Nr. 351

Fourier-Analyse und Synthese

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 15.01.2019

Abgabe: 22.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel dieses Versuches ist die Verifizierung der Fourier-Analyse und Synthese.

Nach dem Fourier-Theorem lassen sich zeitlich (oder räumlich) periodische Vorgänge mit der Periodendauer T, für die

$$f(t+T) = f(t) \tag{1}$$

gilt, durch Superposition von Sinus- und Kosinusfunktionen verschiedener Frequenzen und Amplituden genähert werden. Dafür konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\right) \tag{2}$$

gegen die periodische Funktion $f(t)$.
Die sogenannten Fourierkoeffizienten a_k und b_k sind die Amplituden der einzelnen Sinus- und Kosinusfunktionen und werden durch

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\, \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ bestimmt.
Diese Ermittlung der Fourierkoeffizienten a_k und b_k wird als Fourieranalyse bezeichnet. Dabei verschwinden für gerade Funktionen mit $f(-t) = f(t)$ die Koeffizienten b_k mit den ungeraden Sinusfunktionen und für ungerade Funktionen mit $f(-t) = -f(t)$ die Koeffizienten a_k mit geraden Kosinusfunktionen.

Das Frequenzspektrum der fourieranalysierten Funktion entsteht durch Auftragung der Koeffizienten als Funktionen der Frequenzen. Da die Fourierentwicklung aus einer Summe über ganzzahlige k besteht, resultiert aus ihr ein Linienspektrum, dessen Linien gegen Null streben, da die Reihe konvergieren muss. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 zu sehen. Man nennt ein solches Frequenzspektrum auch einen Dirac-Kamm.
Konvergiert sie nicht, so liegt das an der Unstetigkeit der zu entwickelnden Funktion. Es tritt eine Abweichung an der Stelle der Unstetigkeit auf, welches als Gibbsches Phänomen bezeichnet wird.
Die Fourierentwicklung (2) enthält neben der Grundfrequenz $\nu_0 = \frac{2\pi}{T}$ deren ganzzahlige Vielfache - die Oberschwingungen. Außerdem können die Phasen nur 0, $\frac{\pi}{2}$, π oder $\frac{3\pi}{2}$ betragen.

Nichtperiodische zeitabhängige Funktionen können fouriertransformiert werden, um ihr gesamtes Frequenzspektrum bestimmen zu können. Die Transformation

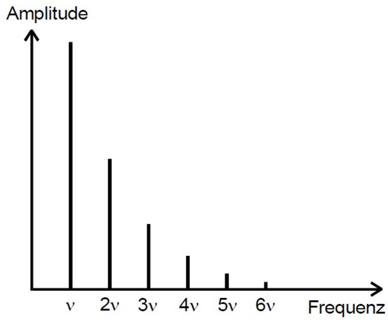

Abbildung 1: Beispiel für ein Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit der Grundfrequenz

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

gibt dabei das kontinuierliche Frequenzspektrum $g(\nu)$ wieder, welches durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu \tag{6}$$

zurücktransformiert wird. Im Gegensatz zur Fourierentwicklung periodischer Funktionen, resultieren hieraus in der Praxis keine perfekten -Funktionen, sondern Pike endlicher Breite, da die Integration über ein unendliches Intervall nicht realisierbar ist.

2 Durchführung

2.1 Fourier-Analyse

Bei diesem Versuchsteil werden ein Rechteck-, ein Dreieck- und ein Sägezahnsignal in ihre Fourierkomponenten zerlegt. Dazu wird ein Oszilloskop mit entsprechenden Signalen, die in einem Funktionsgenerator erzeugt werden, gespeist, siehe Abbildung ... . Die Fourier-Analyse wird dabei durch das Oszilloskop durchgeführt und ausgegeben. Zu beachten ist, dass genug Perioden angezeigt werden müssen, so dass auch genügend Peaks in dem Linienspektrum zu sehen sind. Von den angezeigten Peaks werden sowohl die Frequenz als auch die Amplitude notiert. Wie in der Theorie erwähnt bilden sich auch Nebenmaxima aus, die hier nicht beachtet werden.

