraft

$$F(t) = m_u r \Omega^2 \cos \Omega t .$$

Die Masse m soll die (im Allgemeinen wesentlich kleinere) Unwuchtmasse mit einschließen. Dann kann die Differenzialgleichung für die harmonische Erregung 31.20 aufgeschrieben werden mit

$$F_0 = m_u r \Omega^2 = \frac{m_u r}{m} m \Omega^2 = \frac{m_u r}{m} c \eta^2 ,$$

und durch entsprechende Modifizierung von 31.26 erhält man die *stationäre Lösung für den unwuchterregten Schwinger*:

$$x_{st} = \frac{m_u r}{m} \eta^2 V(\eta) \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{m_u r}{m} V_U(\eta) \cos(\Omega t - \varphi) \quad (31.38)$$

mit der *Vergrößerungsfunktion für die Unwuchterregung*

$$V_U(\eta) = \eta^2 V(\eta) , \quad (31.39)$$

wobei φ wieder nach 31.28 und $V(\eta)$ nach 31.29 berechnet werden können.

Für die Unwuchterregung ist der Begriff der statischen Auslenkung nicht sinnvoll, weil erst durch die mit Ω kreisende Unwucht eine Erregerkraft entsteht. Als Bezugsgröße bei der Definition der Vergrößerungsfunktion wird deshalb das Verhältnis aus der Unwucht $m_u r$ und der schwingenden Masse m gewählt.

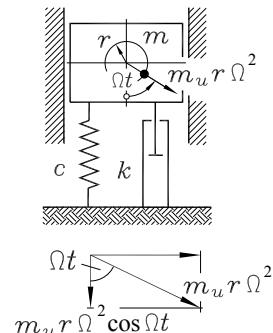


Abbildung 31.18: Erregung durch umlaufende Unwucht

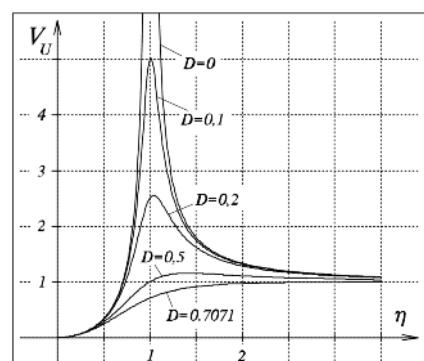


Abbildung 31.19: Unwuchterregung

Die Abbildung 31.19 zeigt die Vergrößerungsfunktionen $V_U(\eta)$ für einige ausgewählte Dämpfungen. Auf folgende Besonderheiten soll aufmerksam gemacht werden:

- ⇒ Im überkritischen Bereich ($\eta > 1$) nähern sich die Werte aller Vergrößerungsfunktionen V_U dem Wert 1: Für hohe Erregerfrequenzen sind die Amplituden der unwuchterregten Schwingung von der Erregerfrequenz und der Dämpfung nahezu unabhängig.
- ⇒ Für Dämpfungswerte $D < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$ haben die Kurven ein Maximum, das im Unterschied zu allen übrigen betrachteten Erregungen rechts von der Stelle $\eta = 1$ bei

$$\eta_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2D^2}} \quad (31.40)$$

liegt. Die zugehörige Erregerkreisfrequenz ist weder mit der Eigenkreisfrequenz des gedämpften noch mit der des ungedämpften Schwingers identisch, η_{max} liegt aber für kleine Dämpfungswerte sehr nahe bei 1 (Erregerkreisfrequenz gleich Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers).

Die wichtigste Erkenntnis aus allen Untersuchungen in den Abschnitten 31.4.1 bis 31.4.3 ist:
Bei jeder Art von Erregung führt eine Erregerkreisfrequenz, die sich nur wenig von der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers unterscheidet, zu besonders großen Amplituden der erzwungenen Schwingung.

31.4.4 Biegekritische Drehzahlen

Eng verwandt mit dem Problem der erzwungenen Schwingungen ist das Phänomen, dass sich rotierende Wellen bei bestimmten Drehzahlen sehr stark verformen. Betrachtet wird zunächst eine elastische (masselose) Welle, auf der eine Masse m befestigt ist. Es wird angenommen, dass der Schwerpunkt S der Masse nicht exakt auf der Wellenachse liegt (Exzentrizität e).

Bei Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω belastet die Masse m die Welle infolge der Exzentrizität mit einer Fliehkraft, die zur Verformung der Welle führt, und S bewegt sich schließlich auf einem Kreis mit dem Radius $(e + v)$. Die Fliehkraft beträgt nach 28.9 dann $m(e + v)\Omega^2$ und muss von der Welle aufgenommen werden. Wenn die Welle als Biegefeder aufgefasst wird, kann ihre Reaktionskraft als $c_B v$ angesetzt werden mit der Biegefederzahl c_B , deren Ermittlung im Abschnitt 31.2.2 behandelt wurde. Aus dem Gleichgewicht der beiden Kräfte errechnet man die Durchbiegung v :

$$m(e + v)\Omega^2 = c_B v \quad \Rightarrow \quad v = e \frac{m\Omega^2}{c_B - m\Omega^2} \quad .$$

Weil (siehe auch Abschnitt 31.2.2) für die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung des Biegefeder-Masse-Systems $\omega^2 = \frac{c_B}{m}$ bzw. $c_B = m\omega^2$ gilt, ergibt sich:

$$v = e \frac{m\Omega^2}{m\omega^2 - m\Omega^2} = e \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} = e V_B(\eta) \quad .$$

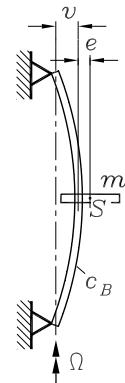


Abbildung 31.20:
 Exzentrizität und
 Durchbiegung

Die Masse m führt natürlich gar keine Schwingung aus (sondern eine Kreisbewegung), auch die Biegefeder (Welle) hat bei konstantem Ω eine konstante Verformung. Trotzdem ergab sich für die Durchbiegung eine Formel, die die „Vergrößerung von e “ kennzeichnet, und die Vergrößerungsfunktion V_B entspricht genau der Funktion V_U entsprechend 31.39 für die unwuchterregte Schwingung ohne Dämpfung. Das Verhältnis von Erregerkreisfrequenz und der Eigenkreisfrequenz der Biegeschwingung wurde wie bei den erzwungenen Schwingungen mit η bezeichnet.

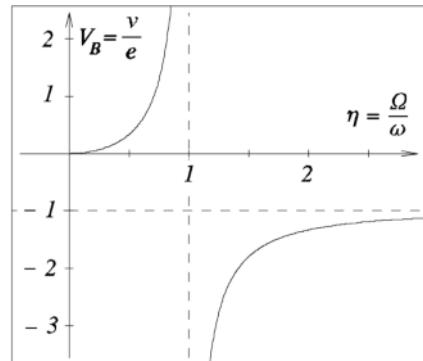


Abbildung 31.21: Biegekritische Drehzahl

Aus der Abbildung 31.21 mit der Funktion $V_B(\eta)$ entnimmt man, dass für $\eta = 1$ die Verformung der Welle „kritische Werte“ annehmen würde.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit Ω der Welle gleich ihrer Biegeeigenkreisfrequenz ω ist, rotiert sie mit der **biegekritischen Drehzahl**

$$n_{k\text{rit}} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_B}{m}} . \quad (31.41)$$

- ⇒ Die Exzentrizität kann beliebig klein sein. Auch bei der ideal ausgewuchteten Welle führt die geringste (unvermeidliche) Störung bei kritischer Drehzahl zu sehr großen Verformungen.
- ⇒ Die vernachlässigten (meist ohnehin unbedeutenden) Dämpfungseinflüsse würden das Ergebnis im Allgemeinen nur geringfügig beeinflussen, führen aber immerhin dazu, dass die Verformungen der Welle endlich bleiben, so dass ein kurzzeitiges Arbeiten im kritischen Bereich (beim Hochfahren bzw. Abbremsen) zu keinen Schäden führen muss. Die vernachlässigte Wellenmasse kann gegebenenfalls näherungsweise bei der Berechnung der Biegeeigenkreisfrequenz berücksichtigt werden, wie es im Beispiel 4 des Abschnitts 31.2.2 (Seite 618) demonstriert wurde.
- ⇒ Im überkritischen Bereich ($\eta > 1$) wird die Vergrößerungsfunktion V_B negativ (im Gegensatz zur ansonsten identischen Vergrößerungsfunktion V_U des unwuchterregten Schwingers, bei dem sich allerdings der gleiche Effekt durch die Phasenverschiebung $\varphi = \pi$ äußert). Die Verschiebung v und die Exzentrizität e haben entgegengesetzte Richtungen, und bei großen Drehzahlen wird $v \approx -e$, so dass die Exzentrizität ausgeglichen wird. Diesen Effekt nennt man *Selbstzentrierung*. Es ist also sinnvoll, Wellen so auszulegen, dass sie im überkritischen Bereich arbeiten, der kritische Bereich sollte möglichst schnell durchfahren werden.
- ⇒ Die Herleitung der Formel 31.41 wurde mit einer vertikal angeordneten Welle (Abbildung 31.20) durchgeführt, um den Einfluss des Gewichtskraft der Masse auf die Wellenverformung auszuschalten. Wie bei den Eigenschwingungen (vgl. Beispiel 3 im Abschnitt 31.2.1 auf Seite 615) ist das Eigengewicht in jeder Lage mit der statischen Verformung der Biegefeder im Gleichgewicht und hat auf die kritische Drehzahl keinen Einfluss, so dass 31.41 auch für die horizontal liegende Welle gilt.

- ⇒ Dass die Gewichtskraft der Masse (und damit die statische Durchbiegung der Welle) auf die Größe der kritischen Drehzahl keinen Einfluss hat, wird auch deshalb besonders betont, weil in vielen Büchern die kritische Drehzahl (durchaus korrekt) mit Hilfe der statischen Durchbiegung v_G infolge der Gewichtskraft mg der Masse berechnet wird. Das Federgesetz $mg = c_B v_G$ kann nach c_B umgestellt und in 31.41 eingesetzt werden. Man erhält

$$n_{krit} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{v_G}} \quad (31.42)$$

mit der Erdbeschleunigung g und der statischen Durchbiegung v_G der horizontal liegenden Welle unter der Gewichtskraft der Masse. Häufig findet man auch die Formel $n_{krit} = \frac{299}{\sqrt{v_G}}$, die (durch Einsetzen des Zahlenwertes für die Erdbeschleunigung) aus 31.42 hervorgeht und n_{krit} in min^{-1} liefert, wenn man v_G in cm (!) einsetzt.

Weil vor der Verwendung solcher Formeln eigentlich gar nicht oft genug gewarnt werden kann, ist sie hier im Text auch besonders klein gedruckt.

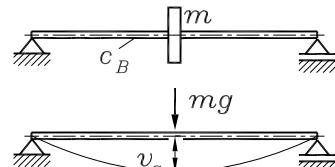


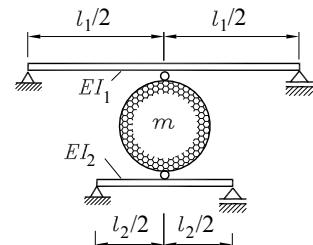
Abbildung 31.22: v_G ist die Basis einer beliebten „Praktikerformel“

31.5 Aufgaben

Aufgabe 31.1: Eine Masse m ist zwischen zwei masselosen Biegefedern gelagert.

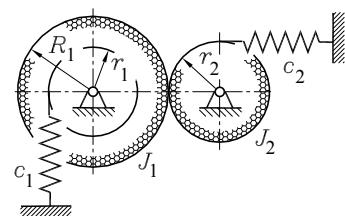
Gegeben: m , l_1 , l_2 , EI_2 , $l_1 = 2l_2$, $EI_1 = 16EI_2$.

Man ermittle die Eigenkreisfrequenz der Vertikalschwingung der Masse m .



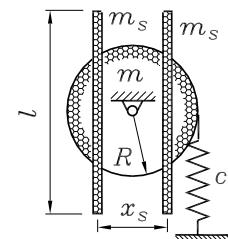
Aufgabe 31.2: Zwei miteinander im Eingriff stehende Zahnräder mit den Massenträgheitsmomenten J_1 bzw. J_2 sind in ihren Schwerpunktachsen gelagert und an zwei Federn gefesselt. Für Drehschwingungen mit kleinen Ausschlägen ist die Eigenkreisfrequenz ω zu ermitteln.

Gegeben: $R_1 = 3r_1 = 2r_2$, $J_2 = \frac{1}{4}J_1$, $c_2 = 2c_1$.



Aufgabe 31.3: Auf eine durch eine Feder gefesselte Kreisscheibe (Masse m) sollen symmetrisch zum Drehpunkt zwei dünne Stäbe (jeweils Länge l und Masse m_s) so aufgeklebt werden, dass sich dadurch die Eigenkreisfrequenz der Drehschwingungen mit kleinen Ausschlägen halbiert. Man ermittle x_s .

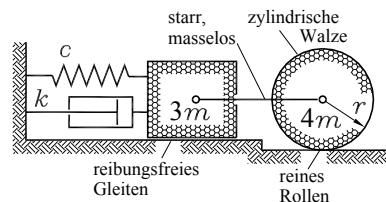
Gegeben: $l = 4R$, $m_s = \frac{1}{2}m$.



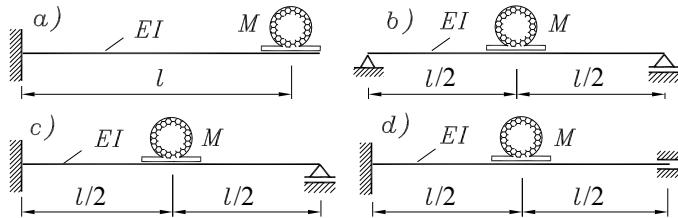
Aufgabe 31.4:

Der Schwinger wird aus der statischen Ruhelage ausgelenkt und ohne Anfangsgeschwindigkeit freigelassen. Man berechne die Zeit, nach der erstmals eine Amplitude kleiner als 6% der Anfangsauslenkung auftritt, und die Anzahl der vollen Schwingungen, die bis zu diesem Zeitpunkt ausgeführt wurden.

Gegeben: $m = 400\text{ kg}$; $c = 10^4 \text{ N/cm}$; $k = 60 \text{ Ns/cm}$.

**Aufgabe 31.5:**

Die Motoren (Masse M) sind auf Trägern (Biegesteifigkeit EI) gelagert. Die Trägermassen können vernachlässigt werden.

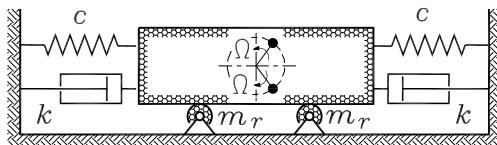


Gegeben: $l = 1\text{ m}$; $M = 1000\text{ kg}$; $EI = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$.

- Man ermittle die kritischen Winkelgeschwindigkeiten Ω_{kr} der Motoranker, die mit den Eigenkreisfrequenzen der Biegenschwingungen übereinstimmen.
- Wie groß müssen die Biegesteifigkeiten der Träger mindestens sein, damit die Motoren im stationären Betrieb bei einer Drehzahl $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ im unterkritischen Bereich arbeiten?

Aufgabe 31.6:

Ein Schwingsieb soll von zwei gegenläufig umlaufenden Unwuchten (Drehzahl: $n = 1000 \text{ min}^{-1}$) in Resonanz betrieben werden. Man ermittle



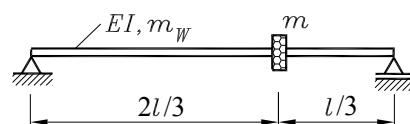
- die Größe der Federzahl c der Stützfedern ohne Berücksichtigung der Dämpfung,
- die Dämpfungszahl k von zusätzlich einzubauenden Dämpfungselementen, so dass die stationäre Schwingungsamplitude des Siebs durch den Wert $V_U = 3$ der Vergrößerungsfunktion für die Unwuchterregung bei einer Abstimmung $\eta = 1$ beschrieben wird.

Gegeben: $m = 500\text{ kg}$ (Summe der Massen von Sieb, Siebgut und Unwuchten);

$m_r = 50\text{ kg}$ (Masse einer von zwei zylindrischen Lagerrollen).

Aufgabe 31.7:

Auf einer Welle mit der Masse m_W ist zusätzlich eine Einzelmasse m befestigt.



Gegeben: $l = 1\text{ m}$; $m_W = 1\text{ kg}$; $m = 10\text{ kg}$; $EI = 2,5 \cdot 10^8 \text{ Nmm}^2$.

Man ermittle die kritische Drehzahl n_{krit} bei Vernachlässigung und die kritische Drehzahl n_{krit}^* bei näherungsweiser Berücksichtigung von m_W .

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

32 Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Für die eindeutige Beschreibung der Lage eines Systems mit f Freiheitsgraden werden f von einander unabhängige Koordinaten benötigt. Zur Berechnung der Bewegungsgesetze ist dementsprechend ein System von Differentialgleichungen zu lösen, das z. B. nach dem Prinzip von d'Alembert aufgeschrieben werden kann. Dabei kann man weiter genau nach den Empfehlungen verfahren, die im Abschnitt 29.5.2 formuliert wurden. Bei n eingeführten Bewegungscoordinaten findet man jedoch nur $n - f$ Zwangsbedingungen, so dass in den f Bewegungs-Differentialgleichungen f Koordinaten verbleiben.

Der Energiesatz, der stets nur eine Energiebilanz-Gleichung liefert, genügt allein zum Aufstellen der Differentialgleichungen für ein System mit mehreren Freiheitsgraden nicht. Im Abschnitt 33.4 wird ein Verfahren behandelt, das auch bei mehr als einem Freiheitsgrad die Differentialgleichungen aus Energiebetrachtungen herleitet.

Vornehmlich für lineare Systeme, deren Bewegung durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, können wesentliche verallgemeinerungsfähige Erkenntnisse gewonnen werden. Dieses Kapitel beschränkt sich auf solche Probleme, einige nichtlineare Systeme mit mehreren Freiheitsgraden werden im Kapitel 33 behandelt.

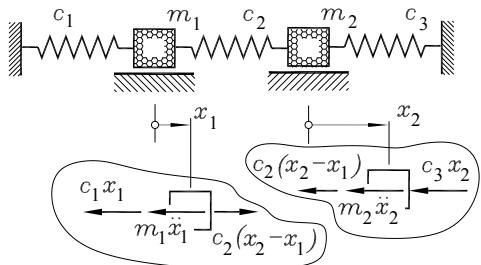
32.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

Am einfachen Beispiel sollen zunächst die Probleme diskutiert werden, die für die Behandlung von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden typisch sind.

Beispiel: Eine lineare Schwingerkette besteht wie skizziert aus drei Federn und zwei Massen, die sich auf der Unterlage reibungsfrei bewegen können.

Gegeben: m_1, m_2, c_1, c_2, c_3 .

In der Skizze der in ausgelenkter Lage freigeschnittenen Massen wurde die Bewegungscoordinate x_2 (willkürlich) größer als x_1 angenommen, so dass die mittlere Feder verlängert wird und Zugkräfte auf beide Massen aufbringt. Das Gleichgewicht der Federkräfte mit den d'Alembertschen Kräften liefert das Differentialgleichungssystem



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0 \quad , \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_3 x_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (32.1)$$

Wenn in das lineare homogenen Differentialgleichungssystem der Lösungsansatz

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (32.2)$$

eingesetzt wird, heben sich die cos-Anteile heraus, und es verbleibt:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) A_1 - c_2 A_2 &= 0 \quad , \\ -c_2 A_1 + (c_2 + c_3 - m_2 \omega^2) A_2 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (32.3)$$

Dieses lineare homogene Gleichungssystem für die Ansatzparameter A_1 und A_2 kann (neben der trivialen Lösung $A_1 = A_2 = 0$, die den Ruhezustand beschreibt und hier nicht interessiert) nur dann nichttriviale Lösungen haben, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (32.4)$$

führt auf eine quadratische Gleichung für ω^2 :

$$m_1 m_2 \omega^4 + [(c_1 + c_2)m_2 + (c_2 + c_3)m_1]\omega^2 + (c_1 + c_2)(c_2 + c_3) - c_2^2 = 0 \quad (32.5)$$

hat die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{(c_1 + c_2)m_2 + (c_2 + c_3)m_1}{2m_1 m_2} \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{(c_1 + c_2)m_2 + (c_2 + c_3)m_1}{2m_1 m_2} \right]^2 + \frac{c_2^2 - (c_1 + c_2)(c_2 + c_3)}{m_1 m_2}} \quad . \end{aligned} \quad (32.6)$$

Mit den beiden Werten ω_1 und ω_2 können also nach 32.2 zwei linear unabhängige Partikulärlösungen von 32.1 aufgeschrieben werden, die wegen der Linearität der Differentialgleichungen summiert werden dürfen. In

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad , \\ x_2 &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (32.7)$$

sind die Koeffizienten A_{ij} nicht unabhängig voneinander, weil sowohl A_{11} und A_{21} als auch A_{12} und A_{22} das homogene Gleichungssystem 32.3 erfüllen müssen. Aus der ersten der beiden Gleichungen 32.3 folgt z. B.

$$A_{2j} = \frac{1}{c_2} (c_1 + c_2 - m_1 \omega_j^2) A_{1j} = \mu_j A_{1j} \quad , \quad (32.8)$$

und man erhält schließlich als allgemeine Lösung von 32.1:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad , \\ x_2 &= \mu_1 A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (32.9)$$

mit den Integrationskonstanten $A_{11}, A_{12}, \varphi_1$ und φ_2 , die z. B. aus vier Anfangsbedingungen (Lagen und Geschwindigkeiten beider Massen beim Beginn der Bewegung) bestimmt werden.

- ⇒ Es lassen sich immer Anfangsbedingungen finden, für die einer der beiden Faktoren der cos-Funktionen Null wird (z. B.: Auslenkungen, die sich um den Faktor μ_1 bzw. μ_2 unterscheiden und keine Anfangsgeschwindigkeiten). Dann schwingen beide Massen mit der gleichen *Eigenkreisfrequenz* ω_1 bzw. ω_2 , ihre Amplituden unterscheiden sich bei diesen *Eigenschwingungen* um die Faktoren μ_1 bzw. μ_2 , die so genannten *Modalkoeffizienten*.
- ⇒ Bei beliebigen Anfangsbedingungen sind die Bewegungsgesetze der beiden Massen entsprechend 32.9 Überlagerungen der beiden Eigenschwingungen.
- ⇒ Mit dem Vietaschen Wurzelsatz bestätigt man, dass die Lösungen 32.6 der Gleichung 32.5 immer positiv und damit ω_1 und ω_2 für jede Parameterkombination reell sind.

Am vereinfachten Modell (**Abbildung 32.1**) sollen die Aussagen veranschaulicht werden. Gleichzeitig wird demonstriert, wie der Lösungsweg 32.1 bis 32.7 mit Hilfe der Matrixschreibweise formalisiert werden kann. Das Differenzialgleichungssystem 32.1 wird zu:

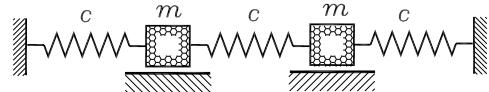


Abbildung 32.1: Vereinfachtes Modell der Schwingerkette mit $m_1 = m_2 = m$ und $c_1 = c_2 = c_3 = c$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad . \quad (32.10)$$

Der Lösungsansatz entsprechend 32.2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \varphi) \quad (32.11)$$

führt analog zu 32.3 auf das *allgemeine Matrizeneigenwertproblem*

$$\left(\begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{o} \quad . \quad (32.12)$$

Für diesen einfachen Fall kann 32.12 als homogenes Gleichungssystem aufgefasst werden, aus dem die Eigenkreisfrequenzen und die Modalkoeffizienten berechnet werden können, wie es mit 32.4 bis 32.8 demonstriert wurde. Man erhält:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{3 \frac{c}{m}} \quad , \quad \mu_1 = 1 \quad , \quad \mu_2 = -1 \quad . \quad (32.13)$$

- ⇒ Auch für (beliebig komplizierte) lineare ungedämpfte Schwingungssysteme entsteht ein Matrizeneigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{o} \quad (32.14)$$

mit der *Steifigkeitsmatrix* \mathbf{K} und der *Massenmatrix* \mathbf{M} . Beide Matrizen sind symmetrisch (und die sich ergebenden Werte für ω^2 damit garantiert nicht negativ). Für die Lösung von 32.14 stehen leistungsfähige Programme bereit (z. B. unter www.TM-interaktiv.de¹), so dass die wesentliche Arbeit mit dem Aufstellen des Differenzialgleichungssystems 32.10 erledigt ist, weil daraus die Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{M} unmittelbar abgelesen werden können.

¹Man beachte auch die beiden Hinweise auf die Themen *Matrizenrechnung* und *Matrizeneigenwertprobleme* in den Boxen auf den Seiten 199 bzw. 419.

- ⇒ Programme zur Lösung von 32.14 liefern als Ergebnis einen Vektor ω , der die Eigenkreisfrequenzen enthält, und eine *Modalmatrix A*, die (spaltenweise) die zugehörigen *Eigenvektoren* enthält. Wie die Modalkoeffizienten, die nach 32.8 nur die Verhältnisse der Schwingungsausschläge für die einzelnen Freiheitsgrade kennzeichnen (die tatsächlichen Ausschläge hängen von den Anfangsbedingungen ab), sind die Eigenvektoren in der Modalmatrix auch nur bis auf beliebige Faktoren bestimbar. Um zu eindeutigen Ergebnissen zu kommen, ist es üblich, die Eigenvektoren zu normieren (jeder Vektor wird durch seinen Betrag dividiert und auf diese Weise zum Einheitsvektor). Das Ergebnis von 32.12 ergibt sich dann in der Form:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad , \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \quad (32.15)$$

Der Faktor vor der Modalmatrix sorgt ausschließlich für die Normierung der Spalten. Die erste Spalte von A (Eigenvektor zur Eigenschwingung mit ω_1) zeigt wie der Modalkoeffizient μ_1 in 32.13, dass beide Massen mit gleicher Amplitude in die gleiche Richtung schwingen, der zweiten Spalte entnimmt man, dass bei einer Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz ω_2 die Massen sich stets entgegengesetzt (aber auch mit gleicher Amplitude) bewegen.

Bei den weitaus meisten Problemen der technischen Praxis sind die aus der Lösung 32.15 zu gewinnenden Erkenntnisse ausreichend. Wenn tatsächlich der Schwingungsverlauf für vorgegebene Anfangsbedingungen interessiert, können die Bewegungsgesetze in sinnvoller Erweiterung von 32.9 aufgeschrieben werden. Günstiger ist es, bei einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden auch dafür die übersichtliche Form der Matrzenschreibweise zu nutzen. Schließlich kann natürlich auch ein lineares Schwingungsproblem als Anfangswertproblem numerisch integriert werden.

Die Abbildung 32.2 zeigt die Bewegungen der beiden Massen bei unterschiedlichen Anfangsauslenkungen (jeweils ohne Anfangsgeschwindigkeiten). Bei beliebiger Anfangsauslenkung (links, nur eine Masse wurde ausgelenkt) ergibt sich eine Überlagerung aus beiden Eigenschwingungen. Bei Anfangsauslenkungen proportional zum 2. Eigenvektor (rechts, gleiche Anfangsauslenkungen für beide Massen in entgegengesetzten Richtungen) schwingen die Massen mit der 2. Eigenkreisfrequenz.

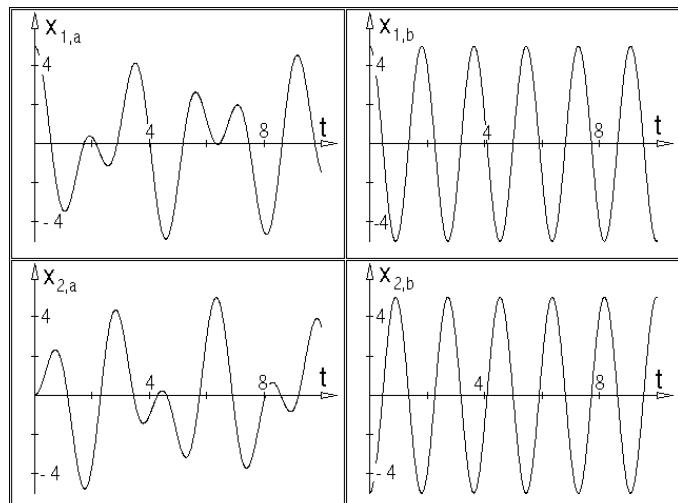


Abbildung 32.2: Bewegungsgesetze für die Schwingerkette (Abbildung 32.1) bei beliebiger Anfangsauslenkung beider Massen (links) bzw. Anfangsauslenkungen proportional zum 2. Eigenvektor (rechts)

32.2 Torsionsschwingungen

Betrachtet wird zunächst eine elastische (masselose) Welle mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt und der Torsionssteifigkeit GI_p , auf der zwei Scheiben mit den Massenträgheitsmomenten J_1 bzw. J_2 befestigt sind (Abbildung 32.3). Das System hat zwei Freiheitsgrade, denn infolge der Elastizität der Welle können die beiden Verdrehwinkel φ_1 und φ_2 unterschiedlich groß sein.

Die rechte Skizze zeigt die freigeschnittenen Scheiben mit den d'Alembertschen Momenten (den gewählten Koordinatenrichtungen entgegengerichtet) und den von der Torsionsfeder (Welle) erzeugten Momenten, wobei (willkürlich) angenommen wurde, dass φ_2 größer als φ_1 ist. Für die Torsionsfederzahl gilt nach 31.12: $c_T = \frac{GI_p}{l}$. Aus dem Momentengleichgewicht um die Wellenachse für beide Scheiben ergibt sich das Differenzialgleichungssystem

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_T (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad , \quad J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_T (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad ,$$

das wie das System 32.1 im vorigen Abschnitt mit einem zu 32.2 analogen Ansatz

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \varphi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

behandelt werden kann, und die Rechnung wie dort liefert wieder ein homogenes Gleichungssystem, dessen Koeffizientendeterminante für nichttriviale Lösungen verschwinden muss:

$$\begin{aligned} -A_1 \omega^2 - \frac{c_T}{J_1} (A_2 - A_1) &= 0 \\ -A_2 \omega^2 + \frac{c_T}{J_2} (A_2 - A_1) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{c_T}{J_1} - \omega^2 & -\frac{c_T}{J_1} \\ -\frac{c_T}{J_2} & \frac{c_T}{J_2} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Die Determinante liefert eine quadratische Gleichung, die zwei Lösungen hat:

$$\left(\frac{c_T}{J_1} - \omega^2 \right) \left(\frac{c_T}{J_2} - \omega^2 \right) - \frac{c_T}{J_1} \frac{c_T}{J_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0 \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_T}{J_1} + \frac{c_T}{J_2}} \quad .$$

Eine Eigenkreisfrequenz $\omega_1 = 0$ ist typisch für Systeme, für die eine Starrkörperbewegung möglich ist. Im vorliegenden Fall kann sich die Welle ohne elastische Verformung drehen, beide Scheiben drehen sich dabei um gleiche Winkel. Dies ist keine Schwingung (bzw. eine „Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz Null“).

- ⇒ Für die Behandlung komplizierterer Systeme (nachfolgendes Beispiel) empfiehlt sich die Formulierung des Differenzialgleichungssystems in Matrizenbeschreibweise, aus dem ein allgemeines Matrizeneigenwertproblem abgelesen werden kann, das mit Hilfe des Computers gelöst werden sollte.

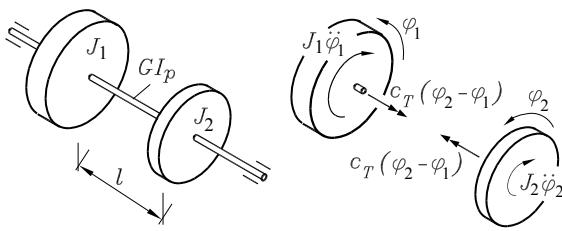


Abbildung 32.3: Einfacher Torsionsschwinger

Beispiel:

Für das skizzierte Getriebe mit fünf (starren) Rädern und drei (masselosen) Torsionsfedern (Wellenabschnitte) soll das Matrizeneigenwertproblem für die Berechnung der Eigenkreisfrequenzen der Torsionsschwingungen formuliert werden. Es darf vorausgesetzt werden, dass die beiden Zahnräder mit den Massenträgheitsmomenten J_2 und J_3 und den Teilkreisradien r_2 und r_3 spielfrei miteinander kämmen.

$$\text{Gegeben: } J_1 ; \quad J_2 = 2J_1 ; \quad J_3 = 1,2J_1 ; \quad J_4 = 0,6J_1 ; \quad J_5 = 0,8J_1 ; \\ c_{12} ; \quad c_{34} = 2c_{12} ; \quad c_{45} = 1,5c_{12} ; \\ r_2 ; \quad r_3 = 0,8r_2 .$$

Für alle Räder werden Winkekoordinaten mit gleichem positiven Drehsinn definiert

(Abbildung 32.4). Dann gilt für die Räder 2 und 3

$$r_2 \varphi_2 = -r_3 \varphi_3$$

(entgegengesetzter Drehsinn).

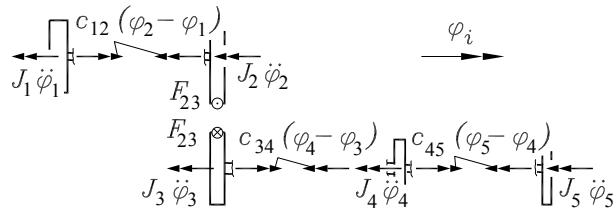
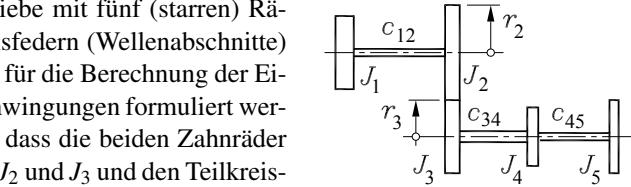


Abbildung 32.4: Definition von Kräften, Momenten und Koordinaten

Die Kraft F_{23} ist die tangentiale (ein Drehmoment bewirkende) Komponente der Kraft, die beim Freischneiden der beiden Räder 2 und 3 sichtbar wird. Beim Antragen der von den Torsionsfedern erzeugten Momente wurde (willkürlich) angenommen, dass sich jeweils am rechten Rad der größere Verdrehwinkel eingestellt hat.

Momenten-Gleichgewicht an den fünf Rädern liefert:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 , \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + F_{23} r_2 &= 0 , \quad (*) \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{34} (\varphi_4 - \varphi_3) + F_{23} r_3 &= 0 , \quad (*) \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 + c_{34} (\varphi_4 - \varphi_3) - c_{45} (\varphi_5 - \varphi_4) &= 0 , \\ J_5 \ddot{\varphi}_5 + c_{45} (\varphi_5 - \varphi_4) &= 0 . \end{aligned}$$

Die beiden mit (*) gekennzeichneten Gleichungen werden bei gleichzeitiger Elimination von F_{23} zu einer Gleichung zusammengefasst, und in allen Gleichungen wird die Koordinate φ_2 durch $\varphi_2 = -\varphi_3 \frac{r_3}{r_2}$ ersetzt. Die verbleibenden vier Differenzialgleichungen

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 + J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \\ \ddot{\varphi}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & c_{12} \frac{r_3}{r_2} & 0 & 0 \\ c_{12} \frac{r_3}{r_2} & c_{12} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 + c_{34} & -c_{34} & 0 \\ 0 & -c_{34} & c_{34} + c_{45} & -c_{45} \\ 0 & 0 & -c_{45} & c_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zeigen in der Kurzform der Matrixschreibweise wieder die bekannte Form

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{o} ,$$

aus dem das Matrizeneigenwertproblem abzulesen ist:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

mit den symmetrischen Matrizen² \mathbf{K} und \mathbf{M} . Mit den speziellen Werten der Aufgabenstellung sieht das Matrizeneigenwertproblem so aus:



$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 2,64 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3,5 & -1,5 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1,5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \right) \mathbf{a} = \mathbf{o} \quad \text{mit } \lambda = \frac{J_1}{c_{12}} \omega^2 .$$

Schon dieses System kann man (praktisch) nicht mehr wie ein homogenes Gleichungssystem behandeln, und man sollte unbedingt die Hilfe des Computers in Anspruch nehmen, weil auch die vielen leistungsfähigen Verfahren zur Lösung von Matrizeneigenwertproblemen für die Handrechnung unzumutbar sind.

Das Matrizeneigenwertproblem liefert die vier Eigenwerte, die in dem Bildschirmschnappschuss (Abbildung 32.5, „Command Window“ von Matlab, vgl. auch www.TM-aktuell.de) zusammen mit den Eigenvektoren zu sehen sind.

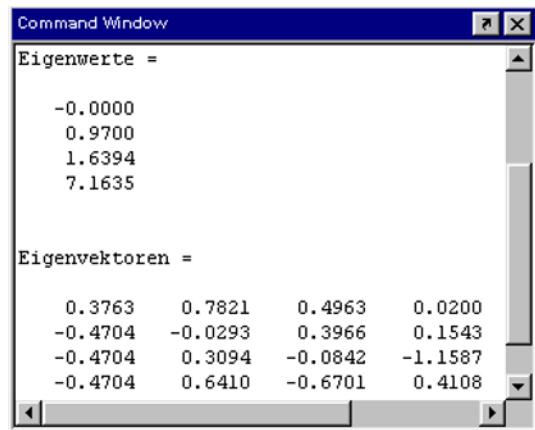


Abbildung 32.5: Lösung mit Matlab

- ⇒ Da das System eine Starrkörperbewegung zulässt, wird ein λ -Wert (und damit ein ω -Wert) gleich Null. Der zugehörige 1. Eigenvektor kennzeichnet die Starrkörperdrehung: Die Komponenten für die Räder 3, 4 und 5 haben gleiche Werte, der Wert für Rad 1 entspricht diesen Werten unter Beachtung des Übersetzungsverhältnisses vom unteren zum oberen Wellenstrang (Zwangsbedingung zwischen φ_2 und φ_3).
- ⇒ Es ergeben sich also drei Eigenkreisfrequenzen für die Torsionsschwingungen des Systems, deren kleinste den Wert

$$\omega_{\min} = \sqrt{\lambda_{\min} \frac{c_{12}}{J_1}} = 0,985 \sqrt{\frac{c_{12}}{J_1}}$$

hat. Der 2. Eigenvektor zeigt, dass sich die Räder 4 und 5 gegen die Drehrichtung von Rad 3 drehen. Zwischen Rad 3 und 4 liegt für diese Eigenschwingung ein *Schwingknoten*.

²Die Symmetrieeigenschaft (für alle Elemente einer Matrix A gilt $a_{ij} = a_{ji}$) ist eine sehr wichtige Eigenschaft bei Matrizeneigenwertproblemen. Einerseits sind die Lösungsverfahren deutlich einfacher und numerisch stabiler, andererseits garantieren symmetrische Matrizen, dass alle Eigenwerte reell sind. Die Matrizen, die bei Schwingungsproblemen, wie sie hier behandelt werden, entstehen, sind außerdem positiv definit und haben deshalb garantiert keine negativen Eigenwerte. Ausführliche Informationen zu diesen Problemen findet man auf der Internet-Site „Mathematik für die Technische Mechanik“ (www.TM-Mathe.de, siehe Hinweis in den Boxen auf den Seiten 199 bzw. 419)

32.3 Eigenschwingungen linear-elastischer Systeme

Betrachtet werden in diesem Abschnitt Systeme, bei denen die zu berücksichtigenden Massen an bestimmten Punkten konzentriert und durch (masselose) elastische Elemente (Federn) verknüpft sind (**Abbildung 32.6**). Es brauchen keine Punktmassen zu sein (Drehträgheit kann durch die Massenträgheitsmomente berücksichtigt werden). Wenn kleine Verformungen (kleine Schwingungsausschläge) und linear-elastisches Materialverhalten (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes) vorausgesetzt werden dürfen, führt die Untersuchung des Eigenschwingungsverhaltens auch bei komplizierteren Systemen auf ein Matrizeneigenwertproblem, wie es sich bereits in den Abschnitten 32.1 und 32.2 ergab.

Dämpfung wird vernachlässigt, weil dies bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen ohnehin fast immer gerechtfertigt ist (vgl. das Beispiel auf Seite 622). Das Vorgehen wird am einfachen Beispiel demonstriert:

Beispiel:

Ein (masseloser) Biegeträger (konstante Biegesteifigkeit EI) ist mit zwei Einzelmassen besetzt (Drehträgheit soll vernachlässigt werden).

Gegeben: l , EI , m_1 , $m_2 = \frac{1}{2}m_1$.

Es sollen die Eigenkreisfrequenzen der Vertikalschwingungen der Massen untersucht werden, wobei der Träger auf Biegung beansprucht wird (Biegeschwingungen).

Die Bewegung der beiden Massen wird mit den Koordinaten v_1 und v_2 verfolgt. Die **Abbildung 32.7** zeigt sie in ausgelenkter Lage, freigeschnitten vom Biegeträger (Schnittkräfte F_1 und F_2 werden sichtbar), die d'Alembertschen Kräfte sind den gewählten Koordinatenrichtungen entgegengerichtet. Aus dem Kräfte-Gleichgewicht ergibt sich:

$$F_1 + m_1 \ddot{v}_1 = 0 \quad , \quad F_2 + m_2 \ddot{v}_2 = 0 \quad . \quad (32.16)$$

Der Zusammenhang zwischen den Kräften F_1 und F_2 , die auf den Biegeträger wirken, und den dadurch hervorgerufenen Verschiebungen v_1 und v_2 kann mit einem geeigneten Verfahren aus der Festigkeitslehre formuliert werden (Biegelinie, Prinzip von Castigliano, Finite-Elemente-Methode, ...). Für das einfache Beispiel liefert die Tabelle auf Seite 260 die benötigten Formeln:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3l^3}{256EI} F_1 + \frac{119l^3}{10368EI} F_2 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 \quad , \\ v_2 &= \frac{119l^3}{10368EI} F_1 + \frac{4l^3}{243EI} F_2 = \alpha_{12} F_1 + \alpha_{22} F_2 \end{aligned} \quad (32.17)$$

(man erkennt die im Abschnitt 24.3 besprochene Symmetrie der Einflusszahlen α_{ij}). Einsetzen der nach den Kräften umgestellten Gleichgewichtsbedingungen 32.16 in 32.17 liefert:

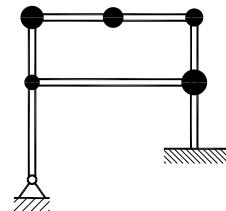


Abbildung 32.6: Massen, verbunden durch elastische Elemente

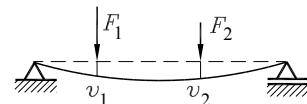
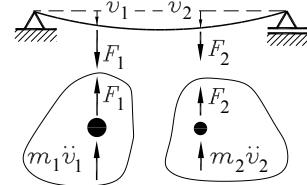
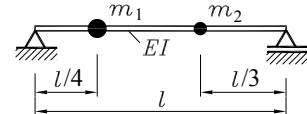


Abbildung 32.7: Massen und Federn werden getrennt

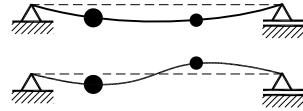
$$v_1 = -\alpha_{11} m_1 \ddot{v}_1 - \alpha_{12} m_2 \ddot{v}_2 , \quad v_2 = -\alpha_{12} m_1 \ddot{v}_1 - \alpha_{22} m_2 \ddot{v}_2 .$$

Dies stellt in der Form

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} m_1 & \alpha_{12} m_2 \\ \alpha_{12} m_1 & \alpha_{22} m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32.18)$$

wieder ein Differenzialgleichungssystem vom Typ 32.10 dar. Man beachte, dass die erste Matrix im Gegensatz zu allen bisher behandelten Problemen nicht symmetrisch ist, was allerdings durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit dem Faktor $\frac{m_2}{m_1}$ leicht zu beheben ist. Das einfache System ist (wie das Beispiel des Abschnitts 32.1) der „Handrechnung“ noch zugänglich. Man erhält z. B. die beiden Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = 7,397 \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}} ; \quad \omega_2 = 24,45 \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}} . \quad (32.19)$$



Die Abbildung 32.8 zeigt die zugehörigen Eigenschwingungsformen, die aus den Modalkoeffizienten oder den Eigenvektoren abzulesen sind.

Abbildung 32.8: Eigenschwingungsformen

- ⇒ Bei komplizierteren Problemen ist es ratsam, den Algorithmus zur Formulierung des Differenzialgleichungssystems zu formalisieren. Dies soll an dem behandelten Beispiel nach einer geringfügigen Modifikation des Lösungsweges noch diskutiert werden.

Alternativ zu der oben ausgeführten Rechnung werden zunächst die beiden Beziehungen 32.17 nach den Kräften umgestellt. Man erhält:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} v_1 + \frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} v_2 = k_{11} v_1 + k_{12} v_2 , \\ F_2 &= \frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} v_1 + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} v_2 = k_{12} v_1 + k_{22} v_2 . \end{aligned} \quad (32.20)$$

Dies wird in 32.16 eingesetzt, und man erhält mit

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{o} \quad (32.21)$$

ein Differenzialgleichungssystem, das die gleichen Ergebnisse liefert wie 32.18. Die Vorteile dieses Weges, der (zumindest für das behandelte Beispiel) etwas umständlicher erscheint, werden erst bei komplizierteren Problemen deutlich:

- ⇒ Das aus 32.21 abzulesende Matrizeneigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{o} \quad (32.22)$$

hat symmetrische Matrizen, und die *Massenmatrix* \mathbf{M} ist eine Diagonalmatrix (beides ist vorteilhaft für die numerische Lösung, siehe Fußnote auf Seite 639). Auf der Hauptdiagonalen stehen die zu den Verschiebungen in \mathbf{v} gehörenden Massen, bei Winkelkoordinaten die Massenträgheitsmomente.

⇒ Die Matrix \mathbf{K} verknüpft entsprechend 32.20 die Verschiebungen mit den Kräften:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{v} . \quad (32.23)$$

\mathbf{K} ist die *Steifigkeitsmatrix* des elastischen Systems. Damit ist der Weg vorgezeichnet, der zum Matrizeneigenwertproblem 32.22 für komplizierte elastische Systeme führt: Mit Hilfe des Finite-Elemente-Algorithmus (für Biegeträger und biegsteife ebene Rahmen siehe Abschnitt 18.2) wird die System-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} erzeugt. Zu jedem Freiheitsgrad (Verschiebung, Verdrehung) wird in der Massenmatrix \mathbf{M} eine Masse bzw. ein Massenträgheitsmoment auf der Hauptdiagonalen platziert.

Massenmatrix mit dem FEM-Algorithmus

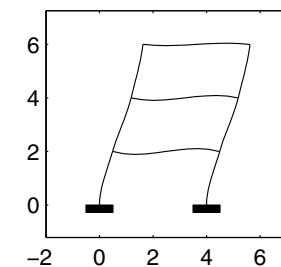
Wenn ein Rahmen gar keine Einzelmassen trägt, die Biegeträger selbst die gesamte oder den wesentlichen Teil der schwingenden Masse ausmachen, ist die beschriebene Strategie unbefriedigend.

Die Finite-Elemente-Methode bietet die Möglichkeit, mit Hilfe der Ansatzfunktionen für die Verformung, die ja auch die Bewegung während des Schwingungsvorgangs beschreiben, die verteilte Masse sinnvoll auf Einzelmassen und Massenträgheitsmomente in den Knoten zu reduzieren. Diese Strategie hat gewisse Ähnlichkeiten mit der Reduzierung verteilter Belastungen (Linienlasten) auf Knotenlasten (Abschnitt 18.2.2). Darauf kann hier nicht weiter eingegangen werden, und es wird auf die unten angegebene Internet-Ergänzung zu diesem Thema verwiesen.

Die Abbildung 32.9 zeigt die mit Matlab-Femset berechneten Schwingungsformen, die zu den beiden kleinsten Eigenfrequenzen gehören, für einen Rahmen, dessen Masse sich ausschließlich verteilt in den Biegeträgern befindet.



1. Eigenschwingungsform



2. Eigenschwingungsform

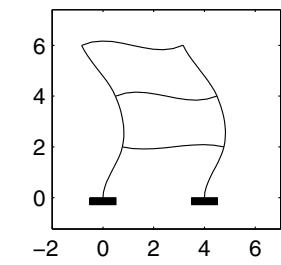


Abbildung 32.9: Eigenschwingungsformen eines Rahmens

WWW - Ergänzung - Vertiefung - WWW



Eigenschwingungen mit der Finite-Elemente-Methode unter

www.TM-aktuell.de bietet u. a. Informationen zu folgenden Themen:

- FEM-Grundgleichungen (Eigenschwingungen elastischer Systeme),
- Steifigkeits- und Massenmatrix (verteilte Masse, Einzelmassen),
- Berücksichtigung verhindelter Verschiebungen,
- Lösung des allgemeinen symmetrischen Matrizeneigenwertproblems,
- Realisierung der Berechnung mit Matlab-Femset,
- Eigenfrequenzen, Eigenschwingungsformen, Beispiele, ...



32.4 Biegekritische Drehzahlen

Das Phänomen der biegekritischen Drehzahl, das im Abschnitt 31.4.4 für eine Welle mit einer Masse behandelt wurde, soll hier zunächst am speziellen Beispiel (**Abbildung 32.10**) untersucht werden. Die mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotierende (masselose) Welle ist mit zwei Massen m_1 und m_2 besetzt. Es wird vereinfachend angenommen, dass beide Massen in der gleichen Ebene mit Exzentrizitäten e_1 bzw. e_2 montiert sind (es wird sich herausstellen, dass dadurch die Allgemeingültigkeit der zu gewinnenden Aussagen nicht beeinträchtigt wird).

Infolge der Exzentrizitäten treten bei der Rotation Fliehkräfte auf, die die Welle verformen, so dass die Schwerpunkte S_1 und S_2 sich schließlich auf Kreisen mit den Radien $(e_1 + v_1)$ bzw. $(e_2 + v_2)$ bewegen und die Massen die Fliehkräfte $m_1(e_1 + v_1)\Omega^2$ bzw. $m_2(e_2 + v_2)\Omega^2$ auf die Welle aufbringen. Der Zusammenhang dieser Kräfte mit den Verschiebungen v_1 und v_2 kann z. B. nach 32.20 aufgeschrieben werden (die k_{ij} ermittelt man mit einem geeigneten Verfahren der Festigkeitslehre):

$$m_1(e_1 + v_1)\Omega^2 = k_{11}v_1 + k_{12}v_2 \quad , \quad m_2(e_2 + v_2)\Omega^2 = k_{12}v_1 + k_{22}v_2 \quad .$$

Das Gleichungssystem wird geordnet:

$$\begin{aligned} (k_{11} - m_1\Omega^2)v_1 + k_{12}v_2 &= m_1e_1\Omega^2 \quad , \\ k_{12}v_1 + (k_{22} - m_2\Omega^2)v_2 &= m_2e_2\Omega^2 \quad . \end{aligned}$$

Die Verformungen v_1 und v_2 , die aus diesem linearen Gleichungssystem zu berechnen sind, können (bei beliebig kleinen Exzentrizitäten) sehr groß werden, wenn die Koeffizientendeterminante sehr klein ist, und für

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_1\Omega^2 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - m_2\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (32.24)$$

wachsen sie (beim ungedämpften System) über alle Maßen. 32.24 ist die Bedingungsgleichung für die Berechnung der kritischen Winkelgeschwindigkeiten Ω_{krit} . Bei einem Vergleich mit der Bedingungsgleichung 32.22 für die Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen ω des durch 32.21 beschriebenen Systems zeigt sich, dass für 32.22 formal die gleiche Determinantenbedingung für die Berechnung der ω -Werte formuliert werden könnte. Diese Erkenntnis lässt sich natürlich verallgemeinern:

Die Biegeeigenkreisfrequenzen ω_i einer mit n Massen besetzten (masselosen) Welle entsprechen den kritischen Winkelgeschwindigkeiten bei der Rotation der Welle. Es ergeben sich n biegekritische Drehzahlen:

$$n_{krit,i} = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (32.25)$$

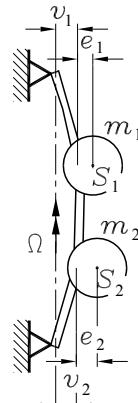


Abbildung 32.10: Welle, besetzt mit zwei Einzelmassen

32.5 Zwangsschwingungen, Schwingungstilgung

Für die Untersuchung linearer Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitsgraden, die einer harmonisch veränderlichen äußeren Einflussgröße (Krafterregung, Unwuchterregung, ...) unterworfen sind, lassen sich viele Erkenntnisse (auch hinsichtlich der mathematischen Behandlung) vom Schwinger mit einem Freiheitsgrad übertragen, wobei als wesentlicher Unterschied beachtet werden muss: An die Stelle einer Differenzialgleichung tritt ein Differenzialgleichungssystem, das lineare Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden besitzt n Eigenkreisfrequenzen.

- ⇒ Die allgemeine Lösung eines linearen Differenzialgleichungssystems setzt sich aus der Lösung des zugehörigen homogenen Systems und einer Partikulärlösung zusammen. Die homogene Lösung enthält die harmonischen Funktionen mit den Argumenten $\omega_i t$, wobei die ω_i die Eigenkreisfrequenzen des Systems sind (die Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems beschreibt die Eigenschwingungen des Schwingungssystems).
- ⇒ Für den gedämpften Schwinger klingen die homogenen Lösungen (Eigenschwingungen) auch bei kleinen Dämpfungen mit der Zeit ab. Die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Systems unterscheiden sich (Voraussetzung: Dämpfung ist nicht extrem groß) nur unwesentlich von denen des ungedämpften Systems, so dass bei ihrer Ermittlung in der Regel auf die Berücksichtigung der Dämpfung verzichtet werden kann.
- ⇒ Nur für die Beschreibung von Anlaufvorgängen (auch Abbremsen oder Auslaufen) einer Anlage wird die allgemeine Lösung des Systems der Bewegungsdifferentialgleichungen benötigt. Zur Analyse solcher Vorgänge ist trotz analytischer Lösungsmöglichkeit eine numerische Behandlung meist bequemer (www.TM-aktuell.de). 

Von besonderem Interesse sind die stationären Zwangsschwingungen (Dauerschwingungen), die sich nach dem Abklingen der Eigenschwingungen einstellen. Auch die Erkenntnisse, die dafür beim Schwinger mit einem Freiheitsgrad gewonnen wurden, können sinngemäß auf ein System mit mehreren Freiheitsgraden übertragen werden:

- ⇒ Eine Erregung mit einer Erregerkreisfrequenz, die in der Nähe einer Eigenkreisfrequenz liegt, führt zu großen Schwingungsausschlägen. **Bei jeder Eigenkreisfrequenz** ($\Omega = \omega_i$, $i = 1, \dots, n$) **liegt eine Resonanzstelle**. Beim ungedämpften System streben die Amplituden der stationären Schwingung bei Resonanz gegen unendlich. Dämpfungen reduzieren die Amplituden, auch bei Resonanz bleiben die Schwingungsausschläge endlich.

Es gibt jedoch noch ein sehr wichtiges Phänomen, für das es bei den Systemen mit einem Freiheitsgrad kein entsprechendes Beispiel geben kann: In Abhängigkeit von den Parametern (Massen, Federn, Dämpfer, ...) können die Amplituden der einzelnen Massen stark unterschiedlich sein. Dies kann bei geeigneter Auslegung des schwingungsfähigen Systems mit Vorteil genutzt werden.

Die Berechnung der Zwangsschwingungen linearer Schwingungssysteme soll hier nur am nachfolgenden einfachen Beispiel demonstriert werden, an dem allerdings der für die technische Praxis wichtigste Effekt gezeigt werden kann.

