Nr.206

Die Wärmepumpe

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 20.11.2018 Abgabe: 27.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, die Kenngrößen der Wärmepumpe zu ermitteln, indem der Transport von Wärmeenergie zwischen zwei Wärmereservoiren untersucht wird.

1.1 Das Prinzip der Wärmepumpe

Ohne äußere Einflüsse findet Temperaturänderung in Form von Wärmeabgabe vom heißeren zum kälteren Körper oder Medium statt. Durch aufgewandte (mechanische) Arbeit A kann dieser Prozess jedoch auch in anderer Richtung ablaufen.

Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik beträgt die an das wärmere Medium abgegebene Wärmemenge Q_1, die von dem kühleren Medium aufgenommene Wärmemenge Q_2 zuzüglich der Arbeit A. Dementsprechend gilt

$$Q_1 = Q_2 + A \tag{1}$$

Die Güteziffer ν der Wärmepumpe gibt dabei das Verhältnis der abgegebenen Wärmemenge Q_1 zur aufgewandten Arbeit A an

$$\nu = \frac{Q_1}{A} \tag{2}$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik führt für die reduzierten Wärmemengen zu der Beziehung, dass deren Summe $\int \frac{\mathrm{d}Q}{T}$ null beträgt. Aus dieser folgt

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{3}$$

Allerdings muss es sich für diese Beziehung um einen idealen reversiblen, d.h. umkehrbaren Prozess handeln. Vom Ideal abweichend, gilt für die technische Anwendung also die Ungleichung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \tag{4}$$

Aus 1 und 3 folgt

$$Q_1 = A + \frac{T_2}{T_1} \cdot Q_1 \ ,$$

aus 2, für einen reversiblen Vorgang, die ideale Güte

$$\nu_{\mathrm{id}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \tag{5}$$

und aus 1 und 4 für die Güte der realen Wärmepumpe

$$\nu_{\mathrm{real}} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ . \tag{6}$$

Aus 5 und 6 ist abzulesen, dass die Wärmepumpe für kleine Temperaturdifferenzen $T_1 - T_2$ am effizientesten arbeitet, die aufgewandte Arbeit A zur Wärmeübertragung also minimal ist.

1.2 Die Arbeitsweise der Wärmepumpe

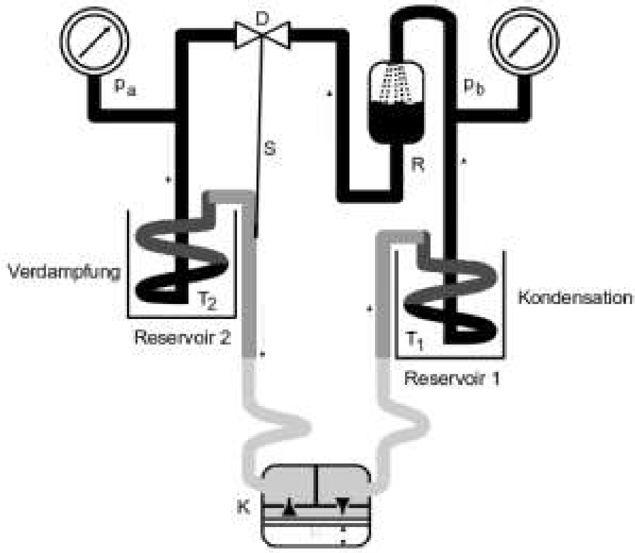

Abbildung 1: Aufbau einer Wärmepumpe [1]

In der Wärmepumpe fungiert ein reales Gas als Transportmedium, welches bei Wärmeaufnahme verdampft und die Wärme durch Kondensation wieder abgibt. Demzufolge wird die Wärmeenergie als Phasenumwandlungsenergie transportiert. Vorteilhaft ist daher die Verwendung von Gasen hoher Kondensationswärme.

In Abbildung 1 ist der Aufbau der Wärmepumpe schematisch dargestellt. Demnach sorgt der Kompressor K für einen Kreislauf, durch den das Transportgas sowohl beide Wärmereservoires, als auch ein Drosselventil D durchläuft. An diesem entsteht ein Druckunterschied $p_\mathrm{b} - p_\mathrm{a}$. Dabei ist das Transportgas bei Druck p_b und Temperatur T_1 flüssig und bei p_a und T_2 gasförmig.

