

Nr. 406

Beugung am Spalt

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 30.04.2019

Abgabe: 07.05.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Einfachspalt	3
1.2	Doppelspalt	5
1.3	Fourier-Transformation	5
2	Durchführung	5
3	Auswertung	6
3.1	Der Einfachspalt der Spaltbreite $b = 0,15 \text{ mm}$	6
3.2	Der Einfachspalt der Spaltbreite $b = 0,075 \text{ mm}$	7
3.3	Der Doppelspalt	9
4	Diskussion	14
5	Literaturverzeichnis	14

1 Theorie

In diesem Versuch wird die Beugung des Lichtes am Einzel- und Doppelspalt untersucht. Hierbei ist der Wellencharakter des Lichtes von besonderer Bedeutung. Mit Hilfe der Beugungsbilder sollen Rückschlüsse auf die Geometrie der Spalte geschlossen werden. Lichtbeugung tritt dann auf, wenn die Größe der verursachenden Hindernisse in der Größenordnung der Wellenlänge λ des Lichtes liegt. Es gibt zwei grundlegende mathematische Betrachtungen, um diese Beugung zu untersuchen: Die nach Fraunhofer und die nach Fresnel. Beide sind in Abbildung 1 dargestellt.

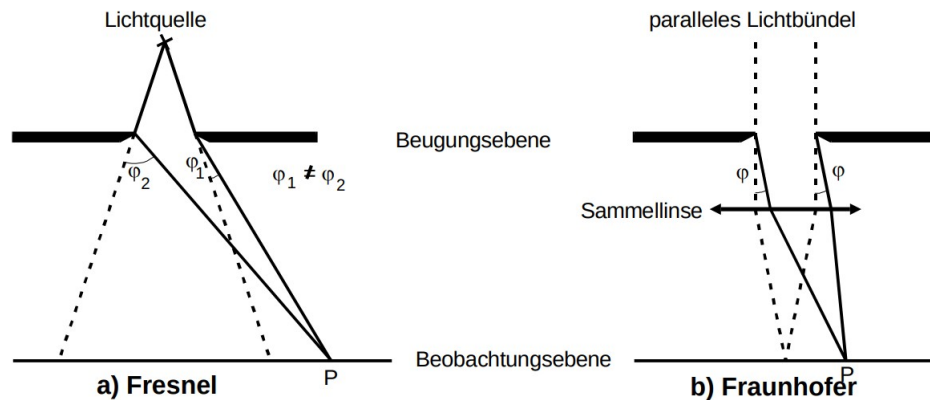


Abbildung 1: Fresnelsche und Fraunhofer Beugung an einem Spalt.[1]

Bei dem Aufbau nach Fresnel liegen sowohl die Bildebene als auch die Punktquelle im Endlichen. Dies führt dazu, dass die Lichtstrahlen unter verschiedenen Winkeln im Interferenzpunkt einfallen. Unter einer Verschiebung der Lichtquelle ins Unendliche resultiert stattdessen ein paralleles Lichtbündel mit einer ebenen Wellenfront. Dadurch interferieren im Punkt P nur diejenigen Lichtstrahlen, die unter dem gleichem Winkel φ gebeugt werden.

Dies entspricht der Betrachtung von Fraunhofer. Diese Näherung ist mathematisch relativ einfach zu beschreiben, weswegen in diesem Versuch nur diese betrachtet wird.

In diesem Versuch werden sowohl die Beugungseffekte an einem Einfachspalt als auch an einem Doppelspalt betrachtet.

1.1 Einfachspalt

Als Untersuchungsobjekt wird ein Spalt angenommen, dessen Länge sehr groß gegen die Breite sei, sodass das Lichtbündel nur in einer Koordinate begrenzt wird. Zur Erklärung der mathematischen Betrachtung, ist das Huygen'sche Prinzip nötig. Dies besagt, dass von jedem beliebigen Punkt einer Wellenfront eine Kugelwelle ausgeht. Durch Überlagerung dieser Kugelwellen ergibt sich eine neue Wellenfront, die die Einhüllende der ausgesandten Kugelwellen ist.

