

Nr. 101

Das Trägheitsmoment

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 04.12.2018

Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	3
3	Auswertung	4
3.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße	4
3.2	Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse	6
3.2.1	Verifikation des Satzes von Steiner	8
3.3	Trägheitsmomente zweier einfacher Körper	8
3.4	Trägheitsmoment einer Puppe in zwei Stellungen	9
3.4.1	Gemessene Trägheitsmomente	9
3.4.2	Theoretische Trägheitsmomente	10
4	Diskussion	14

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu messen und den Steiner'schen Satz zu verifizieren.

Durch das Drehmoment M , das Trägheitsmoment I und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ wird die Dynmaik von Rotatoren beschrieben. Das Trägheitsmoment einer Punktmasse ist mit $I = m \cdot r^2$ gegeben. Bei mehreren Massenpunkten geht dies in eine Summe oder bei einer kontinuierlichen Masseverteilung in ein Intergral über. Sowohl das Trägheitsmoment als auch das Drehmoment sind dabei im Allgemeinen von der Lage des Körpers zur Drehachse abhängig. Wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt verläuft, so lässt sich das Trägheitsmoment mit dem Steiner'schen Satz berechnen:

$$I = I_S + ma^2 \quad (1)$$

Dabei ist I_S das Trägheitsmoment des Körpers, wenn die Drehachse mit der Schwerpunktsachse zusammenfällt und a der Abstand der Dreh- zur Schwerpunktsachse, wenn dies nicht der Fall ist. Außerdem ist m die Gesamtmasse des Körpers. Greift an einem Körper die Kraft \vec{F} am Ort \vec{r} an, so wirkt an diesem Körper das Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$. Sollte es sich um ein Schwingungsfähiges System handeln, so führt eine Auslenkung des Körpers aus seiner Ruhelage zu einem rücktreibendem Drehmoment. Für kleine Winkel schwingt ein solche harmonischer Oszillator näherungsweise mit der Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (2)$$

Dabei ist D die Winkelrichtgröße und I das Trägheitsmoment. Die Winkelrichtgröße D hängt mit dem Drehmoment über die Beziehung

$$M = D \cdot \varphi \quad (3)$$

zusammen. Die Winkelrichtgröße gibt dabei an, welches Drehmoment bei einer Auslenkung um den Winkel φ wirkt und kann mit zwei Methoden bestimmt werden. Zum einen die statistische und zum anderen die dynamische Methode. Bei der statistischen Methode wird der Auslenkwinkel φ als Funktion der wirkenden Kraft bzw. des Drehmoments bestimmt. Bei der dynamischen Methode wird D über die Periodendauer mit der Beziehung (2) bestimmt. Hierbei ist zu beachten, dass I bekannt sein muss. Durch Kombination dieser beiden Methoden können I und D gleichzeitig bestimmt werden.

2 Durchführung

Zunächst wird ein Stab senkrecht zur Drehachse eingespannt und mit einem Kraftmesser die Kraft am Hebelarm in Abhängigkeit des Winkels gemessen. Es werden insgesamt 10 Kraft-Winkel Paare gemessen. Dabei wird darauf geachtet, dass der Kraftmesser immer tangential zur Drehrichtung der Feder gehalten wird. Die Länge des Hebelarmes wird notiert. Anschließend werden entlang des "masselosen" Stabes zwei identische Gewichte

symmetrisch zur Drehachse angebracht. Mit Stoppuhren wird die Schwingungsdauer von 5 Schwingungsperioden des angeregten Systems gemessen. Dieser Vorgang wird für 10 verschiedene Abstände zwischen Gewichten und Drehachsen durchgeführt. Es wird die Masse der verwendeten Gewichte notiert.

Im zweiten Versuchsteil werden eine Kugel und ein Zylinder nacheinander auf der Drillachse befestigt. Erneut wird das System angeregt und die Schwingungsdauer von 5 Schwingungsperioden gemessen. Diese Einzelmessung wird für beide Körper insgesamt 10 mal durchgeführt.