Beispiel 1:

Die Masse m_1 des skizzierten Zwei-Massen-Schwingers ist der harmonisch veränderlichen Erregerkraft $F_0 \cos \Omega_1 t$ unterworfen. Die Massen bewegen sich reibungsfrei auf der Unterlage, Dämpfung ist zu vernachlässigen.

Gegeben: m_1, m_2, c_1, c_2, F_0 .

Es sollen die Amplituden der stationären Schwingungen beider Massen in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz Ω_1 ermittelt werden.

Die Abbildung 32.11 zeigt die gewählten Bewegungskoordinaten und die an den freigeschnittenen Massen in horizontaler Richtung wirkenden Kräfte. Gleichgewicht liefert:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= F_0 \cos \Omega_1 t \quad , \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

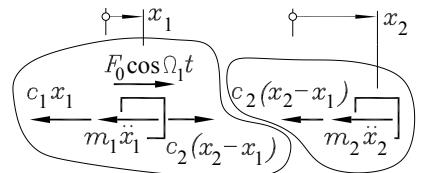
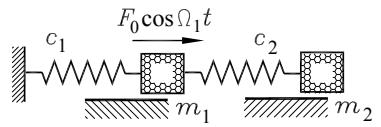


Abbildung 32.11: Freigeschnittene Massen

Da nur das stationäre Schwingungsverhalten untersucht werden soll, wird für das inhomogene Differentialgleichungssystem nur eine Partikulärlösung gesucht. Wenn der Ansatz

$$x_1 = B_1 \cos \Omega_1 t \quad , \quad x_2 = B_2 \cos \Omega_1 t$$

(passend zur rechten Seite) in die Differentialgleichungen eingesetzt wird, ergibt sich über

$$\begin{aligned} [(c_1 + c_2 - m_1 \Omega_1^2) B_1 - c_2 B_2 - F_0] \cos \Omega_1 t &= 0 \quad , \\ [-c_2 B_1 + (c_2 - m_2 \Omega_1^2) B_2] \cos \Omega_1 t &= 0 \end{aligned}$$

(Gleichungen können für beliebiges t nur erfüllt sein, wenn die Inhalte der eckigen Klammern verschwinden) das lineare Gleichungssystem für die Berechnung der Amplituden B_1 und B_2 :

$$\begin{bmatrix} \frac{c_1+c_2}{m_1} - \Omega_1^2 & -\frac{c_2}{m_1} \\ -\frac{c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} - \Omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_0}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{f} \quad . \quad (32.26)$$

Es wird mit Hilfe der Cramerschen Regel gelöst:

$$B_1 = \frac{\frac{F_0}{m_1} \left(\frac{c_2}{m_2} - \Omega_1^2 \right)}{\det(\mathbf{A})} \quad , \quad B_2 = \frac{\frac{F_0}{m_1} \frac{c_2}{m_2}}{\det(\mathbf{A})} \quad . \quad (32.27)$$

Im Nenner der Ergebnisse steht jeweils mit

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \frac{c_1+c_2}{m_1} - \Omega_1^2 & -\frac{c_2}{m_1} \\ -\frac{c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} - \Omega_1^2 \end{vmatrix} = \Omega_1^4 - \left(\frac{c_1+c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \Omega_1^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \quad (32.28)$$

die Koeffizientendeterminante der Matrix \mathbf{A} des Gleichungssystems 32.26, die genau für die Ω_1 -Werte Null wird, die den Eigenkreisfrequenzen der freien Schwingungen des Systems entsprechen, weil eine Gleichung der Form 32.28 sich auch als Bestimmungsgleichung für die Eigenkreisfrequenzen ergibt. Man vergleiche das Beispiel im Abschnitt 32.1, für das mit $c_3 = 0$ das hier betrachtete Schwingungssystem entsteht, Gleichung 32.5 wird zu

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0 \quad , \quad (32.29)$$

und diese Gleichung, aus der ω_1 und ω_2 berechnet werden können, zeigt, dass die Nenner in 32.27 für $\Omega_1 = \omega_1$ und $\Omega_1 = \omega_2$ den Wert Null haben, und nach dem Vietaschen Wurzelsatz kann 32.28 deshalb in der Form

$$\det(A) = (\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)$$

aufgeschrieben werden. Damit erhält man für die Amplituden nach 32.27:

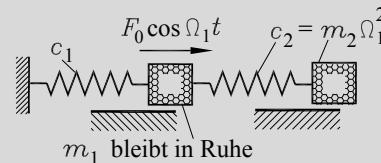
$$B_1 = \frac{\frac{F_0}{m_1} \left(\frac{c_2}{m_2} - \Omega_1^2 \right)}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)} \quad , \quad B_2 = \frac{\frac{F_0}{m_1} \frac{c_2}{m_2}}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)} \quad . \quad (32.30)$$

Aus diesem Ergebnis lässt sich ein bemerkenswertes Phänomen ablesen: Während die Masse m_2 , auf die die Erregerkraft nur mittelbar (von der Masse m_1 über die zwischengeschaltete Feder) wirkt, bei jeder Parameterkombination Schwingungen mit der Amplitude B_2 ausführt, bleibt die Masse m_1 bei $\Omega_1^2 = \frac{c_2}{m_2}$ in Ruhe. Diesen Effekt nennt man

Schwingungstilgung:

Die stationäre Zwangsschwingung einer harmonisch mit der Erregerkreisfrequenz Ω_1 erregten Masse m_1 kann durch Anbringen eines zusätzlichen Schwingers (*Tilgers*) unterdrückt („getilgt“) werden, Bedingung für die Tilgung der Schwingung von m_1 ist:

Erregerkreisfrequenz = Eigenkreisfrequenz des Tilgers.



- ⇒ Man beachte, dass die Eigenkreisfrequenz ω des Tilgers so anzusetzen ist, als wäre er ein selbstständiger Schwinger. Es gilt $\omega^2 = \frac{c_2}{m_2}$, so dass die beiden Parameter c_2 und m_2 für die Auslegung des Tilgers zur Verfügung stehen. Bei $\Omega_1 = \omega$ wird die Schwingung der Masse m_1 getilgt, unabhängig von ihrer Größe und unabhängig von der Federzahl c_1 .
- ⇒ Schwingungstilgung³ ist selbst dann möglich, wenn ein Schwinger mit einer Frequenz Ω_1 erregt wird, die seiner Eigenkreisfrequenz entspricht (Resonanz). Dann muss ein Tilger angekoppelt werden, dessen Eigenkreisfrequenz ebenfalls Ω_1 ist. Das entstehende System mit zwei Freiheitsgraden hat zwei Eigenkreisfrequenzen, die sich von Ω_1 unterscheiden, bei Erregung mit Ω_1 bleibt die Masse m_1 in Ruhe (Beispiel 2).
- ⇒ Das Phänomen der Schwingungstilgung wurde hier mit einer harmonischen Erregerkraft an einem dämpfungsfreien System demonstriert. Die gewonnenen Erkenntnisse (insbesondere die Tatsache, dass für die Schwingungstilgung die Eigenkreisfrequenz des Tilgers mit der



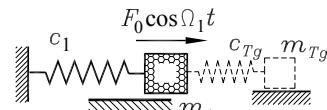
³Schwingungstilgung wird in der technischen Praxis in den verschiedensten Bereichen genutzt, z. B. bei Kraftfahrzeugen zur Verminderung der Karosserieschwingungen, in der Antriebstechnik, wo vornehmlich Torsionsschwingungen getilgt werden, aber auch im Bauwesen (speziell für Brücken). Der spektakulärste Tilger ist sicher die pendelnd aufgehängte Riesenkugel im 101-Tower in Taipeh (Höhe: 509 m), der in einem der oberen Stockwerke als Erdbebenschutz dient. Einige Links zu interessanten Anwendungen findet man unter www.TM-aktuell.de.

Erregerkreisfrequenz übereinstimmen muss) lassen sich jedoch auf den (praktisch besonders wichtigen) Schwinger mit Unwuchterregung übertragen.

- ⇒ Die Dämpfungsfreiheit ist praktisch natürlich nicht realisierbar. Dies hat den Vorteil, dass die Eigenschwingung in jedem Fall abklingt und nur die stationäre Schwingung betrachtet werden muss. Für gedämpfte Schwinger bleibt jedoch auch im stationären Zustand immer eine Restschwingung. Wenn Schwingungen getilgt werden sollen, sollte die Dämpfung also möglichst klein sein. Bezuglich der unvermeidlichen Restschwingungen bei vorhandener Dämpfung beachte man die Ergebnisse der Aufgabe 32.3.

Beispiel 2: Der skizzierte Schwinger (Masse m_1 , Federzahl c_1) wird mit der Erregerkreisfrequenz Ω_1 erregt. Für den Fall

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$$



(Resonanz) wachsen die Ausschläge über alle Maßen. Es soll ein Tilger (Masse $m_{Tg} = \frac{1}{5}m_1$, Federzahl c_{Tg}) angebracht werden, der genau die Resonanzfrequenz tilgt. Dies wird erreicht, wenn folgende Bedingung gilt:

$$\omega_{Tg} = \sqrt{\frac{c_{Tg}}{m_{Tg}}} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_{Tg}}{m_{Tg}} = \frac{c_1}{m_1} \quad \Rightarrow \quad c_{Tg} = \frac{1}{5}c_1 \quad .$$

Die beiden Eigenkreisfrequenzen des Schwingungssystems aus Masse m_1 und Tilger m_{Tg} werden nach 32.29 berechnet. Man erhält:



$$\omega_1 = 0,801 \omega_{Tg} \quad , \quad \omega_2 = 1,248 \omega_{Tg} \quad .$$

Damit können die Amplituden nach 32.30 aufgeschrieben werden. Die Grafik in der Abbildung 32.12 (siehe auch www.TM-aktuell.de) zeigt sie in der dimensionslosen Form

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \frac{B_1}{\frac{F_0}{c_1}} = \frac{\frac{c_1}{m_1} \left(\frac{c_2}{m_2} - \Omega_1^2 \right)}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)} = \frac{\omega_{Tg}^2 (\omega_{Tg}^2 - \Omega_1^2)}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)} = \frac{1 - \eta^2}{(\eta^2 - 0,801^2)(\eta^2 - 1,248^2)} ; \\ \bar{B}_2 &= \frac{B_2}{\frac{F_0}{c_1}} = \frac{\frac{c_1}{m_1} \frac{c_2}{m_2}}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)} = \frac{\omega_{Tg}^4}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)(\Omega_1^2 - \omega_2^2)} = \frac{1}{(\eta^2 - 0,801^2)(\eta^2 - 1,248^2)} . \end{aligned}$$

In diesen Formeln wurde $\eta = \frac{\Omega_1}{\omega_{Tg}}$ gesetzt, so dass der Tilgungspunkt bei $\eta = 1$ liegt.

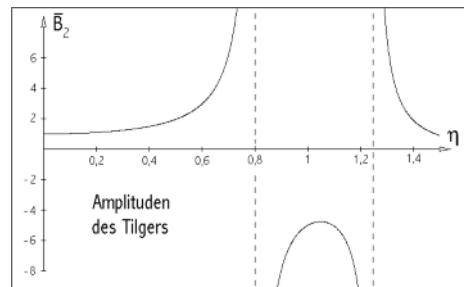
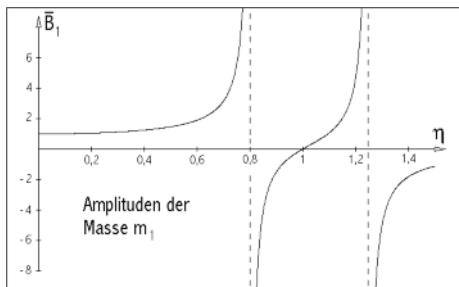


Abbildung 32.12: Amplituden des Schwingers und des Tilgers

32.6 Kontinuierliche Massebelegung, unendlich viele Freiheitsgrade

Obwohl in der Realität die Masse immer über das gesamte schwingende System verteilt ist, sind die bisher getroffenen Annahmen diskreter Massen und masseloser Federn für zahlreiche Praxisprobleme ausreichend. Wenn jedoch der wesentliche Teil der schwingenden Masse nicht an bestimmten Punkten konzentriert ist (z. B. in langen Antriebswellen), sollte diese *kontinuierliche Massebelegung* für die Berechnung (z. B. der kritischen Drehzahlen) berücksichtigt werden.

Wenn jedes der unendlich vielen Masseteilchen als schwingende Masse angesehen werden soll, hat so ein Berechnungsmodell natürlich „unendlich viele Freiheitsgrade“ und damit auch „unendlich viele Eigenfrequenzen“, von denen allerdings nur wenige (in der Regel die kleinsten) von Interesse sind. Exemplarisch für Schwinger mit unendlich vielen Freiheitsgraden werden hier die Biegeschwingungen des geraden Trägers behandelt.

32.6.1 Biegeschwingungen gerader Träger

Betrachtet werden gerade biegesteife Träger, die kontinuierlich mit Masse belegt sind ($\rho A \rightarrow$ Masse pro Länge). Bei Biegeschwingungen bewegen sich die Massenteile senkrecht zur Trägerachse, wie es die Abbildung 32.13 andeutet.

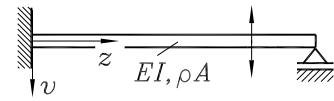


Abbildung 32.13: Biegeschwinger

Im Abschnitt 17.1 wurde die Differentialgleichung vierter Ordnung für die Biegeverformung gerader Träger $(EIv'')'' = q$ hergeleitet, die sich auf die im Kapitel 7.1 definierten Schnittgrößen bezieht. Eine positive Linienlast q ist nach unten gerichtet.

Als einzige Belastung des schwingenden Trägers tritt die d'Alembertsche Kraft $\rho Adz\ddot{v}$ am differenziell kleinen Masseteilchen auf (Abbildung 32.14), die entgegen der positiven Richtung für die Verschiebung v angebrachten werden muss. Es ist damit eine negative Linienlast (Kraft pro Länge dz) $q = -\rho A\ddot{v}$, und man erhält die Differentialgleichung

$$(EIv'')'' = -\rho A\ddot{v} . \quad (32.31)$$

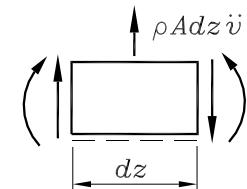


Abbildung 32.14: d'Alembertsche Kraft

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $v(z,t)$, die Striche bedeuten Ableitungen nach der Koordinate z , die Punkte Ableitungen nach der Zeit t .

Mit dem so genannten *Bernoullischen Produktansatz* für die gesuchte Funktion

$$v(z,t) = Z(z) T(t) \quad (32.32)$$

(die beiden Funktionen Z bzw. T sind jeweils nur von einer der beiden unabhängigen Variablen abhängig) gelingt es, die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen. Einsetzen dieses Ansatzes in 32.31 liefert:

$$(EIZ'')'' T = -\rho A Z \ddot{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{(EIZ'')''}{\rho A Z} = -\frac{\ddot{T}}{T} = k . \quad (32.33)$$

Es wurden alle von z abhängigen Funktionen (das können auch die Biegesteifigkeit EI und die Massebelegung ρA sein) auf einer Seite der Gleichung und alle von t abhängigen Funktionen auf der anderen Seite zusammengefasst. Dann können die Gesamtausdrücke auf beiden Seiten von keiner der beiden unabhängigen Variablen abhängig sein. Sie wurden deshalb gleich einer Konstanten k gesetzt, mit der nun zwei gewöhnliche Differentialgleichungen formuliert werden. Die einfachere der beiden $\ddot{T} + kT = 0$ ist die bekannte Differentialgleichung der freien unge-dämpften Schwingung 31.10 (Seite 613), und damit ist klar, dass die Konstante k das Quadrat der Eigenkreisfrequenz einer harmonischen Schwingung ist: $k = \omega^2$.

Von Interesse ist also vornehmlich dieses ω und eventuell die zugehörige Schwingungsform. Beides kann aus der anderen gewöhnlichen Differentialgleichung berechnet werden:

$$\frac{(EI Z'')''}{\rho A Z} = k = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad (EI Z'')'' - \omega^2 \rho A Z = 0 \quad . \quad (32.34)$$

32.34 ist eine homogene Differentialgleichung 4. Ordnung für die Schwingungsform Z , die unter Beachtung der Randbedingungen (lineares Randwertproblem) gelöst werden muss.

32.6.2 Analytische Lösung für Träger mit konstantem Querschnitt

Wenn sowohl die Biegesteifigkeit EI als auch die Massebelegung ρA konstant sind, vereinfacht sich 32.34 zu:

$$Z''' - \omega^2 \frac{\rho A}{EI} Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z''' - \frac{\lambda^4}{l^4} Z = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} l^4 \quad . \quad (32.35)$$

Zur Vereinfachung wurde die Abkürzung λ eingeführt, wobei l eine beliebig zu wählende Bezugslänge ist, die dafür sorgt, dass λ dimensionslos wird.

Die gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung 4. Ordnung 32.35 gleicht bis auf das Vorzeichen der Differentialgleichung 19.5 (Seite 313), deren Lösung dort ausführlich demonstriert wird. Der gleiche Weg führt für 32.35 auf die allgemeine Lösung

$$Z = C_1 \cos\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_2 \sin\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) \quad . \quad (32.36)$$

Die Integrationskonstanten in 32.36 müssen aus Randbedingungen bestimmt werden. Es ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem, das nur dann nichttriviale Lösungen haben kann, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Bedingung führt auf eine Bestimmungsgleichung für λ , aus der die (unendlich vielen) Werte λ_i bestimmt werden können, aus denen die Eigenkreisfrequenzen

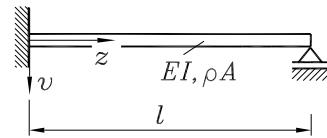
$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (32.37)$$

berechnet werden. Zu jeder Eigenfrequenz gehört eine Eigenschwingungsform, die allerdings nur bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt werden kann. Praktisch kann man so vorgehen: Man setzt in das homogene Gleichungssystem für die Integrationskonstanten den zur Eigenschwingungsform gehörenden λ_i -Wert ein und ordnet einer beliebigen (allerdings nicht von vornherein verschwindenden) Integrationskonstanten den Wert 1 zu, um dann aus dem um eine Gleichung reduzierten System die anderen Integrationskonstanten zu bestimmen. Damit ist dann die Schwingungsform $Z_i(z)$ bis auf einen beliebigen Faktor bekannt.

Beispiel 1:

Für den skizzierten Träger sind die drei kleinsten Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen und die zugehörigen Schwingungsformen zu ermitteln.

Gegeben: $EI = 3000 \text{ Nm}^2$; $\rho A = 3 \text{ kg/m}$; $l = 1 \text{ m}$.



Die allgemeine Lösung für die Schwingungsform 32.36 muss folgenden Randbedingungen angepasst werden:

- 1.) $v(z=0) = 0 \Rightarrow Z(z=0) = 0$,
- 2.) $v'(z=0) = 0 \Rightarrow Z'(z=0) = 0$,
- 3.) $v(z=l) = 0 \Rightarrow Z(z=l) = 0$,
- 4.) $M_b(z=l) = -EIv''(z=l) = 0 \Rightarrow Z''(z=l) = 0$.

Es werden also auch die ersten beiden Ableitungen der Funktion $Z(z)$ benötigt:

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{\lambda}{l} \left[-C_1 \sin\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_2 \cos\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_3 \sinh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_4 \cosh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) \right] \\ Z'' &= \frac{\lambda^2}{l^2} \left[-C_1 \cos\left(\lambda \frac{z}{l}\right) - C_2 \sin\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) \right] \end{aligned} \quad (32.38)$$

Die vier Randbedingungen ergeben folgende vier Gleichungen:

- 1.) $C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1$,
- 2.) $C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_2$,
- 3.) $C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0$,
- 4.) $-C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0$.

Die beiden ersten Gleichungen können genutzt werden, um die Anzahl der Unbekannten auf zwei zu reduzieren, so dass folgendes Gleichungssystem verbleibt:

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda - \cosh \lambda & \sin \lambda - \sinh \lambda \\ -\cos \lambda - \cosh \lambda & -\sin \lambda - \sinh \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses homogene Gleichungssystem kann nur nichttriviale Lösungen haben, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$(\cos \lambda - \cosh \lambda)(-\sin \lambda - \sinh \lambda) - (-\cos \lambda - \cosh \lambda)(\sin \lambda - \sinh \lambda) = 0.$$

Nach einigen elementaren Umformungen erhält man die Gleichung

$$f(\lambda) = \sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda = 0, \quad (32.39)$$

die nur numerisch gelöst werden kann. Die drei kleinsten (positiven) Werte, die diese Gleichung erfüllen, sind:

$$\lambda_1 = 3,927 \quad ; \quad \lambda_2 = 7,069 \quad ; \quad \lambda_3 = 10,21 \quad .$$

Daraus errechnet man die Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_1 = 487,6 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \omega_2 = 1580 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \omega_3 = 3297 \text{ s}^{-1} \quad .$$

Zur Berechnung der Schwingungsformen $Z(z)$ wird (willkürlich) die Konstante $C_1 = 1$ gesetzt. Dann erhält man $C_3 = -1$ und

$$C_2 = -\frac{\cos \lambda - \cosh \lambda}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \quad , \quad C_4 = -C_2 \quad ,$$

so dass sich die zum Eigenwert λ_i gehörende Schwingungsform folgendermaßen darstellen lässt:

$$Z_i(z) = \cos\left(\lambda_i \frac{z}{l}\right) - \cosh\left(\lambda_i \frac{z}{l}\right) - \frac{\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} \left[\sin\left(\lambda_i \frac{z}{l}\right) - \sinh\left(\lambda_i \frac{z}{l}\right) \right] \quad .$$

Die Abbildung 32.15 zeigt die grafische Darstellung der Schwingungsformen zu den ersten drei Eigenwerten.

Wenn - wie für die Lösung dieses Problems und ähnlicher Aufgaben - die numerische Berechnung am Ende doch nicht zu vermeiden ist, sollte man sich fragen, wann man zur numerischen Berechnung übergehen sollte. Natürlich kann man bereits für die Lösung der Differenzialgleichung ein numerisches Verfahren verwenden. Wenn der Trägerquerschnitt nicht konstant ist, wird dies in der Regel die einzige praktikable Möglichkeit sein.

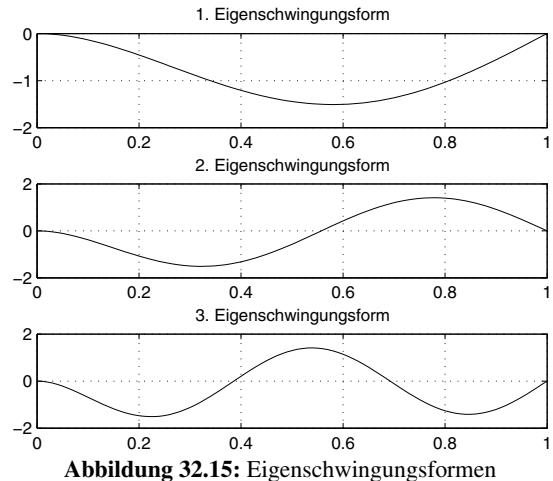


Abbildung 32.15: Eigenschwingungsformen

Aber für den Träger mit konstantem Querschnitt ist die analytische Lösung die im Sinne des Berechnungsmodells exakte Lösung auch dann noch, wenn zum Schluss die Lösung der Eigenwertgleichung nur numerisch gelingt, denn man kann die Eigenwerte aus dieser „exakten“ Gleichung beliebig genau bestimmen. Und genau aus diesem Grund bietet es sich an, mit der Numerik schon etwas früher einzusteigen, an einem Punkt, an dem die Vorteile der „exakten“ Lösung erhalten bleiben, aber der aufwendige (und damit fehleranfällige) Teil der Handrechnung deutlich reduziert werden kann. Dieser Punkt ist bei diesem Beispiel erreicht, wenn man das homogene Gleichungssystem für die Berechnung der Integrationskonstanten aufgestellt hat, denn dann kann man ohne Verlust der Genauigkeit der Rechnung für das Suchen der Nullstellen die Bedingung „Koeffizientendeterminante gleich Null“ schon numerisch realisieren. Und wenn man sich dazu entschließt, sollte man konsequent sein und mit der numerischen Rechnung schon unmittelbar nach dem Aufschreiben der Gleichungen starten (ohne den Versuch, einige „einfach“ zu eliminierende Unbekannte vorab zu entfernen). Im betrachteten Beispiel wäre dies das Gleichungssystem mit vier Gleichungen, das sich aus den Randbedingungen ergibt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos \lambda & \sin \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{o} \quad .$$

Die Eigenwertgleichung lautet dann

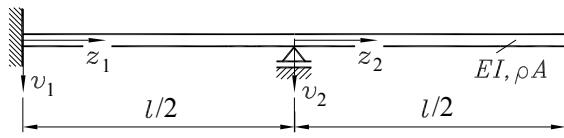
$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A}) = 0 \quad ,$$

die sich von 32.39 dadurch unterscheidet, dass bei der numerischen Lösung für jede Funktionswertberechnung $f(\lambda)$ eine Determinante berechnet werden muss, was bei Nutzung einer geeigneten Software keinen nennenswerten Unterschied bedeutet.

Die Berechnung mit beiden Varianten und eine große Anzahl von Vergleichsrechnungen mit verschiedenen Näherungsverfahren (Differenzenverfahren, Methode der finiten Elemente, ...) und verschiedenen Software-Produkten findet man unter www.TM-aktuell.de.



Beispiel 2: Für den skizzierten Biegeschwinger ist das homogene Gleichungssystem zu formulieren, mit dem die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen berechnet werden können.



Gegeben: EI , ρA , l .

Es muss in zwei Abschnitten gearbeitet werden (die nachfolgend verwendeten Koordinaten sind im Bild der Aufgabenstellung zu sehen). Die auf die beiden Abschnitte bezogenen Lösungen (als „beliebige Bezugslänge“ wird $l^* = \frac{l}{2}$ gewählt)

$$\begin{aligned} Z_1 &= C_1 \cos\left(\lambda \frac{z_1}{l^*}\right) + C_2 \sin\left(\lambda \frac{z_1}{l^*}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda \frac{z_1}{l^*}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda \frac{z_1}{l^*}\right) \quad , \\ Z_2 &= C_5 \cos\left(\lambda \frac{z_2}{l^*}\right) + C_6 \sin\left(\lambda \frac{z_2}{l^*}\right) + C_7 \cosh\left(\lambda \frac{z_2}{l^*}\right) + C_8 \sinh\left(\lambda \frac{z_2}{l^*}\right) \end{aligned}$$

enthalten acht Integrationskonstanten und müssen folgenden Rand- und Übergangsbedingungen angepasst werden:

- 1.) $v_1(z_1 = 0) = 0 \Rightarrow Z_1(z_1 = 0) = 0 \quad ,$
- 2.) $v'_1(z_1 = 0) = 0 \Rightarrow Z'_1(z_1 = 0) = 0 \quad ,$
- 3.) $v_1(z_1 = l^*) = 0 \Rightarrow Z_1(z_1 = l^*) = 0 \quad ,$
- 4.) $v'_1(z_1 = l^*) = v'_2(z_2 = 0) \Rightarrow Z'_1(z_1 = l^*) = Z'_2(z_2 = 0) \quad ,$
- 5.) $M_{b1}(z_1 = l^*) = M_{b2}(z_2 = 0) \Rightarrow Z''_1(z_1 = l^*) = Z''_2(z_2 = 0) \quad ,$
- 6.) $v_2(z_2 = 0) = 0 \Rightarrow Z_2(z_2 = 0) = 0 \quad ,$
- 7.) $M_{b2}(z_2 = l^*) = 0 \Rightarrow Z''_2(z_2 = l^*) = 0 \quad ,$
- 8.) $F_{Q2}(z_2 = l^*) = 0 \Rightarrow Z'''_2(z_2 = l^*) = 0 \quad .$

Zusätzlich zu den beiden ersten Ableitungen von Z (Gleichungen 32.38) wird hier für die Querkraft-Randbedingung im rechten Bereich noch die dritte Ableitung benötigt:

$$Z''' = \frac{\lambda^3}{l^3} \left[C_1 \sin\left(\lambda \frac{z}{l}\right) - C_2 \cos\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_3 \sinh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) + C_4 \cosh\left(\lambda \frac{z}{l}\right) \right] \quad . \quad (32.40)$$

Einsetzen der allgemeinen Lösungen $Z_1(z_1)$ bzw. $Z_2(z_2)$ und deren Ableitungen in die Rand- und Übergangsbedingungen liefert das homogene Gleichungssystem für die acht Integrationskonstanten:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda & \sin \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & \sinh \lambda & \cosh \lambda & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \lambda & -\sin \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \lambda & -\cos \lambda & \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann wieder nur dann nichttriviale Lösungen haben, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Bedingung gestattet die Berechnung der (unendlich vielen) Eigenwerte λ_i und die Berechnung der zugehörigen Schwingungsformen. Die komplette Berechnung findet man unter www.TM-aktuell.de.



WWW - Ergänzung - Vertiefung - WWW



Biegeschwingungen gerader Träger mit kontinuierlicher Massebelegung
unter www.TM-aktuell.de bietet Informationen zu folgenden Themen:



- Theoretische Grundlagen verschiedener Verfahren (Skript),
- Möglichkeiten der analytischen Lösung in Kombination mit numerischer Auswertung,
- Näherungslösung mit dem Differenzenverfahren,
- Näherungslösung mit der Methode der finiten Elemente,
- Näherungslösung mit dem Verfahren von Ritz,
- Näherung des kleinsten Eigenwertes mit dem Rayleighschen Quotienten.

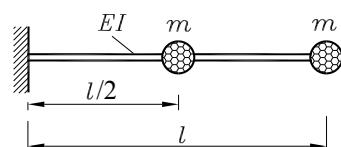


32.7 Aufgaben

Aufgabe 32.1: Ein masseloser Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist mit zwei Massen m besetzt.

Gegeben: m , EI , l .

Man ermittle die beiden Eigenkreisfrequenzen für die Biegeschwingungen des Systems.



Aufgabe 32.2:

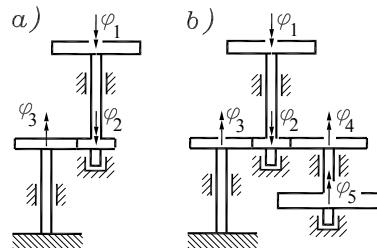
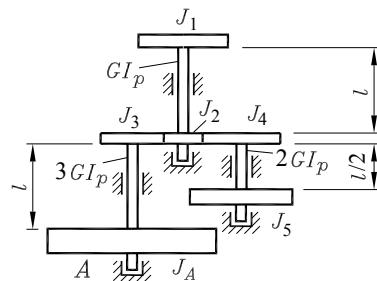
Eine Anlage A wird von einem Motor mit dem Massenträgheitsmoment J_1 angetrieben. J_2 , J_3 und J_4 sind die Massenträgheitsmomente des Verzweigungsgetriebes, J_5 das Massenträgheitsmoment des Lüftersystems.

Das Massenträgheitsmoment J_A der anzutreibenden Anlage ist wesentlich größer als die anderen Drehmassen, so dass das Antriebssystem bezüglich seiner Drehschwingungen als an der Anlage A starr eingespannt betrachtet werden darf.

Man ermittle

- für den Antrieb ohne Lüftersystem die Eigenkreisfrequenzen der Torsionsschwingungen,
- für den Antrieb mit Lüftersystem das Matrizeneigenwertproblem, aus dem die Eigenkreisfrequenzen der Torsionsschwingungen berechnet werden könnten.

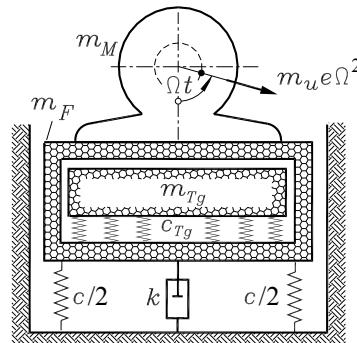
Gegeben: GI_p , l , J_1 , $J_2 = \frac{1}{5}J_1$, $J_3 = J_4 = 2J_1$, $J_5 = 10J_1$, $\frac{r_3}{r_2} = 5$, $\frac{r_4}{r_2} = 2$.

**Aufgabe 32.3:**

Ein mit der Drehzahl n betriebener Motor ist auf einem elastisch und gedämpft abgestützten Kastenfundament befestigt.

Die durch die Motorunwucht $U = m_u e$ verursachte Fliehkraft wird in horizontaler Richtung durch die Führung des Fundaments aufgenommen. Die vertikale Komponente kann zu störenden Vertikalschwingungen des Motor-Fundament-Blockes führen, wenn die Erregerkreisfrequenz in der Nähe der Eigenkreisfrequenz des erregten Systems liegt. Deshalb soll ein Tilger im Inneren des Fundaments diese Bewegung tilgen.

Gegeben: $m_M = 50\text{ kg}$; $m_F = 100\text{ kg}$; $c = 2,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}$; $n = 400 \text{ min}^{-1}$;
 $m_{Tg} = 75\text{ kg}$; $m_u e = 0,1 \text{ kgcm}$; $k = 3,75 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$.



- Man berechne die Federzahl c_{Tg} für den Schwingungstilger (c_{Tg} soll die resultierende Federzahl der parallel geschalteten Federn zwischen Fundament und Tilger sein).
- Durch numerische Integration der Bewegungs-Differenzialgleichungen ist der Einschwingvorgang zu analysieren: Man ermittle die Bewegung des Motor-Fundament-Blocks ohne Tilger und mit dem dimensionierten Tilger die Bewegungen von Motor-Fundament-Block und Tilger ($t = 0 \dots 1,5 \text{ s}$). Anfangsgeschwindigkeiten und -auslenkungen sollen gleich Null angenommen werden.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

33 Prinzipien der Mechanik

Die Technische Mechanik kann vollständig auf wenigen Axiomen (mathematisch nicht beweisbaren, aber empirisch gesicherten und experimentell nachprüfbaren Aussagen) aufgebaut werden. Auf den Axiomen der Statik (Abschnitt 1.2) und dem 2. Newtonschen Axiom (Abschnitt 28.1) ruht das gesamte Gebäude der *Klassischen Mechanik*.

Als *Prinzipien der Mechanik* werden Aussagen bezeichnet, die die klassischen Axiome ersetzen können. Sie haben damit selbst axiomatischen Charakter, könnten anstelle der klassischen Axiome die Grundlage der Mechanik sein, sie erweitern jedoch das Gebiet der Klassischen Mechanik nicht. Natürlich dürfen die Prinzipien auch nicht im Widerspruch zu den klassischen Axiomen stehen. Sie sind wechselseitig auseinander herleitbar. Mit diesen Querverbindungen zwischen den klassischen Axiomen und den Prinzipien der Mechanik befasst sich die *Analytische Mechanik*, die darüber hinaus für spezielle Problemstellungen handliche Regeln für die mathematische Formulierung bereitstellt.

In diesem Kapitel werden die Prinzipien behandelt, die für wichtige spezielle Probleme erhebliche Vorteile gegenüber der Anwendung der klassischen Axiome bieten.

33.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Im Abschnitt 28.4 wurde die Arbeit als Produkt aus einer Verschiebung $d\vec{r}$ und der in Richtung der Verschiebung wirkenden Kraftkomponente definiert. Um den Arbeitsbegriff auch auf Probleme der Statik anwenden zu können, bei denen bekanntlich keine Verschiebungen auftreten, werden *virtuelle Verschiebungen* $\delta\vec{r}$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

- Virtuelle (denkbare, nicht notwendigerweise tatsächlich auftretende) Verschiebungen bzw. Verdrehungen sind infinitesimal klein und können wie Differenziale behandelt werden.
- Virtuelle Verschiebungen bzw. Verdrehungen müssen mit den geometrischen Bindungen des Systems verträglich sein.

Die **virtuelle Arbeit einer Kraft** ist das skalare Produkt aus der Kraft und der virtuellen Verschiebung des Kraftangriffspunktes, analog dazu wird auch die **virtuelle Arbeit eines Moments** definiert:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \quad , \quad \delta W = \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi} \quad . \quad (33.1)$$

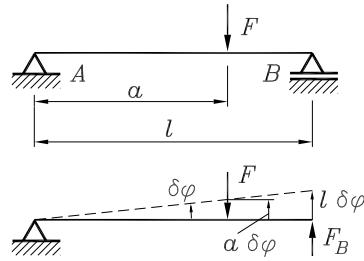
Virtuelle Verschiebungen bzw. Verdrehungen sind nur möglich, wenn das System mindestens einen Freiheitsgrad an. Bei statisch fixierten Systemen hilft das Lösen von Bindungen (und Ersetzen durch Kräfte bzw. Momente).

Beispiel 1:

Das Loslager bei B wird durch die Kraft F_B ersetzt. Der (damit nur teilweise von äußeren Bindungen gelöste) Träger kann sich dann um den Punkt A drehen, eingezeichnet ist die virtuelle Verdrehung $\delta\varphi$. Weil diese infinitesimal klein ist, dürfen die virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffspunkte in der Form $a\delta\varphi$ bzw. $l\delta\varphi$ aufgeschrieben werden, und die von den beiden Kräften geleistete virtuelle Arbeit beträgt:

$$\delta W = F_B l \delta\varphi - F a \delta\varphi = (F_B l - F a) \delta\varphi$$

(Minuszeichen, weil die virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes von F dem Richtungssinn der Kraft entgegengesetzt ist). In der Klammer steht exakt das Momentengleichgewicht um den Punkt A , das nach den Regeln der Statik Null ist, so dass sich für die virtuelle Arbeit $\delta W = 0$ ergibt. Diese am speziellen Beispiel demonstrierte Aussage ist umkehrbar und verallgemeinerungsfähig und wird bezeichnet als

**Prinzip der virtuellen Arbeit:**

Ein mechanisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn bei einer virtuellen Verschiebung oder Verdrehung aus der Gleichgewichtslage heraus die dabei von den äußeren Kräften und Momenten geleistete virtuelle Arbeit verschwindet:

$$\delta W = \sum \vec{F}_{j,e} \cdot \delta \vec{r}_j + \sum \vec{M}_{j,e} \cdot \delta \vec{\varphi}_j = 0 \quad . \quad (33.2)$$

- ⇒ Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist gleichwertig mit dem Gleichgewichtsaxiom der Statik und könnte an dessen Stelle die Grundlage sein, auf der die Statik aufbaut.
- ⇒ Man beachte, dass in 33.2 nur die äußeren Belastungen eingehen. Zwangskräfte (im Beispiel 1 die Lagerreaktionen bei A) sind keinen virtuellen Verschiebungen ausgesetzt und leisten dementsprechend keine virtuelle Arbeit. Genau dies ist der Vorteil (speziell für kompliziertere Systeme) bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit: Man löst nur so viele Bindungen (im Beispiel 1 das Lager B), wie für das Aufschreiben der Gleichungen für die gesuchten Größen erforderlich ist. Diesem Vorteil steht der Nachteil gegenüber, gegebenenfalls komplizierte kinematische Überlegungen anstellen zu müssen. Diese können häufig anschaulich unter Beachtung der Regeln für die „Kinematik starrer Körper“ (Kapitel 27) oder formal gewonnen werden, was nachfolgend beschrieben wird.

Die Lage eines starren Systems mit f Freiheitsgraden kann immer durch f voneinander unabhängige (generalisierte) Koordinaten q_1, \dots, q_f eindeutig beschrieben werden. Häufig bietet sich folgender Weg für das Aufschreiben der virtuellen Verschiebung $\delta \vec{r}$ eines Kraftangriffspunktes an: Die Komponenten des Ortsvektors \vec{r} , der die Lage des Kraftangriffspunktes in einem festen Koordinatensystem beschreibt, werden in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten formuliert. Weil eine virtuelle Verschiebung wie ein Differenzial behandelt werden darf, ergibt sich $\delta \vec{r}$ dann formal nach:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_f) \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_f} \delta q_f \quad . \quad (33.3)$$

Man beachte, dass die generalisierten Koordinaten q_i voneinander unabhängig sein müssen (bei einem System mit einem Freiheitsgrad gibt es deshalb nur eine Koordinate q_1), dementsprechend sind auch beliebige (voneinander unabhängige) virtuelle Verschiebungen δq_i möglich. Die virtuelle Arbeit kann schließlich immer in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$\delta W = (\dots) \delta q_1 + (\dots) \delta q_2 + \dots + (\dots) \delta q_f = 0 \quad . \quad (33.4)$$

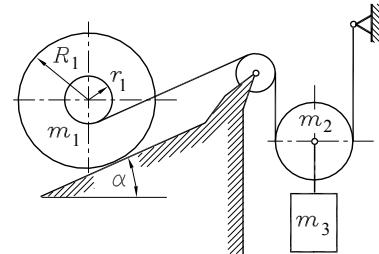
Da die δq_i beliebige Werte annehmen können, ist die Gleichung 33.4 nur erfüllt, wenn jede Klammer für sich Null wird. Dies liefert f Bestimmungsgleichungen für f unbekannten Größen.

Beispiel 2:

Eine Walze auf der schiefen Ebene wird über ein starres Seil von einem Gegengewicht im Gleichgewicht gehalten.

Gegeben: m_1 , m_2 , R_1 , r_1 , α .

Die Größe der Masse m_3 soll so bestimmt werden, dass das System im Gleichgewicht ist.



Das System hat einen Freiheitsgrad, so dass alle Verschiebungen durch eine Koordinate ausgedrückt werden können. Die kinematischen Zusammenhänge sind mit Hilfe der Momentanpole M_1 und M_2 (Abbildung 33.1) der Bewegungen von Walze bzw. Rolle recht einfach zu analysieren (vgl. Abschnitt 27.1.3): Wenn der Masse m_3 die virtuelle Verschiebung δx_3 erteilt wird, bewegt sich auch der Mittelpunkt der Rolle m_2 um diese Strecke.

Das Seil muss die doppelte Strecke zurücklegen und bringt die virtuelle Verschiebung $2\delta x_3$ auf die Walze m_1 auf, deren Mittelpunktverschiebung sich aus der skizzierten Strahlensatzfigur ergibt:

$$\frac{\delta x_1}{2\delta x_3} = \frac{R_1}{R_1 - r_1} \quad \Rightarrow \quad \delta x_1 = \frac{2R_1}{R_1 - r_1} \delta x_3 \quad .$$

Während sich die Gewichtskräfte m_2g und m_3g jeweils um δx_3 bewegen, wirkt von der Gewichtskraft m_1g nur die Komponente parallel zur schießen Ebene $m_1g \sin \alpha$ in Richtung von δx_1 , wegen des entgegengesetzten Richtungssinns wird dieser Arbeitsanteil negativ, und das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert:

$$\delta W = m_3 g \delta x_3 + m_2 g \delta x_3 - m_1 g \delta x_1 \sin \alpha = \left(m_3 g + m_2 g - m_1 g \frac{2R_1}{R_1 - r_1} \sin \alpha \right) \delta x_3 = 0 \quad .$$

Die virtuelle Arbeit kann für beliebige virtuelle Verschiebung nur Null sein, wenn der Ausdruck in der Klammer verschwindet. Das System ist im Gleichgewicht für

$$m_3 = 2m_1 \frac{R_1}{R_1 - r_1} \sin \alpha - m_2 \quad .$$

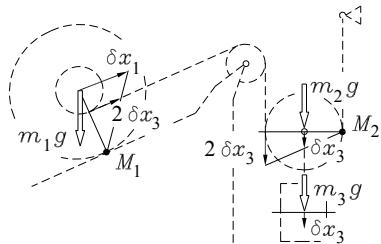


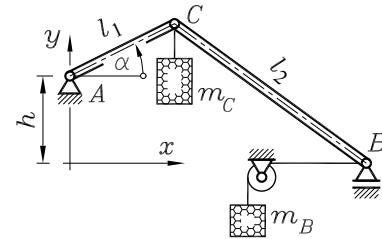
Abbildung 33.1: Zusammenhänge der virtuellen Verschiebungen mit Hilfe der Momentanpole M_1 und M_2

- ⇒ Das Beispiel 2 verdeutlichte, wann die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit einen Vorteil bringt. Weil das System nicht freigeschnitten werden musste, gingen die Zwangskräfte (Normalkraft und Haftkraft zwischen Walze und schiefer Ebene, Seilkraft, ...) in die Rechnung nicht ein. Das äußere Gleichgewicht von Systemen starrer Körper konnte auf diese Weise recht einfach analysiert werden. Wenn auch die Zwangskräfte interessieren, sollte man Gleichgewichtsbetrachtungen vorziehen.

Beispiel 3: Zwei Stäbe mit den Längen l_1 und l_2 , deren Eigengewicht zu vernachlässigen ist, sind wie skizziert gelagert und durch die Gewichtskräfte der Massen m_B und m_C belastet.

$$\text{Gegeben: } \frac{l_2}{l_1} = 2,5 ; \frac{h}{l_1} = 1 ; \frac{m_B}{m_C} = 0,5 .$$

Es soll der Winkel α ermittelt werden, für den das System im Gleichgewicht ist.



Das System hat einen Freiheitsgrad, seine Lage ist durch die Angabe einer Koordinate (Winkel α) eindeutig bestimmt. Es wird eine virtuelle Verdrehung $\delta\alpha$ aufgebracht und zunächst untersucht, welche virtuellen Verschiebungen sich dadurch für die Kraftangriffspunkte B und C einstellen. Wegen der etwas komplizierteren kinematischen Zusammenhänge werden die Ortsvektoren $\vec{r}_B(\alpha)$ bzw. $\vec{r}_C(\alpha)$ zu beiden Punkten in einem (willkürlich definierten) Koordinatensystem aufgeschrieben, $\delta\vec{r}_B$ und $\delta\vec{r}_C$ ergeben sich dann jeweils nach 33.3:

$$\vec{r}_B = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + \sqrt{l_2^2 - (h + l_1 \sin \alpha)^2} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \vec{r}_C = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ h + l_1 \sin \alpha \end{bmatrix} ;$$

$$\delta\vec{r}_B = \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial \alpha} \delta\alpha = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha - \frac{(h + l_1 \sin \alpha) l_1 \cos \alpha}{\sqrt{l_2^2 - (h + l_1 \sin \alpha)^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \delta\alpha ; \quad \delta\vec{r}_C = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha \\ l_1 \cos \alpha \end{bmatrix} \delta\alpha .$$

Auf diesem formalen Weg ergeben sich auch die richtigen Vorzeichen der virtuellen Verschiebungen, deshalb ist es konsequent, die Kräfte ebenfalls als Vektoren bezüglich der gewählten Koordinaten aufzuschreiben. Mit

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} -m_B g \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{F}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_C g \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \delta W = \vec{F}_B \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F}_C \cdot \delta\vec{r}_C$$

liefert das Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta W = \left\{ -m_B g \left[-l_1 \sin \alpha - \frac{(h + l_1 \sin \alpha) l_1 \cos \alpha}{\sqrt{l_2^2 - (h + l_1 \sin \alpha)^2}} \right] - m_C g l_1 \cos \alpha \right\} \delta\alpha = 0 .$$

Nullsetzen der geschweiften Klammer führt nach einigen elementaren Umformungen auf

$$\frac{m_B}{m_C} \left[\tan \alpha + \frac{\frac{h}{l_1} + \sin \alpha}{\sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - \left(\frac{h}{l_1} + \sin \alpha\right)^2}} \right] - 1 = 0 \quad .$$



Mit den gegebenen Zahlenwerten liefert ein geeignetes Programm für diese transzendenten Gleichungen im Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ die beiden Lösungen (vgl. www.TM-aktuell.de):

$$\alpha_1 = 46,35^\circ \quad ; \quad \alpha_2 = 242,92^\circ \quad .$$

- ⇒ Die im Abschnitt 10.4 bei der Beurteilung von Gleichgewichtslagen gewonnenen Erkenntnisse lassen vermuten, dass nicht beide errechneten Gleichgewichtslagen stabil sind. Die Möglichkeit, auch die Stabilität von Gleichgewichtslagen mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit zu beurteilen, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

33.2 Prinzip der virtuellen Arbeit für Potenzialkräfte, Stabilität des Gleichgewichts

Für konservative Kräfte (Potenzialkräfte, z. B.: Gewichtskraft, Federkraft) ist die Arbeit, die bei einer Bewegung von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 geleistet wird, nur von der Lage dieser Punkte abhängig (und nicht vom Weg, der dabei zurückgelegt wird). Wenn die Masse m (mit der Gewichtskraft $F_G = mg$, Abbildung 33.2) eine virtuelle Verschiebung von 1 nach 2 erfährt, ist die geleistete Arbeit der Gewichtskraft nur von der Höhendifferenz δr abhängig und errechnet sich zu

$$\delta W = -F_G \delta r = -mg \delta r$$

(Minuszeichen, weil die angenommene aufwärts gerichtete Wegrichtung der Kraftrichtung entgegengesetzt ist).

Im Abschnitt 28.4.1 wurde mit Formel 28.20 die potentielle Energie (das Potenzial) für die Gewichtskraft einer Masse eingeführt. Mit dem (willkürlich) auf die Höhe des Punktes 1 gelegten Null-Potenzial kann man damit der virtuellen Verschiebung einen Zuwachs an potentieller Energie von $\delta U = mg \delta r$ zuordnen. Es gilt also

$$\delta W = -\delta U \quad , \quad (33.5)$$

und dieser für die Gewichtskraft gefundene Zusammenhang gilt auch für andere Potenzialkräfte (z. B. für Federkräfte, deren potentielle Energie sich nach 28.21 berechnet). Wenn ein System ausschließlich durch Potenzialkräfte belastet ist, kann das Prinzip der virtuellen Arbeit 33.2 also auch mit der potentiellen Energie formuliert werden:

$$\delta U = 0 \quad . \quad (33.6)$$

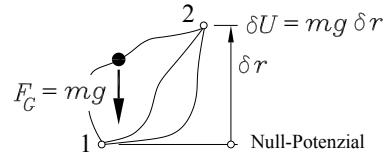


Abbildung 33.2: Für konservative Kräfte ist die potentielle Energie nur vom Anfangs- und Endpunkt des zurückgelegten Weges abhängig

Zunächst werden **Systeme mit nur einem Freiheitsgrad** betrachtet, deren Lage sich eindeutig in Abhängigkeit von einer Koordinate q beschreiben lässt. Dann kann die potenzielle Energie in der Form $U(q)$ aufgeschrieben werden, und weil die virtuellen Größen wie Differenziale behandelt werden dürfen, folgt aus 33.6 unter Beachtung, dass diese Bedingung für eine beliebige virtuelle Verschiebung δq erfüllt sein muss:

$$\delta U = \frac{dU}{dq} \delta q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dq} = 0 \quad . \quad (33.7)$$

Die **Abbildung 33.3** verdeutlicht die mit 33.7 gefundene Aussage: Gleichgewicht ist möglich, wenn die potenzielle Energie (bei beliebiger Lage des Null-Potenzials) ein relatives Extremum hat, und man erkennt, dass die Gleichgewichtslage für ein relatives Minimum stabil (Lagen 2 und 4) und für ein relatives Maximum instabil ist (Lagen 1, 3 und 5).

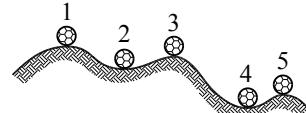


Abbildung 33.3: Stabile und instabile Gleichgewichtslagen

Weil das Vorzeichen der 2. Ableitung einer Funktion die Information liefert, ob ein Extremwert ein Minimum oder Maximum ist, steht ein Kriterium zur Verfügung für die Beurteilung von

Gleichgewichtslagen konservativer Systeme mit einem Freiheitsgrad:

Die Funktion $U(q)$ (potenzielle Energie in Abhängigkeit von der Koordinate q , die die Lage des Systems eindeutig beschreibt) hat für Gleichgewichtslagen eine horizontale Tangente, ihre erste Ableitung nach q muss entsprechend 33.7 verschwinden.

Die Gleichgewichtslage ist

$$\text{stabil für } \frac{d^2 U}{dq^2} > 0 \quad , \quad (33.8)$$

$$\text{instabil für } \frac{d^2 U}{dq^2} < 0 \quad . \quad (33.9)$$

- ⇒ Wenn auch die zweite Ableitung von $U(q)$ verschwindet, müssen gegebenenfalls noch die höheren Ableitungen untersucht werden. Ist die erste nicht verschwindende Ableitung ungerade (z. B.: $U''' \neq 0$), dann hat $U(q)$ an dieser Stelle einen Sattelpunkt. Dieser Gleichgewichtszustand heißt *indifferent*.

Ist die erste nicht verschwindende Ableitung gerade, dann liegt ein relatives Extremum vor, das nach dem Vorzeichen dieser Ableitung in entsprechender Modifikation der Bedingungen 33.8 und 33.9 beurteilt werden kann.

- ⇒ Für ein **System mit mehreren Freiheitsgraden** gilt $U = U(q_1, q_2, \dots, q_f)$. Die Aussagen der Bedingungen 33.7 bis 33.9 dürfen sinngemäß durch die entsprechenden mathematischen Aussagen für die Berechnung und Beurteilung von Extremwerten für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen ersetzt werden, z. B.: Das System kann nur im Gleichgewicht sein, wenn alle partiellen Ableitungen von U nach den generalisierten Koordinaten q_i verschwinden.

Beispiel 1:

Für das Beispiel 3 aus dem vorigen Abschnitt (Seite 658) soll die Stabilität der beiden Gleichgewichtslagen untersucht werden.

Der in der **Abbildung 33.4** gestrichelt gezeichneten Lage wird (willkürlich) die potentielle Energie Null zugeordnet. In einer beliebigen (durch den Winkel α beschriebenen) Lage ist die Masse m_C dann um v_C angehoben (positive potentielle Energie) und die Masse m_B um v_B abgesenkt (negative potentielle Energie).

Aus rein geometrischen Überlegungen (es müssen nur einige rechtwinklige Dreiecke betrachtet werden) liest man aus **Abbildung 33.4** ab:

$$v_C = l_1 \sin \alpha ,$$

$$v_B = l_1 + \sqrt{l_2^2 - h^2} - \left(l_1 \cos \alpha + \sqrt{l_2^2 - (h + l_1 \sin \alpha)^2} \right) .$$

Die potentielle Energie kann damit folgendermaßen aufgeschrieben werden:



$$U(\alpha) = m_C g v_C - m_B g v_B$$

$$= m_C g l_1 \left\{ \sin \alpha - \frac{m_B}{m_C} \left[1 + \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - \left(\frac{h}{l_1}\right)^2} - \left(\cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - \left(\frac{h + l_1 \sin \alpha}{l_1}\right)^2} \right) \right] \right\} .$$

Ableiten nach α und Nullsetzen dieses Ausdrucks (es genügt der Inhalt der geschweiften Klammer) entsprechend 33.7 führt auf die gleiche Beziehung (Seite 659), aus der bereits im Beispiel 3 des vorigen Abschnitts die Gleichgewichtslagen berechnet wurden. Bilden der zweiten Ableitungen und Einsetzen der Winkel, für die Gleichgewicht möglich ist, ergibt nach 33.8 bzw. 33.9 die Aussagen zur Stabilität.

Da das Bilden der Ableitungen etwas lästig ist (und die Gleichung für die Gleichgewichtslagen ohnehin nur numerisch lösbar ist), liegt es nahe, $U(\alpha)$ direkt numerisch auszuwerten. Die Grafik (siehe www.TM-aktuell.de) in der **Abbildung 33.5** zeigt die Funktion $\bar{U} = \frac{U}{m_C g l_1}$ und ihre relativen Extrema für die auch im vorigen Abschnitt verwendeten Parameter.

