

Nr. 408

## **Geometerische Optik**

Sara Krieg  
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel  
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 07.05.2019

Abgabe: 14.05.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

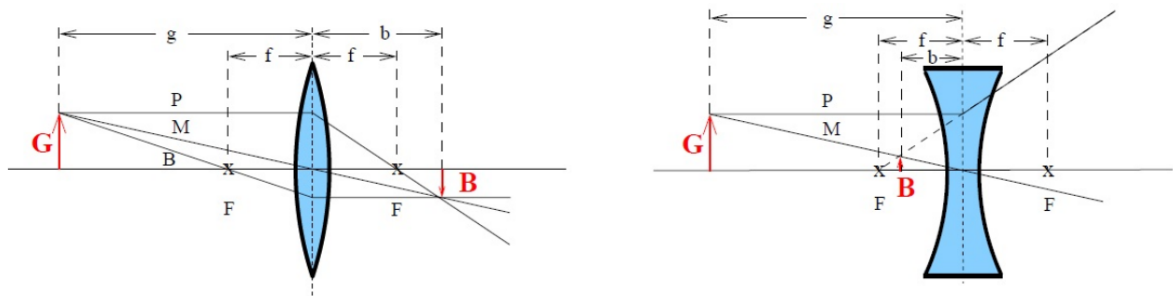
<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Die Bessel-Methode . . . . .	4
1.2	Die Abbe-Methode . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
3.1	Bestätigung des Linsengesetzes . . . . .	7
3.2	Methode von Bessel . . . . .	9
3.3	Methode von Abbe . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>14</b>

# 1 Theorie

Ziele dieses Versuches sind die Bestimmung von Brennweiten  $f$  verschiedener Linsen und Linsensysteme, mitunter nach den Methoden von Bessel und Abbe, sowie die Verifizierung des Abbildungsgesetzes und der Linsengleichung.

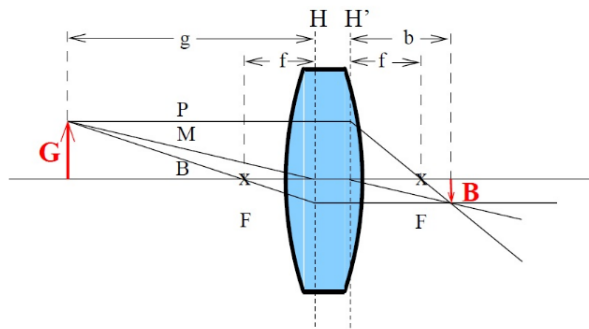
Linsen sind Objekte optisch dickeren Mediums als ihre Umgebung, die Lichtstrahlen nach dem Brechungsgesetz brechen. Es wird zwischen bündelnden konvexen Sammellinsen mit jeweils positiver Brennweite  $f$  und Bildweite  $b$ , die ein reelles Bild erzeugen, und zerstreuenen, konkaven Streulinsen mit jeweils negativen  $f$  und  $b$ , die ein virtuelles Bild erzeugen, unterschieden.

In Abbildung 1 sind die Bildkonstruktionen beider Linsentypen dargestellt.



**Abbildung 1:** Bildkonstruktionen einer Sammellinse (rechts) und Streulinse (links) [1]

Für dicke Linsen kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass die Brechung in der Mittelebene stattfindet. Stattdessen werden zwei Hauptebenen  $H, H'$  betrachtet, an denen Brechung stattfindet (s. Abbildung 2).



**Abbildung 2:** Bildkonstruktionen einer dicken Sammellinse [1]

Die ausgezeichneten Strahlen, die in der Bildkonstruktion betrachtet werden, sind der Mittelpunktstrahl M, der Brennpunktstrahl B und der Parallelstrahl P. Die beiden letzteren wandeln sich an der Brechebene in den jeweils anderen.

Es gelten außerdem das Abbildungsgesetz

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

mit der Bildgröße  $B$ , Gegenstandsgröße  $G$  und Gegenstandsweite  $g$  und für dünne Linsen die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} . \quad (2)$$

Die Linsengleichung (2) gilt auch für dicke Linsen, wenn  $b$  und  $g$  bezüglich der Hauptebenen bestimmt werden.