Im dritten Versuchsteil wird die Messung der Schwingungsdauer einer Holzpuppe analog zum zweiten Teil für zwei verschiedene Stellungen durchgeführt. Die erste Stellung ist mit ausgestreckten Armen und die zweite mit angezogenen Armen gegeben. Zur Modellierung der Puppe, werden die Beine, Arme, Torso und Kopf separat ausgemessen. Dazu wird der Durchmesser und die Länge der Körper bestimmt. Zudem werden der Abstand von Armen und Beinen zur Drehachse und die Gesamtmasse der Puppe festgestellt.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die aufgenommenen Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße sind in Tabelle 1 zu finden. Dabei wurde die Kraft bei verschiedenen Auslenkwinkeln φ gemessen. Der Hebelarm hat die konstante Länge 0,3 m.

Tabelle 1: Ausgelenkter Winkel mit dazugehöriger Kraft

$Winkel / ^\circ$	$Winkel / rad$	F / mN	M / mNm
35	0.61	30	9.00
45	0.79	35	10.05
50	0.87	40	12.00
55	0.96	50	15.00
60	1.05	55	16.50
70	1.22	61	18.30
80	1.40	83	24.90
90	1.57	102	30.60
100	1.66	110	32.40
95	1.74	108	33.00

Anhand von Formel (3) ist zu erkennen, dass die Winkelrichtgröße D lediglich ein Proportionalitätsfaktor zwischen Drehmoment M und Winkel φ ist. Zur Ermittlung dieser Größe wird eine lineare Regression mittels python und matplotlib durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 1 zu sehen.

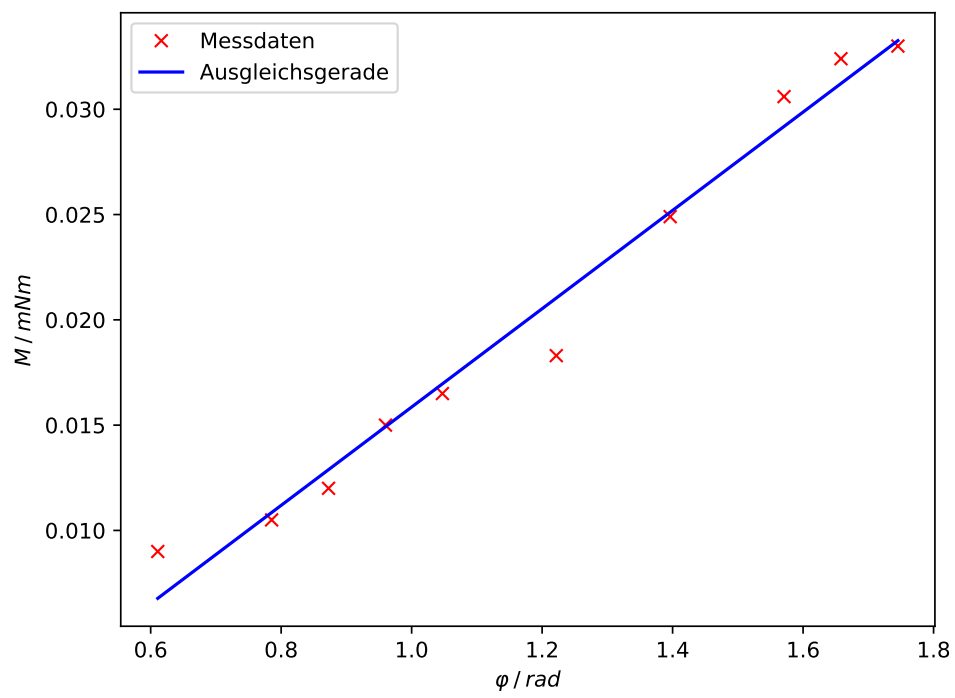


Abbildung 1: Darstellung des Zusammenhanges zwischen M und φ

Die Ausgleichsgerade ist gegeben mit $M(\varphi) = a \cdot \varphi + b$. Für die Regressionsparameter ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= (23,34 \pm 1,43) \text{ mN m} \\ b &= (-7,50 \pm 1,78) \text{ mN m} \end{aligned}$$

Der Steigungsfaktor b entspricht dabei der Winkelrichtgröße D . Somit ergibt sich:

$$D = (23,34 \pm 1,43) \text{ mN m}$$

3.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse wird die Periodendauer T in Abhängigkeit des Abstands a der Gewichte zur Drillachse gemessen. Die erhaltenen Daten sind in Tabelle 2 aufgeführt. Dabei ist T_7 die gemessene Dauer für 7 Perioden.

