

Nr. 14

Tomographie mit Gamma-Strahlung

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 03.02.2021

Abgabe: 04.02.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	5
3	Auswertung	7
3.1	Untersuchung des Aluminiumgehäuses	7
3.2	Bestimmung des Materials eines homogenen Würfels	8
3.3	Bestimmung des Materials eines homogenen weiteren Würfels	8
3.4	Bestimmung der Materialien in einem zusammengesetzten Würfel	9
4	Diskussion	11
	Literatur	11

1 Theorie

Ziel des Versuches ist die Bestimmung der Materialien und Strukturen metallener Würfel. Dazu soll die Gammastrahlentomographie als bildgebendes Verfahren zur schichtweisen Darstellung der Proben angewandt werden und Erkenntnisse über die Licht-Materie-Wechselwirkung liefern.

Praktisch wird die Absorption der Strahlung für verschiedene Schnittgeometrien untersucht, indem die Intensität transmittierter Strahlung

$$I = I_0 \cdot \exp \left(- \sum_i \mu_i d_i \right) \quad (1)$$

gemessen wird. Diese hängt von den Dicken d_i und Absorptionskoeffizienten μ_i der i verschiedenen durchstrahlten Materialien ab. Schnittmessungen einer Substruktur aus verschiedenen Winkeln ergeben Projektionen die dann zu einer Zweidimensionalen Darstellung der gesamten Struktur zusammengesetzt werden können.

Als Strahlungsquelle wird in diesem Versuch ^{137}Cs verwendet. Das zugehörige Zerfallsschema mit dem Endprodukt ^{137}Ba ist in Abbildung 1 dargestellt. Wie daraus zu entnehmen ist, zerfällt ^{137}Cs über den β^- -Zerfall nur zu etwa 6,5 % in ^{137}Ba im Grundzustand und zu 93,5 % in ^{137}Ba im angeregten Zustand. Der Übergang des angeregten Zustandes in den Grundzustand erfolgt schließlich unter Emission von Gammaquanten der Energie von etwa 662 keV.

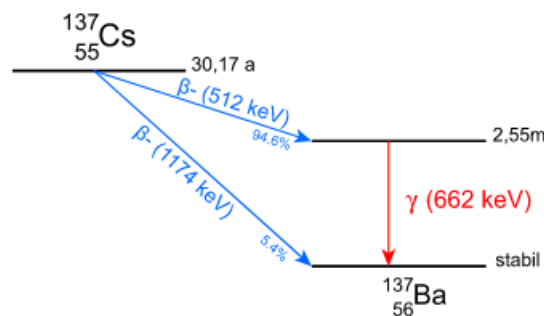


Abbildung 1: Zerfallsschema von ^{137}Cs [1].

Die emittierte Gammastrahlung kann über drei verschiedene Effekte mit Materie wechselwirken:

- Photoeffekt: Gammaquanten stoßen Hüllenelektronen aus deren Schalen durch Übertragung ihrer gesamten Energie E_γ , welche die Austrittsarbeit W_e der Elektronen übersteigt ($E_\gamma > W_e$).
- Compton-Effekt: Gammaquanten streuen inelastisch an Elektronen und übertragen nur einen Teil ihrer Energie.
- Paarbildung: Gammaquanten zerfallen in den Coulomb-Feldern der Atome in Elektron-Positron-Paare. Dadurch wird ein Teil der Photoenergie in Ruheenergie gewandelt, die mindestens $2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$ beträgt.

Abhängig von der Photonenenergie E_γ der Gammaquanten dominieren verschiedene dieser Effekte. Für kleine Energien mit $E_\gamma \leq 100$ keV dominiert der Photoeffekt und für mittlere Energien im Intervall $100 \text{ keV} \leq E_\gamma \leq 1 \text{ MeV}$ ist der Compton-Effekt ausschlaggebend. Für höhere Energien würde die Paarbildung dominieren, jedoch ist die Strahlung des ^{137}Cs dafür nicht energiereich genug.

In einem in Abbildung 2 dargestellten beispielhaften ^{137}Cs -Gammaspektrum kann man diese Effekte auch an ihren Charakteristika erkennen. So kann man gut das Comptonspektrum mit Rückstreupeak beobachten, welches durch die Comptonkante abgeschlossen wird und dadurch klar vom Photo- bzw. Full Energy Peak unterscheidbar ist. Dabei markiert die Comptonkante die maximale Energieabgabe der Gammaquanten durch Streueffekte an den Elektronen. Am Photopeak wird die gesamte Energie der Gammaquanten vom Material absorbiert.