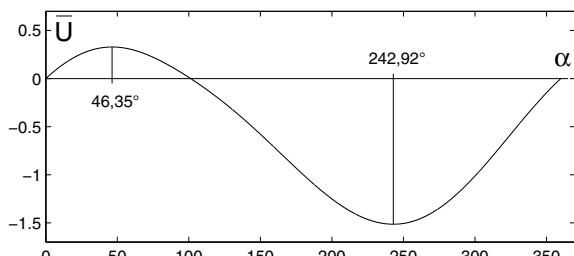


Abbildung 33.5: Die Lagen der Extremwerte der Funktion $\bar{U}(\alpha)$ werden numerisch bestimmt

Es ergeben sich exakt die gleichen Werte α_1 und α_2 , die sich auch im Beispiel 3 des vorigen Abschnitts als Gleichgewichtslagen ergaben, hier allerdings mit den wichtigen Zusatzinformationen: Das relative Maximum bei $\alpha_1 = 46,35^\circ$ weist diese Gleichgewichtslage als instabil aus, während das relative Minimum bei $\alpha_2 = 242,92^\circ$ auf eine stabile Gleichgewichtslage hinweist.

Beispiel 2:

Für den drehbar gelagerten Stab mit der Masse m , der in eine nicht vorgespannte Feder der Länge l_0 eingehängt wird, wurden bereits im Abschnitt 10.3 die vier möglichen Gleichgewichtslagen berechnet. Mit einem kleinen Trick konnte im Beispiel 2 des Abschnitts 10.4 anschaulich gezeigt werden, dass nur zwei Gleichgewichtslagen stabil sind. Die Ergebnisse (Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität) sollen hier noch einmal durch eine Analyse der potentiellen Energie bestätigt werden.

Das Null-Potenzial wird so gelegt, dass der horizontal liegende Stab keine potentielle Energie hat (in dieser Lage ist auch in der Feder keine Energie gespeichert). In der durch den Winkel β gekennzeichneten Lage gilt dann für die potentielle Energie

$$U = -mg \frac{l}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} c \left[\sqrt{(l \sin \beta + l_0)^2 + (l - l \cos \beta)^2} - l_0 \right]^2 ,$$

wobei in der eckigen Klammer die Differenz aus der Federlänge und der Länge der ungedehnten Feder steht. Der Ausdruck wird umgeformt:

$$U(\beta) = mg \frac{l}{2} \left\{ -\sin \beta + \frac{cl}{mg} \left[\sqrt{\left(\sin \beta + \frac{l_0}{l} \right)^2 + (1 - \cos \beta)^2} - \frac{l_0}{l} \right]^2 \right\} = mg \frac{l}{2} \bar{U}(\beta) .$$

Auch wenn man das bei Aufgaben dieser Art etwas lästige Bilden der Ableitungen einem symbolisch rechnenden Programm übertragen kann (siehe www.TM-aktuell.de), muss die nachfolgende Nullstellenrechnung doch numerisch erfolgen, so dass man die relativen Extremwerte von $U(\beta)$ auch direkt numerisch suchen kann.

Die Grafik in der Abbildung 33.6 zeigt die Funktion \bar{U} und ihre relativen Extrema für die bereits im Abschnitt 10.3 verwendeten Parameter $\frac{cl}{mg} = 1$ und $\frac{l_0}{l} = 1$.

Die kleinen Bildchen unterhalb der Funktion \bar{U} zeigen die 4 Gleichgewichtslagen, von denen nur die beiden Lagen $\beta_{01} = 28,4^\circ$ und $\beta_{03} = 270^\circ$ (relative Minima der Funktion \bar{U}) stabil sind.

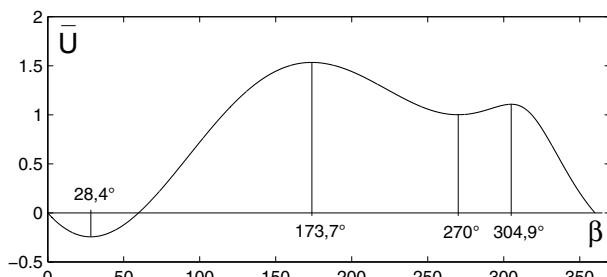
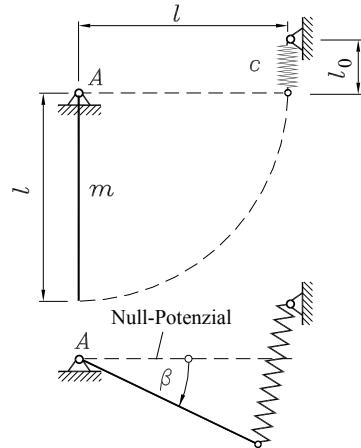
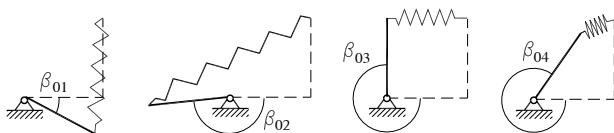


Abbildung 33.6: Die Lagen der Extremwerte der Funktion $\bar{U}(\beta)$ werden numerisch bestimmt



Alle bisherigen Beispiele in diesem Kapitel haben Systeme mit einem Freiheitsgrad behandelt. Um zu zeigen, dass das Prinzip der virtuellen Arbeit auch auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden angewendet werden kann, wird nachfolgend ein (akademisches) Beispiel mit 2 Freiheitsgraden konstruiert, das gerade noch einfach genug ist, um die dabei auftretenden Probleme mit erträglichem Aufwand zu verdeutlichen.

Beispiel 3:

Es sollen die Gleichgewichtslagen ermittelt werden, die die beiden skizzierten Stäbe (Massen m_1 und m_2 , Längen l_1 und l_2) einnehmen können. Dabei soll auch die Stabilität der einzelnen Gleichgewichtslagen untersucht werden.

Der rechte Stab ist in einem Gleitstein G gelagert, der sich in einer vertikalen Führung reibungsfrei bewegen kann und mit einer Masse m_3 belastet ist. Die Führung selbst kann sich horizontal bewegen und ist durch die Masse m_4 belastet.

Gegeben: $m_1, m_2, m_3, m_4, l_1, l_2$.

Betrachtet wird der in Abbildung 33.7 skizzierte Stabzweischlag, auf den im Punkt G die beiden Gewichtskräfte der Massen m_3 und m_4 wirken. Als Null-Potenzial wird (willkürlich) die horizontal gestreckte Lage der beiden Stäbe (und die dazu gehörenden Lagen der Massen m_3 und m_4) festgelegt. Die allgemeine Lage soll durch die beiden Winkel φ_1 und φ_2 beschrieben werden. In dieser Lage haben sich die Schwerpunkte der Stäbe um y_1 bzw. y_2 , die Masse m_3 um y_G und die Masse m_4 um x_G abgesenkt.

Dann gibt es ausschließlich negative Anteile für die potentielle Energie des Systems:

$$U = -m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 - m_2 g \left(l_1 \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \right) \\ - m_3 g (l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2) - m_4 g (l_1 + l_2 - l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2) .$$

Aus den *notwendigen Bedingungen für das Auftreten von Extremwerten* für Funktionen mit zwei Veränderlichen (hier φ_1 und φ_2) folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = \left(\frac{1}{2} m_1 g + m_2 g + m_3 g \right) l_1 \sin \varphi_1 + m_4 g l_1 \cos \varphi_1 = 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = \left(\frac{1}{2} m_2 g + m_3 g \right) l_2 \cos \varphi_2 - m_4 g l_2 \sin \varphi_2 = 0 ,$$

aus denen die Winkel berechnet werden können, für die Gleichgewicht möglich ist:

$$\tan \varphi_1 = \frac{-m_4}{m_3 + \frac{m_1}{2} + m_2} , \quad \tan \varphi_2 = \frac{\frac{m_2}{2} + m_3}{m_4} . \quad (33.10)$$

Das Verschwinden der ersten Ableitungen nach φ_1 bzw. φ_2 ist notwendig für die Existenz von relativen Extremwerten der Funktion U . In der Mathematik wird gezeigt, dass ein Extremum für die Funktion mit zwei unabhängigen Variablen tatsächlich vorliegt, wenn

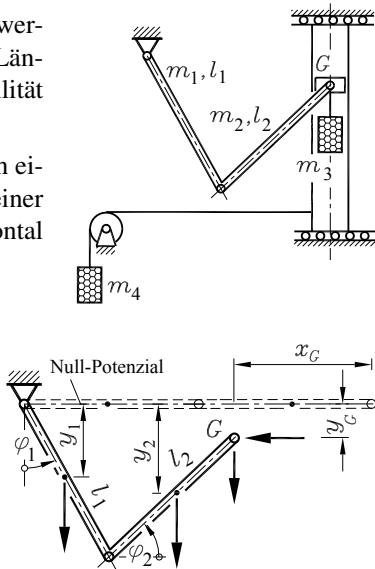


Abbildung 33.7: Definition des Nullpotenzials und der allgemeinen Lage

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right)^2 > 0 \quad (33.11)$$

für die aus den notwendigen Bedingungen errechneten Werte gilt. Es ist ein

$$\text{Minimum für } \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} > 0 \quad \text{und ein} \quad \text{Maximum für } \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} < 0 \quad . \quad (33.12)$$

Für das aktuelle Beispiel errechnet man:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = \left(\frac{1}{2} m_1 g + m_2 g + m_3 g \right) l_1 \cos \varphi_1 - m_4 g l_1 \sin \varphi_1 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} = - \left(\frac{1}{2} m_2 g + m_3 g \right) l_2 \sin \varphi_2 - m_4 g l_2 \cos \varphi_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = 0 \quad .$$

Da die gemischte zweite Ableitung verschwindet, entscheiden hier ausschließlich die Vorzeichen der zweiten Ableitungen nach φ_1 bzw. φ_2 über die Stabilität der Gleichgewichtslagen.

Die numerische Auswertung soll für die folgenden speziellen Werte erfolgen:

$$m_2 = m_1 \quad , \quad m_4 = 2 m_1 \quad , \quad m_3 = 0 \quad .$$

Dies entspricht der vereinfachten Fragestellung: In welcher Lage kann ein Stabzweischlag ausschließlich durch eine am freien Ende horizontal (nach links) gerichtete Kraft im Gleichgewicht gehalten werden (**Abbildung 33.8**)? Bemerkenswert ist, dass über die Längen der Stäbe keine Angaben erforderlich sind, weil sie in die Ergebnisse nicht eingehen.

Aus 33.10 berechnet man mit den speziellen Werten:

$$\tan \varphi_1 = -\frac{4}{3} \quad , \quad \tan \varphi_2 = \frac{1}{4} \quad .$$

Es ergeben sich jeweils 2 Winkel, so dass man insgesamt vier Lösungen erhält, für die in der folgenden Tabelle die zweiten Ableitungen der Funktion U ausgewertet werden:

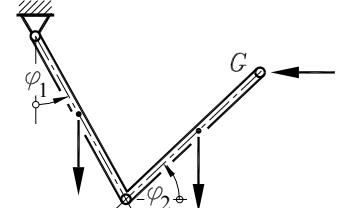


Abbildung 33.8: Kann eine horizontale Kraft bei G dem Stabzweischlag das Gleichgewicht halten?

	φ_1	φ_2	$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}$	$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2}$	
a)	$-53,1^\circ$	-166°	> 0	> 0	33.11 erfüllt, nach 33.12 \rightarrow Minimum
b)	$-53,1^\circ$	$14,0^\circ$	> 0	< 0	33.11 nicht erfüllt \rightarrow Sattelpunkt
c)	$126,9^\circ$	-166°	< 0	> 0	33.11 nicht erfüllt \rightarrow Sattelpunkt
d)	$126,9^\circ$	$14,0^\circ$	< 0	< 0	33.11 erfüllt, nach 33.12 \rightarrow Maximum

Von den vier Wertepaaren für φ_1 und φ_2 erfüllt also nur eins die Kriterien für stabiles Gleichgewicht (**Abbildung 33.9**).

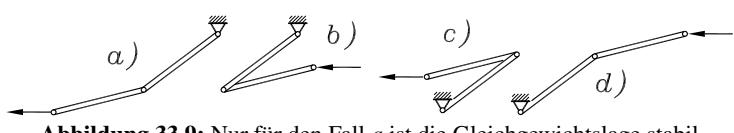


Abbildung 33.9: Nur für den Fall a) ist die Gleichgewichtslage stabil

33.3 Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange

Mit dem in den Abschnitten 28.2.2 und 29.5.2 behandelten Prinzip von d'Alembert ist es möglich, durch Einführen von Kräften und Momenten, die die Trägheit der bewegten Massen berücksichtigen, die Bewegungsgleichungen für kinetische Probleme durch Aufschreiben von Gleichgewichtsbedingungen (wie in der Statik) zu gewinnen. Es erweist sich als besonders effektiv, wenn auch die Zwangskräfte (Kräfte an Führungen) zu ermitteln sind.

Wenn allerdings nur die Bewegungsgesetze gesucht sind, kann das Einbeziehen und anschließende Eliminieren der Zwangskräfte ausgesprochen lästig sein. Für diesen Fall bietet sich eine Kombination des Prinzips von d'Alembert mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten an. Betrachtet wird zunächst ein Massenpunkt m , auf den eingeprägte Kräfte, Zwangskräfte und die d'Alembertsche Kraft $m\ddot{a}$ (keine Bewegungswiderstände wie Gleitreibung usw.) wirken. Beim Aufbringen einer virtuellen Verschiebung $\delta\vec{r}$, die mit den Zwangsführungen verträglich sein muss, leisten die (senkrecht zu den Führungen gerichteten) Zwangskräfte \vec{F}_Z keine virtuelle Arbeit:

$$\vec{F}_Z \delta\vec{r} = 0 \quad . \quad (33.13)$$

Das Prinzip von d'Alembert 28.7 geht nach Multiplikation mit der virtuellen Verschiebung $\delta\vec{r}$ und bei Beachtung von 33.13 in die auf JOSEPH LOUIS COMTE DE LAGRANGE (1736 - 1813) zurückgehende Fassung über:

$$\delta W = (\vec{F}_e - m\ddot{a})\delta\vec{r} = 0 \quad . \quad (33.14)$$

Ein Massenpunkt bewegt sich stets so, dass bei einer (mit den Zwangsführungen verträglichen) virtuellen Verschiebung die Summe der von den eingeprägten Kräften und den d'Alembertschen Kräften geleisteten Arbeit verschwindet.

- ⇒ Die Zwangskräfte erscheinen in dieser Fassung des d'Alembertschen Prinzips nicht. Die Gleichung 33.14 führt unmittelbar zu einer Bewegungs-Differenzialgleichung.
- ⇒ Für ein System von Massenpunkten mit starren Bindungen untereinander modifiziert sich 33.14 zu

$$\delta W = \sum_i (\vec{F}_{i,e} - m_i \ddot{a}_i) \delta\vec{r}_i = 0 \quad , \quad (33.15)$$

weil auch die Kräfte in den starren Verbindungen keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit leisten, da sie paarweise mit entgegengesetzten Richtungen auftreten und den gleichen virtuellen Verschiebungen ausgesetzt sind. Man beachte, dass diese Aussage bei nicht-starren Verbindungen (z. B. Federn) nicht gilt, weil die Endpunkte der Verbindungsglieder unterschiedliche virtuelle Verschiebungen erfahren.

- ⇒ Die Aussagen 33.14 und 33.15 können sinngemäß auf starre Körper erweitert werden. Zu den d'Alembertschen Kräften kommen die d'Alembertschen Momente hinzu, auch eingeprägte Momente sind zulässig, und die virtuelle Arbeit dieser Momente errechnet sich durch Multiplikation mit virtuellen Verdrehungen, so dass man 33.14 bzw. 33.15 analog zu Gleichung 33.2 erweitern darf.

Beispiel 1:

Ein Hubwerk wird durch das konstante Moment M_0 angetrieben. Es soll die Beschleunigung ermittelt werden, mit der die Masse m angehoben wird.

Gegeben: $M_0, J_{S1}, J_{S2}, r_1, r_2, R_2, m$.

Das System hat einen Freiheitsgrad. Die virtuellen Verdrehungen der Scheiben $\delta\varphi_1$ bzw. $\delta\varphi_2$ und die virtuelle Verschiebung δx der Masse m sind durch folgende Zwangsbedingungen verknüpft:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{x}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_2 = \frac{1}{R_2} \delta x, \\ \varphi_1 &= \frac{r_2}{r_1} \varphi_2 = \frac{r_2}{r_1 R_2} x \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 R_2} \delta x.\end{aligned}$$

Aus der virtuellen Arbeit des Moments M_0 , der Kraft mg und der d'Alembertschen Momente sowie der d'Alembertschen Kraft

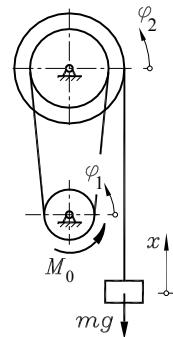
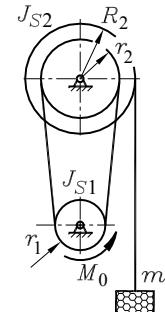
$$\delta W = (M_0 - J_{S1} \ddot{\varphi}_1) \delta\varphi_1 - J_{S2} \ddot{\varphi}_2 \delta\varphi_2 + (-mg - m\ddot{x}) \delta x = 0$$

folgt nach Einsetzen der Zwangsbedingungen

$$\left[\left(M_0 - J_{S1} \frac{r_2}{r_1 R_2} \ddot{x} \right) \frac{r_2}{r_1 R_2} - J_{S2} \frac{\ddot{x}}{R_2^2} + (-mg - m\ddot{x}) \right] \delta x = 0 .$$

Für beliebige virtuelle Verschiebung δx muss die eckige Klammer verschwinden. Daraus errechnet sich die Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{(M_0 r_2 - mg r_1 R_2) r_1 R_2}{m r_1^2 R_2^2 + J_{S1} r_2^2 + J_{S2} r_1^2} .$$



- ⇒ Die Vorzeichenregel beim Aufschreiben der virtuellen Arbeit ist einfach: Eingeprägte Kräfte und Momente (im Beispiel mg und M_0) liefern positive Anteile, wenn sie in Richtung der virtuellen Verschiebungen bzw. virtuellen Verdrehungen wirken. Die d'Alembertschen Kräfte und Momente gehen immer mit negativem Vorzeichen ein.
- ⇒ Der Versuch, das Beispiel 1 durch Freischneiden der drei Massen, Antragen aller Kräfte und Momente und Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen zu lösen (vgl. die Empfehlungen für das Lösen von Problemen nach dem Prinzip von d'Alembert im Abschnitt 29.5.2), würde auf Schwierigkeiten stoßen. Die Kräfte im Übertragungsglied von der unteren zur oberen Scheibe (Seil, Flachriemen, Zahnriemen, Kette, ...) lassen sich allein aus den Gleichgewichtsbedingungen nicht berechnen. Es sind (vielfach nur experimentell zu ermittelnde) Zusatzannahmen über das Kraftverhältnis in den beiden Trums zu treffen, gegebenenfalls ist eine Vorspannung zu berücksichtigen. Wie der Energiesatz (vgl. Abschnitt 29.5.3) gestattet das Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung das Aufschreiben von Bewegungs-Differenzialgleichungen auch ohne Kenntnis der inneren Kräfte. Im Gegensatz zum Energiesatz beschränkt sich die Anwendbarkeit des Prinzips von d'Alembert jedoch nicht auf Probleme mit einem Freiheitsgrad.
- ⇒ Bei Systemen mit f Freiheitsgraden können die Ortsvektoren \vec{r}_i bzw. die virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r}_i$ (gegebenenfalls auch virtuelle Verdrehungen) in Abhängigkeit von f generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_f aufgeschrieben werden, und 33.15 kann in die Form

$$\delta W = (\dots) \delta q_1 + (\dots) \delta q_2 + \dots + (\dots) \delta q_f = 0 \quad (33.16)$$

gebracht werden. Da die δq_i beliebige (voneinander unabhängige) Werte annehmen können, ist Gleichung 33.16 nur erfüllbar, wenn jede Klammer für sich Null wird. Man erhält f Bewegungs-Differenzialgleichungen für die f Freiheitsgrade (nachfolgendes Beispiel).

Beispiel 2:

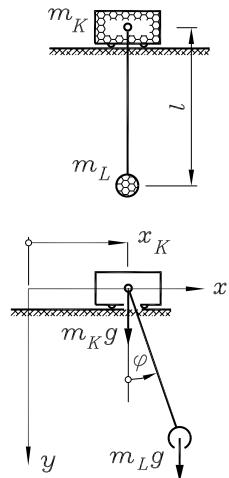
Für eine Laufkatze mit angehängerter Last darf als einfaches Berechnungsmodell das skizzierte System mit zwei Massenpunkten m_K und m_L und einem masselosen dehnstarren Seil der Länge l verwendet werden. Es sollen die Bewegungs-Differenzialgleichungen für dieses System mit zwei Freiheitsgraden formuliert werden.

Als generalisierte Koordinaten werden x_K (horizontale Bewegung der Laufkatze) und φ (Pendelwinkel der Last) verwendet. Bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden empfiehlt sich das Aufschreiben der Ortsvektoren bezüglich eines festen Koordinatensystems (in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten), um dann formal zu Beschleunigungen und virtuellen Verschiebungen zu kommen:

$$\vec{r}_K = \begin{bmatrix} x_K \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta \vec{r}_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta x_K, \quad \vec{a}_K = \frac{d^2 \vec{r}_K}{dt^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_K \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_L = \begin{bmatrix} x_K + l \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta x_K + \begin{bmatrix} l \cos \varphi \\ -l \sin \varphi \end{bmatrix} \delta \varphi,$$

$$\vec{a}_L = \frac{d^2 \vec{r}_L}{dt^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_K - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + l \ddot{\varphi} \cos \varphi \\ -l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - l \ddot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}.$$



Mit diesen Vektoren liefert 33.15 nach Einsetzen und Sortieren:

$$(\vec{F}_{K,e} - m_K \vec{a}_K) \delta \vec{r}_K + (\vec{F}_{L,e} - m_L \vec{a}_L) \delta \vec{r}_L = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{F}_{K,e} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_K g \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_{L,e} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_L g \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [-(m_K + m_L) \ddot{x}_K - m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi + m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] \delta x_K + [-m_L l \ddot{x}_K \cos \varphi - m_L l^2 \ddot{\varphi} - m_L g l \sin \varphi] \delta \varphi = 0.$$

Für beliebige δx_K und $\delta \varphi$ kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn beide eckigen Klammern einzeln verschwinden:

$$\ddot{x}_K (m_K + m_L) + \ddot{\varphi} m_L l \cos \varphi = m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{x}_K \cos \varphi + \ddot{\varphi} l = -g \sin \varphi.$$

Dieses hochgradig nichtlineare Differenzialgleichungssystem ist sogar in den Beschleunigungsgliedern gekoppelt und für beliebige Anfangsbedingungen nur numerisch lösbar. Im Abschnitt 33.4.3 wird es (mit zusätzlichen Kräften) noch einmal aufgegriffen und im Kapitel 35 gelöst.

- ⇒ Das Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung ist bei Systemen starrer Körper, die untereinander **durch starre Verbindungsglieder gekoppelt** sind, besonders effektiv. Für die Berücksichtigung elastischer Verbindungsglieder (Federn) wird auf das im folgenden Abschnitt vorgestellte Verfahren verwiesen.

33.4 Lagrangesche Bewegungsgleichungen

Betrachtet wird zunächst ein System mit n Massenpunkten m_i , deren Lagen in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Ortsvektoren \vec{r}_i beschrieben werden. Die Punkte sind untereinander durch starre oder nicht-starre Bindungen gekoppelt. Das Massenpunktsystem möge f Freiheitsgrade haben, so dass seine Lage eindeutig durch f (voneinander unabhängige) *generalisierte Koordinaten* q_j beschrieben werden kann. Unter der Voraussetzung, dass die nicht-starren Bindungen aufgetrennt werden, so dass die in ihnen wirkenden Kräfte als äußere Kräfte behandelt werden dürfen, gilt das Prinzip von d'Alembert 33.15:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{i,e} - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i = \delta W_e - \delta W_m = 0 \quad . \quad (33.17)$$

Die Ortsvektoren \vec{r}_i können in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten in der Form

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_f) \quad (33.18)$$

aufgeschrieben werden, und für die virtuellen Verschiebungen gilt entsprechend 33.3:

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_f} \delta q_f \quad . \quad (33.19)$$

33.4.1 Generalisierte Kräfte, Potenzialkräfte

Der erste Term in 33.17, die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte, lässt sich mit 33.19 folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_f} \delta q_f \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_f} \delta q_f \\ &= Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_j \delta q_j + \dots + Q_f \delta q_f = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

mit

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad . \quad (33.20)$$

Die virtuelle Arbeit δW_e kann also aus dem Produkt der eingeprägten Kräfte mit den virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffspunkte $\delta \vec{r}_i$ oder dem Produkt aus den nach 33.20 zu berechnenden Q_j und den virtuellen Verschiebungen δq_j berechnet werden. Man nennt deshalb die Q_j *generalisierte Kräfte*.

Wenn die eingeprägten Kräfte ausschließlich Potenzialkräfte sind, kann die virtuelle Arbeit δW_e entsprechend 33.5 durch $-\delta U$ ersetzt werden:

$$\delta W_e = -\delta U = -\frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 - \dots - \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j - \dots - \frac{\partial U}{\partial q_f} \delta q_f \quad , \quad (33.21)$$

und der Vergleich mit der Herleitung von 33.20 zeigt, dass die generalisierten Kräfte sich in diesem Fall recht einfach aus der potenziellen Energie berechnen lassen:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} . \quad (33.22)$$

Wenn nur ein Teil der eingeprägten Kräfte Potenzialkräfte sind, sollten diese durch 33.22 erfasst und nur für die Nicht-Potenzialkräfte sollte 33.20 benutzt werden. Dabei ist es möglich, dass eine generalisierte Kraft aus beiden Quellen Anteile bezieht.

33.4.2 Virtuelle Arbeit der Massenkräfte

Der zweite Term in 33.17, die virtuelle Arbeit der Massenkräfte, lässt sich mit 33.19 folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \delta W_m &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_f} \delta q_f \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(m_i \vec{a}_i \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j . \end{aligned} \quad (33.23)$$

Es soll nun gezeigt werden, wie δW_m mit der kinetischen Energie des Massenpunktsystems

$$T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_x^2 + \frac{1}{2} m_i v_y^2 + \frac{1}{2} m_i v_z^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2 \quad (33.24)$$

zusammenhängt. Für die Geschwindigkeitsvektoren der Massenpunkte gilt mit 33.18:

$$\vec{v}_i = \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_f} \dot{q}_f . \quad (33.25)$$

Die Ableitungen der generalisierten Koordinaten nach der Zeit \dot{q}_j sind die *generalisierten Geschwindigkeiten*. Nachfolgend wird die partielle Ableitung von \vec{v}_i nach \dot{q}_j benötigt. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} , \quad (33.26)$$

weil die Ortsvektoren \vec{r}_i nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängig sind.

Mit den partiellen Ableitungen der kinetischen Energie 33.24 nach q_j bzw. \dot{q}_j

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

und der nochmaligen Differenzierung des zweiten Ausdrucks nach der Zeit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

ist folgender Zusammenhang zu erkennen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} . \quad (33.27)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite entspricht exakt der inneren Summe in 33.23, kann dort eingesetzt werden, und der Zusammenhang von δW_m und kinetischer Energie ist gefunden.

33.4.3 Lagrangesche Gleichungen 2. Art

In 33.17 können die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte nach 33.20 durch

$$\delta W_e = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j \quad \text{mit} \quad Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

und die virtuelle Arbeit der Massenkräfte nach 33.23 in Verbindung mit 33.27 durch

$$\delta W_m = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

ersetzt werden. Man erhält:

$$\delta W = \delta W_e - \delta W_m = \sum_{j=1}^f \left\{ Q_j - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j = 0 \quad . \quad (33.28)$$

Da die f virtuellen Verschiebungen δq_j unabhängig voneinander sind (System hat f Freiheitsgrade), kann 33.28 nur erfüllt sein, wenn die geschweifte Klammer für jeden Summanden einzeln verschwindet. Die entstehenden Beziehungen heißen

Lagrangesche Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, f \quad . \quad (33.29)$$

Die f Gleichungen gelten für ein System mit f Freiheitsgraden, dessen Lage durch genau f generalisierte Koordinaten beschrieben wird. T ist die kinetische Energie des Gesamtsystems, die generalisierten Kräfte Q_j können nach 33.20 aus den eingeprägten Kräften und den Ortsvektoren ihrer Angriffspunkte oder bei Potenzialkräften aus der potentiellen Energie nach 33.22 berechnet werden.

Wenn ausschließlich Potenzialkräfte wirken, kann 33.22 in 33.29 eingesetzt werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} = 0 \quad .$$

Die potentielle Energie durfte auch im ersten Term in die Ableitung hineingezogen werden, weil sie nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j abhängt und deshalb bei der partiellen Ableitung ohnehin keinen Anteil liefert. Für die damit in beiden Ausdrücken stehende Energiedifferenz wird ein neuer Begriff eingeführt.

Lagrangesche Gleichungen 2. Art für konservative Systeme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (33.30)$$

mit der *Lagrangeschen Funktion*

$$L = T - U \quad . \quad (33.31)$$

- ⇒ Man beachte, dass bei der Herleitung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art konsequent die Verwendung *generalisierter Koordinaten* vorausgesetzt wurde (diese dürfen nicht über Zwangsbedingungen voneinander abhängig sein). Die Lagrangesche Funktion $L(q_j, \dot{q}_j)$ darf also z. B. beim Einsetzen in 33.30 nur noch diese Koordinaten enthalten.
- ⇒ Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art 33.29 und 33.30 wurden hier für Massenpunktsysteme hergeleitet, gelten aber auch für Systeme starrer Körper. Dann sind unter den generalisierten Koordinaten im Allgemeinen auch Winkel, so dass 33.20 und 33.22 *generalisierte Momente* liefern. In die kinetische Energie fließen auch die rotatorischen Anteile ein.
- ⇒ Vereinfachend wurde bei der Herleitung angenommen, dass die Ortsvektoren \vec{r}_i entsprechend 33.18 nicht auch explizit von der Zeit t abhängig sind (natürlich sind sie von t abhängig über die zeitabhängigen generalisierten Koordinaten). Berücksichtigung auch einer expliziten Zeitabhängigkeit führt allerdings ebenfalls auf die Gleichungen 33.29 und 33.30, so dass diese Beziehungen auch für diesen Spezialfall gelten.
- ⇒ Erinnerung an die Differenzierungsregeln: Partielle Ableitungen nach einer Variablen werden gebildet, indem **alle** übrigen Größen als Konstanten betrachtet werden. Beim Bilden der partiellen Ableitung nach q_j ist also auch \dot{q}_j wie eine Konstante zu behandeln (und umgekehrt). Im Gegensatz dazu bezieht sich die Ableitung nach der Zeit in den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art auf alle zeitabhängigen Größen.
- ⇒ Wenn nicht alle eingeprägten Kräfte Potenzialkräfte sind, kann auch mit einer Kombination von 33.30 und 33.29 gearbeitet werden. Die Potenzialkräfte werden über die Lagrangesche Funktion erfasst, und für die Nicht-Potenzialkräfte werden generalisierte Kräfte nach 33.20 berechnet, die entsprechend 33.29 einfließen.

Beispiel 1:

Für das Beispiel von Seite 530 (nebenstehende Skizze) soll die Bewegungs-Differenzialgleichung mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichung bestätigt werden. Mit dem Null-Potenzial bei $x = 0$ können die Energien so aufgeschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad U = -mgx + \frac{1}{2} c \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b \right)^2$$

(in der Klammer steht die Differenz der aktuellen Federlänge und der Länge der entspannten Feder b). Für die Lagrangesche Funktion

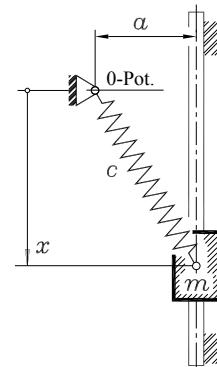
$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2} c \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b \right)^2$$

werden die benötigten Ableitungen gebildet:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = mg - c \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b \right) \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad .$$

Einsetzen der Ableitungen in 33.30 liefert die gleiche Differenzialgleichung, die auf Seite 530 mit dem Prinzip von d'Alembert hergeleitet wurde:

$$m \ddot{x} + c \left(\sqrt{a^2 + x^2} - b \right) \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - mg = 0 \quad .$$



Beispiel 2:

Für ein Doppelpendel sollen die Bewegungsdifferentialgleichungen der freien Schwingungen hergeleitet werden. Die Massenträgheitsmomente der beiden Pendel beziehen sich jeweils auf die Schwerpunkte.

Gegeben: $m_1, m_2, J_{S1}, J_{S2}, s_1, s_2, l_1$.

Ein Doppelpendel hat zwei Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten eignen sich die beiden Winkel φ_1 und φ_2 (untere Skizze). Für das Aufschreiben der kinetischen Energie werden beide Pendelbewegungen als Translation des jeweiligen Schwerpunkts mit überlagerter Rotation betrachtet. Die Schwerpunktllagen sind durch die im x - y -Koordinatensystem aufzuschreibenden Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 zu verfolgen:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \sin \varphi_1 \\ s_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \varphi_1 + s_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Durch Differenzieren der beiden Ortsvektoren nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeitsvektoren:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -s_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + s_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - s_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Mit den Geschwindigkeits-Komponenten können die Quadrate der Bahngeschwindigkeiten der Schwerpunkte aufgeschrieben werden:

$$v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 + s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 = s_1^2 \dot{\varphi}_1^2,$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = (l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + s_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)^2 + (-l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - s_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)^2 \\ &= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + s_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Damit kann die kinetische Energie des Gesamtsystems aufgeschrieben werden:

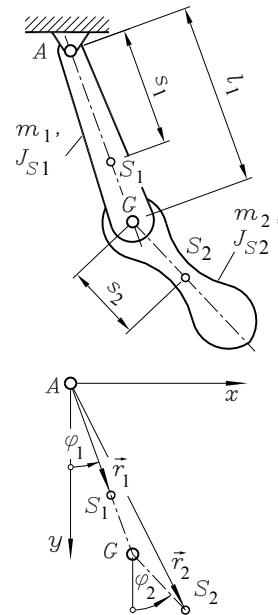
$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_{S1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_{S2} \dot{\varphi}_2^2.$$

Für das Aufschreiben der potenziellen Energie wird das Null-Potenzial (willkürlich) auf die Höhe des Punktes A gelegt, so dass beide Anteile negativ werden:

$$U = -m_1 g s_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2).$$

Da nur Potenzialkräfte wirken, wird für 33.30 die Lagrangesche Funktion formuliert:

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2} m_1 s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{S1} \dot{\varphi}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + s_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \frac{1}{2} J_{S2} \dot{\varphi}_2^2 \\ &\quad + m_1 g s_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2). \end{aligned}$$



Für die beiden Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

werden die benötigten Ableitungen bereitgestellt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1 s_1^2 \dot{\varphi}_1 + J_{S1} \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= m_1 s_1^2 \ddot{\varphi}_1 + J_{S1} \ddot{\varphi}_1 \\ &\quad + m_2 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 s_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad , \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = -m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_1 g s_1 \sin \varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 s_2^2 \dot{\varphi}_2 + J_{S2} \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = m_2 s_2^2 \ddot{\varphi}_2 + J_{S2} \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 s_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g s_2 \sin \varphi_2 \quad .$$

Das sich damit ergebende Differenzialgleichungssystem sieht in geordneter Form so aus:

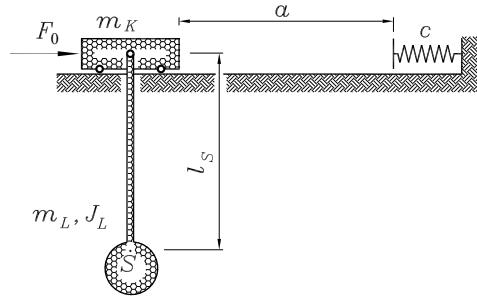
$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{s_1}{l_1} \right)^2 + \frac{J_{S1}}{m_1 l_1^2} + \frac{m_2}{m_1} \right] \ddot{\varphi}_1 + \left[\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \ddot{\varphi}_2 \\ = -\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 \quad , \end{aligned} \tag{33.32}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \ddot{\varphi}_1 + \left[\frac{m_2}{m_1} \left(\frac{s_2}{l_1} \right)^2 + \frac{J_{S2}}{m_1 l_1^2} \right] \ddot{\varphi}_2 \\ = \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \frac{g}{l_1} \sin \varphi_2 \quad . \end{aligned}$$

- ⇒ Als Ergebnis des Beispiels 2 ist ein Differenzialgleichungssystem entstanden, das aus der Sicht der Mathematik so ziemlich alle denkbaren unangenehmen Eigenschaften hat: Es ist inhomogen, hochgradig nichtlinear und in den Gliedern der höchsten Ableitungen (Beschleunigungen) gekoppelt (beide Beschleunigungen in beiden Differenzialgleichungen), und die Kopplungskoeffizienten sind von den gesuchten Funktionen abhängig (Beispiel 3 zeigt mit „Ereignissen“ noch eine weitere Unannehmlichkeit). Dies ist bei praxisrelevanten Problemen leider eher Regel als Ausnahme. Eine Lösung ist nur numerisch möglich und findet sich im Kapitel 35.
- ⇒ Das Beispiel 2 zeigt auch, dass bei Problemen dieser Art praktisch nur der hier demonstrierte Weg mit einiger Sicherheit zu korrekten Differenzialgleichungen führt. Es ist zwar möglich, nach den im Abschnitt 29.5.2 gegebenen Empfehlungen mit dem Prinzip von d'Alembert zu arbeiten (Freischneiden und Gleichgewicht), die Chance, damit korrekte Differenzialgleichungen zu erzeugen, ist allerdings vergleichsweise gering.

Beispiel 3:

Eine Laufkatze (Masse m_K) trägt eine Last (Masse einschließlich Anhängevorrichtung: m_L , Massenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes S : J_L). In der skizzierten Ruhelage beginnt für eine kurze Zeit Δt die konstante Antriebskraft F_0 zu wirken, die danach wieder abgeschaltet wird. Nach dem Zurücklegen der Strecke a stößt die Laufkatze auf einen elastischen Puffer (Federzahl c).



Die Besonderheit dieser Aufgabe besteht in dem Eintreten von „Ereignissen“ (Abschalten der Antriebskraft, Zu- und Abschalten einer Feder). Man erfasst sie, indem an die Stelle der Kraft F_0 die zeitabhängige Kraft F_t tritt und die Federkonstante c durch c_t ersetzt wird:

$$F_t = \begin{cases} F_0 & \text{für } t < \Delta t \\ 0 & \text{für } t \geq \Delta t \end{cases}, \quad c_t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ c & \text{für } x \geq a \end{cases}.$$

Die Bewegung soll durch die beiden generalisierten Koordinaten x und φ beschrieben werden (**Abbildung 33.10**).

Während die Federkraft als Potenzialkraft in die potentielle Energie einfließt, ist die Antriebskraft als generalisierte Kraft zu behandeln. Weil sie unveränderlich die Richtung und den Richtungssinn von x hat, muss bei Verwendung von 33.30 nur die 0 auf der rechten Seite durch F_t ersetzt werden.

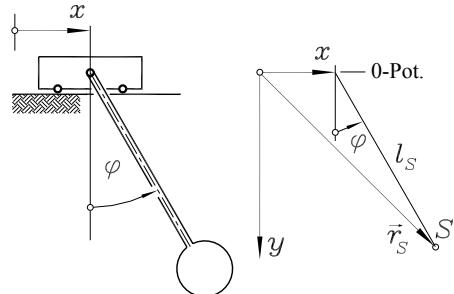


Abbildung 33.10: Koordinaten, Null-Potenzial

Während die Laufkatze wie ein Massenpunkt mit der Koordinate x verfolgt werden kann, wird für die Beschreibung der Lage der Last der Ortsvektor \vec{r}_S eingeführt. Seine Ableitung nach der Zeit ist der Geschwindigkeitsvektor des Punktes S :

$$\vec{r}_S = \begin{bmatrix} x + l_S \sin \varphi \\ l_S \cos \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \begin{bmatrix} v_{Sx} \\ v_{Sy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_S \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -l_S \dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Aus den beiden Komponenten von \vec{v}_S kann der Betrag der Bahngeschwindigkeit des Punktes S berechnet werden:

$$\begin{aligned} v_S^2 &= v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 = \dot{x}^2 + l_S^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + 2l_S \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + l_S^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &= \dot{x}^2 + l_S^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_S \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Damit kann man die gesamte kinetische Energie des Systems (Translation der Masse m , Translation der Masse m_L mit der Bahngeschwindigkeit ihres Schwerpunkts v_S und Rotation von m_L um S) folgendermaßen aufschreiben:

$$T = \frac{1}{2} m_K \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_L (\dot{x}^2 + l_S^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_S \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + \frac{1}{2} J_L \dot{\varphi}^2.$$

Die potenzielle Energie setzt sich aus Energie der Lage von m_L und der Energie in der Feder zusammen. Mit dem Null-Potenzial nach **Abbildung 33.10** erhält man:

$$U = -m_L g l_S \cos \varphi + \frac{1}{2} c_t (x - a)^2 .$$

In die beiden Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

geht neben den Ableitungen der Lagrangeschen Funktion L noch die generalisierte Kraft $Q_x = F_t$ ein. Aus

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_K \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_L (\dot{x}^2 + l_S^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l_S \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + \frac{1}{2} J_L \dot{\varphi}^2 + m_L g l_S \cos \varphi - \frac{1}{2} c_t (x - a)^2$$

errechnet man die benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_K \dot{x} + m_L \dot{x} + m_L l_S \dot{\varphi} \cos \varphi , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m_K \ddot{x} + m_L \ddot{x} + m_L l_S \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l_S \dot{\varphi}^2 \sin \varphi , \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -c_t (x - a) , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_L l_S^2 \dot{\varphi} + m_L l_S \dot{x} \cos \varphi + J_L \dot{\varphi} , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m_L l_S^2 \ddot{\varphi} + m_L l_S \ddot{x} \cos \varphi - m_L l_S \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + J_L \ddot{\varphi} , \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_L l_S \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - m_L g l_S \sin \varphi . \end{aligned}$$

Das sich damit ergebende Differenzialgleichungssystem sieht in geordneter Form so aus:

$$\begin{aligned} (m_K + m_L) \ddot{x} + (m_L l_S \cos \varphi) \ddot{\varphi} &= m_L l_S \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - c_t (x - a) + F_t , \\ (m_L l_S \cos \varphi) \ddot{x} + (m_L l_S^2 + J_L) \ddot{\varphi} &= -m_L g l_S \sin \varphi . \end{aligned} \quad (33.33)$$

Auch wenn dieses Differenzialgleichungssystem nicht ganz so kompliziert aussieht wie das System 33.32 für das Doppelpendel (Beispiel 2), so hat es aus mathematischer Sicht doch alle dort aufgelisteten unangenehmen Eigenschaften. Hinzu kommen ein zeitabhängiges Ereignis (F_t wird plötzlich Null bei $t = \Delta t$) und mehrere wegbabhängige Ereignisse (Anschläge an die Feder, Lösen von der Feder). Da das System aber ohnehin nur numerisch lösbar ist, machen diese zusätzlichen Schwierigkeiten die Lösung nur unwesentlich komplizierter.

Die numerische Lösung der Differenzialgleichungssysteme 33.32 und 33.33 ist zwar formal nicht sehr schwierig, die Bewertung der Ergebnisse ist allerdings nicht ganz einfach.

Die Lösungen für die Beispiele 2 und 3 aus diesem Abschnitt werden deshalb in das Kapitel 35 „Verifizieren von Computerrechnungen“ verschoben, weil dort diskutiert werden kann, ob damit auch die Richtigkeit der Differenzialgleichungen zu bestätigen ist.

33.5 Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials

Betrachtet werden in diesem Abschnitt linear-elastische Strukturen, die sich unter der Einwirkung äußerer Belastungen verformen.

Beispiel 1:

Nach dem im Abschnitt 33.2 behandelten Prinzip der virtuellen Arbeit für Potenzialkräfte kann die Federverlängerung s infolge des Einhängens der Masse m aus der potentiellen Energie

$$U = -mgs + \frac{1}{2}cs^2$$

nach 33.7 berechnet werden:

$$\frac{dU}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad -mg + cs = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{mg}{c} .$$

Im Folgenden soll nur die Formänderungsenergie W_i in den elastischen Bauteilen durch die potentielle Energie erfasst werden (im Beispiel 1 die Formänderungsenergie der Feder $\frac{1}{2}cs^2$), während die Arbeit der äußeren Kräfte (im Beispiel 1 die Gewichtskraft mg , in der Abbildung 33.11 die Kraft F in der rechten Skizze) gesondert als \tilde{W}_a eingeht.

Im Abschnitt 33.2 wurde gezeigt, dass für die virtuelle Arbeit einer Potenzialkraft δW und dem durch die gleiche virtuelle Verschiebung erzeugten Zuwachs an potentieller Energie δU entsprechend Gleichung 33.5 der Zusammenhang $\delta W = -\delta U$ besteht. Daraus leitete sich die Beziehung 33.6 ab: $\delta U = 0$. Diese kann, wenn nur ein Teil der Belastung über die potentielle Energie erfasst wird, zu $\delta(U - W) = 0$ modifiziert werden. Mit der gerade erwähnten gesonderten Erfassung von W_i und \tilde{W}_a muss also

$$\delta(W_i - \tilde{W}_a) = 0 \quad (33.34)$$

gelten. Man überzeugt sich leicht, dass für das Beispiel 1 mit $W_i = \frac{1}{2}cs^2$ und $\tilde{W}_a = mgs$ bzw. $\tilde{W}_a = Fs$ die folgende Bedingung zu dem bekannten Ergebnis für die Verlängerung s der Feder führt:

$$\frac{d(W_i - \tilde{W}_a)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2}cs^2 - Fs \right) = cs - F = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{F}{c} .$$

Die Beziehung 33.34 ist eine Erweiterung des im Abschnitt 33.2 behandelten Prinzips der virtuellen Arbeit. Für die Differenz in der Klammer wird der Begriff *elastisches Potenzial* Π verwendet, und die im Abschnitt 33.2 gewonnene Erkenntnis, dass bei einer stabilen Gleichgewichtslage die potentielle Energie ein relatives Minimum hat, lässt sich erweitern zum

Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials:

$$\Pi = W_i - \tilde{W}_a \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum} . \quad (33.35)$$

Darin ist W_i die in dem elastischen System gespeicherte Formänderungsenergie, \tilde{W}_a ist die Endwertarbeit der äußeren Kräfte.

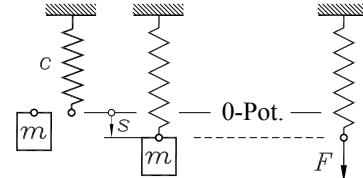


Abbildung 33.11: Elastische Verformung einer Feder

- ⇒ Die virtuelle Arbeit einer äußeren Kraft ergibt sich nach 33.2 aus dem Produkt der Kraft und der virtuellen Verschiebung. Deshalb ist \tilde{W}_a auch in 33.35 als Produkt „Kraft · Verschiebung“ zu bilden (vgl. das Einführungsbeispiel: $\tilde{W}_a = mgs$ bzw. $\tilde{W}_a = Fs$). Man beachte unbedingt:

Die Endwertarbeit \tilde{W}_a ist nicht identisch mit der im Kapitel 24 eingeführten Arbeit der äußeren Kräfte W_a . Während W_a die „tatsächlich zu leistende Arbeit“ ist (vgl. Arbeitssatz 24.5: $W_i = W_a$), ist \tilde{W}_a so zu bilden, als hätte die Kraft entlang des gesamten Verformungsweges bereits ihre volle Größe (deshalb der Begriff „Endwertarbeit“).

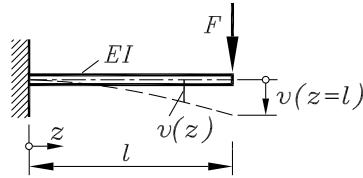
Zwangskräfte (Lagerreaktionen) sind keinen virtuellen Verschiebungen ausgesetzt (vgl. Abschnitt 33.1) und liefern keinen Beitrag zu \tilde{W}_a .

- ⇒ Die Formänderungsenergie W_i kann mit den im Abschnitt 24.2 für die Grundbeanspruchungsarten hergeleiteten Formeln (Zusammenstellung auf Seite 424) aufgeschrieben werden, in denen die Schnittgrößen mit den in den Kapiteln 17 bis 21 entwickelten Zusammenhängen durch die Verformungen ersetzt wurden.

Beispiel 2:

Für einen Kragträger mit einer Kraft F am freien Ende beträgt die Endwertarbeit $\tilde{W}_a = Fv(l)$, und mit der Formänderungsenergie für den Biegeträger nach 24.12 liefert 33.35:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EI v''^2 dz - F v(l) \Rightarrow \text{Minimum .} \quad (33.36)$$



- ⇒ Man beachte, dass damit für die Verformungsberechnung für ein elastisches Bauteil eine Formulierung gegeben ist, die sich von den bisher behandelten mathematischen Modellen wesentlich unterscheidet. Während bei den in den Kapiteln 17 bis 21 behandelten Randwertproblemen (z. B.: Differenzialgleichung der Biegelinie einschließlich der Randbedingungen) eine Funktion gesucht war, die die Differenzialgleichung und die Randbedingungen erfüllt, wird bei der Benutzung des Prinzips vom Minimum des elastischen Potenzials eine Funktion gesucht, die einen Integralausdruck minimiert.

Die Bedingung der Verträglichkeit virtueller Verschiebungen mit den geometrischen Bindungen (Abschnitt 33.1) überträgt sich sinngemäß auf die Funktionen, die zur Konkurrenz bei der Suche nach dem Minimum des elastischen Potenzials zugelassen sind:

Die Funktionen, die die Verformungen eines Bauteils beschreiben, müssen die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Nur unter diesen so genannten (zulässigen) *Vergleichsfunktionen* dürfen diejenigen gesucht werden, für die das elastische Potenzial Π nach 33.35 zum Minimum wird.

- ⇒ Bemerkenswert ist, dass sich die Anforderungen an die Vergleichsfunktionen auf die Erfüllung der *geometrischen Randbedingungen* beschränken (für ein Biegeproblem sind das die Aussagen über v und v'). Natürlich muss die Lösung auch die so genannten *dynamischen*

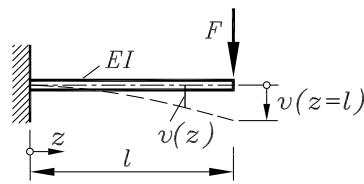
Randbedingungen erfüllen (bei Biegeproblemen die Aussagen über Biegemoment und Querkraft). Dies braucht jedoch nicht als gesonderte Forderung formuliert zu werden, weil sich das Minimum des elastischen Potenzials nur für diese Funktionen einstellen kann.

- ☞ Die Frage, wie man (unter den im Allgemeinen unendlich vielen zulässigen Vergleichsfunktionen) die Funktion herausfinden kann, die für einen vorgegebenen Integralausdruck einen Extremwert liefert, ist Gegenstand eines speziellen Zweiges der Mathematik. In der *Variationsrechnung* werden einerseits die Zusammenhänge zwischen den *Variationsproblemen* (Integralausdruck soll extrem werden) und den zugehörigen Randwertproblemen untersucht, andererseits werden sehr leistungsfähige Näherungsverfahren für die Variationsprobleme bereitgestellt¹. Die Überlegungen des nachfolgenden Beispiels bereiten auf das im nächsten Abschnitt zu behandelnde Verfahren vor.

Beispiel 3:

Mit den im Kapitel 17 beschriebenen Verfahren (Differentialgleichungen der Biegelinie) ermittelt man für den Kragträger des Beispiels 2 unter der Voraussetzung konstanter Biegesteifigkeit EI die „exakte“ Lösung:

$$v_{\text{exakt}}(z) = \frac{Fl^3}{6EI} \left[3\left(\frac{z}{l}\right)^2 - \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right] . \quad (33.37)$$



Wenn diese Funktion in den Ausdruck für Π (Formel 33.36) eingesetzt wird, erhält man mit

$$\Pi_{\min} = \frac{EI}{2} \frac{F^2 l^2}{(EI)^2} \int_{z=0}^l \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 dz - F \frac{Fl^3}{3EI} = -\frac{Fl^3}{6EI}$$

einen Wert, der von keiner zulässigen Vergleichsfunktion unterboten werden kann.

Dies soll mit einer Funktion demonstriert werden: Die Funktion $v_1(z) = az^4$ z. B. mit zunächst beliebigem Faktor a erfüllt die beiden geometrischen Randbedingungen $v_1(0) = 0$ und $v'_1(0) = 0$ und ist damit als Vergleichsfunktion zulässig. Mit v_1 ergibt sich

$$\Pi_1 = \frac{EI}{2} \int_{z=0}^l (12az^2)^2 dz - F al^4 = \frac{72}{5} EI a^2 l^5 - F al^4 ,$$

und Π_1 ist bei beliebigem a größer als Π_{\min} , wie folgende Extremwertbetrachtung beweist:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{144}{5} EI \bar{a} l^5 - Fl^4 = 0 \Rightarrow \bar{a} = \frac{5F}{144EI l} \Rightarrow \bar{\Pi}_1 = -\frac{5F^2 l^3}{288EI} .$$

Der errechnete Wert (nicht sein Betrag) ist auch für das optimale \bar{a} größer als Π_{\min} .

¹Die wichtigste Strategie in der Variationsrechnung zum Auffinden der Funktion, für die das Variationsproblem den Extremwert tatsächlich annimmt, ist die Überführung in ein Randwertproblem. Für das Problem 33.36 wäre dies die Differentialgleichung der Biegelinie mit den zugehörigen Randbedingungen. Genau diese Strategie ist aber für den Ingenieur in der Regel nicht interessant, weil er dann gleich das Randwertproblem formulieren kann. Deshalb sind die so genannten *direkten Verfahren der Variationsrechnung* normalerweise die einzige sinnvolle Alternative. Besonders wichtige Vertreter dieser Verfahren werden nachfolgend behandelt.

33.5.1 Das Verfahren von Ritz

Das im Beispiel 3 des vorigen Abschnitts demonstrierte Vorgehen, eine Vergleichsfunktion mit einem zunächst unbestimmten Ansatzparameter zu wählen, um diesen dann so zu bestimmen, dass zwar im Allgemeinen nicht Π_{min} , aber immerhin der für diese Vergleichsfunktion kleinste mögliche Wert für das elastische Potenzial erreicht wird, ist auch die Grundidee eines sehr effektiven Näherungsverfahrens. Es ist das nach WALTER RITZ (1878 - 1909) benannte

Verfahren von Ritz:

Für ein (eindimensionales) Variationsproblem, das in der allgemeinen Form

$$J\{v(z)\} \Rightarrow \text{Extremum} \quad (33.38)$$

gegeben sei, ist die Funktion $v(z)$ gesucht, die diese Bedingung erfüllt. J ist im Allgemeinen ein Integralausdruck, der $v(z)$ und deren Ableitungen enthält (z. B. das elastische Potenzial Π).

Für die Funktion $v(z)$ wird ein Ansatz mit n Vergleichsfunktionen $v_i(z)$ und unbestimmten Koeffizienten a_i in der Form

$$\tilde{v}(z) = \sum_{i=1}^n a_i v_i(z) \quad (33.39)$$

gewählt (Ritz-Ansatz). Dabei muss jede Funktion v_i die wesentlichen Randbedingungen erfüllen (für Biegeprobleme sind das die geometrischen Randbedingungen). Die a_i werden danach so bestimmt, dass J den für den Ansatz 33.39 möglichen minimalen Wert annimmt. Die dafür notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (33.40)$$

bilden ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen für die n Koeffizienten a_i .

