

Nr. 351

## **Fourier-Analyse und Synthese**

Sara Krieg  
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel  
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 15.01.2019

Abgabe: 22.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
2.1	Fourier-Analyse . . . . .	4
2.2	Fourier-Synthese . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Fourieranalyse . . . . .	5
3.2	Fourier-Synthese . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>

# 1 Theorie

Ziel dieses Versuches ist die Verifizierung der Fourier-Analyse und Synthese.

Nach dem Fourier-Theorem lassen sich zeitlich (oder räumlich) periodische Vorgänge mit der Periodendauer  $T$ , für die

$$f(t + T) = f(t) \quad (1)$$

gilt, durch Superposition von Sinus- und Kosinusfunktionen verschiedener Frequenzen und Amplituden genähert werden. Dafür konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) + b_k \sin \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) \right) \quad (2)$$

gegen die periodische Funktion  $f(t)$ .

Die sogenannten Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  sind die Amplituden der einzelnen Sinus- und Kosinusfunktionen und werden durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) dt \quad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) dt \quad (4)$$

mit  $k \in \mathbb{N}$  bestimmt.

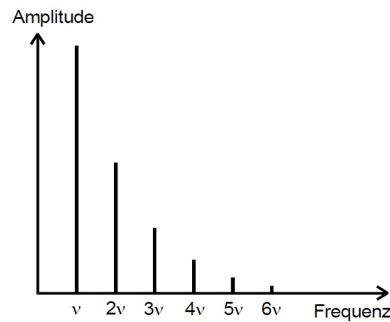
Diese Ermittlung der Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  wird als Fourieranalyse bezeichnet. Dabei verschwinden für gerade Funktionen mit  $f(-t) = f(t)$  die Koeffizienten  $b_k$  mit den ungeraden Sinusfunktionen und für ungerade Funktionen mit  $f(-t) = -f(t)$  die Koeffizienten  $a_k$  mit geraden Kosinusfunktionen.

Das Frequenzspektrum der fourieranalytierten Funktion entsteht durch Auftragung der Koeffizienten als Funktionen der Frequenzen. Da die Fourierentwicklung aus einer Summe über ganzzahlige  $k$  besteht, resultiert aus ihr ein Linienspektrum, dessen Linien gegen Null streben, da die Reihe konvergieren muss. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 zu sehen. Man nennt ein solches Frequenzspektrum auch einen Dirac-Kamm.

Konvergiert sie nicht, so liegt das an der Unstetigkeit der zu entwickelnden Funktion. Es tritt eine Abweichung an der Stelle der Unstetigkeit auf, welches als Gibbsches Phänomen bezeichnet wird.

Die Fourierentwicklung (2) enthält neben der Grundfrequenz  $\nu_0 = \frac{2\pi}{T}$  deren ganzzahlige Vielfache - die Oberschwingungen. Außerdem können die Phasen nur  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  oder  $\frac{3\pi}{2}$  betragen.

Nichtperiodische zeitabhängige Funktionen können fouriertransformiert werden, um ihr gesamtes Frequenzspektrum bestimmen zu können. Die Transformation



**Abbildung 1:** Beispiel für ein Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit der Grundfrequenz

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t} dt \quad (5)$$

gibt dabei das kontinuierliche Frequenzspektrum  $g(\nu)$  wieder, welches durch

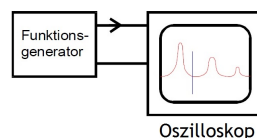
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{-i\nu t} d\nu \quad (6)$$

zurücktransformiert wird. Im Gegensatz zur Fourierentwicklung periodischer Funktionen, resultieren hieraus in der Praxis keine perfekten -Funktionen, sondern Peaks endlicher Breite, da die Integration über ein unendliches Intervall nicht realisierbar ist.

## 2 Durchführung

### 2.1 Fourier-Analyse

Bei diesem Versuchsteil werden ein Rechteck-, ein Dreieck- und ein Sägezahnsignal in ihre Fourierkomponenten zerlegt. Dazu wird ein Oszilloskop mit entsprechenden Signalen, die in einem Funktionsgenerator erzeugt werden, gespeist, siehe Abbildung ... . Die Fourier-Analyse wird dabei durch das Oszilloskop durchgeführt und ausgegeben. Zu beachten ist, dass genug Perioden angezeigt werden müssen, so dass auch genügend Peaks in dem Linienspektrum zu sehen sind. Von den angezeigten Peaks werden sowohl die Frequenz als auch die Amplitude notiert. Wie in der Theorie erwähnt bilden sich auch Nebenmaxima aus, die hier nicht beachtet werden.



