Nr. 103

Biegung elastischer Stäbe

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 27.11.2018 Abgabe: 04.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, Elastizitätsmodule verschiedener Materialen zu ermitteln, indem die Biegung elastischer Stäbe untersucht wird.

1.1 Die Spannung an elastischen Körpern

Die physikalische Größe der mechanischen Spannung σ_m ist die wirkende Kraft F pro Fläche A. Sie setzt sich zusammen aus der Normalspannung σ, die senkrecht zur Oberfläche wirkt und einer tangential zur Fläche wirkenden Tangentialspannung.

Spannungen können an Körpern zu Gestalt- und Volumenveränderungen führen. Liegt durch Druck oder Zug eine Spannung nur in einer Körperdimension vor, so ist sie proportional zur Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ und es ergibt sich das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

mit dem materialspezifischen Elastizitätsmodul E als Proportionalitätsfaktor. Mithilfe einer hinreichend genauen Apparatur kann der Elastizitätsmodul durch Messung der Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ bestimmt werden.

Allerdings kann der Elastizitätsmodul E auch unter geringerem Kraftaufwand durch die Biegung von Stäben bestimmt werden, so wie es Gegenstand dieses Versuches sein soll. Hier reichen schon kleinere Kräfte aus, um eine Veränderung des Körpers zu bewirken. Dazu werden zwei unterschiedliche Arten der Biegung untersucht, wie sie in Abbildung 1, dargestellt sind.

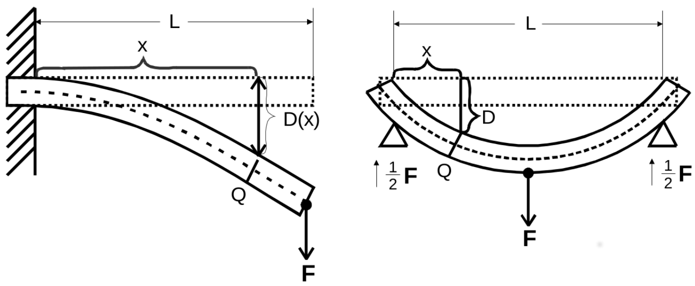

Abbildung 1: Biegung eines einseitig eingespannten Stabes links.
Biegung eines beidseitig eingespannten Stabes rechts. [1]

Bei den dargestellten Biegungen handelt es sich um die Biegungen eines einseitig eingespannten und eines beidseitig aufgelegten Stabes.

1.2 Die Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Die am uneingespannten Ende des Stabes wirkende Gravitationskraft F eines aufgehängten Gewichtes, biegt den Stab mit der Durchbiegung $D(x)$ und bewirkt ein angreifendes Drehmoment

$$M_\mathrm{F} = F \cdot (L - x)$$

mit der Länge des Hebelarms $(L - x)$.

Dieses Drehmoment verursacht eine Dehnung der oberen und eine Stauchung der unteren Stabschichten, sodass der Querschnitt Q sich nicht mehr in vertikaler, sondern in verdrehter Position befindet. Einzig die neutrale Faser in der Mitte des Querschnitts Q behält ihre Länge bei. An allen anderen Fasern kommt es, aufgrund der Elastizitäts des Körpers, zu Normalspannungen, die sich zu einem zu M_F entgegengesetzen Drehmoment M_σ aufsummieren:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\ \mathrm{d}q$$

Dabei beschreibt y den Abstand des Flächenelements $\mathrm{d}q$ zur neutralen Faser.

Zwischen den Drehmomenten stellt sich ein Gleichgewicht mit fester Durchbiegung $D(x)$ ein, sodass

$$\begin{aligned} M_\mathrm{F} &= M_\sigma \\ \iff \quad \int_Q y\sigma(y)\ \mathrm{d}q &= F \cdot (L - x) \end{aligned}$$

gilt.

