

Nr.504

Thermische Elektronenemission

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 28.05.2019

Abgabe: 04.06.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Energieverteilung von Elektronen und Austrittsarbeit	3
1.2	Sättigungsstromdichte	4
1.3	Hochvakuumdiode	5
1.4	Die Langmuir-Schottkysche Raumladungsgleichung	5
1.5	Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode	6
1.6	Kennlinie einer Hochvakuumdiode	7
2	Durchführung	7
2.1	Aufnahme der Kennlinie	7
2.2	Ermittlung der Anlaufstromkurve	8
3	Auswertung	9
3.1	Untersuchung des Raumladungs- und des Anlaufstromgebietes für $I_{H,5}$. .	11
4	Diskussion	14
5	Literaturverzeichnis	15

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es die Austrittsarbeit von Elektronen aus Wolfram und eine Kennlinie durch thermische Emission von Elektronen zu bestimmen.

Durch Zufuhr von Wärme in ein Metall können Elektronen dazu gebracht werden, das Metall zu verlassen, dies wird als thermische Elektronenemission bezeichnet.

1.1 Energieverteilung von Elektronen und Austrittsarbeit

Ein Metall zeichnet sich in der Regel im kondensierter Zustand durch eine kristalline Gitterstruktur aus, die räumlich periodisch angeordnet ist. Die Elektronen sind nicht an ein Atom gebunden und bilden ein frei bewegliches Elektronengas. Die Potentiale innerhalb und außerhalb des Metalls werden als jeweils konstant genähert. Das Potential innerhalb des Metalls ist kleiner als außerhalb, die Differenz wird als φ bezeichnet. Ein gutes Modell stellt hier ein Potentialtopf mit einem symmetrischen Potential φ dar. Innerhalb dieses Topfes sind die Elektronen frei verschiebbar; aus diesem Grund ist eine hohe Leitfähigkeit für Metalle charakteristisch.

Die Arbeit, die ein Elektron verrichten muss, um die Potentialschwelle zu überwinden, wird als Austrittsarbeit

$$W_A = e\varphi$$

bezeichnet. Dabei ist e die Elementarladung.

Da Elektronen Fermionen sind, gilt für sie das Pauli-Verbot. Dieses besagt, auf Elektronen bezogen, dass zwei von diesen in einem System nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen können. Aufgrund des Spins folgt, dass nur zwei Elektronen dieselbe Energie haben können. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei thermischen Gleichgewicht ein Zustand mit der Energie E besetzt ist, wird durch die Fermi-Diracsche-Verteilungsfunktion

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}$$

beschrieben, wobei k die Boltzmann-Konstante und E_F die Fermi-Energie ist, also die maximal mögliche Energie eines Elektrons bei der Temperatur $T = 0$. Der qualitative Verlauf dieser Verteilungsfunktion ist in Abbildung 1 gegeben.

Bei deren Betrachtung wird deutlich, dass ein Elektron die Energiebeziehung

$$E \geq E_F + e\varphi \tag{1}$$

erfüllen muss, um das Metall zu verlassen. Dieser Wert ist für die austretenden Elektronen selbst beim Schmelzpunkt von Wolfram noch viel größer als kT , daher reicht die gute Näherung

$$f(E) = \exp\left(\frac{E_F - E}{kT}\right). \tag{2}$$

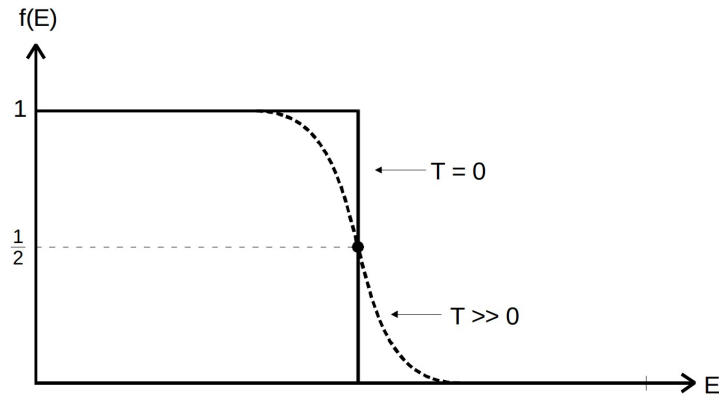


Abbildung 1: Qualitativer Verlauf der Fermi-Diracschen-Verteilungsfunktion [1].

