

Nr. 46

## **Der Faraday-Effekt an Halbleitern**

Sara Krieg  
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel  
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 08.07.2020

Abgabe: 22.07.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Spin-Echo-Verfahren . . . . .	3
1.2	Feldgradienten-NMR . . . . .	4
1.3	Bandstruktur und die effektive Masse . . . . .	5
1.4	Dotierung von Halbleitern . . . . .	6
1.5	Faraday-Effekt . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
4.1	Bestimmung der maximalen magnetischen Flussdichte $ \vec{B} _{\max}$ . . . . .	11
4.2	Bestimmung der effektiven Masse von GaAs . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
	<b>Literatur</b>	<b>16</b>

# 1 Theorie

Ziel des Versuches ist die Bestimmung der effektiven Masse  $m^*$  der Leitungselektronen von GaAs mit Hilfe der Faraday-Rotation. Dazu werden zwei n-dotierte und eine hochreine Probe in einem Magnetfeld eingelassen und mittels eines Zwei-Strahl-Verfahrens die Faraday-Rotation zu verschiedenen Wellenlängen  $\lambda$  bestimmt.

## 1.1 Bandstruktur und die effektive Masse

Durch Einfluss eines zum Strahlengang parallelen Magnetfeldes bewirkt der Faraday-Effekt eine Drehung der Polarisationssebene. Dabei verhalten sich die Elektronen des Leitungsbandes in Hinblick auf die optischen Eigenschaften wie freie Elektronen, jedoch mit einer anderen Masse. Diese wird als effektive Masse bezeichnet und gilt es zu bestimmen.

Das Elektron innerhalb der Kristallstruktur wird innerhalb eines periodischen, positiven Potentials betrachtet, sodass sich bei einer Näherungsrechnung eines lokalen Minimums nach dem zweiten Newtonschen Gesetz die Bewegungsgleichung

$$a = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 \epsilon}{dk^2} \cdot qE$$

ergibt, wobei  $a$  die Beschleunigung ist. Im Vakuum ist diese gegeben als:

$$a = \frac{1}{m} \cdot qE.$$

Werden alle übrigen Faktoren durch Koeffizientenvergleich für  $E$  in die reduzierte Masse  $m^*$  absorbiert, ergibt sich

$$m^* = \hbar^2 \frac{dk^2}{d^2 \epsilon}.$$

Dabei beschreibt das Bändermodell die möglichen Energieniveaus innerhalb eines Materials. Das periodische Potential eines Gitters bildet für näherungsweise unendliche Kristallgrenzen keine Potentialmulden, sondern ein Potentialband. Für einen Halbleiter ist ein solches Bändermodell in Abbildung 2 dargestellt.

Hierbei ist besonders, dass die Fremdatome stellenweise eine energetische Erhöhung des unteren Bandes, des Valenzbandes, bewirken. Daraus resultiert an dieser Stelle eine geringere Energiedifferenz zum nächst höheren Band, dem Leitungsband. Demnach ist es energetisch günstiger in dieses Leitungsband angeregt zu werden. Dies bewirkt phänomenologisch eine bessere Leitfähigkeit des Metalls.

Es ist zu beachten, dass nur die angeregten Elektronen im Leitungsband zum Faraday-Effekt beitragen. Demnach ist in einem nicht dotierten Halbleiter kein Faraday-Effekt zu erwarten, da in diesem lediglich Elektronen unterhalb der Valenzbandkante existieren.

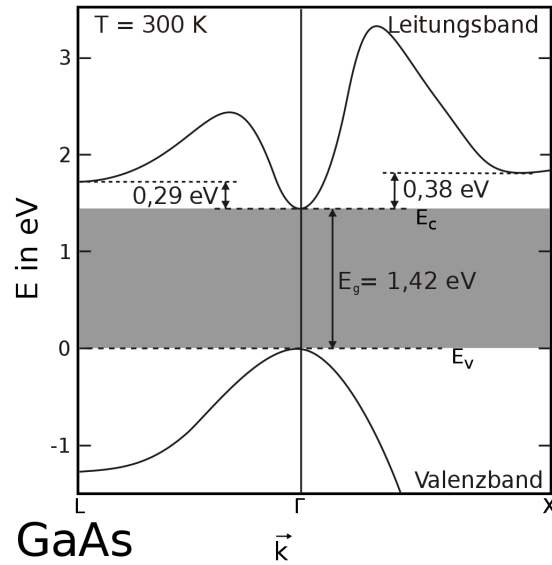


Abbildung 1: Bandstruktur eines GaAs-Kristalls [1].

