Nr. 102

Drehschwingungen

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 11.12.2018

Abgabe: 18.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **3**
1.1 Bestimmung des Schubmoduls G 4
1.2 Bestimmung des magnetischen Momentes des Permanentmagneten 5

2 Durchführung **6**

3 Auswertung **8**
3.1 Bestimmung der Proportinonalitätsfaktoren des Torsionsdrahtes 8
3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Stabmagneten 10

4 Diskussion **12**

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es die elastischen Konstanten eines Materiales zu bestimmen. Außerdem soll das magnetische Moment eines permanent Magneten bestimmt werden.

In der Mechanik wird generell zwischen zwei Arten von Kräften unterschieden: Volumenkräfte, wie etwa die Gravitationskraft, bewirken eine Änderung des Bewegungszustandes, zum Beispiel eine Translation oder Rotation. Außerdem gibt es Oberflächenkräfte, die eine Gestalts- oder Volumenänderung bewirken. Die Kraft, die dabei auf einen Körper wirkt wird als Spannung bezeichnet. Eine senkrecht zum Körper angreifende Kraft wird als Normalspannung σ benannt, eine die tangential zum Körper angreift als Tangentialspannung τ.

Für den Hookschen Bereich ist dabei die Kraft proportional zur Deformation, sodass elastische Konstanten zur Charakterisierung der Verformung eingeführt werden. Dieser Bereich zeichnet sich dadurch aus, dass dort Körper nach einer Deformation in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren. Es wird von einer "deelastischen Deformation" gesprochen. Für kleine Spannungen gilt also:

$$P = Q\frac{\Delta V}{V}.$$

In einem Kristall mit niedriger Symmertrie werden jeweils 6 Komponenten für die Beschreibung der Deformation und Spannung benötigt. Daraus entsteht eine 6x6 Matrix mit insgesamt 36 Einträgen. Das Energieprinzip reduziert diese Anzahl allerdings aus 21 Komponenten, weitere lassen sich durch weitere Symmertrien eleminieren. In diesem Versuch werden nun isotrope Körper untersucht, wodurch sich die Anzahl auf zwei Konstanten verringert. Isotrope Körper zeichnen sich dadurch aus, dass die elastischen Konstanten richtungsunabhängig sind. Die benötigten Konstanten sind das Schubmodul G für die Gestaltselastizität und das Kompressionsmodul Q für die Volumenelastizität. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit werden außerdem der Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ eingeführt. E beschreibt dabei die relative Längenänderung beim Angreifen einer Normalspannung in Spannungsrichtung und μ die Längenänderung senkrecht zur Normalspannung. μ ist dabei definiert durch:

$$\mu = -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L},$$

was durch Abbildung 1 verdeutlicht wird.

Zwischen den elastischen Konstanten G, E, Q und μ gilt der Zusammenhang:

$$E = 2G(\mu + 1) \leftrightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1 \tag{1}$$

$$E = 3(1 - 2\mu)Q \leftrightarrow Q = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \tag{2}$$

Bei Proben, die deutlich länger als breit sind, also $L >> B$ lassen sich der Elastizitätsmodul E und Schubmodul G besonders einfach bestimmen. Insbesondere bei Metallen

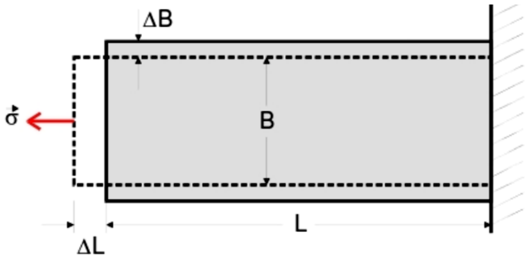

Abbildung 1: Verdeutlichung der Querkontraktionszahl [1]

mit einem niedrigen Schmelzpunkt kommt es zu sogenannten elastischen Nachwirkungen. Damit wird bezeichnet, dass der ursprüngliche Zustand nicht unmittelbar nach der Verformung wieder eingenommen wird. Dies soll vermieden werden.