Um den Zustand an einem Punkt der Wellenfront zu beschreiben, gelingt dies durch eine

Überlagerung aller Kugelwellen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt dort ankommen. Es ist also nötig über alle Strahlenbündel zu summieren, die unter einem Winkel Φ abgelenkt werden, um die Amplitude zu bestimmen. Da diese Strahlenbündel so klein wie der Spalt sind, ergibt sich eine Integration über die Spaltbreite b . Die einfallende Welle wird durch

$$A(z, t) = A_0 \exp \left(i \left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \right)$$

beschrieben. Die Phasendifferenz von zwei Strahlen die in der Strahlebene den Abstand x besitzen, wie in Abbildung 2 dargestellt, beträgt:

$$\delta = \frac{2\pi x \sin(\Phi)}{\lambda}.$$

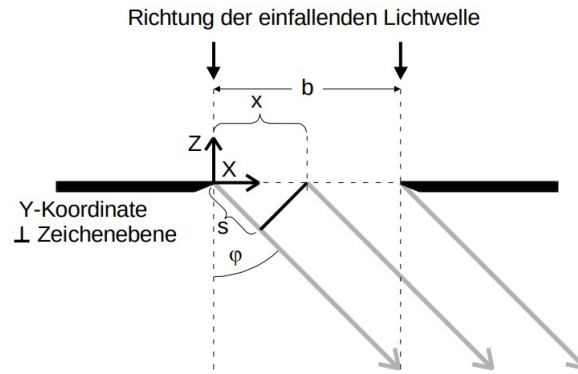


Abbildung 2: Skizze zur Ableitung einer Phasenbeziehung zwischen 2 Teilstrahlen bei der Fraunhoferschen Beugung am Spalt. [1]

Nach Ausführung der Integration und einigen Umformungen ergibt sich schließlich für die Amplitude des in x -Richtung abgelenkten Strahlenbündels:

$$B(z, t, \phi) = A_0 \exp \left(i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) \cdot \exp \left(\frac{\pi i b \sin(\Phi)}{\lambda} \right) \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin(\Phi)} \sin \left(\frac{\pi b \sin(\Phi)}{\lambda} \right).$$

Die beiden Exponentialfunktionen stellen dabei nur Phasenfunktionen dar, wobei die Erste die Orts- und Zeitabhängigkeit der Amplitude beschreibt und die Zweite einen richtungsabhängigen Phasenvektor darstellt. Daraus ergibt sich, dass nur die letzten beiden Terme für experimentelle Untersuchungen relevant sind. Da sich die Amplitude nicht direkt messen lässt wird die zeitlich gemittelte Intensität betrachtet. Dabei gilt:

$$I(\Phi) \propto B(\Phi)^2 = A_0^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin(\Phi)} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin(\Phi)}{\lambda} \right). \quad (1)$$

Diese wird niemals negativ und besitzt bei den Nulldurchgängen der Amplitudenfunktion $B(\Phi)$ Minima. Außerdem besitzt sie Nullstellen bei den Maxima und Minima der Amplitudenfunktion.

1.2 Doppelspalt

Die mathematische Betrachtung erfolgt analog zu der des Einzelspalts. Er wird als Überlagerung zweier Einzelspalte der Breite b betrachtet, die sich im Abstand s zueinander befinden. Die Intensität des Doppelspalts ist daher das Produkt zweier Intensitäten. Der Beugung am Einzelspalt der Breite b und der von zwei punktförmigen Quellen im Abstand Φ . Dann ergibt sich die Intensitätsverteilung zu:

$$I(\Phi) \propto B(\Phi)^2 = A_0 \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin(\Phi)}{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin(\Phi)} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin(\Phi)}{\lambda} \right). \quad (2)$$

Diese Verteilung entspricht der des Einzelspaltes multipliziert mit einem \cos^2 -Term. Dies führt zu einer zusätzlichen Schwingung und damit zu zusätzlichen Maxima und Minima.

1.3 Fourier-Transformation

Die Amplitudenverteilung der Fraunhofer Beugung ist auch allgemeiner zugänglich, denn es zeigt sich, dass $B(\Phi)$ als Fouriertransformierte der Amplitudenverteilung der einfallenden Welle in der Beugungsebene aufgefasst werden kann. Wird $f(x)$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix\gamma)$$

in ihre Fouriertransformierte $g(\gamma)$ transformiert, so lässt sich diese durch geschickte Wahl von γ mit der Amplitudenverteilung, bisher als $B(\Phi)$ bezeichnet, identifizieren. Im Vorliegenden Fall des Einzelspaltes sei $f(x)$ gegeben als:

$$f(x) = \begin{cases} A_0, & 0 \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wird dies in $g(\gamma)$ eingesetzt und daraufhin die Eulersche Formel angewendet, so ergeben sich Übereinstimmungen von $g(\gamma)$ und $B(\Phi)$ mit

$$\gamma = \frac{2\pi \sin(\Phi)}{\lambda},$$
$$g(\gamma) = \frac{2A_0}{\gamma} \cdot \exp\left(\frac{i\gamma b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma b}{2}\right).$$

Hieraus ergibt sich, dass die Fouriertransformierte die Beugung am Spalt mathematisch formuliert.

