

Nr. 351

Fourier-Analyse und Synthese

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 15.01.2019

Abgabe: 22.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	4
2.1	Fourier-Analyse	4
2.2	Fourier-Synthese	4
3	Auswertung	5
3.1	Vorbereitung	5
3.2	Fourieranalyse	6
3.3	Fourier-Synthese	11
4	Diskussion	15
5	Literaturverzeichnis	16

1 Theorie

Nach dem Fourier-Theorem lassen sich zeitlich (oder räumlich) periodische Vorgänge mit der Periodendauer T , für die

$$f(t + T) = f(t) \quad (1)$$

gilt, durch Superposition von Sinus- und Kosinusfunktionen verschiedener Frequenzen und Amplituden genähert werden. Dafür konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right) \quad (2)$$

gegen die periodische Funktion $f(t)$.

Die sogenannten Fourierkoeffizienten a_k und b_k sind die Amplituden der einzelnen Sinus- und Kosinusfunktionen und werden durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad (4)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ bestimmt.

Diese Ermittlung der Fourierkoeffizienten a_k und b_k wird als Fourieranalyse bezeichnet. Dabei verschwinden für gerade Funktionen mit $f(-t) = f(t)$ die Koeffizienten b_k mit den ungeraden Sinusfunktionen und für ungerade Funktionen mit $f(-t) = -f(t)$ die Koeffizienten a_k mit geraden Kosinusfunktionen.

Das Frequenzspektrum der fourieranalytierten Funktion entsteht durch auftragen der Koeffizienten als Funktionen der Frequenzen. Da die Fourierentwicklung aus einer Summe über ganzzahlige k besteht, resultiert aus ihr für periodische Funktionen ein Linienspektrum, dessen Linien gegen Null streben, da die Reihe konvergieren muss. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 zu sehen.

Konvergiert sie nicht, so liegt das an der Unstetigkeit der zu entwickelnden Funktion. Es tritt eine Abweichung an der Stelle der Unstetigkeit auf, welches als Gibbsches Phänomen bezeichnet wird.

Die Fourierentwicklung (2) enthält neben der Grundfrequenz $\nu_0 = \frac{2\pi}{T}$ deren ganzzahlige Vielfache - die Oberschwingungen. Außerdem können die Phasen nur 0 , $\frac{\pi}{2}$, π oder $\frac{3\pi}{2}$ betragen.

Nichtperiodische zeitabhängige Funktionen können fouriertransformiert werden, um ihr gesamtes Frequenzspektrum bestimmen zu können. Die Transformation

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt \quad (5)$$

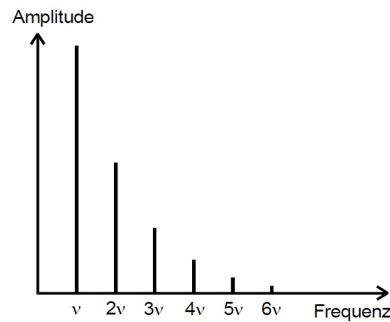


Abbildung 1: Beispiel für ein Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit der Grundfrequenz

gibt dabei das Frequenzspektrum $g(\nu)$ wieder, welches durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \quad (6)$$

zurücktransformiert wird. Im Gegensatz zur Fourierentwicklung periodischer Funktionen, resultieren hieraus in der Praxis keine perfekten δ -Funktionen, sondern Peaks endlicher Breite, da die Integration über ein unendliches Intervall nicht realisierbar ist.

2 Durchführung

2.1 Fourier-Analyse

Bei diesem Versuchsteil werden ein Rechteck-, ein Dreieck- und ein Sägezahnsignal in ihre Fourierkomponenten zerlegt. Dazu wird ein Oszilloskop mit entsprechenden Signalen, die in einem Funktionsgenerator erzeugt werden, gespeist, siehe Abbildung 2. Die Fourier-Transformation wird dabei durch das Oszilloskop durchgeführt und ausgegeben. Zu beachten ist, dass genug Perioden angezeigt werden, so dass auch genügend Peaks in dem Linienspektrum zu sehen sind. Von den angezeigten Peaks werden sowohl die Frequenz als auch die Amplitude notiert. Wie in der Theorie erwähnt bilden sich auch Nebenmaxima aus, die hier nicht beachtet werden.