## 1.2 Dotierung von Halbleitern

Die Dotierung beschreibt das Einbringen von Fremdatomen, beispielsweise durch Aufdampfen oder Diffusion. Die Dotierung erzeugt dabei örtlich gebundene Energieniveaus in der Bandlücke des Grundmaterials, wodurch die Leitfähigkeit beeinflusst werden kann. Es wird dabei zwischen der n- und der p-Dotierung unterschieden.

Bei n-dotierten Materialien, auch Donatoren, werden Fremdatome in das Grundmaterial eingebracht, die ein Elektron mehr besitzen als das Grundmaterial selbst. Dieses für die Bindung überschüssige Elektron erfährt im Wesentlichen nur noch Coulomb-Wechselwirkung und ist über viele Gitteratome des Grundmaterials delokalisiert. Demnach kann das Elektron als frei angesehen werden und trägt zur Leitfähigkeit bei. Die zusätzlichen Energieniveaus sind in Abbildung 3 dargestellt. Sie befinden sich dann unterhalb des Leitungsbandes.

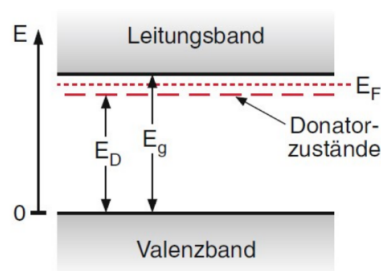
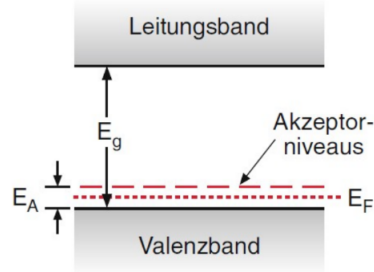


Abbildung 2: Termschema eines n-dotierten Halbleiters [5].

Bei p-dotierten Materialien, auch Akzeptoren, werden Fremdatome eingebracht, die ein Elektron weniger besitzen als das Grundmaterial. Dadurch bleiben freie, positive Löcher übrig, die Elektronen einfangen können. Dadurch sind die Elektronen im Valenzband beweglicher und die zusätzlichen Energieniveaus sind in Abbildung 4 dargestellt.



**Abbildung 3:** Termschema eines p-dotierten Halbleiters [5].

### 1.3 Faraday-Effekt

Wenn Licht auf ein optisch aktives Medium trifft, so kann sich die Polarisationssebene um einen Winkel  $\theta$  drehen. Tritt das Licht an einer anderen Stelle wieder aus, so erfolgt eine erneute Drehung. Dies wird als zirkuläre Doppelbrechung bezeichnet. Es wird zunächst eine elektromagnetische Welle in z-Richtung betrachtet:

$$E(z) = \frac{1}{2} (E_L + E_R) .$$

Es ist immer möglich eine linear polarisierte Welle in einen recht-zirkular polarisierten und einen links-zirkular polarisierten Anteil zu zerlegen. Dabei gilt für die Wellenvektoren  $k_L \neq k_R$ . Die Rotation berechnet sich dann über

$$\theta = \frac{d}{2} (k_R - k_L) = \frac{d\omega}{2} \left( \frac{1}{v_{\text{ph},R}} - \frac{1}{v_{\text{ph},L}} \right) = \frac{d\omega}{2c} (n_R - n_L)$$

berechnet werden. Dabei ist  $n$  der Brechungsindex und  $d$  die Länge des Mediums. Die Rotation bei der Doppelbrechung entsteht durch Wechselwirkung der Bandelektren mit den Atomrümpfen der Gitteratome, die ihrerseits pro Volumenelement eine Polarisation

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

erzeugen.  $\chi$  ist dabei für isotrope Materie ein skalar. Für anisotrope Kristalle wird die elektrische Suszeptibilität  $\chi$  durch den Ansatz

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

beschrieben. Durch Multiplikation mit  $\vec{E}$  und Anwendung auf die Wellengleichung lässt sich dann für den Rotationswinkel  $\theta$  ein von  $\chi$  abhängiger Ausdruck finden:

$$\theta \approx \frac{d\omega}{2cn} \chi_{xy}.$$

Eine solche Rotation lässt sich durch Anlegen eines Magnetfeldes auch bei optisch inaktiven Materialien finden. Trifft Licht auf einen solchen Kristall und durchläuft diesen, so wird es wie bei einem parallel zum Lichtstrahl verlaufenden Magnetfeld ebenfalls um einen Winkel  $\theta$  gedreht. Dies wird als Faraday-Effekt bezeichnet.