Damit ergibt sich für die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{2E\boldsymbol{I}} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \tag{1}$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$\boldsymbol{I} = \int_Q y^2\ \mathrm{d}q(y) \tag{2}$$

1.3 Die Biegung eines Stabes mit beideitiger Auflage

Am beidseitig aufgelegten Stab wirkt nach Abblidung 1 die Gravitationskraft $\frac{F}{2}$ eines Gewichtes an der Mitte der Querschnittsfläche Q mit einem Hebelarm der Länge x und bewirkt somit das Drehmoment

$$\begin{aligned} M_\mathrm{F} &= -\frac{F}{2} x & \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \\ M_\mathrm{F} &= -\frac{F}{2}(L - x) & \qquad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich analog die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{48E\boldsymbol{I}}\left(3L^2x - 4x^3\right) \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \tag{3}$$

$$D(x) = \frac{F}{48E\boldsymbol{I}}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \qquad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \tag{4}$$

1.4 Berechnung der Flächenträgheitsmomente

Das Flächenträgheitsmoment I ist durch (2) definiert. Für einen Stab mit quadratischem Querschnitt mit Kantenlänge a ergibt sich demnach:

$$I_Q = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{3}\frac{a^3}{8} \mathrm{d}z = a \cdot \frac{2}{3}\frac{a^3}{8} = \frac{a^4}{12} \tag{5}$$

Weiterhin ergibt sich für einen runden Stab mit Durchmesser d unter Verwendung von Polarkoordinaten:

$$I_K = \int_0^2 \pi \int_0^{\frac{d}{2}} (r \cdot \sin(\varphi))^2 \cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 \int_0^2 \pi \sin(\varphi)^2 \mathrm{d}\varphi \tag{6}$$

$$= \frac{d^4}{64}\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(\varphi)\cos\varphi}{2}\Big|_0^2 \pi = \frac{\pi}{64} d^4 \tag{7}$$

2 Durchführung

In Abbildung 2 ist die schmatische Darstellung der Apperatur zur Vermessung elatisch gebogener Stäbe zu sehen.

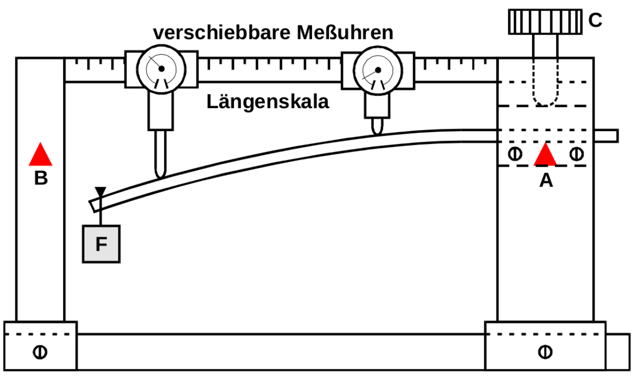

Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Apperatur [1]

Mit dieser Apperatur werden beide Messungen durchgeführt. Zunächst wird der Stab einseitig eingespannt. Mit Hilfe der verschiebbaren Messuhren wird eine Messung der Durchbiegung des Stabes ohne angehängtes Gewicht vorgenommen. Anschließend wird die Messung mit einem angehängtem Gewicht wiederholt, um aus der Differenz die

tatsächliche Durchbiegung bestimmen zu können. Zudem wird die Länge L zwiscehn Gewicht und Einspannung bestimmt. Diese Messung wird jeweils mit einem eckigen und einem runden Stab durchgeführt und das angehängte Gewicht m_1 gewogen.
Bei der zweiten Messung wird der Stab beidseitig am Punkt A und B aufgelegt. Wieder wird erst eine Messung ohne Gewicht durchgeführt, bevor dieses in der Mitte des Stabes eingehängt wird. Diese Messung wird nur für einen rechteckigen Stab durchgeführt. Wieder wird die Masse m_2 des angehängten Gewichtes bestimmt.
Zuletzt werden die verwendete Stäbe vermessen.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des Elasitzitätsmodul zweier einseitig eingespannter Stäbe