2.2 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese werden Rechtecks-, Dreiecks- und Sägezahnsignal aus ihren Fourierkomponenten zusammengesetzt. Zunächst werden immer zwei Ausgänge eines Oberwellengenerators an das Oszilloskop angeschlossen. Dieser Generator liefert die Oberwellen - von der ersten bis zur n-ten. Diese sind die Fourierkomponenten. Damit alle Ausgänge des Generators in Phase geschaltet sind, wird das Oszilloskop zunächst in X-Y-Betrieb geschaltet. Um eine optimale Genauigkeit zu erreichen, werden die Amplituden der einzelnen Oberwellen maximal eingestellt. Auf dem Bildschirm erscheint eine Lissajous-Figur, die in sich geschlossen oder zu einer Linie mit zwei Enden entartet sein

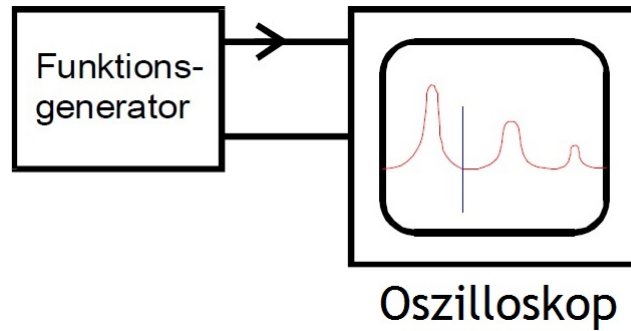


Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Messapparatur für die Fourier-Analyse [1].
Originalfoto bearbeitet.

kann. Anhand dieser Figur wird die Phase zwischen den beiden Schwingungen bestimmt. Ist die Figur bei ungeradem n eine Linie, so muss die Phasenverschiebung ϕ durch 0 oder π gegeben sein. Bei geraden n und Sinusfunktion wird die gleiche Phase identifiziert, wenn die Figur eine geschlossene, zur x-Achse symmetrische Kurve, ist. Es gibt oft Fälle, bei denen aus der Gestalt der Lissajous-Figur nicht auf die Phasenverschiebung geschlossen werden kann. Ist dies der Fall, wird durch Umschalten des 180°-Phasenschalters während der einzelnen Syntheseschritte die richtige Phaseneinstellung ermittelt. Außerdem werden die einzelnen Komponenten gemäß den Beträgen der Fourier-Koeffizienten eingestellt. Schließlich wird an dem Summenausgang ein Oszilloskop angeschlossen und durch sukzessives Zuschalten der einzelnen Komponenten die Überlagerungsfigur auf dem Bildschirm beobachtet.

3 Auswertung

3.1 Vorbereitung

Für die Auswertung der beiden Versuchsteile, ist es nötig, die Fourierkoeffizienten der verschiedenen Spannungsfunktionen (Sägezahn, Rechteck und Dreieck) erst theoretisch zu berechnen, um diese dann mit den experimentell bestimmten vergleichen zu können. Dazu werden die Funktionsparametrisierungen möglichst so gewählt, dass sie gerade oder ungerade sind und somit jeweils b_k oder a_k für alle k verschwinden.

Für die Sägezahnspannung ergeben sich die Fourierkoeffizienten

$$a_k = 0$$

$$b_k = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$$

und nach (2) die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \right) \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right),$$

deren Graph in Abbildung 6 zu sehen ist.

Für die Rechtecksspannung ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{T} \left(\frac{T}{\pi k} - \frac{T}{\pi k} \cdot (-1)^k \right) \end{aligned}$$

und nach (2) die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{\pi k} - \frac{2}{\pi k} \cdot (-1)^k \right) \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right),$$

die in Abbildung 8 abgebildet ist.