Des weiteren wird die optische Brechkraft  $D$  definiert als

$$D = \frac{1}{f} = \sum_i^N D_i \quad (3)$$

und summiert sich bei einem Mehrlinsensystem aus den jeweiligen Brechkraften  $D_i$  auf. Außerdem können verschiedene Abbildungsfehler auftreten. Zwei von ihnen sind die sphärische Abberation, die darin besteht, dass sich die Brennweiten mittelachsennaher und -ferner Strahlen unterscheiden, sowie die chromatische, nach der Lichtstrahlen verschiedener Wellenlängen unterschiedlich stark gebrochen werden. Kurzwelliges Licht wird stärker gebrochen, als langwelliges.

### 1.1 Die Bessel-Methode

Nach dieser Methoden bleibt der Abstand  $e$  zwischen Gegenstand und Schirm konstant und es werden die zwei Linsenpositionen ermittelt, bei denen das Bild scharf ist. Wie auch in Abbildung 3 dargestellt sind die Positionen symmetrisch und die Werte für  $b$  und  $g$  jeweils vertauscht.

Die Brennweite berechnet sich nach der Gleichung

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (4)$$

mit den Abständen

$$\begin{aligned} e &= g_1 + b_1 = g_2 + b_2 \\ d &= |g_1 - b_1| = |g_2 - b_2| . \end{aligned}$$

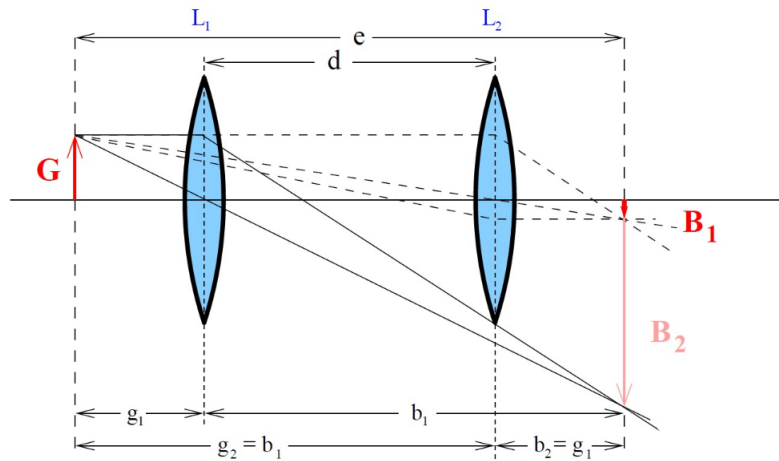


Abbildung 3: Bildkonstruktionen der Bessel-Methode [1]

## 1.2 Die Abbe-Methode

Diese Methode untersucht die Brennweite eines Linsensystems, bei dem zwischen Gegenstand und Sammellinse eine Streulinse justiert wird, wie in Abbildung 4 dargestellt. Der Abstand zwischen den Linsen soll dabei konstant bleiben. Auch hier wird die Position für ein scharfes Bild ermittelt und  $b$ ,  $g$  und  $b'$ ,  $g'$  bezüglich eines Referenzpunktes A gemessen.

Die Brennweite  $f$  kann dann aus den Gleichungen

$$g' = g + h = f \left( 1 + \frac{1}{V} \right) + h \quad (5)$$

$$b' = b + h' = f(1 + V) + h' \quad (6)$$

bestimmt werden.

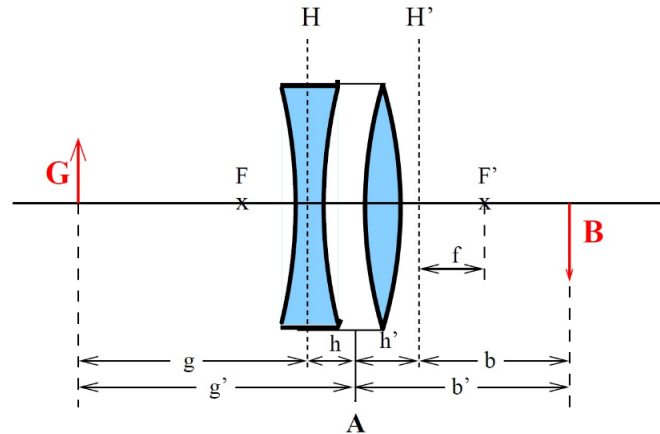


Abbildung 4: Bildkonstruktionen der Abbe-Methode [1]

