Nr. 103

Biegung elastischer Stäbe

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 27.11.2018 Abgabe: 04.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, Elastizitätsmodule verschiedener Materialen zu ermitteln, indem die Biegung elastischer Stäbe untersucht wird.

1.1 Die Spannung an elastischen Körpern

Die physikalische Größe der mechanischen Spannung σ_m ist die wirkende Kraft F pro Fläche A. Sie setzt sich zusammen aus der Normalspannung σ, die senkrecht zur Oberfläche wirkt und einer tangential zur Fläche wirkenden Tangentialspannung.

Spannungen können an Körpern zu Gestalt- und Volumenveränderungen führen. Liegt durch Druck oder Zug eine Spannung nur in einer Körperdimension vor, so ist sie proportional zur Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ und es ergibt sich das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

mit dem materialspezifischen Elastizitätsmodul E als Proportionalitätsfaktor. Mithilfe einer hinreichend genauen Apparatur kann der Elastizitätsmodul durch Messung der Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ bestimmt werden.

Allerdings kann der Elastizitätsmodul E auch unter geringerem Kraftaufwand durch die Biegung von Stäben bestimmt werden, so wie es Gegenstand dieses Versuches sein soll. Hier reichen schon kleinere Kräfte aus, um eine Veränderung des Körpers zu bewirken. Dazu werden zwei unterschiedliche Arten der Biegung untersucht, wie sie in den Abbildungen , dargestellt sind.

Bei den dargestellten Biegungen handelt es sich um die Biegungen eines einseitig eingespannten und eines beidseitig aufgelegten Stabes.

1.2 Die Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Die am uneingespannten Ende des Stabes wirkende Gravitationskraft F eines aufgehängten Gewichtes biegt den Stab mit der Durchbiegung $D(x)$ aus und bewirkt ein angreifendes Drehmoment

$$M_{\mathrm{F}} = F \cdot (L - x) \tag{2}$$

mit der Länge des Hebelarms $(L - x)$.

Dieses Drehmoment verursacht eine Dehnung der oberen und eine Stauchung der unteren Stabschichten, sodass der Querschnitt Q sich nicht mehr in vertikaler, sondern in verdrehter Position befindet. Einzig die neutrale Faser in der Mitte des Querschnitts Q behält ihre Länge bei. An allen anderen Fasern kommt es , aufgrund der Elastizitäts des Körpers, zu Normalspannungen, die sich zu einem zu M_{F} entgegengesetzen Drehmoment M_σ aufsummieren:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y) \, \mathrm{d}q \tag{3}$$

Dabei beschreibt y den Abstand des Flächenelements dq zur neutralen Faser.
Zwischen den Drehmomenten stellt sich ein Gleichgewicht mit fester Durchbiegung $D(x)$ ein, sodass

$$M_\mathrm{F} = M_\sigma \tag{4}$$
$$\iff \int_Q y\sigma(y)\,\mathrm{d}q = F \cdot (L - x) \tag{5}$$

gilt.
Damit ergibt sich für die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{2E\boldsymbol{I}}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \tag{6}$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$\boldsymbol{I} = \int_Q y^2\,\mathrm{d}q(y) \tag{7}$$

1.3 Die Biegung eines Stabes mit beideitiger Auflage

Am beidseitig aufgelegten Stab wirkt nach Abblidung ... die Gravitationskraft $\frac{F}{2}$ eines Gewichtes an der Mitte der Querschnittsfläche Q mit einem Hebelarm der Länge x und bewirkt somit das Drehmoment

$$M_\mathrm{F} = -\frac{F}{2}x \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \tag{8}$$
$$M_\mathrm{F} = -\frac{F}{2}(L - x) \qquad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \tag{9}$$

Damit ergibt sich analog die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{48E\boldsymbol{I}}\left(3L^2x - 4x^3\right) \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \tag{10}$$
$$D(x) = \frac{F}{48E\boldsymbol{I}}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \qquad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \tag{11}$$

2 Durchführung

3 Auswertung

4 Diskussion