Zuletzt ergeben sich für die Dreiecksspannung die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \left(\frac{T}{\pi^2 k^2} \cdot (-1)^k - \frac{T}{\pi^2 k^2} \right) \\ b_k &= 0 \end{aligned}$$

und nach (2) die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{4}{\pi^2 k^2} \cdot (-1)^k - \frac{4}{\pi^2 k^2} \right) \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right),$$

die in Abbildung 10 sichtbar ist.

3.2 Fourieranalyse

Im ersten Versuchsteil soll der Abfall der Fourierkoeffizienten a_k und b_k periodischer Sägezahn, Rechtecks- und Dreiecksspannungen untersucht werden. Dazu werden die Ordnung k und die Spannungsamplitude U gegeneinander logarithmiert aufgetragen und eine lineare Regression der Form

$$\ln \left(U \cdot \frac{1}{V} \right) = a \cdot \ln(k) + b \quad (7)$$

durchgeführt. Dabei wird die Spannung U durch ihre Einheit geteilt, da der Logarithmus nur für dimensionslose Größen definiert ist. Zudem ergibt sich umgeformt:

$$U = e^b \cdot k^a \cdot V. \quad (8)$$

Da nun U proportional zu den Fourierkoeffizienten ist, lässt sich die Stärke deren Abfalls ermitteln. Die Messdaten der Sägezahnspannung sind dazu in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Messdaten und deren Logarithmen der Sägezahnspannung.

k	$\ln(k)$	U/V	$\ln(U \cdot \frac{1}{V})$
1	0,000	2,040	0,713
2	0,693	1,100	0,095
3	1,099	0,740	-0,301
4	1,386	0,488	-0,717
5	1,609	0,440	-0,821
6	1,792	0,352	-1,044
7	1,946	0,296	-1,217
8	2,079	0,280	-1,273
9	2,197	0,216	-1,532

Diese werden außerdem in Abbildung 3 gegeneinander aufgetragen.

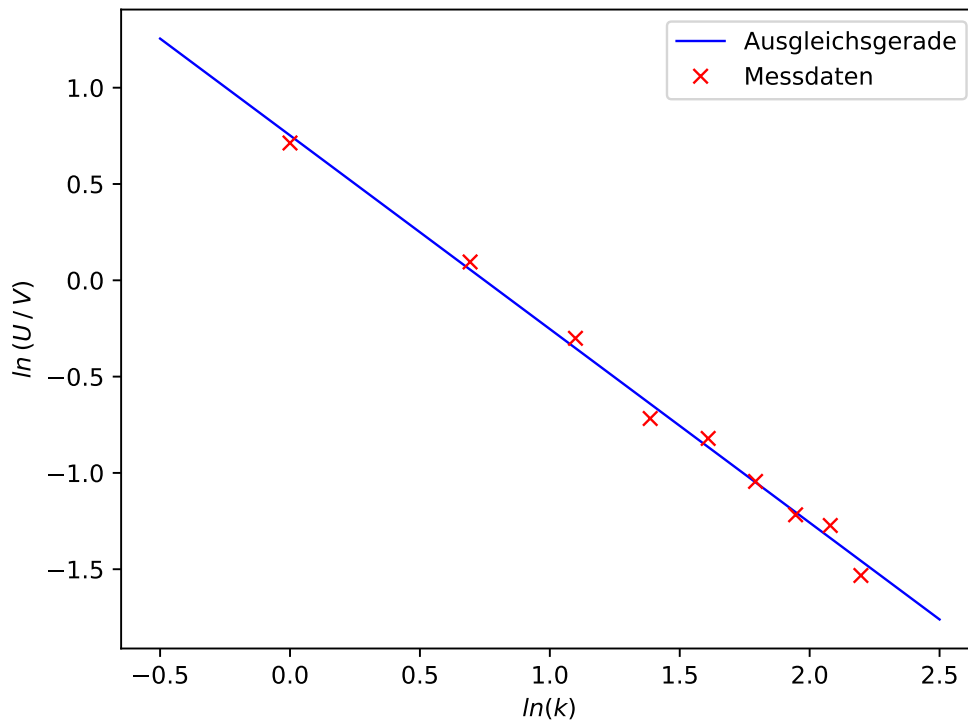


Abbildung 3: Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Sägezahnspannung.