Die Strategie der Realisierung dieses universell anwendbaren Verfahrens (auch für mehrdimensionale Probleme) wird zunächst noch einmal an dem sehr einfachen Beispiel aus dem vorigen Abschnitt demonstriert.

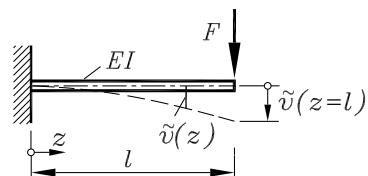
Beispiel 1:

Mit den drei Funktionen

$$v_1(z) = z^2 \quad , \quad v_2(z) = z^3 \quad \text{und} \quad v_3(z) = z^4 \quad ,$$

die einzeln die geometrischen Randbedingungen

$$v(z=0) = 0 \quad , \quad v'(z=0) = 0$$



für den skizzierten Kragträger erfüllen und damit als Vergleichsfunktionen zulässig sind, wird der Ritz-Ansatz

$$\tilde{v}(z) = a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4$$

gebildet. Für J wird das elastische Potenzial (vgl. Beispiel 2 im vorigen Abschnitt) mit \tilde{v} formuliert, und 33.40 liefert die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_i :

$$J = \Pi = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l EI \tilde{v}''^2 dz - F \tilde{v}(l) \Rightarrow \text{Minimum} ,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{z=0}^l EI \tilde{v}'' \frac{\partial \tilde{v}''}{\partial a_i} dz - F \frac{\partial \tilde{v}(l)}{\partial a_i} = 0 .$$

Mit

$$\tilde{v}'' = 2a_1 + 6a_2 z + 12a_3 z^2 , \quad \frac{\partial \tilde{v}''}{\partial a_1} = 2 , \quad \frac{\partial \tilde{v}''}{\partial a_2} = 6z , \quad \frac{\partial \tilde{v}''}{\partial a_3} = 12z^2$$

können die drei Bestimmungsgleichungen für a_1 , a_2 und a_3 aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 : \quad & EI \int_{z=0}^l (2a_1 + 6a_2 z + 12a_3 z^2) \cdot 2 dz - Fl^2 = 0 , \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 : \quad & EI \int_{z=0}^l (2a_1 + 6a_2 z + 12a_3 z^2) \cdot 6z dz - Fl^3 = 0 , \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 : \quad & EI \int_{z=0}^l (2a_1 + 6a_2 z + 12a_3 z^2) \cdot 12z^2 dz - Fl^4 = 0 . \end{aligned}$$

Nach der Integration erhält man ein lineares Gleichungssystem mit folgender Lösung:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6l & 8l^2 \\ 6 & 12l & 18l^2 \\ 8 & 18l & \frac{144}{5}l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{Fl}{EI} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{Fl}{2EI} , \quad a_2 = -\frac{F}{6EI} , \quad a_3 = 0 .$$

Damit liefert das Ritz-Verfahren mit den gewählten Ansatzfunktionen dieses Ergebnis:

$$\tilde{v}(z) = \frac{Fl}{2EI} z^2 - \frac{F}{6EI} z^3 = \frac{Fl^3}{6EI} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] .$$

- ⇒ Die „Näherungslösung“ ist in diesem Fall mit der exakten Lösung identisch. Es gilt generell: Wenn im Ritz-Ansatz $\tilde{v}(z)$ (zufällig) die exakte Lösung enthalten ist, liefert das Verfahren die Koeffizienten a_i so, dass $\tilde{v}(z)$ zur exakten Lösung wird.
- ⇒ Die Qualität der Näherungslösung wird wesentlich dadurch bestimmt, wie gut mit den Ansatzfunktionen $v_i(z)$ die tatsächliche (das elastische Potenzial minimierende) Lösungsfunktion anzunähern ist. Die Wahrscheinlichkeit, eine gute Näherung zu ermöglichen, erhöht sich natürlich mit einer größeren Anzahl von Ansatzfunktionen. Sollten völlig untaugliche Vergleichsfunktionen darunter sein, dann werden sie vom Verfahren ohnehin herausgefiltert ($a_3 = 0$ im gerade behandelten Beispiel sorgt dafür, dass die Ansatzfunktion $v_3(z) = z^4$ keinen Anteil zur Lösung beiträgt).

Das elastische Potenzial Π , das in 33.35 als Differenz von W_i und \tilde{W}_a definiert wurde und beim Verfahren von Ritz entsprechend 33.38 für die Funktion J steht, muss für ein beliebiges System natürlich mit allen Formänderungsenergien für W_i und der Endwertarbeit aller äußeren Kräfte für \tilde{W}_a aufgeschrieben werden. Dies soll hier exemplarisch für Biegeträger formuliert werden, bei denen außer der Formänderungsenergie, die im verformten Träger steckt, auch noch Beiträge von elastischen Lagern (Federn und Drehfedern) zu berücksichtigen sind. Belastet werden Biegeträger durch Einzelkräfte, Einzelmomente und Linienlasten (Abbildung 33.12) zeigt einen Biegeträger mit diesen Lagern und Lasten.

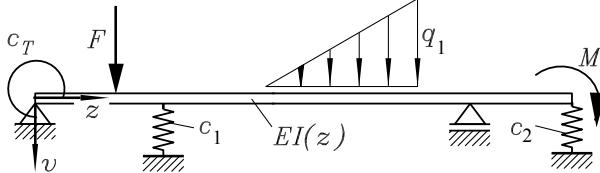


Abbildung 33.12: Biegeträger mit elastischen Lagern

Elastisches Potenzial für einen Biegeträger mit Linienlast, Einzelkräften und Einzelmomenten, der elastisch auf Federn und Drehfedern gelagert ist:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EI v''^2 dz + \frac{1}{2} \sum_k c_k v_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_{T,k} v_k'^2 - \int_l q v dz - \sum_k F_k v_k - \sum_k M_k v_k' . \quad (33.41)$$

v_k und v_k' sind die Durchbiegungen bzw. Biegewinkel an den Angriffspunkten von Lasten bzw. Federn.

Für das zentrale Problem bei der Benutzung des Ritzschen Verfahrens, geeignete Ansatzfunktionen zu finden, bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Mit Polynomfunktionen lassen sich immer Ansätze finden, die die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Für diese Funktionen sind die Integrale (zumindest bei konstanter Biegesteifigkeit) geschlossen lösbar. Unter www.TM-aktuell.de findet man zahlreiche Beispiele, die mit dieser Strategie gelöst werden.
- Im Abschnitt 33.5.4 wird mit bereichsweise formulierten Ansatzfunktionen eine besonders leistungsfähige Variante behandelt.
- Oft bietet sich eine recht pragmatische (und schnelle) Lösung an: Man entnimmt Formelsammlungen oder Taschenbüchern die Lösung von Problemen mit gleichen geometrischen Randbedingungen (bei beliebigen Belastungen, Steifigkeiten, ...) und hat damit zulässige Vergleichsfunktionen. Dies demonstriert das nachfolgende Beispiel.

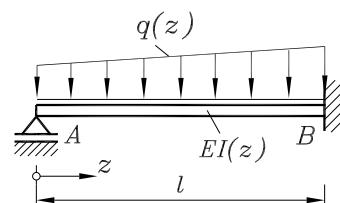


Beispiel 2: Für den skizzierten Biegeträger mit linear veränderlicher Linienlast und linear veränderlicher Biegesteifigkeit

$$q(z) = q_A \left(1 + \frac{z}{l}\right) , \quad EI(z) = EI_A \left(1 + \frac{z}{l}\right)$$

soll eine grobe Näherungslösung mit einem nur eingliedrigen Ritz-Ansatz für die Biegeverformung bestimmt werden.

Gegeben: l , q_A , EI_A .

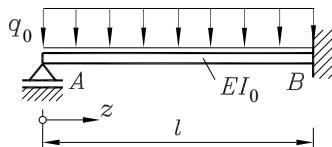


Die Aufgabe entspricht dem Keil unter Eigengewichtsbelastung, für den auf Seite 282 die exakte Lösung angegeben ist, so dass ein Genauigkeitsvergleich möglich sein wird.

Das elastische Potenzial wird entsprechend 33.41 mit zwei Anteilen aufgeschrieben (Formänderungsenergie des verformten Trägers und Endwertarbeit der Linienlast):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l EI(z) v''^2(z) dz - \int_{z=0}^l q(z) v(z) dz \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (33.42)$$

In einem Taschenbuch² findet man die Lösung für das nachstehend skizzierte Problem mit konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Linienlast (aber den gleichen Randbedingungen wie für das Problem der Aufgabenstellung):



$$\bar{v}(z) = \frac{q_0 l^4}{48 EI_0} \left[\frac{z}{l} - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right] .$$

Abbildung 33.13: Biegelinie für konstante Biegesteifigkeit EI_0 und konstante Linienlast q_0

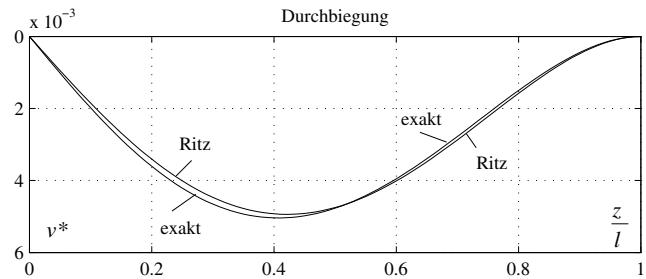
Diese Funktion ist also als Vergleichsfunktion zulässig (es genügt selbstverständlich der Ausdruck in der eckigen Klammer). Da nur ein eingliedriger Ritz-Ansatz verwendet werden soll, kann dieser folgendermaßen formuliert werden:

$$\tilde{v} = a_1 v_1 = a_1 \left[\frac{z}{l} - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right] .$$

Werden $\tilde{v} = a_1 v_1$ und $\tilde{v}'' = a_1 v_1''$ in die Formel für das elastische Potenzial 33.42 eingesetzt, liefert die Minimalbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 &\Rightarrow a_1 \int_{z=0}^l EI(z) v_1''^2(z) dz - \int_{z=0}^l q(z) v_1(z) dz = 0 , \\ a_1 = \frac{\int_{z=0}^l q(z) v_1(z) dz}{\int_{z=0}^l EI(z) v_1''^2(z) dz} &= \frac{13 q_A l^4}{684 EI_A} \Rightarrow \tilde{v} = \frac{13 q_A l^4}{648 EI_A} \left[\frac{z}{l} - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right] . \end{aligned}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Näherungsfunktion im Vergleich mit der exakten Lösung (dargestellt sind die dimensionslosen Verschiebungen $v^* = \frac{EI_A}{q_A l^4} v$). Obwohl nur mit einem eingliedrigen Ritz-Ansatz gerechnet wurde, ist das Ergebnis recht gut.



²Z. B.: Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, aber auch in vielen anderen Büchern und Formelsammlungen.

33.5.2 Randwertproblem und Variationsproblem

Im Beispiel 2 des vorigen Abschnitts wurde mit 33.42 das Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials für den durch eine Linienlast belasteten Biegeträger angegeben. Das so formulierte Variationsproblem ist dem Randwertproblem gleichwertig, zu dem nach 17.4 die Differenzialgleichung

$$[EI(z)v''(z)]'' = q(z) \quad (33.43)$$

und die Randbedingungen gehören.

Wenn auch diskrete Belastungen (Einzelkräfte, Einzelmomente) und elastische Lager vorhanden sind, die beim Randwertproblem über die Randbedingungen einfließen, muss das Variationsproblem entsprechend 33.41 formuliert werden. Zu allen mit 33.43 zu formulierenden Randwertproblemen existiert also ein äquivalentes Variationsproblem 33.41.

Entsprechende Analogien zu einem äquivalenten Variationsproblem lassen sich für alle Randwertprobleme finden, die in den Kapiteln 14 bis 23 und im Abschnitt 32.6 behandelt wurden. Mit den Mitteln der Variationsrechnung, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, lässt sich diese Zuordnung auch formal-mathematisch nachweisen:

Zu einem Randwertproblem, das mit einer Differenzialgleichung des Typs

$$[f_1(z)v''(z)]'' - [f_2(z)v'(z)]' + f_3(z)v(z) = r(z) \quad (33.44)$$

formuliert werden kann, gehört das äquivalente Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \int_l \left[f_1 v''^2 + f_2 v'^2 + f_3 v^2 - 2rv \right] dz + W_i^* - \tilde{W}_a^* \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (33.45)$$

W_i^* und \tilde{W}_a^* sind diskrete Anteile, die beim Randwertproblem über die Randbedingungen erfasst werden. Bei elastostatischen Problemen fließt über W_i^* die Formänderungsenergie diskreter Federn ein, \tilde{W}_a^* ist die Endwertarbeit, die von äußeren Einzelkräften bzw. -momenten geleistet wird (vgl. Erläuterungen auf Seite 681):

$$W_i^* = \frac{1}{2} \sum_k c_k v_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_{T,k} v_k'^2 , \quad \tilde{W}_a^* = \sum_k F_k v_k + \sum_k M_k v_k' . \quad (33.46)$$

- ⇒ Man erkennt, dass 33.43 ein Sonderfall von 33.44 für $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ ist. Mit $f_1 = EI$ und $r = q$ entsteht aus 33.45 das Variationsproblem 33.42.
- ⇒ Auch die Differenzialgleichungen für den elastisch gebetteten Träger 19.3 und für den Torsionswinkel 21.11, die Differenzialgleichung für den Knickstab 23.10 (siehe auch www.TM-aktuell.de) und die Differenzialgleichung für den Biegeschwinger 32.34 sind Sonderfälle von 33.44, so dass man mit 33.45 zum jeweils zugehörigen Variationsproblem kommt.
- ⇒ Die Endwertarbeit \tilde{W}_a^* ist dabei jeweils nur für Belastungen zu ergänzen, die nicht schon über die Differenzialgleichung einfließen. Beim nur durch Kräfte in Stablängsrichtung belasteten Knickstab zum Beispiel werden diese durch die Normalkraft erfasst, die in 33.44 in der Funktion f_2 steckt und über diese in das Variationsproblem einfließt.



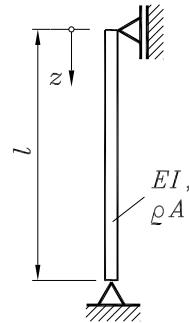
Beispiel 1:

Ein Stab mit konstantem Querschnitt ist nur durch sein Eigengewicht belastet (vgl. Beispiel auf Seite 417). Seine kritische Länge soll näherungsweise mit dem Verfahren von Ritz berechnet werden.

Gegeben: EI , Dichte ρ , Querschnittsfläche A .

Zur Differenzialgleichung für den Knickstab $[EI(z)v''(z)]'' - [F_N(z)v'(z)]' = 0$ (siehe Seite 415) gehört nach 33.45 das äquivalente Variationsproblem

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l [EI(z)v''^2(z) + F_N(z)v'^2(z)] dz \Rightarrow \text{Minimum}$$



mit der Normalkraft F_N , für die bei Eigengewichtsbelastung bezüglich der skizzierten Koordinate

$$F_N = -\rho g A z$$

einsetzen ist. Für den einfachen Lagerungsfall lassen sich problemlos Vergleichsfunktionen für das Ritzsche Verfahren finden. Man überzeugt sich leicht, dass z. B.

$$v_1 = z(l-z) \quad \text{und} \quad v_2 = z^2(l-z)^2$$

jeweils die geometrischen Randbedingungen $v(0) = 0$ und $v(l) = 0$ erfüllen. Nach dem Einsetzen des zweigliedrigen Ritz-Ansatzes

$$\tilde{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad \tilde{v}' = a_1 v'_1 + a_2 v'_2, \quad \tilde{v}'' = a_1 v''_1 + a_2 v''_2$$

in das Variationsproblem liefern die beiden Minimalbedingungen:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{z=0}^l [EI(a_1 v''_1 + a_2 v''_2) v'_1 - \rho g A z (a_1 v'_1 + a_2 v'_2) v'_1] dz = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{z=0}^l [EI(a_1 v''_1 + a_2 v''_2) v''_2 - \rho g A z (a_1 v'_1 + a_2 v'_2) v'_2] dz = 0. \quad (2)$$

Nach dem Berechnen der Integrale ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} 4 - \frac{\rho g A l^3}{6EI} & -\frac{\rho g A l^5}{30EI} \\ -\frac{\rho g A l^5}{30EI} & \frac{4}{5} l^4 - \frac{\rho g A l^7}{105EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - \frac{\rho g A l^3}{6EI} & -\frac{\rho g A l^5}{30EI} \\ -\frac{\rho g A l^5}{30EI} & \frac{4}{5} l^4 - \frac{\rho g A l^7}{105EI} \end{bmatrix} = 0$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Ansatzparameter a_1 und a_2 , das (wie ange deutet) nur dann nichttriviale Lösungen haben kann, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Bedingung führt auf eine quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - 360\lambda + 6720 = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\rho g A l^3}{EI},$$

deren kleinere Lösung $\lambda_{min} = 19,75$ die gesuchte kritische Länge liefert:

$$l_{kr} = \sqrt[3]{\lambda_{min} \frac{EI}{\rho g A}} = 2,70 \sqrt[3]{\frac{EI}{\rho g A}}$$

weicht nur etwa 2,1% vom exakten Wert ab (vgl. Ergebnis der Rechnung auf Seite 419).

Beispiel 2:

Zur Differenzialgleichung für die Biegeschwingungen von Trägern mit kontinuierlicher Massebeladung $[EI(z)Z''(z)]'' - \omega^2 \rho A(z) Z(z) = 0$ (siehe Seite 649) soll nach 33.45 das äquivalente Variationsproblem formuliert werden.

Wenn (wie in Abbildung 33.14 angedeutet) Federn mit den Federsteifigkeiten c_k , Drehfedern mit den Steifigkeiten $c_{T,k}$ und Einzelmassen M_k berücksichtigt werden (auf Punkte wirkende Federn und Punktmassen gehen bei der Lösung mit Hilfe der Differenzialgleichung über Rand- und Übergangsbedingungen ein), lautet das Variationsproblem:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_l \left(EI Z''^2 - \omega^2 \rho A Z^2 \right) dz \\ & + \frac{1}{2} \sum_k c_k Z_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k c_{T,k} Z'_k^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \sum_k M_k Z_k^2 \Rightarrow \text{Minimum .} \end{aligned} \quad (33.47)$$

An diesem Beispiel soll gezeigt werden, wie das Verfahren von Ritz formalisiert werden kann. Es wird ein Ansatz mit n Vergleichsfunktionen entsprechend

$$\tilde{Z}(z) = \sum_{i=1}^n a_i Z_i(z) \quad (33.48)$$

gewählt, mit dem n Minimalbedingungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (33.49)$$

formuliert werden. Die Rechnung, die im Beispiel 1 für zwei spezielle Ansatzfunktionen ausgeführt wurde, führt hier (mit durchaus erträglichem Aufwand) auf analoge Weise für n allgemeine Funktionen Z_i auf das allgemeine Matrizeneigenwertproblem

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33.50)$$

mit

$$k_{ij} = \int_l E I Z_i'' Z_j'' dz + \sum_k c_k Z_{i,k} Z_{j,k} + \sum_k c_{T,k} Z'_{i,k} Z'_{j,k} \quad (33.51)$$

und

$$m_{ij} = \int_l \rho A Z_i Z_j dz + \sum_k M_k Z_{i,k} Z_{j,k} . \quad (33.52)$$



Weil sowohl die Berechnung der Matrixelemente k_{ij} und m_{ij} nach 33.51 bzw. 33.52 als auch die Lösung des allgemeinen Matrizeneigenwertproblems 33.50 einem Mathematik-Programm übertragen werden kann, beschränkt sich der Aufwand im Wesentlichen auf die Bereitstellung der Ansatzfunktionen 33.48. Unter www.TM-aktuell.de findet man mehrere Beispiele, die auf diese Weise mit Polynomansätzen gelöst wurden. Die Anzahl der Eigenwerte (Eigenkreisfrequenzen), die man erhält, entspricht der Anzahl n der verwendeten Ansatzfunktionen.

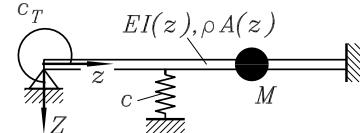


Abbildung 33.14: Biegeschwinger

Sonderfall: Rayleighscher Quotient

Wenn für die Näherungslösung des Variationsproblems 33.47 ein Ritzscher Ansatz mit nur einer Ansatzfunktion entsprechend

$$\tilde{Z}(z) = a Z(z) \quad (33.53)$$

verwendet wird, degeneriert das allgemeine Matrizeneigenwertproblem 33.50 für die Bestimmung der Ansatzparameter zu einer Gleichung:

$$(k - \omega_1^2 m) a = 0 \quad (33.54)$$

mit $k = \int_l EI Z''^2 dz + \sum_k c_k Z_k^2 + \sum_k c_{T,k} Z'_k^2$ und $m = \int_l \rho A Z^2 dz + \sum_k M_k Z_k^2$.

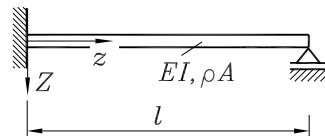
Daraus lässt sich eine Näherungsformel für das Quadrat der kleinsten Eigenkreisfrequenz erzeugen, der so genannte *Rayleighsche Quotient*:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_l EI Z''^2 dz + \sum_k c_k Z_k^2 + \sum_k c_{T,k} Z'_k^2}{\int_l \rho A Z^2 dz + \sum_k M_k Z_k^2} . \quad (33.55)$$

Damit kann in der Regel nur eine recht grobe Näherung erzielt werden, es sei denn, die gewählte Ansatzfunktion ist der Eigenschwingungsform sehr ähnlich (nachfolgendes Beispiel).

Beispiel 3:

Für den skizzierten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Massebelegung ρA ist die kleinste Eigenkreisfrequenz der Biegenschwingungen näherungsweise mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten zu bestimmen und mit der exakten Lösung (siehe Seite 650) zu vergleichen.



Gegeben: $EI = 3000 \text{ Nm}^2$; $\rho A = 3 \text{ kg/m}$; $l = 1 \text{ m}$.

Bei Verwendung einer beliebigen Ansatzfunktion Z , die die geometrischen Randbedingungen erfüllt, ist das Ergebnis erwartungsgemäß sehr ungenau. So erfüllt die Funktion $Z = z^3 - lz^2$ zum Beispiel, wie man sich leicht überzeugt, die geometrischen Randbedingungen, doch 33.55 liefert damit den unbrauchbaren Wert $\omega_1 = 648,1 \text{ s}^{-1}$ (zum Vergleich: $\omega_{1,\text{exakt}} = 487,6 \text{ s}^{-1}$).

Ein wesentlich besseres Ergebnis darf man erwarten, wenn man eine elastostatische Biegelinie als Ansatzfunktion verwendet. Es bietet sich natürlich an, die Biegelinie für einen Träger mit konstanter Linienlast zu verwenden (Abbildung 33.15, vgl. Beispiel auf Seite 262):

$$v(z) = \frac{q_0 l^4}{48 EI_0} \left[2 \left(\frac{z}{l} \right)^4 - 5 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] .$$

Als Ansatzfunktion muss nur der Inhalt der eckigen Klammer verwendet werden. Mit

$$Z(z) = 2 \left(\frac{z}{l} \right)^4 - 5 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2$$

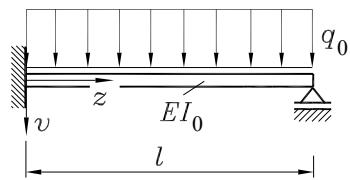


Abbildung 33.15: Biegeträger

erhält man die ausgezeichnete Näherung $\omega_1 = 488,6 \text{ s}^{-1}$, und dass auch dieser Wert über dem exakten Wert liegt, ist kein Zufall: Alle mit dem Verfahren von Ritz und dem Rayleighschen Quotienten berechneten Frequenzen nähern den exakten Wert „von oben“.

33.5.3 Verfahren von Ritz mit bereichsweise geltenden Ansatzfunktionen

Die Genauigkeit einer Näherungslösung nach dem Verfahren von Ritz ist wesentlich davon abhängig, ob die gewählten Ansatzfunktionen flexibel genug sind, die exakte Lösung möglichst gut nachzubilden. Dieses Ziel kann erreicht werden durch

- Verwendung einer großen Anzahl von Ansatzfunktionen oder
- Aufschreiben der Ansatzfunktionen für Teilbereiche bei möglichst großer Anzahl von Bereichen (die Lösung wird „stückweise angenähert“). Bei dieser Variante muss natürlich auch die Einschränkung der Auswahlmöglichkeiten (Abschnitt 33.5.1) beachtet werden: Die Ansatzfunktionen für das Verfahren von Ritz müssen den Kriterien für zulässige Vergleichsfunktionen genügen („geometrisch zulässig“ sein).

Der Biegeträger in **Abbildung 33.16** zeigt das noch einmal: Zulässige Vergleichsfunktionen erfüllen die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen.

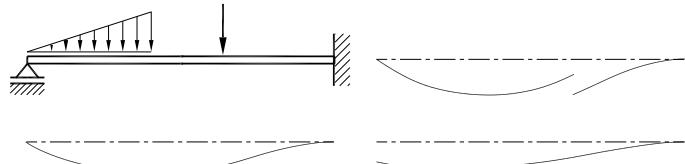


Abbildung 33.16: Zulässige Vergleichsfunktion (links) und unzulässige Vergleichsfunktionen (rechts)

Für Biegeprobleme bedeutet das: „Stetigkeit der Biegelinie und ihrer ersten Ableitung“ (kein „Sprung“, kein „Knick“). Das nachfolgende Beispiel demonstriert das Aufschreiben der Ansatzfunktionen für zwei Teilbereiche, wobei zunächst die geometrische Kompatibilität an den Lagern und der Übergangsstelle hergestellt werden muss.

Beispiel: Für den skizzierten Träger mit konstanter Biegesteifigkeit soll die Durchbiegung näherungsweise nach dem Verfahren von Ritz berechnet werden, indem für die beiden Bereiche jeweils eine Ansatzfunktion dritten Grades verwendet wird.

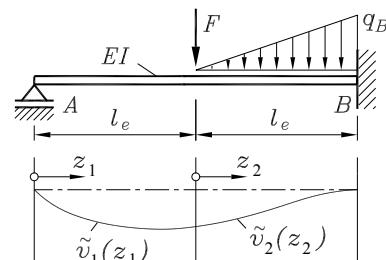
Gegeben: l_e , EI , F , q_B .

Die 8 Parameter der beiden Ansatzfunktionen

$$\tilde{v}_1 = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + a_3 z_1^3 ,$$

$$\tilde{v}_2 = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z_2 + \bar{a}_2 z_2^2 + \bar{a}_3 z_2^3$$

müssen zunächst für die geometrische Kompatibilität sorgen, die bei Erfüllung folgender geometrischer Rand- und Übergangsbedingungen gegeben ist:



$$\tilde{v}_1(z_1 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0 ,$$

$$\tilde{v}_1(z_1 = l_e) = \tilde{v}_2(z_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad a_1 l_e + a_2 l_e^2 + a_3 l_e^3 = \bar{a}_0 ,$$

$$\tilde{v}_1'(z_1 = l_e) = \tilde{v}_2'(z_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad a_1 + 2a_2 l_e + 3a_3 l_e^2 = \bar{a}_1 ,$$

$$\tilde{v}_2(z_2 = l_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_0 + \bar{a}_1 l_e + \bar{a}_2 l_e^2 + \bar{a}_3 l_e^3 = 0 ,$$

$$\tilde{v}_2'(z_2 = l_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 l_e + 3\bar{a}_3 l_e^2 = 0 .$$

Nach Erfüllung dieser fünf Rand- und Übergangsbedingungen bleiben von den acht Ansatzparametern drei unbestimmt. Als verbleibende Parameter werden \bar{a}_0 , a_1 und \bar{a}_1 gewählt, weil sich deren geometrische Interpretierbarkeit als Vorteil erweisen wird: \bar{a}_0 ist die Verschiebung in Trägermitte (wegen $\tilde{v}_2(z_2 = 0) = \bar{a}_0$), a_1 und \bar{a}_1 sind die Biegewinkel \tilde{v}_1' am linken Lager bzw. \tilde{v}_2' in der Trägermitte. Dafür werden

$$a_1 = \varphi_1 \quad , \quad \bar{a}_0 = v_2 \quad , \quad \bar{a}_1 = \varphi_2$$

gesetzt, die übrigen Ansatzparameter können mit den Rand- und Übergangsbedingungen durch diese drei Größen ersetzt werden, und man erhält (nach etwas mühsamer Rechnung) die beiden Ansatzfunktionen mit insgesamt nur noch drei freien Parametern:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \varphi_1 \left(z_1 - 2 \frac{z_1^2}{l_e^2} + \frac{z_1^3}{l_e^3} \right) + v_2 \left(3 \frac{z_1^2}{l_e^2} - 2 \frac{z_1^3}{l_e^3} \right) + \varphi_2 \left(-\frac{z_1^2}{l_e} + \frac{z_1^3}{l_e^2} \right) = \varphi_1 g_1 + v_2 g_2 + \varphi_2 g_3 \quad , \\ \tilde{v}_2 &= v_2 \left(1 - 3 \frac{z_2^2}{l_e^2} + 2 \frac{z_2^3}{l_e^3} \right) + \varphi_2 \left(z_2 - 2 \frac{z_2^2}{l_e} + \frac{z_2^3}{l_e^2} \right) = v_2 \bar{g}_2 + \varphi_2 \bar{g}_3 \end{aligned}$$

(für die Klammern stehen die Abkürzungen g_1, g_2, \dots). Das Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials muss mit den Anteilen aus beiden Bereichen aufgeschrieben werden:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z_1=0}^{l_e} EI \tilde{v}_1''^2 dz_1 + \frac{1}{2} \int_{z_2=0}^{l_e} EI \tilde{v}_2''^2 dz_2 - \int_{z_2=0}^{l_e} q_2 \tilde{v}_2 dz_2 - F v_2 \Rightarrow \text{Minimum}$$

mit $q_2 = q_B \frac{z_2}{l_e}$. Die Minimalbedingungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = 0$$

liefern schließlich ein lineares Gleichungssystem für die Ansatzparameter:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad k_{1j} = \int_{z_1=0}^{l_e} EI g_1'' g_j'' dz_1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad ,$$

$$k_{ij} = \int_{z_1=0}^{l_e} EI g_i'' g_j'' dz_1 + \int_{z_2=0}^{l_e} EI \bar{g}_i'' \bar{g}_j'' dz_2 \quad (i, j = 2, 3) \quad ,$$

$$b_1 = 0 \quad , \quad b_2 = \int_{z_2=0}^{l_e} q_2 \bar{g}_2 dz_2 + F \quad , \quad b_3 = \int_{z_2=0}^{l_e} q_2 \bar{g}_3 dz_2 \quad .$$

Das Erzeugen dieses Gleichungssystems war nicht schwierig, ist allerdings etwas aufwendig, und dieser Algorithmus ist deshalb für die Handrechnung nicht zu empfehlen. Man erkennt jedoch einen bemerkenswert formalen Aufbau der Integrale, die die Koeffizienten des Gleichungssystems bilden. Die Vermutung liegt nahe (und wird sich als richtig erweisen), dass sich das Aufschreiben der Integrale auch bei komplizierteren Problemen formalisieren lässt. Die Matrix ist symmetrisch, es gehen Abmessungen und Steifigkeiten ein („Steifigkeitsmatrix“), die Belastungen stehen im Vektor der rechten Seite („Belastungsvektor“), die Verwandtschaft mit der Finite-Elemente-Methode wird deutlich.

33.5.4 Verfahren von Ritz und Finite-Elemente-Methode

Das im vorigen Abschnitt demonstrierte Aufschreiben von Ritz-Ansätzen, die nur jeweils für einen Bereich gelten, bietet sich als generell anwendbare Strategie in dem Sinne an, dass ein für einen Bereich geltender Ansatz auch für eine größere Anzahl anderer Bereiche verwendet wird.

Behandelt wird exemplarisch der durch eine Linienlast belastete Biegeträger, für den das Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials auf das Variationsproblem 33.42 führt. Die Durchbiegung soll mit dem Ritzschen Verfahren berechnet werden, wobei bereichsweise Ansatzfunktionen 3. Grades verwendet werden.

Betrachtet wird zunächst ein beliebiger Bereich e mit den Endpunkten i und j , der Länge l_e und einer eigenen Bereichskoordinate z_e (Abbildung 33.17). Die Biegesteifigkeit $EI_e(z_e)$ und die Linienlast $q_e(z_e)$ werden als bekannt vorausgesetzt. Bezogen auf die bereichseigene Koordinate werden die vier Ansatzparameter einer allgemeinen Funktion dritten Grades

$$\tilde{v}_e(z_e) = a_0 + a_1 z_e + a_2 z_e^2 + a_3 z_e^3 \quad (33.56)$$

durch die Verformungsgrößen v_i , φ_i , v_j und φ_j an den Punkten i bzw. j ersetzt (vgl. das Beispiel im vorigen Abschnitt). Aus den vier Bedingungen

$$\tilde{v}_e(z_e = 0) = v_i, \quad \tilde{v}'_e(z_e = 0) = \varphi_i, \quad \tilde{v}_e(z_e = l_e) = v_j, \quad \tilde{v}'_e(z_e = l_e) = \varphi_j \quad (33.57)$$

werden (mit erträglicher Mühe) a_0 , a_1 , a_2 und a_3 berechnet und in 33.56 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_e &= v_i \left(1 - 3 \frac{z_e^2}{l_e^2} + 2 \frac{z_e^3}{l_e^3} \right) + \varphi_i \left(z_e - 2 \frac{z_e^2}{l_e} + \frac{z_e^3}{l_e^2} \right) + v_j \left(3 \frac{z_e^2}{l_e^2} - 2 \frac{z_e^3}{l_e^3} \right) + \varphi_j \left(-\frac{z_e^2}{l_e} + \frac{z_e^3}{l_e^2} \right) \\ &= v_i g_1(z_e) + \varphi_i g_2(z_e) + v_j g_3(z_e) + \varphi_j g_4(z_e) . \end{aligned} \quad (33.58)$$

Dieser Verschiebungsansatz für den Bereich e wird nun (bezogen auf die jeweils bereichseigene Koordinate) mit den gleichen Funktionen für alle Bereiche verwendet, wobei als Ansatzparameter jeweils die Verformungsgrößen des entsprechenden Bereichs gewählt werden, für den Nachbarbereich f mit den Endpunkten j und k also zum Beispiel:

$$\tilde{v}_f = v_j g_1(z_f) + \varphi_j g_2(z_f) + v_k g_3(z_f) + \varphi_k g_4(z_f) .$$

Da für den Bereich f dann automatisch die sinngemäß modifizierten Bedingungen 33.57

$$\tilde{v}_f(z_f = 0) = v_j, \quad \tilde{v}'_f(z_f = 0) = \varphi_j, \quad \tilde{v}_f(z_f = l_f) = v_k, \quad \tilde{v}'_f(z_f = l_f) = \varphi_k$$

gelten, ist gesichert, dass sich an den Bereichsgrenzen (hier: Punkt j) zweier benachbarter Bereiche (hier: Bereiche e und f) gleiche Verformungsgrößen (hier: v_j und φ_j) einstellen. Dies soll als besonders wichtige Erkenntnis festgehalten werden:

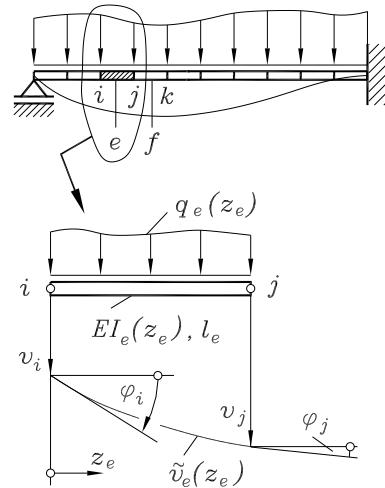


Abbildung 33.17: Ein beliebiger Bereich e aus einem System

Durch die Wahl der Verformungsgrößen an den Endpunkten als Ansatzparameter für die bereichsweise geltenden Ansatzfunktionen wird automatisch die innere geometrische Verträglichkeit der verformten Struktur garantiert.

- ⇒ Die Einschränkung dieser Aussage auf die „innere“ geometrische Verträglichkeit ist erforderlich, weil z. B. die Verformungsbehinderung „von außen“ (durch Lager) noch nicht berücksichtigt ist. Man sollte sich die geometrischen Randbedingungen infolge der Lager dadurch erfüllt denken, dass die entsprechenden Verformungsgrößen v_L bzw. φ_L den Wert Null haben, und Teile der Ansatzfunktionen entfallen.

Das elastische Potenzial wird mit diesen Ansatzfunktionen für das gesamte System (Summe über alle Bereiche) aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} \Pi = & \dots + \frac{1}{2} \int_{l_e} EI_e(z_e) \tilde{v}_e''^2(z_e) dz_e + \frac{1}{2} \int_{l_f} EI_f(z_f) \tilde{v}_f''^2(z_f) dz_f + \dots \\ & \dots - \int_{l_e} q_e(z_e) \tilde{v}_e(z_e) dz_e - \int_{l_f} q_f(z_f) \tilde{v}_f(z_f) dz_f - \dots \Rightarrow \text{Minimum} . \end{aligned} \quad (33.59)$$

Π wird minimal, wenn die partiellen Ableitungen nach sämtlichen Ansatzparametern $v_1, \varphi_1, \dots, v_i, \varphi_i, v_j, \varphi_j, \dots$ verschwinden. Dabei liefern immer nur wenige Integrale einen Beitrag, für die partiellen Ableitungen nach v_j und φ_j zum Beispiel sind es nur die in 33.59 angedeuteten vier Integrale, weil v_j und φ_j nur in den Ansatzfunktionen der Bereiche e und f enthalten sind.

Da außerdem in allen Integralen gleichartige Funktionen stehen, ist es sinnvoll, zunächst die Frage zu untersuchen, **welchen Anteil ein Bereich** zu den Minimalbedingungen liefert, um danach die Anteile der (beiden) Bereiche zu den Minimalbedingungen des Grenzpunktes zusammenzusetzen. Zum Beispiel kann aus der partiellen Ableitung des Potenzials Π nach v_j

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{l_e} EI_e \tilde{v}_e'' g_3'' dz_e + \int_{l_f} EI_f \tilde{v}_f'' g_1'' dz_f - \int_{l_e} q_e g_3 dz_e - \int_{l_f} q_f g_1 dz_f = 0$$

der „Bereich- e -Anteil“ separiert werden:

$$\int_{l_e} EI_e \tilde{v}_e'' g_3'' dz_e - \int_{l_e} q_e g_3 dz_e = 0 .$$

Nach Einsetzen der kompletten Ansatzfunktion 33.58 kann dieser Anteil in der Form

$$\begin{aligned} & v_i \int_{l_e} EI_e g_1'' g_3'' dz_e + \varphi_i \int_{l_e} EI_e g_2'' g_3'' dz_e \\ & + v_j \int_{l_e} EI_e g_3''^2 dz_e + \varphi_j \int_{l_e} EI_e g_4'' g_3'' dz_e - \int_{l_e} q_e g_3 dz_e = 0 \end{aligned}$$

aufgeschrieben werden, und aus den partiellen Ableitungen nach den drei anderen Ansatzparametern, für die der Bereich e Beiträge liefert, resultieren entsprechende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0 &\Rightarrow k_{11}^{(e)} v_i + k_{12}^{(e)} \varphi_i + k_{13}^{(e)} v_j + k_{14}^{(e)} \varphi_j - f_1^{(e)} = 0 \quad , \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = 0 &\Rightarrow k_{21}^{(e)} v_i + k_{22}^{(e)} \varphi_i + k_{23}^{(e)} v_j + k_{24}^{(e)} \varphi_j - f_2^{(e)} = 0 \quad , \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 &\Rightarrow k_{31}^{(e)} v_i + k_{32}^{(e)} \varphi_i + k_{33}^{(e)} v_j + k_{34}^{(e)} \varphi_j - f_3^{(e)} = 0 \quad , \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} = 0 &\Rightarrow k_{41}^{(e)} v_i + k_{42}^{(e)} \varphi_i + k_{43}^{(e)} v_j + k_{44}^{(e)} \varphi_j - f_4^{(e)} = 0 \quad , \\
 \text{mit } k_{mn}^{(e)} &= \int_{l_e} EI_e g_m'' g_n'' dz_e \quad \text{und} \quad f_m^{(e)} = \int_{l_e} q_e g_m dz_e \quad .
 \end{aligned} \tag{33.60}$$

Entsprechende Beziehungen sind für alle Bereiche aufzuschreiben, wobei sich die Integrale, die die $k_{mn}^{(e)}$ -Werte liefern, nur durch die Funktionen für die Biegesteifigkeit unterscheiden, in den Integralen für die $f_m^{(e)}$ -Werte ist jeweils die Funktion für die Liniene last des aktuellen Bereichs einzusetzen. Im betrachteten Beispiel würde der „Bereich- f -Anteil“ der partiellen Ableitung nach v_j formal den gleichen Aufbau haben wie die erste Zeile in 33.60:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 \Rightarrow k_{11}^{(f)} v_j + k_{12}^{(f)} \varphi_j + k_{13}^{(f)} v_k + k_{14}^{(f)} \varphi_k - f_1^{(f)} = 0 \quad .$$

Dieser Anteil des Bereichs f wird mit dem entsprechenden „Bereich- e -Anteil“ dieser partiellen Ableitung aus der 3. Zeile in 33.60 zu einer *kompletten Minimalbedingung* zusammengesetzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 &\Rightarrow k_{31}^{(e)} v_i + k_{32}^{(e)} \varphi_i + (k_{33}^{(e)} + k_{11}^{(f)}) v_j \\
 &+ (k_{34}^{(e)} + k_{12}^{(f)}) \varphi_j + k_{13}^{(f)} v_k + k_{14}^{(f)} \varphi_k - f_3^{(e)} - f_1^{(f)} = 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{33.61}$$

Eine entsprechende Gleichung ergibt sich am Punkt j für die partielle Ableitung von Π nach φ_j . Auch an jedem anderen Punkt entstehen zwei Gleichungen dieser Art, die ein lineares Gleichungssystem bilden. Zur Formalisierung dieses Prozesses empfiehlt es sich, 33.60 in Matrixform aufzuschreiben:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} \\ k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \\ f_3^{(e)} \\ f_4^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } k_{mn}^{(e)} = \int_{l_e} EI_e g_m'' g_n'' dz_e \\
 \text{und } f_m^{(e)} = \int_{l_e} q_e g_m dz_e \quad .$$
(33.62)

Und mit 33.61 und 33.62 wird deutlich, dass der Ritz-Algorithmus, wie er in diesem Abschnitt beschrieben wurde, nicht nur Ähnlichkeiten mit der Finite-Elemente-Methode hat, sondern mit dieser identisch ist:

- Der in diesem Abschnitt verwendete Begriff „Bereich“ kann durch „Element“ ersetzt werden, die „Verbindungspunkte“ der Bereiche sollte man als „Knoten“ bezeichnen.

- Die Beziehung 33.62 ist eine *Element-Steifigkeitsbeziehung*, wie sie im Abschnitt 18.2 für den Biegeträger hergeleitet wurde. Dazu gibt es nachfolgend noch einige Erläuterungen.
- Der Algorithmus zur Herstellung der kompletten Minimalbedingungen (mit 33.61 für eine Gleichung angedeutet), kann durch die „Einspeicherungsvorschrift“ für den Aufbau von System-Steifigkeitsbeziehungen aus Element-Steifigkeitsbeziehungen (im Kapitel 15 ausführlich beschrieben) ersetzt werden. Auch die in der Finite-Elemente-Methode übliche Strategie, die äußeren geometrischen Bedingungen (verhinderte Verschiebungen) erst nachträglich (in der System-Steifigkeitsbeziehung) zu berücksichtigen, kann übernommen werden.

Bei einem Vergleich der Element-Steifigkeitsbeziehung 33.62 mit der entsprechenden Beziehung für ein Biegeträger-Element 18.11 fallen zwei formale Unterschiede auf:

- Während 18.11 nur für konstante Biegesteifigkeit gilt, darf EI_e in 33.62 veränderlich sein. Dass 33.62 mit 18.11 identisch ist, wenn die Biegesteifigkeit als konstant angenommen (und vor die Integrale gezogen) werden darf, soll exemplarisch an einem Matrixelement gezeigt werden. Mit $m = n = 1$ errechnet man nach 33.62 z. B. das Matrixelement $k_{11}^{(e)}$:

$$\begin{aligned} g_1(z_e) &= 1 - 3 \frac{z_e^2}{l_e^2} + 2 \frac{z_e^3}{l_e^3} \quad \Rightarrow \quad g_1''(z_e) = -\frac{6}{l_e^2} + 12 \frac{z_e}{l_e^3} \\ \Rightarrow \quad k_{11}^{(e)} &= EI \int_{z_e=0}^{l_e} g_1''^2 dz_e = EI \int_{z_e=0}^{l_e} \left(-\frac{6}{l_e^2} + 12 \frac{z_e}{l_e^3} \right)^2 dz_e = \frac{12EI}{l_e^3} . \end{aligned}$$

Dies ist genau der Wert für $k_{11}^{(e)}$ aus 18.11. Die $f_m^{(e)}$ -Werte, die sich nach 33.62 ergeben, entsprechen den reduzierten Knotenlasten in 18.11. Für linear veränderliche Linienlast erhält man auch hier die im Abschnitt 18.2.2 auf anderem Wege erhaltenen Formeln 18.10.

- Die in der Element-Steifigkeitsbeziehung 18.11 auf der linken Seite stehenden Element-Knotenlasten tauchen als innere Kräfte bzw. Momente des Systems in der nach dem Ritzschen Verfahren gefundenen Formulierung gar nicht auf. Die Vorschrift zum Aufbau der System-Steifigkeitsbeziehung, die im Kapitel 15 hergeleitet wurde, basiert auf dem Gleichgewicht dieser Element-Knotenlasten mit den äußeren Knotenlasten. Bemerkenswert ist, dass mit dem Ritzschen Verfahren auf anderem Weg der gleiche Algorithmus für den Aufbau der System-Beziehungen gefunden wird.

WWW - Ergänzung - Vertiefung - WWW



Verfahren von Ritz unter www.TM-aktuell.de bietet u. a. Informationen zu folgenden Themen:



- Verfahren von Ritz für gerade Biegeträger, veränderliche Biegesteifigkeit, Linienlasten, Einzelkräfte, Einzelmomente, Federn, Drehfedern,
- Verfahren von Ritz für Knickstäbe,
- Verfahren von Ritz für Biegenschwingungen gerader Träger, Näherungslösung mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten.

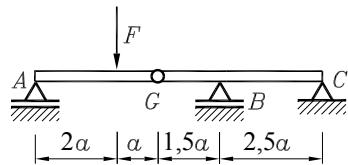


33.6 Aufgaben

Aufgabe 33.1:

Für den skizzierten Gerber-Träger (vgl. Beispiel auf Seite 64) ist die Lagerkraft F_B mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit zu berechnen (man ersetze nur das Lager B durch eine Kraft und bringe eine virtuelle Verschiebung in Richtung dieser Kraft auf).

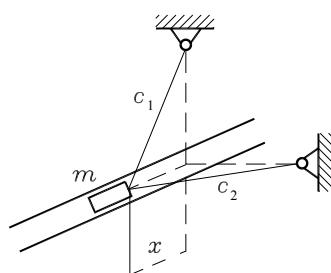
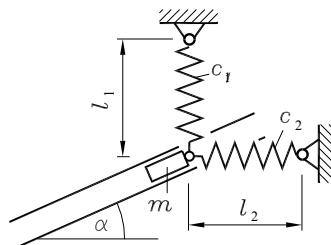
Gegeben: F .


Aufgabe 33.2:

Für den durch zwei Federn in einer Führung gehaltenen Gleitstein (vgl. Aufgabe 10.3 auf Seite 156) ermittle man für die folgenden Parameterkombinationen durch grafische Darstellung der potentiellen Energie des Systems in Abhängigkeit von der Lage des Gleitsteins die Gleichgewichtslagen und entscheide über deren Stabilität.

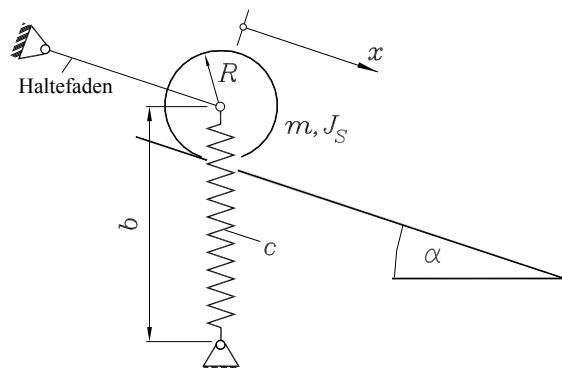
Die obere Skizze zeigt die Federn im unbelasteten Zustand, nicht die Gleichgewichtslage des Systems. Für das Aufschreiben der potentiellen Energie verwende man die in der unteren Skizze angedeutete Koordinate x .

- a) $\frac{c_1 l_1}{mg} = 1, \frac{c_2 l_2}{mg} = 0, \frac{l_1}{l_2} = 1, \alpha = 60^\circ,$
- b) $\frac{c_1 l_1}{mg} = 0, \frac{c_2 l_2}{mg} = 1, \frac{l_1}{l_2} = 1, \alpha = 45^\circ,$
- c) $\frac{c_1 l_1}{mg} = 5, \frac{c_2 l_2}{mg} = 5, \frac{l_1}{l_2} = 1, \alpha = 45^\circ.$


Aufgabe 33.3:

Eine zylindrische Walze (Masse m , Massenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts J_S) ist durch eine lineare Feder gefesselt und wird auf einer schiefen Ebene durch einen Haltefaden in Ruhe gehalten. In dieser Lage ist die Feder der Länge b entspannt. Nach Durchtrennen des Haltefadens beginnt die Walze eine reine Rollbewegung auf der schiefen Ebene.

Gegeben: c, b, α, m .



Die Bewegung der Walze soll mit einer Koordinate x beschrieben werden, die die Lage des Mittelpunktes der Walze verfolgt, parallel zur schiefen Ebene gerichtet ist und ihren Ursprung in der skizzierten Ruhelage des Systems hat. Es ist die Bewegungs-Differenzialgleichung aufzustellen (Verwendung der Lagrangeschen Gleichung 2. Art).

Aufgabe 33.4:

Das Pendeln der Last einer auf der Kranbahn stehenden Laufkatze regt gleichzeitig Biegeschwingungen der elastischen Kranbahn an. Die Bewegung des Systems kann durch das angegebene Berechnungsmodell erfasst werden. Gegeben sind die Federzahl c der als Biegeträger idealisierten Kranbahn für die jeweilige Katzstellung, die Pendellänge l der Last, die Masse m_1 der Laufkatze einschließlich der anteilig mitschwingenden Trägermasse, die Lastmasse m_2 .

Man ermittle die Bewegungs-Differentialgleichungen (Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art) für das System mit zwei Freiheitsgraden. Die Koordinate x zählt von der statischen Gleichgewichtslage aus.

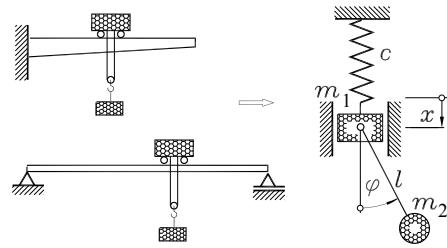


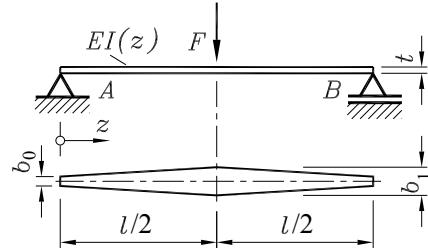
Abbildung 33.18: Originalsysteme (links) und das zugehörige Berechnungsmodell (rechts)

Aufgabe 33.5:

Für die skizzierte Biegefeder mit einem Rechteckquerschnitt konstanter Höhe t bei linear veränderlicher Breite soll näherungsweise die Biegelinie mit dem Verfahren von Ritz mit einem eingliedrigen Ansatz berechnet werden.

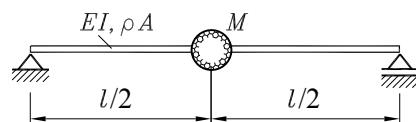
Gegeben: t , b_0 , b_1 , l , F , E .

Man verwende als Ritz-Ansatz die Funktion der Biegelinie für den Träger mit konstantem Querschnitt (Tabelle auf Seite 260) und vergleiche die Näherungslösung für die Absenkung des Kraftangriffspunktes mit der exakten Lösung (Beispiel auf Seite 436) für folgende Breitenverhältnisse: $\frac{b_1}{b_0} = 1; 1,2; 1,5; 2$.

**Aufgabe 33.6:**

Eine Einzelmasse M ist wie skizziert auf einem Biegeträger befestigt.

Gegeben: M , l , $\rho A = \frac{kM}{l}$.



- Die kleinste Eigenkreisfrequenz der Biegeschwingungen soll mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten berechnet werden bei Näherung der Verformung durch die Funktion der Biegelinie unter konstanter Linienlast (Fall b auf Seite 260) für die Parameter $k = 0$ (Vernachlässigung der Trägermasse), $k = 1$ (Trägermasse in der Größenordnung der Einzelmasse) und $k = 10$ (Trägermasse dominierend).
- Der Fall $k = 0$ (Vernachlässigung der Trägermasse) soll überprüft werden mit der Näherungsrechnung, die im Abschnitt 31.2.2 vorgestellt wurde.

Weitere Aufgaben findet man im Internet unter www.TM-aktuell.de.

34 Methode der finiten Elemente

Weil die Methode der finiten Elemente heute sicher das am meisten benutzte Verfahren zur Lösung naturwissenschaftlicher und technischer Probleme ist, wurde sie in diesem Buch mehrfach im Zusammenhang mit den jeweils behandelten Themen vorgestellt. Aber die Grundlagen der Technischen Mechanik sind nur ein ganz kleiner Ausschnitt aus der Anwendungspalette für dieses Verfahren. Deshalb soll hier noch einmal eine Zusammenfassung präsentiert werden, die sich natürlich auch auf (allerdings anspruchsvollere) Probleme der Technischen Mechanik beschränkt. Dabei wird einerseits das Ziel verfolgt, die Leistungsfähigkeit des Verfahrens gerade für die komplizierteren praxisnahen Aufgaben zu verdeutlichen, andererseits aber auch auf die Gefahren und Grenzen bei der Benutzung der verfügbaren (außerordentlich leistungsfähigen kommerziellen) Software-Produkte hinzuweisen.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der Leser sich zumindest teilweise mit den im Kapitel 15 und den Abschnitten 18.2, 19.2.4 und 33.5.4 gegebenen Einführungen befasst hat, anderenfalls wird bei den entsprechenden Verweisen ein „Zurückblättern“ empfohlen.