Tabelle 2: Messwerte zum Trägheitsmoment der Drehachse

a / m	a^2 / m^2	T_7 / s	T / s	T^2 / s^2
0.2700	0.0729	57.93 ± 0.5	8.28 ± 0.071	68.49 ± 1.18
0.2300	0.0529	50.30 ± 0.5	7.19 ± 0.071	51.63 ± 1.03
0.2090	0.0437	46.89 ± 0.5	6.70 ± 0.071	44.87 ± 0.96
0.1885	0.0355	43.00 ± 0.5	6.14 ± 0.071	37.73 ± 0.88
0.1695	0.0287	40.10 ± 0.5	5.73 ± 0.071	32.82 ± 0.82
0.1490	0.0222	35.72 ± 0.5	5.10 ± 0.071	26.04 ± 0.73
0.1295	0.1677	32.58 ± 0.5	4.65 ± 0.071	21.66 ± 0.66
0.1090	0.0119	28.85 ± 0.5	4.12 ± 0.071	16.99 ± 0.59
0.0890	0.0079	25.49 ± 0.5	3.64 ± 0.071	13.26 ± 0.52
0.0690	0.0048	22.36 ± 0.5	1.19 ± 0.071	10.20 ± 0.46

Aus (??) und (2) folgt der Zusammenhang:

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2 m}{D}}_{\hat{=s}} \cdot a^2 + \underbrace{\frac{4\pi^2}{D} I_D}_{\hat{=b}}$$

Mittels linearer Regression wird nun der als b bezeichnete Parameter ermittelt und daraus das gesuchte Trägheitsmoment I_D berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 dargestellt.

Die Parameter der Ausgleichsgerade ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} s &= (905,17 \pm 54,89) \text{ s}^2/\text{m}^2 \\ b &= (4,59 \pm 1,99) \text{ s}^2 \end{aligned}$$

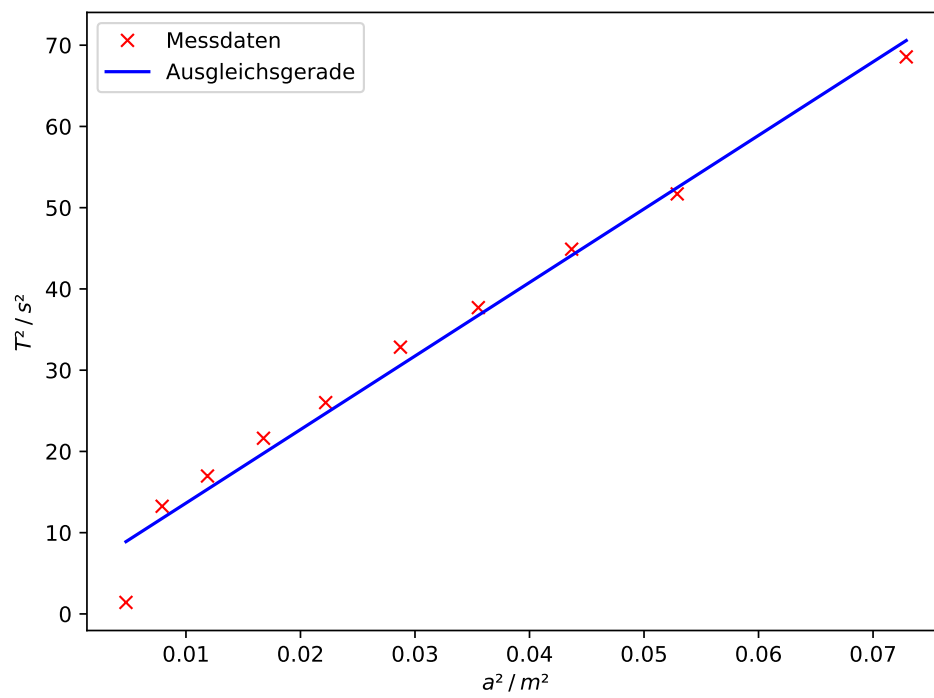


Abbildung 2: T^2 gegen a^2 aufgetragen mit eingezeichnete Regression

Damit berechnet sich I_D zu:

$$I_D = \frac{b \cdot D}{4\pi^2} = (2,7 \pm 1,2) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Der statistische Fehler berechnet sich dabei mit der Gaußschenfehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{b}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2}$$

3.2.1 Verifikation des Satzes von Steiner

Anhand der Daten, die zur Ermittlung des Eigenträgheitsmoments I_D berechnet wurden, lässt sich der Satz von Steiner verifizieren. Die verwendete Regressionsformel (3.2) folgt unter der Annahme, dass der Steiner'sche Satz gilt. Diese Formel fordert einen linearen Zusammenhang zwischen T^2 und a^2 . Wie in Abbildung 2 zu erkennen ist, lässt sich dieser Zusammenhang bestätigen. Die Geradensteigung

$$s = (905,17 \pm 54,89) \text{ s}^2/\text{m}^2$$

passt ebenfalls zu dem theoretischen Wert, der sich mit der Gesamtmasse der Gewichte $m = 2 \cdot 0,2218 \text{ kg}$ eingesetzt in die Definition von s in Formel (3.2) zu dem Wert:

$$s_{theo} = (750 \pm 50) \text{ s}^2/\text{m}^2$$

ergibt. Dabei ist der Fehler des theoretischen Wertes gegeben durch:

$$\Delta s = \frac{-4\pi^2 m}{D^2}$$

3.3 Trägheitsmomente zweier einfacher Körper

Die zu untersuchenden Körper werden oben auf der Drillachse befestigt, zum Schwingen gebracht und die Periodendauer T gemessen. Es werden zwei Körper untersucht: Ein Zylinder und eine Kugel. Diese Körper besitzen folgende Maße:

$$m_Z = 1005,9 \text{ g}$$

$$d_Z = (7,95 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$m_K = 812,4 \text{ g}$$

$$r_K = (7,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Die ermittelten Periodendauer und Trägheitsmomente finden sich in Tabelle 3. Dabei ergeben sich die Fehler der Trägheitsmomente zu:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{TD}{2\pi^2} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2}$$

Tabelle 3: Messwerte Kugel und Zylinder

Zylinder		Kugel	
T_Z / s	$I_Z / 1 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$	T_K / s	$I_K / 1 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
1.21 ± 0.07	0.862 ± 0.115	1.73 ± 0.71	1.769 ± 0.182
1.14 ± 0.07	0.770 ± 0.107	1.69 ± 0.71	1.691 ± 0.176
1.15 ± 0.07	0.782 ± 0.108	1.73 ± 0.71	1.767 ± 0.182
1.15 ± 0.07	0.782 ± 0.108	1.66 ± 0.71	1.629 ± 0.172
1.16 ± 0.07	0.196 ± 0.109	1.69 ± 0.71	1.686 ± 0.176
$\bar{I}_Z = (0,80 \pm 0,07) \text{ kgm}^2$		$\bar{I}_K = (1,71 \pm 0,12) \text{ kgm}^2$	

Nun werden die theoretischen Trägheitsmomente der beiden Körper berechnet, um die experimentell ermittelten Daten mit diesen zu vergleichen. Die Trägheitsmomente der Kugel, bzw. des Zylinders werden hierbei mit den bekannten Formeln berechnet:

$$I_{K,theo} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$I_{Z,theo} = \frac{1}{2}mR^2$$

Mit den Maßen der verwendeten Körper ergeben sich somit:

$$I_{K,theo} = (1,828 \pm 0,024) \text{ kgm}^2$$

$$I_{Z,theo} = (0,795 \pm 0,010) \text{ kgm}^2$$

Die experimentell bestimmten Trägheitsmomente weichen von den theoretischen Werten um 6,9 % bei der Kugel und um 0,625 % bei dem Zylinder ab.