1.2 Sättigungsstromdichte

Ausgehend von (2) wird die Sättigungsstromdichte j_s als die Ladung, die pro Zeit- und Flächeneinheit aus einer Metalloberfläche austreten, in Abhängigkeit von der Temperatur definiert. Wird ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, dessen z -Achse senkrecht auf der Metalloberfläche steht, so gilt für die Zahl $d\alpha$ der Elektronen in einem Impulsraum-Volumenelement d^3p , die pro Zeit- und Flächeneinheit von innen an die Grenzfläche des Metalls stoßen

$$d\alpha = v_z n(E) d^3p.$$

Dabei ist $n(E)$ die Phasenraumdichte und v_z die Geschwindigkeitskomponente entlang der Flächennormalen. Wegen

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial E}{\partial p_z} n(E) dp_x dp_y dp_z \\ &= n(E) dE dp_x dp_y, \end{aligned}$$

wobei m die Elektronenmasse ist. Jeder Quantenzustand nimmt im sechsdimensionalen Phasenraum das Volumen h ein, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum ist. Es gilt daher:

$$n(E) = \frac{2}{h^3} f(E).$$

Der Faktor 2 kommt aus den zwei Möglichkeiten des Spins. Es gilt also

$$d\alpha = \frac{2}{h^3} \exp\left(\frac{E_F - E}{kT}\right) dp dE.$$

Damit die Elektronen aus dem Metall austreten können, muss (1) für $E = E_{\text{kin},z}$ erfüllt sein. Das Produkt aus der Anzahl der Elektronen, die dieses Kriterium erfüllen, und der Elementarladung ist die Sättigungsstromdichte, die sich zu

$$j_s(T) = 4\pi \frac{emk}{h^3} T^2 \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) \quad (3)$$

ergibt. Das Endergebnis (3) wird auch als Richardson-Gleichung bezeichnet.

1.3 Hochvakuumdiode

Die Messung des Sättigungsstroms wird durch eine Hochvakuumdiode realisiert. Das gute Vakuum ist notwendig, damit die Elektronen nicht mit Luftmolekülen wechselwirken. Die Diode erzeugt ein elektrisches Feld zwischen Anode und Glühkathode, dass die austretenden Elektronen absaugt. An der Glühkathode liegt eine Heizspannung an, die einen Strom durch den Wolframdraht fließen lässt, der das Wolfram auf 1000 K bis 3000 K erhitzt. Die Emission der Anode ist deutlich geringer als die der Kathode.

1.4 Die Langmuir-Schottkysche Raumladungsgleichung

Bei gegebener Kathodentemperatur ist der Anodenstrom von der Anodenspannung abhängig. Ist die Spannung zu niedrig, so erreichen nicht alle Elektronen die Anoden. Dies geschieht erst bei hinreichend hoher Anodenspannung. Dann ist der Strom von der Spannung unabhängig.

Eine Diode verletzt das Ohmsche Gesetz, da die Elektronen eine Beschleunigung in Richtung der Anode erfahren, insbesondere tritt eine Inhomogenität der Ladungsdichte auf. Die Raumladungsdichte nimmt zur Anode hin ab, da sich im Bereich der Glühkathode die meisten Elektronen befinden. Auf Grund der Kontinuitätsbedingung ist die Stromdichte an jeder Stelle konstant. Wegen

$$j = \rho v \quad (4)$$

folgt, dass für kleine Geschwindigkeiten v der Elektronen die Raumladungsdichte ρ groß sein muss, dies ist aber vor allem im Bereich der Glühkathode der Fall. Sie ist so groß, dass die das Feld der angelegten Spannung abschirmt. Daraus folgt also, dass der Diodenstrom kleiner als der erwartete Sättigungsstrom (3) ist.

Für den quantitativen Zusammenhang wird von der Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

wobei U das elektrische Potential und ϵ_0 die elektrische Feldkonstante ist, ausgegangen unter der einfachen Annahme, dass Anode und Kathode Oberflächen unendlicher Ausdehnung mit dem Abstand a sind. Damit hängen v und ρ nur von der Ortskoordinate x ab. Mit Hilfe von (4) und der Äquivalenz von elektrischer und kinetischer Energie lässt sich (??) integrieren. Dabei ergibt sich für das Potential

$$U(x) = \left(s \sqrt{\frac{j}{4\epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}}}} x \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Außerdem gilt für das elektrische Feld und die Ladungsdichte

$$E(x) \propto x^{\frac{1}{3}},$$

$$\rho(x) \propto x^{-\frac{2}{3}}.$$

Für die Stromdichte gilt schließlich

$$j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{1}{a^2} U^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Dieses Gesetz, das die korrekte Proportionalität zwischen Stromdichte und Potential angibt, wird das Langmuir-Schottkysche Raumladungsgesetz genannt. Der Gültigkeitsbereich von (6) im $j - U$ -Diagramm einer Hochvakuumdiode nennt man das Raumladungsgebiet.