## 2 Durchführung

Der Versuchsaufbau besteht im Wesentlichen aus dem Gegenstand, einer optischen L-Schablone, die von einer Halogenleuchte beleuchtet wird und dem Schirm, der wie der Gegenstand auf einer optischen Bank verschiebbar aufgehängt ist.

Zunächst werden zur Verifizierung des Abbildungsgesetzes und der Linsengleichung mit einer Sammellinse bekannter Brennweite  $f$  für verschiedene Gegenstandsweiten  $g$  der Schirm jeweils so justiert, dass das Bild scharf ist und die Bildweiten  $b$  und Bildgrößen  $B$  gemessen.

Weiterhin wird die Bessel-Methode zur Brennweitenbestimmung durchgeführt. Dabei wird für verschiedene feste Abstände  $e$  zwischen Gegenstand und Schirm eine Sammellinse so verschoben, dass auf dem Schirm ein scharfes Bild abgebildet wird. Für die jeweils zwei Positionen werden jeweils die Gegenstandsweiten  $g_1$  und  $g_2$ , sowie die Bildweiten  $b_1$  und  $b_2$  gemessen. Dies wird zudem nochmals jeweils mit blau und rot gefiltertem Licht durchgeführt. Außerdem ist zu beachten, dass  $e$  mindestens vier mal größer als die Brennweite  $f$  der Linse sein muss.

Zuletzt wird die Abbe-Methode angewandt. Dazu wird zwischen den Gegenstand und eine Sammellinse mit Brennweite  $f = 100$  eine Zerstreuungslinse mit Brennweite  $f = -100$  geklemmt, die einen konstanten Abstand zur Sammellinse behalten soll. Es werden ein Referenzpunkt  $A$  für die Messung festgelegt und für verschiedene Gegenstandsweiten  $g'$  der Schirm so justiert, dass ein scharfes Bild entsteht und die jeweils zugehörige Bildweite  $b'$  und Bildgröße  $B$  gemessen.

### 3 Auswertung

#### 3.1 Bestätigung des Linsengesetzes

Bei der ersten Messung wurden  $g$ ,  $b$  und  $B$  bestimmt. Unter Verwendung des Linsengesetzes kann zunächst  $f$  bestimmt werden. Für die Linse bekannter Brennweite (0,150 m) ergibt sich somit Tabelle 1. Das Abbildungsgesetz kann überprüft werden, indem für jeden Messwert  $V_1 = \frac{b}{g}$  und  $V_2 = \frac{B}{G}$  bestimmt wird. Weiter wird die Differenz  $|\Delta V|$  berechnet. Hierbei erkennt man, dass diese Differenz für jeden der Messwerte bei der Linse sehr klein ist.

**Tabelle 1:** Messwerte und Brennweite der Linse mit bekannter Brennweite.

$g$ / m	$b$ / m	$B$ / m	$V_1$	$V_2$	$ \Delta V $	$f$ / meter
0,25	0,465	0,0450	1,860	1,500	0,360	0.163
0,30	0,356	0,0260	1,867	0,867	0,320	0.163
0,35	0,300	0,0190	0,857	0,633	0,224	0.162
0,40	0,277	0,0160	0,693	0,533	0,159	0.164
0,45	0,257	0,0125	0,571	0,417	0,154	0.164
0,50	0,243	0,0110	0,486	0,367	0,119	0.164
0,55	0,233	0,0095	0,424	0,317	0,107	0.164
0,60	0,226	0,0080	0,377	0,267	0,110	0.164
0,65	0,218	0,0070	0,335	0,233	0,102	0.163
0,70	0,205	0,0065	0,293	0,217	0,076	0.159

Aus Tabelle 1 folgt somit für den Brennpunkt  $f$  als Mittelwert

$$(0,163 \pm 0,002) \text{ m.}$$

Werden die Wertepaare  $(g_i, b_i)$  auf die Achsen eines Koordinatensystems aufgetragen, und die zugehörigen Paare miteinander verbunden, so ergibt sich für die Linse bekannter Brennweite Abbildung 5.

