Nr. 103

Biegung elastischer Stäbe

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 27.11.2018 Abgabe: 04.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, Elastizitätsmodule verschiedener Materialen zu ermitteln, indem die Biegung elastischer Stäbe untersucht wird.

1.1 Die Spannung an elastischen Körpern

Die physikalische Größe der mechanischen Spannung σ_m ist die wirkende Kraft F pro Fläche A. Sie setzt sich zusammen aus der Normalspannung σ, die senkrecht zur Oberfläche wirkt und einer tangential zur Fläche wirkenden Tangentialspannung.

Spannungen können an Körpern zu Gestalt- und Volumenveränderungen führen. Liegt durch Druck oder Zug eine Spannung nur in einer Körperdimension vor, so ist sie proportional zur Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ und es ergibt sich das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

mit dem materialspezifischen Elastizitätsmodul E als Proportionalitätsfaktor. Mithilfe einer hinreichend genauen Apparatur kann der Elastizitätsmodul durch Messung der Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ bestimmt werden.

Allerdings kann der Elastizitätsmodul E auch unter geringerem Kraftaufwand durch die Biegung von Stäben bestimmt werden, so wie es Gegenstand dieses Versuches sein soll. Hier reichen schon kleinere Kräfte aus, um eine Veränderung des Körpers zu bewirken. Dazu werden zwei unterschiedliche Arten der Biegung untersucht, wie sie in den Abbildungen , dargestellt sind.

Bei den dargestellten Biegungen handelt es sich um die Biegungen eines einseitig eingespannten und eines beidseitig aufgelegten Stabes.

1.2 Die Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Die am uneingespannten Ende des Stabes wirkende Gravitationskraft F eines aufgehängten Gewichtes biegt den Stab mit der Durchbiegung $D(x)$ aus und bewirkt ein angreifendes Drehmoment

$$M_\mathrm{F} = F \cdot (L - x) \tag{2}$$

mit der Länge des Hebelarms $(L - x)$.

Dieses Drehmoment verursacht eine Dehnung der oberen und eine Stauchung der unteren Stabschichten, sodass der Querschnitt Q sich nicht mehr in vertikaler, sondern in verdrehter Position befindet. Einzig die neutrale Faser in der Mitte des Querschnitts Q behält ihre Länge bei. An allen anderen Fasern kommt es , aufgrund der Elastizitäts des Körpers, zu Normalspannungen, die sich zu einem zu M_F entgegengesetzen Drehmoment M_σ aufsummieren:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\,\mathrm{d}q \tag{3}$$

Dabei beschreibt y den Abstand des Flächenelements $\mathrm{d}q$ zur neutralen Faser.
Zwischen den Drehmomenten stellt sich ein Gleichgewicht mit fester Durchbiegung $D(x)$ ein, sodass

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{F}} &= M_\sigma && (4)\\
\iff \quad \int_Q y\sigma(y)\,\mathrm{d}q &= F\cdot(L-x) && (5)
\end{aligned}
$$

gilt.
Damit ergibt sich für die Durchbiegung

$$
D(x) = \frac{F}{2E\boldsymbol{I}}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \qquad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \tag{6}
$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$
\boldsymbol{I} = \int_Q y^2 \,\mathrm{d}q(y) \tag{7}
$$

1.3 Die Biegung eines Stabes mit beideitiger Auflage

Am beidseitig aufgelegten Stab wirkt nach Abblidung ... die Gravitationskraft $\frac{F}{2}$ eines Gewichtes an der Mitte der Querschnittsfläche Q mit einem Hebelarm der Länge x und bewirkt somit das Drehmoment

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{F}} &= -\frac{F}{2}x && (\text{für } 0 \leq x \leq \tfrac{L}{2}) && (8)\\
M_{\mathrm{F}} &= -\frac{F}{2}(L-x) && (\text{für } \tfrac{L}{2} \leq x \leq L) && (9)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich analog die Durchbiegung

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \frac{F}{48E\boldsymbol{I}}\left(3L^2x - 4x^3\right) && (\text{für } 0 \leq x \leq \tfrac{L}{2}) && (10)\\
D(x) &= \frac{F}{48E\boldsymbol{I}}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) && (\text{für } \tfrac{L}{2} \leq x \leq L) && (11)
\end{aligned}
$$

2 Durchführung

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des Elasitzitätsmodul zweier einseitig eingespannter Stäbe

Bei der Messung des Stabes mit rechteckigem Querschnitt, einer Länge $L_1 = 60\,\mathrm{cm}$ und einem Gewicht von $m_1 = 464{,}3\,\mathrm{g}$ ergaben sich die Messwerte in Tabelle 1. Dabei ergibt