Die Rotation lässt sich hierbei auf die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K \vec{r} = -e_0 \vec{E}(r) - e_0 \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

zurückführen, die ein gebundenes Elektron mit Masse  $m$  und Ladung  $e_0$  im Magnetfeld  $\vec{B}$  erfährt. Dabei beschreibt  $\vec{r}$  die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage,  $K$  eine Bindungskonstante und  $\vec{E}$  die Feldstärke der einfallenden elektromagnetischen Welle. Für den Faraday-Effekt gilt unter Betrachtung von Gleichung (9)  $\chi_{xy} = \chi_{yx}$ . Damit sind die beiden Nebendiagonalelemente konjugiert komplex. Über diese ergibt sich dann mit Hilfe der Zyklotronfrequenz  $\omega_C$  und einigen Umformungen

$$\theta(\lambda) \approx \frac{2\pi^2 e_0^3 c}{\epsilon_0 m^2 \lambda^2 \omega_0^4} \frac{NBd}{n}.$$

Für den Fall quasifreier Ladungsträger wird der Grenzfall  $\omega_0 \rightarrow 0$  betrachtet und die Masse  $m$  durch die effektive Masse  $m^*$  ersetzt. Die Faraday-Rotation pro Einheitslänge  $\theta_{\text{frei}} = \frac{\theta}{d}$  berechnet sich dann als

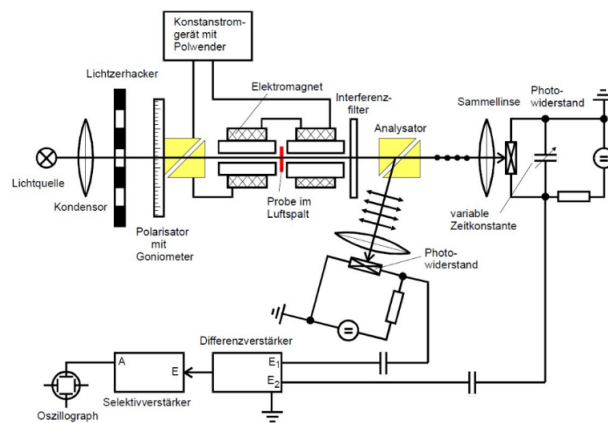
$$\theta_{\text{frei}} = \frac{e_0^3}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(m^*)^2} \lambda^2 \frac{NB}{n}. \quad (2)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich die effektive Masse der Elektronen bestimmen.

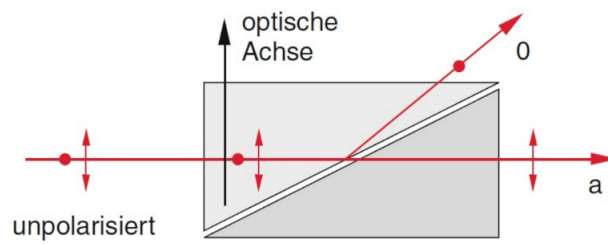
## 2 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abbildung 6 zu sehen. Er besteht aus einer Lichtquelle, deren Licht durch einen Kondensator auf einen Lichtmodulator fällt. Dieser kann durch ein Steuerungselement auf eine beliebige Frequenz eingestellt werden. Hinter dem Modulator befindet sich ein Glan-Thompson-Prisma, welches mit einem Goniometer verbunden ist und sich durch eine Drehung an letzterem als Polarisator verwenden lässt. Die Funktionsweise eines solchen Prismas ist in Abbildung 7 dargestellt.