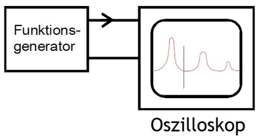

Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Messapperatur für die Fourier-Analyse [1]

2.2 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Sythese werden Rechtecks-, Dreiecks- und Sägezahnsignal aus ihren Fourierkomponenten zusammengesetzt. Zunächst werden immer zwei Ausgänge eines Oberwellengenerators an das Oszilloskop angeschlossen. Dieser Generator liefert Grundschwingungen und Oberwellen. Diese sind die Fourierkomponenten. Damit alle Ausgänge des Generators in Phase geschaltet sind, wird das Oszilloskop zunächst in X-Y-Betrieb geschaltet. Um eine optimale Genauigkeit zu erreichen, werden die Amplituden der einzelnenen Oberwellen maximal eingestellt. Auf dem Bildschirm erscheint eine Lissajous-Figur. die in sich geschlossen oder zu einer Linie mit zwei Enden entartet sein kann. Anhand dieser Figur wird die Phase zwischen den beiden Schwingungen bestimmt. Ist die Figur bei ungeradem n eine Linie, so muss die Phasenverschiebung ϕ durch 0 oder π gegeben sein. Bei geraden n und Sinusfunktion wird die gleich Phase identifiziert, wenn die Figur eine geschlossene, zur x-Achse symmetrische Kurve, ist. Es gibt oft Fälle, bei denen aus der Gestalt der Lissajous-Figur nicht auf die Phasenverschiebung geschlossen werden kann. Ist dies der Fall, wird durch durch Umschalten des 180°-Phasenschalters während der einzelnen Syntheseschritte die richtige Phaseneinstellung ermittelt. Außerdem werden die einzelnen Komponenten gemäß den Beträgen der Fourier-Koeffizienten eingestellt. Schließlich wird an dem Summenausgang ein Oszilloskop angeschlossen und durch sukzessives Zuschalten der einzelnen Komponenten die Überlagerungsfigur auf dem Bildschirm beobachtet.

3 Auswertung

3.1 Fourieranalyse

Im ersten Versuchsteil soll der Abfall der Fourierkoeffizienten a_k und b_k periodischer Sägezahn, Rechtecks- und Dreiecksspannungen untersucht werden. Dazu werden die Ordnung k und die Spannungsamplitude U gegeneinander logarithmiert aufgetragen und eine lineare Regression der Form

$$\ln\left(U \cdot \frac{1}{\mathrm{V}}\right) = a \cdot \ln(k) + b \tag{7}$$

Dabei wird die Spannung U durch ihre Einheit geteilt, da der Logarithmus nur für für dimensionslose Größen definiert ist. Zudem ergibt sich umgeformt:

$$U = \mathrm{e}^b \cdot k^a \cdot \mathrm{V} \tag{8}$$

Da nun U proportional zu den Fourierkoeffizienten ist, lässt sich die Stärke deren Abfalls ermitteln. Die Messdaten der Sägezahnspannung sind dazu in Tabelle **??** aufgeführt und in Abbildung **??** gegeneinander aufgetragen. Die Lineare Regression, die mittels python durchgeführt wurde, ergibt die Tangentenparameter:

$$a_{\mathrm{S}} = -1{,}0052 \pm 0{,}0286$$
$$b_{\mathrm{S}} = 7523{,}000 \pm 0{,}451$$

Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Sägezahnspannung in etwa proportional zu $\frac{1}{k}$ abfallen.

Tabelle 1: Messdaten und deren Logarithmen der Sägezahnspannung

k	$\ln(k)$	$U\,/\,\mathrm{V}$	$\ln(U\,/\,\mathrm{V})$
1	0,000	2,040	0,713
2	0,693	1,100	0,095
3	1,099	0,740	-0,301
4	1,386	0,488	-0,717
5	1,609	0,440	-0,821
6	1,792	0,352	-1,044
7	1,946	0,296	-1,217
8	2,079	0,280	-1,273
9	2,197	0,216	-1,532

Für die Rechtecksspannung sind die Messdaten in Tabelle **??** aufgelistet und in Abbildung **??** gegeneinander aufgetragen. Es ergeben sich die Regressionsparameter:

$$a_{\mathrm{R}} = -1{,}0021 \pm 0{,}0209$$
$$b_{\mathrm{R}} = 1{,}4205 \pm 0{,}0462$$

Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Rechtecksspannung in etwa proportional zu $\frac{1}{k}$ abfallen.

Für die Dreiecksspannung sind die Messdaten in Tabelle **??** aufgelistet und in Abbildung **??** gegeneinander aufgetragen. Es ergeben sich die Regressionsparameter:

$$a_{\mathrm{D}} = -1{,}9681 \pm 0{,}0121$$
$$b_{\mathrm{D}} = 0{,}9585 \pm 0{,}0227$$

Nach Formel (8) ist zu erkennen, dass die Fourierkoeffizienten der Dreiecksspannung in etwa proportional zu $\frac{1}{k^2}$ abfallen.