34.1 Zugang zur Theorie

Man kann sich der Methode der finiten Elemente auf zwei recht unterschiedlichen Wegen nähern, und aus historischer Sicht (siehe die einführenden Bemerkungen zum Kapitel 15.1) hat es einige Jahrzehnte gedauert, bis man merkte, dass beide Wege zum gleichen Ziel führen:

- ① Man ermittelt Lösungen für die Elemente und setzt die Elementlösungen zu Systemlösungen zusammen, indem in jedem Schritt die Anforderungen an die Lösung beachtet werden (Gleichgewicht, Kompatibilität, Elastizitätsgesetz, ...). Dieser Weg ist im Kapitel 15 und im Abschnitt 18.2 beschritten worden. Er führt jeweils auf ein lineares Gleichungssystem für die Verformungen an speziellen Punkten (Knoten).
- ② Man betrachtet zunächst das Gesamtsystem und macht einen Ansatz für die zu berechnende Funktion (bei elastostatischen Problemen z. B. für die Verformung), der noch zu bestimmende Freiwerthe enthält. Für den Ansatz werden allerdings viele (nur bereichsweise „in einem Element“ geltende) Funktionen verwendet, und als Freiwerthe nimmt man die Funktionswerte an den Übergangsstellen (Knoten). Dadurch wird die Kompatibilität gewährleistet. Schließlich werden die Freiwerthe so bestimmt, dass der Ansatz mit den berechneten Freiwerthen die Anforderungen an eine Lösung erfüllt oder besonders gut annähert. Dieser Weg wurde im Abschnitt 33.5.4 unter Nutzung eines Minimalprinzips demonstriert.

Der Weg ① (häufig als „strukturdynamischer“ Zugang bezeichnet) hat den Vorteil, dass man jederzeit die Konsequenzen der einzelnen Schritte verfolgen kann. Weg ② ist zweifellos aus mathematischer Sicht eleganter und wird deshalb von Mathematikern und Physikern bevorzugt (auch deshalb, weil er nicht beim physikalischen Modell, sondern erst beim mathematischen Modell ansetzt, vgl. hierzu die Ausführungen im Abschnitt 15.5)¹.

Ingenieure favorisieren im Allgemeinen Weg ①, vornehmlich aus dem Grunde, weil man die vielen möglichen Zusatzbedingungen mit stets plausiblen Begründungen realisieren kann, z. B. unterschiedliche Modelle in einem System (Stäbe, Biegeträger, Torsionsstäbe, Scheiben, Platten, Schalen, ...), alle denkbaren Lagervarianten einschließlich Federn und Drehfedern, Gelenke, Scharniere, ... Im Abschnitt 18.2.3 wurde am Beispiel des Biegeträgers gezeigt, wie auf diesem Wege auch wesentliche „Nachbesserungen“ realisiert werden können.

Der Weg ② ist nicht beschränkt auf Probleme, für die (wie im Abschnitt 33.5.4) ein Extremalprinzip existiert. Dieser Weg lässt sich ebenso elegant realisieren mit Differenzialgleichungen und den zugehörigen Randbedingungen als Ausgangspunkt. Die theoretische Basis dafür liefert die so genannte *Methode der gewichteten Residuen*. Darauf wird hier nicht eingegangen, weil für die weitaus meisten Probleme der Technischen Mechanik ein Extremalprinzip verfügbar ist.

Für die komplizierteren (zwei- und dreidimensionalen) Probleme kann als theoretischer Zugang zur Methode der finiten Elemente eine Kombination der Wege ① und ② empfohlen werden: Man startet mit dem mathematischen Modell (z. B.: Extremalprinzip), wählt geeignete (bereichsweise geltende) Ansatzfunktionen mit geeigneten Freiwerten (z. B.: Knotenverformungen) und kommt über die Extremalbedingungen zu den Gleichungen für die Freiwerte, wie es im Abschnitt 33.5.4 für den Biegeträger bis zur Beziehung 33.61 demonstriert wurde. Dann geht man allerdings noch einen (eigentlich auf diesem Wege nicht erforderlichen) Schritt weiter, und schreibt eine „Elementbeziehung“ auf (im Abschnitt 33.5.4 ist dies die Gleichung 33.62).

Und weil innere Kräfte bzw. Momente des Systems bei diesem Weg gar nicht auftauchen, sollte man an diesem Punkt (bei Problemen der Technischen Mechanik) an den Weg ① anknüpfen. Für das Beispiel im Abschnitt 33.5.4 bedeutet dies, dass die Element-Beziehung, die in der Formulierung 33.62 nur der „Elementanteil zur System-Beziehung“ ist, zur „echten“ Element-Steifigkeitsbeziehung gemacht wird: Der Nullvektor auf der rechten Seite wird durch den „Vektor der Element-Knotenlasten“ ersetzt, so dass die „erweiterte Element-Steifigkeitsbeziehung“ entsteht, wie sie sich für das Biegeträger-Element nach Weg ① mit 18.11 ergab. Dies ist deshalb empfehlenswert, weil bei Problemen der Technischen Mechanik die inneren Belastungen (Schnittgrößen, Stabkräfte, Spannungen) meistens die wichtigeren Ergebnisse sind.

Gemeinsam ist beiden Wegen (neben dem Ziel) das Arbeiten mit Ansatzfunktionen, und genau die sind der Schlüssel zum Erfolg oder Misserfolg der Rechnung: Kann mit den verwendeten Ansätzen die exakte Lösung ausreichend genau beschrieben werden? Diese Frage steht deshalb bei den nachfolgenden Betrachtungen im Mittelpunkt.

Der folgende Satz kann eigentlich gar nicht oft genug wiederholt werden:

¹Die Autoren haben häufig registrieren müssen, dass es erhebliche Verständigungsschwierigkeiten gab (vornehmlich zwischen Ingenieuren einerseits und Mathematikern und Physikern andererseits), obwohl über den gleichen Gegenstand geredet wurde, und hoffen, dass diese mit den Ausführungen hier etwas abgebaut werden können.

Die Methode der finiten Elemente ist ein Näherungsverfahren.

Die zahlreich verfügbaren leistungsstarken und benutzerfreundlichen Computerprogramme verleiten dazu, das Verständnis für die durchzuführende Berechnung durch das Erlernen der Bedienung einer Benutzeroberfläche eines Programms zu ersetzen. Das ist außerordentlich gefährlich. **Es ist möglich, mit korrekt arbeitenden Finite-Elemente-Programmen beliebigen Unsinn auszurechnen (und in schönen bunten Grafiken zu präsentieren).**

Die Gefahr des blinden Programm-Vertrauens wurde möglicherweise mit einigen Beispielen in diesem Buch noch vergrößert, weil diese zu Problemklassen gehören, bei denen die Finite-Elemente-Methode die gleichen „exakten“ Ergebnisse wie die üblicherweise verwendete Theorie liefert. Die nachfolgenden Erläuterungen sollen deshalb auch ein Gefühl dafür vermitteln, wann man den Ergebnissen vertrauen kann und wann Skepsis geboten ist.

Im Abschnitt 22.1 wurde erläutert, dass für viele Probleme der Praxis die „eindimensionalen“ Modelle (z. B.: Stab, Biegeträger) nicht ausreichend sind. Für zweidimensionale Bauteile (Scheiben, Platten, Schalen) gibt es zwar ausgezeichnete mathematische Modelle (Differenzialgleichungen, Variationsprobleme), die sich aber einer analytischen Lösung (bis auf wenige „akademische“ Spezialfälle) entziehen. Dies gilt in noch schärferer Form für dreidimensionale Modelle.

Aber genau für diese Problemklassen kann die Finite-Elemente-Methode ihre ganze Stärke ausspielen, und genau für diese Problemklassen gilt die oben ausgesprochene Warnung. Die Abbildung 34.1 zeigt ein dreidimensionales finites Element, das in fast allen großen FEM-Programmsystemen verfügbar ist. Es hat gekrümmte Flächen und Kanten, so dass man mit solchen Elementen annähernd beliebig komplizierte dreidimensionale Bauteile nachbilden kann (was will man mehr?). Der Benutzer eines FEM-Programmsystems wird viele Gemeinsamkeiten des 3D-Elements mit den in den Kapiteln 15 und 18 behandelten einfachen Elementen bemerken:

Es hat Knoten (20, bei den einfachen Elementen waren es nur 2), dem Element sind die Materialeigenschaften zugeordnet, seine Geometrie definiert sich über die Knotenkoordinaten, es wird mit seinen Nachbarelementen über die Knoten verbunden. Die sehr aufwendige und komplizierte Berechnung der Element-Steifigkeitsbeziehung (die Steifigkeitsmatrix, die auch hier die Knotenverschiebungen mit den Knotenkräften verknüpft, hat 60 Zeilen bzw. Spalten) braucht den Programmbenutzer so wenig zu interessieren wie bei der Verwendung eines Stab- oder Biegeträger-Elements.

Aber es gibt auch gravierende Unterschiede, so bildet z. B. die Element-Steifigkeitsbeziehung des 3D-Elements die zugrunde liegende Theorie (z. B. die Elastizitätstheorie isotroper Materialien) nur näherungsweise ab. Dies sollte der Benutzer eines Programmsystems wissen und auch beachten. Im folgenden Abschnitt werden die Konsequenzen am wesentlich einfacheren zweidimensionalen Beispiel beschrieben.

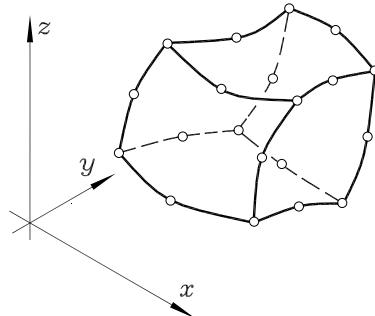


Abbildung 34.1: Finites Element mit 20 Knoten (60 Freiheitsgrade)

34.2 Ein- bzw. zweidimensionale FEM-Modelle

Das einfachste zweidimensionale Modell ist die *Scheibe* (flächenhaftes ebenes dünnwandiges Gebilde, das nur in seiner Ebene belastet ist). An den beiden nachfolgend skizzierten einfachen Beispielen soll der Unterschied beim Erzeugen eines Finite-Elemente-Berechnungsmodells für den biege- und dehnsteifen Rahmen bzw. eine ebene Scheibe demonstriert werden.

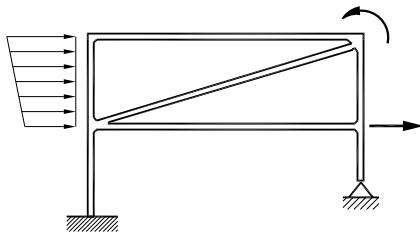


Abbildung 34.2: Ebener Rahmen

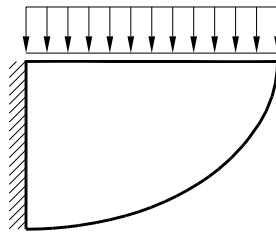


Abbildung 34.3: Konsole (ebene Scheibe)

Eine Analyse der beiden Modelle der Abbildungen 34.2 und 34.3 aus der Sicht des Berechnungs-Ingenieurs, der mit „klassischen Berechnungsverfahren“ arbeitet, liefert folgendes Ergebnis:

- Das skizzierte **Rahmentragwerk** kann nach der klassischen Biegetheorie (Kapitel 16, 17 und 24) berechnet werden (Verformungen, Schnittgrößen, Spannungen), „im Prinzip“. Der Einfluss der Dehnung infolge der Normalkräfte kann sicher mit gutem Gewissen vernachlässigt werden. Aber: Kein mit normaler Vernunft ausgestatteter Ingenieur würde sich die Mühsal der „Handrechnung“ heute noch antun (das Tragwerk ist immerhin achtfach statisch unbestimmt).
- Die **Konsole** kann nach der Theorie der ebenen Scheiben behandelt werden. Eine analytische Lösung des Problems der einseitig eingespannten und krummlinig berandeten Scheibe ist jedoch unmöglich.

Bei der **Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf beide Probleme** gibt es (neben vielen Gemeinsamkeiten) ähnliche Unterschiede in der Beurteilung der zu erwartenden Ergebnisse:

- **FEM-Programme können die Theorie der biege- und dehnsteifen Träger exakt erfassen.** Bei Benutzung des Programms „Biege- und dehnsteife ebene Rahmen“ z. B., das unter www.TM-interaktiv.de zur interaktiven Nutzung zur Verfügung steht, erhält man die Ergebnisse, die sich nach der Handrechnung ergeben würden, wenn die Handrechnung für das Problem fehlerfrei gelänge, was allerdings eher unwahrscheinlich ist.
- **Die Scheiben-Theorie kann auch von der Finite-Elemente-Methode nur approximiert werden.** Man kann dem Ergebnis der Scheiben-Theorie möglicherweise sehr nahe kommen (man weiß allerdings nie genau, wie nahe, denn eine analytische Lösung ist mit Ausnahme sehr weniger „akademischer“ Probleme unmöglich), schließlich entscheidet der betriebene Aufwand weitgehend darüber, wie gut das Ergebnis ist. Der erforderliche Aufwand und die zu erwartende Qualität des Ergebnisses sind eng verknüpft mit dem Problem, das zu berechnende System in finite Elemente zu unterteilen.

34.2.1 Elementauswahl, Vernetzung

Die beiden betrachteten Beispiele (**Abbildungen 34.2** und **34.3**) unterscheiden sich ganz erheblich voneinander in der Strategie der Einteilung der Systeme in finite Elemente:

- Für den biege- und dehnsteifen Rahmen bietet sich eine „natürliche“ Einteilung geradezu an, die auf ein System mit 7 Elementen führt, die an 6 Knoten miteinander verbunden sind (**Abbildung 34.4**). Da die „klassische Theorie“ von der Finite-Elemente-Methode für den Elementtyp „Rahmenelement“ nach **18.16** exakt erfasst wird, gibt es keinen Grund, einen anderen Elementtyp oder eine andere Elementeinteilung zu wählen, denn die „Elementlösungen“ basieren auf den Annahmen der klassischen Biegetheorie.

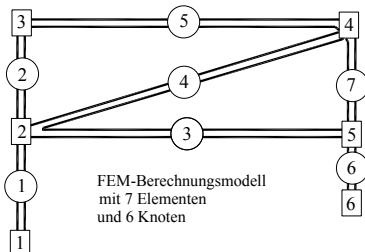


Abbildung 34.4: Nur diese Elementeinteilung für den Rahmen ist sinnvoll

- Ganz anders muss für das Scheibenproblem überlegt werden: Da in jedem Fall auch die Elementlösungen zwangsläufig Näherungen sind, trifft man schon mit der Auswahl geeigneter Elemente eine wichtige Vorentscheidung für die Qualität der Ergebnisse, so dass hier sowohl Elementauswahl als auch die Einteilung des Systems in Elemente entscheidend sind.

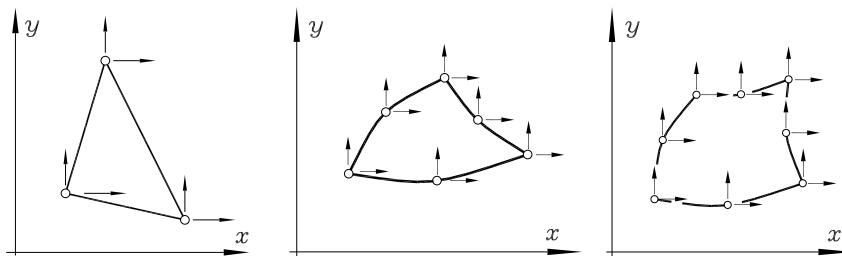


Abbildung 34.5: Scheibenelemente mit 6, 12 bzw. 16 Freiheitsgraden

Die **Abbildung 34.5** zeigt drei gebräuchliche Scheibenelemente mit 3, 6 bzw. 8 Knoten. Nur über diese Knoten haben sie mit den Nachbarelementen Kontakt und können, wie in der Abbildung angedeutet, zwei Kraftkomponenten an den Knoten übertragen. Die Knotenverschiebungen (Anzahl und Richtungen stimmen mit den Knotenkräften überein) sind die Freiwerte für den Verschiebungsansatz, so dass die skizzierten Elemente 6, 12 bzw. 16 Freiheitsgrade haben.

Wie später noch demonstriert werden wird, ist das einfache Element mit nur 6 Freiheitsgraden wenig empfehlenswert, weil damit nur bei einer sehr großen Elementanzahl brauchbare Näherungen erreicht werden können.

Eine wesentlich bessere Näherung darf man mit dem Dreieckselement mit 6 Knoten erwarten (jeweils zusätzliche Knoten in den Seitenmitteln). Die ohnehin schon sehr gute Anpassungsmöglichkeit von Dreieckselementen auch an kompliziertere Konturen kann noch dadurch erhöht werden, dass (wie skizziert) ein Element mit gekrümmten Kanten verwendet wird. Mit 12 Freiheitsgraden kann der Verschiebungszustand wesentlich besser erfasst werden.

Ähnliche Aussagen gelten für das in der **Abbildung 34.5** skizzierte Viereckselement. Es sind natürlich auch Elemente mit noch größerer Knotenzahl denkbar, die beiden Elemente mit 12 bzw. 16 Freiheitsgraden haben sich allerdings in der Praxis als besonders günstiger Kompromiss zwischen gewünschter Genauigkeit und erforderlichem Aufwand erwiesen.

Die **Abbildung 34.6** zeigt eine Einteilung der Konsole in 11 Sechs-Knoten-Dreieckelemente (für zwei- und dreidimensionale Systeme wird die Element-Einteilung als *Vernetzung* bezeichnet). Es ergeben sich 32 Knoten (bei 2 Freiheitsgraden pro Knoten entsteht ein Gleichungssystem mit 64 Gleichungen).

Die Frage, ob eine solche Einteilung ausreichend fein ist, kann allgemein nicht beantwortet werden. Der Praktiker, der nicht bereits durch zahlreiche Finite-Elemente-Berechnungen ausreichende Erfahrungen gesammelt hat, kommt nicht umhin, gegebenenfalls mehrere Rechnungen mit unterschiedlich feiner Vernetzung durchzuführen. Allgemein gilt: In Bereichen mit starker Änderung der Spannungen (speziell z. B. in der Nähe von Kerben, wo Spannungsspitzen zu erwarten sind) muss eine besonders feine Vernetzung gewählt werden.

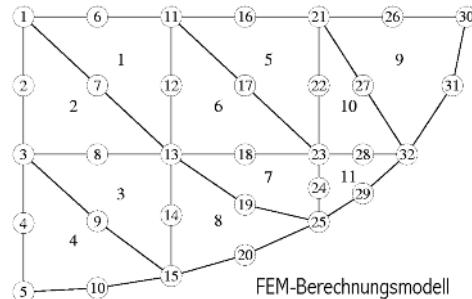


Abbildung 34.6: Vernetzung der Konsole

Speziell für das betrachtete Problem gilt: Auch bei sehr bescheidenen Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse ist die skizzierte Vernetzung wesentlich zu grob.

Die sinnvolle Einteilung eines Systems in finite Elemente (Vernetzung) ist außerordentlich schwierig und verlangt Erfahrung. Man lasse sich nicht täuschen von Aussagen über „Datengenerator-Programme“, die das angeblich automatisch (das allerdings können sie tatsächlich) und damit auch immer sinnvoll erledigen.

Im Gegensatz dazu kann man bei der Elementeinteilung für Probleme, deren „klassische Theorie“ von der Finite-Elemente-Methode exakt erfasst wird (z. B.: Fachwerke oder biege-, dehn- und torsionssteife Rahmen) praktisch nichts falsch machen.

Problematisch ist die (aus kommerziellen Gründen durchaus verständliche) Tendenz der Anbieter großer (und zweifelsfrei außerordentlich leistungsfähiger) FEM-Programmsysteme, die Probleme der Elementauswahl und Vernetzung hinter komfortablen Benutzeroberflächen zu verstecken. Die Aussage „Automatische Netzgenerierung unter Verwendung leistungsfähiger Elemente“ darf nicht dazu verleiten, Netz und Elemente nicht zu hinterfragen. Eine Aussage über die Anzahl der Elemente (mit einer möglichst beeindruckenden Zahl) ist ohne die Kenntnis des Elementtyps nicht ausreichend (siehe Beispiel 1 auf Seite 705) und sagt auch noch nichts über die Qualität des Netzes, denn viel wichtiger ist die Antwort auf die Frage, ob der automatisch arbeitende Netzgenerator die kritischen Bereiche überhaupt erkannt (und entsprechende Netzverfeinerungen vorgesehen) hat.

34.2.2 Reduktion der Elementlasten, Realisierung der Lagerung

Belastungen dürfen am Finite-Elemente-Modell nur an den Knoten angreifen. Auch bei der Reduktion der an den Elementen angreifenden Lasten auf statisch äquivalente Knotenlasten verhalten sich die Elementtypen unterschiedlich:

- ⇒ Im Abschnitt 18.2.2 wurde gezeigt, dass es für biegesteife gerade Träger möglich ist, Linienlasten so durch statisch äquivalente Knotenlasten (Kräfte und Momente) zu ersetzen, dass sich für alle Knoten des Systems der unverfälschte Verformungszustand ergibt. Für die Elemente, für die eine solche Reduktion von Elementlasten vorgenommen wurde, können im Inneren des Elements der Verformungszustand und die Schnittgrößen so „repariert“ werden, dass sich alle Werte exakt ergeben.

Die Abbildung 34.7 zeigt den Rahmen der Abbildung 34.2 nach dem Ersetzen der am Element 2 angreifenden Linienlast durch äquivalente Knotenlasten. Der Benutzer eines FEM-Programms bemerkt davon im Allgemeinen nichts, denn er kann die Linienlasten direkt eingeben, Reduktion und „Rückrechnung mit den erforderlichen Reparaturen“ werden vom Programm erledigt.

Die Tatsache, dass auch Lager nur an den Knoten zugelassen sind, hat für den biegesteifen Rahmen keine Konsequenzen: Wo ein Lager ist, wird ein Knoten platziert.

- ⇒ Das Ersetzen der auf die Scheibenelemente wirkenden Lasten durch Knotenlasten (im Beispiel der Konsole nach Abbildung 34.3: Linienlasten, aber es könnte z. B. mit dem Eigengewicht auch eine über das Element verteilte Last sein) ist mit einem Fehler in der gleichen Größenordnung behaftet, wie er durch die Approximation des Verschiebungsfeldes im Elementinneren entsteht.

Praktisch sind die Auswirkungen meist unbedeutend, außerdem überblickt der Anwender, ob z. B. (wie in der Abbildung 34.8 skizziert) beim Ersetzen einer Linienlast durch Einzellasten das Modell überhaupt nennenswert verfälscht wird.

Auch die tatsächliche Lagerung der Scheibe kann natürlich nur approximiert werden. Die Abbildung 34.8 zeigt, wie der eingespannte Rand durch Festlager für alle auf dem Rand liegenden Knoten angenähert werden muss.

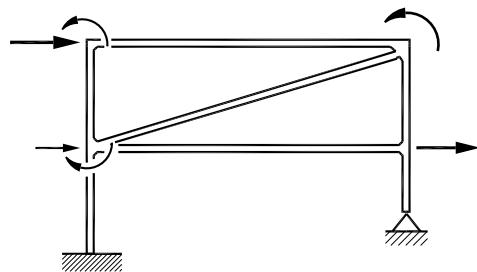


Abbildung 34.7: Reduktion verteilter Lasten auf Knotenlasten und Realisierung der Lagerung führen zu keinem Genauigkeitsverlust

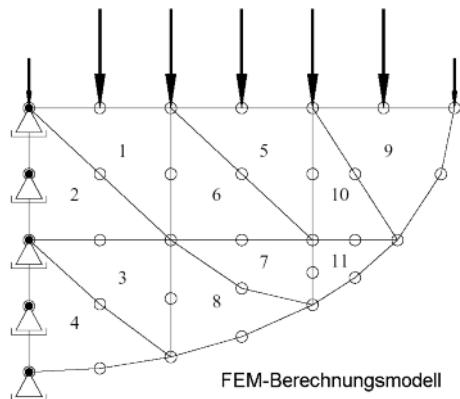


Abbildung 34.8: Verteilte Belastungen und die Lagerung können bei zwei- und dreidimensionalen Modellen nur näherungsweise erfasst werden.

34.2.3 Die Element-Steifigkeitsmatrix

Das Bereitstellen der Element-Steifigkeitsmatrix und des Vektors der reduzierten Elementlasten ist die entscheidende Vorarbeit für die Behandlung einer Aufgabenklasse mit der Finite-Elemente-Methode. Diese Vorarbeit muss nur einmal geleistet werden (z. B. vor dem Schreiben eines Computerprogramms, nicht von dem Benutzer des Programms). Was der Anwender von Finite-Elemente-Computerprogrammen unbedingt wissen sollte, sind die Eigenschaften der verwendeten finiten Elemente und die Näherungsannahmen, die bei der Herleitung der Element-Steifigkeitsbeziehung getroffen wurden. Die unterschiedlichen Schlussfolgerungen, die bei ein- bzw. zweidimensionalen Problemen zu ziehen sind, sollen am ebenen Rahmenelement und dem einfachsten ebenen Scheibenelement (Dreieck mit 6 Freiheitsgraden) erläutert werden:

- ⇒ Für das ebene Rahmenelement wurde die Element-Steifigkeitsbeziehung im Abschnitt 18.2.4 hergeleitet. Mit Formel 18.16 ergab sich eine Element-Steifigkeitsmatrix mit 6 Zeilen bzw. Spalten (2 Knoten mit je 3 Freiheitsgraden: Verschiebungen u_i und v_i und Verdrehwinkel φ_i). Beim Einsatz dieses Elements ist die Kompatibilität der Verformungen mit den Nachbarelementen automatisch garantiert, weil diese an den Knoten die gleichen Verformungen erfahren.
- ⇒ Auch das einfache Scheibenelement hat 6 Freiheitsgrade (3 Knoten mit je 2 Freiheitsgraden: Verschiebungen u_i und v_i). Damit ist zunächst nur die Kompatibilität der Verschiebungen mit den Nachbarelementen an den Knoten garantiert, aber natürlich müssen alle Punkte einer Elementkante die gleichen Verformungen wie die Punkte der Elementkante des Nachbarelements haben, um ein Auseinanderklaffen oder Überlappen zu vermeiden. Dafür muss durch geeignete Verschiebungsansätze benachbarter Elemente gesorgt werden.

Für den Verschiebungszustand innerhalb des Scheibenelements muss eine Näherungsannahme getroffen werden. Für die beiden Verschiebungskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$ müssen zwei Funktionen angesetzt werden, die beim ebenen Problem von zwei Koordinaten abhängen. Üblicherweise werden algebraische Funktionen benutzt, bei einem Element mit 6 Freiheitsgraden kann nur ein Ansatz mit 6 Freiwerten verwendet werden. Da keine Koordinatenrichtung bevorzugt werden soll, sind dies also 3 Terme für jede Verschiebungskomponente:

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad , \quad v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y . \quad (34.1)$$

Wie man mit diesem Ansatz zu der auf der Seite 703 angegebenen Element-Steifigkeitsmatrix 34.2 kommt, braucht den Benutzer eines FEM-Programms nicht zu interessieren. Für Interessenten sei angemerkt, dass der eleganteste Weg der im Abschnitt 33.5.4 am Beispiel des Biegeträgers beschriebene Algorithmus ist, der mit der Ansatzfunktion 33.5.6 startet, die das Pendant zu 34.1 ist. Auch für das Scheibenproblem existiert ein Variationsproblem, das mit dem Verfahren von Ritz schließlich zur Element-Steifigkeitsbeziehung führt.

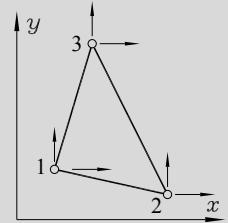
Aber die Konsequenzen, die in diesem einfachen Fall sehr deutlich sind, müssen vom Benutzer eines FEM-Programms beachtet werden:

- ⇒ Ein „exaktes Ergebnis“ ist nur zu erwarten, wenn sich die Verschiebungen tatsächlich nur nach einer linearen Funktion ändern. Das ist z. B. für den einfachen Zug- oder Druckstab mit konstanter Normalkraft der Fall (siehe Beispiel auf Seite 708).

- ⇒ Die Verzerrungen (Dehnungen, Gleitung) berechnen sich auch beim zweidimensionalen Problem aus den Ableitungen der Verschiebungen (wie z. B. beim Zugstab nach Formel 14.3). Wenn die Verschiebungen im Element sich nach einer linearen Funktion ändern, können die Verzerrungen und die zu ihnen (nach dem Hookeschen Gesetz) proportionalen Spannungen im Element nur konstant sein. Die Beziehung 34.3 bestätigt dies und macht deutlich, wie kritisch die Verwendung eines solchen Elements ist.
- ⇒ Durch einfache geometrische Überlegungen kann nachgewiesen werden, dass die Gleichheit der Knotenverschiebungen benachbarter Elemente mit dem Verschiebungsansatz 34.1 zu kompatiblen Verschiebungen entlang der gesamten gemeinsamen Elementkante führt.

Element-Steifigkeitsbeziehung für das Drei-Knoten-Scheibenelement:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{Et}{4|A|(1-v^2)} \right)_e \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (34.2)$$



mit $A = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})$, $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$,

E - Elastizitätsmodul, t - Scheibendicke, v - Querkontraktionszahl, $v^* = \frac{1}{2}(1-v)$,

$$\begin{aligned} K_{11} &= \begin{bmatrix} v^*x_{32}^2 + y_{32}^2 & (v^* + v)x_{32}y_{32} \\ \text{symm.} & x_{32}^2 + v^*y_{32}^2 \end{bmatrix}, \quad K_{12} = \begin{bmatrix} v^*x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & v^*x_{32}y_{31} + vx_{31}y_{32} \\ vx_{32}y_{31} + v^*x_{31}y_{32} & x_{32}x_{13} + v^*y_{32}y_{13} \end{bmatrix}, \\ K_{22} &= \begin{bmatrix} v^*x_{31}^2 + y_{31}^2 & (v^* + v)x_{31}y_{13} \\ \text{symm.} & x_{31}^2 + v^*y_{31}^2 \end{bmatrix}, \quad K_{13} = \begin{bmatrix} v^*x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} & v^*x_{32}y_{12} + vx_{21}y_{23} \\ vx_{32}y_{12} + v^*x_{21}y_{23} & x_{32}x_{21} + v^*y_{32}y_{21} \end{bmatrix}, \\ K_{33} &= \begin{bmatrix} v^*x_{21}^2 + y_{21}^2 & (v^* + v)x_{21}y_{12} \\ \text{symm.} & x_{21}^2 + v^*y_{21}^2 \end{bmatrix}, \quad K_{23} = \begin{bmatrix} v^*x_{21}x_{13} + y_{21}y_{13} & v^*x_{31}y_{21} + vx_{21}y_{31} \\ vx_{31}y_{21} + v^*x_{21}y_{31} & x_{21}x_{13} + v^*y_{21}y_{13} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Spannungen im Element:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{2A(1-v^2)} \begin{bmatrix} y_{23} & vx_{32} & y_{31} & vx_{13} & y_{12} & vx_{21} \\ vy_{23} & x_{32} & vy_{31} & x_{13} & vy_{12} & x_{21} \\ v^*x_{32} & v^*y_{23} & v^*x_{13} & v^*y_{31} & v^*x_{21} & v^*y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (34.3)$$

Dass die Element-Steifigkeitsmatrix 34.2 direkt mit Formeln für jedes einzelne Matrixelement angegeben werden kann, ist bei zweidimensionalen Problemen eine seltene Ausnahme. Die Formeln für das (ansonsten nicht zu empfehlende) Drei-Knoten-Element wurden hier angegeben, um die Gemeinsamkeiten der beiden betrachteten Problemklassen zu zeigen:

- Die Element-Steifigkeitsmatrix 18.16 für das Rahmenelement wird vollständig beschrieben durch die Knotenkoordinaten, die Querschnittsfläche, das Flächenträgheitsmoment (geometrische Größen) und den Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft).
- Die Element-Steifigkeitsmatrix für das Scheibenelement 34.2 wird vollständig beschrieben durch die Knotenkoordinaten, die Scheibendicke (geometrische Größen), den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl (Materialeigenschaften).

Die gravierenden Unterschiede der beiden betrachteten Problemklassen sind:

- Mit der Element-Steifigkeitsbeziehung 18.16 wird die Biegetheorie für gerade Träger exakt abgebildet. Die Ergebnisse sind im Rahmen dieser Theorie exakt.
- Mit der Element-Steifigkeitsbeziehung 34.2 für das Drei-Knoten-Scheibenelement wird die Theorie der ebenen Scheiben nur (in diesem Fall sogar nur sehr grob) angenähert. Diese Aussage konnte an diesem einfachen Element sehr schön verdeutlicht werden und wird mit dem Beispiel 1 auf Seite 705 bestätigt.

Diese Überlegungen sollen zum Vergleich nun für ein „besseres“ Element angestellt werden. Für das in Abbildung 34.9 noch einmal skizzierte Element mit 6 Knoten und 12 Freiheitsgraden könnte in einem kartesischen Koordinatensystem ein Verschiebungsansatz der Form

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \quad , \\ v(x, y) &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 \end{aligned} \quad (34.4)$$

verwendet werden (auch hier wurde der Ansatz so aufgeschrieben, dass keine Richtung bevorzugt wird).

Es braucht den Programmbenutzer weniger zu interessieren, dass wahrscheinlich keine kartesischen Koordinaten für die Ansatzfunktionen 34.4 verwendet wurden (ganz bestimmt nicht, wenn das Element gekrümmte Ränder hat) und wie die Koordinatentransformationen mit den von ihm einzugebenden Knotenkoordinaten ausgeführt werden. Dass für die Berechnung der Element-Steifigkeitsmatrix numerisch integriert werden muss (üblicherweise werden die Gauß-Formeln dafür verwendet), ist für den Benutzer nur beiläufig von Interesse, weil dadurch eine (allerdings meist unbedeutende) Fehlerquelle gegeben ist. Auch die Implementierungsprobleme sind natürlich Sache des Programmierers (die Element-Steifigkeitsmatrix kann nicht mehr „mit Formeln“ für die einzelnen Matrixelemente aufgeschrieben werden), aber das Folgende sollte man wissen:

Wenn sich die Verschiebungen im Element nach einer quadratischen Funktion ändern, können sich die Verzerrungen und die zu ihnen (nach dem Hookeschen Gesetz) proportionalen Spannungen im Element nach einer linearen Funktion ändern. Das ist natürlich wesentlich besser als bei dem Element mit nur 6 Freiheitsgraden (mit konstanten Spannungen im Element), aber auch nicht mehr als z. B. nach der Bernoullischen Biegetheorie als Änderung über die Querschnittshöhe angenommen wird. Für höhere Genauigkeitsforderungen (und die Behandlung der gedrungenen Konsole, die im vorigen Abschnitt besprochen wurde, als Kragträger nach der Biegetheorie wäre z. B. sicher eine sehr grobe Näherungsnahme) ist also auch bei Verwendung des Sechs-Knoten-Elements eine ausreichend feine Vernetzung erforderlich, um die komplizierteren Spannungsverläufe elementweise durch lineare Verläufe brauchbar anzunähern.

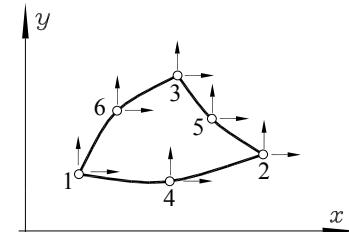


Abbildung 34.9: Scheiben-Dreieckselement mit 6 Knoten (12 Freiheitsgrade)

34.3 Weitere Elementtypen, Testrechnungen

Nachfolgend werden einige weitere Elemente vorgestellt, die ganz unterschiedlichen Elementklassen zuzuordnen sind. Das Ziel ist einerseits, die Leistungsfähigkeit des Verfahrens zu demonstrieren, andererseits auf die Probleme hinzuweisen, die mit dem Näherungscharakter der Finite-Elemente-Methode verbunden sind.

Außerdem gilt: Wenn man zum ersten Mal ein Finite-Elemente-Programmsystem benutzt (oder sich mit einem neuen System auseinandersetzen muss), sollte man vorab mindestens eine Testrechnung mit einer kleinen Aufgabe ausführen, deren Ergebnis man kennt. Das erste Beispiel eignet sich sicher dafür, weil das Erzeugen des Netzes besonders einfach ist und weil die Schlussfolgerungen, die am zweidimensionalen Problem gezogen werden können, auf die sehr ähnlichen (wenn auch deutlich aufwendigeren) dreidimensionalen Probleme übertragen werden können.

34.3.1 Scheiben-Viereckselement mit 16 Freiheitsgraden

Zunächst werden Vergleichsrechnungen zur Scheibentheorie mit dem einfachen Dreieckselement nach Formel 34.2 und dem in **Abbildung 34.10** dargestellten Viereckselement vorgestellt. Das Viereckselement hat 8 Knoten und damit 16 Freiheitsgrade, so dass für den Verschiebungsansatz für jede Richtung noch zwei zusätzlich Funktionen im Vergleich zum Ansatz für das Dreieckselement 34.4 hinzukommen.

Auf die (mathematisch interessante, aber nicht ganz anspruchslose) Herleitung der Element-Steifigkeitsbeziehung für das Element mit gekrümmten Rändern kann hier nicht eingegangen werden. Für den Anwender interessiert ohnehin nur die Leistungsfähigkeit des Elements.

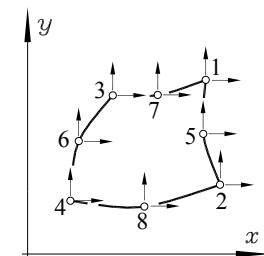


Abbildung 34.10: Scheiben-Viereckselement mit 16 Freiheitsgraden

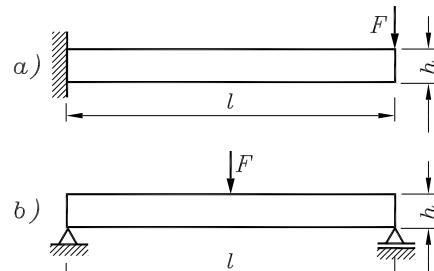
Beispiel:

Für die skizzierten „biegeträger-ähnlichen“ Systeme sind nach der Scheibentheorie die Verformungen und die Spannungen zu berechnen. Die Dicke t , der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν sind jeweils für die gesamte Scheibe konstant.

Gegeben: $F = 200\text{ N}$; $l = 200\text{ mm}$; $h = 20\text{ mm}$; $t = 5\text{ mm}$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ N/mm}^2$; $\nu = 0,3$.

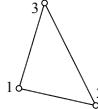


Es werden Berechnungen² mit unterschiedlichen Elementtypen und Vernetzungen ausgeführt. Ausgewählte Ergebnisse werden untereinander und mit den Ergebnissen der Biegetheorie verglichen.



²Die hier angegebenen Ergebnisse wurden mit Programmen berechnet, die mit dem „Finite-Elemente-Baukasten“ *Fem-set* erzeugt wurden, siehe Informationen in der Box auf Seite 714. Für das Beispiel 1 findet man unter www.TM-aktuell.de auch die ausführlich kommentierte Berechnung mit einem kommerziellen System (Ansys).

Nachfolgend sind die Ergebnisse für zwei Elementtypen (Drei-Knoten-Dreieck und Acht-Knoten-Viereck) zusammengestellt:

Element-Typ	Anzahl der Elemente	Anzahl der Knoten	Fall a)		Fall b)	
			v_F [mm]	$\sigma_{x,max}$ [N/mm 2]	v_F [mm]	$\sigma_{x,max}$ [N/mm 2]
	$1 \times 2 = 2$	13	0,709	104	0,0410	-20,5
	$2 \times 10 = 20$	85	0,764	124	0,0491	-31,1
	$4 \times 30 = 120$	429	0,767	132	0,0495	-35,8
	$2 \times 2 = 4$	6	0,027	2,99	0,00024	-0,43
	$4 \times 10 = 40$	33	0,283	45,0	0,0186	-10,4
	$8 \times 30 = 240$	155	0,602	97,4	0,0388	-24,4
	$10 \times 80 = 800$	486	0,691	113	0,0445	-30,4
Biegetheorie			0,762	120	0,0476	-30

Theoretisch müssten die Ergebnisse nach der Scheibentheorie aus folgenden Gründen besser sein als nach der Theorie des Biegeträgers:

- Die Scheibentheorie unterliegt nicht der „Bernoulli-Annahme“ der Biegetheorie vom Ebenbleiben der Querschnitte.
- Die Lasteinleitung kann tatsächlich dort erfolgen, wo die Last wirkt. In der Biegetheorie steckt z. B. immer die stillschweigende Annahme, dass Einzellasten in den Querschnitt entsprechend der Querkraftverteilung über die Höhe eingeleitet werden.
- Eine entsprechende Aussage gilt für die Lagerung, und an einer Einspannung z. B. (Fall a) setzt die Biegetheorie voraus, dass sich Vertikaldehnungen ungestört einstellen können.

Praktisch kann aber nach der Scheibentheorie nur eine Näherungslösung erzeugt werden. Bei einer groben Näherung werden die Ergebnisse der Biegetheorie die Realität sicher besser annähern, wenn man allerdings den (unbekannten) theoretischen Lösungen mit der Finite-Elemente-Methode sehr nahe kommt, sind diese Ergebnisse zu bevorzugen. Die berechneten Ergebnisse zeigen das: Bei einer groben Einteilung des Systems in finite Elemente erhält man eine entsprechend grobe Näherung der Realität, und die klassische Biegetheorie liefert bessere Ergebnisse. Bei feiner werdender Vernetzung sind die Ergebnisse der Finite-Elemente-Methode den Ergebnissen der Biegetheorie überlegen.

Die Ergebnisse für das Acht-Knoten-Viereckselement bestätigen diese Aussage. Während die extrem grobe Einteilung in nur 2 Elemente immerhin schon Ergebnisse liefert, die in der zu erwartenden Größenordnung liegen, sind die Ergebnisse mit 20 Elementen brauchbar und genügen bei 120 Elementen auch gehobenen Ansprüchen (**Abbildung 34.11** zeigt zwei Netze).

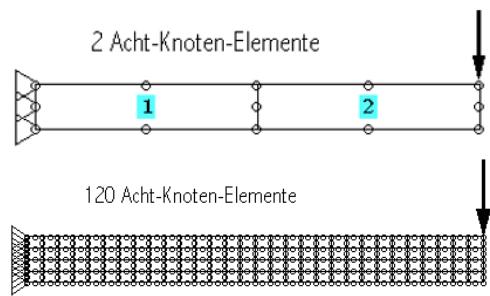


Abbildung 34.11: Netze mit Acht-Knoten-Elementen

Es ist übrigens kein Zufall, dass die berechneten Verschiebungen mit feiner werdender Vernetzung immer größer werden. Dies ist mit dem im Abschnitt 33.5 behandelten Prinzip vom Minimum des elastischen Potenzials zu erklären: Die zur Konkurrenz zugelassenen Vergleichsfunktionen werden mit feinerer Vernetzung immer anpassungsfähiger an die (unbekannte) Lösungsfunktion, mit der sich tatsächlich das Minimum des elastischen Potenzials ergeben würde, weil die elementweise aufzuschreibenden Ansatzfunktionen natürlich beliebige Funktionen bei kleiner werdenden Elementen besser approximieren können.

Interessant ist der Einfluss der starren Einspannung, der sich erst bei noch wesentlich feinerer Vernetzung deutlich zeigt. Während sich der Wert für die Verschiebung unter der Kraft nicht mehr ändert (und sehr nah beim Wert der Biegetheorie liegt), steigen die maximalen Spannungen in x -Richtung (die „Biegespannungen“) noch deutlich an.

Element-Typ	Anzahl der Elemente	v_F [mm]	$\sigma_{x,max}$ [N/mm 2]
	480	0,768	141
	1920	0,768	160
	7680	0,768	185
Biegetheorie	0,762	120	

Abbildung 34.12: Fein vernetzter Kragträger (Fall a)

Ursache dafür sind die an der Einspannstelle verhinderten **Vertikalverschiebungen**, die an den kritischen Stellen (oberer und unterer Rand) zu erheblichen Zwängen führen, die von der Theorie des Biegeträgers nicht erfasst werden. Wenn man bei der Vergleichsrechnung „dem Biegeträger entgegenkommen wollte“, müssten für die Scheibe am linken Rand nur die Horizontalverschiebungen verhindert werden (und nur z. B. für den mittleren Punkt auch die Vertikalverschiebung). Dann könnten sich auch (wie in der Theorie der Biegeträger angenommen) an der Einspannstelle die Vertikalverschiebungen ohne Zwang einstellen. Eine solche Rechnung liefert dann dort auch für die Spannungen fast genau die Werte des Biegeträgers.

Ganz anders ist die Situation mit den 3-Knoten-Elementen (zur Erinnerung: Linear veränderlicher Verschiebungsansatz, deshalb konstante Spannungen in einem Element).

Die Einteilung in nur 4 Elemente (Abbildung 34.13) kann natürlich kein vernünftiges Ergebnis liefern (gefährlich ist aber, dass das Verfahren überhaupt ein Ergebnis liefert). Doch auch bei feiner werdender Vernetzung steigt die Genauigkeit nur sehr langsam.

Die Ergebnisse mit einer Einteilung in 40 Elemente sind immer noch unbrauchbar. Selbst mit 800 Elementen ist das Resultat noch sehr unbefriedigend und hat nicht annähernd die Qualität, die mit dem Acht-Knoten-Element schon bei einer Einteilung in 20 Elemente erreicht wird. Man bedenke, dass bei der 800-Elemente-Rechnung immerhin 486 Knoten berücksichtigt werden, so dass ein Gleichungssystem mit 972 Unbekannten gelöst werden muss.

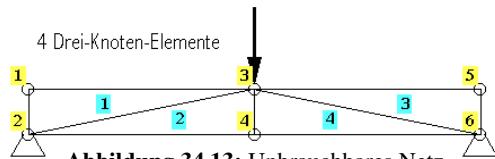


Abbildung 34.13: Unbrauchbares Netz

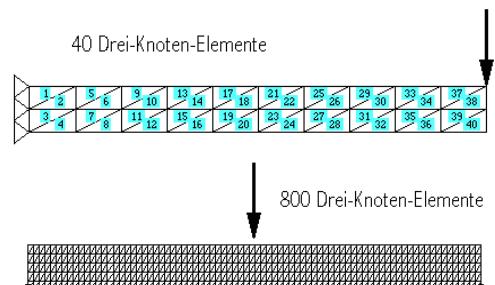


Abbildung 34.14: Netze mit Drei-Knoten-Elementen

Das Fazit dieser Rechnungen lautet:

Selbst eine sehr feine Vernetzung kann bei Verwendung ungeeigneter Elemente zu äußerst ungenauen bis unbrauchbaren Ergebnissen führen.

- ⇒ Das hier am zweidimensionalen Modell demonstrierte Problem gilt in ganz ähnlicher Weise auch für dreidimensionale Elemente. Recht beliebt sind für 3D-Modelle wegen der Möglichkeit, annähernd beliebige geometrische Formen sehr gut nachbilden zu können, die Tetraeder-Elemente. Das einfachste Element dieses Typs hat vier Knoten mit je 3 Freiheitsgraden, so dass für die 3 Richtungen jeweils ein viergliedriger Ansatz für die Verschiebungsfunktion verwendet werden kann. Das bedeutet: Nur lineare Glieder im Verschiebungsansatz, konstante Verzerrungen und damit konstante Spannungen im Element. Dieses Element verlangt ähnlich feine Vernetzungen wie das Drei-Knoten-Element bei der Berechnung von Scheibenproblemen.

Eindrücklich gewarnt werden muss vor der Versuchung, ein möglichst feines Netz (mit einfachen Elementen) zu erzeugen, mit dem eine hohe Qualität der Rechnung suggeriert werden soll. Das Beispiel zeigte, dass die Verwendung geeigneter Elementtypen ein mindestens ebenso wichtiges Kriterium für die Beurteilung einer Rechnung ist, denn Verifizieren kann man die Ergebnisse vieler Finite-Elemente-Berechnungen sehr häufig nicht, gerade weil Probleme gelöst werden können, die sich einer Lösung mit anderen Verfahren entziehen.

Und weil nach den vielen positiven Aussagen über die Finite-Elemente-Methode das gerade behandelte Beispiel möglicherweise abschreckend wirkte, soll hier noch einmal betont werden:

Die Methode der finiten Elemente ist ein außerordentlich leistungsfähiges (und für zahlreiche Probleme das einzige praktikable) Verfahren. Komfortable FEM-Programmsysteme sind unverzichtbare Hilfsmittel für den Ingenieur.

Aber: Der Anwender sollte wissen, was er tut!

Abschließend soll zur „Ehrenrettung“ des Drei-Knoten-Elements (immerhin begann die Erfolgsstory der Finite-Elemente-Methode mit diesem Element) darauf verwiesen werden, dass auch das einfachste Element gute Ergebnisse ab liefert für Modelle, die es ausreichend genau annähern kann.

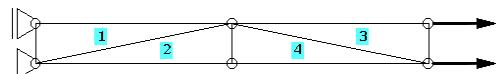


Abbildung 34.15: Mit dem Modell des „klassischen Zugstabs“ ist auch das Drei-Knoten-Element nicht überfordert

Das in **Abbildung 34.15** zu sehende Netz mit 4 Elementen, das im behandelten Beispiel gera dezu absurd falsche Ergebnisse lieferte, kann die skizzierte Zugbelastung exakt umsetzen: Weil sich für den Zugstab (vgl. Kapitel 14) linear veränderliche Verschiebungen und konstante Spannungen ergeben, sind die Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnung auch bei Verwendung des Drei-Knoten-Elements exakt. Aber auch diese Aussage gilt nur, wenn sich (wie beim einfachen Zugstab) die Querkontraktion ungehindert ausbilden kann. Deshalb ist in **Abbildung 34.15** eines der beiden Lager ein Loslager (vgl. Diskussion über die starre Einspannung des Biegeträgers).

34.3.2 Konische Welle

Die Elementsteifigkeitsbeziehung 33.62 für den Biegeträger kann eine veränderliche Biegesteifigkeit erfassen. Dies soll hier genutzt werden, um ein Element für die Berechnung von konischen Wellen zu entwickeln. Abbildung 34.16 zeigt, wie sich der Durchmesser von einem Elementrand zum anderen linear von d_1 auf d_2 ändert. Mit der Formel für das Flächenträgheitsmoment für einen Kreisquerschnitt (Seite 222) kann die von z_e abhängige Biegesteifigkeit so formuliert werden:

$$EI_e(z_e) = E \frac{\pi}{64} d_e^4(z_e) = E \frac{\pi}{64} \left[d_1 + (d_2 - d_1) \frac{z_e}{l_e} \right]^4 .$$

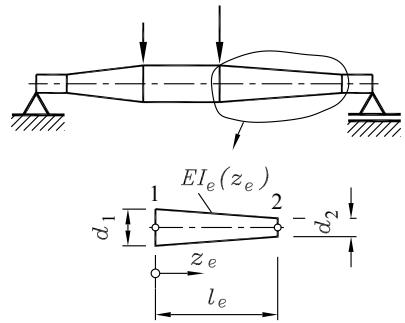


Abbildung 34.16: Biegeträger mit linear veränderlichem Durchmesser

In die Formeln der Matrixelemente der Elementsteifigkeitsmatrix gehen neben $EI_e(z_e)$ noch die zweiten Ableitungen der Ansatzfunktionen 33.58 ein:

$$\begin{aligned} g_1''(z_e) &= -\frac{6}{l_e^2} + 12 \frac{z_e}{l_e^3}, & g_2''(z_e) &= -\frac{4}{l_e} + 6 \frac{z_e}{l_e^2}, \\ g_3''(z_e) &= \frac{6}{l_e^2} - 12 \frac{z_e}{l_e^3}, & g_4''(z_e) &= -\frac{2}{l_e} + 6 \frac{z_e}{l_e^2}. \end{aligned}$$

Damit können die Integrale für die Matrixelemente der Elementsteifigkeitsmatrix

$$k_{mn}^{(e)} = \int_{z_e=0}^{l_e} EI_e(z_e) g_m''(z_e) g_n''(z_e) dz_e$$

aufgeschrieben und geschlossen gelöst werden. Dies ist etwas mühsam (für das einfache Problem aber durchaus nicht schwierig) und wird deshalb im Allgemeinen numerisch erledigt. Dafür werden bevorzugt die Quadraturformeln von Gauß (nach CARL FRIEDRICH GAUSS, 1777 - 1855) verwendet, bei denen n_G (nicht äquidistante) Stützstellen im Integrationsbereich (*Gauß-Punkte*) so liegen, dass ein Polynom $(2n_G - 1)$ -ten Grades exakt integriert wird³. Im Allgemeinen ist die Genauigkeit der Gauß-Formel für $n_G = 3$ ausreichend, die ein Integral folgendermaßen nähert:

$$\int_{z=0}^l f(z) dz \approx \frac{l}{2} \sum_{i=1}^3 w_i^* f(z_i) \quad \text{mit} \quad z_i = \frac{l}{2} (1 + \xi_i) , \quad (34.5)$$

$$\xi_{1,2,3} = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{3}{5}} , \quad w_{1,2,3}^* = \frac{5}{9}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{5}{9} .$$



Damit ergeben sich die Matrixelemente der Elementsteifigkeitsmatrix aus folgender Summe:

$$k_{mn}^{(e)} \approx \frac{l_e}{2} \sum_{i=1}^3 w_i^* EI_e(z_i) g_m''(z_i) g_n''(z_i) \quad \text{mit} \quad z_i = \frac{l_e}{2} (1 + \xi_i) . \quad (34.6)$$

³ Unter www.TM-aktuell.de findet man (Stichwort „Gauß-Integration“) eine ausführlicher Darstellung dieses Themas

Beispiel:

Für die skizzierte konische Welle, bei der sich der Durchmesser in zwei Abschnitten jeweils linear ändert, ist die Durchbiegung (Elastizitätsmodul: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$) zu berechnen. Der Einfluss der Feinheit der Vernetzung auf die Ergebnisse ist zu untersuchen.

Die „natürliche“ Einteilung des Systems in 5 Elemente (**Abbildung 34.17**, obere Skizze), die sich mit der Verfügbarkeit eines Elements mit veränderlichem Querschnitt³ anbietet, liefert nur eine Näherungslösung, weil die verwendeten Ansatzfunktionen die komplizierten Funktionen, mit denen eine Biegelinie bei veränderlichem Querschnitt beschrieben wird, nicht exakt nachbilden können.

Für den Vergleich werden die Durchbiegungen an den vier Übergangsstellen von jeweils konstantem zu veränderlichem Querschnitt gewählt (in der mittleren Skizze der **Abbildung 34.17** sind das die Knoten 2, 3, 4 und 5).

Die nebenstehend zu sehende Zusammenstellung listet die Ergebnisse für drei Rechnungen. Man sieht, dass sich bei einer Einteilung der beiden konischen Wellenabschnitte in jeweils 8 Elemente (insgesamt 19 Elemente, **Abbildung 34.17**, untere Skizze) die Ergebnisse nicht un wesentlich ändern.

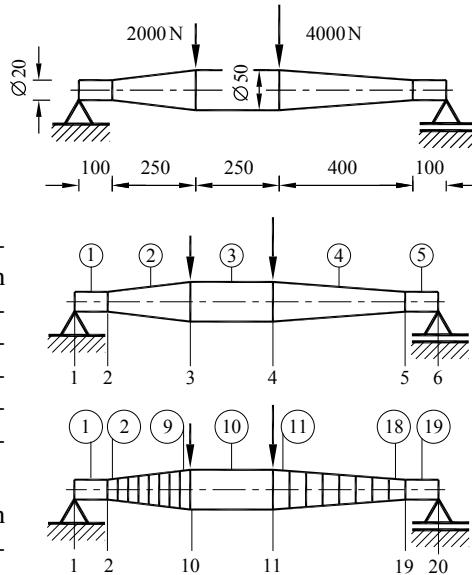


Abbildung 34.17: Einteilung der Welle in 5 bzw. 19 Elemente

5 Elemente		19 Elemente		35 Elemente	
i	$v_i [\text{mm}]$	i	$v_i [\text{mm}]$	i	$v_i [\text{mm}]$
2	2,6243	2	2,8191	2	2,8192
3	5,3599	10	5,5266	18	5,5267
4	6,2512	11	6,4244	19	6,4245
5	2,9708	19	3,1985	35	3,1986

Abbildung 34.18: Rechnung mit konischen Elementen

Bei noch feinerer Einteilung (jeweils nur die konischen Abschnitte, die 3 Abschnitte mit konstantem Querschnitt werden von der Element-Steifigkeitsmatrix exakt abgebildet) in insgesamt 35 Elemente sind die Ergebnisse praktisch exakt (die entsprechend der jeweils feineren Elementeinteilung ausgewiesenen Knotennummern in einer Zeile beziehen sich immer auf den gleichen Punkt der Welle).