Dem kälteren Reservoire 2 wird durch das Verdampfen des Transportgases die Verdampfungswärme L pro gramm entzogen. Darauf wird das Gas im Kompressor K adiabatisch komprimiert, sodass dessen Druck und Temperatur steigen und es schließlich die Kondensationswärme L pro gramm an das Reservoire 1 abgibt.

Weitere nötige Komponenten der Wärmepumpe sind ein Reiniger R, der die Blasen im flüssigen Medium entfernt, sowie ein Steuerungselement S, welches mit dem Drosselventil D gekoppelt ist und das schädliche Eindringen flüssigen Mediums in den Kompressor K über Kontrolle der Temperaturdifferenz am Ein- und Ausgang des Reservoires 2 verhindert.

1.3 Die Bestimmung der Kenngrößen einer realen Wärmepumpe

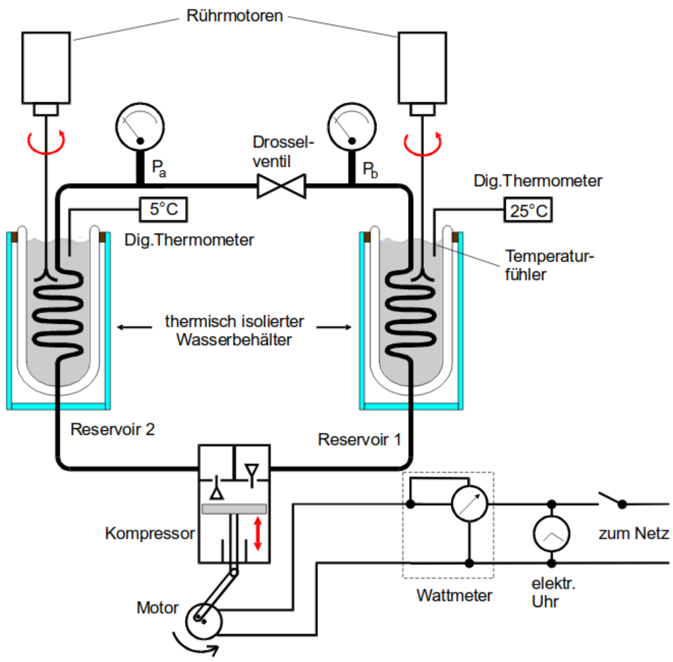

Abbildung 2: Aufbau der Messapparatur [1]

Die Kenngrößen der realen Wärmepumpe sind die Güteziffer ν, der Massendurchsatz $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, sowie die mechanische Kompressorleistung N_{mech}.

Für die zeitabhängigen Messungen der Drücke p_{a}, p_{b} gibt es, gemäß Abbildung 2, zwei jeweils zwischen dem Reservoires und dem Drosselventil D installierte Manometer. Für die Temperaturverläufe gibt es zwei digitale Thermometer in den Reservoires und für die Leistungsaufnahme des Kompressors ein Wattmeter.

Die Reservoires befinden sich in thermisch isolierten Gefäßen und werden während der Messung von zwei Rührmotoren umgerührt.

Im Folgenden können Differentialquotienten anstelle von Differenzenquotienten verwendet werden, da sich die Messreihen der Temperaturen als einfache, zeitabhängige Funktionen beschreiben lassen.

1.3.1 Die reale Güteziffer

Mit der Messung der Zeit T_1 in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich die reale Güteziffer als

$$\nu = (m_1 c_\mathrm{w} + m_\mathrm{k} c_\mathrm{k}) \cdot \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{N} \tag{7}$$

bestimmen.

Dabei beschreibt m_1 die Wassermasse und c_textw deren Wärmekapazität. m_textk beschreibt die Masse der Kupferschlange und des Eimers und c_textk deren Wärmekapazität. N gibt die am Wattmeter abgelesene, über das Zeitintervall Δt gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors an.

1.3.2 Der Massendurchsatz

Mithilfe der zeitabhängigen Messung der Temperatur T_2 lässt sich, bei bekannter Verdampfungswärme L, der Massendurchsatz durch

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = (m_2 c_\mathrm{w} + m_\mathrm{k} c_\mathrm{k}) \cdot \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{L} \tag{8}$$

bestimmen.

Fast analog zur vorherigen Bestimmung der Güteziffer wird nun die Wassermasse m_2 des Reservoires 2 benötigt.