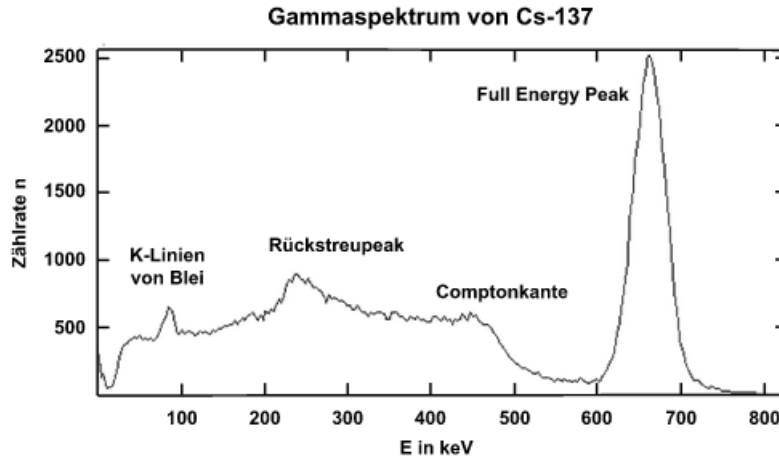


Abbildung 2: Gammaspektrum von ^{137}Cs [1].

Für die Bestimmung der Absorptionkoeffizienten kann über eine Umformung der Gleichung (1) die Matrixschreibweise erzielt werden

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \sum_i \mu_i d_i \quad \rightarrow \quad A \cdot \vec{\mu} = \vec{I} . \quad (2)$$

Dabei setzt sich $\vec{\mu}$ aus allen Absorptionskoeffizienten der in der Probe vorliegenden Materialien zusammen und \vec{I} aus allen Anfangs- und abgeschwächten Intensitäten. Die $n \times m$ -Matrix A berücksichtigt die Schichtdicken der verschiedenen Schnittgeometrien. Zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate wird eine Gewichtung

$$W \cdot A \cdot \vec{\mu} = W \cdot \vec{I} , \quad W = \text{Var}[\vec{I}]^{-1} \quad (3)$$

angewandt, wobei die Gewichtungsmatrix W aus der Inversen der Kovarianzmatrix $\text{Var}[\vec{I}]$ gebildet wird. Schließlich ergeben sich $\vec{\mu}$ und dessen Unsicherheit $\text{Var}[\vec{\mu}]$ zu

$$\vec{\mu} = (A^T \cdot W \cdot A)^{-1} A^T \cdot W \cdot \vec{I} , \quad \text{Var}[\vec{\mu}] = (A^T \cdot W \cdot A)^{-1} . \quad (4)$$

2 Durchführung

Es wird der in Abbildung 3 dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Zusätzlich ist dieser durch einen Aufbau aus Bleiblöcken abgeschirmt. Ein weiterer Bleiblock mit Bohrung dient als Halterung und Fokussierung der ^{137}Cs -Strahlenquelle.

Es wird ein Szintillationsdetektor verwendet. In diesem befindet sich ein Szintillationsmaterial, welches durch die einfallende Gammastrahlung angeregt wird und Licht in Form von Fluoreszenz emittiert. Dieses Fluoreszenzlicht hat eine geeignete Wellenlänge, um über den Photoeffekt Elektronen aus der Messelektrode zu lösen.

Im Photomultiplier lösen sie Elektronenkaskaden aus, welche proportional zur Eingangsenergie gemessen werden können. Das Signal muss eine Diskriminatorschwelle übersteigen, durch welche der unerwünschte Hintergrund kosmischer- und Umgebungsstrahlung oder des thermischen Dunkelstroms herausgefiltert wird. Schließlich histogrammiert der Multichannelanalyzer das Signal nach seiner Stärke und ordnet es in Kanäle ein.

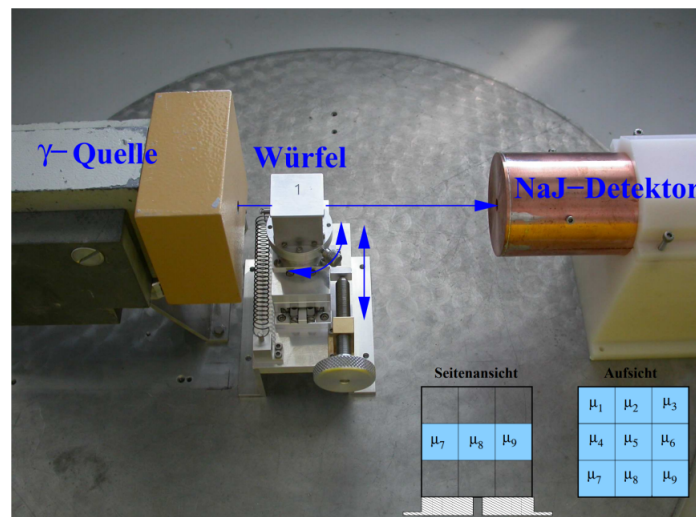


Abbildung 3: Versuchsaufbau der Messung [3].