3.2 Fourier-Synthese

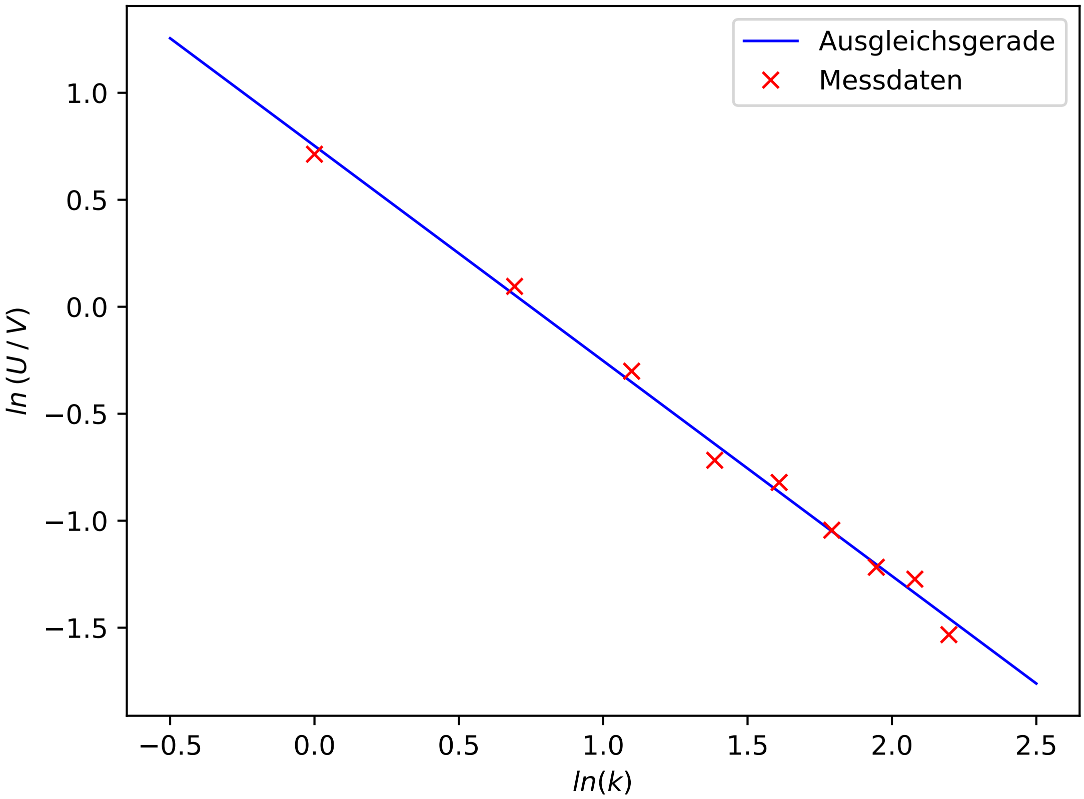

Abbildung 3: Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Sägezahnspannung

Tabelle 2: Messdaten und deren Logarithmen der Rechtecksspannung

k	$\ln(k)$	$U\,/\,\mathrm{V}$	$\ln(U\,/\,\mathrm{V})$
1	0,000	4,000	1,389
3	1,099	1,440	0,365
5	1,609	0,860	-0,151
7	1,946	0,580	-0,545
9	2,197	0,420	-0,868
11	2,398	0,384	-0,957
13	2,565	0,344	-1,067
15	2,708	0,280	-1,273
17	2,833	0,224	-1,496
19	2,944	0,216	-1,532