3.1.1 Stab mit quadratischem Querschnitt

Bei der Messung des Stabes mit rechteckigem Querschnitt, einer Länge $L_1 = 60\,\mathrm{cm}$ und einem Gewicht von $m_1 = 464{,}3\,\mathrm{g}$ ergaben sich die Messwerte in Tabelle 1. Dabei ergibt sich die Durchbiegung D durch die Differenz von b_1 und b_2. Der Linearisierungsterm ergibt sich mit $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$

Nun wird die Durchbiegung D gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ graphisch aufgetragen und eine lineare Regressions mittels Python und matplotlib durchgeführt. Der resultierende Graph ist in Abbildung 3 dargestellt.

Die Regression wird mit $D(x) = a_1 \cdot x + c_1$ durchgeführt. Dabei ergeben sich die Parameter zu:

$$a_1 = (0{,}0140 \pm 0{,}0002)\,1/\mathrm{m}^2$$
$$c_1 = (0{,}075\,20 \pm 0{,}013\,64)\,\mathrm{mm}$$

Nach Formel (1) ergibt sich die Formel:

$$E = \frac{F_G}{2a_1\boldsymbol{I}}$$

Hierbei ist $F_G = m_g \cdot g$ mit $m_g = 0{,}528\,\mathrm{kg}$ und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Das Flächenträgheitsmoment ergibt sich nach Formel (5) zu $\frac{1}{12}10^{-8}\,\mathrm{m}^4$. Das Elastizitätsmodul ist also gegeben durch:

$$E = (2{,}220 \pm 0{,}032) \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$$

Der statische Fehler ergibt sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = \frac{-F_G}{2\boldsymbol{I}m^2} \cdot \Delta m_1$$

Tabelle 1: Biegung eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt

$x\,/\,\mathrm{cm}$	$b_1\,/\,\mathrm{mm}$	$b_2\,/\,\mathrm{mm}$	$D\,/\,\mathrm{mm}$	$Lx^2 - \frac{x^3}{3}\,/\,10^5\,\mathrm{mm}^3$
2.5	-0.005	0.060	0.065	3.323
5.5	-0.270	-0.215	0.055	15.780
8.5	-0.380	-0.280	0.100	36.968
11.0	-0.435	-0.300	0.135	60.903
13.0	-0.480	-0.305	0.175	83.937
15.0	-0.500	-0.310	0.190	110.250
17.0	-0.540	-0.265	0.275	139.683
19.0	-0.580	-0.265	0.315	172.077
21.0	-0.620	-0.240	0.380	207.270
23.0	-0.620	-0.225	0.395	245.103
25.0	-0.720	-0.220	0.500	285.417
27.0	-0.810	-0.235	0.575	328.050
29.0	-0.850	-0.220	0.630	372.843
31.0	-0.900	-0.250	0.650	419.637
33.0	-0.990	-0.190	0.800	468.270
35.0	-1.025	-0.130	0.895	518.583
37.0	-1.040	-0.080	0.960	570.417
39.0	-1.050	-0.070	0.980	623.610
41.0	-1.080	-0.030	1.050	678.003
42.0	-1.100	-0.020	1.080	705.600
43.0	-1.100	0.005	1.105	733.437
44.0	-1.100	0.030	1.130	761.493
45.0	-1.090	0.055	1.145	789.750
46.0	-1.090	0.120	1.210	818.187
47.0	-1.090	0.160	1.250	846.783
48.0	-1.100	0.160	1.260	875.520
49.0	-1.100	0.190	1.290	904.377
49.5	-1.110	0.220	1.330	918.843