Das austretende Licht fällt durch einen Elektromagneten, in dessen Mitte sich ein Luftspalt befindet, in dem die Probe eingelassen werden kann. Bei Austreten des Strahls fällt das Licht auf einem Interferenzfilter, der es ermöglicht Licht nur einer Wellenlänge zu betrachten. Dieses Licht wird wiederum an einem zweiten Glan-Thompson-Prisma in zwei Strahlenbündel geteilt, die dann auf Photodetektoren treffen. Die so entstehenden Signale



**Abbildung 4:** Schematischer Aufbau des Versuchs [2].



**Abbildung 5:** Schematischer Aufbau eines Glan-Thompson Prismas [2].

der beiden Detektoren werden auf die Eingänge eines Differenzverstärkers gegeben, dessen Ausgangsspannung proportional zur Differenz der beiden Signale ist. Das Signal wird dann auf einen Selektivverstärker gegeben, der auf die gleiche Frequenz wie der Lichtmodulator gestellt wird. Dies ermöglicht eine Unterdrückung des auftretenden Hintergrundrauschens, wenn die Güte des Verstärkers  $Q = 100$  beträgt. Das Ausgangssignal kann dann an einem Oszillograph dargestellt werden.

Bevor der eigentliche Versuch beginnen kann muss der Aufbau justiert werden. Dazu wird zunächst ein freier Stahlengang betrachtet. Die Halogenlampe wird auf 10 V eingestellt. Dann werden die Prismen so gedreht, dass die Strahlenbündel möglichst senkrecht auf die Prismen fallen. Das Licht soll dann so auf die Detektoren treffen, dass bei geeigneter Drehung des Polarisationsprisms die Lichtintensität an einem der Detektoren verschwindet und beim anderen maximal wird. Dann wird für den Lichtmodulator sowie den Selektivverstärker eine Frequenz von 450 Hz eingestellt. Dann wird der Elektromagnet auf 10 A hochgefahren und eine der Proben sowie ein Interferenzfilter eingesetzt. Die Photodetektoren werden nun mit der Verstärkerelektronik gemäß Abbildung 6 verbunden. Anschließend wird durch Drehen des Polarisationsprisms geprüft, dass die Signalamplitude am Oszillograph unter einer Periodizität von  $90^\circ$  minimal wird.

Nach der Justierung kann mit der eigentlichen Messung begonnen werden. Dazu werden zwei n-dotierte und eine hochreine GaAs-Probe zu jedem der neun verschiedenen Interferenzfilter vermessen. Dabei wird dann zu jeder der neun Wellenlängen ein Winkel am Goniometer abgelesen und notiert, unter dem die Signalamplitude minimal wird. Das Magnetfeld wird nach jeder Messung umgepolt und die Messung wiederholt. Aus der Differenz der beiden gemessenen Winkel lässt sich dann die Faraday Rotation  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  berechnen. Nach der Messung der drei Proben wird das Magnetfeld zur Bestimmung der maximalen Kraftflussdichte  $B_{\max}$  an der Stelle der Probenhalterung mit einer Hallsonde vermessen.

## 3 Auswertung

### 3.1 Bestimmung der maximalen magnetischen Flussdichte $|\vec{B}|_{\max}$

Die Messwerte der in der Probenkammer in Strahlrichtung abhängig vom Ort  $z$  gemessenen magnetischen Flussdichte  $|\vec{B}(z)| = B(z)$  sind in Tabelle 1 eingetragen und in Abbildung 8 gemäß der Vorschrift

$$B(z) = a \cdot z^4 + b \cdot z^3 + c \cdot z^2 + d \cdot z + e \quad (3)$$

approximiert. Dies geschieht mittels der Funktion `scipy.optimize.curve_fit` aus der Python-Bibliothek `SciPy`.  $z$  ist dabei relativ von der ungefähren Probenmitte gemessen. Die negativen Werte beschreiben die Richtung zur Lichtquelle hin.

