

Nr. 101

## **Das Trägheitsmoment**

Sara Krieg  
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel  
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 04.12.2018

Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>4</b>
3.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße . . . . .	4
3.2	Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse . . . . .	6
3.2.1	Verifikation des Satzes von Steiner . . . . .	8
3.3	Trägheitsmomente zweier einfacher Körper . . . . .	8
3.4	Trägheitsmoment einer Puppe in zwei Stellungen . . . . .	9
3.4.1	Gemessene Trägheitsmomente . . . . .	9
3.4.2	Theoretische Trägheitsmomente . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>

# 1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu messen und den Steiner'schen Satz zu verifizieren.

Durch das Drehmoment  $M$ , das Trägheitsmoment  $I$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}$  wird die Dynmaik von Rotatoren beschrieben. Das Trägheitsmoment einer Punktmasse ist mit  $I = m \cdot r^2$  gegeben. Bei mehreren Massenpunkten geht dies in eine Summe oder bei einer kontinuierlichen Masseverteilung in ein Intergral über. Sowohl das Trägheitsmoment als auch das Drehmoment sind dabei im Allgemeinen von der Lage des Körpers zur Drehachse abhängig. Wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt verläuft, so lässt sich das Trägheitsmoment mit dem Steiner'schen Satz berechnen:

$$I = I_S + ma^2 \quad (1)$$

Dabei ist  $I_S$  das Trägheitsmoment des Körpers, wenn die Drehachse mit der Schwerpunktsachse zusammenfällt und  $a$  der Abstand der Dreh- zur Schwerpunktsachse, wenn dies nicht der Fall ist. Außerdem ist  $m$  die Gesamtmasse des Körpers. Greift an einem Körper die Kraft  $\vec{F}$  am Ort  $\vec{r}$  an, so wirkt an diesem Körper das Drehmoment  $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ . Sollte es sich um ein Schwingungsfähiges System handeln, so führt eine Auslenkung des Körpers aus seiner Ruhelage zu einem rücktreibendem Drehmoment. Für kleine Winkel schwingt ein solche harmonischer Oszillator näherungsweise mit der Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (2)$$

Dabei ist  $D$  die Winkelrichtgröße und  $I$  das Trägheitsmoment. Die Winkelrichtgröße  $D$  hängt mit dem Drehmoment über die Beziehung

$$M = D \cdot \varphi \quad (3)$$

zusammen. Die Winkelrichtgröße gibt dabei an, welches Drehmoment bei einer Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  wirkt und kann mit zwei Methoden bestimmt werden. Zum einen die statistische und zum anderen die dynamische Methode. Bei der statistischen Methode wird der Auslenkwinkel  $\varphi$  als Funktion der wirkenden Kraft bzw. des Drehmoments bestimmt. Bei der dynamischen Methode wird  $D$  über die Periodendauer mit der Beziehung (2) bestimmt. Hierbei ist zu beachten, dass  $I$  bekannt sein muss. Durch Kombination dieser beiden Methoden können  $I$  und  $D$  gleichzeitig bestimmt werden.

## 2 Durchführung

Zunächst wird ein Stab senkrecht zur Drehachse eingespannt und mit einem Kraftmesser die Kraft am Hebelarm in Abhängigkeit des Winkels gemessen. Es werden insgesamt 10 Kraft-Winkel Paare gemessen. Dabei wird darauf geachtet, dass der Kraftmesser immer tangential zur Drehrichtung der Feder gehalten wird. Die Länge des Hebelarmes wird notiert. Anschließend werden entlang des "masselosen" Stabes zwei identische Gewichte

symmetrisch zur Drehachse angebracht. Mit Stoppuhren wird die Schwingungsdauer von 5 Schwingungsperioden des angeregten Systems gemessen. Dieser Vorgang wird für 10 verschiedene Abstände zwischen Gewichten und Drehachsen durchgeführt. Es wird die Masse der verwendeten Gewichte notiert.

Im zweiten Versuchsteil werden eine Kugel und ein Zylinder nacheinander auf der Drillachse befestigt. Erneut wird das System angeregt und die Schwingungsdauer von 5 Schwingungsperioden gemessen. Diese Einzelmessung wird für beide Körper insgesamt 10 mal durchgeführt.

Im dritten Versuchsteil wird die Messung der Schwingungsdauer einer Holzpuppe analog zum zweiten Teil für zwei verschiedene Stellungen durchgeführt. Die erste Stellung ist mit ausgestreckten Armen und die zweite mit angezogenen Armen gegeben. Zur Modellierung der Puppe, werden die Beine, Arme, Torso und Kopf separat ausgemessen. Dazu wird der Durchmesser und die Länge der Körper bestimmt. Zudem werden der Abstand von Armen und Beinen zur Drehachse und die Gesamtmasse der Puppe festgestellt.