Die Lineare Regression, die mittels python durchgeführt wird, ergibt die Tangentenparameter:

$$\begin{aligned}a_S &= -1,0052 \pm 0,0286, \\ b_S &= 0,7523 \pm 0,0451.\end{aligned}$$

Somit liegt die Abweichung zwischen a_S und $a_{S,\text{theo}} = -1$ bei 0,52 % und nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Sägezahnspannung in etwa proportional zu $\frac{1}{k}$ abfallen, wie bereits vorbereitend berechnet.

Für die Rechtecksspannung sind die Messdaten in Tabelle 2 aufgelistet.

Tabelle 2: Messdaten und deren Logarithmen der Rechtecksspannung.

k	$\ln(k)$	U / V	$\ln(U \cdot \frac{1}{V})$
1	0,000	4,000	1,389
3	1,099	1,440	0,365
5	1,609	0,860	-0,151
7	1,946	0,580	-0,545
9	2,197	0,420	-0,868
11	2,398	0,384	-0,957
13	2,565	0,344	-1,067
15	2,708	0,280	-1,273
17	2,833	0,224	-1,496
19	2,944	0,216	-1,532

Diese werden in Abbildung 4 gegeneinander aufgetragen.

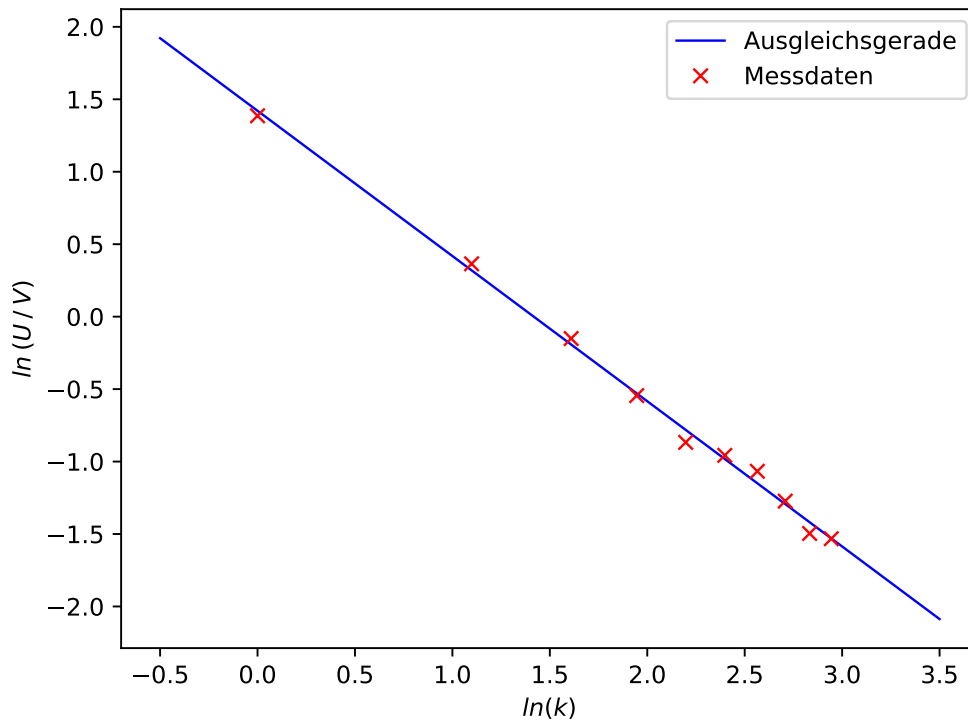


Abbildung 4: Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Rechtecksspannung.

Es ergeben sich die Regressionsparameter:

$$a_R = -1,0021 \pm 0,0209,$$

$$b_R = 1,4205 \pm 0,0462.$$

Somit liegt die Abweichung zwischen a_R und $a_{R,theo} = -1$ bei 0,21 % und nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Rechtecksspannung in etwa proportional zu $\frac{1}{k}$ abfallen, wie bereits prognostiziert.

Für die Dreiecksspannung sind die Messdaten in Tabelle 3 aufgelistet.

