

Nr. 351

Fourier-Analyse und Synthese

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 15.01.2019

Abgabe: 22.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---------------------|----------|
| 1 | Theorie | 3 |
| 2 | Durchführung | 4 |
| 3 | Auswertung | 4 |
| 4 | Diskussion | 4 |

1 Theorie

Ziel dieses Versuches ist die Verifizierung der Fourier-Analyse und Synthese.

Nach dem Fourier-Theorem lassen sich zeitlich (oder räumlich) periodische Vorgänge mit der Periodendauer T , für die

$$f(t + T) = f(t) \quad (1)$$

gilt, durch Superposition von Sinus- und Kosinusfunktionen verschiedener Frequenzen und Amplituden genähert werden. Dafür konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) + b_k \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right) \quad (2)$$

gegen die periodische Funktion $f(t)$.

Die sogenannten Fourierkoeffizienten a_k und b_k sind die Amplituden der einzelnen Sinus- und Kosinusfunktionen und werden durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) dt \quad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) dt \quad (4)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ bestimmt.

Diese Ermittlung der Fourierkoeffizienten a_k und b_k wird als Fourieranalyse bezeichnet. Dabei verschwinden für gerade Funktionen mit $f(-t) = f(t)$ die Koeffizienten b_k mit den ungeraden Sinusfunktionen und für ungerade Funktionen mit $f(-t) = -f(t)$ die Koeffizienten a_k mit geraden Kosinusfunktionen.

Das Frequenzspektrum der fourieranalysierten Funktion entsteht durch Auftragung der Koeffizienten als Funktionen der Frequenzen. Da die Fourierentwicklung aus einer Summe über ganzzahlige k besteht, resultiert aus ihr ein Linienspektrum, dessen Linien gegen Null streben, da die Reihe konvergieren muss.

Konvergiert sie nicht, so liegt das an der Unstetigkeit der zu entwickelnden Funktion. Es tritt eine Abweichung an der Stelle der Unstetigkeit auf, welches als Gibbsches Phänomen bezeichnet wird.

Die Fourierentwicklung (2) enthält neben der Grundfrequenz $\nu_0 = \frac{2\pi}{T}$ deren ganzzahlige Vielfache - die Oberschwingungen. Außerdem können die Phasen nur 0 , $\frac{\pi}{2}$, π oder $\frac{3\pi}{2}$ betragen.

Nichtperiodische zeitabhängige Funktionen können fouriertransformiert werden, um ihr gesamtes Frequenzspektrum bestimmen zu können. Die Transformation

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt \quad (5)$$

gibt dabei das kontinuierliche Frequenzspektrum $g(\nu)$ wieder, welches durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \quad (6)$$

zurücktransformiert wird. Im Gegensatz zur Fourierentwicklung periodischer Funktionen, resultieren hieraus in der Praxis keine perfekten -Funktionen, sondern Peaks endlicher Breite, da die Integration über ein unendliches Intervall nicht realisierbar ist.

2 Durchführung

3 Auswertung

4 Diskussion