3.4 Trägheitsmoment einer Puppe in zwei Stellungen

3.4.1 Gemessene Trägheitsmomente

Die Trägheitsmomente sollen durch eine Zeitmessung und das Umstellen der Formel (2) zu

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (4)$$

bestimmt werden. In Tabelle 4 sind die gemessenen Periodendauern T_1 für eine Puppe mit anliegenden und T_2 für eine Puppe mit ausgestreckten Armen aufgelistet. In beiden Positionen befinden sich die Beine der Puppe parallel zum Oberkörper.

Daraus ergeben sich die Trägheitsmomente I_1, I_2 für die Positionen 1 und 2 der Puppe.

Tabelle 4: Messwerte der Periodendauern

T_1 / s	T_2 / second
3.22 ± 0.5	4.33 ± 0.5
3.16 ± 0.5	4.26 ± 0.5
3.22 ± 0.5	4.20 ± 0.5
3.08 ± 0.5	4.57 ± 0.5
3.17 ± 0.5	4.51 ± 0.5

$$I_1 = (5,9 \pm 0,9) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$I_2 = (11,3 \pm 1,3) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

3.4.2 Theoretische Trägheitsmomente

Wie in Abbildung 3 dargestellt, kann die Figur durch geometrische Figuren genähert werden. Dabei beschreiben die Figuren K_i den Kopf, T_i den Torso, A_i die Arme und B_i die Beine.

Die verwendeten geometrischen Figuren sind (Halb-)Kugeln - als (Halb-)Kreise dargestellt und mit angegebenen Radien r -, Zylinder - als Rechtecke dargestellt und mit angegebenen Radien r und Höhen h -, Quader - als Rechtecke dargestellt und mit angegebenen Seitenlängen a , b , c - und Kegelstümpfe - als Trapeze dargestellt und mit angegebenen Radien r_1 und r_2 .

Die Abmessungen und resultierenden Volumina V dieser Figuren sind in Tabelle 5 aufgelistet.

Die Volumina ergeben sich nach den Formeln in Tabelle 6. Zur Massenbestimmung der einzelnen Bestandteil werden die Teilvolumina V_i zum Gesamtvolumen $V = 26,63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ aufsummiert. Dabei ist darauf zu achten, dass die Komponenten der Arme und Beine jeweils doppelt vorhanden sind. Mit der Gesamtmasse $m = 0,1626 \text{ kg}$ ergibt sich die Dichte

$$\rho = \frac{m}{V} = (611 \pm 8) \text{ kg/m}^3 \quad (5)$$

Wird von einer homogenen Dichte ausgegangen, berechnen sich die Massen der einzelnen Komponenten nach Umstellen von (5) zu

$$m_i = \rho \cdot V \quad (6)$$

Mit diesen Einzelmassen lassen sich nach Tabelle 6 die Trägheitsmomente der einzelnen Körper bestimmen, welche in Tabelle ... aufgelistet sind.

Da die Schwerpunkte der Komponenten der Arme und Beine nicht auf der Drehachse liegen, muss für diese der Satz von Steiner nach (??) beachtet werden. Nach diesem addiert sich zu jedem Trägheitsmoment das Produkt von Masse m_i und Abstand