**Abbildung 2:** Schematischer Aufbau der Messapparatur für die Fourier-Analyse [1]

## 2.2 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese werden Rechtecks-, Dreiecks- und Sägezahnsignal aus ihren Fourierkomponenten zusammengesetzt. Zunächst werden immer zwei Ausgänge eines Oberwellengenerators an das Oszilloskop angeschlossen. Dieser Generator liefert Grundschwingungen und Oberwellen. Diese sind die Fourierkomponenten. Damit alle Ausgänge des Generators in Phase geschaltet sind, wird das Oszilloskop zunächst in X-Y-Betrieb geschaltet. Um eine optimale Genauigkeit zu erreichen, werden die Amplituden der einzelnen Oberwellen maximal eingestellt. Auf dem Bildschirm erscheint eine Lissajous-Figur, die in sich geschlossen oder zu einer Linie mit zwei Enden entartet sein kann. Anhand dieser Figur wird die Phase zwischen den beiden Schwingungen bestimmt. Ist die Figur bei ungeradem  $n$  eine Linie, so muss die Phasenverschiebung  $\phi$  durch 0 oder  $\pi$  gegeben sein. Bei geraden  $n$  und Sinusfunktion wird die gleiche Phase identifiziert, wenn die Figur eine geschlossene, zur x-Achse symmetrische Kurve, ist. Es gibt oft Fälle, bei denen aus der Gestalt der Lissajous-Figur nicht auf die Phasenverschiebung geschlossen werden kann. Ist dies der Fall, wird durch Umschalten des 180°-Phasenschalters während der einzelnen Syntheseschritte die richtige Phaseneinstellung ermittelt. Außerdem werden die einzelnen Komponenten gemäß den Beträgen der Fourier-Koeffizienten eingestellt. Schließlich wird an dem Summenausgang ein Oszilloskop angeschlossen und durch sukzessives Zuschalten der einzelnen Komponenten die Überlagerungsfigur auf dem Bildschirm beobachtet.

## 3 Auswertung

### 3.1 Fourieranalyse

Im ersten Versuchsteil soll der Abfall der Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  periodischer Sägezahn, Rechtecks- und Dreiecksspannungen untersucht werden. Dazu werden die Ordnung  $k$  und die Spannungsamplitude  $U$  gegeneinander logarithmiert aufgetragen und eine lineare Regression der Form

$$\ln\left(U \cdot \frac{1}{V}\right) = a \cdot \ln(k) + b \quad (7)$$

Dabei wird die Spannung  $U$  durch ihre Einheit geteilt, da der Logarithmus nur für dimensionslose Größen definiert ist. Zudem ergibt sich umgeformt:

$$U = e^b \cdot k^a \cdot V \quad (8)$$

Da nun  $U$  proportional zu den Fourierkoeffizienten ist, lässt sich die Stärke deren Abfalls ermitteln. Die Messdaten der Sägezahnspannung sind dazu in Tabelle 1 aufgeführt und in Abbildung 3 gegeneinander aufgetragen. Die Lineare Regression, die mittels python durchgeführt wurde, ergibt die Tangentenparameter:

$$a_S = -1,0052 \pm 0,0286$$

$$b_S = 7523,000 \pm 0,451$$

Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Sägezahnspannung in etwa proportional zu  $\frac{1}{k}$  abfallen.

**Tabelle 1:** Messdaten und deren Logarithmen der Sägezahnspannung

$k$	$\ln(k)$	$U/V$	$\ln(U/V)$
1	0,000	2,040	0,713
2	0,693	1,100	0,095
3	1,099	0,740	-0,301
4	1,386	0,488	-0,717
5	1,609	0,440	-0,821
6	1,792	0,352	-1,044
7	1,946	0,296	-1,217
8	2,079	0,280	-1,273
9	2,197	0,216	-1,532

Für die Rechtecksspannung sind die Messdaten in Tabelle 2 aufgelistet und in Abbildung 4 gegeneinander aufgetragen. Es ergeben sich die Regressionsparameter:

$$a_R = -1,0021 \pm 0,0209$$

$$b_R = 1,4205 \pm 0,0462$$

Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Rechtecksspannung in etwa proportional zu  $\frac{1}{k}$  abfallen.