1.1 Bestimmung des Schubmoduls G

Treten an einem Körper lediglich Tangentialspannungen auf, kommt es zu einer Scherung. Dabei wird der Körper in eine Richtung deformiert. Allerdings ist es sehr schwierig, den den sogenannten Scherungswinkel α zu bestimmen. Aus diesem Grund wird stattdessen die Torsion eines zylindrischen Stabes betrachtet. Dabei greifen an zwei gegenüberliegenden Punkten des Kreisdurchmessers Kräfte in entgegengesetzten Richtungen an, wie in Abbildung 2 dargestellt. Dies führt zu einer "Verzwirbelung" des Probekörpers. Wird dieses Beispiel auf einen Draht projeziert, so wirkt nun ein Drehmoment M auf diesen. Dieses hängt auch von dem Hebelarm, also dem Abstand des Massepunktes von der Drehachse, ab. Die Variation über den Durchmesser hinweg, ergibt die Notwendigkeit den Körper in Holzylinder mit der infinitesimalen Dicke dr und dem Radius r zu zerlegen. Für das Drehmoment M ergibt sich dadurch schließlich zu:

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr = \frac{\pi G R^4 \varphi}{2L}.$$

Dabei ist R der Radius des Drahtes, L die Länge und φ der Torsionswinkel.
Somit lautet die Richtgröße D:

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L}.$$

Angesprochene Nachwirkungen werden vermieden durch eine Messmethode, bei der die Spannung eine periodische Funktion der Zeit ist. Dafür wird eine Kugel an den Draht gehängt und ausgelenkt. Durch die entgegengesetzt wirkenden Drehmomente kommt es zu einer Drehschwingung. Es ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch einen Cosinusansatz gelöst wird. Dadurch ergibt sich für die Periodendauer T folgender Zusammenhang:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}} \tag{3}$$

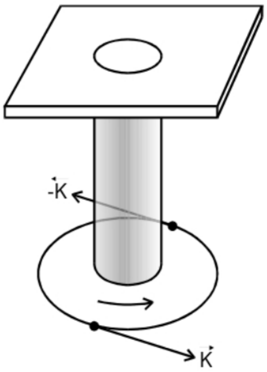

Abbildung 2: Verdeutlichung der Torsion [1]

Dabei bezeichnet θ das Trägheitsmoment der Kugel. Dieses ist im Allgemeinem gegeben durch:

$$\theta_\mathrm{K} = \frac{2}{5} m_\mathrm{K} R_\mathrm{K}^2 \tag{4}$$

m_K ist dabei gegeben als Masse der Kugel und R_K als Radius der Kugel. Wird θ_K und D in (3) eingesetzt ergibt sich:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4 L m_\mathrm{K} R_\mathrm{K}^2}{5 \pi G R^4}}$$

Umformen zu G führt zu:

$$G = \frac{16 \pi m_\mathrm{K} R_\mathrm{K}^2 L}{5 T^2 R^4} \tag{5}$$

1.2 Bestimmung des magnetischen Momentes des Permanentmagneten

Für die Bestimmung des magnetischen Momentes eines Permanentmagneten ist folgende Beziehung gegeben:

$$\vec{m} = p \vec{a}$$

mit p als Polstärke und a als Abstand der Pole, der von Nord- zum Südpol zeigt. In einem homogenen B-Feld wirken auf den Magneten zwei entgegengesetzte Kräfte, was in Abbildung 3 veranschaulicht wird. Diese Kräfte sind entgegengesetzt durch das unterschiedliche Vorzeichen von p. Es wirkt also ein magnetisches Drehmoment, dass betraglich durch

$$M_\mathrm{mag} = m B \sin \gamma$$

gegeben ist.

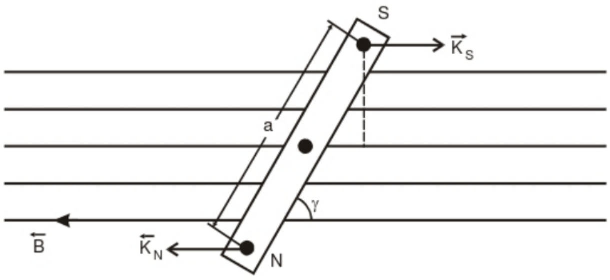

Abbildung 3: Permanentmagnet in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ [1]

Die nicht-lineare Differentialgleichung wird durch eine Kleinwinkelnäherung linearisiert und lässt sich ebenfalls durch einen Cosinusansatz lösen. Daraus ergibt sich die Periodendauer bei aktivierten Magnetfeld und daraus widerrum das magnetische Moment m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \tag{6}$$

2 Durchführung

Für die Bestimmung des Schubmoduls G nach der dynamischen Methode wird die in Abbildung 4 abgebildete Versuchsapparatur verwendet.