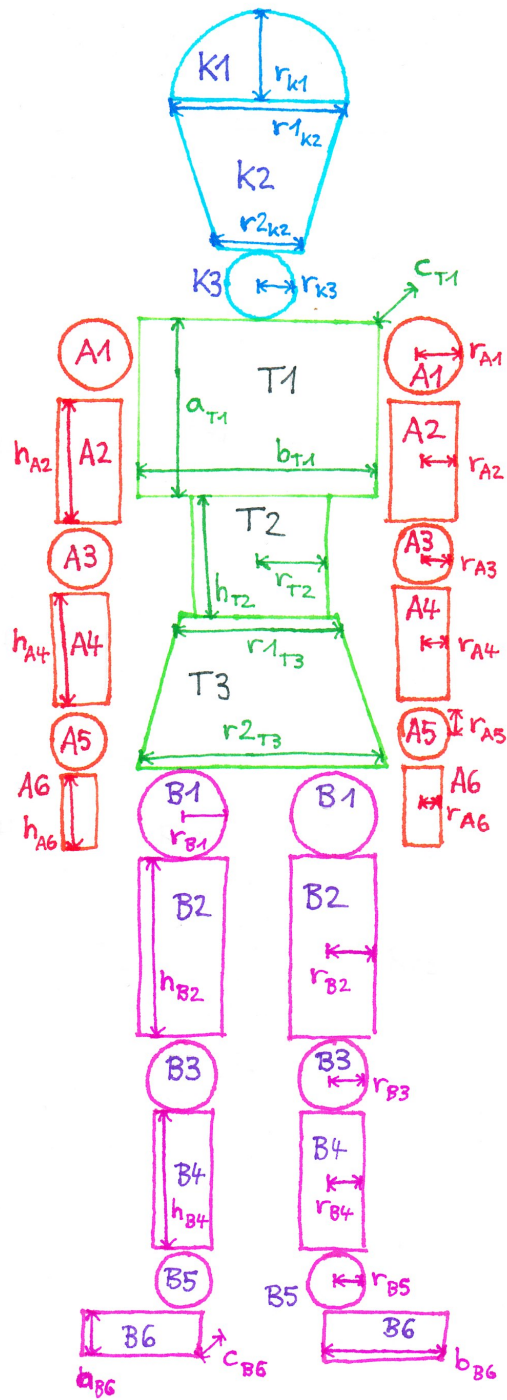


Abbildung 3: Puppe mit anliegenden Armen, unterteilt in verschiedene geometrische Figuren

Tabelle 5: Abmessungen der Figuren

Figur	Abmessungen	in mm	$V/10^{-5} \text{ m}^3$
$K1$	$r_{K1} =$	16.00 ± 0.25	1.72 ± 0.08
$K2$	$r1_{K2} =$	16.00 ± 0.25	2.35 ± 0.08
	$r2_{K2} =$	9.50 ± 0.25	
	$h_{K2} =$	45.50 ± 0.50	
$K3$	$r_{K3} =$	8.00 ± 0.25	0.21 ± 0.02
$T1$	$a_{T1} =$	48.70 ± 0.50	7.01 ± 0.15
	$b_{T1} =$	40.00 ± 0.50	
	$c_{T1} =$	36.00 ± 0.50	
$T2$	$r_{T2} =$	12.85 ± 0.25	0.69 ± 0.04
	$h_{T2} =$	13.30 ± 0.50	
$T3$	$r1_{T3} =$	15.15 ± 0.25	3.41 ± 0.08
	$r2_{T3} =$	19.70 ± 0.25	
	$h_{T3} =$	35.50 ± 0.50	
$A1$	$r_{A1} =$	8.00 ± 0.25	0.21 ± 0.02
$A2$	$r_{A2} =$	8.00 ± 0.25	0.86 ± 0.05
	$h_{A2} =$	42.80 ± 0.50	
$A3$	$r_{A3} =$	5.80 ± 0.25	0.08 ± 0.01
$A4$	$r_{A4} =$	7.15 ± 0.25	0.69 ± 0.05
	$h_{A4} =$	42.80 ± 0.50	
$A5$	$r_{A5} =$	4.75 ± 0.25	0.05 ± 0.01
$A6$	$r_{A6} =$	7.75 ± 0.25	0.50 ± 0.03
	$h_{A6} =$	26.70 ± 0.50	
$B1$	$r_{B1} =$	8.40 ± 0.25	0.25 ± 0.02
$B2$	$r_{B2} =$	9.10 ± 0.25	1.47 ± 0.08
	$h_{B2} =$	56.40 ± 0.50	
$B3$	$r_{B3} =$	6.25 ± 0.25	0.10 ± 0.01
$B4$	$r_{B4} =$	7.35 ± 0.25	1.13 ± 0.08
	$h_{B4} =$	66.30 ± 0.50	
$B5$	$r_{B5} =$	4.60 ± 0.25	0.04 ± 0.01
$B6$	$a_{B6} =$	5.40 ± 0.25	0.25 ± 0.02
	$b_{B6} =$	42.30 ± 0.50	
	$c_{B6} =$	10.80 ± 0.50	