2 Durchführung

Ein schematischer Aufbau ist in Abbildung 3 dargestellt.

Zunächst wird die Strecke L ausgemessen, die den Abstand zwischen dem Spalt und dem Photoelement angibt. Anschließend wird der erste Einzelspalt untersucht. Es ist darauf

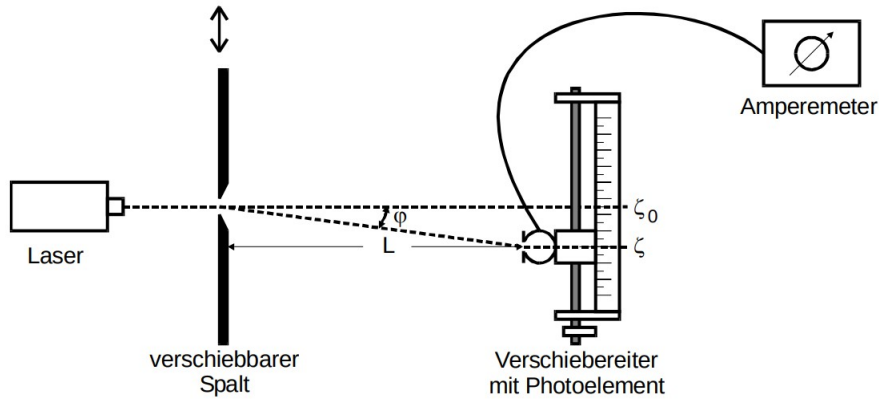


Abbildung 3: Versuchsanordnung zur Abmessung einer Beugungsfigur. [1]

zu achten, dass vor jeder Messung bereits ein Strom I_{Dunkel} gemessen werden muss, da das Photoelement auch im wenig beleuchteten Zustand eine Intensität wahrnimmt. Dazu wird zunächst der Photostrom ohne angeschalteten Laser gemessen und der Offset I_{Dunkel} notiert. Für die eigentliche Intensitätsmessung wird der Gegenstand wieder entfernt und der angezeigte Strom I notiert.

Das Photoelement wird nach diesen beiden Messungen weiter verschoben und die nächsten Messungen werden durchgeführt. In der Nähe des Hauptmaximums wird das Photoelement in 0,25 mm Schritten bewegt, weiter außen in 0,5 mm bzw. 1 mm Schritten. Aus dieser Messung ergeben sich insgesamt Datenpaare bestehend aus der Verschiebung x des Photoelements und I .

Insgesamt wird das Photoelement in beide Richtung des Hauptmaximas um 25 mm verschoben.

Der zweite Einzelspalt und der Doppelspalt werden analog vermessen.

Als letzter Schritt werden die tatsächlichen Spaltbreiten und Abstände der Spalte notiert.

3 Auswertung

Der verwendete Laser emittiert Licht der Wellenlänge $\lambda = 633 \text{ nm}$, der Abstand zwischen dem optischen Objekt und der Messdiode beträgt $L = 104 \text{ cm}$ und der gemessene Dunkelstrom $I_D = 0,515 \text{ nA}$. Dieser wird für die Berechnungen von allen gemessenen Stromstärkemesswerten subtrahiert.

3.1 Der Einfachspalt der Spaltbreite $b = 0,15 \text{ mm}$

Die Messwerte des Beugungsmusters sind in Tabelle 1 aufgelistet. Proportional zur Intensität wurde dabei der Strom I in Abhängigkeit des Abstands l zur Mittelsenkrechten gemessen. Daraus lassen sich die Winkel

$$\phi = \arcsin \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + L^2}} \right) \quad (3)$$

berechnen.