Es ist ein Ausreißer zu erkennen (cyan Gerade), der beim Ablesen der Brennweite außer Acht gelassen wird. Der Schnittpunkt aller Geraden der Messwerte bestimmt den Brennpunkt  $f$  der Linse. Dieser Schnittpunkt wird so genau wie möglich abgelesen. Es ergibt sich der Punkt

$$(0,16 \text{ m} | 0,16 \text{ m}).$$

und da die beiden Werte gleich sind, ergibt sich

$$f = 0,16 \text{ m.}$$

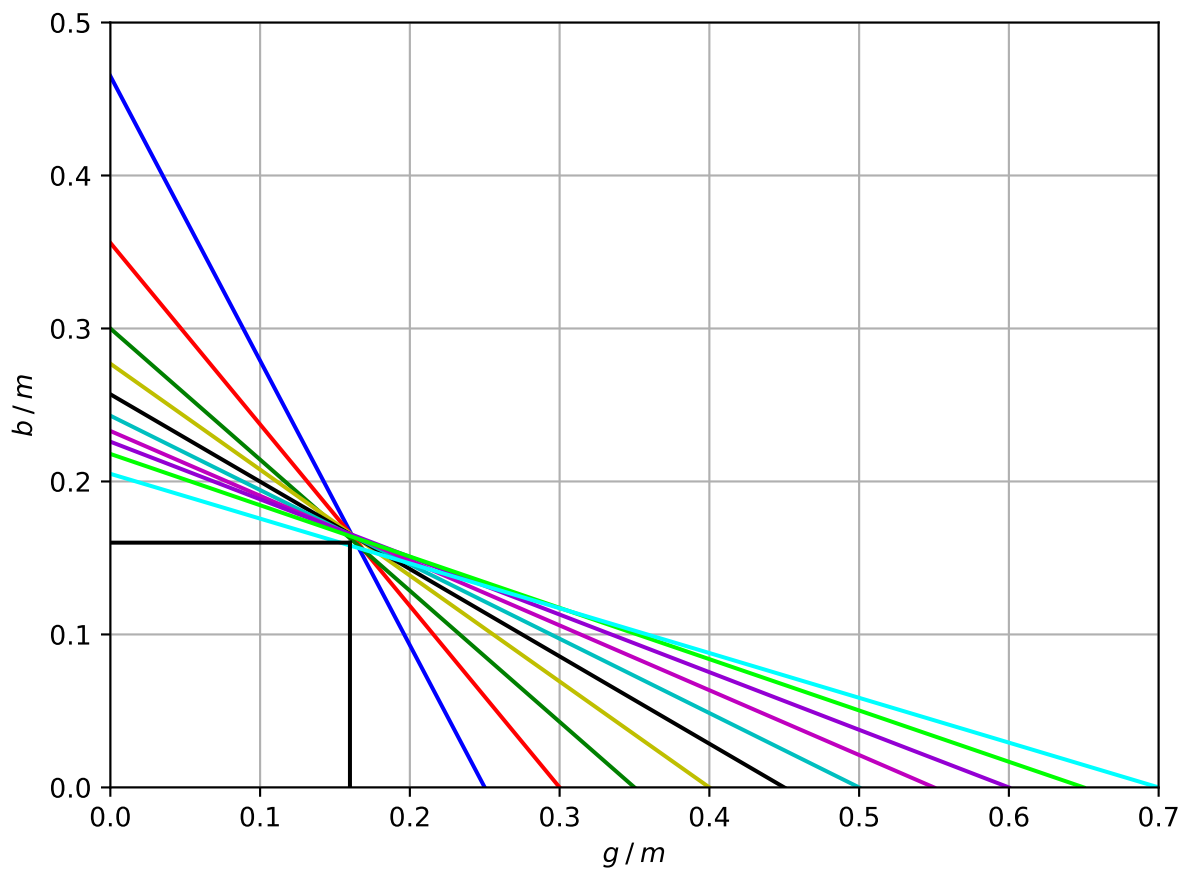


Abbildung 5: Wertepaare  $f$  bekannt.