Es bietet sich an, die Ergebnisse mit einer Vergleichsrechnung mit dem einfachen Biegeträger-Element mit konstantem Querschnitt zu überprüfen, weil die Ergebnisse zumindest in gleicher Größenordnung zu erwarten sind. Als Durchmesser des Querschnitts wird z. B. für jedes Element der „mittlere Durchmesser“ angenommen.



³Das konische Biegeträger-Element ist so, wie es auf Seite 709 beschrieben wird, im „Finite-Elemente-Baukasten“ Femset verfügbar, siehe Informationen in der Box auf Seite 714. Die Berechnungen für das Beispiel wurden mit Matlab-Femset ausgeführt, siehe www.TM-aktuell.de.

Die nebenstehend zu sehende Zusammenstellung zeigt die Ergebnisse für zwei Rechnungen, wobei bei der Rechnung mit 5 Elementen für die konischen Wellenabschnitte 35 mm als mittlere Durchmesser angesetzt wurden, bei der 19-Elemente-Rechnung eine entsprechend feine Änderung von Element zu Element.

Während die 5-Elemente-Rechnung doch erhebliche Abweichungen von der Rechnung mit „besseren Elementen“ zeigt, ist die 19-Elemente-Rechnung überraschend genau.

In diesem Fall überwiegt eindeutig die Feinheit der Elementeinteilung gegenüber dem qualitativ besseren Element bei der Annäherung an die exakte Lösung, so dass sich bei noch feinerer Unterteilung eine gleichwertige Qualität der Ergebnisse ergibt.

Genau mit dieser Strategie arbeitet das unter www.TM-interaktiv.de zu findende Programm „Gerade Biegeträger“: Es verwendet nur das einfache Biegeträger-Element (mit konstantem Querschnitt), unterteilt aber Träger mit kontinuierlich veränderlicher Biegsteifigkeit automatisch (der Benutzer merkt davon nichts) in 500 Elemente. **Abbildung 34.20** zeigt einen Ausschnitt aus der Ergebnis-Grafik für das hier behandelte Beispiel. Obwohl die Darstellung (entsprechend der Eingabe durch den Benutzer) nur 5 Elemente zeigt (und auch nur die Ergebnisse für die 6 Knoten ausgibt), wurde die Rechnung mit einer so feinen Elementeinteilung ausgeführt, dass die ausgegebenen Verformungen als exakt angesehen werden dürfen.

Im Unterschied zu den zwei- und dreidimensionalen Aufgaben ist es bei eindimensionalen Problemen weitgehend unbedenklich, einfache finite Elemente zu verwenden und die gewünschte Genauigkeit durch eine große Elementanzahl zu realisieren. Auch die von der Software automatisch erzeugten „Netzverfeinerungen“ sind in der Regel problemlos zu akzeptieren, weil die entsprechenden Bereiche zweifelsfrei erkannt werden können.

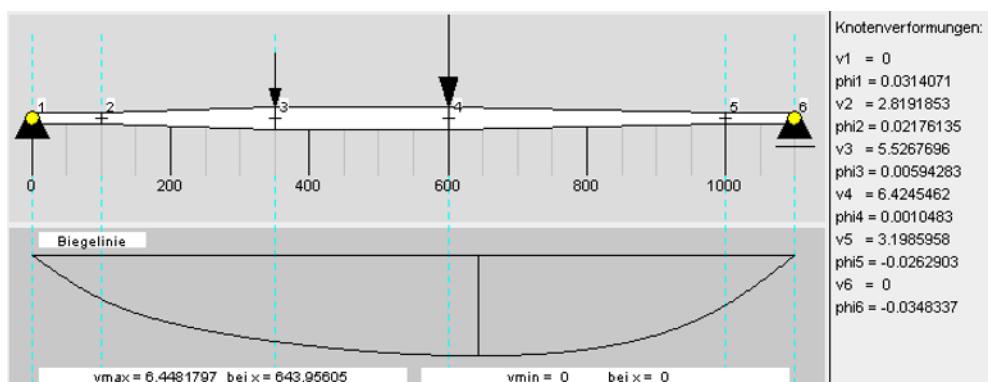


Abbildung 34.20: Berechnung mit dem Programm „Gerade Biegeträger“ (www.TM-interaktiv.de): Der Benutzer beschreibt 5 Elemente, für die interne Berechnung werden 500 Elemente verwendet.

34.3.3 St.-Venantsche Torsion

Im Kapitel 21 wurde gezeigt, dass im Rahmen der St.-Venantischen Torsionstheorie das Torsionsträgheitsmoment eines beliebigen einfach zusammenhängenden Querschnitts nach 21.29 (Seite 382) berechnet werden kann:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 1 \quad \text{mit} \quad \Phi_{\text{Rand}} = 0 \quad \text{und} \quad I_t = -4 \int_A \Phi \, dA \quad . \quad (34.7)$$

Nur für sehr wenige Querschnitte lässt sich dieses Problem geschlossen lösen. Eine Näherungslösung mit der Methode der finiten Elemente unterscheidet sich deutlich von allen bisher in diesem Buch behandelten Aufgaben:

⇒ Es ist (von diesem Startpunkt aus) ein rein mathematisches Problem (Lösung der Poissonschen Differenzialgleichung), die Begriffe „Kraft“, „Verschiebung“, „Steifigkeitsmatrix“ verlieren hier ihre Bedeutung. Sie werden aber (üblicherweise) weiter verwendet.

Es gibt kein Pendant zu den Element-Knotenlasten (und auch nicht zu den Schnittgrößen). Diese Aufgabe eignet sich deshalb hervorragend zur Demonstration des am Anfang dieses Kapitels (Seite 695) als Zugang ② zur Finite-Elemente-Theorie beschriebenen Weges.

In der Variationsrechnung wird gezeigt, dass das Minimalproblem

$$J\{\Phi\} = \int_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + 2\Phi \right] dA \Rightarrow \text{Minimum} \quad (34.8)$$

zu 34.7 äquivalent ist. Es wird ein Dreieckselement mit 6 Knoten verwendet (**Abbildung 34.21**). Dies ist einerseits einfach genug, um das Vorgehen zu demonstrieren, andererseits auch bei kompliziert berandeter Fläche anpassungsfähig genug. Die Knoten haben einen Freiheitsgrad (Funktionswert Φ_i), so dass der Näherungsansatz für Φ sechsgliedrig ist und damit etwa die Qualität des im Abschnitt 34.2.3 diskutierten Sechs-Knoten-Scheibenelements hat.

Für das Aufschreiben der Ansatzfunktionen von Dreieckselementen benutzt man üblicherweise so genannte *Flächenkoordinaten*, die auf kartesische Koordinaten transformiert werden. Darauf kann hier nicht eingegangen werden (siehe www.TM-aktuell.de). Der gesamte Weg vom Variationsproblem 34.8 über den Ritz-Ansatz und die Minimalbedingungen entspricht aber ansonsten dem im Abschnitt 33.5.4 für den Biegeträger demonstrierten Weg. Schließlich entsteht eine der Element-Beziehung 33.62 entsprechende Gleichung:

$$\mathbf{K}_e \Phi_e - \mathbf{f}_{e,\text{red}} = \mathbf{o} \quad . \quad (34.9)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j & y_{ij} &= y_i - y_j & , \\ h_{11} &= x_{32}^2 + y_{23}^2 & h_{12} &= x_{13}x_{32} + y_{31}y_{23} & , & h_{22} = x_{13}^2 + y_{13}^2 & , \\ h_1^* &= h_{11} + h_{12} & h_2^* &= h_{12} + h_{22} & , & 2A = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21} \end{aligned}$$

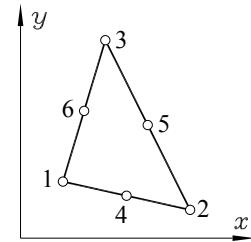


Abbildung 34.21: Dreieckselement für die St.-Venantische Torsion



ergibt sich folgende Elementbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}h_{11} & -\frac{1}{6}h_{12} & \frac{1}{6}h_1^* & \frac{2}{3}h_{12} & 0 & -\frac{2}{3}h_1^* \\ \frac{1}{2}h_{22} & \frac{1}{6}h_2^* & \frac{2}{3}h_{12} & -\frac{2}{3}h_2^* & 0 & \Phi_1 \\ \frac{1}{2}(h_1^* + h_2^*) & 0 & -\frac{2}{3}h_1^* & -\frac{2}{3}h_2^* & \Phi_2 \\ \frac{4}{3}(h_1^* + h_{22}) & -\frac{4}{3}h_1^* & -\frac{4}{3}h_2^* & \Phi_3 \\ \frac{4}{3}(h_1^* + h_{22}) & \frac{4}{3}h_{12} & \frac{4}{3}h_{12} & \Phi_4 \\ \text{symmetrisch} & \frac{4}{3}(h_1^* + h_{22}) & \frac{4}{3}(h_1^* + h_{22}) & \Phi_5 \\ & & & \Phi_6 \end{bmatrix} + \frac{A}{3} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Aufbau der System-Beziehung (lineares Gleichungssystem) erfolgt exakt nach dem bekannten Algorithmus (ausführlich beschrieben im Kapitel 15) mit der Vereinfachung, dass die „rechte Seite“ des Gleichungssystems nur aus den Anteilen der „reduzierten Knotenlasten“ $f_{e,red}$ gebildet wird („externe Knotenlasten“ gibt es nicht). Um die Randbedingung $\Phi_{Rand} = 0$ zu erfüllen, muss für alle Randpunkte des Finite-Elemente-Netzes $\Phi_i = 0$ erzwungen werden. Auch dies wird mit der Technik realisiert, die im Kapitel 15 für verhinderte Verschiebungen verwendet wird.

Die Lösung des Gleichungssystems liefert die Funktionswerte Φ_i für alle Knoten des Netzes. Dies sind die Freiwerte der Ansatzfunktionen, die für jedes Element gelten, und mit diesen nun bekannten Funktionen kann für jedes Element ein Anteil des Integrals zur I_t -Ermittlung nach 34.7 berechnet werden. Alle Elementanteile werden dann zum gesuchten I_t summiert, das schließlich nach der Formel

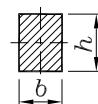
$$I_t = -\frac{4}{3} \sum_e [A(\Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6)]_e \quad (34.10)$$

berechnet wird (ausführliche Darstellung siehe www.TM-aktuell.de). Das Element ist in *Femset* verfügbar (siehe Box auf Seite 714).



Beispiel:

Für einen Rechteckquerschnitt mit einem Seitenverhältnis $\frac{h}{b} = 2$ ist das Torsions-Trägheitsmoment zu berechnen. Der Einfluss der Feinheit des Finite-Elemente-Netzes auf die Genauigkeit des Ergebnisses ist zu untersuchen.



Die Tabelle zeigt einige Ergebnisse für unterschiedlich feine Vernetzung (ein Matlab-Script, mit dem die Rechnungen nachvollzogen werden können, findet man unter www.TM-aktuell.de):

					400 Elemente	6400 Elemente
$\frac{I_t}{hb^3}$	0,2139	0,2246	0,2283	0,2286	0,2287	0,2287

Mit recht grobem Netz erzielt man schon brauchbare Ergebnisse (man bedenke, dass das Netz mit 8 Elementen nur einen einzigen Funktionswert $\Phi_i \neq 0$ für den Punkt in der Mitte erzeugt). Für sehr feine Netze ändert sich das Ergebnis praktisch nicht mehr. Der Wert, der in der Tabelle auf Seite 368 angegeben ist, wird bestätigt.

WWW - Ergänzung - Vertiefung - WWW



Finite-Elemente-Methode unter www.TM-aktuell.de bietet u. a. folgende



Themen:

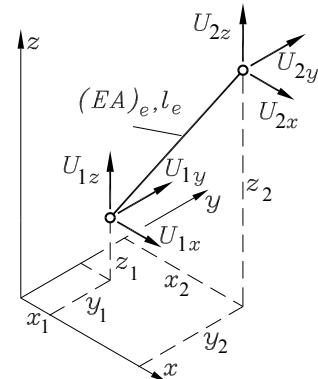
- „Die Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode (FEM)“ enthält eine ausführliche Beschreibung der allgemeinen theoretischen Grundlagen für elastostatische Probleme und Eigenschwingungsberechnungen, jeweils mit einem Beispiel.
- *Matlab-Femset* ist ein Interface zu den Algorithmen der Finite-Elemente-Methode. Es bietet die Möglichkeit, mit Matlab FEM-Rechnungen auszuführen und gestattet Einblicke in die programminterne Realisierung des Verfahrens.
- *Femset* ist ein Finite-Elemente-„Baukasten“ mit den zentralen Bausteinen für FEM-Programme (Quellcode in C, Basic und Fortran).
- Zahlreiche komplett durchgerechnete Beispiele dienen als Muster für die Behandlung ähnlicher Aufgaben, viele Aufgaben werden zum Vergleich auch mit anderen Berechnungsverfahren behandelt.



34.4 Aufgaben

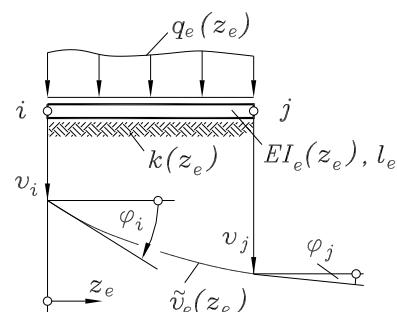
Aufgabe 34.1: Der skizzierte Fachwerkstab wird definiert durch die jeweils drei Koordinaten seiner Endpunkte und seine Dehnsteifigkeit EA . Es ist die Element-Steifigkeitsmatrix zu ermitteln, die die sechs skizzierten Knotenkräfte mit den in gleiche Richtungen zeigenden Knotenverschiebungen verknüpft.

Hinweis: Man folge dem Algorithmus, mit dem im Abschnitt 15.3 die Element-Steifigkeitsmatrix für das zweidimensionale Fachwerk-Element erzeugt wurde. Für die Transformation der Stabkraft und der in Stablängsrichtung definierten Verschiebungen auf das skizzierte Koordinatensystem wird das Arbeiten mit Richtungskosinussen empfohlen (Abschnitt 8.1).



Aufgabe 34.2: Für einen elastisch gebetteten Biegeträger ist die Element-Steifigkeitsbeziehung zu ermitteln.

Hinweis: Man folge dem Algorithmus, mit dem im Abschnitt 33.5.4 die Element-Steifigkeitsbeziehung für den Biegeträger ohne Bettung erzeugt wurde und verwende auch die dort benutzten Ansatzfunktionen 33.58. Das zur Differentialgleichung für den elastisch gebetteten Träger 19.3 äquivalente Variationsproblem kann über die Beziehungen 33.44 und 33.45 formuliert werden.



35 Verifizieren von Computerrechnungen

„Warum muss ich das denn alles lernen, wenn es dafür so komfortable Computerprogramme gibt?“. Auch wenn diese Frage bereits an mehreren Stellen in diesem Buch beantwortet wurde, der Hauptgrund wird durch die Überschrift dieses Kapitels gegeben.

Dem fatalen Trend, Berechnungen mit Hilfe des Computers eher zu glauben als der „Handrechnung“, folgen glücklicherweise diejenigen am ehesten nicht mehr, die die Berechnungen selbst durchführen, spätestens dann, wenn sie die Folgen falscher Ergebnisse selbst zu verantworten haben. Aber bei der Verteidigung der gewonnenen Ergebnisse verzichtet trotzdem kaum jemand auf den Verweis auf das „bekannte und bewährte Programm“, mit dem sie gewonnen wurden.

Das Problem, ein (auf welchem Wege auch immer gewonnenes) Ergebnis einer Berechnung zu verifizieren, ist schwierig und mit letzter Konsequenz wohl genauso unmöglich wie der Nachweis, dass ein Rechenprogramm korrekt arbeitet. Gerade den mit Computerprogrammen ermittelten Ergebnissen sollte Skepsis entgegengesetzt werden, weil einige zusätzliche Fehlerquellen bei der Nutzung von Programmen hinzukommen:

⇒ **Computerprogramme können fehlerhaft sein** (und sind es in der Regel auch). Da die großen Fehler im Allgemeinen in der Testphase bemerkt werden, sind es gerade die speziellen Probleme, die bei einem auch über lange Zeit zuverlässig arbeitenden Programm plötzlich zu einem Fehler führen, der sich im „günstigen Fall“ durch einen „Programm-Absturz“ oder ein eindeutig unsinniges Ergebnis äußert, im wesentlich häufigeren ungünstigen Fall aber beim Benutzer keine Skepsis gegenüber dem ermittelten Ergebnis hervorruft.

Übrigens: Viele Anwender wären entsetzt, wenn sie wüssten, wie viele Fehler in ihren Programmen den Software-Herstellern selbst bekannt sind. Diese Fehler werden nicht beseitigt, weil natürlich jede Programm-Änderung (auch und gerade die Fehlerbeseitigung) Ursache für neue Fehler sein kann. Außerdem ist die Suche nach Fehler-Ursachen außerordentlich mühselig und könnte mit Erfolg meist nur von den Programm-Entwicklern erledigt werden, die schon längst an einem anderen Projekt arbeiten, wenn ein Fehler bekannt wird. Und noch eine Bemerkung, die auch hin und wieder als kleiner Trost gelten darf: Der gefürchtete (aber jedem Computer-Benutzer vertraute) „Programm-Absturz“ ist immer ein Fehler der Software-Entwickler und nicht etwa ein Fehler des Anwenders (ein Programmierer hat für eine - offensichtlich nicht unrealistische - Situation keine adäquate Reaktion des Programms vorgesehen).

⇒ Man kann **das falsche Programm einsetzen**. Wer einen biegesteifen Rahmen mit einem Fachwerk-Programm berechnet (und wenn man Pech hat, stürzt das Programm nicht ab) und sich freut, dass keine Biegemomente (und damit auch nicht die gefährlichen Biegespannungen) hervorgerufen werden, darf das falsche Ergebnis natürlich nicht dem Programm anlasten.

⇒ Man kann auch ein zum Problem passendes und richtig rechnendes **Programm falsch bedienen**, indem man ihm falsche Eingabedaten anbietet. Die hierbei wohl häufigsten Fehler bei Ingenieur-Problemen sind falsche Dimensionen für richtige Zahlenwerte. Viele Programme schreiben die Dimensionen der Eingabewerte fest vor oder gestatten dem Benutzer die Einstellung. Daran muss man sich dann natürlich konsequent halten. Häufiger ist der Fall, dass keine Vorschriften über die Dimensionen für die Eingabewerte getroffen werden, die berechneten Ergebnisse orientieren sich dann an den gewählten Dimensionen. In diesem Fall ist noch größere Konsequenz erforderlich: Wenn zum Beispiel m und kN für Abmessungen und Kräfte gewählt werden, dann muss der Elastizitätsmodul in der Dimension kNm^2 eingegeben werden, Biegemomente als Ergebnis würde man in diesem Fall in kNm erhalten (im Allgemeinen ist der Maschinenbauer mit der Wahl „mm und N“ gut beraten, der Bauingenieur mag „m und kN“ bevorzugen).

Aber neben der Fehlerquelle „Dimensionen“ kann der Benutzer durch Fehleingaben, häufiger jedoch durch Missverständnisse, unklare Benutzerführung, unzureichende Programmbeschreibung usw. noch beliebig viele Fehler produzieren, die vom Programm nicht bemerkt werden können, so dass dieses ein völlig falsches Ergebnis liefert, das sich mit schönen farbigen Grafiken so elegant wie ein richtiges Resultat präsentiert.

35.1 Allgemeine Empfehlungen

Mit der zu benutzenden Software sollte man vertraut sein. Dieser Idealzustand ist schon deshalb bestenfalls vorübergehend erreichbar, weil eine neue Version sich gern auch mit geänderter Benutzer-Schnittstelle präsentiert. Auf keinen Fall sollte man ein aktuell anstehendes Problem gleich mit einer bisher nicht genutzten Software angehen, ohne nicht vorher damit eine Aufgabe mit bekanntem Ergebnis gelöst zu haben.

Für die Einarbeitung in eine neue Software (oder eine neue Version einer bekannten Software) ist das Lesen von Handbüchern nur bedingt zu empfehlen (für die junge Generation von Computer-Benutzern ist dieser Hinweis überflüssig, man liest ohnehin keine Handbücher und hat auch eine starke Abneigung gegen die Benutzung der Hilfe-Funktion). Es gibt nur eine Empfehlung: Man benutze die Software. Hilfreich kann ein „Tutorial“ sein (man wird „Klick für Klick“ durch die Lösung eines einfachen Problems geführt). Wenn dies nicht verfügbar ist, versuche man es mit einer einfachen selbst gewählten Aufgabe mit bekannter Lösung, und wenn man dann doch irgendwann nicht weiter kommt, kann man immer noch die Hilfe-Funktion oder das Internet befragen¹.

Das in ein Computerprogramm eingegebene Berechnungsmodell sollte in jedem Fall einer genauen Kontrolle unterworfen werden. Das mühsame Vergleichen vieler Zahlenwerte wird von

¹ Die Autoren dieses Buchs gehören zwar noch der Generation an, die Handbücher gelesen und auch manchmal die Hilfe-Funktion benutzt hat, aber sie hüten sich davor, die jüngere Generation zu kritisieren, die mit Fragen sofort ins Internet geht. Gerade dann, wenn man meint, ein Programm müsse doch wohl eine bestimmte Funktion ganz bestimmt anbieten, man findet sie nur nicht, stellt man fest, dass es anderen auch schon so gegangen ist und irgendwer Rat wusste.

guten Rechenprogrammen durch entsprechend aufbereitete Listen unterstützt, besonders effektiv sind Kontrollen mit grafischer Unterstützung (Vorsicht, die Grafik zeigt vieles, aber nicht alles: Grobe Fehler bei Abmessungen sieht man in grafischen Darstellungen im Allgemeinen sofort, aber ein falscher Elastizitätsmodul ist meist auf diesem Wege nicht zu finden).

Ergebnisse, die mit Computerprogrammen ermittelt worden sind, sollten unbedingt einer sehr skeptischen Kontrolle unterzogen werden. Dazu kann man z. B.

- ① die zu erwartenden **Ergebnisse vorher abschätzen** und die errechneten Ergebnisse mit den Schätzungen vergleichen (für den unerfahrenen Anwender meist schwierig), immerhin hat man meistens eine recht gute (qualitative) Vorstellung eines sich einstellenden Verformungszustands bzw. eines zu erwartenden Bewegungsverlaufs,
- ② die **Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen** an Teilsystemen und am Gesamtsystem (unter Einbeziehung von vorgegebenen und berechneten Kräften) überprüfen,
- ③ auf die **Einhaltung physikalischer Gesetzmäßigkeiten** achten (Biegemoment am Trägerrand gleich Null, wenn von außen kein Moment eingeleitet wird, Querkraftverlauf in unbelasteten Abschnitten konstant, Nullstellen der Querkraft, wenn Biegemoment einen Extremwert hat, Nullstab-Kriterien bei Fachwerken auswerten, berechnete Geschwindigkeiten sollten deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein, Temperaturen nicht wesentlich unter -273°C liegen ...),
- ④ **Kontrollrechnungen** mit vereinfachten (überprüfbaren) Modellen durchführen,
- ⑤ **Berechnungen nach verschiedenen Verfahren** (mit unterschiedlichen Rechenprogrammen) ausführen, im Idealfall mit einem mathematischen Modell und zusätzlich mit einem Programm, dem das physikalische Modell beschrieben werden kann,
- ⑥ untersuchen, ob nicht wenigstens **Teilergebnisse mit erträglichem Aufwand nachgerechnet** werden können,
- ⑦ zusätzliche **Kontrollfunktionen** (speziell bei der Integration von Bewegungs-Differenzialgleichungen) berechnen lassen, wenn man ihren Verlauf (zumindest qualitativ) voraussagen kann,
- ⑧ bei **Finite-Elemente-Berechnungen** mehrere Rechnungen mit unterschiedlicher Vernetzung und/oder unterschiedlichen Elementtypen durchführen,
- ⑨ bei **Diskretisierungsverfahren** (Differenzenverfahren, numerische Lösung von Anfangswertproblemen) mehrfach mit unterschiedlich feiner Schrittweite rechnen.

Die Nummerierung der vorstehenden Aufzählung dient ausschließlich dazu, im nachfolgenden Text darauf verweisen zu können (ist also kein „Ranking“).

Eine Bemerkung zu den mit **Hilfe von numerischen (Näherungs-)Verfahren** ermittelten Ergebnissen muss noch ergänzt werden: Die Lösungen sind im Allgemeinen Näherungen der auf analytischem Wege (wenn überhaupt möglich) zu berechnenden Werte. Dies ist kein prinzipieller Mangel der numerischen Methoden (und deshalb werden für alle Lösungswege die gleichen Prüfkriterien verwendet), denn auch die „exakten“ Lösungen sind natürlich nur „exakt bezüglich des verwendeten mathematischen Modells“.

Zum Beispiel wird für eine nach der Biegetheorie ermittelten analytischen Lösung für die Durchbiegung einer Welle vorausgesetzt, dass

- die Verformungen „klein“ sind,
- die Querschnittsabmessungen klein gegenüber den Längenabmessungen sind,
- die Schubverformungen vernachlässigt werden dürfen,
- das Materialverhalten ideal-elastisch ist (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes),
- die Querschnitte bei der Verformung eben bleiben,
- Einzelkräfte punktförmig angreifen und entsprechend der Querkraftverteilung in die Querschnitte eingeleitet werden,
- die punktförmig wirkenden Lager starr und in der neutralen Faser angebracht sind,
- der an einer starren Einspannung liegende Querschnitt sich in seiner Fläche ungehindert verformen kann,
- die in die Rechnung einfließenden Werte (Belastungen, Abmessungen, Materialeigenschaften) korrekt sind.

Meistens sind auf diesem Weg wesentlich mehr Unsicherheiten in die Rechnung eingeflossen als selbst durch ein grobes Näherungsverfahren hinzukommen können. Der Ingenieur weiß das und betrachtet auch analytisch gewonnene Ergebnisse mit der gebührenden Skepsis (und darf darauf hoffen, dass alle Unwägbarkeiten z. B. durch den Sicherheitsbeiwert aufgefangen werden).

Sehr viele Probleme der technischen Praxis führen (auf der Basis unterschiedlicher Verfahren) auf die **Lösung eines sehr großen linearen Gleichungssystems**. Bei der Finite-Elemente-Methode oder dem Differenzenverfahren gilt die Aussage: „Je feiner die Diskretisierung, desto größer das Gleichungssystem, desto besser die Ergebnisse“.

Weil sich die Rechenzeiten mit modernen Computern auch bei sehr großen Gleichungssystemen in erträglichen Grenzen halten, wird gern nach dem Motto „Viel ist besser“ verfahren, das prinzipiell nicht falsch ist, aber ein zusätzliches Problem erzeugen kann: Wegen der begrenzten Stellenanzahl, mit der im Computer gerechnet wird, sind alle Operationen zwangsläufig mit Rundungsfehlern behaftet. Diese können sich durchaus so akkumulieren, dass das Ergebnis ungenau bis unbrauchbar wird².



Die Maßnahmen zur Verifizierung von Computerrechnungen lassen sich nur schwer kategorisieren (für viele Probleme sind auch mehrere Maßnahmen empfehlenswert). Deshalb werden im folgenden Abschnitt Beispiele vorgestellt, an denen die gegebenen Empfehlungen demonstriert werden. Die Auswahl der Beispiele verfolgt einen weiteren Zweck: Es soll gezeigt werden, dass auf der Basis der Grundlagen der Technischen Mechanik, die in diesem Buch behandelt wurden, bei Benutzung des Computers auch anspruchsvollere „nicht-akademische“ Probleme gelöst werden können. Die Aufgaben sollen den Übergang zu den (im Allgemeinen deutlich komplizierteren) Problemen der technischen Praxis markieren.

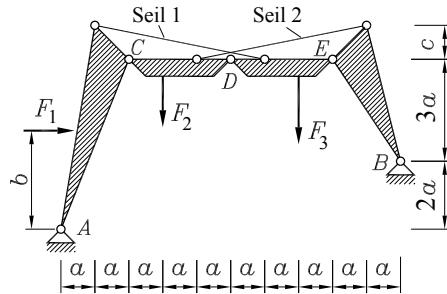
²Zu diesem Thema gibt es im Bereich *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de) eine ausführliche Betrachtung mit mehreren Beispielen, siehe Box auf Seite 73.

35.2 Beispiele

Beispiel 1
 (Statik-Problem, Kontrollen nach den Empfehlungen ①, ② und ⑤ von Seite 717)

Eine Dachkonstruktion wird für die statische Berechnung wie skizziert modelliert als System aus vier starren Körpern, die untereinander durch Gelenke und zwei einander kreuzende Seile verbunden sind. Es sind die Lager-, Gelenk- und Seilkräfte zu berechnen.

$$\text{Gegeben: } F, F_1 = 2F, F_2 = F, F_3 = 3F, \frac{b}{a} = 3, \frac{c}{a} = 1.$$



Vor der Berechnung:

Nach Empfehlung ① (Seite 717) kann zwar kein Einzelergebnis vorausgesagt werden, aber ganz sicher werden die Summe der Horizontalkomponenten der beiden Lagerkräfte gleich F_1 und die Summe ihrer Vertikalkomponenten gleich $F_2 + F_3$ sein.

Lösung des Problems:

Das System ist statisch bestimmt. Es ist in zwei Festlagern gelagert, so dass die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem nicht berechnet werden können. Deshalb werden die vier starren Körper nach den Regeln der Statik freigeschnitten, und die Kräfte an den Schnittstellen werden angebracht (Abbildung 35.1).

An jedem Teilsystem wirken fünf unbekannte Kräfte. Vielleicht könnte man mit einigen spitzfindigen (und damit fehleranfälligen) Überlegungen „das große Gleichungssystem“ vermeiden, aber das ist nicht ratsam, im Gegenteil: Man sollte das Gleichungssystem für die Berechnung mit dem Computer aufbereiten und deshalb die jeweils einfachsten Gleichgewichtsbedingungen formulieren.

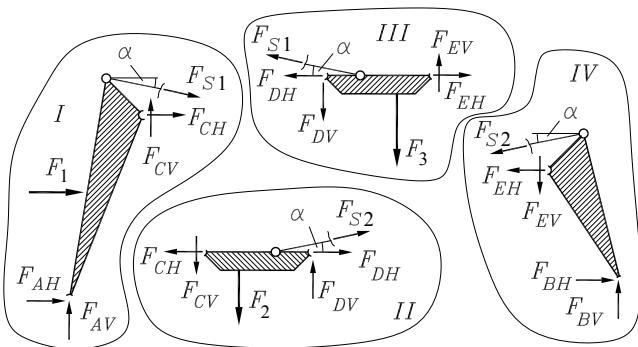


Abbildung 35.1: Vier Teilsysteme mit Schnittkräften

Dies sind für jedes Teilsystem das Kraft-Gleichgewicht in horizontaler und das Kraft-Gleichgewicht in vertikaler Richtung, außerdem eine Momenten-Gleichgewichtsbedingung, für die jeweils als Bezugspunkt der Seilbefestigungspunkt gewählt wird, so dass die schräg angreifenden

Seilkräfte darin nicht erscheinen. Die 12 Gleichgewichtsbedingungen werden in Matrixform zusammengefasst:

$$\begin{bmatrix} \bar{c} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{s} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(5 + \frac{c}{a}\right) & 1 & -\frac{c}{a} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{s} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{a} & -1 & -\left(3 + \frac{c}{a}\right) & -1 & F_{BV} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{S2} \\ F_{AH} \\ F_{AV} \\ F_{CH} \\ F_{CV} \\ F_{DH} \\ F_{DV} \\ F_{EH} \\ F_{EV} \\ F_{BH} \\ F_{BV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ F_1 \left(5 + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right) \\ 0 \\ F_2 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ -F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $\bar{c} = \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{25 + (\frac{c}{a})^2}}$ und $\bar{s} = \sin \alpha = \frac{\frac{c}{a}}{\sqrt{25 + (\frac{c}{a})^2}}$.

Um den Einfluss von Belastungen und Abmessungen sichtbar werden zu lassen, ist es naheliegend, das Gleichungssystem symbolisch lösen zu lassen. Dies gelingt durchaus auch noch für dieses System mit 12 Gleichungen. Nachstehend sieht man das von Maple abgelieferte Ergebnis (symbolische und numerische Berechnung mit den gegebenen Zahlenwerten):

$$\begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{S2} \\ F_{AH} \\ F_{AV} \\ F_{CH} \\ F_{CV} \\ F_{DH} \\ F_{DV} \\ F_{EH} \\ F_{EV} \\ F_{BH} \\ F_{BV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{25 + (\frac{c}{a})^2}}{160 \frac{c}{a}} (-9 \frac{b}{a} F_1 + 36 F_2 + 68 F_3) \\ \frac{\sqrt{25 + (\frac{c}{a})^2}}{160 \frac{c}{a}} (9 \frac{b}{a} F_1 + 44 F_2 + 12 F_3) \\ \frac{1}{8} [(\frac{b}{a} - 8) F_1 + 4 F_2 + 4 F_3] \\ \frac{1}{40} (-3 \frac{b}{a} F_1 + 32 F_2 + 16 F_3) \\ \frac{1}{32 \frac{c}{a}} [(9 - 4 \frac{c}{a}) \frac{b}{a} F_1 - 4 (9 + 4 \frac{c}{a}) F_2 - 4 (17 + 4 \frac{c}{a}) F_3] \\ \frac{1}{160} (3 \frac{b}{a} F_1 - 92 F_2 + 4 F_3) \\ -\frac{1}{8 \frac{c}{a}} [\frac{c}{a} \frac{b}{a} F_1 + 4 (5 + \frac{c}{a}) F_2 + 4 (5 + \frac{c}{a}) F_3] \\ \frac{1}{80} (-3 \frac{b}{a} F_1 + 12 F_2 - 4 F_3) \\ -\frac{1}{32 \frac{c}{a}} [(9 + 4 \frac{c}{a}) \frac{b}{a} F_1 + 4 (11 + 4 \frac{c}{a}) F_2 + 4 (3 + 4 \frac{c}{a}) F_3] \\ \frac{1}{160} (3 \frac{b}{a} F_1 - 12 F_2 + 84 F_3) \\ -\frac{1}{8} (\frac{b}{a} F_1 + 4 F_2 + 4 F_3) \\ \frac{1}{40} (3 \frac{b}{a} F_1 + 8 F_2 + 24 F_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,9276 \\ 4,2704 \\ 0,7500 \\ 1,5500 \\ -8,5625 \\ -0,3875 \\ -12,7500 \\ -0,2250 \\ -6,9375 \\ 1,6125 \\ -2,7500 \\ 2,4500 \end{bmatrix} F .$$

Ergebnis verifizieren:

- ⇒ Die Kontrolle des Kraftgleichgewichts am Gesamtsystem ist einfach. Ohne Rechnung erkennt man, dass die äußeren Kräfte mit den Lagerkraftkomponenten im Gleichgewicht sind.
- ⇒ Wenn bei der Vorbereitung der Computerrechnung das Aufschreiben möglichst einfacher Gleichgewichtsbedingungen empfohlen wird, gilt für die Kontrollbedingungen gerade das Gegenteil: Beim Formulieren des Momenten-Gleichgewichts der äußeren Kräfte sollte man einen Bezugspunkt wählen, für den alle Kräfte Anteile liefern, hier z. B. den Punkt C.
- ⇒ Die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem können auch dem auf Seite 720 formulierten Gleichungssystem hinzugefügt werden. Dann entsteht ein System mit 15 Gleichungen für nur 12 Unbekannte. Weil mit 12 Unbekannten im Allgemeinen 15 Gleichungen nicht erfüllt werden können, kann nur nach den Regeln der Ausgleichsrechnung eine „bestmögliche Lösung“ berechnet werden. Diese muss in diesem Fall (alle Gleichgewichtsbedingungen müssen erfüllt sein, auch die äußeren) mit der Lösung des Systems mit 12 Unbekannten identisch sein³.
- ⇒ Eine besonders bequeme (und wirkungsvolle) Kontrolle kann mit einem Programm erreicht werden, dem ein physikalisches Modell beschrieben wird. Abbildung 35.2 zeigt ein Fachwerk, das als statisch gleichwertiges Ersatzsystem nach den im Abschnitt 6.4.4 beschriebenen Regeln gebildet wurde (um die Ähnlichkeit mit dem Originalsystem zu verdeutlichen, wurden mehr Stäbe als erforderlich eingebaut).

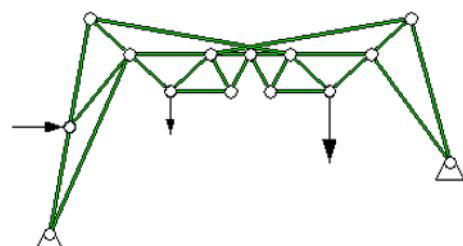


Abbildung 35.2: Ersatzsystem (Fachwerk)

Die Abbildung 35.3 (Programm „Statisch bestimmte ebene Fachwerke“ unter www.TM-interaktiv.de) bestätigt die Ergebnisse für die Lagerreaktionen und die Seilkräfte.

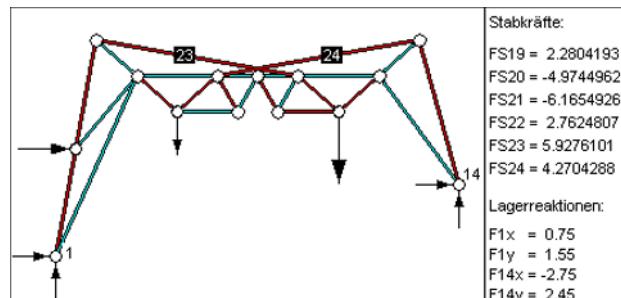


Abbildung 35.3: Eine Kontrollrechnung mit dem Programm „Statisch bestimmte ebene Fachwerke“ (www.TM-interaktiv.de) bestätigt die Ergebnisse

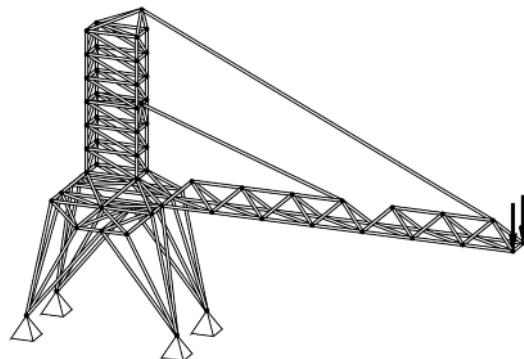
³Diese Möglichkeit wird für das hier behandelte Problem unter www.TM-aktuell.de mit Matlab demonstriert. Zur Theorie der Lösung überbestimmter Gleichungssysteme (Ausgleichsrechnung) findet man Informationen im Bereich *Mathematik für die Technische Mechanik* (www.TM-Mathe.de), siehe Box auf Seite 73.

Beispiel 2

(3D-Fachwerk, Kontrollen nach den Empfehlungen ①, ②, ③, ⑤ und ⑥ von Seite 717)

Die Daten des Berechnungsmodells für das nebenstehend skizzierte dreidimensionale Fachwerk (215 Stäbe, 71 Knoten) findet man unter www.TM-aktuell.de. Dort wird auch die Berechnung aller Knotenverschiebungen und Stabkräfte mit einem geeigneten Programm demonstriert.

Weil eine Aufgabe dieser Art nur mit einem Programm berechnet werden kann, dem das physikalische Modell über Daten formal beschrieben wird (der mathematische Hintergrund interessiert den Benutzer nicht), ist das Verifizieren von Ergebnissen besonders wichtig, um die Gefahr von Fehlbedienungen oder Eingabe falscher Daten möglichst gering zu halten.

**Ergebnis verifizieren:**

- ⇒ Dem Verformungsbild (**Abbildung 35.4**) kann man nur entnehmen, dass es qualitativ in dieser Form zu erwarten ist.
- ⇒ Obwohl das System hochgradig statisch unbestimmt ist, lassen sich bei den Stabkräften durchaus Ergebnisse verifizieren, denn der Ausleger, der durch die beiden Seile gehalten wird, ist als ebenes Gelenksystem statisch bestimmt, so dass der Kraftfluss von Montagegenauigkeiten nicht nennenswert beeinflusst wird. Mit den beiden Kräften $F = 10\text{kN}$ errechnete das Programm die Seilkräfte $F_{182} = 38,33\text{kN}$ bzw. $F_{187} = 6,734\text{kN}$.

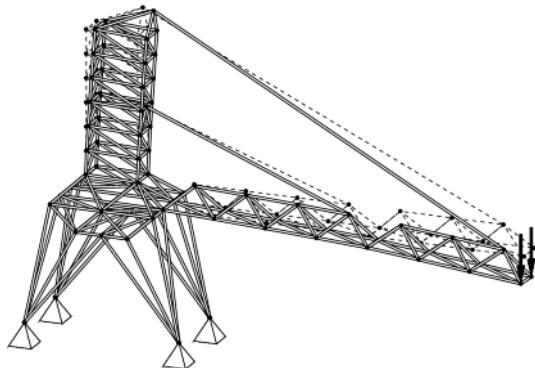
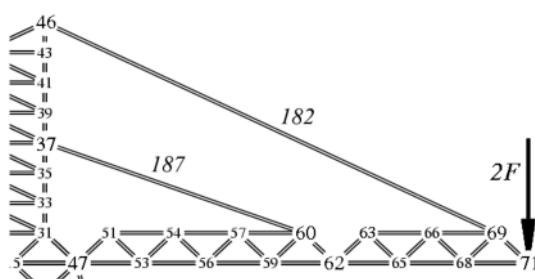


Abbildung 35.4: Verformtes System



Knoten	x[m]	y[m]	z[m]
37	1	-1	4
46	1	0	8
47	2	-2	0
60	9	0	1
62	10	-1	0
69	15	0	1
71	16	-1	0

Abbildung 35.5: Seitenansicht des Auslegers mit den Seilen

Die Abbildung 35.5 zeigt, dass der Ausleger als ebenes System betrachtet werden kann, das über die Seile in den Knoten 46 und 37 befestigt und im Knoten 47 gelenkig gelagert ist. Die beiden Teile des Auslegers sind im Knoten 62 durch ein Gelenk verbunden. Mit einem Schnitt durch Knoten 62 und Seil 182 entsteht ein freies System, an dem die Seilkraft F_{182} berechnet werden kann. Danach berechnet man mit einem Schnitt durch Knoten 47 und beide Seile die andere Seilkraft. Dies ist durchaus „von Hand“ möglich. Bequemer ist natürlich die Kontrollrechnung mit einem Programm zur Berechnung ebener Fachwerke.

Abbildung 35.6 zeigt die Berechnung der beiden Seilkräfte, wobei ein minimales ebenes Fachwerk modelliert wurde.

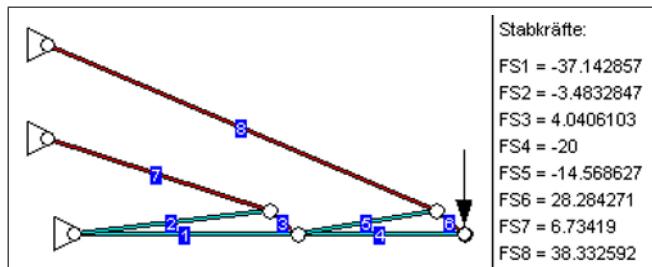


Abbildung 35.6: Seilkraftberechnung mit dem Programm „Statisch bestimmte ebene Fachwerke“ (www.TM-interaktiv.de) unter Verwendung eines Minimalmodells

- ⇒ Eine Reihe von Stäben werden als Nullstäbe ausgewiesen, die nach den Regeln der Statik bestätigt werden können:

Der Stab 159 in der Nähe der Spitze des Turms (Abbildung 35.7, links) hat einen gemeinsamen Knoten mit den Stäben 156, 157 und 164. Diese drei Stäbe liegen aber alle in einer Ebene, so dass keine Kraftkomponente senkrecht zu dieser Ebene aufgenommen werden kann. Eine Stabkraft aus Stab 159 könnte nicht weitergeleitet werden, so dass er ein Nullstab sein muss.

Mit einer ähnlichen Überlegung kann der Nullstab bestätigt werden, der in dem Ausschnitt aus dem Turm (Abbildung 35.7, rechts) zu sehen ist. Er ist an einem Ende an dem Knoten befestigt, an dem das untere Seil hängt. An seinem anderen Knoten ist er mit vier weiteren Stäben verbunden, die aber alle in einer Ebene liegen, so dass der fünfte Stab keine Kraft übertragen kann.

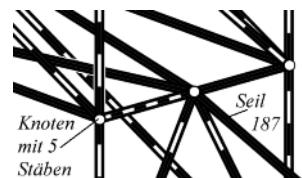
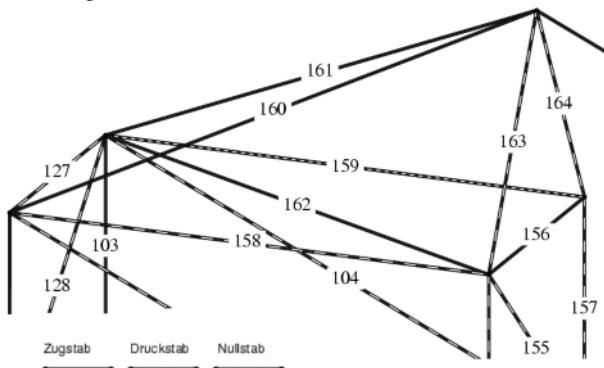


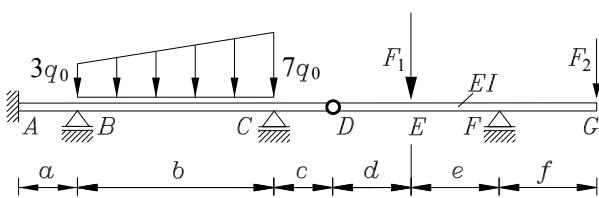
Abbildung 35.7: Nullstäbe an der Spitze des Turms und am unteren Seil

Beispiel 3

(Biegeträger, Kontrollen nach den Empfehlungen ①, ②, ③, ⑤, ⑥ und ⑨ von Seite 717)

Für den skizzierten Biegeträger sollen die Durchbiegung, der Biegemomentenverlauf und der Querkraftverlauf berechnet werden.

Gegeben: $a = 220 \text{ mm}$; $d = 270 \text{ mm}$; $q_0 = 1 \text{ N/mm}$; $I = 20000 \text{ mm}^4$;
 $b = 800 \text{ mm}$; $e = 290 \text{ mm}$; $F_1 = 2 \text{ kN}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;
 $c = 210 \text{ mm}$; $f = 310 \text{ mm}$; $F_2 = 1 \text{ kN}$.



Die Abbildung 35.8 zeigt die Ergebnisse der Berechnung mit einem Programm, das auf der Basis des im Abschnitt 18.2 beschriebenen Verfahrens arbeitet.

**Ergebnisse verifizieren:**

- ⇒ Die Verschiebungen können direkt nur qualitativ überprüft werden, das sich einstellende Verformungsbild entspricht aber den Erwartungen (Null-Verschiebungen an den Lagern, horizontale Tangente an der Einspannung, Knick in der Biegelinie am Gelenk).

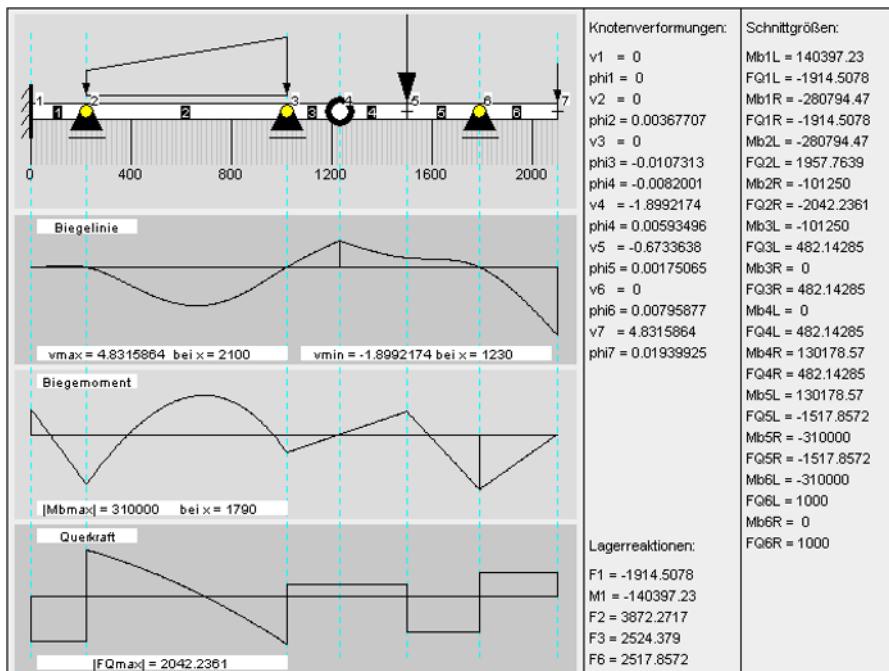


Abbildung 35.8: Berechnung mit dem Programm „Gerade Biegeträger“ (www.TM-interaktiv.de)

- ⇒ Die Schnittgrößen sind bei den meisten Verfahren (z. B.: Differenzenverfahren, FEM) „sekundäre Ergebnisse“, die aus den primär ermittelten Verformungen berechnet werden. Ihre Kontrolle ist damit auch immer eine indirekte Kontrolle der berechneten Verschiebungen. Bei dem behandelten Problem können alle Schnittgrößen und Lagerreaktionen im rechten Teil *DEFG* des Trägers mit den Mitteln der Statik überprüft werden: Nach einem Schnitt am Gelenk *D* können mit Hilfe der drei verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen am rechten Teil die beiden Gelenkkräfte und die Lagerkraft bei *F* (und damit natürlich auch alle Schnittgrößen in diesem Bereich) berechnet werden. Weil das im Abschnitt 18.2 beschriebene Finite-Elemente-Modell für den geraden Biegeträger die Biegetheorie exakt abbildet, müssen alle angegebenen Ergebnisse in diesem Rahmen ebenfalls exakt sind.
- ⇒ Die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem (äußere Lasten müssen mit den Lagerreaktionen im Gleichgewicht sein) sollten immer überprüft werden. Und wenn z. B. das Momenten-Gleichgewicht um den Punkt *A*

$$3q_0 b \left(a + \frac{b}{2} \right) + 4q_0 \frac{b}{2} \left(a + \frac{2b}{3} \right) + F_1(a+b+c+d) + F_2(a+b+c+d+e+f) \\ + M_A - F_B a - F_C(a+b) - F_F(a+b+c+d+e) = 0$$

erfüllt ist, dann ist das deshalb eine sehr wirksame Kontrolle, weil sowohl die Belastung als auch die Abmessungen in diese Gleichung einfließen.

- ⇒ Die wirksamste Kontrolle ist jedoch das Berechnen nach zwei unterschiedlichen Verfahren mit verschiedenen Programmen. Die Abbildung 35.9 zeigt die Ergebnisse, die mit dem Differenzenverfahren ermittelt wurden. Sie sind zu vergleichen mit den exakten Werten der Berechnung mit dem Programm „Biegeträger“ (siehe www.TM-aktuell.de).



Natürlich wurde auch die Empfehlung ⑨ (Seite 717) beachtet und mit verschieden feiner Diskretisierung gerechnet. Schon die Einteilung des Trägers in 210 Abschnitte brachte Ergebnisse, die sich von der feineren Unterteilung um weniger als 1,5% unterschieden.

Punkt	Lager- bzw. Gelenkkraft [N]	Biegemoment M_b [Nm]	Absenkung v [mm]
A	- 1914,5	140,39	0,0000
B	3869,2	- 280,79	0,0000
C	2517,4	- 101,25	0,0000
D	482,1	0,00	1,8992
E		130,18	0,6734
F	2517,9	- 310,00	0,0000
G		0,00	4,8316

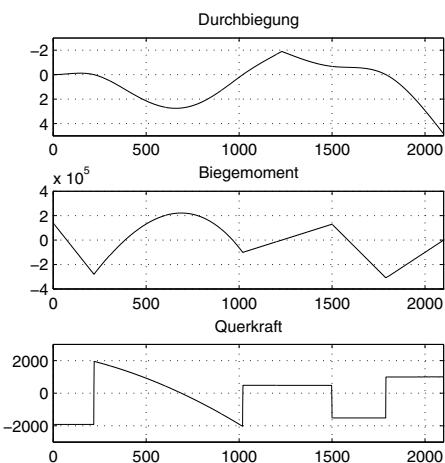


Abbildung 35.9: Berechnung mit dem Differenzenverfahren (2100 Abschnitte)

Beispiel 4

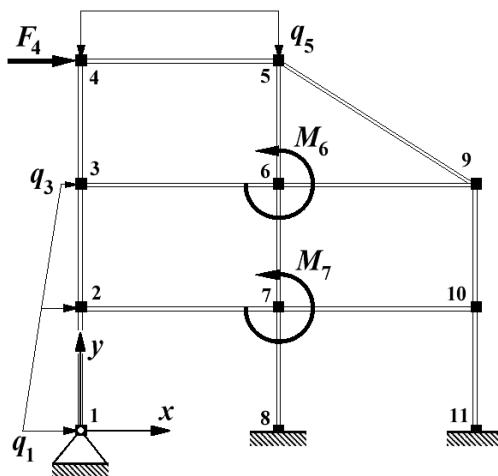
(Rahmentragwerk, Kontrollen nach den Empfehlungen ① und ② von Seite 717)

Der skizzierte ebene Rahmen besteht aus biege- und dehnsteifen geraden Trägern, die starr miteinander verbunden sind. Zu berechnen sind

- die Verformungen (Verschiebungen und Biegewinkel aller Knoten),
- die Schnittgrößenverläufe (Biegemoment, Querkraft, Normalkraft).

Daten des Berechnungsmodells:

- Knotenkoordinaten bezüglich des x - y -Systems im linken unteren Knoten findet man in der nebenstehenden Tabelle.
- Knotenlasten: $F_4 = 100 \text{ kN}$; $M_6 = 200 \text{ kNm}$; $M_7 = 200 \text{ kNm}$.
- Konstante Linienlast zwischen Knoten 4 und 5 mit der Intensität $q_4 = q_5 = 25 \text{ kN/m}$, linear veränderliche Linienlast zwischen den Knoten 1 und 3 mit $q_1 = 30 \text{ kN/m}$ und $q_3 = 10 \text{ kN/m}$.
- Für alle Träger gilt: Elastizitätsmodul $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$; Querschnittsfläche $A = 10\,000 \text{ mm}^2$; Flächenträgheitsmoment $I = 10^8 \text{ mm}^4$.
- Lagerung: Festlager (beide Verschiebungen verhindert) am Knoten 1, starre Einspannungen (beide Verschiebungen und Verdrehung verhindert) an den Knoten 8 und 11.