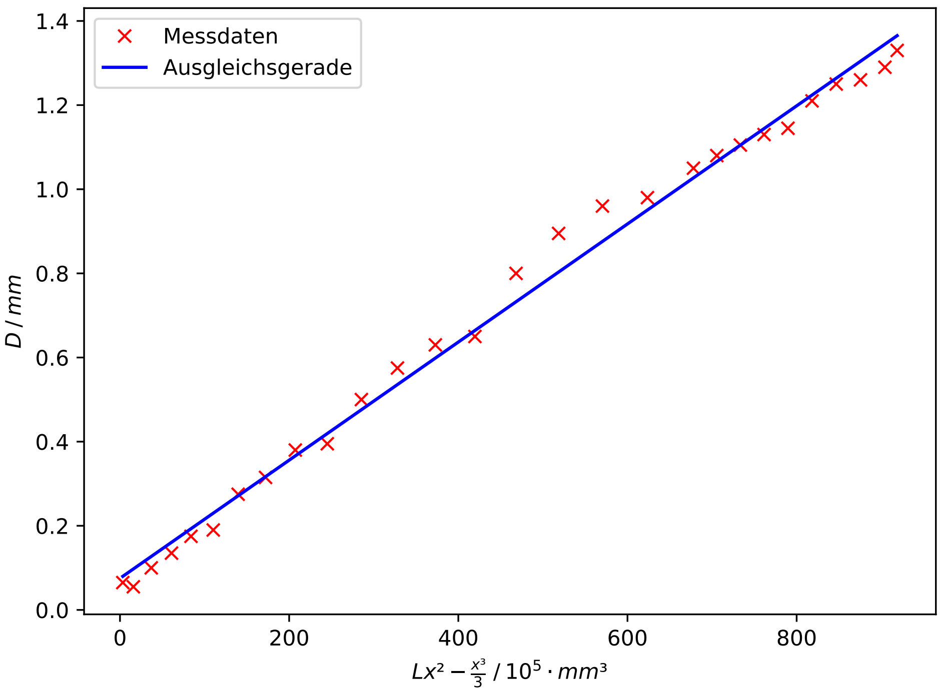

Abbildung 3: Durchbiegung mit Regression

3.1.2 Stab mit zylindrischem Querschnitt

Das Verfahren läuft analog mit dem runden Stab mit $L = 55{,}2\,\mathrm{cm}$. Die entsprechenden Messdaten finden sich in Tabelle 2.

Tabelle 2: Biegung eines Stabes mit zylindrischem Querschnitt

$x\,/\,\mathrm{cm}$	$b_1\,/\,\mathrm{mm}$	$b_2\,/\,\mathrm{mm}$	$D\,/\,\mathrm{mm}$	$Lx^2 - \frac{x^3}{3}\,/\,10^5\,\mathrm{mm}^3$
2.5	0.000	0.170	0.170	3.398
5.5	-0.110	0.050	0.160	16.143
8.5	-0.310	0.020	0.330	37.835
11.0	-0.395	0.030	0.425	62.355
13.0	-0.455	0.065	0.520	85.965
15.0	-0.510	0.013	0.523	112.950
17.0	-0.570	0.270	0.840	143.151
19.0	-0.600	0.400	1.000	176.409
21.0	-0.645	0.560	1.205	212.562
23.0	-0.710	0.775	1.485	251.451
25.0	-0.680	0.985	1.665	292.917
27.0	-0.650	1.150	1.800	336.798
29.0	-0.630	1.565	2.195	382.935
31.0	-0.600	1.700	2.300	431.169
33.0	-0.560	2.000	2.560	481.338
35.0	-0.560	2.260	2.820	533.283
37.0	-0.555	2.460	3.015	586.845
39.0	-0.550	2.820	3.370	641.862
41.0	-0.550	3.050	3.600	698.175
42.0	-0.550	3.200	3.750	726.768
43.0	-0.550	3.385	4.935	755.625
44.0	-0.550	3.500	4.050	784.725
45.0	-0.540	3.630	4.170	814.050
46.0	-0.520	3.780	4.300	843.579
47.0	-0.500	3.930	4.430	873.291
48.0	-0.480	4.030	4.510	903.168

Trägt man nun erneut D gegen $L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}$ auf und führt eine Ausgleichsrechnung mittels matplotlib durch, ergibt sich Abbildung 4.