In dieser ist eine Kugel an einem Torsionsdraht aufgehängt. Der Draht soll durch eine Auslenkung mit dem Justierrad zum Schwingen gebracht werden. Für die Unterbindung andersförmiger Bewegungen, ist eine Vorrichtung angebracht, mit der die Kugel durch eine Dämpfung in Ruhe versetzt werden kann.

Zur Messung der Periodendauer wird nach Abbildung 5 ein Lichtstrahl emittiert, der durch einen Doppelspalt und eine Sammellinse auf einen am Draht befestigten Spiegel fällt. Der Spiegel dreht sich somit zusammen mit der Kugel und dem reflektierten Lichtstrahl, welcher an einem Punkt auf eine Fotodiode trifft.

Das elektrische Signal wird dabei zur Zeitmessung genutzt. Das erste Signal beginnt die Messung, das zweite muss für eine volle Periode ignoriert werden, was durch eine sogenannte Flip-Flop-Kippstufe realisiert wird. Das dritte Signal beendet dann die Messung und das vierte setzt die Zähluhr zurück. Zu Anfang soll dazu der Draht mittels des Justierrades so justiert werden, dass der Lichtstrahl auf die, die Diode umgebende, Mattscheibe fällt. Auch sollen die Abstände innerhalb der Beleuchtungsapparatur so variiert werden, dass das Beugungsbild möglichst scharf auf der Mattscheibe abgebildet wird.

Zusätzlich wird eine Messung zur Bestimmung des magnetischen Dipolmoments $\vec{m}$ eines Permanentmagneten durchgeführt. Während bei der Messung des Schubmoduls G die Dipolachse der Kugel anhand einer Markierung parallel zum Draht ausgerichtet werden sollte, um den Einfluss des Erdmagnetfeldes aufzuheben, wird dieses hier senkrecht zum

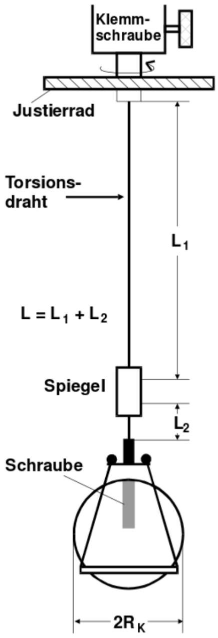

Abbildung 4: Messapparatur zur Bestimmung des Schubmoduls eines Torsionsdrahtes. [1]

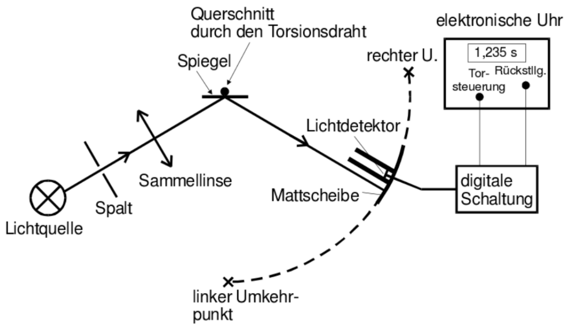

Abbildung 5: Bestimmung der Periodendauer T der Schwingung des Torsionsdrahtes mithilfe eines Lichtdetektors. [1]

Draht ausgerichtet. Außerdem wird um den Magneten durch ein Helmholtzspulenpaar ein homogenes Magnetfeld aufgebaut. Wieder wird die Periodendauer gemessen, diesmal jeweils für verschiedene magnetische Flussdichten. Außerdem darf der Schwingungswinkel bei dieser Messung nur klein sein, da somit eine vereinfachende Winkelnäherung in der Herleitung verwendet werden kann.