Knoten	x [mm]	y [mm]
1	0	0
2	0	3000
3	0	6000
4	0	9000
5	4500	9000
6	4500	6000
7	4500	3000
8	4500	0
9	9000	6000
10	9000	3000
11	9000	0

Die Berechnung kann zum Beispiel durchgeführt werden mit dem Programm „Biege- und dehnsteife ebene Rahmen“ (www.TM-interaktiv.de).

Ergebnisse verifizieren:

- ⇒ Dem Verformungsbild (Abbildung 35.10) kann man nur entnehmen, dass es qualitativ in dieser Form zu erwarten ist (die Verformungen sind stark vergrößert dargestellt). Weil die Biegeverformungen gegenüber den Verformungen durch Normalkräfte deutlich überwiegen, gibt es in vertikaler Richtung nur lokale Durchbiegungen.

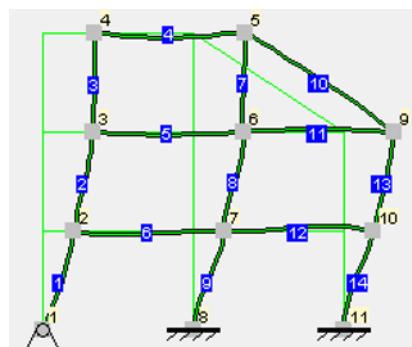


Abbildung 35.10: Verformtes System

- ⇒ Die Schnittgrößen und die Lagerreaktionen bieten eine umfangreiche Möglichkeit zur Kontrolle der Ergebnisse. Natürlich muss das Gleichgewicht der äußeren Lasten mit den Lagerreaktionen erfüllt sein. Hier soll nur die besonders einfach zu überprüfende Bedingung „Summe aller Vertikalkräfte“ bestätigt werden:

Die konstante Linienlast zwischen den Knoten 4 und 5 hat die Resultierende

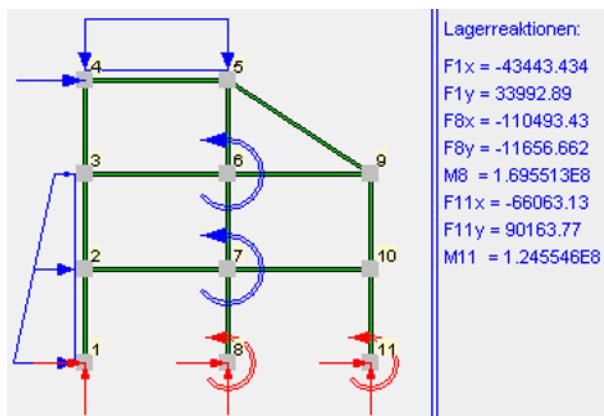


Abbildung 35.11: Lagerreaktionen (Dimensionen: N bzw. Nmm)



$$F_R = q_5(x_5 - x_4) = 112500\text{N}$$

(nach unten gerichtet). Die Summe der Vertikalkomponenten der Lagerreaktionen liefert (positiv nach oben) den gleichen Wert:

$$F_{1y} + F_{8y} + F_{11y} = 33992,89\text{N} - 11656,66\text{N} + 90163,77\text{N} = 112500\text{N}.$$

- ⇒ Weil weitere Gleichgewichtskontrollen etwas mühsam sind, ist die Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen an einem Ersatzsystem eine mögliche Alternative, z. B. so: Man ersetzt die Lager an den Knoten 1, 8 und 11 durch die berechneten Lagerreaktionen und lagert das System statisch bestimmt mit einem Loslager (anstelle der Kraft F_4) und einem Festlager am Knoten 9 (**Abbildung 35.12**). Die Berechnung der Lagerreaktionen für dieses Ersatzsystem muss dann den Wert für F_4 am Loslager und zwei Nullkomponenten für das Festlager ergeben.

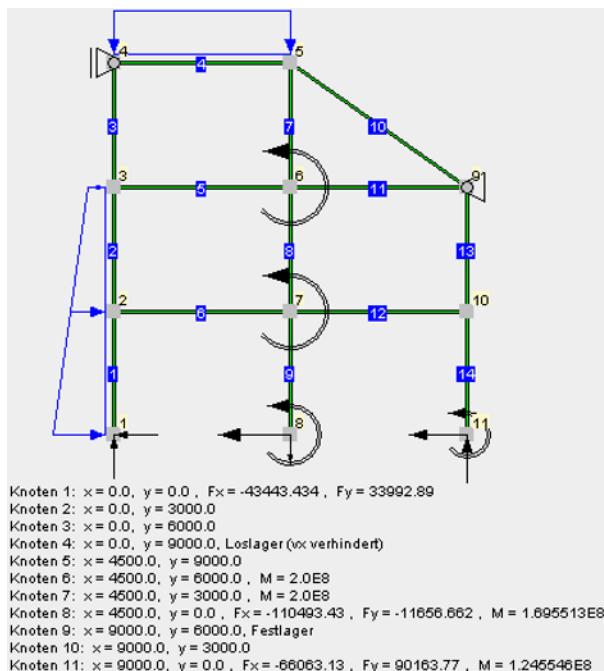


Abbildung 35.12: Statisch bestimmt gelagertes Ersatzsystem

Beispiel 5

(Ebene Scheibe, Kontrollen nach den Empfehlungen
② und ⑧ von Seite 717)

Eine doppelsymmetrische ebene Rechteck-Scheibe mit kreisförmigem Ausschnitt ist wie skizziert belastet.

Zu berechnen sind

- die Änderung des Lochdurchmessers (horizontal und vertikal),
- der Verlauf der Normalspannung in einem Schnitt AB.

Gegeben: $b = 150 \text{ mm}$; $h = 100 \text{ mm}$; $\nu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;
 $R = 50 \text{ mm}$; $t = 5 \text{ mm}$; $F = 20 \text{ kN}$.

Hier bietet sich die Finite-Elemente-Methode (fast alternativlos) an. Die Lösung wurde mit Matlab-Femset erzeugt (siehe www.TM-aktuell.de).

Wegen der doppelten Symmetrie braucht nur ein Viertel der Scheibe betrachtet zu werden. Die **Abbildung 35.13** zeigt das mit der Kraft $\frac{F}{2}$ belastete Teilsystem mit sehr grober Vernetzung, um die Lagerung der Symmetrieschnitte zu verdeutlichen: Alle Knoten sind frei verschieblich in Richtung des Symmetrieschnitts, senkrecht dazu sind die Verschiebungen verhindert.

Weil ein recht gutes Element verwendet wird (siehe Abschnitt 34.3.1), liefert selbst diese grobe Vernetzung schon Ergebnisse brauchbarer Qualität.

Die nebenstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse für verschiedene feine Vernetzung (Δd_v ist die Vergrößerung des vertikalen Lochdurchmessers, das Minuszeichen bei der Veränderung des horizontalen Durchmessers Δd_h zeigt eine Verkleinerung an).

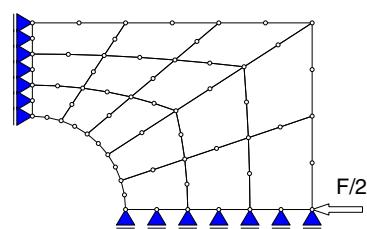
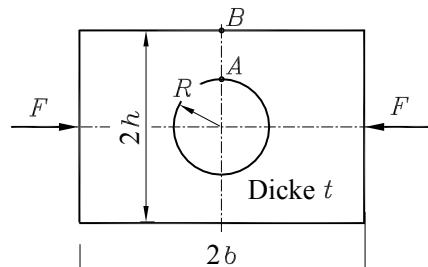


Abbildung 35.13: Viertscheibe, halbe Last und Symmetrieschnitt-Lagerungen

Elemente	Knoten	Δd_v [mm]	Δd_h [mm]	$\sigma_{x,A}$ [N/mm 2]	$\sigma_{x,B}$ [N/mm 2]
15	62	0,0451	-0,0632	-117,3	8,20
80	277	0,0460	-0,0641	-115,7	8,31
1500	4661	0,0460	-0,0641	-115,3	6,82
6000	18321	0,0463	-0,0641	-115,3	6,75

Ergebnisse bei Verwendung eines Acht-Knoten-Elements

Die Ergebnisse bei einer Vernetzung mit 80 Acht-Knoten-Elementen genügen den normalen Anforderungen an die Genauigkeit. Die extrem feinen Vernetzungen mit 1500 bzw. 6000 Elementen zeigen nur noch sehr kleine Abweichungen. Die **Abbildungen 35.14 und 35.15** zeigen die gesuchten Ergebnisse für die Vernetzung mit 80 Elementen.

Ergebnisse verifizieren:

- ⇒ Ein wesentlicher Schritt zur Verifizierung der Ergebnisse ist bereits mit der Mehrfachrechnung mit verschieden feiner Vernetzung erledigt.

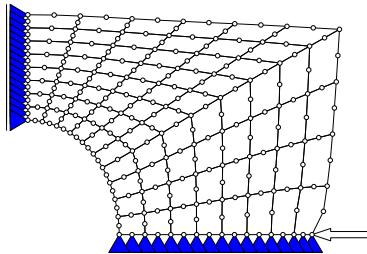
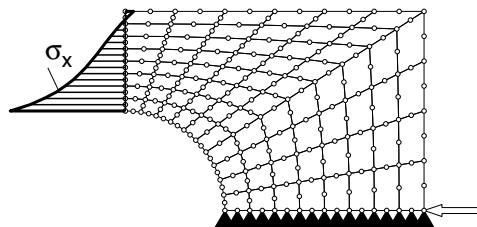


Abbildung 35.14: Verformtes System

Abbildung 35.15: σ_x -Verlauf im Symmetrieschnitt

- ☞ Die Kraft F erzeugt bei der Durchleitung durch den Schnitt AB eine mittlere Spannung $\bar{\sigma}_x = -\frac{F}{2(h-R)t} = -40 \text{ N/mm}^2$, die einer resultierenden Normalkraft von $F_N = \frac{F}{2} = 10000 \text{ N}$ entspricht. Diese Normalkraft müsste sich auch ergeben, wenn man die tatsächliche Spannungsverteilung über die Schnittfläche integriert:

$$F_N = \int_{y=R}^h \sigma_x t \, dy \quad .$$

Mit den punktweise an den Knoten anfallenden Spannungswerten kann nur numerisch integriert werden, wobei eine einfache Integrationsformel für diese Kontrollrechnung natürlich ausreichend ist. Mit der Trapezregel errechnet man z. B. bei der Einteilung der Scheibe in 80 Elemente (17 Knoten im Schnitt AB) $F_N = -9914 \text{ N}$, bei Vernetzung mit 6 000 Elementen (121 Knoten im Schnitt AB) $F_N = -9999 \text{ N}$.

- ☞ Die nebenstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse einiger Kontrollrechnungen mit anderen Elementtypen (**Abbildungen 35.16 und 35.17** zeigen jeweils ein Netz). Auch wenn diese Elemente nicht so leistungsfähig sind, ergeben diese Rechnungen doch eine weitere Bestätigung der mit dem besseren Element erzielten Ergebnisse.

Elementtyp	Elemente	Δd_v [mm]	$\sigma_{x,A}$ [N/mm^2]
	375	0,0456	-116,7
	6000	0,0460	-115,8
	750	0,0454	-105,7
	12000	0,0460	-113,0

Kontrollrechnungen

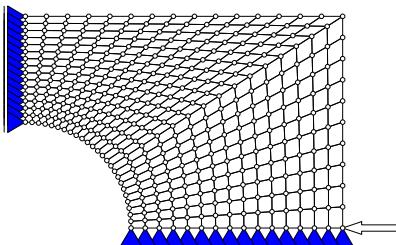


Abbildung 35.16: 375 Vier-Knoten-Elemente

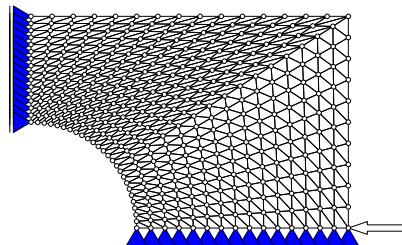


Abbildung 35.17: 750 Drei-Knoten-Elemente

Beispiel 6

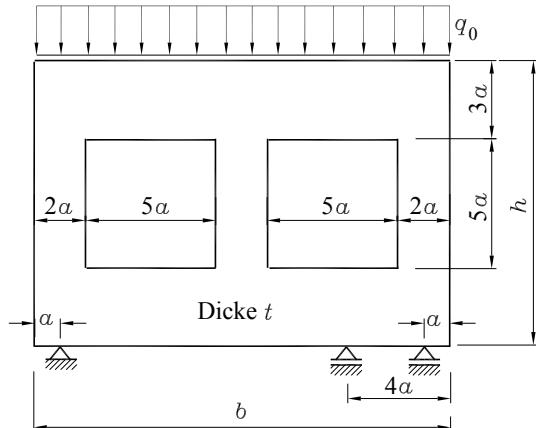
(Ebene Scheibe, Kontrollen nach den Empfehlungen ①, ②, ④ und ⑧ von Seite 717)

Eine Wand mit 2 Ausschnitten ist wie skizziert gelagert und an ihrem oberen Rand durch eine Kraft $F = q_0 b$ belastet, die als konstante Linienlast aufgebracht wird.

Es sind die Verformungen und Spannungen der als ebene Scheibe zu modellierenden Wand zu berechnen.

Gegeben:

$$b = 4 \text{ m} ; \quad a = 0,25 \text{ m} ; \quad v = 0,16 ; \quad E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 ; \quad F = 500 \text{ kN} ; \\ h = 2,75 \text{ m} ; \quad t = 0,2 \text{ m} .$$

**Vor der Berechnung:**

Es ist kaum möglich, nach Empfehlung ① (Seite 717) ein Einzelergebnis abzuschätzen, es sei denn, man ist ein erfahrener Spezialist in der Berechnung solcher Wände. Aber es ist zu erwarten, dass in einem horizontalen Schnitt unmittelbar unter der oberen Kante die mittlere Normalspannung $\sigma_M = -\frac{F}{bt} = -625 \text{ kN/m}^2$ noch ziemlich gleichmäßig verteilt ist. Dies wird nach der Rechnung kontrolliert.

Lösung des Problems:

Die Lösung wurde mit Matlab-Femset erzeugt (siehe www.TM-aktuell.de), wird hier aber nicht näher behandelt, weil nur die Verifizierung der Ergebnisse besprochen werden soll.



Die Abbildung 35.18 zeigt das verformte System mit einem Finite-Elemente-Modell mit Vierecks-Elementen mit 8 Knoten (insgesamt 1699 Knoten am System).

Auffällig ist die unterschiedliche Größe der Pfeile für die Belastung. Das ist korrekt. Dargestellt sind die reduzierten Knotenlasten, die die Liniенlast am oberen Rand ersetzen. Mit den Ansatzfunktionen für das Acht-Knoten-Element ergeben sich für konstante Randlasten für die mittleren Randpunkte wesentlich größere reduzierte Knotenlasten als für die Eckpunkte.

Der Punkt P (Mittelpunkt des unteren Rands) dient als Referenzpunkt für die Kontrollen.

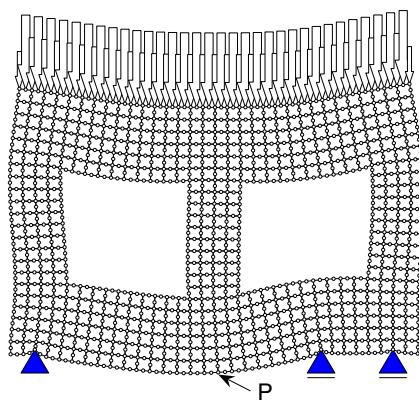


Abbildung 35.18: Verformtes FEM-Modell mit 504 Elementen, P - Referenzpunkt für Kontrollen

Ergebnisse verifizieren:

- ⇒ Das in der Abbildung 35.18 zu sehende Verformungsbild (mit stark vergrößerten Verformungen) erscheint plausibel.
 - ⇒ Entsprechend Empfehlung ⑧ von Seite 717 wurden drei Berechnungen mit unterschiedlich feiner Vernetzung durchgeführt. Die nebenstehende Tabelle zeigt die berechneten Werte für den Referenzpunkt P: Vertikalverschiebung v_P und Normalspannung $\sigma_{x,P}$. Die Spannungswerte zeigen bei feinerer Vernetzung nur sehr geringe Änderungen.
- | Elemente | Knoten | v_P [mm] | $\sigma_{x,P}$ [N/m^2] |
|----------|--------|------------|----------------------------|
| 504 | 1699 | -0.227 | 3032 |
| 2016 | 6423 | -0.242 | 3049 |
| 8064 | 24943 | -0.256 | 3062 |
- Ergebnisse von drei Rechnungen mit unterschiedlich feiner Vernetzung

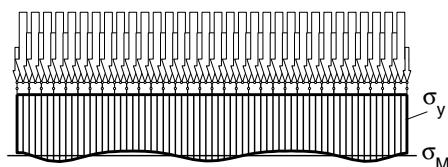


Abbildung 35.19: Spannungen σ_y in einem horizontalen Schnitt sehr nah beim oberen Rand

In Abbildung 35.19 deutet sich aber schon an, dass die Spannungen über den Ausschnitten kleiner werden, weil die Belastung in Richtung auf die Lagerung natürlich nur über die vertikalen Stege abgetragen werden kann.

- ⇒ Die Abbildung 35.20 zeigt den Spannungsverlauf dicht über den beiden Ausschnitten mit deutlich erhöhten Werten an den Rändern und in der Mitte. Aber auch hier muss das vertikale Gleichgewicht erfüllt sein. Die numerische Integration der Spannungen über die Schnittfläche bestätigt das:

$$F_y = \int_{x=0}^b \sigma_y t \, dx = -500 \text{ kN}$$

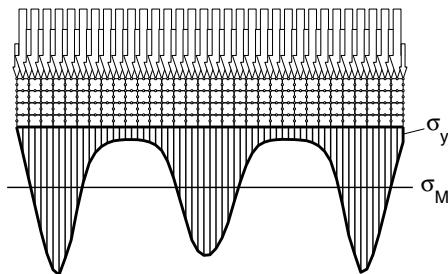
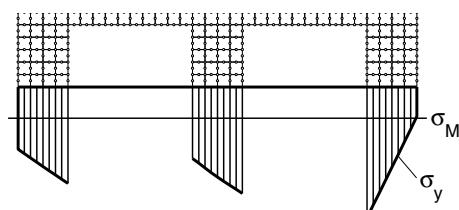


Abbildung 35.20: Spannungen σ_y in einem horizontalen Schnitt dicht oberhalb der Ausschnitte

- ⇒ Im Bereich der Ausschnitte sind die Spannungen natürlich wesentlich größer als σ_M (nebenstehendes Bild), aufgrund der Lagerung rechts größer als links. Aber auch hier liefert die Integration über die (deutlich kleinere) Schnittfläche als resultierende Schnittkraft den Wert $F_y = -500 \text{ kN}$.



Es sollte vermerkt werden, dass alle bisherigen Kontrollen der Lösung dieses Beispiels die Konsistenz der Ergebnisse überprüft. Systematische Fehler können dabei unbemerkt bleiben. Die Eingabe eines falschen Elastizitätsmoduls bleibt z. B. unbemerkt, wenn dies nicht zu völlig unsinnigen Verformungen führt. Weil der unerfahrene Anwender eines Programms keine Vorstellung von den zu erwartenden Größenordnungen der Ergebnisse hat, ist eine Berechnung nach einem anderen Verfahren auf der Basis einer anderen Theorie auch dann angebracht, wenn man dafür ein Modell verwendet, mit dem man zwar nicht die Ergebnisse kontrollieren, immerhin aber ihre Größenordnung überprüfen kann:

- ⇒ Die Scheibe soll als Rahmentragwerk berechnet werden. Die Abbildung 35.21 zeigt vier horizontal liegende biege- und dehnsteife Träger, die über drei vertikale Stiele an den Verbindungsstellen biegesteif verbunden sind. Die horizontal liegenden Träger haben Rechteckquerschnitte mit der Breite t (Dicke der Scheibe) und der Höhe $3a$, die vertikalen Stiele haben bei gleicher Breite die Höhe $2a$.

Mit der Querschnittsfläche $A_1 = 2at$ für einen Stiel ergeben sich die Dehnsteifigkeit

$$EA_1 = E \cdot 2at = 3 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

und die Biegesteifigkeit

$$EI_1 = E \cdot \frac{t(2a)^3}{12} = 6,25 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 .$$

Entsprechend berechnen sich die Steifigkeiten der horizontalen Träger:

$$EA_2 = 4,5 \cdot 10^6 \text{ kN} , \quad EI_2 = 2,11 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2 .$$

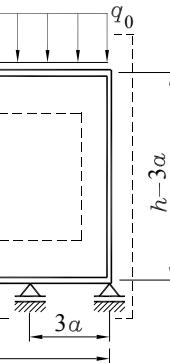
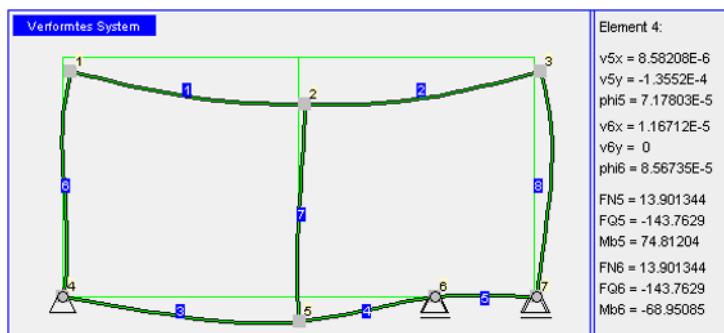


Abbildung 35.21: Rahmentragwerk als (sehr grobes) Ersatzmodell für die Scheibe



Das Programm „Biege- und dehnsteife ebene Rahmen“ (www.TM-interaktiv.de) liefert die nachstehend zu sehenden Ergebnisse. Das Verformungsbild ähnelt Abbildung 35.18, die Vertikalverschiebung v_5 liegt in der Größenordnung des für die Scheibe berechneten Wertes v_P . Aus den Schnittgrößen F_N und M_b errechnet man für diesen Punkt eine Normalspannung $\sigma_x = 4082 \text{ kN/m}^2$, die auch die Größenordnung der Scheibenberechnung bestätigt.



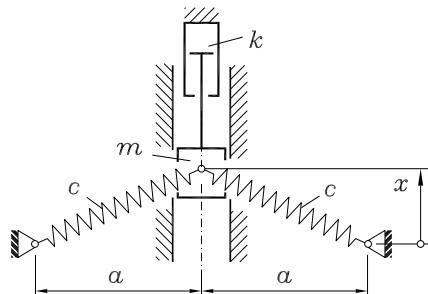
Beispiel 7

(Nichtlineare gedämpfte Schwingung, Kontrollen nach den Empfehlungen ①, ④, ⑦ und ⑨ von Seite 717)

Eine Masse m ist wie skizziert durch zwei Federn gefesselt (Federkonstante jeweils c , Längen der entspannten Federn jeweils b). Sie kann in der vertikalen Führung reibungsfrei gleiten, ihre Bewegung wird jedoch geschwindigkeitsproportional gedämpft (Dämpfungskonstante k).

Die Masse wird um x_{anf} ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t_{anf} = 0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit freigelassen.

$$\text{Gegeben: } \frac{mg}{ca} = 0,01 ; \quad \frac{b}{a} = 1,2 ; \quad \frac{k}{\sqrt{mc}} = 0,1 ; \quad \bar{x}_{anf} = \frac{x_{anf}}{a} = 2,5 .$$

**Vor der Berechnung:**

Infolge der Dämpfung wird die Masse m einer Ruhelage zu streben, in der die statischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein müssen. Weil der geschwindigkeitsproportionale Dämpfer dann nicht mehr wirkt, müssen die beiden Federkräfte mit der Gewichtskraft der Masse im Gleichgewicht sein (**Abbildung 35.22**). Für Gleichgewicht in vertikaler Richtung muss gelten:

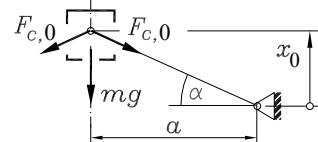


Abbildung 35.22: Gleichgewicht der Endlage

Nach einigen elementaren Umformungen ergibt sich die Bestimmungsgleichung für x_0 :

$$\frac{mg}{ca} + 2\bar{x}_0 \left(1 - \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1+\bar{x}_0^2}} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a} .$$



Diese Gleichung hat drei Lösungen (siehe www.TM-aktuell.de):

$$\bar{x}_{0,1} = 0,6465 ; \quad \bar{x}_{0,2} = 0,0250 ; \quad \bar{x}_{0,3} = -0,6793 .$$

Mit den in den Abschnitten 10.4 bzw. 33.2 behandelten Verfahren lässt sich zeigen, dass die Gleichgewichtslage $\bar{x}_{0,2}$ instabil ist, so dass nur $\bar{x}_{0,1}$ oder $\bar{x}_{0,3}$ als Endlagen der Bewegung infrage kommen. Dies wird nach der Berechnung kontrolliert.

Lösung des Problems:

Nach dem Prinzip von d'Alembert (Abschnitt 28.2.2) muss die d'Alembertsche Kraft $m\ddot{x}$ mit der Gewichtskraft, den beiden Federkräften und der Dämpfungskraft $k\dot{x}$ im Gleichgewicht sein:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + mg + 2F_c \sin \alpha = 0 \quad \text{mit} \quad F_c = c \left(\sqrt{x^2 + a^2} - b \right) \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} .$$

Weil alle Parameter in dimensionsloser Form gegeben sind, empfiehlt sich eine komplett dimensionslose Rechnung. Mit der bereits für die Bestimmung der Gleichgewichtslage verwendeten dimensionslosen Koordinate $\bar{x} = \frac{x}{a}$ und der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{m}} t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = a \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = a \sqrt{\frac{c}{m}} \bar{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \frac{c}{m} \frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2}$$

kann schließlich folgendes Anfangswertproblem formuliert werden:

$$\begin{aligned} \bar{x}'' &= -\frac{k}{\sqrt{mc}} \bar{x}' - 2 \left(\sqrt{1+\bar{x}^2} - \frac{b}{a} \right) \frac{\bar{x}}{\sqrt{1+\bar{x}^2}} - \frac{mg}{ca} , \\ \bar{x}(\tau=0) &= \frac{x_{anf}}{a} , \quad \bar{x}'(\tau=0) = \bar{v}(\tau=0) = 0 \end{aligned}$$



(der Strich steht für die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit τ).

Die Differenzialgleichung ist hochgradig nicht-linear und kann nur numerisch gelöst werden.

Abbildung 35.23 zeigt die kinematischen Diagramme, die mit dem Standard-Solver von Matlab mit automatischer Schrittweitensteuerung für den Bereich $0 \leq \tau \leq 100$ erzeugt wurden.

Ergebnisse verifizieren (ausführlich unter www.TM-aktuell.de):

- ⇒ Die Diagramme bestätigen, dass die Endlage der Masse die stabile Gleichgewichtslage $\bar{x}_{0,3} = -0,6793$ ist.
- ⇒ Auch bei Nutzung eines Algorithmus mit automatischer Schrittweitensteuerung sollte in jedem Fall mehrfach mit unterschiedlichen Schrittweiten gerechnet werden (dafür ist in Matlab ein spezieller Steuerparameter vorgesehen). Als Indiz für ausreichend kleine Schrittweiten dient der Vergleich der Werte für \bar{x} und \bar{v} am Ende des Integrationsintervalls.
- ⇒ Weil sich am Ende des Integrationsintervalls die Masse bereits der Ruhelage annähert, ist in diesem Fall das letztgenannte Kriterium nur bedingt aussagefähig. Deshalb empfiehlt sich entsprechend Empfehlung ④ von Seite 717 eine Kontrollrechnung mit einem vereinfachten Berechnungsmodell, in diesem Fall bietet sich die Abschaltung der Dämpfung an. Die **Abbildung 35.24** zeigt $\bar{x}(\tau)$ für das ungedämpfte System mit den erwarteten gleichbleibenden Amplituden. Der Zoom in die Spitze der letzten Schwingung im Intervall macht deutlich, dass tatsächlich die Anfangsauslenkung exakt wieder erreicht wird.

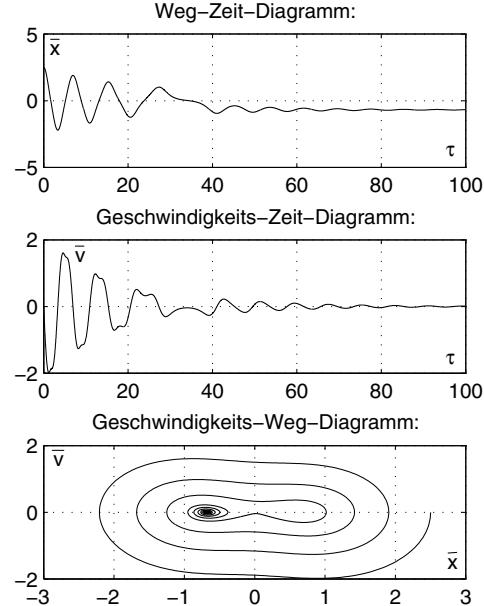


Abbildung 35.23: Kinematische Diagramme

- ⇒ Weil für das ungedämpfte System die Gesamtenergie erhalten bleiben muss, wird zur weiteren Kontrolle eine „Energiekurve“ aus den berechneten Koordinaten und Geschwindigkeiten ermittelt.

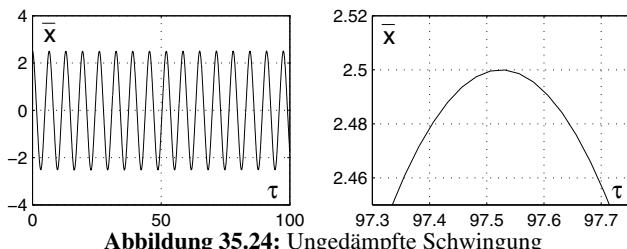


Abbildung 35.24: Ungedämpfte Schwingung

Für das betrachtete System (ohne Dämpfung) errechnet sich die Gesamtenergie aus der potentiellen Energie der schwingenden Masse, aus ihrer kinetischen Energie und der potentiellen Energie in den Federn. Man bestätigt leicht, dass mit den Parametern der Aufgabe zu jedem Zeitpunkt die „dimensionslose Energie“ wie folgt aufgeschrieben werden kann:

$$\bar{T} = \frac{T}{ca^2} = \frac{mg}{ca} \bar{x} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \left(\sqrt{1 + \bar{x}^2} - \frac{b}{a} \right)^2 .$$

Die Abbildung 35.25 zeigt, dass sich für diese Funktion der erwartete konstante Verlauf ergibt, der die „Gesundheit“ der Rechnung bestätigt.

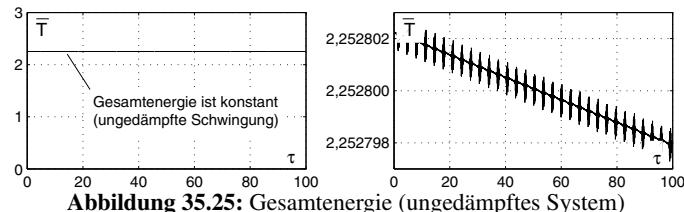


Abbildung 35.25: Gesamtenergie (ungedämpftes System)

Allerdings zeigt der „sehr scharfe Zoom“ für die Achse, auf der die dimensionslose Energie eingetragen ist, dass es doch (in diesem Fall natürlich unwesentliche) Änderungen gibt.

Warum eine genaue Kontrolle der berechneten Werte erforderlich ist, wird mit den Grafiken in der Abbildung 35.26 deutlich, die zwei Berechnungen für das (gedämpfte) Originalsystem zeigen: Bei einer geringen Änderung der Anfangsauslenkung (von $\bar{x}_{\text{anf}} = 2,5$ auf $\bar{x}_{\text{anf}} = 2,490$, linke Grafik) ergibt sich eine andere Endlage. Für die Anfangsauslenkung $\bar{x}_{\text{anf}} = 2,491$ macht die rechte Grafik deutlich, woran dies liegt: Die Masse kommt bei dem Versuch, die instabile statische Gleichgewichtslage $\bar{x}_{0,2} = 0,0250$ zu überwinden, fast zur Ruhe, „schafft es ein letztes Mal“ (rechte Grafik) bzw. „schafft es nicht“ (linke Grafik). In solchen Situationen führen kleinste Verfahrensfehler zu grundlegend falschen Ergebnissen im weiteren Verlauf.

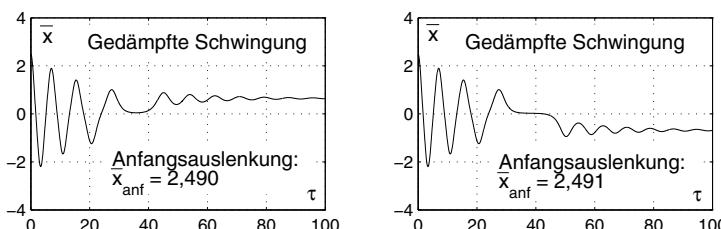


Abbildung 35.26: Kleine Änderungen mit großen Auswirkungen

Beispiel 8

(Doppelpendel, System mit 2 Freiheitsgraden, Kontrollen nach den Empfehlungen ⑤, ⑦ und ⑨ von Seite 717)

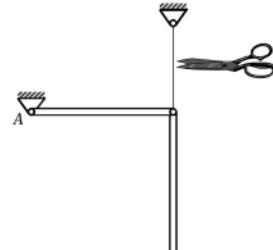
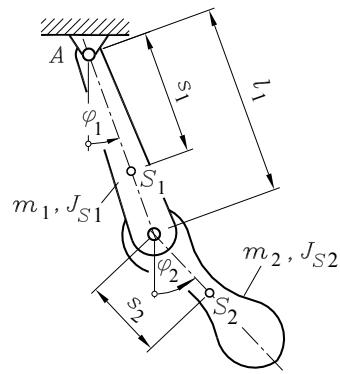
Ein Doppelpendel wird definiert durch die beiden Pendelmasse m_1 und m_2 , die auf die jeweiligen Schwerpunkte bezogenen Massenträgheitsmomente J_{S1} und J_{S2} , die Schwerpunktabstände von den Drehpunkten s_1 und s_2 und den Abstand l_1 der beiden Drehpunkte voneinander.

Die Bewegung soll durch die Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ beschrieben werden, die für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 10\text{ s}$ zu berechnen sind.

$$\text{Gegeben: } \frac{m_2}{m_1} = 1; \quad \frac{J_{S1}}{m_1 l_1^2} = \frac{1}{12}; \quad \frac{J_{S2}}{m_1 l_1^2} = \frac{1}{12}; \quad \frac{s_1}{l_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{s_2}{l_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{g}{l_1} = 9,81\text{ s}^{-2}.$$

Die gegebenen Werte gelten für zwei schlanke Stäbe gleicher Masse und gleicher Länge. Sie sollen aus der nebenstehend skizzierten Anfangslage ohne Anfangsgeschwindigkeiten freigelassen werden, so dass folgende Anfangsbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t=0) &= \frac{\pi}{2}, & \dot{\varphi}_1(t=0) &= 0, \\ \varphi_2(t=0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

**Lösung des Problems:**

Das Differenzialgleichungssystem, das die Bewegung dieses Systems mit 2 Freiheitsgraden beschreibt, wurde im Abschnitt 33.4.3 hergeleitet (Gleichungen 33.32 auf Seite 673). Zur Vorbereitung der numerischen Lösung werden die beiden neuen Variablen ω_1 und ω_2 eingeführt:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1, \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi}_1, \quad \dot{\omega}_2 = \ddot{\varphi}_2.$$

Damit wird aus den beiden Differenzialgleichungen 2. Ordnung 33.32 ein System von 4 Differenzialgleichungen 1. Ordnung, das in Kurzform so formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_1 & \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 & \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \mathbf{Mx} = \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_{11} = \left(\frac{s_1}{l_1} \right)^2 + \frac{J_{S1}}{m_1 l_1^2} + \frac{m_2}{m_1}, \quad a_{12} = \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$a_{22} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{s_2}{l_1} \right)^2 + \frac{J_{S2}}{m_1 l_1^2}$$

und

$$b_1 = -\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 ,$$

$$b_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \frac{g}{l_1} \sin \varphi_2 .$$

Das Anfangswertproblem wird durch die Matrix M , den Vektor r und die 4 Anfangsbedingungen vollständig beschrieben und kann z. B. Matlab in dieser Form angeboten werden.

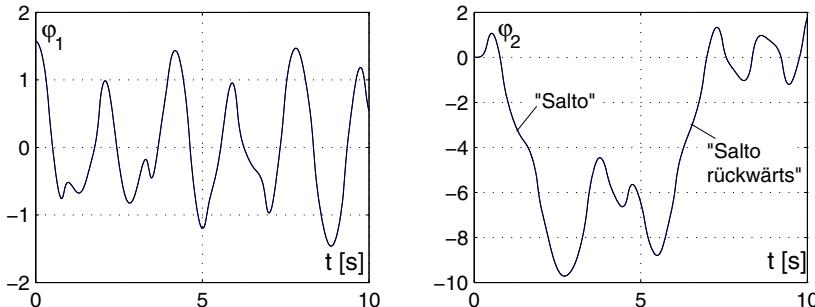


Abbildung 35.27: Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ für ein Doppelpendel

In der Abbildung 35.27 sind die Funktionen zu sehen, die sich aus der numerischen Lösung dieses Anfangswertproblems ergeben. Die recht bizarren Funktionsverläufe spiegeln den tatsächlich außerordentlich komplizierten Bewegungsablauf eines solchen Doppelpendels wider. Während das obere Pendel eine recht unregelmäßige Schwingung ausführt, beginnt das untere Pendel mit einem „Salto“, dem bald darauf ein „Salto rückwärts“ folgt. Unter www.TM-aktuell.de kann man eine Animation dieser Bewegung sehen.



Ergebnisse verifizieren:

Obwohl nur über einen relativ kleinen Zeitbereich integriert wird, muss das Ergebnis mit der gebotenen Skepsis betrachtet werden. Deshalb wird hier auch der (häufig unvermeidliche) erste Fehlversuch der Rechnung vorgestellt.

⇒ Der Empfehlung ⑤ von Seite 717 folgend, wird nach zwei verschiedenen Verfahren integriert. Unter www.TM-aktuell.de wird auch die zusätzliche Empfehlung „mit verschiedenen Programmen“ berücksichtigt, hier werden nur die mit Matlab gewonnenen Ergebnisse vorgestellt, um beide in einer Grafik erfassen zu können. Mit folgenden Verfahren wurde gerechnet:

- Der Matlab-Standard-Solver *ode45* (*ode* steht für „Ordinary Differential Equation“) arbeitet mit Formelsätzen 4. und 5. Ordnung. Bei diesem so genannten Dormand-Prince-Verfahren werden die beiden Ergebnisse am Ende eines jeden Integrationsschrittes verglichen und die Differenz zur automatischen Steuerung der Schrittweite verwendet (siehe Abschnitt 28.3.3).

- Die Kontrollrechnung wurde mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung entsprechend Formelsatz 28.16 (Seite 527) durchgeführt.

Der erste Versuch wurde mit den Standard-Einstellungen von Matlab gestartet. Die automatische Schrittweitensteuerung ergab 457 Schritte. Die Runge-Kutta-Rechnung wurde mit der gleichen Anzahl von Schritten ausgeführt. Abbildung 35.28 zeigt das Ergebnis für $\varphi_2(t)$ (Bewegung des unteren Pendels): Für $t > 2$ s gehen die Kurven weit auseinander. Beide sind falsch.

- ⇒ Die Mehrfachrechnung mit unterschiedlichen Schrittweiten ist bei Problemen dieser Art unumgänglich (auch bei Programmen, die die Schrittweite selbst optimieren bzw. mit variablen Schrittweiten rechnen, wenn diese Programme Optionen für die Strategie anbieten, mit der dies realisiert wird).

Eine besonders einfache Möglichkeit, die Ergebnisse der Berechnungen mit unterschiedlichen Schrittweiten zu vergleichen, um schließlich die ausreichend feine Diskretisierung zu identifizieren, ist der Vergleich von Funktionswerten am Ende des Zeitintervalls. Die nebenstehende Tabelle zeigt dies am Beispiel des Endwerts $\varphi_2(t = 10\text{s})$ für das untere Pendel. Bei etwa 8000 Zeitschritten darf man also dem Ergebnis vertrauen.

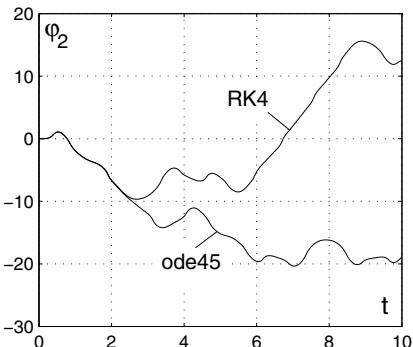


Abbildung 35.28: Matlab-Standard-Solver (ode45) und Runge-Kutta 4. Ordnung (RK4)

Zeit-schritte	ode45 $\varphi_2(t = 10\text{s})$	RK4 $\varphi_2(t = 10\text{s})$
457	- 18,880	12,441
2021	- 0,666	1,693
4017	1,768	1,775
8017	1,777	1,777

Endlagen des unteren Pendels

Beim Vergleich der beiden verwendeten Verfahren muss zur „Ehrenrettung“ des Dormand-Prince-Algorithmus vermerkt werden, dass er natürlich qualitativ besser ist als das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, auch wenn die Ergebnisse in der Tabelle nicht so aussehen. Matlab liefert standardmäßig bei diesem Verfahren für jeden Integrationsschritt 4 Ergebnisse, die Zwischenwerte werden durch Interpolation ermittelt. Bei der Angabe der Zeitschritte sind also nur ein Viertel dieser Anzahl als Integrationsschritte ausgeführt worden.

- ⇒ Wenn die Möglichkeit besteht, eine Kontrollfunktion zu erzeugen, sollte man dies unbedingt tun. Da das behandelte Doppelpendel ein konservatives System ist, muss die Gesamtenergie konstant sein (und zu jedem Zeitpunkt den Wert der potenziellen Energie beim Start der Bewegung haben). Diese etwas aufwendige Kontrolle ist natürlich sehr wirkungsvoll (und ist in gewissen Grenzen auch eine Kontrolle des Berechnungsmodells).

Auf Seite 672 findet man die Beziehungen für die potenzielle und die kinetische Energie während der Bewegung (Null-Potenzial auf der Höhe des Aufhängepunktes A). Mit einigen elementaren Umformungen lässt sich daraus die „dimensionslose Gesamtenergie“ formulieren:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{ges} = \frac{T_{ges}}{m_1 g l_1} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{s_1}{l_1} \right)^2 + \frac{J_{S1}}{m_1 l_1^2} + \frac{m_2}{m_1} \right] \frac{l_1}{g} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_2}{m_1} \left(\frac{s_2}{l_1} \right)^2 + \frac{J_{S2}}{m_1 l_1^2} \right] \frac{l_1}{g} \omega_2^2 \\ &+ \left[\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \frac{l_1}{g} \omega_1 \omega_2 - \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{m_2}{m_1} \right) \cos \varphi_1 - \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

Dieser komplizierte Ausdruck muss für jeden Satz der Bewegungsgrößen φ_1 , φ_2 , ω_1 und ω_2 eines beliebigen Zeitpunkts t den gleichen Wert ergeben. Es ist die Gesamtenergie, die bereits am Anfang der Bewegung (als potenzielle Energie) vorhanden ist:

$$T_0 = -m_2 g s_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{T}_0 = \frac{T_0}{m_1 g l_1} = -\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} = -\frac{1}{2}.$$

Die Abbildung 35.29 zeigt die Funktion \bar{T}_{ges} für unterschiedlich feine Schrittweiten. Die Kurve für 457 Zeitschritte bestätigt die bereits auf anderem Wege erkannte Unbrauchbarkeit dieser Ergebnisse. Sie startet mit dem erwarteten Wert $\bar{T}_0 = -0,5$, entfernt sich dann aber immer mehr von diesem Sollwert.

Deutlich besser, aber immer noch unbefriedigend ist der Kurvenverlauf für 2021 Zeitschritte. Erst bei 8017 Zeitschritten kann man im Verlauf von $\bar{T}_{ges}(t)$ die erwartete horizontale Gerade sehen, wenn man den extremen Zoom der vertikalen Achse berücksichtigt. An die „Zacken“ im Kurvenverlauf muss man sich gewöhnen. Auch bei deutlich mehr Zeitschritten werden sie nicht verschwinden, wenn man es dem verwendeten Programm gestattet, den Maßstab auf der \bar{T}_{ges} -Achse automatisch zu wählen.

Die Abweichung der $\bar{T}_{ges}(t)$ -Kurve vom Sollwert erinnert daran, dass die Berechnung immer mit einem Näherungsverfahren erfolgt. Wenn man allerdings dafür sorgt, dass die Grafik in jedem Fall auf der Ordinate auch den Wert $\bar{T}_{ges} = 0$ zeigt, sieht die Kurve so aus, wie man sie erwartet (Abbildung 35.30).

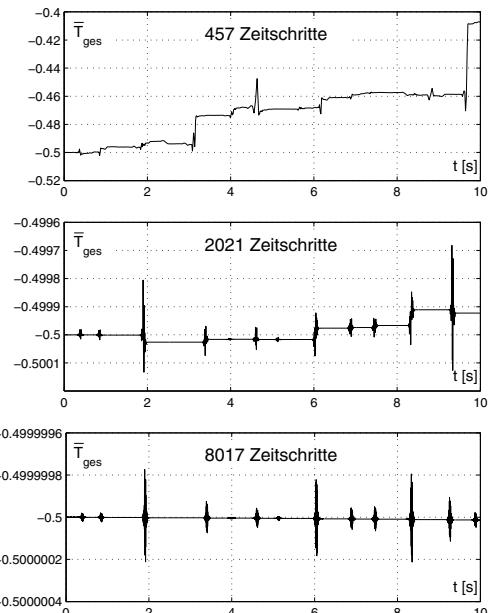


Abbildung 35.29: Die Gesamtenergie weicht auch bei kleinen Schrittweiten noch vom Sollwert ab

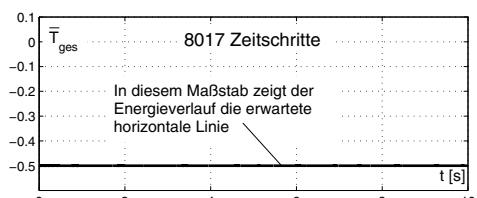


Abbildung 35.30: Es ist alles eine Sache des Maßstabs

Kontrollrechnung mit Simulink:

Simulink ist eine Ergänzungssoftware zu Matlab, die für Kontrollrechnungen von Bewegungssimulationen besonders interessant ist, weil der Benutzer mit Simulink ganz anders korrespondiert als mit den meisten anderen Softwarepaketen. In einem grafischen Editor werden die Differenzialgleichungssysteme als Signalflusspläne modelliert. Dafür stellt Simulink einen umfangreichen Katalog von Schaltblöcken zur Verfügung, zwischen denen der Signalfluss vom Benutzer durch Verbindungslien festgelegt wird.

Das Anfangswertproblem kann Simulink als Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung mit den zugehörigen Anfangsbedingungen angeboten werden. Für das Doppelpendel-Problem sehen die für die Simulink-Berechnung vorbereiteten Differenzialgleichungen 33.32 (Seite 673) so aus:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 &= b_1 \\ a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 &= b_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{b_1 - a_{12}\ddot{\varphi}_2}{a_{11}} \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{b_2 - a_{12}\ddot{\varphi}_1}{a_{22}} \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1$ und b_2 , die bereits auf den Seiten 736 und 737 definiert wurden. Natürlich sollen auch die Problemparameeter der Aufgabenstellung und die Anfangsbedingungen von Seite 736 verwendet werden. Auch die Kontrollfunktion („dimensionslose Gesamtenergie“, Formel auf Seite 739) soll von Simulink gezeichnet werden.

Die Abbildung 35.31 zeigt das Simulink-Blockschaltbild für das Anfangswertproblem. Unter www.TM-aktuell.de findet man die komplette Simulink-Rechnung mit detaillierter Beschreibung der einzelnen Teile des Blockschaltbilds. Für den Leser, dem diese Beschreibung eines Anfangswertproblems völlig neu ist, folgen hier einige erklärende Bemerkungen:



- Die gegebenen Größen werden über das Command Window eingegeben, z. B., wie am unteren Rand des Blockschaltbilds empfohlen, durch Kopieren der dort gelisteten Werte.
- Links werden die beiden Beschleunigungen hineingeführt (wo die herkommen, wird nachfolgend erläutert). Sie werden jeweils durch zwei Integratoren geschickt: Der erste Integrator ($\text{phi1pp} \rightarrow \text{phi1p}$ bzw. $\text{phi2pp} \rightarrow \text{phi2p}$) macht aus den Beschleunigungen Geschwindigkeiten, nach Durchlaufen des zweiten Integrators ($\text{phi1p} \rightarrow \text{phi1}$ bzw. $\text{phi2p} \rightarrow \text{phi2}$) sind die Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ entstanden. Diese sind bereits das Ziel der Berechnungen und werden deshalb sofort den „Scope“-Blöcken mit den Bezeichnungen $\text{phi1}(t)$ bzw. $\text{phi2}(t)$ zugeführt, die die Funktionen grafisch darstellen.
- Die Integratoren benötigen für ihre Arbeit jeweils die zugehörige Anfangsbedingung, die nach Doppelklick auf einen Integrator über ein Dialogfeld eingegeben wird.
- Alle Ausgangswerte der Integratoren werden abgezweigt und in einen „Mux-Block“ gesteckt, der daraus einen Vektor \mathbf{u} zusammensetzt, der dann am Ausgang dieses Blocks verfügbar ist. Damit stehen (neben den Parametern, die die Aufgabenstellung vorgibt) die Variablen bereit, mit denen alle Ausdrücke, die die Differenzialgleichungen definieren, gebildet werden können. Entsprechend der Reihenfolge am Eingang des „Mux-Blocks“ sind die Werte dann im Vektor \mathbf{u} positioniert und können als Variablen $u(1), \dots, u(4)$ angesprochen werden, was in diesem Fall den Werten von $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$ entspricht.

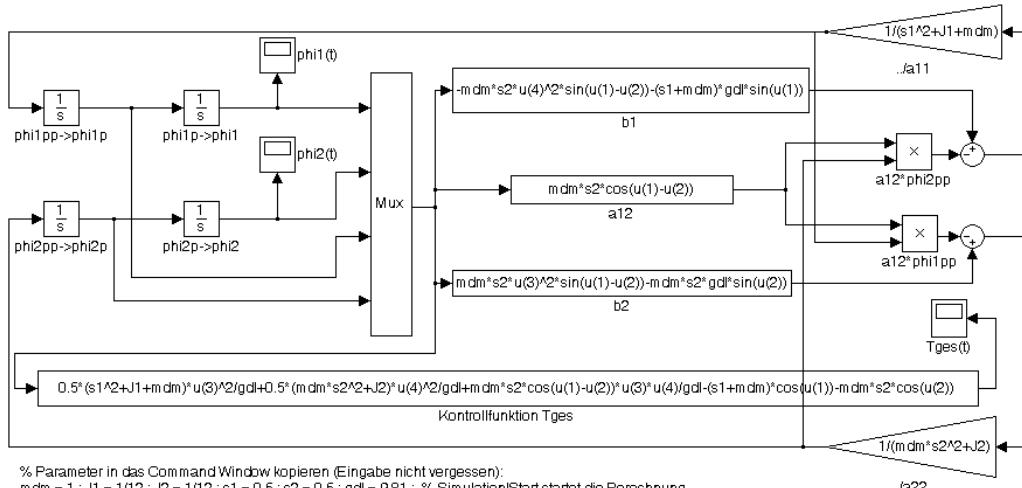
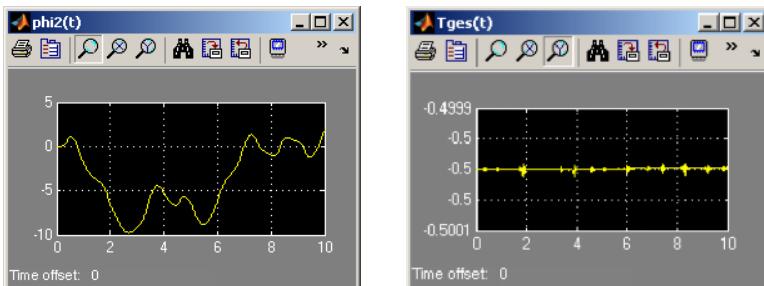


Abbildung 35.31: Simulink-Blockschaltbild für das Doppelpendel-Problem

- Mit den Variablen $u(1), \dots, u(4)$ und den gegebenen Größen können in so genannten „Function-Blocks“, hier bezeichnet als „ $b1$ “, „ $a12$ “, „ $b2$ “ und „Kontrollfunktion T_{ges} “, die für die Definition der Differenzialgleichungen benötigten Ausdrücke formuliert werden (bei einem Klick auf einen „Function Block“ öffnet sich ein Dialog-Fenster, in das der Ausdruck eingetragen werden kann).
- Die Weiterverarbeitung erfolgt in „Product-Blocks“ (die kleinen Quadrate mit dem Kreuz), „Sum-Blocks“ (die kleinen Kreise mit den Symbolen + und -) und „Gain-Blocks“ (Dreiecke, die die Multiplikation mit dem reziproken Wert eines Ausdrucks erzeugen), so dass schließlich die links in das Schema eingeführten Beschleunigungsgrößen entstehen.

Die Rechnung bestätigt die auf anderem Wege gewonnenen Ergebnisse (Abbildung 35.32), die Funktion $T_{ges}(t)$ signalisiert auch hier, dass immer Vorsicht geboten ist.

Eine Wertung der Simulink-Software findet man nach einem weiteren Beispiel, das damit gelöst wurde, auf der Seite 746.

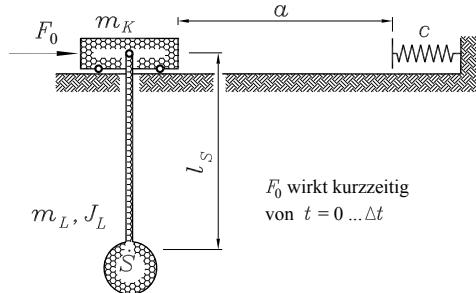
Abbildung 35.32: Simulink-Ergebnisse $\phi_2(t)$ und $T_{ges}(t)$ für das Doppelpendel

Beispiel 9

(Laufkatze mit Last, System mit 2 Freiheitsgraden, Berücksichtigung von Ereignissen, Kontrollen nach den Empfehlungen ①, ⑤, ⑦ und ⑨ von Seite 717)

Für die skizzierte Laufkatze wurden im Abschnitt 33.4.3 (Beispiel 3 auf Seite 674) die Bewegungs-Differenzialgleichungen hergeleitet. Hier soll die (unter www.TM-aktuell.de zu findende) Berechnung verifiziert werden.

Gegeben: $m_K = 100\text{kg}$; $J_L = 400\text{kgm}^2$; $l_S = 4\text{m}$; $F_0 = 2000\text{N}$;
 $m_L = 500\text{kg}$; $c = 200000\text{N/m}$; $\Delta t = 1\text{s}$; $a = 5\text{m}$.