1.5 Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode

Nach (6) sollte für $U = 0$ die Stromdichte verschwinden, experimentell ergibt sich jedoch ein geringer Anodenstrom. Für $T > 0$ gibt es laut (2) endlich viele Elektronen, deren Energie größer als die Austrittsarbeit ist. Dadurch erhalten die Elektronen eine Restenergie

$$\Delta E = E - (E_F + e\varphi),$$

sodass sie gegen ein Feld anlaufen können. Die Menge dieser Elektronen wird daher als Anlaufstrom bezeichnet. Das Anodenmaterial besitzt meistens eine höhere Austrittsarbeit als die Kathode. Durch die externe leitende Verbindung werden die Fermi-Oberflächen $E = E_F$ auf das selbe Niveau gebracht. Bei einem Potential U entsteht eine Potentialdifferenz von eU . Um die Anode zu erreichen, muss $E \geq e\varphi_A + eU$ sein, wobei $e\varphi_A$ die Austrittsarbeit der Anode ist. Die Zahl der Leitungselektronen zwischen E und $E + dE$ hängt exponentiell von E ab, somit hängt auch die Anlaufstromstärke vom äußeren Potential ab:

$$j(U) = j_0 \exp\left(-\frac{e\varphi_A + eU}{kT}\right) \propto \exp\left(-\frac{eU}{kT}\right). \quad (7)$$

1.6 Kennlinie einer Hochvakuumdiode

Als Kennlinie wird der Zusammenhang zwischen Anodenstrom I und der von außen angelegten Spannung U definiert. Wie in Abbildung 2 gliedert sich die Kennlinie in die Bereiche Anlaufstrom-, Raumladungs-, und Sättigungsstromgebiet. Im ersten Bereich gibt es einen exponentiellen Zusammenhang zwischen I und U . Im anschließenden Raumladungsgebiet gibt es eine $\sqrt{U^3}$ -Abhängigkeit. Gleichung (6) kann nicht für beliebig hohe Spannungen gültig sein, da die Zahl der pro Zeiteinheit emittierten Elektronen gemäß (3) nur von der Temperatur, aber nicht von der Anodenspannung abhängt. Der Strom strebt einem Sättigungsstrom I_S zu, was den kontinuierlichen Übergang in das Sättigungsstromgebiet kennzeichnet.

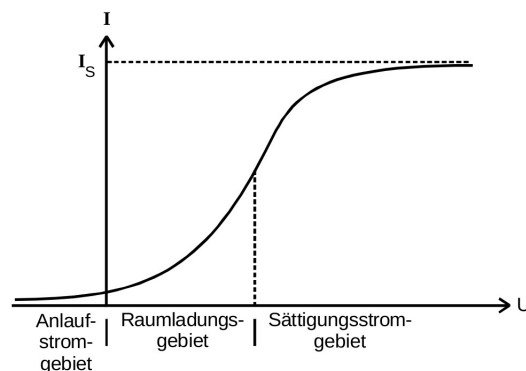


Abbildung 2: Beispiel einer Kennlinie [1].

[sample]

2 Durchführung

2.1 Aufnahme der Kennlinie

Zur Aufnahme der Kennlinien wird die Schaltung aus Abbildung 3 verwendet. Der Heizstrom im Bereich von 2,1 A bis 2,5 A wird mit einem Konstantsspannungsgerät erzeugt. Der Heizstrom I_F wird an der integrierten Anzeige abgelesen. Für die Bestimmung der Heizspannung U_F wird der ebenfalls integrierte Voltmeter verwendet, das aber nur eine grobe Auflösung liefert. Die Anodenspannung U , die mit einem zweiten Konstantsspannungsgerät erzeugt wird, wird einem eingebauten Messgerät entnommen. Der Anodenstrom I kann ebenfalls dort abgelesen werden. Vor das Netzgerät wird ein Widerstand von 100Ω geschaltet, sodass durch die abfallende Spannung Rückschlüsse auf den Anodenstrom gezogen werden können. Anstatt der Kurve des $x-y$ -Schreibers werden Messwerte der Anodenspannung und des Anodenstroms für die verschiedenen Heizströme abgelesen.