Es ergeben sich die Approximationsparameter



$$\begin{aligned}
a &= (-0,009\,53 \pm 0,000\,26) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^4} \\
b &= (0,0410 \pm 0,0015) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^3} \\
c &= (-0,760 \pm 0,028) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^2} \\
d &= (1,74 \pm 0,11) \frac{\text{mT}}{\text{mm}} \\
e &= (443,8 \pm 0,5) \text{mT} .
\end{aligned}$$

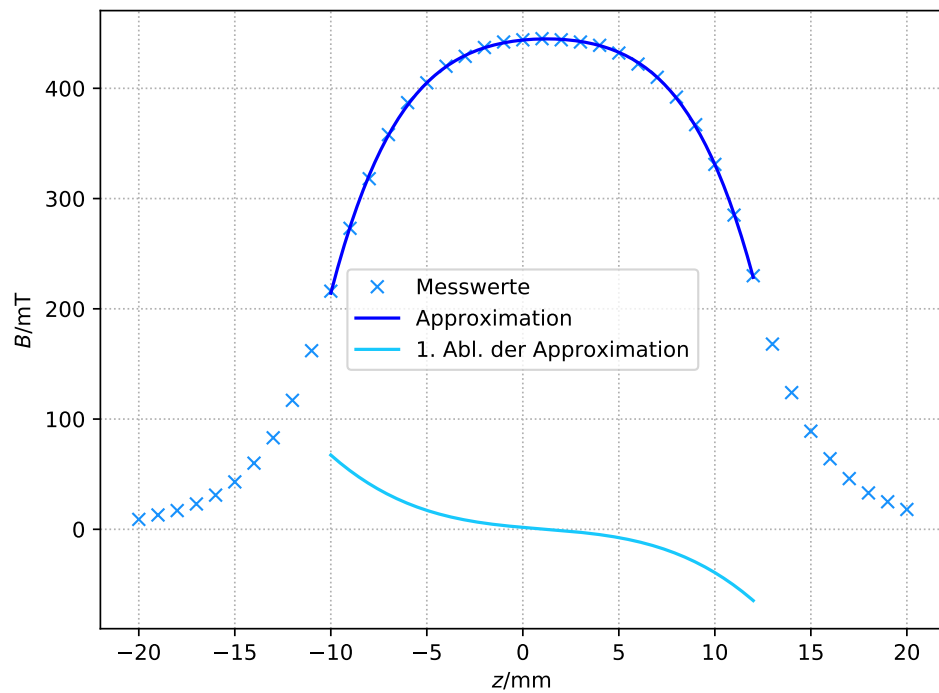
Um das Maximum der Fitkurve zu bestimmen wird die Nullstelle der ersten Ableitung

$$B'(z) = \frac{d}{dz}B(z) = 4a \cdot z^3 + 3b \cdot z^2 + 2c \cdot z + d \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

in Abbildung 8 graphisch als  $z_{\text{max}} = 1,25 \text{ mm}$  abgelesen und ihr die maximale magnetische Flussdichte

$$B_{\text{max}} = |B(z_{\text{max}})| = 444,84 \text{ mT}$$

zugeordnet.



**Abbildung 6:** Messwerte der magnetischen Feldstärke  $B(z)$  in Abhängigkeit des Ortes  $z$ , genähert um den Hochpunkt

**Tabelle 1:** Messwerte magnetischen Feldstärke  $B(z)$  in Abhängigkeit des Ortes  $z$

$z$ / mm	$B(z)$ / mT	$z$ / mm	$B(z)$ / mT
-20	9	1	445
-19	13	2	444
-18	17	3	442
-17	23	4	439
-16	31	5	432
-15	43	6	422
-14	60	7	410
-13	83	8	392
-12	117	9	367
-11	162	10	331
-10	216	11	285
-9	273	12	230
-8	318	13	168
-7	358	14	124
-6	387	15	89
-5	405	16	64
-4	420	17	46
-3	429	18	33
-2	437	19	25
-1	442	20	18
0	444		

### 3.2 Bestimmung der effektiven Masse von GaAs

Um die effektiven Massen der hochreinen und n-dotierten GaAs-Proben zu bestimmen, werden die in den Tabellen 2, 3 und 4 aufgelisteten Daten der Faradayrotation

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad (5)$$

mit den Probendicken  $d$  normiert. Diese betragen

$$\begin{aligned} d_{\text{hochrein}} &= 5,11 \text{ mm} \\ d_{N=2,8 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3} &= 1,296 \text{ mm} \\ d_{N=1,2 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3} &= 1,36 \text{ mm} . \end{aligned}$$