### 3.2 Methode von Bessel

Bei der zweiten Messung wurden die beiden Positionen mit scharfem Bild für ungefiltertes, blaues und rotes Licht nach der Methode nach Bessel bestimmt. Aus diesen Messwerten lässt sich nach Formel (4) die Brennweite der Linse bestimmen. Alle Messwerte, sowie die für die einzelnen Messwerte berechneten Brennweiten sind in Tabelle 2, 3 und 4 dargestellt.

**Tabelle 2:** Besselmethode ungefiltertes Licht.

$e / \text{m}$	$g_1 / \text{m}$	$b_1 / \text{m}$	$g_2 / \text{m}$	$b_2 / \text{m}$	$ g_1 - b_1 $	$ g_2 - b_2 $	$f_1 / \text{m}$	$f_2 / \text{m}$
0,900	0,2120	0,6880	0,687	0,213	0,476	0,474	0,162	0,163
0,850	0,2170	0,6330	0,632	0,218	0,416	0,414	0,162	0,162
0,820	0,2240	0,5960	0,598	0,222	0,372	0,376	0,163	0,162
0,800	0,2270	0,5730	0,572	0,228	0,346	0,344	0,163	0,163
0,770	0,2310	0,5390	0,532	0,238	0,308	0,294	0,162	0,164
0,750	0,2365	0,5135	0,510	0,240	0,277	0,270	0,162	0,163
0,720	0,2470	0,4730	0,468	0,252	0,226	0,216	0,162	0,164
0,700	0,2550	0,4450	0,445	0,255	0,190	0,190	0,162	0,162
0,675	0,2720	0,4030	0,402	0,273	0,131	0,129	0,162	0,163
0,650	0,3070	0,3430	0,352	0,298	0,036	0,054	0,162	0,161

**Tabelle 3:** Besselmethode rotes Licht.

$e / \text{m}$	$g_1 / \text{m}$	$b_1 / \text{m}$	$g_2 / \text{m}$	$b_2 / \text{m}$	$ g_1 - b_1 $	$ g_2 - b_2 $	$f_1 / \text{m}$	$f_2 / \text{m}$
0,90	0,214	0,686	0,683	0,217	0,472	0,466	0,163	0,165
0,85	0,220	0,630	0,627	0,223	0,410	0,404	0,163	0,164
0,80	0,228	0,572	0,570	0,230	0,344	0,340	0,163	0,164
0,75	0,240	0,510	0,509	0,241	0,270	0,268	0,163	0,164
0,70	0,261	0,439	0,442	0,258	0,178	0,184	0,164	0,163

**Tabelle 4:** Besselmethode blaues Licht.

$e / \text{m}$	$g_1 / \text{m}$	$b_1 / \text{m}$	$g_2 / \text{m}$	$b_2 / \text{m}$	$ g_1 - b_1 $	$ g_2 - b_2 $	$f_1 / \text{m}$	$f_2 / \text{m}$
0,90	0,212	0,688	0,687	0,213	0,476	0,474	0,162	0,163
0,85	0,218	0,632	0,631	0,219	0,414	0,412	0,162	0,163
0,80	0,227	0,573	0,572	0,226	0,346	0,346	0,163	0,163
0,75	0,236	0,514	0,511	0,239	0,278	0,272	0,162	0,163
0,70	0,250	0,445	0,442	0,258	0,195	0,184	0,161	0,163

Aus diesen Tabellen ergeben sich als Mittelwerte für die Brennweiten

$$\begin{aligned}
f &= (0,1621 \pm 0,0003) \text{ m}, \\
f_{\text{rot}} &= (0,1639 \pm 0,0006) \text{ m}, \\
f_{\text{blau}} &= (0,1627 \pm 0,0001) \text{ m}.
\end{aligned}$$

### 3.3 Methode von Abbe

Bei der dritten Messung soll die Brennweite, sowie die Positionen der Hauptebene eines Linsensystems bestimmt werden. Aus den gemessenen Werten für  $B$  lässt sich der Abbildungsmaßstab  $V$  bestimmen. Daraus wiederum lassen sich die Größen  $(1 + \frac{1}{V})$  und  $(1 + V)$  berechnen. Diese Größen sind in Tabelle 5 eingetragen.