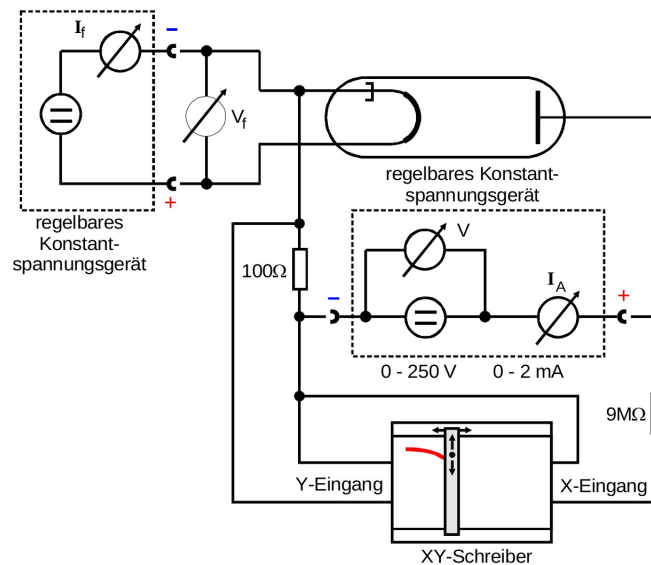


Abbildung 3: Messaufbau zur Bestimmung der Kennlinie [1].

2.2 Ermittlung der Anlaufstromkurve

Hierzu wird die Schaltung aus Abbildung 4 benutzt. Um den Anlaufstrom I von der Größenordnung 1 nA zu messen, wird ein empfindliches Nanoamperemeter mit eingebautem Verstärker benutzt. Wegen der geringen Ströme wird ein möglichst kurzes Kabel zwischen Anode und Eingangsbuchse HI verwendet. Durch den Innenwiderstand R_i des Amperemeters von $1 \text{ M}\Omega$ liegt zwischen Anode und Kathode eine andere Spannung V an, als die vom Konstantspannungsgerät angezeigte Spannung U . Die Heizspannung muss auf den Maximalwert gedreht werden, damit ein Strom gemessen werden kann. Der Strom wird in Abhängigkeit von der angelegten Diodenspannung abgelesen.

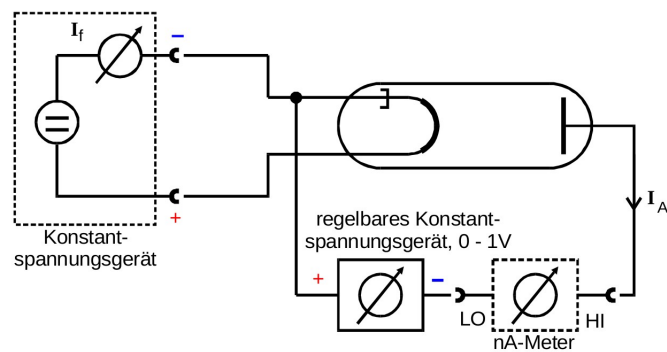


Abbildung 4: Schaltung zur Ermittlung des Anlaufstroms [1].

3 Auswertung

Zur Analyse der Kennlinien der Hochvakuumdiode werden für verschiedene Heizstromstärken $I_{H,1}$ bis $I_{H,5}$ von 2,1 A, 2,2 A, 2,3 A, 2,4 A und 2,5 A die Diodenströme I_1 bis I_5 abhängig von der Spannung U gemessen. Die zugehörigen Messwerte sind in Tabelle 1 aufgelistet.

In Abbildung 5 sind die Kennlinien der Hochvakuumdiode, d.h. die Messwerte der Diodenströme I_k gegen die Spannung U aufgetragen.