Zur Bestimmung des Massendurchsatzes wird außerdem die Verdampfungswärme L benötigt. Diese kann mit Hilfe der Clausius-Clapeyron'schen Gleichung berechnet werden, welche den Verlauf der Siedepunkte eines Stoffes beschreibt. Diese lautet:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L}{\Delta V_m T}$$

Dabei ist p der Dampfdruck, T die Temperatur und V_m die Änderung des molaren Volumens zwischen gasförmiger und flüssiger Phase. ΔV_m kann dabei als molares Volumen der gasförmigen Phase genährt werden. Außerdem wird ein ideales Gas angenommen und dass L unabhängig von Druck und Temperatur ist. Dies führt zu der vereinfachten Gleichung:

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p = \frac{L}{R \cdot T^2}\mathrm{d}T.$$

Aufintegriert ergibt sich der Zusammenhang, aus dem L bestimmt werden kann:

$$ln(p) = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{T} + const. \tag{9}$$

1.3.3 Die mechanische Kompressorleistung

Bei der Komprimierung eines Gasvolumens V_a zu dem Volumen V_b verrichtet der Kompressor die Arbeit

$$A = -\int_{V_\mathrm{a}}^{V_\mathrm{b}} p \, \mathrm{d}V \ . \tag{10}$$

Für eine adiabatische Komprimierung gilt die Poissonsche Gleichung

$$p_\mathrm{a} V_\mathrm{a}^\kappa = p_\mathrm{b} V_\mathrm{b}^\kappa = p V^\kappa \quad , \tag{11}$$

sodass für A

$$\begin{aligned} A &= -p_\mathrm{a} V_\mathrm{a}^\kappa \int_{V_\mathrm{a}}^{V_\mathrm{b}} V^{-\kappa} \,\mathrm{d}V = \frac{1}{\kappa - 1} p_\mathrm{a} V_\mathrm{a}^\kappa \left(V_\mathrm{b}^{-\kappa+1} - V_\mathrm{a}^{-\kappa+1} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_\mathrm{b} \sqrt[\kappa]{\frac{p_\mathrm{a}}{p_\mathrm{b}}} - p_\mathrm{a} \right) V_\mathrm{a} \end{aligned} \tag{12}$$

folgt und für die mechanische Kompressionsleistung

$$\begin{aligned} N_\mathrm{mech} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_\mathrm{b} \sqrt[\kappa]{\frac{p_\mathrm{a}}{p_\mathrm{b}}} - p_\mathrm{a} \right) \frac{\mathrm{d}V_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_\mathrm{b} \sqrt[\kappa]{\frac{p_\mathrm{a}}{p_\mathrm{b}}} - p_\mathrm{a} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{13}$$

mit Dichte ρ des Transportmediums unter dem Druck p_a, die sich mit der idealen Gasgleichung unter den Normalbedingungen $p = 1\,\mathrm{bar}$ und $T = 0\,^\circ\mathrm{C}$ bestimmen lässt.

2 Durchführung

Es wird eine Apparatur, wie in Abbildung 2 dargestellt, verwendet.

Zuerst werden die beiden Gefäße der Reservoires mithilfe von Messkolben jeweils mit $3\,\mathrm{L}$ Wasser befüllt.

Daraufhin werden minütlich an den Manometern und digitalen Thermometern die Drücke p_a, p_b und Temperaturen T_1, T_2 abgelesen. Zusätzlich wird dem Wattmeter die Leistungsaufnahme des Kompressors entnommen. Die Messung wird solange durchgeführt, bis T_1 eine Temperatur von $50\,^\circ\mathrm{C}$ erreicht.

3 Auswertung

3.1 Darstellung der Temperaturverläufe

Es wurden die Temperaturen, Druckwerte und die Kompressorleistung minütlich gemessen. Die gemessenen Daten sind in Tabelle 1 dargestellt.

Zur Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}$ werden die Messdaten mit $T(t) = At^2 + Bt + C$ approximiert. Die durch Python und Matplotlib ermittelten Parameter lauten:

Tabelle 1: Aufgenommene Messdaten

$t\,/\,\mathrm{s}$	$T_1\,/\,\mathrm{K}$	$T_2\,/\,\mathrm{K}$	$p_a\,/\,\mathrm{kPa}$	$p_b\,/\,\mathrm{kPa}$	$P\,/\,\mathrm{W}$
0	294.65	294.55	490	510	120
60	295.55	294.45	440	650	125
120	297.05	293.15	460	675	126
180	298.65	291.65	470	700	128
240	300.25	290.25	475	725	128
300	301.75	289.25	460	750	125
360	303.35	288.25	445	775	123
420	304.85	287.35	430	800	122
480	306.25	286.35	420	850	122
540	307.55	285.35	400	875	124
600	308.85	284.45	395	900	125
660	310.05	283.45	380	925	125
720	311.15	282.55	370	950	125
780	312.25	281.65	360	1000	126
840	313.25	280.85	350	1000	128
900	314.25	280.05	340	1050	128
960	315.25	279.25	340	1075	115
1020	316.05	278.55	330	1100	115
1080	316.95	277.75	320	1125	115
1140	317.75	277.05	320	1150	115
1200	318.45	276.45	310	1175	115
1260	319.25	275.75	300	1200	115
1320	319.95	275.15	300	1200	115
1380	320.65	274.55	300	1225	115
1440	321.25	274.05	295	1250	115
1500	321.95	273.45	290	1275	115
1560	322.55	273.35	280	1300	115
1620	323.15	272.45	280	1300	115
1680	323.75	271.95	280	1325	115

$$A_1 = (-6{,}23 \pm 0{,}18) \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{s}}$$
$$B_1 = (28{,}0 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$C_1 = (294{,}1130 \pm 0{,}1113)\,\mathrm{K}$$

$$A_2 = (3{,}90 \pm 0{,}17) \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{s}}$$
$$B_2 = (-20{,}0 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$C_2 = (295{,}1320 \pm 0{,}1077)\,\mathrm{K}$$

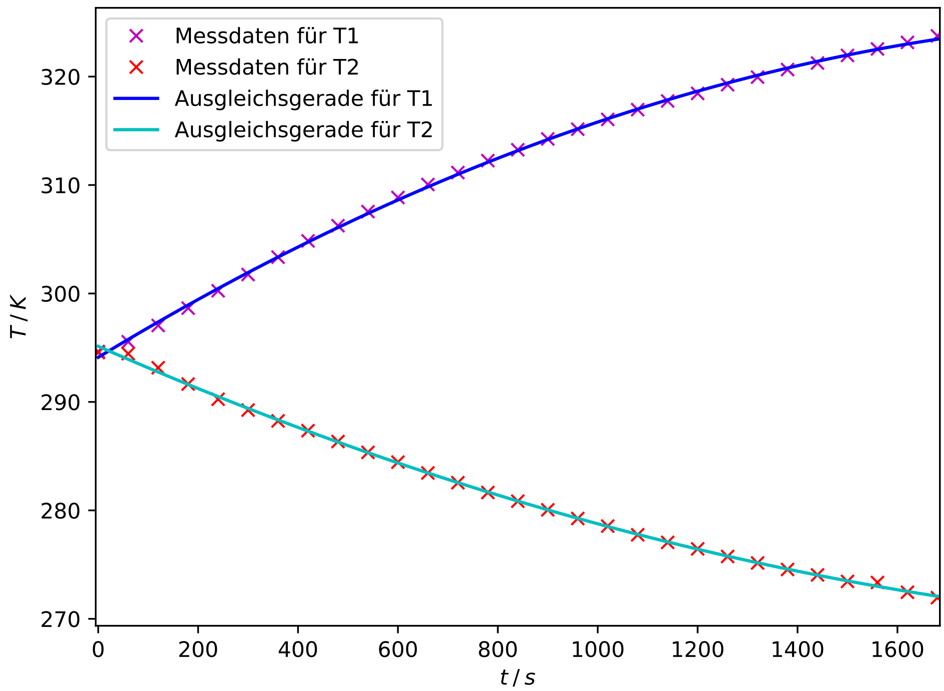

Abbildung 3: Temperaturverläufe

Anhand von Abbildung 3 ist zu erkennen, dass die Messwerte gut zu der geplotteten Funktion passen.

Die Differentialquotienten ergeben sich durch die Ableitung der Fitfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 2A \cdot t + B$$

Tabelle 2: Differentialquotienten

$t\,/\,\mathrm{s}$	$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\,/\,10^{-3}\,\mathrm{K/s}$	$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}\,/\,10^{-3}\,\mathrm{K/s}$
120	26.50 $\pm$ 0.30	-19.06 $\pm$ 0.30
360	23.51 $\pm$ 0.33	-17.19 $\pm$ 0.32
480	22.02 $\pm$ 0.35	-16.26 $\pm$ 0.34
600	20.52 $\pm$ 0.37	-15.32 $\pm$ 0.36

Die berechneten Werte für die Differentialquotienten für vier Temperaturen sind in Tabelle 2 aufgelistet.