Tabelle 1: Gemessenes Beugungsmuster des Einfachspaltes mit Spaltbreite $b = 0,15 \text{ mm}$

l / mm	$I / \mu\text{A}$	l / mm	$I / \mu\text{A}$
-20,0	0,0050	0,5	1,1000
-19,0	0,0040	1,0	1,0000
-18,0	0,0035	1,5	0,8500
-17,0	0,0060	2,0	0,5200
-16,0	0,0075	2,5	0,4000
-15,0	0,0060	3,0	0,1200
-14,0	0,0080	4,0	0,0180
-13,0	0,0140	5,0	0,0540
-12,0	0,0155	6,0	0,0540
-11,0	0,0100	7,0	0,0190
-10,0	0,0120	8,0	0,0100
-9,0	0,0180	9,0	0,0220
-8,0	0,0140	10,0	0,0200
-7,0	0,0185	11,0	0,0090
-6,0	0,0515	12,0	0,0110
-5,0	0,0690	13,0	0,0140
-4,0	0,0360	14,0	0,0080
-3,0	0,0600	15,0	0,0040
-2,5	0,1100	16,0	0,0070
-2,0	0,3000	17,0	0,0100
-1,5	0,4000	18,0	0,0060
-1,0	0,7000	19,0	0,0030
-0,5	0,9000	20,0	0,0040
0,0	1,1000	21,0	0,0045

Mittels python wird ein Fit in Form der Gleichung (1) durchgeföhrt. Die Messwerte, sowie der Fit sind in Abbildung 4 abgebildet. Die Parameter der Amplitude A_0 sowie der Spaltbreite b ergeben sich dabei zu:

$$A_0 = (1934,29 \pm 767\,274,35) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$b = (0,5 \pm 223,3) \text{ mm} .$$

Der relative Fehler der gemessenen zur tatsächlichen Spaltbreite beträgt 233,33 %.

3.2 Der Einfachspalt der Spaltbreite $b = 0,075 \text{ mm}$

Die Messwerte des zweiten Einzelspalts sind in Tabelle 2 aufgelistet. Auch hier sind die Messwerte und der Fit mittels python nach Form der Gleichung (1) in Abbildung 5