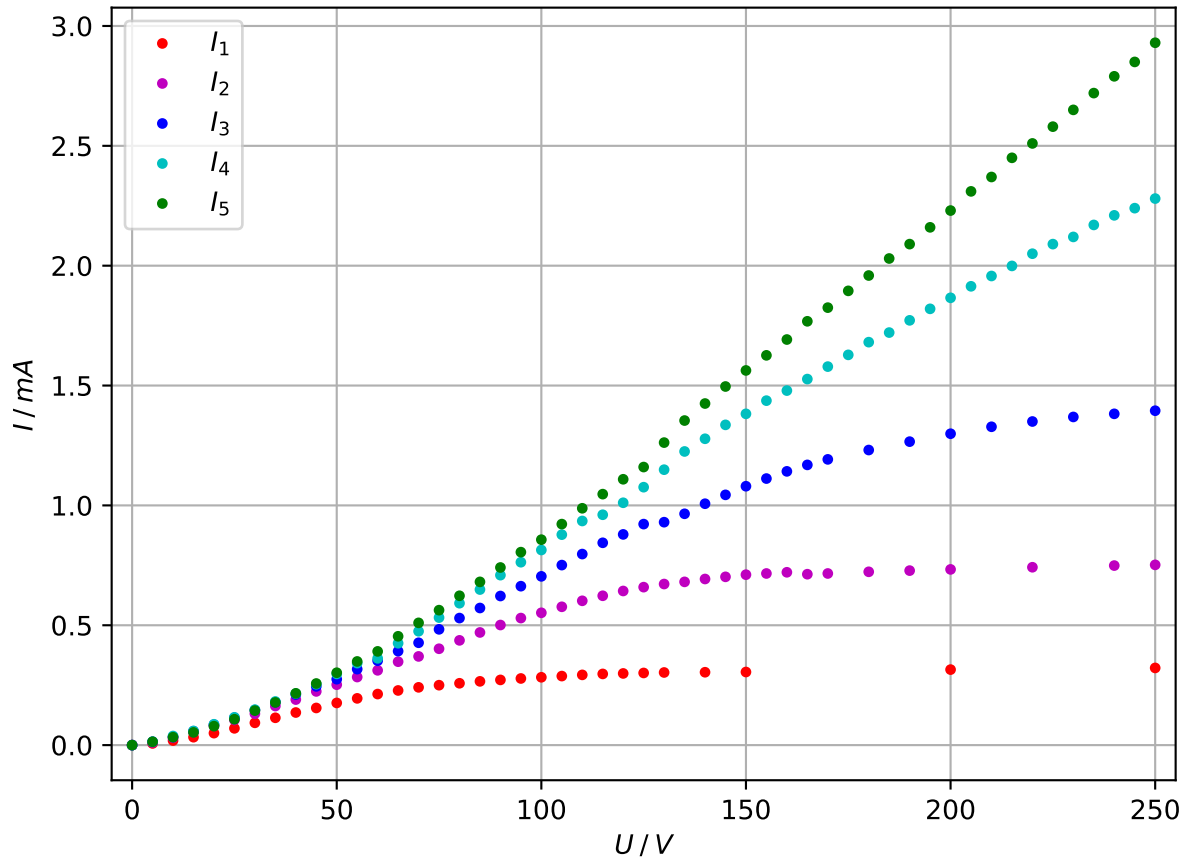


Abbildung 5: Kennlinien der Hochvakuumdiode für verschiedene Heizstromstärken $I_{H,k}$

Aus der Abbildung 5 sind somit folgende Sättigungsstromstärken $I_{S,k}$ ablesbar:

$$I_{S,1} = 0,3 \text{ mA}$$

$$I_{S,2} = 0,75 \text{ mA}$$

$$I_{S,3} = 1,4 \text{ mA}$$

Tabelle 1: Messwerte der Diodenströme I_1 bis I_5

U / V	I_1 / mA	I_2 / mA	I_3 / mA	I_4 / mA	I_5 / mA
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,007	0,011	0,014	0,014	0,014
10	0,019	0,031	0,034	0,038	0,033
15	0,033	0,054	0,058	0,059	0,053
20	0,050	0,080	0,085	0,087	0,079
25	0,070	0,105	0,114	0,116	0,108
30	0,093	0,131	0,146	0,148	0,144
35	0,114	0,163	0,179	0,182	0,178
40	0,136	0,190	0,211	0,215	0,216
45	0,155	0,224	0,245	0,254	0,257
50	0,176	0,252	0,275	0,297	0,302
55	0,195	0,284	0,317	0,342	0,349
60	0,213	0,312	0,352	0,362	0,391
65	0,228	0,348	0,392	0,425	0,454
70	0,241	0,370	0,427	0,475	0,510
75	0,250	0,402	0,483	0,532	0,563
80	0,258	0,437	0,530	0,592	0,623
85	0,266	0,470	0,572	0,649	0,681
90	0,272	0,501	0,622	0,709	0,741
95	0,278	0,530	0,663	0,763	0,805
100	0,283	0,552	0,704	0,814	0,857
105	0,288	0,577	0,751	0,878	0,922
110	0,293	0,602	0,797	0,935	0,988
115	0,297	0,623	0,844	0,961	1,047
120	0,299	0,643	0,879	1,011	1,109
125	0,301	0,659	0,922	1,076	1,160
130	0,303	0,672	0,930	1,149	1,262
135	-	0,681	0,965	1,225	1,354
140	0,304	0,693	1,007	1,278	1,425
145	-	0,702	1,044	1,336	1,496
150	0,305	0,711	1,080	1,382	1,563
155	-	0,716	1,112	1,437	1,626
160	-	0,721	1,142	1,479	1,692
165	-	0,713	1,169	1,527	1,768
170	-	0,716	1,192	1,579	1,825
175	-	-	-	1,628	1,895
180	-	0,723	1,231	1,681	1,959
185	-	-	-	1,721	2,030
190	-	0,728	1,266	1,772	2,090
195	-	-	-	1,820	2,160
200	0,315	0,733	1,299	1,866	2,230
205	-	-	-	1,914	2,310
210	-	-	1,328	1,957	2,370
215	-	-	-	1,999	2,450
220	-	0,742	1,350	2,050	2,510
225	-	-	-	2,090	2,580
230	-	-	1,369	2,120	2,650
235	-	-	-	2,170	2,720
240	-	0,749	1,382	2,210	2,790
245	-	-	-	2,240	2,850
250	0,322	0,752	1,395	2,280	2,930