**Tabelle 5:** Messwerte Methode nach Abbe

$g' / \text{m}$	$b' / \text{m}$	$B / \text{m}$	$V$	$1 + \frac{1}{V}$	$1 + V$
0,20	0,740	0,0570	1,90	1,526	2,90
0,25	0,555	0,0340	1,13	1,882	2,13
0,30	0,470	0,0230	0,77	2,304	1,77
0,35	0,433	0,0180	0,60	2,667	1,60
0,40	0,395	0,0190	0,63	2,579	1,63
0,45	0,385	0,0120	0,40	3,500	1,40
0,47	0,372	0,0125	0,42	3,400	1,42
0,50	0,370	0,0100	0,33	4,000	1,33
0,55	0,353	0,0090	0,30	4,333	1,30
0,60	0,350	0,0080	0,27	4,750	1,37

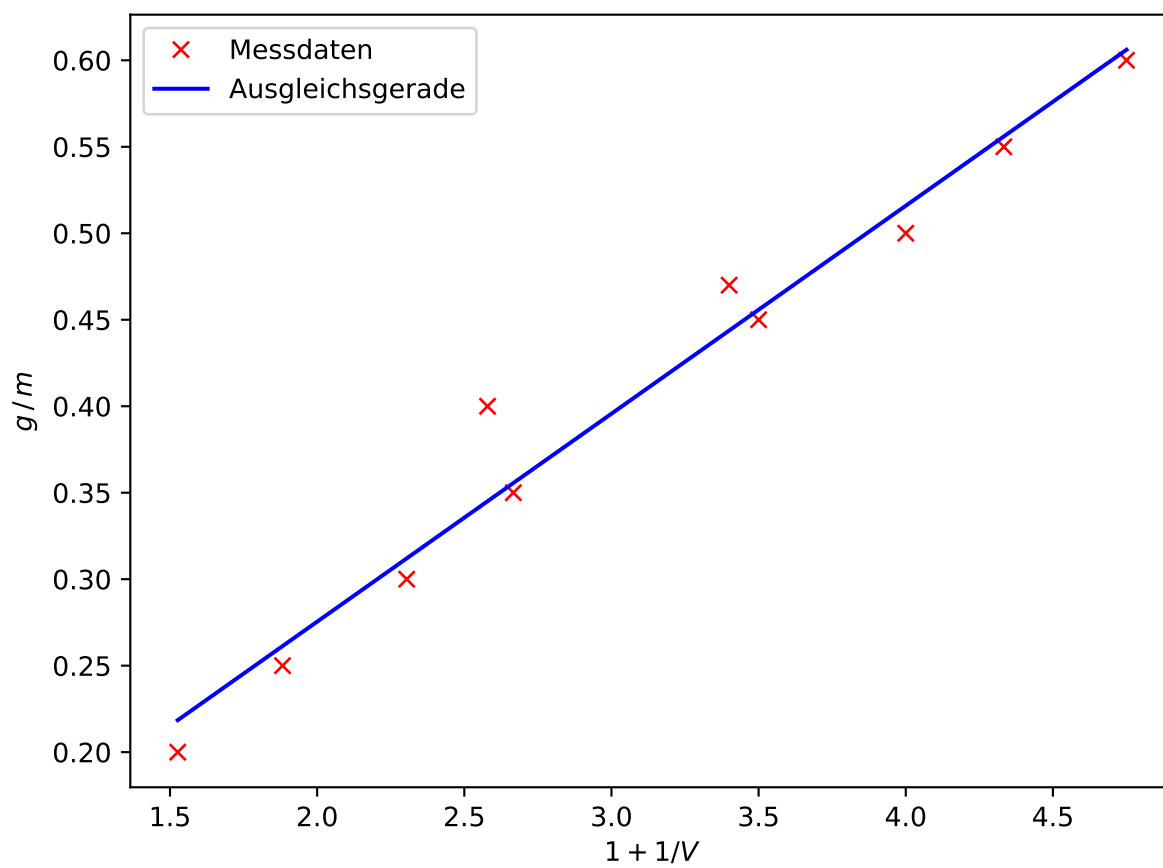
Weiter wird  $g'$  gegen  $(1 + 1/V)$  und  $b'$  gegen  $(1 + V)$  aufgetragen, woraus Abbildung 6 und 7 resultieren.