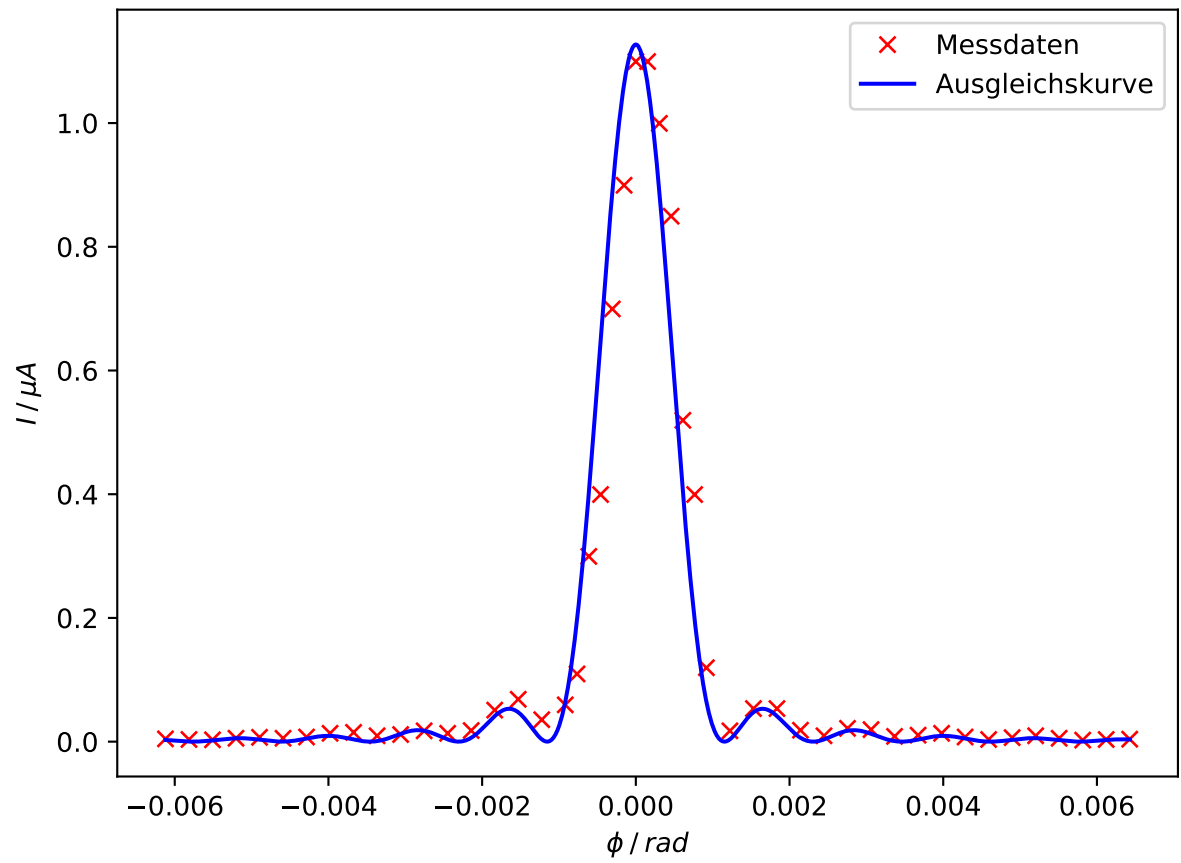


Abbildung 4: Beugungsmuster des Einfachspaltes mit Spaltbreite $b = 0,15 \text{ mm}$

abgebildet.

Tabelle 2: Gemessenes Beugungsmuster des Einfachspaltes mit Spaltbreite $b = 0,075 \text{ mm}$

l / mm	$I / \mu\text{A}$	l / mm	$I / \mu\text{A}$
-25,0	0,0012	1,0	0,3000
-24,0	0,0012	2,0	0,2300
-23,0	0,0012	3,0	0,1600
-22,0	0,0013	4,0	0,0850
-21,0	0,0017	5,0	0,0360
-20,0	0,0023	6,0	0,0120
-19,0	0,0030	7,0	0,0080
-18,0	0,0035	8,0	0,0140
-17,0	0,0037	9,0	0,0200
-16,0	0,0040	10,0	0,0220
-15,0	0,0045	11,0	0,0170
-14,0	0,0060	12,0	0,0100
-13,0	0,0090	13,0	0,0050
-12,0	0,0120	14,0	0,0040
-11,0	0,0130	15,0	0,0060
-10,0	0,0125	16,0	0,0080
-9,0	0,0100	17,0	0,0090
-8,0	0,0080	18,0	0,0080
-7,0	0,0140	19,0	0,0050
-6,0	0,0370	20,0	0,0025
-5,0	0,0820	21,0	0,0015
-4,0	0,1600	22,0	0,0020
-3,0	0,2200	23,0	0,0025
-2,0	0,2900	24,0	0,0035
-1,0	0,3400	25,0	0,0035
0,0	0,3500		

Es ergeben sich die Parameter

$$A_0 = (2460,41 \pm 1\,297\,878,80) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$b = (0,2 \pm 127,7) \text{ mm} .$$

Der relative Fehler der gemessenen zur tatsächlichen Spaltbreite beträgt 166,66 %.

3.3 Der Doppelspalt

Für den Doppelspalt mit Spaltbreite $b = 0,15 \text{ mm}$ und Spaltabstand $s = 0,1 \text{ mm}$ sind die Messwerte in Tabelle 3 aufgelistet.