Die Sättigungsstromstärke $I_{S,4}$ lässt sich aus den Messwerten etwa als 2,5 mA erahnen, während $I_{S,5}$ gar nicht ablesbar ist.

3.1 Untersuchung des Raumladungs- und des Anlaufstromgebietes für $I_{H,5}$

Für die Heizstromstärke $I_{H,5} = 2,5 \text{ A}$ wird die Kennlinie genauer untersucht. Für das Raumladungsgebiet von etwa 0 V bis 25 V sind die Messwerte in Abbildung 6 doppellogarithmisch aufgetragen.

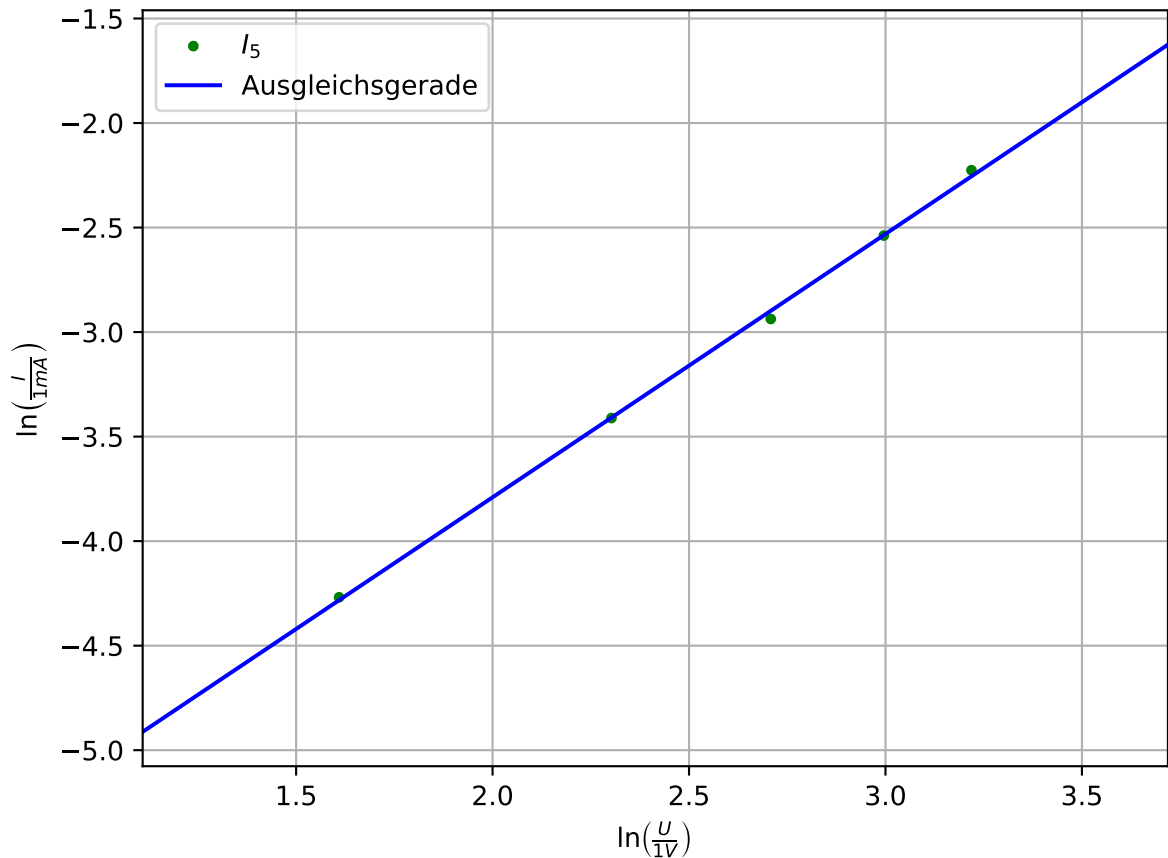


Abbildung 6: Kennlinie der Hochvakuumdiode im Raumladungsgebiet mit der Heizstromstärke $I_{H,5}$