Die Regressionsparamter ergeben sich dabei zu:

$$a_2 = (0{,}0497 \pm 0{,}0004)\,1/\mathrm{m}^2$$
$$c_2 = (0{,}1362 \pm 0{,}0232)\,\mathrm{mm}$$

Bei diesem Stab ist das Flächenträgheitsmoment nach Formel (7) gegeben durch $\frac{\pi}{64}\mathrm{cm}^4$.

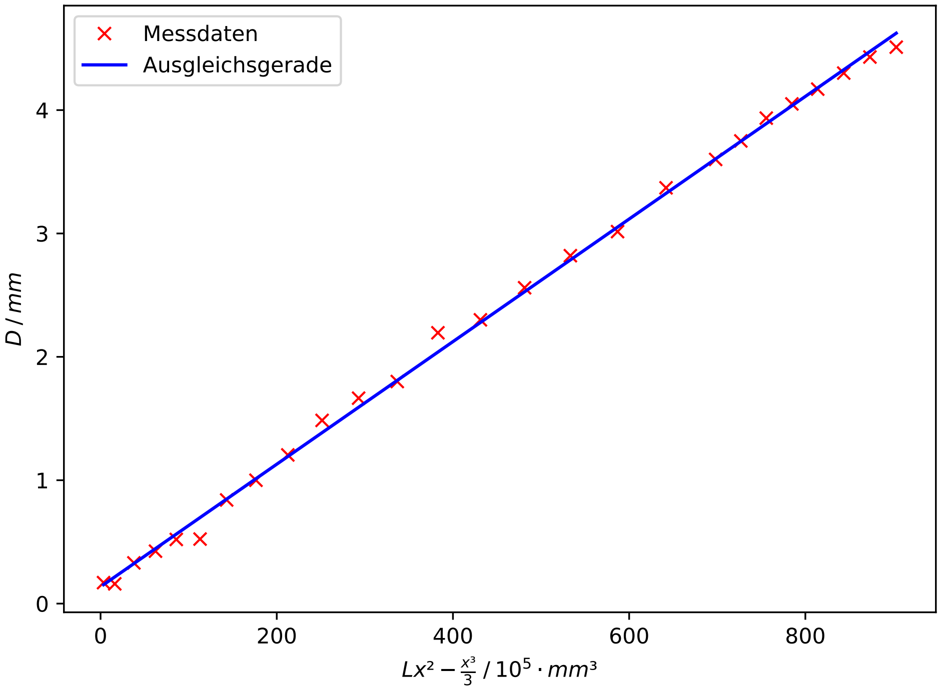

Abbildung 4: Durchbiegung mit Regression

Schließlich ergibt sich für das Elasitzitätsmodul E wie oben mit Formel (1) und durch das Flächenträgheitsmoment:

$$E = (1{,}037 \pm 0{,}008) \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$$

Dabei betrug die Masse des angehängten Gewichtes $m_2 = 0{,}516\,\mathrm{kg}$.

3.2 Bestimmung des Elasitzitätsmodul eines beidseitig aufgelegten Stabes

Die aufgenommenen Messdaten eines beidseitig aufgelegten eckigen Stabes mit Länge $L = 60{,}3\,\mathrm{cm}$ finden sich in Tabelle 3. Die Durchbiegung wird durch $D = b_1 - b_2$ berechnet. Außerdem wird für die rechte Seite von dem Gewicht der Linearisierungsterm $3L^2x - 4x^3$ und für die linke Seite $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ bestimmt.

Für beide Seiten wie Durchbiegung D graphisch gegen den jeweiligen Linearisierungsterm aufgetragen und jeweils eine lineare Regression durchgeführt. Dabei ergeben sich die Abbildungen 5 und 6.