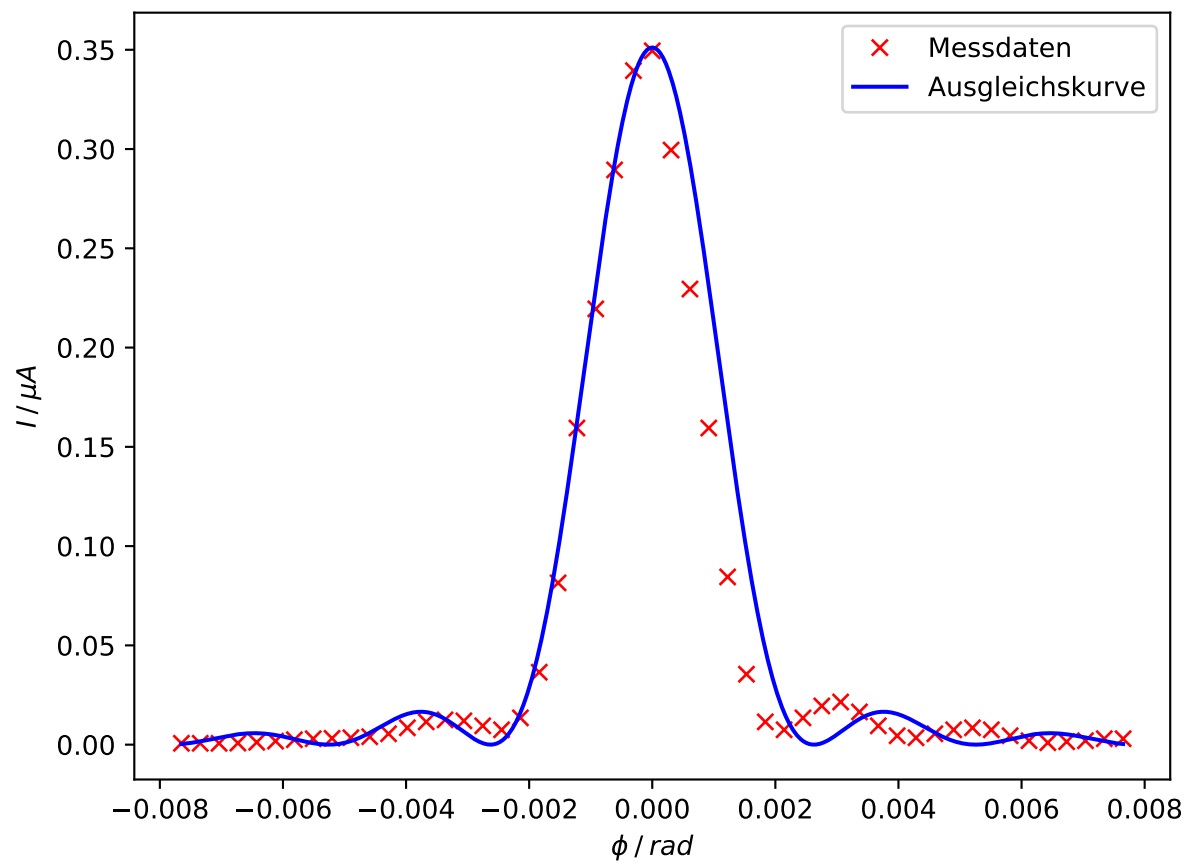


Abbildung 5: Beugungsmuster des Einfachspaltes mit Spaltbreite $b = 0,075 \text{ mm}$

Tabelle 3: Gemessenes Beugungsmuster des Doppelspalts

l / mm	I / μA	l / mm	I / μA
-25,0	0,0076	1,0	0,0400
-24,0	0,0110	2,0	0,0054
-23,0	0,0079	3,0	0,0092
-22,0	0,0030	4,0	0,0430
-21,0	0,0013	5,0	0,0680
-20,0	0,0083	6,0	0,0610
-19,0	0,0200	7,0	0,0290
-18,0	0,0260	8,0	0,0038
-17,0	0,0190	9,0	0,0092
-16,0	0,0052	10,0	0,0360
-15,0	0,0028	11,0	0,0520
-14,0	0,0200	12,0	0,0420
-13,0	0,0440	13,0	0,0175
-12,0	0,0490	14,0	0,0021
-11,0	0,0300	15,0	0,0063
-10,0	0,0061	16,0	0,0210
-9,0	0,0058	17,0	0,0270
-8,0	0,0340	18,0	0,0020
-7,0	0,0635	19,0	0,0074
-6,0	0,0635	20,0	0,0010
-5,0	0,0340	21,0	0,0037
-4,0	0,0054	22,0	0,0094
-3,0	0,0088	23,0	0,0110
-2,0	0,0410	24,0	0,0072
-1,0	0,1400	25,0	0,0028

Der Fit mittels python nach der Formel (2) ist zusammen mit den Messwerten in Abbildung 6 aufgetragen.

Die Parameter sind:

$$\begin{aligned}A_0 &= (0,37 \pm 35,07) \text{ A} \\b &= (0,1 \pm 1031,1) \text{ mm} \\s &= (0,4 \pm 834,9) \text{ mm} .\end{aligned}$$

Die relativen Fehler der Spaltbreite b und des Spaltabstandes s betragen 33,33 % und 300 %.

Das Beugungsmuster des Doppelspaltes unterscheidet sich von dem des ersten Einzelspaltes darin, dass:

- das Hauptmaximum des Doppelspaltes von etwa $0,14 \mu\text{A}$ fast zehnfach kleiner als das des Einzelspaltes mit $1,2 \mu\text{A}$ ist.
- das Hauptmaximum des Doppelspaltes nicht um so viel größer als seine Nebenmaxima ist, wie das des Einzelspaltes.
- die Breite des Beugungsbildes des Doppelspaltes größer als die des Einzelspaltes ist.