### 3 Auswertung

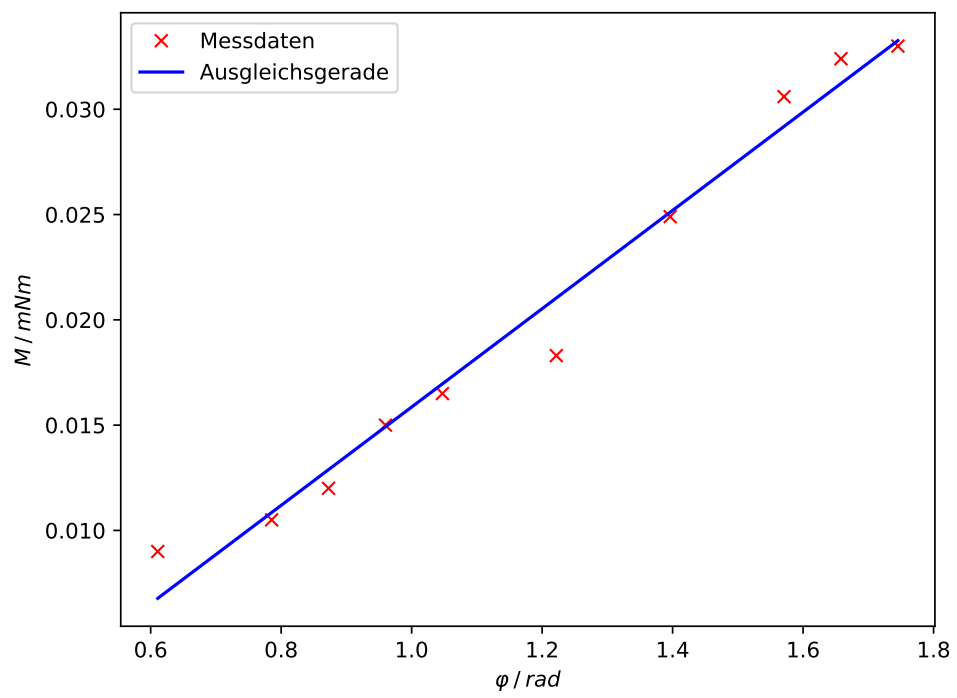
#### 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die aufgenommenen Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße sind in Tabelle 1 zu finden. Dabei wurde die Kraft bei verschiedenen Auslenkwinkeln  $\varphi$  gemessen. Der Hebelarm hat die konstante Länge 0,3 m.

**Tabelle 1:** Ausgelenkter Winkel mit dazugehöriger Kraft

$Winkel / ^\circ$	$Winkel / rad$	$F / mN$	$M / mN m$
35	0.61	30	9.00
45	0.79	35	10.05
50	0.87	40	12.00
55	0.96	50	15.00
60	1.05	55	16.50
70	1.22	61	18.30
80	1.40	83	24.90
90	1.57	102	30.60
100	1.66	110	32.40
95	1.74	108	33.00

Anhand von Formel (3) ist zu erkennen, dass die Winkelrichtgröße  $D$  lediglich ein Proportionalitätsfaktor zwischen Drehmoment  $M$  und Winkel  $\varphi$  ist. Zur Ermittlung dieser Größe wird eine lineare Regression mittels python und matplotlib durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 1 zu sehen.



**Abbildung 1:** Darstellung des Zusammenhanges zwischen  $M$  und  $\varphi$

Die Ausgleichsgerade ist gegeben mit  $M(\varphi) = a \cdot \varphi + b$ . Für die Regressionsparameter ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= (23,34 \pm 1,43) \text{ mN m} \\ b &= (-7,50 \pm 1,78) \text{ mN m} \end{aligned}$$

Der Steigungsfaktor  $b$  entspricht dabei der Winkelrichtgröße  $D$ . Somit ergibt sich:

$$D = (23,34 \pm 1,43) \text{ mN m}$$

### 3.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse wird die Periodendauer  $T$  in Abhängigkeit des Abstands  $a$  der Gewichte zur Drillachse gemessen. Die erhaltenen Daten sind in Tabelle 2 aufgeführt. Dabei ist  $T_7$  die gemessene Dauer für 7 Perioden.