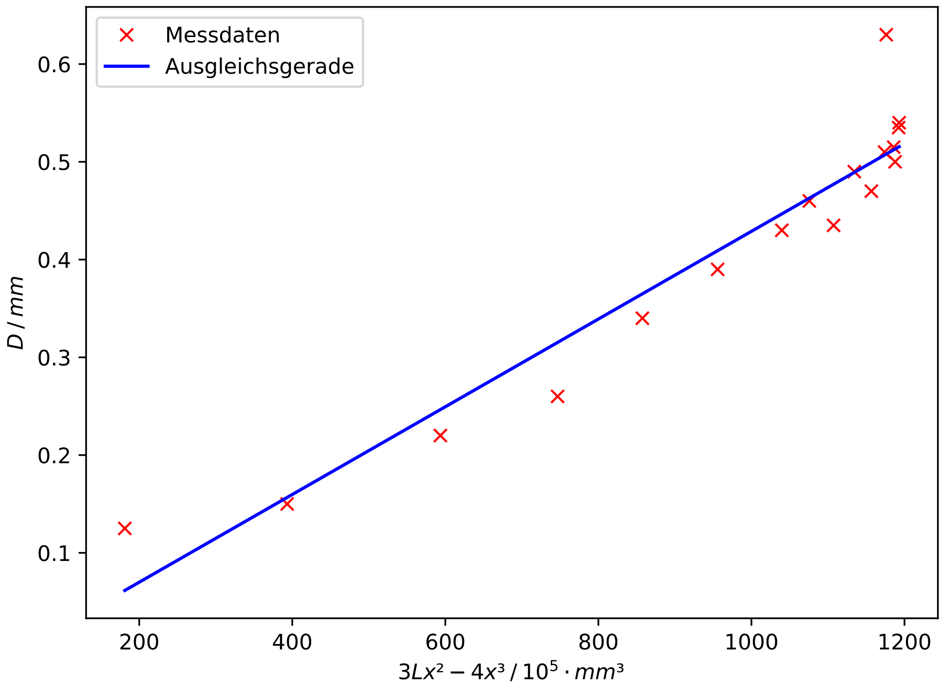

Abbildung 5: Messdaten und Regression der rechten Stabseite

Die Regressionsparamter der Regression für die rechte Seite des Stabes lauten:

$$a_3 = (0{,}004\,49 \pm 0{,}000\,04)\,1/\mathrm{m^2}$$
$$c_3 = (-0{,}0198 \pm 0{,}0377)\,\mathrm{mm}$$

Tabelle 3: Biegung eines beidseitig aufgelegten Stabes

x / cm	b_1 / mm	b_2 / mm	D / mm	$3L^2x - 4x^3$ / 10^5 mm^3
2.5	0.005	0.130	0.125	181.180
5.5	0.015	0.165	0.150	393.315
8.5	0.060	0.280	0.220	593.570
11.0	0.130	0.390	0.260	746.700
13.0	0.110	0.450	0.340	857.503
15.0	0.180	0.570	0.390	955.827
17.0	0.220	0.650	0.430	1039.751
18.0	0.195	0.655	0.460	1075.712
19.0	0.225	0.660	0.435	1107.354
20.0	0.240	0.730	0.490	1134.436
21.0	0.270	0.740	0.470	1156.718
22.0	0.245	0.755	0.510	1173.960
23.0	0.250	0.765	0.515	1185.921
24.0	0.255	0.790	0.535	1192.363
25.0	0.260	0.800	0.540	1193.045
26.0	0.310	0.810	0.500	1187.727
27.0	0.320	0.950	0.630	1176.169
x / cm	b_1 / mm	b_2 / mm	D / mm	$4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ / 10^5 mm^3
28.0	0.300	0.840	0.540	2175.441
29.0	0.330	0.850	0.520	2187.717
30.0	0.335	0.850	0.515	2192.481
31.0	0.355	0.850	0.495	2189.973
32.0	0.350	0.890	0.540	2180.433
33.0	0.365	0.855	0.490	2164.101
34.0	0.355	0.850	0.495	2141.217
35.0	0.365	0.870	0.505	2112.021
37.0	0.380	0.840	0.460	2035.653
39.0	0.385	0.840	0.455	1936.918
41.0	0.400	0.830	0.430	1817.734
43.0	0.415	0.780	0.365	1680.022
45.0	0.415	0.750	0.335	1525.702
48.0	0.420	0.650	0.230	1267.283
49.5	0.420	0.600	0.180	1127.705