Für die Dreiecksspannung sind die Messdaten in Tabelle 3 aufgelistet und in Abbildung 5 gegeneinander aufgetragen. Es ergeben sich die Regressionsparameter:

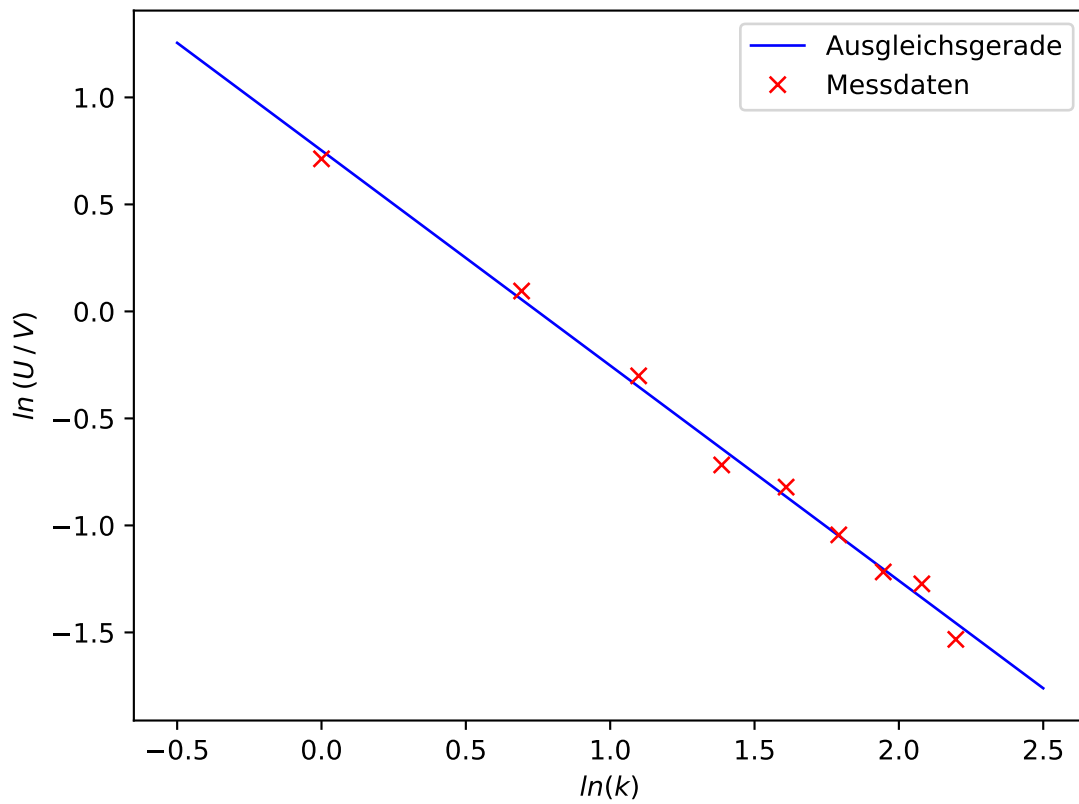
$$a_D = -1,9681 \pm 0,0121$$

$$b_D = 0,9585 \pm 0,0227$$

Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Dreiecksspannung in etwa proportional zu  $\frac{1}{k^2}$  abfallen.