**Tabelle 2:** Messwerte zum Trägheitsmoment der Drehachse

$a / \text{m}$	$a^2 / \text{m}^2$	$T_7 / \text{s}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
0.2700	0.0729	$57.93 \pm 0.5$	$8.28 \pm 0.071$	$68.49 \pm 1.18$
0.2300	0.0529	$50.30 \pm 0.5$	$7.19 \pm 0.071$	$51.63 \pm 1.03$
0.2090	0.0437	$46.89 \pm 0.5$	$6.70 \pm 0.071$	$44.87 \pm 0.96$
0.1885	0.0355	$43.00 \pm 0.5$	$6.14 \pm 0.071$	$37.73 \pm 0.88$
0.1695	0.0287	$40.10 \pm 0.5$	$5.73 \pm 0.071$	$32.82 \pm 0.82$
0.1490	0.0222	$35.72 \pm 0.5$	$5.10 \pm 0.071$	$26.04 \pm 0.73$
0.1295	0.1677	$32.58 \pm 0.5$	$4.65 \pm 0.071$	$21.66 \pm 0.66$
0.1090	0.0119	$28.85 \pm 0.5$	$4.12 \pm 0.071$	$16.99 \pm 0.59$
0.0890	0.0079	$25.49 \pm 0.5$	$3.64 \pm 0.071$	$13.26 \pm 0.52$
0.0690	0.0048	$22.36 \pm 0.5$	$1.19 \pm 0.071$	$10.20 \pm 0.46$

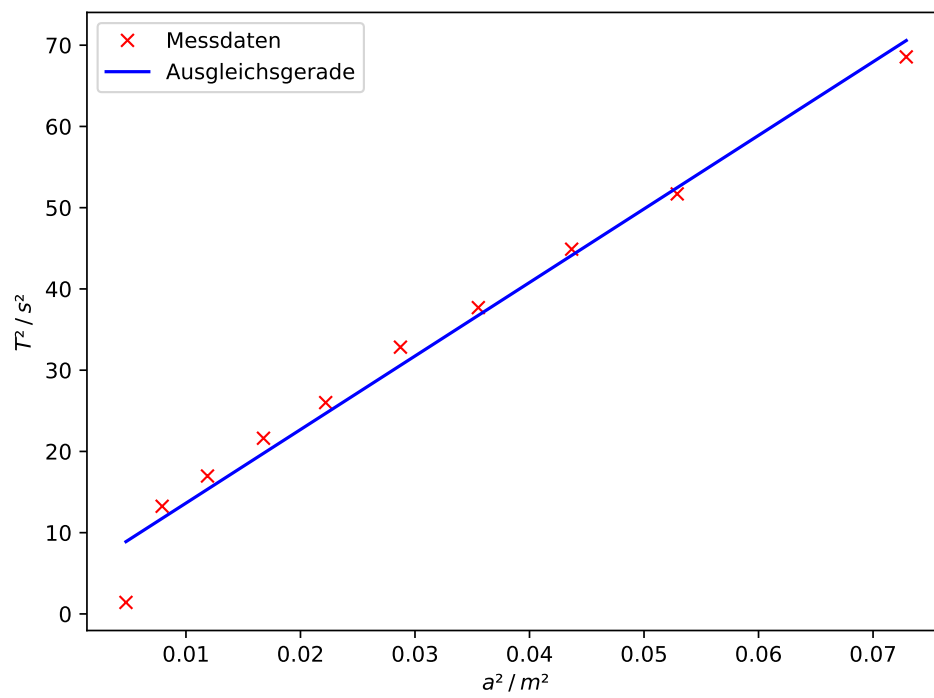
Aus (??) und (2) folgt der Zusammenhang:

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2 m}{D}}_{\hat{=s}} \cdot a^2 + \underbrace{\frac{4\pi^2}{D} I_D}_{\hat{=b}}$$

Mittels linearer Regression wird nun der als  $b$  bezeichnete Parameter ermittelt und daraus das gesuchte Trägheitsmoment  $I_D$  berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 dargestellt.

Die Parameter der Ausgleichsgerade ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} s &= (905,17 \pm 54,89) \text{ s}^2/\text{m}^2 \\ b &= (4,59 \pm 1,99) \text{ s}^2 \end{aligned}$$



**Abbildung 2:**  $T^2$  gegen  $a^2$  aufgetragen mit eingezeichnete Regression

Damit berechnet sich  $I_D$  zu:

$$I_D = \frac{b \cdot D}{4\pi^2} = (2,7 \pm 1,2) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Der statistische Fehler berechnet sich dabei mit der Gaußschenfehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{b}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2}$$