Zwischen Strahlenquelle und Detektor kann über eine Justiervorrichtung die Probe in den Strahlengang geschraubt und ausgerichtet werden. Es liegen verschiedene $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ -Würfelproben vor. Würfel 1 besteht nur aus dem Aluminiumgehäuse, das für alle Würfelproben außen vorliegt. Würfel 2 und 3 bestehen aus einem Metall und Würfel 4 und 5 bestehen aus 27 $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ -Würfeln aus je zwei verschiedenen Metallen. Die Metallauswahl besteht aus Aluminium, Blei, Eisen, Messing und Delrin.

Der Versuch startet mit einer Nullmessung der Intensität I_0 . Danach werden die abgeschwächten Intensitäten I_i der mittleren Schichten der Würfel 1, 2, 3, und 4 oder 5 aus verschiedenen Winkeln in der in Abbildung 4 dargestellten Schnittgeometrie gemessen.

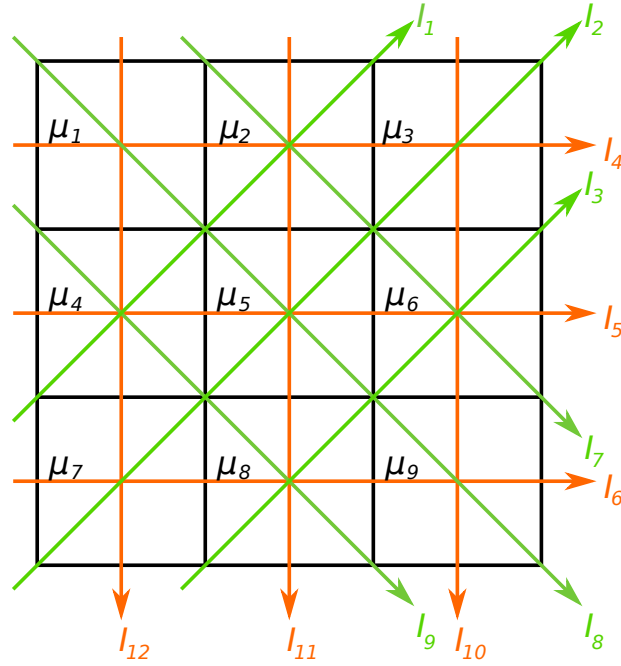


Abbildung 4: Die verschiedenen Schnittgeometrien der Tomographie.

Diese lassen sich zusammenstellen zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

3 Auswertung

Als erster Schritt wird die am Szintillationsdetektor ankommende Strahlung ohne ein Objekt im Strahlengang gemessen.

Zu sehen ist das nach Abbildung 4 erwartete Spektrum. Dieses lässt sich in zwei charakteristische Bereiche teilen: Das Compton-Kontinuum und der Photopeak. Im Compton Kontinuum lässt sich schwach ein Peak feststellen, der von der Rückstrahlung stammt. Die Compton-Kante ist klar zu sehen und tritt bei Energien von etwa 480 keV auf.

Es wurde hier und in allen folgenden Versuchsteilen eine Zeit von $\Delta t = 300$ s gemessen. Die Counts ergeben sich dabei zu

$$C = 6743 \pm 82.$$

Mit diesen Messwerten ergibt sich die Eingangsintensität gemäß

$$I_0 = \frac{C}{\Delta t} = (22,48 \pm 0,27) \frac{1}{s}. \quad (6)$$

Der Fehler berechnet sich dabei nach

$$\sigma_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_C}{C}\right)^2} I_0.$$

3.1 Untersuchung des Aluminiumgehäuses

Die zu untersuchenden Proben sind von einem Aluminiumgehäuse umgeben, welches unerwünschte Absorptionen verursacht. Um diese erkennen zu können, wird ein Würfel bestehend aus dem Aluminiumgehäuse untersucht. Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Messwerte für das Aluminiumgehäuse.