### 3.2 Fourier-Synthese

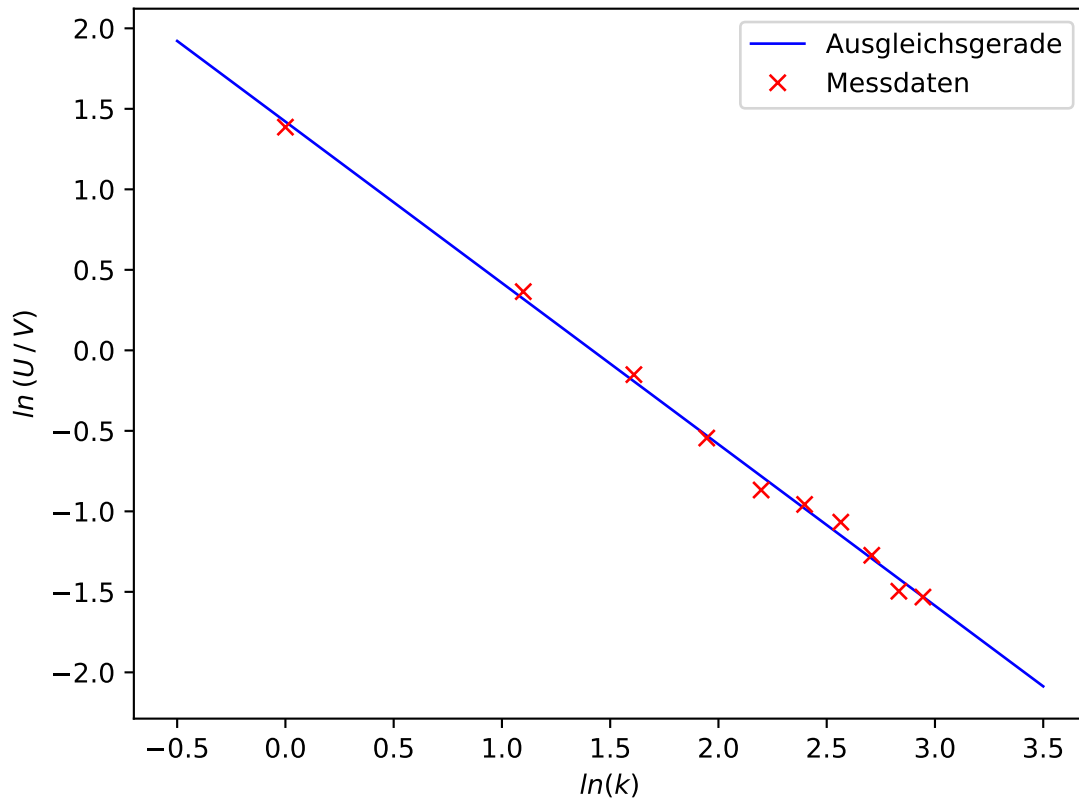
Im zweiten Versuchsteil wird gezeigt, dass sich die verschiedenen Spannungsfunktionen durch Superpositionen verschiedener Oberwellen, bzw Fourierkoeffizienten synthetisieren



**Abbildung 3:** Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Sägezahnspannung

**Tabelle 2:** Messdaten und deren Logarithmen der Rechtecksspannung

$k$	$\ln(k)$	$U/V$	$\ln(U/V)$
1	0,000	4,000	1,389
3	1,099	1,440	0,365
5	1,609	0,860	-0,151
7	1,946	0,580	-0,545
9	2,197	0,420	-0,868
11	2,398	0,384	-0,957
13	2,565	0,344	-1,067
15	2,708	0,280	-1,273
17	2,833	0,224	-1,496
19	2,944	0,216	-1,532