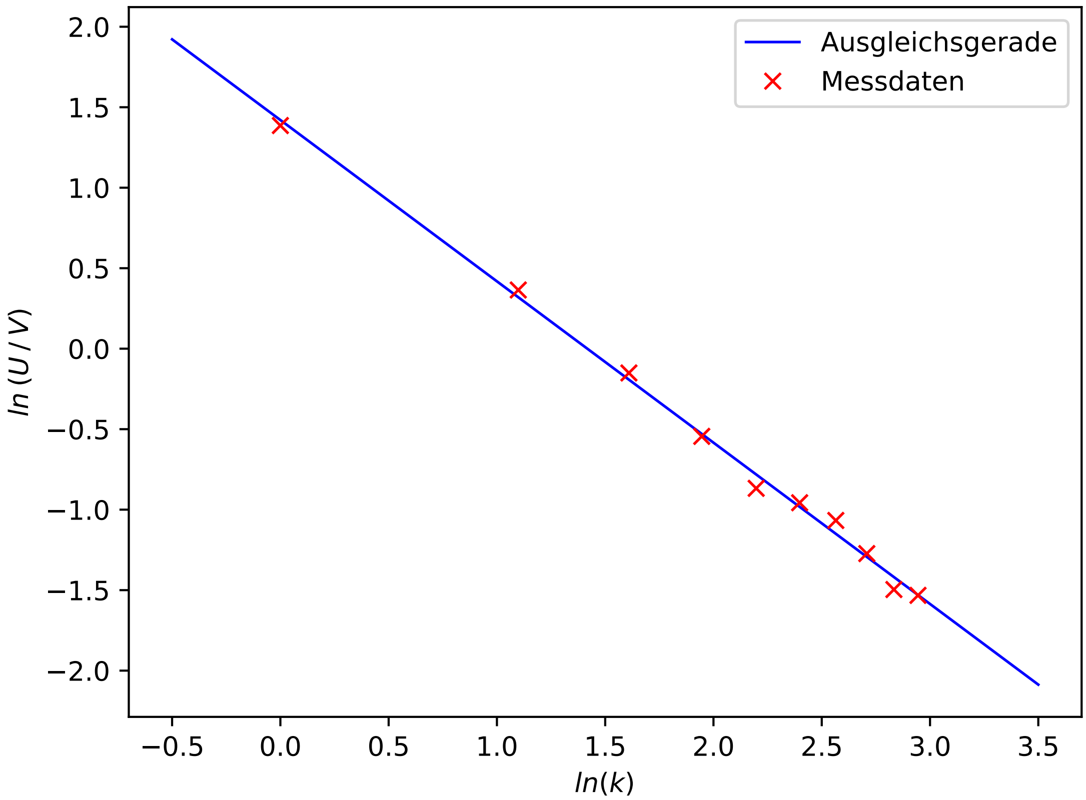

Abbildung 4: Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Rechtecksspannung

Tabelle 3: Messdaten und deren Logarithmen der Dreiecksspannung

k	$\ln(k)$	$U\,/\,\mathrm{V}$	$\ln(U\,/\,\mathrm{V})$
1	0,000	2,560	0,940
3	1,099	0,312	-1,165
5	1,609	0,112	-2,189
7	1,946	0,056	-2,882
9	2,197	0,036	-3,324
11	2,398	0,023	-3,772
13	2,565	0,017	-4,075

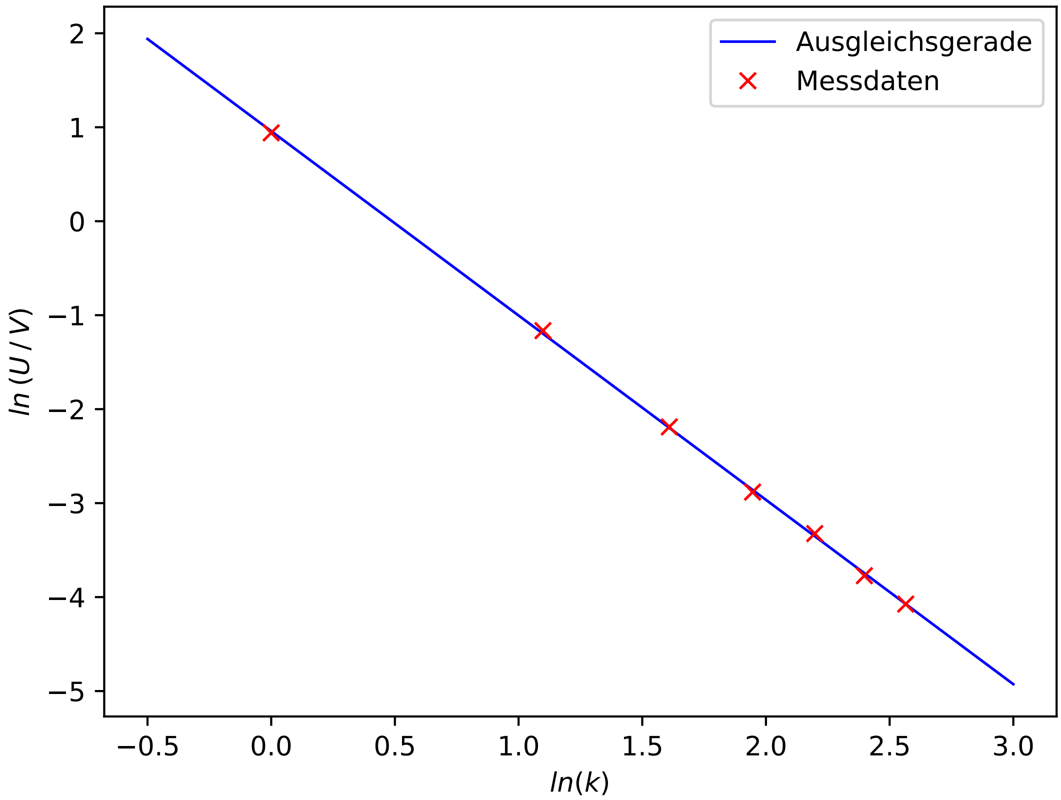

Abbildung 5: Messwerte und lineare Regression für die Messwerte der Dreiecksspannung

4 Diskussion