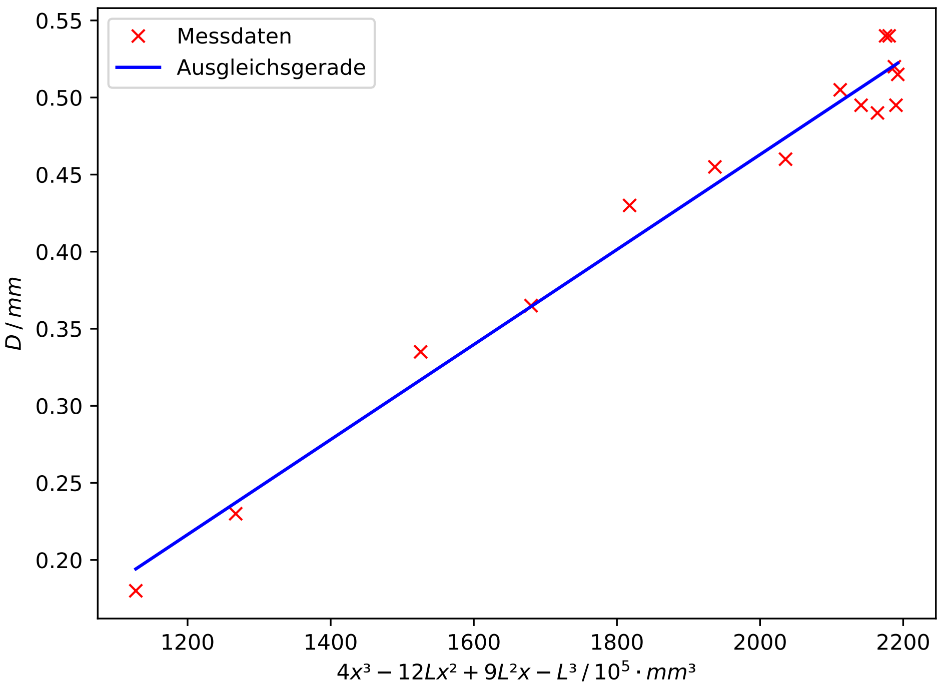

Abbildung 6: Messdaten und Regression der linken Stabseite

Und für die linke Seite des Stabes ergibt sich:

$$a_4 = (0{,}003\,08 \pm 0{,}000\,01)\,1/\mathrm{m}^2$$
$$c_4 = (-0{,}1534 \pm 0{,}0275)\,\mathrm{mm}$$

Gemäß der Formel (4) gilt für die beiden Elasitzitätsmodule, rechts und links, der Zusammenhang:

$$E = \frac{F_G}{48 a_i I} \text{ mit i} = 3,\ 4$$

Hier ist $F_G = m \cdot g$ mit $m = 1{,}2033\,\mathrm{kg}$ und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Mit (5) folgt für $I = \frac{1}{12}10^{-8}\,\mathrm{m}^4$. Damit ergibt sich für die Elasitzitätsmodule:

$$E_R = (6{,}57 \pm 0{,}06) \cdot 10^4\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$E_L = (9{,}581 \pm 0{,}031) \cdot 10^4\,\mathrm{N/mm^2}$$

Bildet man aus diesen Werten den Mittelwert ergibt sich schließlich:

$$E_M = (8{,}0755 \pm 1{,}5055) \cdot 10^4\,\mathrm{N/mm^2}$$

wobei der Fehler mit

$$\varDelta E_M = \sqrt{(\varDelta E_R)^2 + (\varDelta E_L)^2}$$

berechnet wird.