Es wurde jeweils eine lineare Regression mittels Python durchgeführt. Die dabei erhaltenen Parameter geben hierbei nach Formel (5) und (6) direkt den Brennpunkt und die Lage der Hauptebenen an. Es ergibt sich für

$$\begin{aligned}
g' &= g + h = f_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h, \\
b' &= b + h = f_2 \cdot (1 + V) + h'
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
f_1 &= (0,120 \pm 0,009) \text{ m}, \\
f_2 &= (0,240 \pm 0,011) \text{ m}, \\
h &= (0,035 \pm 0,028) \text{ m}, \\
h' &= (0,040 \pm 0,020) \text{ m}.
\end{aligned}$$



**Abbildung 6:** Messwerte  $g'$  gegen  $1 + 1/V$ .

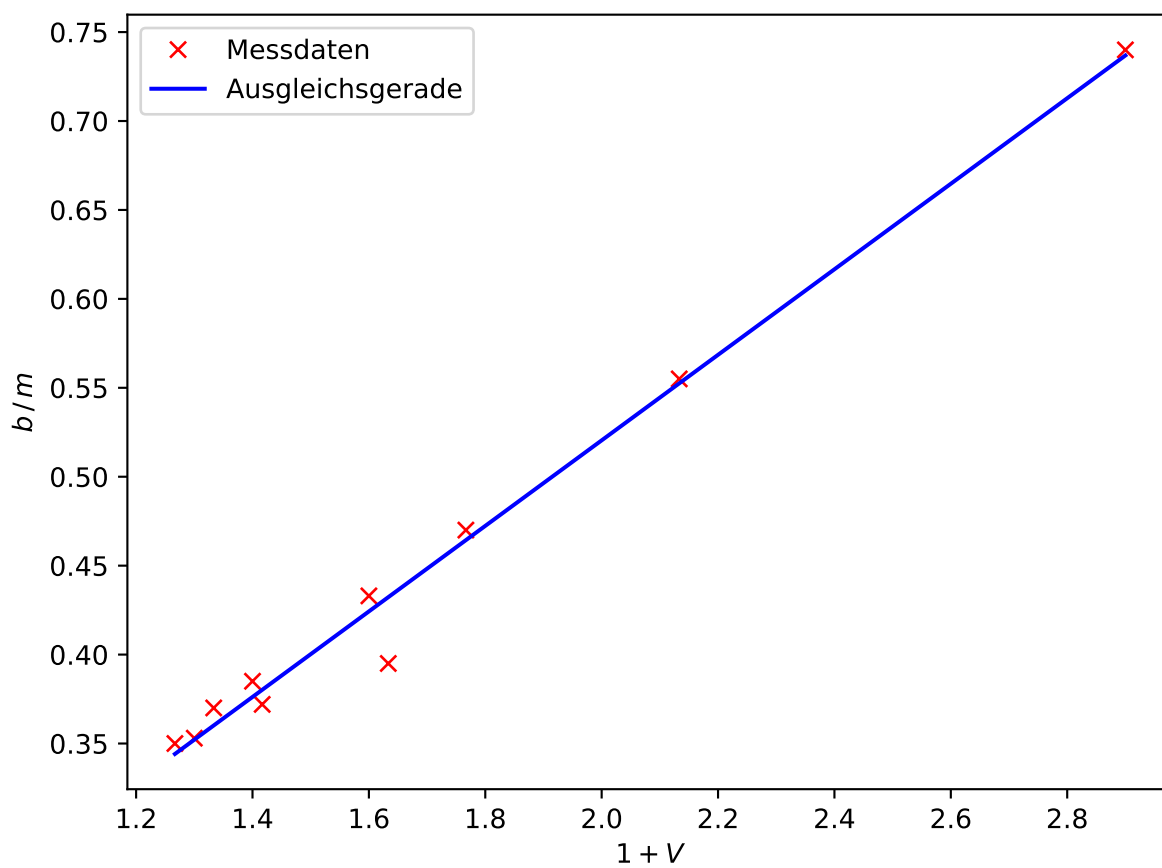


Abbildung 7: Messwerte  $b'$  gegen  $1+V$ .

Es ist erkennbar, dass  $f_1$  und  $f_2$  nicht denselben Wert besitzen, sodass für die letztliche Bestimmung der Brennweite der Mittelwert gebildet wird. Es folgt somit

$$f = (0,180 \pm 0,060) \text{ m.}$$

Die Position der Hauptebenen  $h$  und  $h'$  beziehen sich auf den Referenzpunkt  $A$ . Dieser hat gerade die Mittelebene der dünnen Sammellinse.

## 4 Diskussion

In der ersten Messung sollte die bekannte Brennweite von  $f = 0,150 \text{ m}$  verifiziert und das Abbildungsgesetz bestätigt werden. Aufgrund der sehr kleinen Differenz  $\Delta V$  kann das Abbildungsgesetz bestätigt werden. Bei der ersten Messung wurde eine Brennweite von

$$f_{\text{exp}} = (0,163 \pm 0,002) \text{ m}$$

festgestellt. Dies weicht nur um  $8,67\%$  von der tatsächlichen Brennweite von  $f_{\text{theo}} = 0,150 \text{ m}$  ab. Beim Bestimmen der Brennweite als Schnittpunkt der Gerade wurde diese zu

$$f_{\text{Sch}} = 0,16 \text{ m}$$