Tabelle 1: Biegung eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt

$x\,/\,\mathrm{cm}$	$b_1\,/\,\mathrm{mm}$	$b_2\,/\,\mathrm{mm}$	$D\,/\,\mathrm{mm}$	$Lx^2 - \frac{x^3}{3}\,/\,10^5\,\mathrm{mm}^3$
2.5	-0.005	0.060	0.065	3.323
5.5	-0.270	-0.215	0.055	15.780
8.5	-0.380	-0.280	0.100	36.968
11.0	-0.435	-0.300	0.135	60.903
13.0	-0.480	-0.305	0.175	83.937
15.0	-0.500	-0.310	0.190	110.250
17.0	-0.540	-0.265	0.275	139.683
19.0	-0.580	-0.265	0.315	172.077
21.0	-0.620	-0.240	0.380	207.270
23.0	-0.620	-0.225	0.395	245.103
25.0	-0.720	-0.220	0.500	285.417
27.0	-0.810	-0.235	0.575	328.050
29.0	-0.850	-0.220	0.630	372.843
31.0	-0.900	-0.250	0.650	419.637
33.0	-0.990	-0.190	0.800	468.270
35.0	-1.025	-0.130	0.895	518.583
37.0	-1.040	-0.080	0.960	570.417
39.0	-1.050	-0.070	0.980	623.610
41.0	-1.080	-0.030	1.050	678.003
42.0	-1.100	-0.020	1.080	705.600
43.0	-1.100	0.005	1.105	733.437
44.0	-1.100	0.030	1.130	761.493
45.0	-1.090	0.055	1.145	789.750
46.0	-1.090	0.120	1.210	818.187
47.0	-1.090	0.160	1.250	846.783
48.0	-1.100	0.160	1.260	875.520
49.0	-1.100	0.190	1.290	904.377
49.5	-1.110	0.220	1.330	918.843

sich die Durchbiegung D durch die Differenz von b_1 und b_2. Der Linearisierungsterm ergibt sich mit $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$

Nun wird die Durchbiegung D gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ graphisch aufgetragen und eine lineare Regressions mittels Python und matplotlib durchgeführt. Der resultierende Graph ist in Abbildung 1 dargestellt.

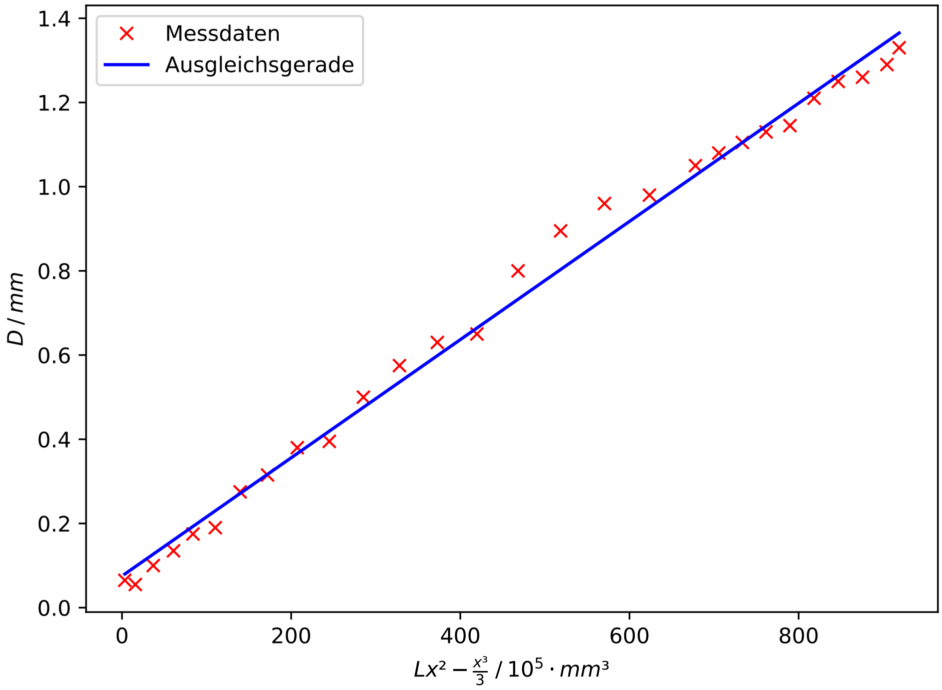

Abbildung 1: Durchbiegung mit Regression

Die Regression wird mit $D(x) = m_1 \cdot x + c_1$ durchgeführt. Dabei ergeben sich die Parameter zu:

$$m_1 = (1{,}404 \pm 0{,}249) \cdot 10^{-3}\,1/\mathrm{mm}^2$$
$$c_1 = (0{,}075\,20 \pm 0{,}013\,64)\,\mathrm{mm}$$

Nach Formel (6) ergibt sich die Formel:

$$E = \frac{F_G}{2m_1\boldsymbol{I}}$$

Hierbei ist $F_G = m_g \cdot g$ mit $m_g = 528\,\mathrm{g}$ und $g = 9{,}81\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Das Flächenträgheitsmoment ergibt sich nach Formel ... zu $\frac{1}{12}10^4\,\mathrm{mm}^4$. Das Elastizitätsmodul ist also gegeben durch:

$$E = (2{,}2 \pm 0{,}4)\,\mathrm{kN/mm}^2$$

Der statische Fehler ergibt sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = \frac{-F_G}{2\boldsymbol{I} m^2} \cdot \Delta m_1$$

4 Diskussion