Die normierte Faradayrotationen  $\theta/d$  sind in Abbildung 9 gegen  $\lambda^2$  aufgetragen. Von den normierten Faradayrotationen der n-dotierten Proben werden die der hochreinen Probe abgezogen und die Differenzen in Abbildung 10 dargestellt und linear approximiert. Die Regressionsparameter für die Proben mit  $N = 2,8 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$  und  $1,2 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$  ergeben sich zu:

$$a_1 = (24,401 \pm 4,832) \text{ m}^{-3}$$

$$a_2 = (12,687 \pm 3,352) \text{ m}^{-3} .$$

Die Achsenabschnittsparameter werden zur Optimierung des Fits bei  $b_1 = b_2 = 0 \text{ m}^{-1}$  fixiert. Die effektiven Massen

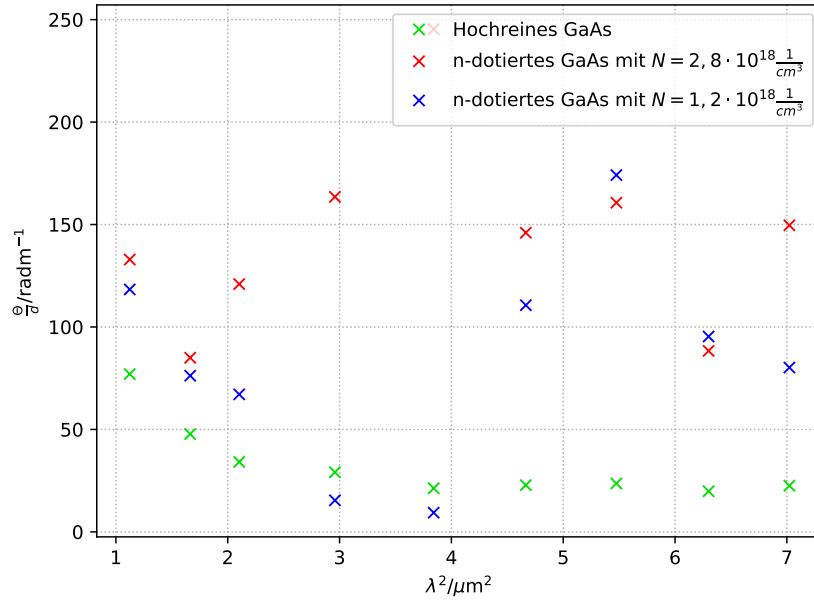
$$m^* = \sqrt{\frac{e_0^3}{8\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{NB_{\max}}{n} \frac{1}{a}} \quad (6)$$

ergeben sich nach Umstellung der Gleichung (10) mit einem Brechungsindex von  $n = 3,3543$  [4] (S.439) zu

$$m_{1,N=2,8 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3}^* = 0,063 \pm 0,006 \cdot m_e$$

$$m_{2,N=1,2 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3}^* = 0,057 \pm 0,008 \cdot m_e$$

relativ zur Elektronenmasse  $m_e = 9,109\,383\,701\,5 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .



**Abbildung 7:** Normierte Faradayrotationen  $\theta/d$  der drei Proben aufgetragen gegen  $\lambda^2$

**Tabelle 2:** Winkelmesswerte in Abhängigkeit der gefilterten Lichtwellenlänge  $\lambda$  der hochreinen GaAs-Probe

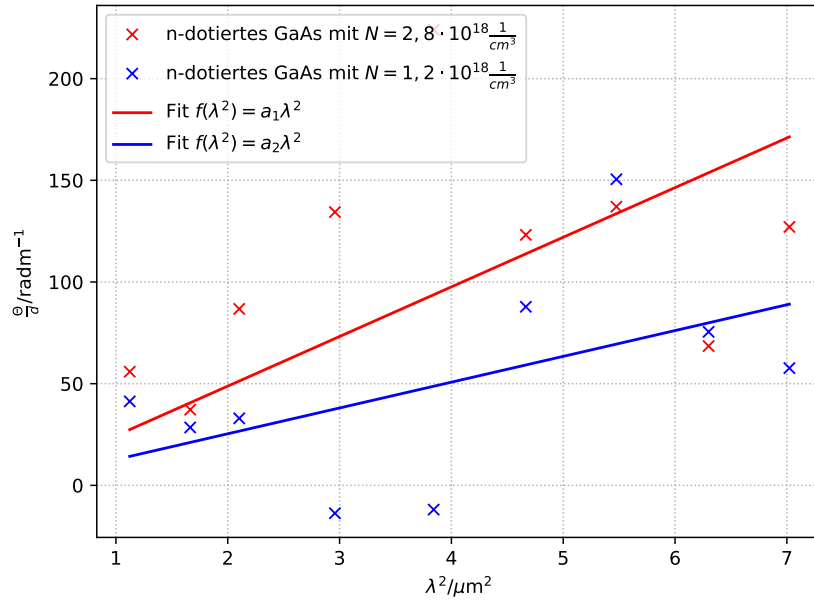
$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta / \text{rad}$	$\frac{\theta}{d} / \text{rad m}^{-1}$
1,06	149,27	171,82	0,3936	77,02
1,29	151,80	165,78	0,2440	47,75
1,45	156,07	166,07	0,1745	34,16
1,72	159,30	167,82	0,1487	29,10
1,96	166,07	172,30	0,1087	21,28
2,16	173,08	166,40	0,1166	22,82
2,34	191,35	198,27	0,1208	23,64
2,51	209,03	203,22	0,1014	19,84
2,65	174,88	181,48	0,1152	22,54