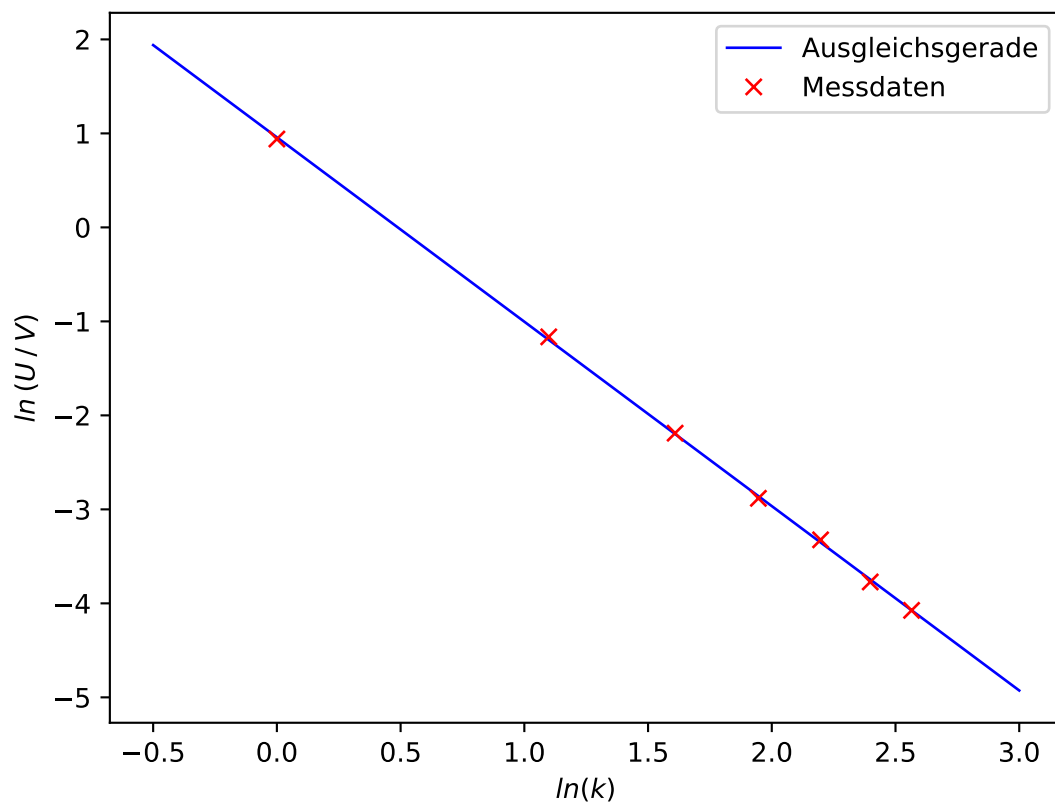


**Abbildung 4:** Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Rechtecksspannung

**Tabelle 3:** Messdaten und deren Logarithmen der Dreiecksspannung

$k$	$\ln(k)$	$U/V$	$\ln(U/V)$
1	0,000	2,560	0,940
3	1,099	0,312	-1,165
5	1,609	0,112	-2,189
7	1,946	0,056	-2,882
9	2,197	0,036	-3,324
11	2,398	0,023	-3,772
13	2,565	0,017	-4,075





**Abbildung 5:** Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Dreiecksspannung

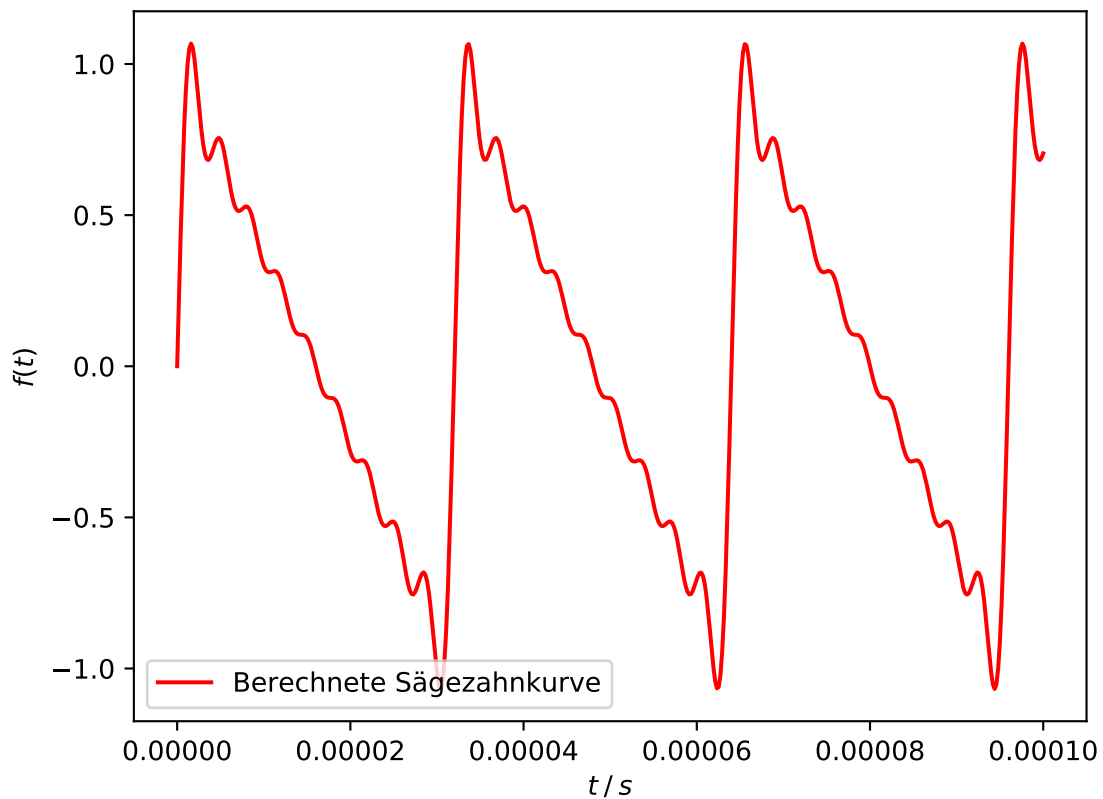
lassen. Als Grundlage dessen dienen theoretische Vorberechnungen der jeweiligen Fourier-Reihen, nach Formel (2), und der in diese eingesetzten Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ .

Für die ungerade Sägezahnspannung sind die Fourierkoeffizienten:

$$a_k = 0$$

$$b_k = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$$

Diese ergeben in Formel (2) eingesetzt die Fourier-Reihe der Sägezahnspannung, die in Abbildung 6 dargestellt ist.



**Abbildung 6:** Theoretische Sägezahnfunktion

Experimentell werden die Fourierkoeffizienten bzw. Oberwellenamplituden möglichst mit dem Proportionalitätsfaktor  $\frac{1}{k}$  abfallend eingestellt, wie in Tabelle 4 dargestellt. Dabei bezeichnen  $U_{\text{theo}}$  die theoretisch einzustellenden und  $U$  die tatsächlich eingestellten Spannungsamplituden.  $\Delta U$  bezeichnet die Abweichung der beiden Werte voneinander. Es ergibt sich die Sägezahnspannung, welche in Abbildung 7 dargestellt ist.

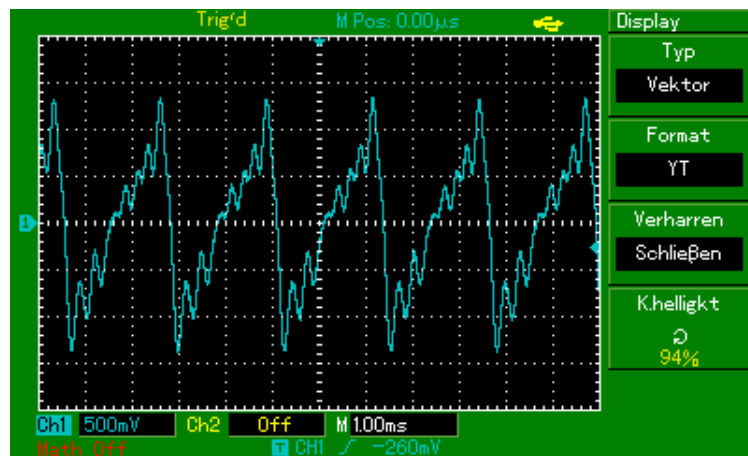


Abbildung 7: Experimentell synthetisierte Sägezahnspannung

**Tabelle 4:** Einstellungen der Oberwellenamplituden für eine Sägezahnspannung

$k$	$U / \text{V}$	$U_{\text{theo}} / \text{V}$	$\Delta U / \%$
1	0,633	0,633	0,00
2	0,316	0,317	0,32
3	0,211	0,211	0,00
4	0,157	0,158	0,63
5	0,126	0,127	0,79
6	0,106	0,106	0,00
7	0,089	0,090	1,11
8	0,078	0,079	1,27
9	0,070	0,070	0,00
10	0,063	0,063	0,00

Für die ungerade Rechtecksspannung lauten die Fourierkoeffizienten:

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k}, & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

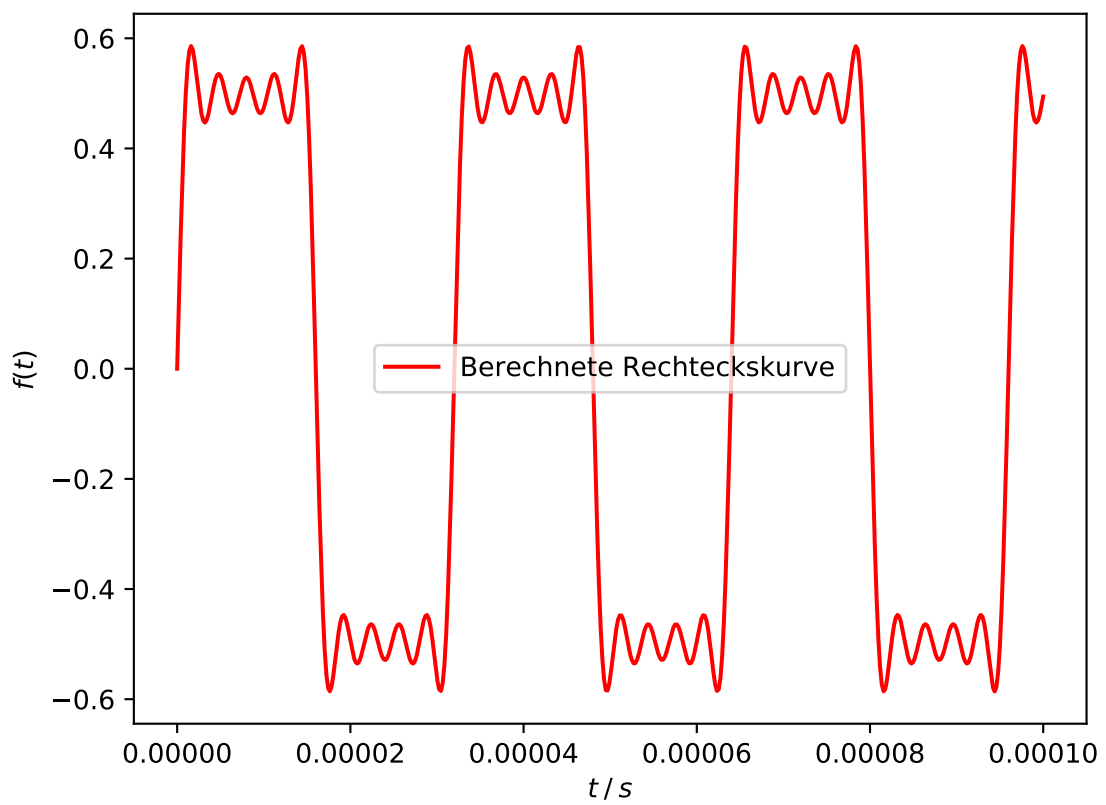
Diese ergeben in Formel (2) eingesetzt die Fourier-Reihe der Rechtecksspannung, die in Abbildung 8 dargestellt ist.