Tabelle 3: Messdaten und deren Logarithmen der Dreiecksspannung.

k	$\ln(k)$	U/V	$\ln(U \cdot \frac{1}{V})$
1	0,000	2,560	0,940
3	1,099	0,312	-1,165
5	1,609	0,112	-2,189
7	1,946	0,056	-2,882
9	2,197	0,036	-3,324
11	2,398	0,023	-3,772
13	2,565	0,017	-4,075

Diese sind in Abbildung 5 gegeneinander aufgetragen.

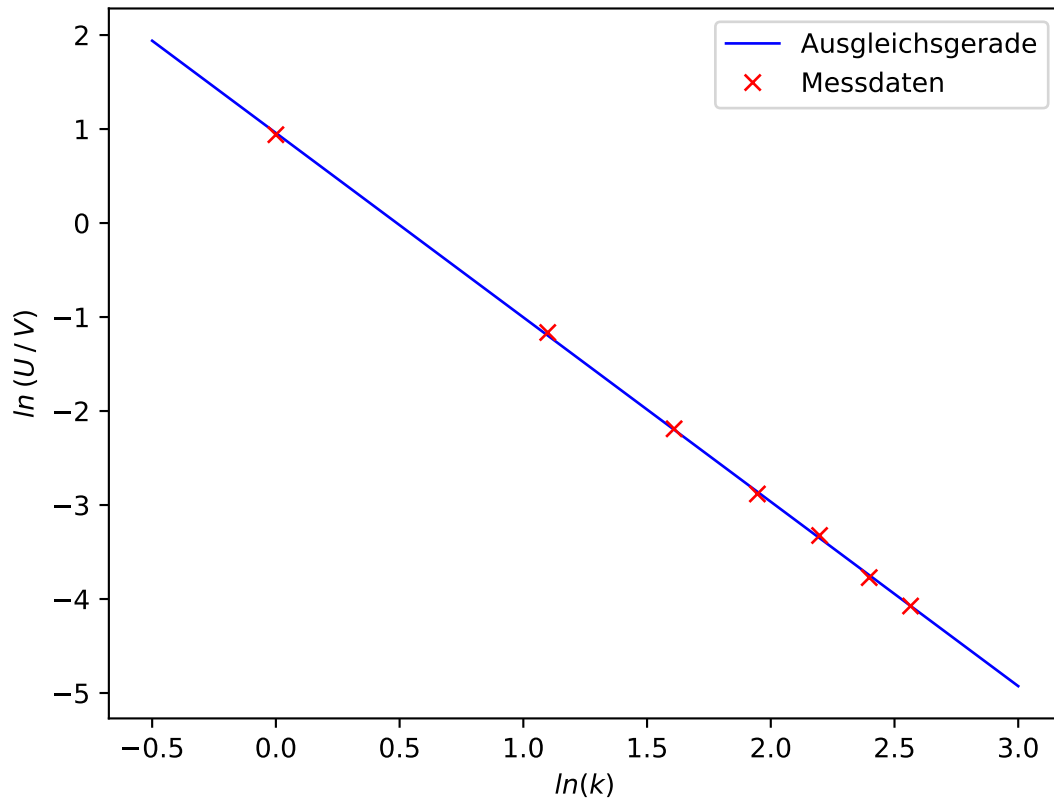


Abbildung 5: Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Dreiecksspannung.

Es ergeben sich die Regressionsparameter:

$$a_D = -1,9681 \pm 0,0121,$$

$$b_D = 0,9585 \pm 0,0227.$$

Somit liegt die Abweichung zwischen a_R und $a_{R,theo} = -2$ bei 1,60 % und Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Dreiecksspannung in etwa proportional zu $\frac{1}{k^2}$ abfallen, wie bereits in der in der Vorbereitung berechnet.

3.3 Fourier-Synthese

Im zweiten Versuchsteil wird gezeigt, dass sich die verschiedenen Spannungsfunktionen durch Superpositionen verschiedener Oberwellen, bzw Fourierkoeffizienten synthetisieren lassen. Als Grundlage dessen dienen theoretische Vorberechnungen der jeweiligen Fourier-Reihen, nach Formel (2), und der in diese eingesetzten Fourierkoeffizienten a_k und b_k . Für die ungerade Sägezahnspannung sind die Fourierkoeffizienten:

$$a_k = 0$$

$$b_k = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$$

Diese ergeben in Formel (2) eingesetzt die Fourier-Reihe der Sägezahnspannung, die in Abbildung 6 dargestellt ist.