Aus der mit python bestimmten linearen Regression der Form

$$\ln\left(\frac{I}{1 \text{ mA}}\right) = a \cdot \ln\left(\frac{U}{1 \text{ V}}\right) + b$$

ergeben sich die Regressionsparameter

$$a = 1,260 \pm 0,040$$

$$b = -6,310 \pm 0,105 .$$

Somit entspricht der Exponent der Strom-Spannungs-Beziehung $a = 1,260 \pm 0,040$.

Für die Untersuchung des Anlaufstromgebietes wird der Diodenstrom für die Spannung U im Intervall 0 V bis 1 V gemessen.

Da für die Messung ein Nanoamperemeter mit Widerstand $R = 1 \text{ M}\Omega$ eingesetzt wird, müssen die gemessenen Spannungswerte zu

$$U_k = U + I \cdot R$$

korrigiert werden. Die (korrigierten) Messwerte sind in Tabelle 2 aufgelistet und werden in Abbildung 7 einfachlogarithmisch gegeneinander aufgetragen.

Tabelle 2: Messwerte des Diodenstroms im Anlaufstromgebiet

U / V	U_k / V	I_5 / nA
0,000	0,012	12,00
0,050	0,059	8,75
0,100	0,107	6,50
0,150	0,155	5,00
0,200	0,204	3,75
0,250	0,253	3,00
0,300	0,302	2,40
0,350	0,352	1,80
0,400	0,401	1,40
0,450	0,451	1,10
0,500	0,501	0,80
0,550	0,551	0,60
0,600	0,601	0,50
0,650	0,650	0,42
0,700	0,700	0,35
0,750	0,750	0,28
0,800	0,800	0,20
0,850	0,850	0,18
0,900	0,900	0,15
0,950	0,950	0,10