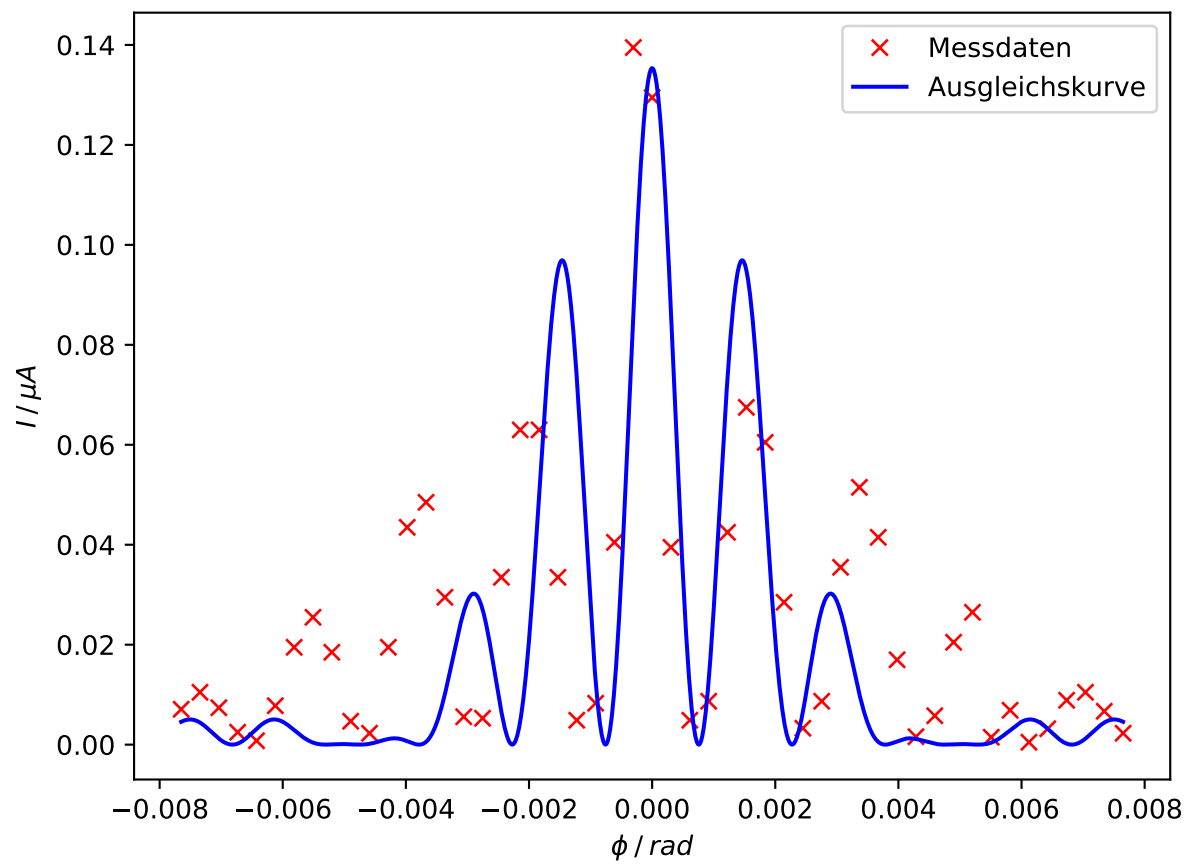


Abbildung 6: Beugungsmuster des Doppelspaltes

4 Diskussion

Die experimentell bestimmten Werte der Spaltbreiten und des Spaltabstandes weichen alle sehr von ihren jeweiligen tatsächlichen Werten ab. Betrachtet man nur die Messwerte, so sind die Beugungsbilder so, wie sie auch zu erwarten sind. Allerdings sind die Funktionen, auf denen die Fits beruhen sehr komplex und von vielen Variablen abhängig, sodass die Parameter sehr große Fehler besitzen und somit sehr ungenau bestimmbar sind. Bei den Messwerten des Doppelspaltes ist der Fit auch dementsprechend ungenau, da die Messwerte nicht auf einer gut bestimmbaren Funktion liegen.

5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 406: Beugung am Spalt.*