4 Diskussion

Die Werte der Elastizitätsmodule ergeben sich zu

$$E_Q = (2{,}220 \pm 0{,}032) \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$E_K = (1{,}037 \pm 0{,}008) \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$$

Es ist zu erkennen, dass die Bestimmung dieser Elastizitätsmodule gut funktioniert, was sich dadurch äußert, dass der statische Fehler beider Elastizitätsmodule etwa bei 1 % liegt. Systematische Abweichung sind hier demnach nicht zu erkennen. Somit kann die theoretische Formel (1) zur Beschreibung der Biegung elastischer Stäbe (bei kleinen Auslängen gegenüber der Stablänge) als bestätigt angesehen werden.

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmodul eines beidseitig aufliegenden Stabes mit quadratischem Querschnitt erhält man folgenden Mittelwert:

$$E_M = (8{,}0755 \pm 1{,}5055) \cdot 10^4\,\mathrm{N/mm^2}$$

Es ist zu erkennen, dass der statische Fehler des Mittelwertes mit 18,64 % recht groß ist. Dies ist mit dem großen Unterschied der beiden Elastizitätsmodule der rechten und der linken Seite zu erklären. Ein möglicher Grund dafür ist, dass das angehängte Gewicht nicht exakt in der Mitte des Stabes plaziert worden ist. Somit resultiert eine leicht asymmetrische Biegung des Stabes. Daraus folgen auch für beide Seiten des Stabes unterschiedliche Elastizitätsmodule, da in der Herleitung von einer perfekt symmetrischen Durchbiegung ausgegangen wird.

Desweiteren kann man Folgerungen treffen, aus welchem Material die Stäbe bestehen. Der einseitig eingespannte quadratische Stab scheint aus Stahl zu bestehen. Nicht rostender Stahl hat ein Elastizitätsmodul von 220 000 $\mathrm{N/mm^2}$ [2] und eine Dichte von 7,85 $\mathrm{g/cm^3}$ [3], was gut zu dem ermittelten Wert passt. Die ermittelte Dichte des Stabes passt mit 7,74 $\mathrm{g/cm^3}$ ebenfalls zu diesen Literaturwerten.
Der einseitig eingespannte runde Stab besteht anhand des Elastizitätsmodul entweder aus Messing oder Kuper. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls von Messing variiert von 78 bis 123 GPa [4] und fasst damit den im Experiment ermittelten Wert mit ein. Das Gleiche gilt für Kupfer, dessen Literaturwert des Elastizitätsmoduls von 100 bis 130 GPa variiert. Die ermittelte Dichte des Stabes liegt bei 8,31 $\mathrm{g/cm^3}$, was besser zu dem Wert der Dichte von Messing mit 8,73 $\mathrm{g/cm^3}$ [3] passt. Demnach scheint dieser Stab aus Messing zu bestehen.
Zuletzt wird der beidseitig aufliegende Stab betrachtet. Die Bestimmung des Materials anhand des Elastizitätsmoduls erweist sich als schwierig, da der statische Fehler sehr groß ist und demnach viele Materialien in Betracht gezogen werden müssen. Die Dichte von 8,33 $\mathrm{g/cm^3}$ deutet allerdings erneut auf Messing hin. Das ermittelte Elastizitätsmodul passt allerdings nicht zu dieser Deutung. Demnach scheint dieses falsch ermittelt worden sein, wie bereits vermutet.

5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe.*
[2]: `https://vergleichsspannung.de/glossar/e-modul/` *(Werte entnommen am 01.12.2018)*
[3]: Wikibooks. `https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/_Dichte_fester_Stoffe` *(Werte entnommen am 01.12.2018)*
[4]: Wikipedia. `https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4tsmodul` *(Werte entnommen am 01.12.2018)*