Die Fourierkoeffizienten der Rechtecksspannung werden analog zu denen der Sägezahnspannung eingestellt, wie in Tabelle 5 dargestellt. Es ergibt sich die Rechtecksspannung, welche in Abbildung 9 dargestellt ist.

**Tabelle 5:** Einstellungen der Oberwellenamplituden für eine Rechtecksspannung

$k$	$U / \text{V}$	$U_{\text{theo}} / \text{V}$	$\Delta U / \%$
1	0,633	0,633	0.00
2	0,000	0,000	0.00
3	0,211	0,211	0.00
4	0,000	0,000	0.00
5	0,126	0,127	0.79
6	0,000	0,000	0.00
7	0,089	0,090	1.11
8	0,000	0,000	0.00
9	0,070	0,070	0.00
10	0,000	0,000	0.00

Für die gerade Dreiecksspannung lauten die Fourierkoeffizienten:



**Abbildung 8:** Theoretische Rechtecksfunktion

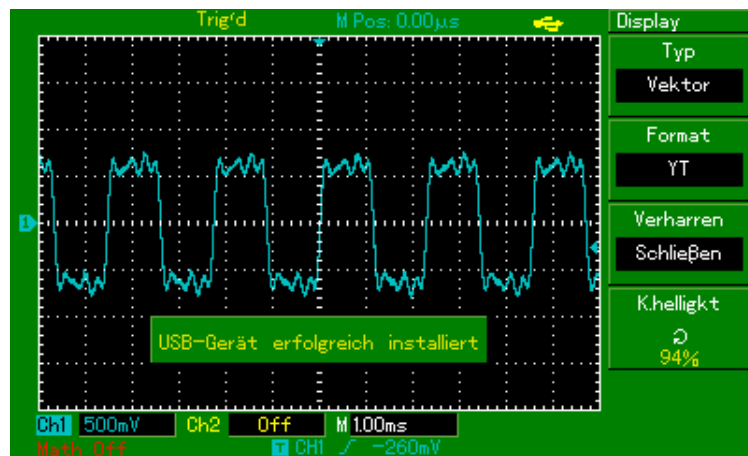
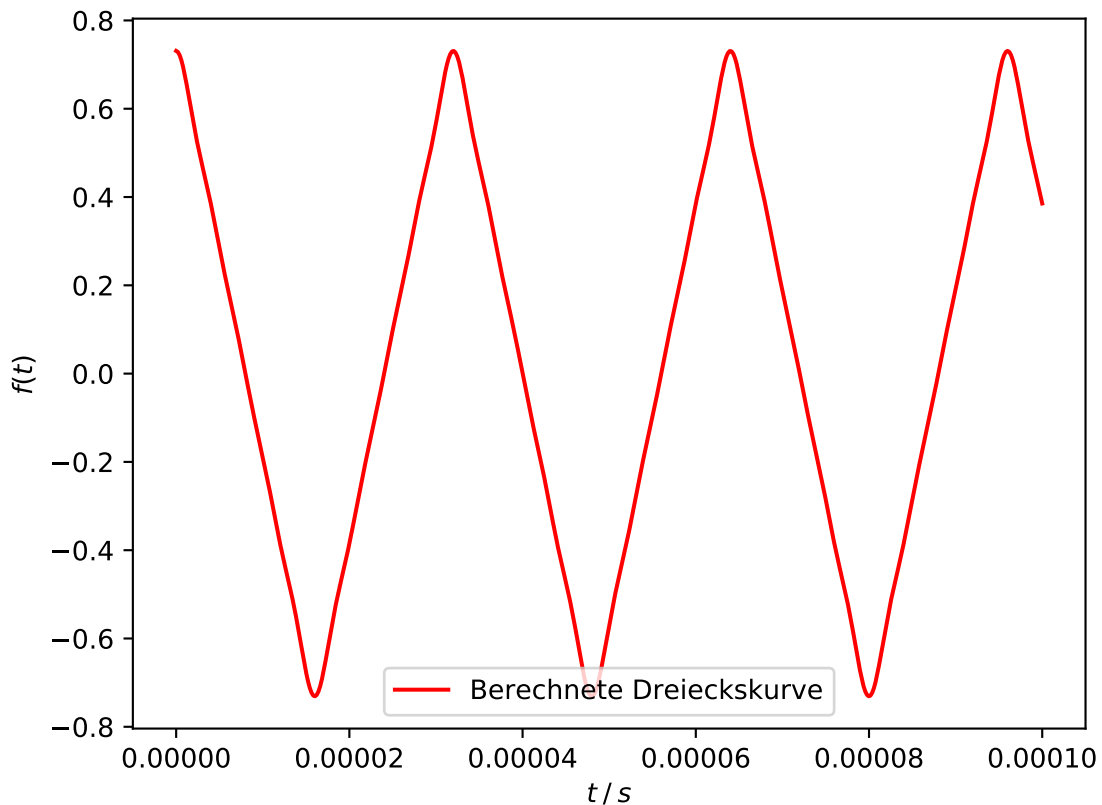