Counts C	Δt / s	Projektionstyp / 1/s
6665 ± 82	300	$I_{0,5}$
6503 ± 81	300	$I_{0,2}$
6375 ± 80	300	$I_{0,8}$

Diese können als Nullmessung des jeweiligen Projektionstyps angenommen werden. Gemäß Gleichung (6) und deren Fehler, ergeben sich die Zählraten zu:

$$\begin{aligned} I_{0,5} &= (22,2 \pm 0,3) \frac{1}{s}, \\ I_{0,2} &= (21,7 \pm 0,3) \frac{1}{s}, \\ I_{0,8} &= (21,3 \pm 0,3) \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

3.2 Bestimmung des Materials eines homogenen Würfels

Die untersuchten Projektionen sind gemäß Abbildung 4 I_5 , I_6 , I_7 und I_8 . Die gemessenen Werte sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Messwerte für den Würfel zwei.

Counts C	Δt / s	Projektionstyp	Zählrate / 1/s
1063 ± 33	300	I_5	$3,5 \pm 0,1$
1090 ± 33	300	I_6	$3,6 \pm 0,1$
1547 ± 39	300	I_7	$5,2 \pm 0,1$
674 ± 26	300	I_8	$2,3 \pm 0,1$

Aus diesen Werten ergeben sich der Absorptionskoeffizienten gemäß

$$\mu_i = \frac{1}{l_i} \ln \left(\frac{I_{0,j}}{I_i} \right)$$

Dabei bezeichnet l_i die zurückgelegte Strecke der Gammastrahlung durch den Würfel und $I_{0,j}$ die entsprechende Zählrate. Dieser Zusammenhang führt zu den Werten in Tabelle 3.

Tabelle 3: Berechnete Werte der Absorptionskoeffizienten für Würfel zwei.

Projektion	μ / 1/cm
5	$0,612 \pm 0,011$
6	$0,604 \pm 0,011$
7	$0,508 \pm 0,010$
8	$0,534 \pm 0,010$

Dabei ergibt sich der Fehler mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\mu_i = \sqrt{\left(-\frac{\Delta I_i}{l_i I_i} \right)^2 \left(\frac{\Delta C_{0,j}}{l_j C_{0,j}} \right)^2}.$$

Durch Bildung des Mittelwertes ergibt sich der Absorptionskoeffizient zu

$$\bar{\mu}_2 = (0,564 \pm 0,044) \frac{1}{\text{cm}}.$$

Bei einem Vergleich mit den Literaturwerten ergibt sich, dass der Würfel mit einer Abweichung von 0,9 % aus Eisen zu bestehen scheint.

3.3 Bestimmung des Materials eines homogenen weiteren Würfels

Die untersuchten Projektionen sind erneut I_5 , I_6 , I_7 und I_8 . Die gemessenen Werte sind in Tabelle 4 aufgeführt.

Tabelle 4: Messwerte für den Würfel drei.

Counts C	Δt / s	Projektionstyp	Zählrate / 1/s
4849 ± 70	300	I_5	$16,16 \pm 0,20$
4860 ± 70	300	I_6	$16,20 \pm 0,20$
4738 ± 69	300	I_7	$15,79 \pm 0,20$
4338 ± 66	300	I_8	$14,46 \pm 0,20$

Aus diesen Werten ergeben sich erneut die Absorptionskoeffizienten in Tabelle 5.

Tabelle 5: Berechnete Werte der Absorptionskoeffizienten für Würfel drei.

Projektion	μ / 1/cm
5	$0,106 \pm 0,006$
6	$0,105 \pm 0,006$
7	$0,112 \pm 0,007$
8	$0,095 \pm 0,005$

Durch Bildung des Mittelwertes ergibt sich der Absorptionskoeffizient zu

$$\bar{\mu}_3 = (0,105 \pm 0,006) \frac{1}{\text{cm}}.$$

Bei einem Vergleich mit den Literaturwerten ergibt sich, dass der Würfel mit einer Abweichung von 9,5 % aus CH20 zu bestehen scheint.

3.4 Bestimmung der Materialien in einem zusammengesetzten Würfel

Der vierte Würfel ist aus unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt. Die Messwerte und die Zählraten für die Projektionen sind in Tabelle 6 aufgeführt.

Tabelle 6: Messwerte für den Würfel vier.