bestimmt. Die Werte der Brennweiten unterscheiden sich bei den beiden Verfahren lediglich um  $1,87\%$  bzw. um  $1,84\%$ .

Bei der Verifizierung der Brennweite mittels der Methode nach Bessel, wurde diese zu

$$f = (0,1621 \pm 0,0003) \text{ m}$$

bestimmt. Diese weicht um  $8,06\%$  von der tatsächlichen Brennweite ab. Generell können all diese Abweichungen durch ein möglicherweise falsch angesetztes Augenmaß zur Bestimmung, ob das Bild scharf ist, erklärt werden. Weiter wurden die Brennweite der Linse für rotes und blaues Licht bestimmt. Es ergaben sich die Brennweiten

$$\begin{aligned} f_{\text{rot}} &= (0,1639 \pm 0,0006) \text{ m,} \\ f_{\text{blau}} &= (0,1627 \pm 0,0001) \text{ m.} \end{aligned}$$

Diese liegen sehr nah zusammen und weichen fast gar nicht voneinander ab, was auf wenig chromatische Absorption schließen lässt.

Bei der Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach der Methode nach Abbe ergeben sich zwei Werte  $f_1$  und  $f_2$  für die Brennweiten, aus denen ein Mittelwert gebildet wurde:

$$f = (0,180 \pm 0,060) \text{ m.}$$

Im Folgenden soll der dazugehörige Theoriewert für die Brennweite des Linsensystems bestimmt werden. Hierzu wird die Matrizenoptik benutzt. Für ein System wie es hier verwendet wurde ergibt sich eine Transfermatrix  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}$$

Mit dem unteren linken Element ergibt sich die Brennweite des Systems zu

$$\frac{1}{-f} = -\frac{d}{f^2}.$$

Dabei ist  $d = 45 \text{ mm}$ . Damit ergibt sich der Theoriewert der Brennweite des Linsensystems zu

$$f = 222,22 \text{ mm}.$$

Dementsprechend liegt der experimentelle Wert recht nahe an den theoretisch erwarteten Wert.

## 5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 408: Geometrische Optik*.