Abbildung 9: Experimentell synthetisierte Rechtecksspannung

$$a_k = 0 \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi^2 k^2}, & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

Diese ergeben in Formel (2) eingesetzt die Fourier-Reihe der Dreiecksspannung, die in Abbildung 10 dargestellt ist.



**Abbildung 10:** Theoretische Rechtecksfunktion

Die Fourierkoeffizienten der Dreiecksspannungen werden im Gegensatz zu denen der vorherigen mit einem Abfall proportional zu  $\frac{1}{k^2}$  eingestellt, wie in Tabelle 6 dargestellt. Die abgebildeten Größen ergeben sich analog zu den Tabellen der anderen beiden Spannungen. Es ergibt sich schließlich die Dreiecksspannung, welche in Abbildung 11 dargestellt ist.

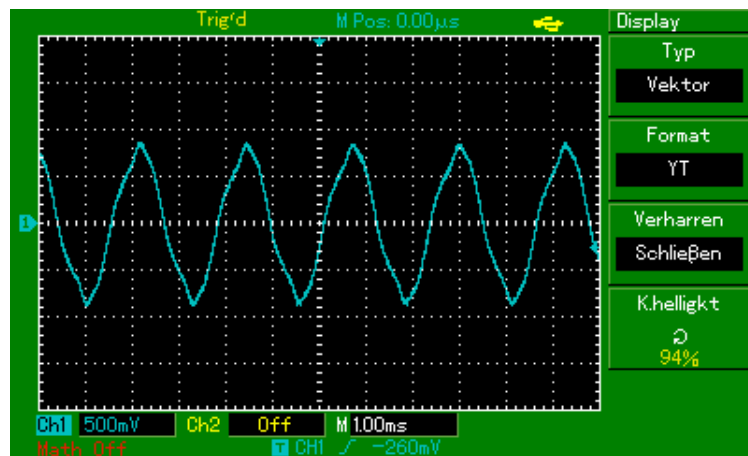


Abbildung 11: Experimentell synthetisierte Dreiecksspannung



**Tabelle 6:** Einstellungen der Oberwellenamplituden für eine Dreiecksspannung

$k$	$U / \text{V}$	$U_{\text{theo}} / \text{V}$	$\Delta U / \%$
1	0,617	0,617	0.00
2	0,000	0,000	0.00
3	0,068	0,069	1.45
4	0,000	0,000	0.00
5	0,025	0,025	0.00
6	0,000	0,000	0.00
7	0,013	0,013	0.00
8	0,000	0,000	0.00
9	0,008	0,008	0.00

## 4 Diskussion