Dabei werden hierbei die Fehler aus den statistischen Fehlern der Fitwerte nach

$$\Delta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sqrt{(2t\cdot\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

berechnet.

3.2 Bestimmung der Güteziffern

Damit die Güteziffer berechnet werden kann, muss zunächst die Wärmekapzitiät der beiden Wasserreservoire ermittelt werden. Beide Reservoire haben die gleiche Wärmekapzitiät, da sie den gleichen Aufbau haben und jeweils mit $V = (3{,}00 \pm 0{,}12)\,\mathrm{L}$ befüllt sind. Es ergibt sich für die Wärmekapzitiät:

$$C = C_\mathrm{p}\cdot\rho\cdot V + m_\mathrm{k}\cdot c_\mathrm{k} = (13\,293 \pm 5)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Dabei ist $C_p = 4{,}181\,\mathrm{J/(g\,K)}$ [4], $\rho = 1000\,\mathrm{g/L}$ wird angenommen und die Wärmekapazität des Reservoires ist gegeben als $c_\mathrm{k}m_\mathrm{k} = 750\,\mathrm{J/K}$. Mit (7) wird nun die Güteziffern für die vier ermittelten Differentialquotienten bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 aufgeführt.

Tabelle 3: Güteziffern

$t\,/\,\mathrm{s}$	$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\,/\,10^{-3}\,\mathrm{K/s}$	ν_id	ν_re	Abweichung %
120	26.50 $\pm$ 0.30	76.17	2.80 $\pm$ 0.03	96.32
360	23.51 $\pm$ 0.33	20.09	2.54 $\pm$ 0.04	87.36
480	22.02 $\pm$ 0.35	15.39	2.40 $\pm$ 0.04	84.41
600	20.52 $\pm$ 0.37	12.66	2.18 $\pm$ 0.04	82.78

Dabei berechnet sich die ideale Güteziffer nach (5). Der Fehler der realen Güteziffer ergibt sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta\nu = \sqrt{\left(C\cdot\Delta\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\cdot\Delta C\right)^2}.$$

3.3 Bestimmung des Massendurchsatzes

Zur Bestimmung des Massendurchsatzes wird die Verdampfungswärme L benötigt. Diese lässt sich durch ein Dampfdruck-Kurve gewinnen. Zu diesem Zweck wird $ln(P)$ gegen $\frac{1}{T}$ aufgetragen und eine lineare Ausgleichsgerade geplottet. Grafisch aufgetragen ergibt sich die Abbildung 4.

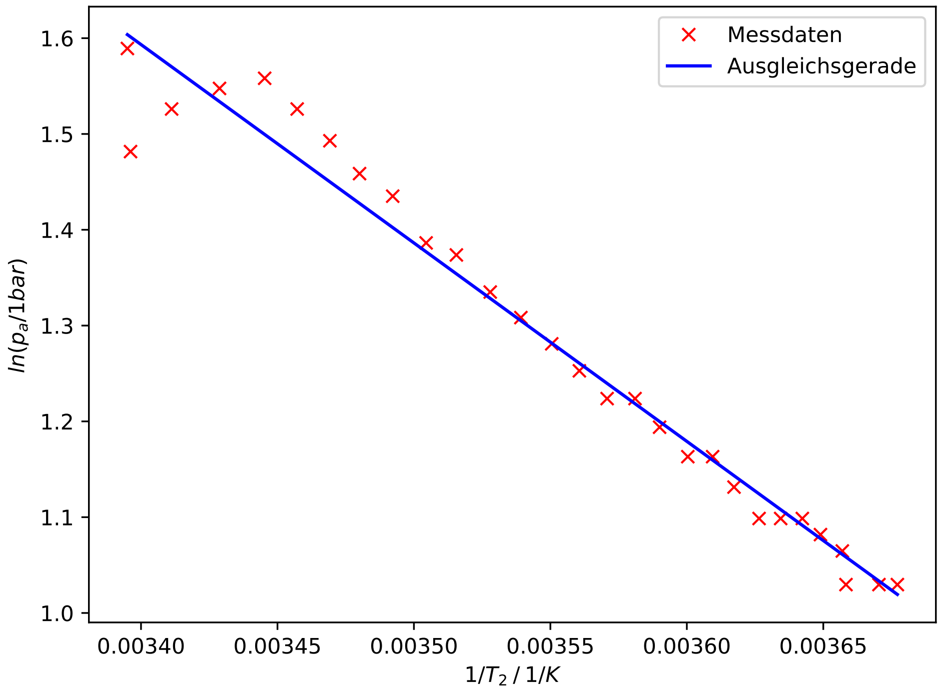

Abbildung 4: Dampfdruck-Kurve

Die Regressionsparameter ergeben sich an der Form $\ln(p) = \frac{a}{T} + b$ zu:

$$a = (-2071{,}13 \pm 73{,}68)\,\mathrm{K}$$
$$b = (8{,}64 \pm 0{,}26)$$

Nach (9) ergibt sich $L_{\mathrm{reg}} = -a \cdot R$, wobei R die allgemeine Gaskonstante ist. Mit $R = 8{,}314\,462\,1\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ [2], ergibt sich:

$$L_{\mathrm{reg}} = (17\,200 \pm 600)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}$$

Die Umrechnung dieser Größe mit Bezug auf eine Masse anstatt auf eine Teilchenzahl, erfolgt mit der molaren Masse $M = 120{,}913\,\mathrm{g/mol}$ [3] und man erhält:

$$L = (142 \pm 5)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}}$$

Nach Formel (8) folgen die Massendurchsätze in Tabelle 4.

Tabelle 4: Massendurchsätze

$t\,/\,\mathrm{s}$	$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}\,/\,10^{-3}\,\mathrm{K/s}$	$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,/\,\mathrm{g/s}$
120	-19.06 $\pm$ 0.30	-1.78 $\pm$ 0.07
360	-17.19 $\pm$ 0.32	-1.61 $\pm$ 0.06
480	-16.26 $\pm$ 0.34	-1.55 $\pm$ 0.06
600	-15.32 $\pm$ 0.36	-1.43 $\pm$ 0.06

Der Fehler des Massendurchsatzes ergibt sich dabei mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(C\cdot\frac{1}{L}\cdot\Delta\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(C\cdot\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{L^2}\cdot\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{L}\cdot\Delta C\right)^2}$$

3.4 Bestimmung der Kompressorleistung

Es wird die Kompressorleistung N nach Formel (13) bestimmt. Dazu muss ρ aus der idealen Gasgleichung bestimmt werden. Durch Umformen folgt:

$$\rho = \frac{P_\mathrm{a}\cdot\rho_\mathrm{o}\cdot T_\mathrm{o}}{P_\mathrm{o}\cdot T_2}.$$

Mit $\rho_\mathrm{o} = 5{,}52\,\mathrm{g/L}$ bei $T_\mathrm{o} = 273{,}15\,\mathrm{K}$ und $p = 1\,\mathrm{bar}$ und $\kappa = 1.14$ ergeben sich die Werte, die in Tabelle 5 aufgeführt sind.

Tabelle 5: Kompressorleistung

$t\,/\,\mathrm{s}$	$\rho\,/\,\mathrm{kg/m^3}$	$N_\mathrm{mech}\,/\,\mathrm{W}$
120	23.63	11.9 $\pm$ 0.5
360	23.25	15.5 $\pm$ 0.6
480	22.09	19.0 $\pm$ 0.7
600	20.92	20.5 $\pm$ 0.9

4 Diskussion

Es wurden die Güte ν und der Massendurchsatz $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ der Wärmepumpe, sowie die mechanische Leistung N_mech des Kompressors bestimmt.

Es ist zu bemerken, dass die realen Güteziffern stark von der idealen abweichen. Dafür gibt es mehrere Gründe. Zunächst kann die Isolierung den Wärmeaustausch mit der Umgebung nicht vollständig verhindern. Außerdem waren die Skalen auf den

Manometern recht ungenau abzulesen. Darüber hinaus erfolgt die Kompression nicht absolut adiabatisch, sodass Energieverluste auftreten.

Desweiteren weicht der errechnete Wert der Verdampfungswärme $L = 142\,\mathrm{J/g}$ um $15\,08\%$ von dem Literaturwert $L_{\mathrm{lit}} = 167{,}22\,\mathrm{J/g}$ [2] ab. Das ist verglichen mit den Abweichungen der Güteziffern ein recht gutes Ergebnis.

5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 206: Die Wärmepumpe.*

[2]: CODATA 2010 `http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?r`

[3]: H.Schön: Handbuch der reinsten Gase. `http://extras.springer.com/2005/978-3-540-23215-5/PDF-Files/D021-0.PDF`

[4]: Student Resources for General Chemistry. `http://chemed.chem.wisc.edu/chempaths/GenChem-Textbook/Heat-Capacities-715.html`