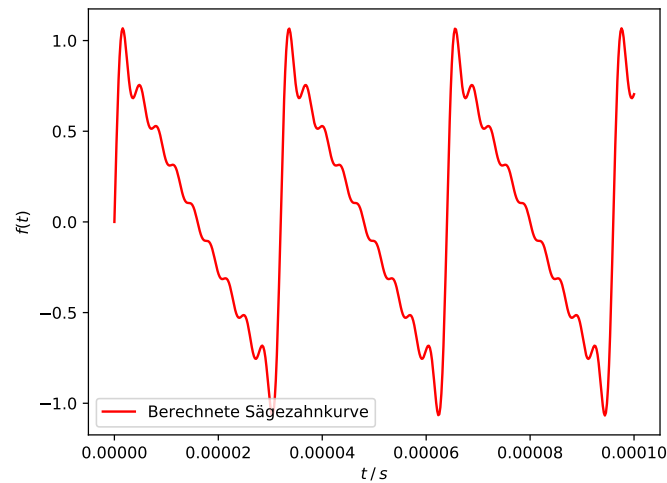


Abbildung 6: Theoretische Sägezahnfunktion.

Experimentell werden die Fourierkoeffizienten bzw. Oberwellenamplituden möglichst mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{k}$ abfallend eingestellt, wie in Tabelle 4 dargestellt.

Dabei bezeichnen U_{theo} die theoretisch einzustellenden und U die tatsächlich eingestellten Spannungamplituden. ΔU bezeichnet die Abweichung der beiden Werte voneinander.

Tabelle 4: Einstellungen der Oberwellenamplituden für eine Sägezahnspannung.

k	U / V	$U_{\text{theo}} / \text{V}$	$\Delta U / \%$
1	0,633	0,633	0,00
2	0,316	0,317	0,32
3	0,211	0,211	0,00
4	0,157	0,158	0,63
5	0,126	0,127	0,79
6	0,106	0,106	0,00
7	0,089	0,090	1,11
8	0,078	0,079	1,27
9	0,070	0,070	0,00
10	0,063	0,063	0,00

Daraus ergibt sich die Sägezahnspannung, welche in Abbildung 7 dargestellt ist.

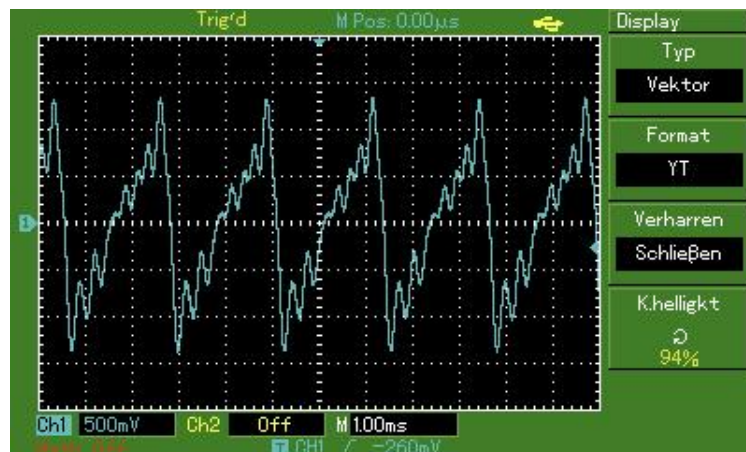


Abbildung 7: Experimentell synthetisierte Sägezahnspannung.

Für die ungerade Rechtecksspannung lauten die Fourierkoeffizienten:

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k}, & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese ergeben in Formel (2) eingesetzt die Fourier-Reihe der Rechtecksspannung, die in Abbildung 8 dargestellt ist.