**Lösung des Problems:**

Das Differenzialgleichungssystem 33.33 (Seite 675) beschreibt die Bewegung dieses Systems mit 2 Freiheitsgraden mit den Koordinaten x (Bewegung der Laufkatze) und φ (Pendelbewegung der Last). Zur Vorbereitung der numerischen Lösung werden die beiden neuen Variablen v und ω eingeführt:

$$v = \dot{x} \quad , \quad \omega = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \ddot{x} \quad , \quad \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad .$$

Damit kann das Anfangswertproblem so formuliert werden:



$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{\varphi} &= \omega \\ a_{11}\dot{v} + a_{12}\dot{\omega} &= b_1 \\ a_{12}\dot{v} + a_{22}\dot{\omega} &= b_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Mx} = \mathbf{r}$$

$$\text{mit } a_{11} = m_K + m_L \quad , \quad a_{12} = m_L l_S \cos \varphi \quad , \quad a_{22} = m_L l_S^2 + J_L \quad ,$$

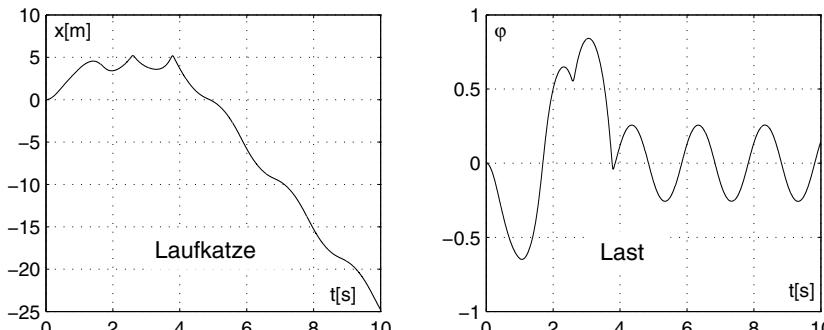
$$b_1 = m_L l_S \omega^2 \sin \varphi - c_t (x - a) + F_t \quad , \quad b_2 = -m_L g l_S \sin \varphi \quad ,$$

$$F_t = \begin{cases} F_0 & \text{für } t < \Delta t \\ 0 & \text{für } t \geq \Delta t \end{cases}, \quad c_t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ c & \text{für } x \geq a \end{cases},$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } x(t=0) = 0 \quad , \quad \varphi(t=0) = 0 \quad , \quad v(t=0) = 0 \quad , \quad \omega(t=0) = 0 \quad .$$

Wie dieses Anfangswertproblem der für die Lösung verwendeten Software vermittelt wird, wie speziell die beiden zeit- bzw. wegabhängigen Ereignisse zu realisieren sind (Matlab bietet dafür eine spezielle „Event-Strategie“), soll hier nicht diskutiert werden (man findet alles ausführlich kommentiert unter www.TM-aktuell.de).

Die Abbildung 35.33 zeigt den Verlauf der Bewegungskoordinaten $x(t)$ und $\varphi(t)$ für die Laufkatze bzw. die Last. Die Laufkatze bewegt sich erwartungsgemäß zunächst nach rechts und tritt nach etwa $t = 4\text{s}$ den Rückweg an. Die Last schwingt nach dem Start der Bewegung relativ weit aus, um dann auf dem Rückweg eine recht regelmäßige Schwingung auszuführen. Es lohnt sich, speziell das Weg-Zeit-Gesetz für die Laufkatze etwas genauer zu analysieren.

Abbildung 35.33: Funktionen $x(t)$ und $\varphi(t)$ für die Laufkatze mit pendelnder Last

Die Abbildung 35.34 zeigt einen Zoom in das Bewegungsgesetz der Laufkatze. Bevor sie ihren Rückweg antritt, gibt es insgesamt fünfmal eine Umkehr der Bewegungsrichtung, erstmals kurz nach dem Abschalten der Antriebskraft deutlich vor dem Erreichen der Feder.

Es folgt aber unmittelbar eine weitere Umkehr (wie die erste ohne äußere Krafteinwirkung), so dass es doch zum Anschlag an die Feder kommt.

Nach dem (ersten) Kontakt mit der Feder gibt es eine weitere (die dritte) **Umkehr der Bewegungsrichtung ohne äußere Krafteinwirkung**, so dass es zu einem zweiten Anschlag an die Feder kommt, der dann eine recht gleichmäßig verlaufende Bewegung (Rückweg) einleitet.

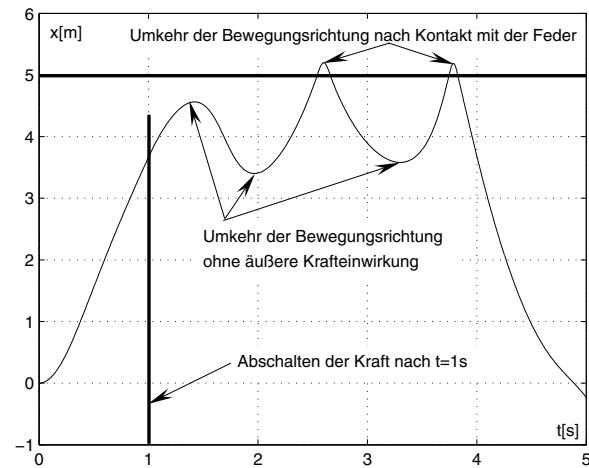


Abbildung 35.34: Bewegung der Laufkatze

Ergebnisse verifizieren:

- Der Empfehlung ⑤ von Seite 717 folgend, wurde nach zwei verschiedenen Verfahren integriert. Unter www.TM-aktuell.de wird auch die zusätzliche Empfehlung „mit verschiedenen Programmen“ berücksichtigt. Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist ein wichtiges Indiz für ihre Richtigkeit. Die Mehrfachrechnung mit unterschiedlichen Schrittweiten ist bei Problemen dieser Art zwingend.

Die Ergebnisse für unterschiedliche Schrittweiten werden zunächst durch den Vergleich der Funktionswerte für x und φ am Ende des Zeitintervalls bewertet (nebenstehende Tabelle für die Rechnung mit dem Matlab-Standard-Solver *ode45*). Bei etwa 8000 Zeitschritten darf man den Ergebnissen vertrauen.

Zeitschritte	$x(t = 10\text{s})$	$\varphi(t = 10\text{s})$
477	- 24,71	0,1716
2021	- 24,76	0,1447
4017	- 24,78	0,1450
8017	- 24,73	0,1456

- ⇒ Die Bewegung der Laufkatze mit mehrfachem Wechsel der Bewegungsrichtung ist schwer vorstellbar und kann nur durch die Interaktion zwischen Laufkatze und schwingender Last erklärt werden. Weil es nicht gerade einfach ist, dies aus den Diagrammen herauszulesen, ist eine Animation der Bewegung sehr hilfreich. Generell erhält man durch Animationen eine gute Vorstellung davon, ob die berechneten Bewegungsabläufe plausibel sind.

Unter www.TM-aktuell.de kann man sich die Bewegung ansehen und sehr schön erkennen, wie die pendelnde Last die Laufkatze beeinflusst. **Abbildung 35.35** zeigt einige Bilder aus dem Zeitbereich, in dem nach Abschalten der Kraft die Laufkatze zum ersten Mal (ohne äußeren Einfluss) ihre Bewegungsrichtung ändert.

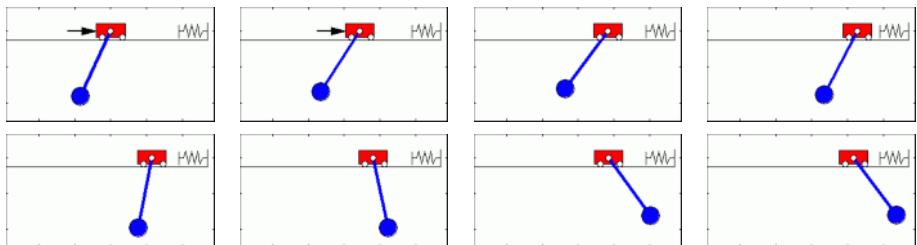


Abbildung 35.35: Einige Schnappschüsse aus der Animation (Zeitbereich: $t \approx 0,7\text{s} \dots 2,5\text{s}$)

- ⇒ Es bietet sich an, die Energiekurve als Kontrollfunktion parallel zur numerischen Integration der Bewegungs-Differentialgleichungen zu ermitteln. Die kinetische Energie wurde bereits für die Aufstellung der Differentialgleichungen benötigt (Seite 675). Die potentielle Energie soll auch nur für das bewegte System berücksichtigt werden (während des Kontakts mit der Feder ist auch in dieser potentielle Energie gespeichert). Mit dem Null-Potenzial entsprechend **Abbildung 35.36** gilt dann für die Gesamtenergie:

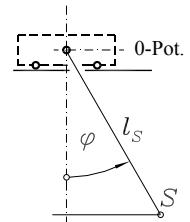


Abbildung 35.36:
Null-Potenzial

$$T_{ges} = \frac{1}{2} m_K v^2 + \frac{1}{2} m_L (v^2 + l_S^2 \omega^2 + 2 l_S v \omega \cos \varphi) + \frac{1}{2} J_L \omega^2 - m_L g l_S \cos \varphi \quad .$$

Die **Abbildung 35.37** zeigt die Funktion $T_{ges}(t)$. Erst bei 8000 Zeitschritten hat die Kurve für $t > 1\text{s}$ den zu erwartenden horizontalen Verlauf. Die beiden „Zacken“ kennzeichnen die vorübergehende Abgabe von Energie an die Feder.

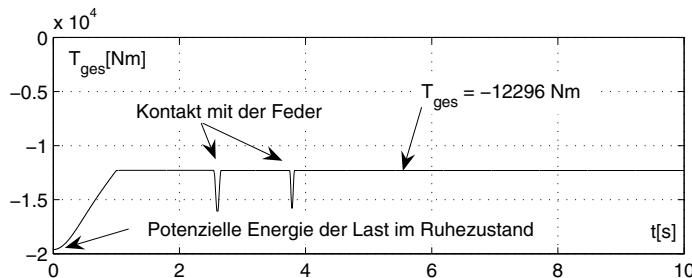


Abbildung 35.37: Gesamtenergie im bewegten System

Die Energiefunktion startet mit dem Wert für die potenzielle Energie der Last im Ruhezustand

$$T_{ges}(t=0) = -m_L g l_S = -19620 \text{ Nm} .$$

Die Arbeit der konstanten Kraft F_0 auf dem Weg von $x = 0$ bis $x_1 = x(t=1 \text{ s}) = 3,662 \text{ m}$ erhöht die Energie im bewegten System auf den Endwert

$$T_{ges}(t=0) + F_0 x_1 = -12296 \text{ Nm} .$$

Genau dieser Wert stellt sich ein.

Kontrollrechnung mit Simulink:

Zur Matlab-Ergänzungssoftware Simulink wurden beim Doppelpendel-Beispiel (Seite 740) einige Erklärungen gegeben und das dort berechnete Problem recht ausführlich erläutert.

Die Differentialgleichungen für die Berechnung der Bewegung der Laufkatze 33.33 (Seite 675) können Simulink in folgender Form angeboten werden:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\phi} &= b_1 \\ a_{12}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\phi} &= b_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{b_1 - a_{12}\ddot{\phi}}{a_{11}} \\ \ddot{\phi} &= \frac{b_2 - a_{12}\ddot{x}}{a_{22}} \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1$ und b_2 , die bereits auf der Seite 742 definiert wurden. Natürlich sollen auch die dort angegebenen Problemparameter der Aufgabenstellung und die Anfangsbedingungen verwendet werden. Auch die Kontrollfunktion für die Gesamtenergie (Formel auf Seite 744) soll von Simulink gezeichnet werden.

Die sprunghaften Änderungen der Parameter F_t und c_t entsprechend

$$F_t = \begin{cases} F_0 & \text{für } t < \Delta t \\ 0 & \text{für } t \geq \Delta t \end{cases}, \quad c_t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ c & \text{für } x \geq a \end{cases},$$

werden folgendermaßen realisiert:

- Die Änderung der Kraft F_t erfolgt zu einem vorab bekannten Zeitpunkt. Sie wird mit der in Simulink verfügbaren Sprungfunktion („Step“), die genau dafür vorgesehen ist, realisiert.
- Die Änderung der Federkraft $c_t(x-a)$ erfolgt in Abhängigkeit vom Weg x , der erst berechnet werden muss. Deshalb wird mit Hilfe der Signum-Funktion ein Ausdruck konstruiert, der für $x < a$ den Wert 0 ergibt, für $x > a$ den Wert 1. Es ist offensichtlich, dass der Ausdruck

$$[1 + \operatorname{sgn}(x-a)] \cdot 0,5$$

genau diese Bedingungen erfüllt (dass dieser Ausdruck den Wert 0,5 liefert, wenn exakt $x = a$ gilt, hat keine Bedeutung, weil dann die Federkraft selbst den Wert 0 hat). Er wird mit der Federkraft $c(x-a)$ multipliziert.

Unter www.TM-aktuell.de findet man die komplette Simulink-Rechnung mit dem Blockschaltbild und detaillierter Beschreibung.

Die Abbildung 35.38 zeigt die Ergebnisse der Simulink-Rechnung (Bewegungsgesetz $x(t)$ der Laufkatze, Kontrollfunktion $T_{ges}(t)$), die die auf anderem Weg berechneten Ergebnisse bestätigen.

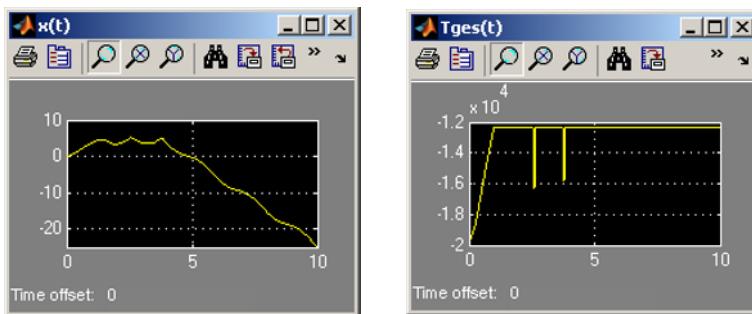


Abbildung 35.38: Simulink-Ergebnisse $x(t)$ und $T_{ges}(t)$ für die Laufkatze

Abschließende Bemerkungen zum Verifizieren der Lösungen von Bewegungs-Differenzialgleichungen, speziell zu Simulink:

Die typischen Bewegungs-Differenzialgleichungen (bzw. Differenzialgleichungssysteme) der Technischen Mechanik sind hochgradig nichtlinear und nur numerisch lösbar. Die bereits auf der Seite 528 zu findende Aussage, dass es „kaum ein anderes Gebiet gibt, in dem die mathematischen Hilfsmittel mit so viel Vorsicht zu benutzen sind“, haben die Beispiele 7 bis 9 in diesem Kapitel nachdrücklich bestätigt. Also: Verifizieren mit allen verfügbaren Verfahren und Kontrollmöglichkeiten!

Weil es zur numerischen Lösung keine Alternative gibt (die früher durchaus mögliche Behandlung mit elektronischen Analogrechnern ist heute nicht mehr konkurrenzfähig), ist noch ein Wort zu Simulink angebracht: Simulink versteckt die Numerik hinter einer Benutzerschnittstelle, die eher an Regelkreise (bzw. Analogrechner) erinnert. Aber es wird numerisch integriert, das muss der Anwender unbedingt wissen, weil dadurch alle Unwägbarkeiten der numerischen Integration (ohne Einschränkungen) zu beachten sind.

Man kann (und sollte) sich das bei Simulink über den Menüpunkt „Configuration Parameters“ einmal ansehen, um u. a. Auskunft über das verwendete Integrationsverfahren zu bekommen: Standard-Solver ist mit *ode45* (Dormand-Prince-Verfahren) genau das Verfahren, das in Matlab generell als erste Empfehlung gilt (vgl. Bemerkung auf Seite 737). Damit gilt auch für Simulink grundsätzlich der Zwang zu Mehrfach-Berechnungen mit unterschiedlichen Schrittweiten, unterschiedlichen Verfahren usw.

Man sollte sich auch nicht davon täuschen lassen, dass z. B. beim Doppelpendel-Problem die Matlab-Standard-Einstellungen zu fehlerhaften Ergebnissen führten (siehe Seite 738), die Simulink-Berechnung mit den Standard-Einstellungen jedoch korrekte Ergebnisse erzeugte (Seite 741). Weil das benutzte mathematische Verfahren von Simulink vor dem Benutzer „versteckt“ wird, haben die Matlab-Entwickler vorsichtshalber schärfere Standard-Einstellungen für die automatische Schrittweitensteuerung vorgesehen.

Sachwortverzeichnis

- Abgeföhrte Energie, 536
Abscheren, 344
Absolutbeschleunigung, 499, 504
Absolutbewegung, 499
Absolutgeschwindigkeit, 499, 504
Abstimmungsverhältnis, 624
Abtrieb, 536
Abwurfrichtung, 537
Achslast, 65
Acht-Knoten-Element, 705
Allgemeine Bewegung, 503
Allgemeines ebenes Kraftsystem, 17
Allgemeines Matrizeneigenwertproblem, 635
Allgemeines räumliches Kraftsystem, 119
Amplitude, 612
Analytische Mechanik, 655
Anfangsbedingung, 458, 522, 573
Anfangsdehnung, 193, 207
Anfangswertaufgaben, 525
Anfangswertproblem, 717
Angriffspunkt, 2
Anhänger, 65, 66
Animation, 465, 744
Ansatzfunktion, 681, 696, 702
Anstrengungsverhältnis, 401, 402
Antrieb, 536
Antriebskräfte, 572
Antriebskurbel, 475
Antriebsleistung, 365
Antriebssystem, 654
Antriebswelle, 402
Anziehungschaft, 1
Aperiodischer Grenzfall, 620
Äquatoriale Flächenträgheitsmomente, 220
Äquivalenz, 24, 126
Arbeit, 421, 532, 543
Arbeit der Gewichtskraft, 533
Arbeitsmaschine, 628
Arbeitssatz, 421, 427, 535
Arbeitsvermögen, 533
Außendruck, 453
Aufschrumpfen, 450
Ausgleichsrechnung, 79
Ausschnitte, 230
Ausschnittfläche, 34
Auswuchten, 564
Axiale Flächenträgheitsmomente, 220
Axiale Massenträgheitsmomente, 552
Axiom, 655
Axiome der Statik, 3
Bahnbeschleunigung, 463, 466, 480, 521
Bahngeschwindigkeit, 480
Bahnkurve, 465, 480
Bandbremse, 140
Bandmatrix, 199, 277
Baukran, 479
Baustahl, 170
Beanspruchung, 173
Beanspruchungsarten, 167
Begleitendes Dreibein, 481
Behälter, 453
Belastungsarten, 174
Belastungsebene, 309
Benutzer-Schnittstelle, 716
Bernoullischer Produktansatz, 648
Bernoulli-Hypothese, 216, 249
Beschleunigung, 457, 491, 543
Beschleunigungspol, 494
Beschleunigungsvektor, 466, 480
Besselsche Funktionen, 419
Bestimmtes Integral, 42

- Beton, 167
 Betti, 425
 Bettung, 312
 Bettungszahl, 312
 Beulen, 406
 Bewegung, 457
 Bewegung im Raum, 480, 501
 Bewegungs-Differenzialgleichungen, 525, 633
 Bewegungsgröße, 515
 Bewegungskoordinate, 572
 Bewegungswiderstände, 518, 520, 572
 Bezugs-Trägheitsmoment, 280
 Bezugsfaser, 94, 129, 216, 323
 Bezugssystem, 496
 Biegeachse, 217, 239, 249, 309
 Biegebeanspruchung, 167, 248
 Biegefeder, 436, 616
 Biegekritische Drehzahl, 629, 643
 Biegelinie, 249
 - Differenzenverfahren, 275, 317
 - elastisch gebetteter Träger, 312
 - Formelzusammenstellung, 260
 - mit veränderlicher Biegesteifigkeit, 280
 - numerische Lösungen, 724
 - schiefe Biegung, 308
 Biegelinie 2. Ordnung, 250
 Biegelinie 4. Ordnung, 251
 Biegemoment, 93, 129, 215
 - Extremwerte, 101
 - gekrümpter Träger, 323
 Biegemomentenverlauf, 724
 biegeschlaff, 157
 Biegeschwingung, 640, 648, 685
 Biegespannung, 215, 239
 Biegespannungsformel, 217, 238, 308
 Biegesteifigkeit, 250
 Biegeträger, 288, 724
 Biegewinkel, 251, 254
 Biegung, 215
 Bilanzgleichung, 584
 Binormalenvektor, 481
 Blech, 112
 Blindstäbe, 82
 Blockschaltbild, 740
 Bolzen, 354
 Brückenkran, 420
 Bredtsche Formel, 371, 373
 Bruchlastwechselzahl, 175
 Bruchspannung, 171
 Castigliano, 428
 Charakteristische Gleichung, 313, 448
 Computer-Verfahren, 273
 Computerrechnungen, 715
 Coriolisbeschleunigung, 497, 505, 521, 524
 Coulomb, 133
 Coulombsche Reibung, 518
 Courant, 195
 Crash-Test, 471
 Cremona-Plan, 82
 c_W -Wert, 519
 Dachkonstruktion, 719
 d'Alembertsche Kraft, 520, 543, 733
 d'Alembertsches Moment, 542, 543
 Dämpfer-Fußpunkt-Erregung, 626
 Dämpfung, 733
 Dämpfungskonstante, 620
 Dauerfestigkeit, 175
 Dauerfestigkeitsschaubild, 176
 Deckenträger, 385
 Dehnmessstreifen, 395, 404
 dehnstarr, 157
 Dehnsteifigkeit, 184
 Dehnung, 168, 183
 Determinante, 555
 Determinantenregel, 124
 Deviationsmoment, 217, 220, 546, 552
 Diagonalmatrix, 555
 Dickwandige Rohre, 453
 Differenzenformel, 274, 280, 319
 Differenzengleichung
 - gekrümpter Träger, 338
 - Knickstab, 417
 Differenzengleichung der Biegelinie, 275
 Differenzenquotient, 274
 Differenzenverfahren, 273, 317, 416, 725

- Differenzial, 509
Differenzialgleichungen, 447
Differenzialgleichungssystem, 526, 633
Differenzielle Zusammenhänge, 99
Dimensionen, 458
Dimensionierung, 167, 173
Dimensionslose Rechnung, 734
Dimensionslose Zeit, 562
Direkte Verfahren, 678
Diskretisierungsverfahren, 717
Doppelkurbel, 475
Doppelpendel, 672, 736
Doppelschwinge, 475
Doppel-T-Profil, 349
Doppel-T-Träger, 224, 242
Dormand-Prince-Verfahren, 737
Drall, 543, 586
Drallerhaltungssatz, 599, 608
Drallsatz, 568, 571, 585, 597, 607
Drehachse, 120, 542
Drehfeder, 143, 285
Drehfeder-Konstante, 616
Drehfederzahl, 144
Drehimpuls, 543, 586
Drehmoment, 365
Drehsinn, 23, 121
Drehung des Koordinatensystems, 227, 554
Drehzahl, 470
Drei-Knoten-Element, 703
Dreieck, 33, 222
Dreieckselement, 699
Dreieckslast, 44
Dreigelenksysteme, 69
Drillknicken, 405
Druck, 43, 183
Druckbeanspruchung, 167
Druckstab, 408
Dünn besetzte Matrizen, 277
Dünne Kreisscheibe, 549
Dünne Rechteckscheibe, 549
Dünner Stab, 547, 559
Dünner Zylinder, 547
Dünnwandige Behälter, 455
Dünnwandige offene Profile, 349
Dünnwandige Querschnitte, 369
Durchbiegung, 724
Durchlässigkeit, 628
Durchlaufträger, 433
Dyname, 126
Dynamik, 457
Dynamische Belastung, 174
Dynamische Randbedingung, 258, 677
Dynamische Unwucht, 564
Dynamisches Grundgesetz, 515
Ebene Bewegung, 568
Ebene Scheibe, 728, 730
Ebener Spannungszustand, 389, 445
Ebenes zentrales Kraftsystem, 9
Eigenform, 410
Eigengewicht, 43, 414, 417, 615
Eigenkreisfrequenz, 613
Eigenschwingung, 613, 635
Eigenvektor, 555, 636
Eigenwert, 410, 555
Eigenwertgleichung, 410
Eigenwertproblem, 408
Einachsiger Spannungszustand, 387
Einflusszahl, 425, 640
Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren, 528
Eingeprägte Kräfte, 520, 572
Einhüllende, 621
Einheitslast, 430
Einheitsmatrix, 555
Einheitsvektor, 555
Einschrittverfahren, 528
Einspannmoment, 51
Einspannung, 51
Einspeichern, 201
Einspeicherungsvorschrift, 692
Einwertiges Lager, 49
Elastische Bettung, 312
Elastische Lager, 143
Elastische Systeme, 616
Elastischer Stoß, 602
Elastisches Potenzial, 676
Elastizitätsgrenze, 171
Elastizitätsmodul, 171

- Element-Belastungen, 293
 Element-Kraftvektor, 197
 Element-Steifigkeitsbeziehung, 197, 289, 692, 703
 Element-Steifigkeitsmatrix, 197, 288, 321, 702
 Element-Verschiebungsvektor, 197
 Elementknoten, 198
 Elementlösung, 695
 Elementtypen, 705
 Endwertarbeit, 676
 Energie, 421, 532, 533
 Energiebilanz, 537
 Energiekurve, 735, 744
 Energiemethoden, 442
 Energiesatz, 535, 576, 614, 633
 Energieverlust, 600, 603
 Erdbeschleunigung, 1
 Erddrehung, 505
 Erdmasse, 2
 Ereignis (Event), 674, 742
 Erregerkraft, 623
 Erregerkreisfrequenz, 623, 644
 Ersatzfeder, 144, 617
 Ersatzfederzahl, 144
 Erweiterter Energiesatz, 536
 Erzwungene Schwingungen, 623
 Euler, 411
 Euler-Cauchy-Verfahren, 527
 Euler-Fälle, 411
 Euler-Relation, 314, 621
 Eulersche Differenzialgleichung, 448
 Eulersche Gleichungen, 588
 Eulersche Winkel, 589
 Euronorm, 171
 Event-Strategie, 742
 Excel, 35, 114
 Experimentelle Schwerpunktermittlung, 37
 Extremalprinzip, 696
 Extremwert, 517, 661
 Exzentrische Schubkurbel, 510
 Exzentrischer Stoß, 601, 607
 Exzentrizität, 408, 629
 Fachwerk, 80, 412, 441, 722
 Berechnungsverfahren, 82
 Computerrechnung, 85
 einfacher Aufbau, 80
 ideales, 80
 nicht einfacher Aufbau, 81
 räumliches, 115
 statische Bestimmtheit, 80, 115
 Fachwerk-Elemente, 203
 Fallende Kennlinie, 581
 Feder, 143, 283, 318, 422
 Feder-Fußpunkt-Erregung, 626
 Federenergie, 533
 Federgesetz, 143, 616
 Federkonstante, 616
 Federkraft, 143
 Federmasse, 618
 Federweg, 143
 Federzahl, 143
 Fehlerabschätzung, 528
 Fehlmaß, 188, 192
 FEM-Modell, 698
 FEM-Programme, 210
 Femset, 714
 Fertigungsungenauigkeiten, 54, 193
 Feste Achse, 501, 541, 559
 Festigkeitshypothesen, 399
 Festigkeitslehre, 167
 Festigkeitsnachweis, 173
 Festlager, 50
 Figurenachse, 589
 Fill-in, 277
 Finite Elemente, 695
 Finite-Elemente-Algorithmus, 197
 Finite-Elemente-Berechnungen, 717
 Finite-Elemente-Methode, 195, 695, 730
 Flächenlast, 43, 386
 Flächenmomente, 220
 Flächenschwerpunkt, 31
 Begrenzung durch zwei Funktionen, 41
 Computer-Verfahren, 38
 Dreieck, 33
 Excel, 35
 Kreisabschnitt, 33

- Kreissektor, 33
Online-Berechnung, 35, 46
Polygon, 38
Polygon mit Ausschnitten, 40
Polygon mit Matlab, 40
Programm, 35
rechtwinkliges Dreieck, 32
Flächenträgheitsmoment, 217, 220, 227, 346
 Online-Berechnung, 234
 Polygonzug, 235
Flächentragwerke, 385, 445
Flansch, 349
Fließgrenze, 171
Fliehkraft, 448, 521, 629
Fliehkraftbelastung, 449
Flugbahn, 517
Formänderungsenergie, 421, 676
Formelsatz, 113, 149
Formzahl, 177
Freie Schwingung, 613, 633
Freier Fall, 461
Freier Vektor, 122
Freiheitsgrad, 49, 483, 506, 633
Freischneiden, 6, 572
Freiwerte, 695
Frequenz, 611
Fuge, 347, 354
Fügestelle, 394
Führungsbeschleunigung, 497, 505
Führungsbewegung, 499, 524, 592
Führungsgeschwindigkeit, 497, 504
Fundament, 654
Fundamentalsystem, 448
Fundamentmasse, 628
Funktionensatz, 511

Gaßner-Kurve, 181
Gaußscher Integralsatz, 382
Gedämpfte Schwingung, 620, 733
Geführter Kreisel, 590
Gegengewicht, 507
Gekrümmte Träger, 323
Gelenk, 62, 283
Gelenkiges Lager, 50

Gelenkkraftkomponente, 63
Gelenksysteme, 63
Generalisierte Koordinaten, 656, 668
Generalisierte Kräfte, 668
Geometrie-Information, 87
Geometrische Randbedingung, 258, 677
Gerader Stoß, 601
Geraidlinige Bewegung, 457, 466
Gerber-Träger, 62
Gesamtbeschleunigung, 480, 491
Gesamtgeschwindigkeit, 491
Gesamtverformung, 358
Geschlitzter Kreisring, 326
Geschlossene Querschnitte, 369
Geschoss, 608
Geschwindigkeit, 457, 491, 543
Geschwindigkeitsvektor, 463, 480
Gestaltänderungshypothese, 401, 451
Gestaltfestigkeit, 177
Getriebe, 638
Getriebegehäuse, 119
Getriebeglied, 473
Getriebesynthese, 476
Getriebewelle, 402
Gewöhnliche Differenzialgleichung, 314
Gewichtskraft, 1, 533
Givens-Rotation, 419
Gleichförmige Bewegung, 460
Gleichgewicht, 4, 200, 656
 ebenes Kraftsystem, 47
 räumliche Probleme, 126
 zentrales ebenes Kraftsystem, 13
Gleichgewichtsbedingungen, 13, 47, 110, 126
Gleichgewichtslage, 148, 660, 733
Gleichungssystem, 73
 überbestimmtes, 79
Gleitlager, 51
Gleitmodul, 172
Gleitreibung, 134, 518, 572
Gleitreibungskoeffizient, 518
Gleitstein, 460, 468, 530
Gleitung, 169
Gleitwinkel, 169, 361
Grafische Lösungen, 11

- Grauguss, 400
 Gravitationsgesetz, 1
 Gravitationskonstante, 1
 Gravitationskraft, 1
 Grenzschlankheitsgrad, 413
 Grenzschwingspielzahl, 176
 Grenzwertbetrachtung, 436
 Gripzange, 67, 71, 78
 Grundbeanspruchungsarten, 423
- Haftkraft, 133, 572
 Haftung, 133
 Haftungskoeffizient, 134, 519
- Haigh-Diagramm, 177
 Halbkreis, 224, 233
 Hämmern, 604
 Handbremse, 65
 Harmonische Erregung, 623
 Harmonische Schwingung, 611
 Hauptachse, 552
 Hauptachsensystem, 553
 Hauptachsentransformation, 555
 Hauptdehnung, 393
 Hauptdehnungsrichtung, 393
 Hauptnormalenvektor, 480
 Hauptschubspannung, 388, 391, 398
 Hauptschubspannungsrichtung, 391
 Hauptspannung, 388, 390, 398, 398
 Hauptspannungsrichtung, 390
 Hauptträgheitsmoment, 227
 Hauptzentralachse, 217, 227, 307, 555
- Hebelarm, 23, 123
 Hertz, 611
 Hessenberg-Form, 419
 Hilfsmoment, 434
 Hohlquerschnitte, 224
 Hohlzylinder, 549
 Homogene Differenzialgleichung, 415, 448
 Homogenes Gleichungssystem, 398, 409, 555, 634
- Hookesches Gesetz, 172, 392
 Horizontalschnitt, 347
 Horizontalzug, 159
 Hubwerk, 666
- Hülse, 50
 Hyperbolisches Profil, 447
- Ideales Fachwerk, 80
 Impuls, 515, 543
 Impulserhaltungssatz, 598, 601, 608
 Impulssatz, 534, 597
 Indifferentes Gleichgewicht, 660
 Inertialsystem, 516
 Innendruck, 453
 innerlich statisch unbestimmt, 440, 446
 Instabiles Gleichgewicht, 151, 619
- Integral
 bestimmtes, 42
 exakte Lösung, 42
 numerische Lösung, 42
- Integrationskonstante, 251
 Integrationsschritt, 526
 Integrator, 740
- Jacobi-Rotation, 419
 Joule, 532
- Kaltverfestigung, 171
 kappa-Wert, 328
 Kardanwelle, 67
 Karussell (Relativbewegung), 498
 Kasten-Profil, 224
 Kastenquerschnitte, 369
 Kelvin, 188
 Kennlinie, 365, 581
 Kerbwirkung, 177
 Kerbwirkungszahl, 177, 179
 Kesselformeln, 455
 Kette, 342
 Kettenlinie, 157, 159
 Kilometerstein, 459
 Kilowatt, 534
 Kilowattstunde, 534
 Kinematik, 457
 Kinematik starrer Körper, 483
 Kinematische Diagramme, 462, 473, 484, 512
 Kinematische Kopplung, 506
 Kinetik, 457, 515, 515

- Kinetik starrer Körper, 541
Kinetische Energie, 535, 543, 576
Kippen, 406
Klassieren, 180
Klassierungsverfahren, 180
Klassische Mechanik, 655
Klebefläche, 354
Klebeverbindung, 449
Kleine Ausschläge, 614
Knickempfindlichkeit, 410
Knickfigur, 410
Knicksicherheit, 411
Knickung, 168, 405
Knoten, 80, 195
Knotenachse, 589
Knotenblech, 80
Knotenschnittverfahren, 81
Koeffizientendeterminante, 399, 409, 634
Koeffizientenmatrix, 73, 199
Koinzidenzmatrix, 210
Kolben, 472, 489
Kolbenbolzen, 413
Kollermühlen, 594
Kompatibilität, 200, 695
Kompatibilitätsbedingung, 191, 198
Komponenten, 25
Kondition (Matrix), 280
Konische Welle, 709
Konservative Kräfte, 533, 535, 659
Konservative Systeme, 670
Konsole, 698
Kontinuierliche Massebelegung, 648
Kontrollfunktion, 738, 744
Kontrollrechnungen, 717
Koordinatentransformation, 554
Koppel, 473, 490
Koppelgetriebe, 472
Koppelkurve, 474
Koppelpunkt, 474
Koppeltafel, 433
Korkenzieher-Regel, 122
Körperfeste Koordinaten, 588
Korrekturfaktor nach Bach, 402
Korrekturparameter κ_S , 357
Kraft, 1
Kraft-Verformungs-Diagramm, 421
Krafteck, 10, 12, 109
Krafteck,
 - geschlossenes, 13
 - räumliches, 109
Kräftepaar, 20
Kräfteparallelogramm, 4
Kraftschraube, 126
Kraftsystem,
 - allgemeines ebenes, 17
 - allgemeines räumliches, 119
 - ebenes zentrales, 9
 - räumliches zentrales, 109
Kraftzerlegung, 9
Kran, 56
Kranhaken, 331, 342
Kreis, 222, 239
Kreisabschnitt, 33, 222
Kreisbewegung, 466
Kreisbogenträger, 324, 332
Kreiselbewegung, 588
Kreiselmoment, 592
Kreisfrequenz, 612
Kreisgleichung, 473
Kreisquerschnitt, 329
Kreisring, 240, 326
Kreisringquerschnitt, 361
Kreisringscheibe, 445
Kreisscheibe, 549
Kreissektor, 33, 222
Kreistangenten-Polygone, 375
Kreiszylinder, 549, 556, 560
Kritische Belastung, 408
Kritische Drehzahl, 648
Kritische Kraft, 151
Kritische Spannung, 413
Krummlinig berandete Flächen, 237
Krümmung, 250
Krümmungsmittelpunkt, 480, 521
Krümmungsradius, 323, 467
Kugel, 549
Kugelbehälter, 455
Kupplung, 67, 600

- Kurbelschwinge, 474
 Kurbel, 473
 Kurbelwelle, 413
 Kurvenflug, 594
 Kurvenscheibengetriebe, 459
- Lager, 49
 Wertigkeit, 49
 Lagerreaktionen, 49, 572
 Lagerung, statisch bestimmt, 52
 Lagerung, statisch unbestimmt, 53, 146
 Lagrange, 665
 Lagrangesche Bewegungsgleichungen, 668
 Länge der Bahnkurve, 480
 Längenänderung, 184
 Lasteinleitung, 169
 Lasteinleitungsproblem, 353
 Lastwechselzahl, 175
 Laufkatze, 245, 667, 674, 742
 Lebensdauer, 179
 Lebensdauerabschätzung, 181
 Lehrsches Dämpfungsmaß, 620
 Leichtbau, 89
 Leistung, 365, 532, 534, 543
 Lichtgeschwindigkeit, 516
 Lineare Federn, 143
 Lineare Unabhängigkeit, 314
 Lineares Gleichungssystem, 48, 73, 718
 Fehlersuche, 78
 Kontrolle, 78
 Lösbarkeit, 78
 Linearisierung, 192
 Linienflüchtigkeit, 3
 Linienlast, 43
 Eigengewicht, 43
 Linienlasten, 293
 Linienschwerpunkt, 36
 Halbkreis, 37
 Kreis, 36
 Kreisbogen, 36
 symmetrische Kurve, 36
 Lipschitz-Bedingung, 538
 Logarithmisches Dekrement, 622
 Loopingbahn, 577
- Loslager, 50
- Malteserkreuz, 485
 Maple, 77, 118, 150, 154, 316, 511
 Maschinendynamik, 594
 Masse, 1
 Massenkraft, 520
 Massenmatrix, 635, 641, 642
 Massenpunkt, 515
 Massenpunktsystem, 597
 Massenträgheitsmoment, 542, 547, 637, 736
 Materialkennwerte, 167
 Mathematisches Modell, 210
 Mathematisches Pendel, 523, 615
 Matlab, 118, 212, 315, 340
 Matlab-Femset, 383, 714
 Matlab-Script, 287
 Matrix-Formulierung, 73
 Matrizeneigenwertproblem, 399, 419, 555, 639
 Matrizenrechnung, 199
 Maxwell, 425
 Mechanische Arbeit, 421
 Mega-Pascal, 169
 Mehrschrittverfahren, 528
 Membran, 368
 Membranspannung, 455
 Methode der finiten Elemente, 195, 695
 Methode der gewichteten Residuen, 696
 Methoden zur Dimensionierung, 167
 Miner-Regel, 181
 Mitrotierende Koordinaten, 546
 Mittelspannung, 175
 Mittlere Beschleunigung, 458
 Mittlere Geschwindigkeit, 458
 Mittlere Schubspannung, 356
 Modalkoeffizient, 635, 641
 Modalmatrix, 636
 Modell, 210
 Mohrscher Spannungskreis, 391
 Mohrsches Verfahren, 430
 Moment, 20, 119
 resultierendes, 21 119
 statisches, 32

- Momentanbeschleunigung, 458
Momentangeschwindigkeit, 458
Momentanpol, 488, 577
Momentenparallelogramm, 122
Momentensatz, 546
Momentvektor, 124, 532
Motorunwucht, 654
MS-Excel, 35, 114, 232
Mux-Block, 740
- Nachbesserung der FEM-Berechnung, 297
Näherungslösungen, 296
Negatives Schnittufer, 93
Nennspannung, 177
Netzgenerierung, 700
Neutrale Faser, 217
Newton, 1
Newtonmeter, 532
Newtonsches Gesetz, 515
Nichtlineare Schwingung, 619, 733
Nichtpotenzialkräfte, 536
Nichttriviale Lösung, 409, 634
Niete, 354
Normalbeschleunigung, 463, 466, 480, 521
Normaleneinheitsvektor, 467
Normalkraft, 93, 183, 323
Normalspannung, 169, 183
Normalspannungshypothese, 400
Normierung, 636
Normkollektiv, 180
Normprofil, 241, 243, 247, 271, 310
Null-Potenzial, 536, 660
Nullstab, 82, 412, 723
Numerische Berechnung, 338
Numerische Integration, 42
 Anfangswertprobleme, 526
Numerische Lösung, 382
Numerisches Differenzieren, 473, 484
- ode45, 737
Offener Querschnitt, 376
Online-Berechnung, 233
Ortsvektor, 463, 480, 597
- Palmgren-Miner, 181
- Parallele Kräfte, 19
Parallelschaltung, 144
Parameterdarstellung, 463
Parametrisierung, 75
Partielle Ableitung, 429, 671
Partikulärlösung, 314, 335, 448, 634
Pascal, 169
Paternoster, 486
Pendel, 615
Periodische Schwingung, 611
Phasenkurve, 622
Phasenverschiebung, 613, 624
Physikalisches Modell, 210
Planetengetriebe, 481, 508
Planetenrad, 492
Plastischer Stoß, 602
Platte, 386
Pleuel, 413, 489
Poissonsche Differenzialgleichung, 367, 383
Poissonsche Zahl, 172
Polares Flächenträgheitsmoment, 362
Polarkoordinaten, 477
Polygonzug, 235
Polynomfunktion, 681
Positives Schnittufer, 93, 129
Potenzansatz, 448
Potenzial, 659
Potenzialkräfte, 535, 659, 668
Potentielle Energie, 533
Prinzip der virtuellen Arbeit, 655
Prinzip der virtuellen Kräfte, 430
Prinzip von d'Alembert, 520, 571, 633, 665
Prinzip von St. Venant, 170
Prinzipien der Mechanik, 655
Produktansatz, 648
Profil-Mittellinie, 369
Programm-Absturz, 715
Projektionsfläche, 519
Proportionalitätsgrenze, 170, 413
PS, 365
psi, 169
Puffer, 674
- QR-Algorithmus, 419

- Quader, 549
 Quadraturfehler, 527
 Quasibene Probleme, 112
 Querdehnung, 172
 Querkontraktion, 172, 453
 Querkontraktionszahl, 172
 Querkraft, 93, 129, 323, 346
 Querkraftschub, 343
 Querkraftverformung, 356
 Querkraftverlauf, 724
 Querriegel, 440
 Querschnittsverwölbungen, 366
- Radialverschiebung, 334, 334, 447
 Radsatz, 384
 Rahmen, 439, 698, 726
 Rahmenschwingung, 642
 Rahmentragwerk, 299, 732
 Rammen, 604
 Rand- und Übergangsbedingungen, 358
 Randbedingung, 198, 251, 257, 284
 Randwertproblem, 274, 683
 Ratio, 175
 Rauigkeit, 134
 Räumliche Bewegung, 585
 Räumliche Fachwerke, 115
 Räumliche Probleme, 109
 Räumlischer Spannungszustand, 396
 Rayleighscher Quotient, 419, 686
 Rechte-Faust-Regel, 122
 Rechteck, 222, 239
 Rechteckquerschnitt, 329, 368
 Rechteckscheibe, 549
 Rechtsschrauben-Regel, 122, 502
 Rechtssystem, 129
 Reduktion der Elementlasten, 701
 Reduzierte Elementlasten, 197
 Reduzierte Knicklänge, 413
 Reduziertes System, 293
 Regel von de l'Hospital, 436
 Reguläre Matrix, 78
 Reihenschaltung, 617
 Reißlänge, 171
 Reibpaarung, 134
- Reibschweißfläche, 354
 Reibung, 536
 Reihenschaltung, 144
 Rein dynamische Unwucht, 564
 Reine Biegung, 215
 Reine Translation, 541
 Reines Rollen, 574
 Relativbeschleunigung, 497, 505
 Relativbewegung, 496, 499, 504, 524
 Relative Verschiebung, 439
 Relativgeschwindigkeit, 497, 504
 Resonanz, 625, 632, 644
 Resultierende, 9, 17, 25, 109
 Resultierendes Moment, 21
 Reynold-Zahl, 519
 Reziprozitätssatz, 426
 Richtungskosinus, 110, 398, 555
 Richtungssinn, 2, 4
 Ringquerschnitte, 369
 Ritterschnitt, 83
 Ritz-Ansatz, 679
 Rollbedingung, 486
 Rotation, 470, 483, 501, 541, 559
 Rotationsenergie, 543
 Rotationsformeln, 543
 Rotationskörper, 548
 Rotationssymmetrische Scheiben, 445
 Rotor, 544, 564, 593
 Rücksprungversuch, 603
 Rückstellkraft, 615
 Rührwerk, 383
 Rundstab, 242
 Rundumschnitt, 81
 Rundungsfehler, 718
 Runge-Kutta-Verfahren, 527, 738
- Satellit, 506
 Sattelpunkt, 664
 Schale, 386
 Schattenfläche, 519
 Scheibe, 386, 445, 698, 728, 730
 Scheibenelement, 699, 703
 Scherbeanspruchung, 168
 Scherfläche, 354

- Scherkraft, 354
Scherspannung, 169
Schiefe Biegung, 307
Schiefe Ebene, 133
Schiefer Stoß, 601, 605
Schiefer Wurf, 516, 537
Schiefstellung, 561
Schienenfahrwerke, 66
Schieneweg, 341
Schlankheitsgrad, 413
Schleudermoment, 594
Schlusslinie, 12
Schmieden, 604
Schmiegeungsebene, 481
Schnittrößen, 93, 97, 129, 323
 Ableitungen, 99
Schnittrößenverläufe, 96, 726
Schnittkräfte, 5
Schnitteinheit, 5, 60
Schnittskizze, 52, 60
Schnittufer, 5, 93, 97, 129
Schrauben, 354
Schraubenfeder, 143
Schraubenzieher, 22
Schrittweite, 528
Schrittweitensteuerung, 528, 734
Schrumpfsitz, 456
Schrumpfspannung, 452
Schubbeanspruchung, 168
Schubfluss, 370, 376
Schubkurbel, 472, 489, 510
Schubmittelpunkt, 349, 352
Schubspannung, 169, 343, 361, 362
Schubspannungsformel, 346
Schubspannungshypothese, 400
Schubsteifigkeit, 357
Schubverformung, 356
Schwach gekrümmter Träger, 330
Schwache Dämpfung, 621
Schweißnaht, 347, 354, 379
Schwellende Belastung, 175
Schwellfestigkeit, 176
Schwerpunkt, 29
 Dreieck, 33
 Kegel, 31
 Keil, 31
 Körper, 30
 Kreisabschnitt, 33
 Kreissektor, 33
 Kugelabschnitt, 31
 rechtwinkliges Dreieck, 32
Schwerpunktermittlung
 Auswiegen, 38
 experimentell, 37
Schwerpunktsatz, 568, 570, 585, 597
Schwinge, 473, 484
Schwingerkette, 633
Schwingsieb, 614, 632
Schwingung, 611, 733
Schwingungsdauer, 611, 621
Schwingungsisolierung, 628
Schwingungsknoten, 639
Schwingungsperiode, 611
Schwingungstilgung, 644
Schwungrad, 551, 600
Sechs-Knoten-Element, 704
Seifenhaut-Gleichnis, 368
Seil, 49, 70, 72, 183
 flacher Durchhang, 163
 konstante Linienlast, 163
Seileckverfahren, 18
Seilhaftung, 137
Seilkraft, 70, 572
Seillinie, 159
Seilstatik, 157
Seilwinde, 507
Selbstzentrierung, 630
sgn-Funktion, 518
SI-Konvention, 169
Sicherheitsfaktor, 174
Simulink, 740, 746
Simultaniteration, 419
Singuläre Matrix, 78
Singularität, 447
Skalare Größe, 2
Skalarprodukt, 125, 532
Smith-Diagramm, 176
Sonnenpaddel, 506

- Sonnenrad, 481, 492
 Spannung, 168, 183, 327
 Spannungs-Dehnungs-Diagramm, 170
 Spannungs-Null-Linie, 308
 Spannungskollektiv, 179
 Spannungsmatrix, 398
 Spannungsvektor, 398
 Sparse matrices, 277
 Spezielles Matrizeneigenwertproblem, 399
 Spezifische Formänderungsenergie, 423
 Sprungfunktion, 745
 Stab, 49, 70, 183
 Stab-Knickung, 406
 Stabelemente, 196
 Stabile Gleichgewichtslage, 733
 Stabiles Gleichgewicht, 151
 Stabilität, 659
 Stabilitätsproblem, 405
 Stabkraft, 70
 Stampfen, 594
 Stanzvorgang, 36
 Stark gekrümmter Träger, 330
 Starke Dämpfung, 620
 Starre Einspannung, 51
 Starrer Körper, 3, 483
 Starrkörperbewegung, 53, 637
 Statik,
 Axiome, 3
 Grundlagen, 1
 Stationäre Lösung, 624
 Statisch bestimmte Probleme, 434
 Statisch bestimmte Systeme, 61
 Statisch unbestimmte Probleme, 186, 437
 Statisch unbestimmte Systeme, 262
 Statische Auslenkung, 615
 Statische Belastung, 174
 Statische Bestimmtheit, 52
 Statische Unwucht, 564
 Statisches Moment, 32, 346
 Steife Feder, 145
 Steifigkeitsmatrix, 197, 635, 642, 702
 Steigungsfehler, 527
 Steinerscher Satz, 223, 550, 554
 Stiftwalze, 566
 Störung (Gleichgewicht), 151
 Stoß, 601
 Stoßdämpfer, 519, 620
 Stoßmittelpunkt, 608
 Stoßnormale, 601
 Stoßpunkt, 601
 Stoßzahl, 602
 Strahlensatz, 468
 Strandbeest, 476
 Streckenlast, 43
 Streckgrenze, 171
 Strukturdynamik, 696
 Stützenerregung, 627
 Stützlinie, 157, 166
 Stützstellen, 273
 Summenhäufigkeitskurve, 180
 Superposition, 268
 St.-Venantsche Torsion, 366, 381, 712
 Symbolische Mathematik, 42
 Symbolische Rechnung, 75, 316
 Symmetrieeigenschaft, 639
 Symmetrieschnitt, 728
 Symmetrischer Kreisel, 591
 System-Kraftvektor, 199
 System-Steifigkeitsbeziehung, 198, 692
 System-Steifigkeitsmatrix, 199
 Systeme starrer Körper, 61, 506
 Systemknoten, 198
 Systemlösung, 695
 Tabellenkalkulationsprogramm, 233
 Tabellenrechnung, 34, 231
 Tangenteneinheitsvektor, 465, 480
 Tangentialbeschleunigung, 467
 Tangentialdehnung, 446
 Tangentialverschiebung, 334
 Teilflächen, 230
 Teilschädigungsquotient, 181
 Temperatur, 188
 Temperaturausdehnungskoeffizient, 188
 Temperaturdehnung, 188, 207
 Temperaturdifferenz, 211
 Temperaturspannung, 188
 Theorie 1. Ordnung, 146

- Theorie 2. Ordnung, **152, 405**
Theorie 3. Ordnung, **153**
Tilger, **646, 654**
Topologie, **210**
Topologie-Information, **87**
Torsion, **361, 405**
Torsionsbeanspruchung, **168**
Torsionsfeder, **143, 144, 637**
Torsionsfederstab, **364**
Torsionsfreiheit, **352**
Torsionsfunktion, **367**
Torsionsmoment, **129, 361**
Torsionsschubspannung, **362, 366**
Torsionsschwingung, **637, 654**
Torsionstab, **144**
Torsionssteifigkeit, **362, 366, 637**
Torsionsträgheitsmoment, **366, 376, 381**
Torsionswiderstandsmoment, **381**
T-Profil, **225**
Träger gleicher Festigkeit, **246**
Trägerachse, **323**
Trägheitsradius, **413**
Trägheitstensor, **553**
Translation, **486**
Translationsformeln, **543**
Trapezlast, **44**
Trapezquerschnitt, **329**
Traverse, **66**
Trennbruch, **174**
Triviale Lösung, **409**
Trum, **666**
T-Träger, **240**
Turbinenschaufel, **237**

Überbestimmtes Gleichungssystem, **79**
Übergangsbedingung, **255, 257, 282, 317**
Überkritischer Bereich, **629**
Übermaß, **192, 456**
Übertragungsmatrizen, **273**
Umformgrad, **604**
Umlaufgetriebe, **508**
Umlaufintegral, **370, 382**
Ungedämpfte Schwingung, **613**
Untermaß, **450**

Unwuchterregung, **628**
Unwuchtvektor, **564**
U-Profil, **247, 350**

Variantenrechnung, **202**
Variationsproblem, **679**
Variationsrechnung, **678**
Vektor der Winkelgeschwindigkeit, **501**
Vektoriteration, **419**
Vektorprodukt, **124, 502**
Verbindungsmitte, **354**
Verdrehwinkel, **143, 361, 366**
Verfahren von Castiglano, **428**
Verfahren von Ritz, **679, 689**
Verfahren von Runge-Kutta, **527, 738**
Verformungsbedingung, **147, 187**
Verformungsberechnung, **308**
Vergleichsfunktion, **677**
Vergleichsmoment, **403**
Vergleichsspannung, **399**
Vergrößerungsfunktion, **625**
Verifizieren, **46, 88, 715**
Verlängerung, **184**
Vernetzung, **699**
Verschiebungsansatz, **704**
Verschmieren, **282, 318**
Versetzungsmoment, **24, 123**
Verteilte Elementlasten, **208**
Verwölbung, **356, 366, 370, 379**
Verzerrung, **168**
Verzögerung, **460**
Viereckselement, **700**
Viergelenkkette, **473, 490**
Virtuelle Arbeit, **655, 669**
Virtuelle Verschiebung, **655**
Vollscheibe, **447, 456**
Vollzylinder, **548**
Volumenlast, **43, 445**
Vorgeschriebene Verschiebung, **283, 318**
Vorspannung, **192, 615**

Walze, **573**
Wälzlager, **51**
Walzwerk, **539**

- Wandkran, 420
Wärmedehnung, 189
Watt, 365, 365, 534
Wattsekunde, 534
Wechselbelastung, 175
Wechselfestigkeit, 176
Wechselwirkungsgesetz, 4
Weg, 457
Weiche Feder, 148
Welle, 365, 402, 637
Wellenberechnung, 402
Wendepunkt, 468
Werkstoffkunde, 167
Wertigkeit
 Lager, 49
Widerstandsfähigkeit, 173
Widerstandsmoment, 218, 238, 363
Winde, 579
Winkelbeschleunigung, 470, 543
Winkelgeschwindigkeit, 470, 487, 512, 543
Winkler/Zimmermann, 312
Wippkran, 475
Wirksame Schubfläche, 356
Wöhlerkurve, 175
Wölf freiheit, 374, 379, 384
Wölkrafttorsion, 366
Wuchtzentrieren, 565
Wurfparabel, 517
WYSIWYG, 213, 233
Zahlenrechnung, 458
- Zange, 71
Zeilen-Spalten-Streichen, 201, 206
Zeitfestigkeit, 179
Zeitintervall, 526
Zentrale Differenzenformeln, 275
Zentrierbohrung, 565
Zentrifugalkraft, 445, 521
Zentrifugalmoment, 546, 552, 552
Zentrischer Stoß, 601
Zerreißmaschine, 170
Zerrüttung, 175
Zug, 183
Zugbeanspruchung, 167
Zugeführte Energie, 536
Zugeordnete Schubspannungen, 344
Zuggeschirr, 67
Zugstab, 421
Zugversuch, 170, 399
Zulässige Spannung, 173
Zusammengesetzte Beanspruchung, 385
Zusammengesetzte Flächen, 224
Zusatzznotenkräfte, 208
Zwangsbedingung, 506, 572, 633
Zwangskräfte, 518, 572, 656, 665
Zwangsschwingung, 644
Zweiwertiges Lager, 50
Zwischenstütze, 283, 318
Zykloide, 465
Zylinder, 549, 560
Zylindrische Behälter, 453, 455