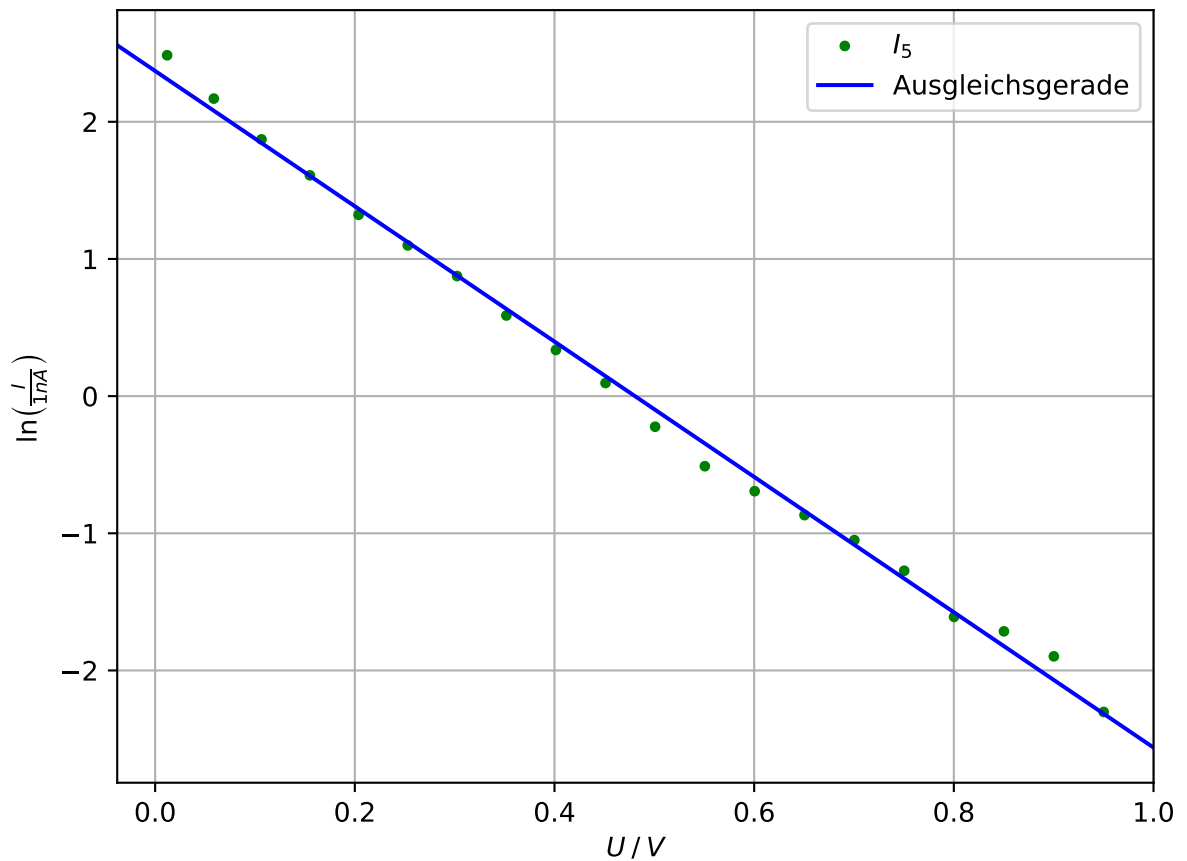


Abbildung 7: Kennline der Hochvakuumdiode im Anlaufstromgebiet mit der Heizstromstärke $I_{H,5}$

Aus der mit python bestimmten linearen Regression der Form

$$\ln\left(\frac{I}{1\text{mA}}\right) = a \cdot U + b$$

ergeben sich die Regressionsparameter

$$a = (-4,888 \pm 0,069) \frac{1}{V}$$

$$b = 2,337 \pm 0,039 .$$

Im Vergleich mit der Gleichung (7) ergibt sich die Beziehung

$$a = -\frac{e}{kT} ,$$

durch welche sich nach Umstellung die Kathodentemperatur zu

$$T = -\frac{e}{k \cdot a} = (2490 \pm 40)^\circ \text{K} \quad (8)$$

ergibt.

Die Kathodentemperatur T lässt sich auch nach der Gleichung

$$T = \left(\frac{I_H U_H - N_{\text{WL}}}{f \eta \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (9)$$

bestimmen. Die abgeschätzte Wärmeleitung beträgt $N_{\text{WL}} = 1 \text{ W}$. Weitere Größen sind die Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{K}^4}$, die emittierende Kathodenfläche $0,35 \text{ cm}^2$ und der Oberflächenemissionsgrad $\eta = 0,28$. Des Weiteren werden die Austrittsarbeiten

$$e\phi = -kT \ln \left(\frac{I_S h^3}{f 4 \pi e m k^2 T^2} \right) \quad (10)$$

berechnet.

Die gemessenen Sättigungsstromstärken, Heizstromstärken und -spannungen, sowie die nach (9) und (10) berechneten Kathodentemperaturen T und Austrittsarbeiten $e\phi$ befinden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Messwerte der Sättigungsstromstärken, Heizstromstärken und -spannungen, sowie die daraus errechneten Kathodentemperaturen T und Austrittsarbeiten $e\phi$

I_H / A	U_H / V	T / K	I_S / mA	$e\phi / \text{eV}$
2,1	4,5	1972,15	0,30	5,81
2,2	4,8	2033,95	0,75	5,85
2,3	5,2	2104,64	1,40	5,96
2,4	5,5	2161,80	2,50	6,02
2,5	5,8	2217,22	-	-

Der Mittelwert der Austrittsarbeiten beträgt

$$\overline{e\phi} = (5,91 \pm 0,05) \text{ eV} .$$

4 Diskussion

Die in Abbildung 5 dargestellten Kennlinien entsprechen ihrer theoretischen Struktur. Jedoch war für die Kennlinie der höchsten Heizstromstärke $I_{\text{H},5} = 2,5 \text{ A}$ keine Sättigungsstromstärke ablesbar. Es zeigt sich jedoch, dass die aus dem Exponenten der Strom-Spannungs-Beziehung ermittelte Kathodentemperatur $T = (2490 \pm 40)^\circ \text{K}$ nah an den übrigen, durch Gleichung (9), berechneten liegt.

Auch der durch die Regression bestimmte Strom-Spannungs-Exponent $a = 1,260 \pm 0,040$ im Raumladungsgebiet weicht nur um 16 % vom Theoriewert ab. Außerdem entspricht die mittlere Austrittsarbeit $\overline{e\phi} = (5,91 \pm 0,05) \text{ eV}$ der zu erwartenden Größenordnung.

5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 504: Thermische Elektronenemission.*