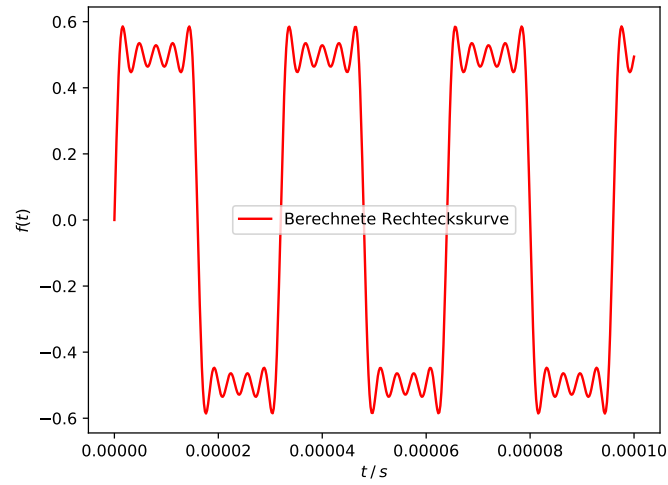


Abbildung 8: Theoretische Rechtecksfunktion.

Die Fourierkoeffizienten der Rechtecksspannung werden analog zu denen der Sägezahnspannung eingestellt, wie in Tabelle 5 dargestellt.

Tabelle 5: Einstellungen der Oberwellenamplituden für eine Rechtecksspannung.

k	U / V	$U_{\text{theo}} / \text{V}$	$\Delta U / \%$
1	0,633	0,633	0,00
2	0,000	0,000	0,00
3	0,211	0,211	0,00
4	0,000	0,000	0,00
5	0,126	0,127	0,79
6	0,000	0,000	0,00
7	0,089	0,090	1,11
8	0,000	0,000	0,00
9	0,070	0,070	0,00
10	0,000	0,000	0,00

Daraus ergibt sich die Rechtecksspannung, welche in Abbildung 9 dargestellt ist.

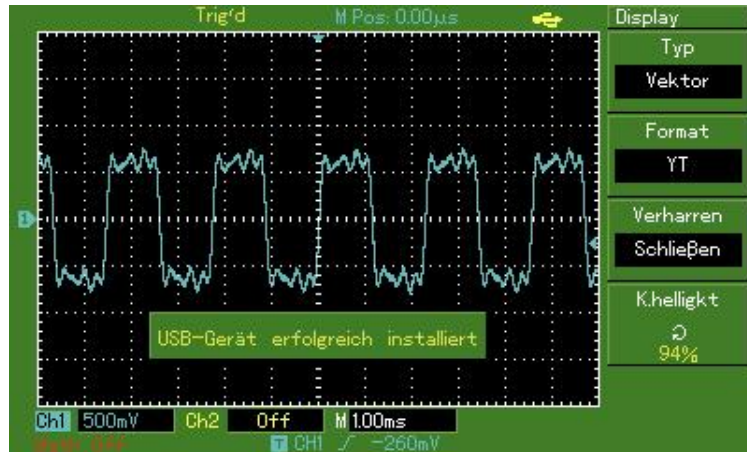


Abbildung 9: Experimentell synthetisierte Rechtecksspannung.

Für die gerade Dreiecksspannung lauten die Fourierkoeffizienten:

$$a_k = 0 \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi^2 k^2}, & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

Diese ergeben in Formel (2) eingesetzt die Fourier-Reihe der Dreiecksspannung, die in Abbildung 10 dargestellt ist.

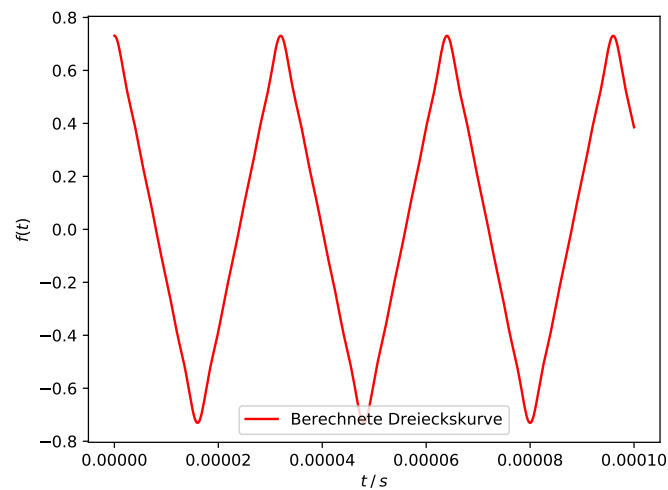


Abbildung 10: Theoretische Dreiecksfunktion.