**Tabelle 3:** Winkelmesswerte in Abhängigkeit der gefilterten Lichtwellenlänge  $\lambda$  der n-dotierten GaAs-Probe mit  $N = 2,8 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta / \text{rad}$	$\frac{\theta}{d} / \text{rad m}^{-1}$
1,06	151,78	161,65	0,1723	132,92
1,29	152,92	159,23	0,1101	84,98
1,45	152,20	161,18	0,1567	120,93
1,72	154,03	166,17	0,2119	163,49
1,96	163,05	181,27	0,3180	245,37
2,16	168,43	179,27	0,1892	145,98
2,34	190,52	202,45	0,2082	160,66
2,51	200,42	206,98	0,1145	88,34
2,65	233,22	244,33	0,1939	149,62

**Tabelle 4:** Winkelmesswerte in Abhängigkeit der gefilterten Lichtwellenlänge  $\lambda$  der n-dotierten GaAs-Probe mit  $N = 1,2 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta / \text{rad}$	$\frac{\theta}{d} / \text{rad m}^{-1}$
1,06	249,85	259,07	0,1609	118,32
1,29	255,23	261,17	0,1037	76,23
1,45	253,35	258,58	0,0913	67,12
1,72	253,25	254,45	0,0209	15,40
1,96	242,30	243,03	0,0127	9,37
2,16	233,95	242,57	0,1504	110,62
2,34	198,28	211,85	0,2368	174,15
2,51	202,52	209,95	0,1297	95,35
2,65	174,98	181,23	0,1091	80,21



**Abbildung 8:** Lineare Approximationen der beiden Differenzen der normierten Faradayrotation  $\theta/a$  der hochreinen GaAs-Probe von denen der n-dotierten Proben, aufgetragen gegen  $\lambda^2$

## 4 Diskussion

Relative Fehler der Mesergebnisse werden im Folgenden gemäß der Formel

$$\Delta x = \left| \frac{x_{\text{mess}} - x_{\text{theo}}}{x_{\text{theo}}} \right| \quad (7)$$

bestimmt.

Von dem Theoriewert der effektiven Masse  $m^*_{\text{theo}} = 0,067m_e$  [3] (S.3465) weichen die experimentell bestimmten effektiven Massen um

$$\begin{aligned} \Delta m_1^* &= 5,57\% \\ \Delta m_2^* &= 14,26\% \end{aligned}$$

ab. Die geringen Abweichungen können aus möglichen Justagefehlern oder Messfehlern der Proben folgen. Insgesamt allerdings liegen beide Ergebnisse recht nah am Theoriewert.

## Literatur

- [1] Wikipedia contributors. *Galliumarsenid*. Online; accessed 07.07.2020. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Galliumarsenid>.

- [2] TU Dortmund. *V46 - Faraday-Effekt*. 2020.
- [3] P. Lawaetz. "*Valence-Band Parameters in Cubic Semiconductors*". In: *Phys. Rev. B* 4. Burlington: Academic Press, 1971. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3460>.
- [4] Edward D. Palik. "*Gallium Arsenide (GaAs)*". In: *Handbook of Optical Constants of Solids*. Burlington: Academic Press, 1997. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780125444156500182>.
- [5] W.Demtröder. *Experimentalphysik 3 - Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer-Verlag, 2014.