Tabelle 6: Volumina und Trägheitsmomente verschiedener Figuren

Figur	V	I
Kugel	$= \frac{4}{3}\pi r^3$	$= \frac{2}{5}mr^2$
Halbkugel	$= \frac{2}{3}\pi r^3$	$= \frac{83}{320}mr^2$
Zylinder um h	$= \pi r^2 \cdot h$	$= \frac{1}{2}mr^2$
Zylinder um r	$= \pi r^2 \cdot h$	$= \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$
Quader	$= a \cdot b \cdot c$	$= \frac{3}{10}m \frac{r_g^5 - r_k^5}{r_g^3 - r_k^3}$
Kegelstumpf	$= \frac{h\pi}{3} \cdot (r_g^2 + r_g r_k + r_k^2)$	$= \frac{1}{12}m (b^2 + c^2)$

Tabelle 7: Trägheitsmomente

Figur	$I_i / 10^{-7} \text{ kgm}^2$	$a_i / \text{ mm}$	$I_{i,\text{Steiner}} / 10^{-7} \text{ kgm}^2$
$K1$	10.70 ± 0.80	-	-
$K2$	12.90 ± 0.70	-	-
$K3$	0.30 ± 0.05	-	-
$T1$	103.00 ± 4.00	-	-
$T2$	3.50 ± 0.30	-	-
$T3$	32.50 ± 1.40	-	-
$B1$	0.43 ± 0.06	12.5 ± 1.5	2.80 ± 0.60
$B2$	3.70 ± 0.04	16.0 ± 1.5	27.00 ± 5.00
$B3$	0.10 ± 0.02	13.0 ± 1.5	1.15 ± 0.28
$B4$	1.86 ± 0.24	19.0 ± 1.5	27.00 ± 4.00
$B5$	0.02 ± 0.01	14.0 ± 1.5	0.51 ± 0.13
$B6$	2.39 ± 0.25	15.0 ± 1.5	5.80 ± 0.90
$A1$	0.34 ± 0.05	30.0 ± 1.5	12.10 ± 1.60
$A2$	1.68 ± 0.21	27.5 ± 1.5	41.00 ± 5.00
$A3$	0.07 ± 0.01	27.5 ± 1.5	3.80 ± 0.60
$A4$	1.07 ± 0.15	30.0 ± 1.5	39.00 ± 5.00
$A5$	0.03 ± 0.01	30.0 ± 1.5	2.50 ± 0.50
$A6$	0.92 ± 0.12	30.0 ± 1.5	28.60 ± 3.40
$A1_{\text{gestreckt}}$	0.34 ± 0.05	30.0 ± 1.5	12.10 ± 1.60
$A2_{\text{gestreckt}}$	8.90 ± 0.06	59.0 ± 1.5	192.00 ± 15.00
$A3_{\text{gestreckt}}$	0.07 ± 0.01	83.0 ± 1.5	34.00 ± 5.00
$A4_{\text{gestreckt}}$	6.90 ± 0.60	108.0 ± 1.5	500.00 ± 40.00
$A5_{\text{gestreckt}}$	0.03 ± 0.01	131.0 ± 1.5	47.00 ± 8.00
$A6_{\text{gestreckt}}$	2.29 ± 0.21	146.5 ± 1.5	660.00 ± 50.00

zwischen Schwerpunkt und Drehachse zum Quadrat a_i^2 zum Trägheitsmoment auf der Drehachse. Somit ergeben sich nach Tabelle 7 für die Komponenten mit Abständen a_i die Trägheitsmomente $I_{i,\text{Steiner}}$.

Diese summieren sich für Position 1 und 2 zu

$$I_1 = (5,45 \pm 0,19) \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

$$I_2 = (31,8 \pm 1,2) \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

4 Diskussion