Counts C	Δt / s	Projektion	Zählrate / 1/s
3949 ± 63	300	1	$13,16 \pm 0,20$
1653 ± 41	300	2	$5,51 \pm 0,10$
3641 ± 60	300	3	$12,14 \pm 0,20$
2835 ± 53	300	4	$9,45 \pm 0,20$
2799 ± 53	300	5	$9,33 \pm 0,20$
2735 ± 53	300	6	$9,12 \pm 0,20$
3505 ± 59	300	7	$11,68 \pm 0,20$
791 ± 28	300	8	$2,64 \pm 0,10$
2190 ± 47	300	9	$7,30 \pm 0,20$
1493 ± 39	300	10	$4,98 \pm 0,10$
1554 ± 39	300	11	$5,18 \pm 0,10$
1678 ± 41	300	12	$5,59 \pm 0,10$

Dann ergibt sich der Vektor der Absorptionskoeffizienten nach Gleichung (4) zu

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,514 \pm 0,015 \\ 0,178 \pm 0,010 \\ 0,381 \pm 0,015 \\ 0,337 \pm 0,010 \\ 0,482 \pm 0,013 \\ 0,199 \pm 0,010 \\ 0,174 \pm 0,015 \\ 0,373 \pm 0,010 \\ 0,562 \pm 0,016 \end{pmatrix} 1 \frac{1}{\text{cm}}$$

Der Fehler berechnet sich dabei für $\tilde{A} = (A^T \cdot A)^{-1} A^T$ wie folgt:

$$\sigma_{\mu,i} = \left(\sqrt{\frac{\tilde{A}^2 \sigma_C^2}{C^2} + \frac{\tilde{A}^2 \sigma_I^2}{I_0^2}} \right).$$

Zum Vergleich werden Literaturwerte benötigt, die sich in Tabelle 7 finden lassen.

Tabelle 7: Absorptionskoeffizienten μ in verschiedenen Materialien [2].

Material	μ
Al	0,201
Pb	1,175
Fe	0,569
Messing	0,605
CH20	0,116

Damit können die Materialien der einzelnen Würfel in Tabelle 8 bestimmt werden.

Tabelle 8: Identifizierung der Materialien.

Würfel	Material	Prozentuale Abweichung
1	Fe	1,1
2	Al	11,4
3	Fe	33
4	Al	67,7
5	Fe	15,5
6	Al	5,5
7	Al	13,4
8	Fe	34,5
9	Fe	1,2

4 Diskussion

Die gemessenen Zählraten für die Nullmessung mit einem Aluminiummantel ergeben sich zu

$$\begin{aligned}I_{0,5} &= (22,2 \pm 0,3) \frac{1}{\text{s}}, \\I_{0,2} &= (21,7 \pm 0,3) \frac{1}{\text{s}}, \\I_{0,8} &= (21,3 \pm 0,3) \frac{1}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Es ist ein sehr kleiner Unterschied zwischen den Nullmessungen zu erkennen. Es sind kleine Unterschiede zu erwarten. Vor allem die Werte für $I_{0,2}$ und $I_{0,8}$ liegen sehr nahe beieinander, was zu erwarten ist, weil beide die Diagonalen der Würfel kennzeichnen. Die Nullmessung scheint demnach gut funktioniert zu haben.

Für den Absorptionskoeffizient des ersten homogenen Würfels ergibt sich unter Verwendung der Werte der Nullmessung

$$\bar{\mu}_2 = (0,564 \pm 0,044) \frac{1}{\text{cm}}.$$

Der Würfel wird mit einer Abweichung von 0,9 % Eisen zugeordnet.

Für den Absorptionskoeffizient des zweiten homogenen Würfels ergibt sich unter Verwendung der Werte der Nullmessung

$$\bar{\mu}_3 = (0,105 \pm 0,006) \frac{1}{\text{cm}}.$$

Der Würfel wird mit einer Abweichung von 9,5 % CH20 zugeordnet.

Im letzten Versuchsteil wird ein Würfel untersucht, der aus verschiedenen Materialien zusammengesetzt ist. Die Zuordnung dieser Materialien findet sich in Tabelle 8. Es kann allerdings keine Aussage darüber getroffen werden, ob diese Zuordnungen tatsächlich stimmen. Teilweise gibt es große Abweichungen, die durch verschiedene Faktoren erklärt werden können. Zum einen hat der Strahl eine endliche Ausdehnung, wodurch bei einem diagonalen Durchgang nicht verhindert werden kann, dass der Strahl auch falsche Elementarwürfel durchläuft. Außerdem kann es zu Ungenauigkeiten der Justierung kommen, oder es können sich Messungenauigkeiten in der Messung der Zeitintervalle finden.

Literatur

- [1] URL: <https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-fortfuehrung/versuche/gammaspektrum-von-cs-137>.
- [2] URL: <https://physics.net.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>.
- [3] TU Dortmund. *Versuch V14: Tomographie mit Gamma-Strahlung*.