Die Fourierkoeffizienten der Dreiecksspannungen werden im Gegensatz zu denen der

vorherigen mit einem Abfall proportional zu $\frac{1}{k^2}$ eingestellt, wie in Tabelle 6 dargestellt. Die abgebildeten Größen ergeben sich analog zu den Tabellen der anderen beiden Spannungen.

Tabelle 6: Einstellungen der Oberwellenamplituden für eine Dreiecksspannung.

k	U / V	$U_{\text{theo}} / \text{V}$	$\Delta U / \%$
1	0,617	0,617	0,00
2	0,000	0,000	0,00
3	0,068	0,069	1,45
4	0,000	0,000	0,00
5	0,025	0,025	0,00
6	0,000	0,000	0,00
7	0,013	0,013	0,00
8	0,000	0,000	0,00
9	0,008	0,008	0,00

Es ergibt sich schließlich die Dreiecksspannung, welche in Abbildung 11 dargestellt ist.

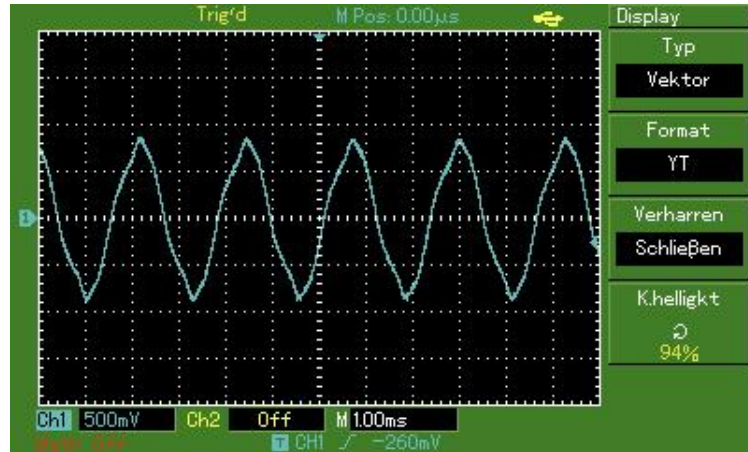


Abbildung 11: Experimentell synthetisierte Dreiecksspannung.

4 Diskussion

Im ersten Teil der Auswertung wurde der Abfall der Koeffizienten untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass diese bei Sägezahn- und Rechtecksignal fast exakt mit $\frac{1}{k}$ und bei dem Dreiecksignal ziemlich genau mit $\frac{1}{k^2}$ abfallen. Genau das ist auch anhand der berechneten Koeffizienten der Signale zu erwarten.

Im zweiten Teil der Auswertung wird die Fourier-Synthese untersucht. Es stellt sich heraus, dass die Synthese des Dreiecksignals gut funktioniert und keine gravierenden Abweichung zwischen dem berechneten und tatsächlichen Kurvenverlauf festgestellt werden kann. Bei der Synthese des Rechteck- und Sägezahnsignals hingegen treten kleine Abweichungen

zu den berechneten Funktionen auf. Diese können durch geringfügige Phasendifferenzen erklärt werden, welche dadurch zustande kommen, dass die Lissajous-Figuren bei größerem k immer schwerer erkennbar und einstellbar sind oder aber aufgrund des Gibbschen Phänomens.

Insgesamt lässt sich also sagen, dass sowohl Fourier-Analyse als auch Fourier-Synthese im Experiment den theoretischen Vorhersagen entsprechen und somit das Fouriersche Theorem verifizieren.

5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 351: Fourier-Analyse und Synthese*
<http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (*Informationen entnommen und am 17.01.2019, zuletzt bearbeitet am 30.01.2019*)