Außerdem wird mit einer Mikrometerschraube der Durchmesser und mit einem Maßband die Länge des Drahtes gemessen.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Proportinonalitätsfaktoren des Torsionsdrahtes

Zunächst müssen die Komponenten der Apparatur vermessen werden. Dabei ergab sich eine Länge von 68,2 cm für den Torsionsfadens. Die Messdaten für den Radius des Drahtes finden sich in Tabelle 1.

Tabelle 1: Radius des Torsionsfadens

r / µm
80
80
79
$\bar{r}$ / µm
79.67 ±0.47

Dabei ergibt sich der Mittelwert nach

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{\mathrm{i}}$$

und die Standardabweichung durch

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{\mathrm{i}} - \bar{x})^2}.$$

Diese Formeln werden im Weiteren für jede Mittelwertsrechnung verwendet. Zur Berechnung des Schubmoduls wird die Peiodendauer der Apparatur benötigt. Die Messdaten für deren Bestimmung finden sich in Tabelle 2.

Nach (5) lässt sich somit der Schubmodul berechnen. Dafür muss neben dem Trägheitsmoment der Kugel, welches sich nach (4) berechnet, das Trägheitsmoment der Kugelhalterung berücksichtigt werden. Dieses wird dem Versuchsaufbau nach

$$\theta_{\text{Halterung}} = 22{,}5\,\mathrm{gcm}^2$$

Tabelle 2: Messung der Periodendauern zur Bestimmung des Schubmoduls

$T\,/\,\mathrm{s}$
20.053
20.042
20.052
20.038
20.033
20.033
20.043
20.047
20.047
20.037
$\bar{T}\,/\,\mathrm{s}$
20.043 ±0.007

abgelesen. Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich nun aus der Addition der einzelnen Trägheitsmomente:

$$\theta = \theta_\mathrm{K} + \theta_\mathrm{Halterung} = (1342{,}0 \pm 0{,}6)\,\mathrm{gcm}^2.$$

Für das Schubmodul ergibt sich damit:

$$G = \frac{8\pi\theta L}{T^2 R^4} = (142{,}2 \pm 3{,}4)\,\mathrm{GPa}.$$

Der Fehler ergibt sich dabei mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu:

$$\begin{aligned}
\Delta G &= \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\cdot\Delta\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\cdot\Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R}\cdot\Delta R\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{8\pi L}{T^2R^4}\cdot\Delta\theta\right)^2 + \left(\frac{-16\pi\theta L}{TR^4}\cdot\Delta T\right)^2 + \left(\frac{-32\pi\theta L}{T^2R^3}\cdot\Delta R\right)^2}
\end{aligned}$$

Mit dem Literaturwert des Elastizitätsmoduls von Stahl

$$E = 210\,\mathrm{GPa}[ZITIEREN]$$

und Formel (1) ergibt sich die Querkontraktionszahl zu:

$$\mu = -0{,}262 \pm 0{,}018.$$

Nach (2) ergibt sich außerdem für den Kompressionsmodul

$$Q = (46{,}0 \pm 1{,}1)\,\mathrm{GPa}.$$

3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Stabmagneten

Wie in der Durchführung beschreiben, soll nun das magnetische Moment eines in der Kugel verbauten Permanentmagneten bestimmt werden. Die Ergebnisse für die fünf Messungen sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Periodendauern zur Bestimmung des magnetischen Moments des Permanentmagneten

T_1 / s	T_2 / s	T_3 / s	T_4 / s	T_5 / s
13.623	11.052	9.758	7.325	6.377
13.700	11.021	9.723	7.288	6.419
13.657	10.964	9.737	7.252	6.417
13.614	11.038	9.687	7.259	6.393
13.699	10.952	9.681	7.245	6.379
$\bar{T}_1$ / s	$\bar{T}_2$ / s	$\bar{T}_3$ / s	$\bar{T}_4$ / s	$\bar{T}_5$ / s
13.66 ±0.04	11.01 ±0.04	9.717 ±0.029	7.274 ±0.029	6.397 ±0.018
$I_1 = 0{,}1\,\mathrm{A}$	$I_2 = 0{,}2\,\mathrm{A}$	$I_3 = 0{,}3\,\mathrm{A}$	$I_4 = 0{,}6\,\mathrm{A}$	$I_5 = 0{,}8\,\mathrm{A}$
$B_1 = 0{,}45\,\mathrm{mT}$	$B_2 = 0{,}90\,\mathrm{mT}$	$B_3 = 1{,}35\,\mathrm{mT}$	$B_4 = 2{,}70\,\mathrm{mT}$	$B_5 = 3{,}60\,\mathrm{mT}$

Dabei werden die Messungen für die jeweils angegeben Stromstärken der Helmholtzspulen durchgeführt. Das Helmoltzspulenpaar erzeugt dabei bei gegebener Stomstärke I, Windungszahl N und Spulenradius R ein homogenes Magnetfeld

$$B = \frac{8M_0IN}{\sqrt{125}R}.$$

Die Werte $N = 390$ und $R = 78\,\mathrm{mm}$ werden dabei von der Apparatur abgelesen. Die resultierenden Werte für B sind in Tabelle 3 zu finden.

Es werden nun die jeweiligen Werte für B gegen den dazugehörigen Wert der Periodenzeit $\frac{1}{\bar{T}_i^2}$ aufgetragen. Es ergibt sich der in Abbildung 6 abgebildete Plot.

Für die daraus folgenden Daten wird ein linearer Fit an die Funktion

$$y = m_{\text{fit}}x + b$$

erstellt.

Für die Regressionsparameter ergeben sich die Werte:

$$m_{\text{fit}} = (0{,}165\,59 \pm 0{,}002\,94)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A}},$$
$$b = (-0{,}437 \pm 0{,}045)\,\mathrm{T}.$$

Anhand von Gleichung (6) lässt sich das magnetische Moment m jetzt identifizieren als

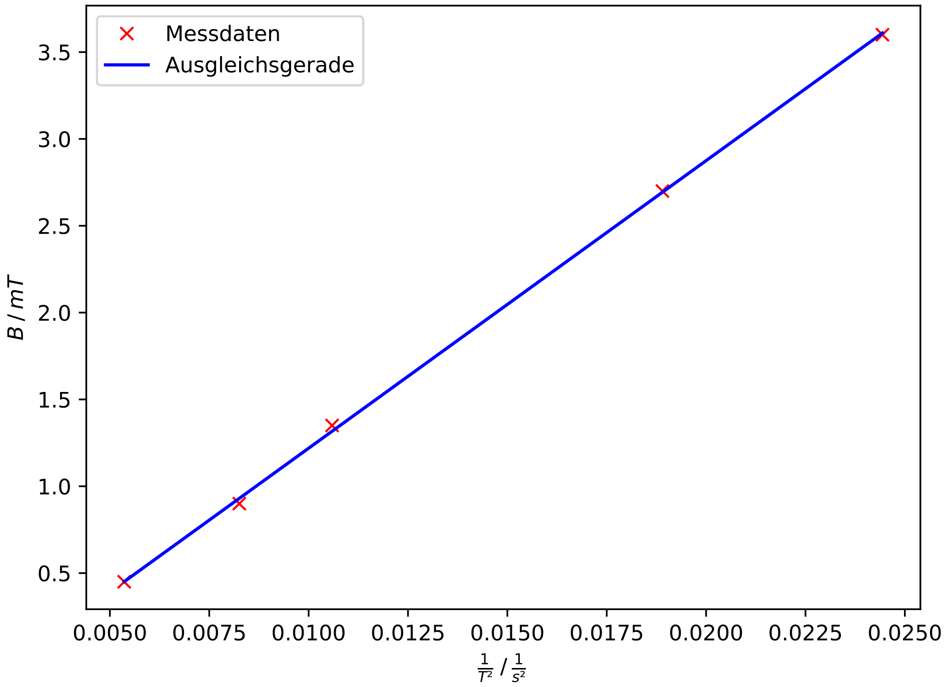

Abbildung 6: Reziproke quadratische Periodendauer in Abhängigkeit vom Magnetfeld

$$m = \frac{4\theta\pi}{m_{\mathrm{fit}}}.$$

Somit ergibt sich der Wert:

$$m = (0{,}010\,19 \pm 0{,}000\,18)\,\mathrm{Am}^2.$$

4 Diskussion