### 3.2.1 Verifikation des Satzes von Steiner

Anhand der Daten, die zur Ermittlung des Eigenträgheitsmoments  $I_D$  berechnet wurden, lässt sich der Satz von Steiner verifizieren. Die verwendete Regressionsformel (3.2) folgt unter der Annahme, dass der Steiner'sche Satz gilt. Diese Formel fordert einen linearen Zusammenhang zwischen  $T^2$  und  $a^2$ . Wie in Abbildung 2 zu erkennen ist, lässt sich dieser Zusammenhang bestätigen. Die Geradensteigung

$$s = (905,17 \pm 54,89) \text{ s}^2/\text{m}^2$$

passt ebenfalls zu dem theoretischen Wert, der sich mit der Gesamtmasse der Gewichte  $m = 2 \cdot 0,2218 \text{ kg}$  eingesetzt in die Definition von  $s$  in Formel (3.2) zu dem Wert:

$$s_{theo} = (750 \pm 50) \text{ s}^2/\text{m}^2$$

ergibt. Dabei ist der Fehler des theoretischen Wertes gegeben durch:

$$\Delta s = \frac{-4\pi^2 m}{D^2}$$

## 3.3 Trägheitsmomente zweier einfacher Körper

Die zu untersuchenden Körper werden oben auf der Drillachse befestigt, zum Schwingen gebracht und die Periodendauer  $T$  gemessen. Es werden zwei Körper untersucht: Ein Zylinder und eine Kugel. Diese Körper besitzen folgende Maße:

$$m_Z = 1005,9 \text{ g}$$

$$d_Z = (7,95 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$m_K = 812,4 \text{ g}$$

$$r_K = (7,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Die ermittelten Periodendauer und Trägheitsmomente finden sich in Tabelle 3. Dabei ergeben sich die Fehler der Trägheitsmomente zu:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{TD}{2\pi^2} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2}$$



**Tabelle 3:** Messwerte Kugel und Zylinder

Zylinder		Kugel	
$T_Z / \text{s}$	$I_Z / 1 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$	$T_K / \text{s}$	$I_K / 1 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
$1.21 \pm 0.07$	$0.862 \pm 0.115$	$1.73 \pm 0.71$	$1.769 \pm 0.182$
$1.14 \pm 0.07$	$0.770 \pm 0.107$	$1.69 \pm 0.71$	$1.691 \pm 0.176$
$1.15 \pm 0.07$	$0.782 \pm 0.108$	$1.73 \pm 0.71$	$1.767 \pm 0.182$
$1.15 \pm 0.07$	$0.782 \pm 0.108$	$1.66 \pm 0.71$	$1.629 \pm 0.172$
$1.16 \pm 0.07$	$0.196 \pm 0.109$	$1.69 \pm 0.71$	$1.686 \pm 0.176$
$\bar{I}_Z = (0,80 \pm 0,07) \text{ kgm}^2$		$\bar{I}_K = (1,71 \pm 0,12) \text{ kgm}^2$	

Nun werden die theoretischen Trägheitsmomente der beiden Körper berechnet, um die experimentell ermittelten Daten mit diesen zu vergleichen. Die Trägheitsmomente der Kugel, bzw. des Zylinders werden hierbei mit den bekannten Formeln berechnet:

$$I_{K,theo} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$I_{Z,theo} = \frac{1}{2}mR^2$$

Mit den Maßen der verwendeten Körper ergeben sich somit:

$$I_{K,theo} = (1,828 \pm 0,024) \text{ kgm}^2$$

$$I_{Z,theo} = (0,795 \pm 0,010) \text{ kgm}^2$$

Die experimentell bestimmten Trägheitsmomente weichen von den theoretischen Werten um 6,9 % bei der Kugel und um 0,625 % bei dem Zylinder ab.

### 3.4 Trägheitsmoment einer Puppe in zwei Stellungen

#### 3.4.1 Gemessene Trägheitsmomente

Die Trägheitsmomente sollen durch eine Zeitmessung und das Umstellen der Formel (2) zu

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (4)$$

bestimmt werden. In Tabelle 4 sind die gemessenen Periodendauern  $T_1$  für eine Puppe mit anliegenden und  $T_2$  für eine Puppe mit ausgestreckten Armen aufgelistet. In beiden Positionen befinden sich die Beine der Puppe parallel zum Oberkörper.

Daraus ergeben sich die Trägheitsmomente  $I_1, I_2$  für die Positionen 1 und 2 der Puppe.

**Tabelle 4:** Messwerte der Periodendauern

$T_1 / \text{s}$	$T_2 / \text{second}$
$3.22 \pm 0.5$	$4.33 \pm 0.5$
$3.16 \pm 0.5$	$4.26 \pm 0.5$
$3.22 \pm 0.5$	$4.20 \pm 0.5$
$3.08 \pm 0.5$	$4.57 \pm 0.5$
$3.17 \pm 0.5$	$4.51 \pm 0.5$

$$I_1 = (5,9 \pm 0,9) \text{ gm}^2$$

$$I_2 = (11,3 \pm 1,3) \text{ gm}^2$$

### 3.4.2 Theoretische Trägheitsmomente

Wie in Abbildung ... dargestellt, kann die Figur durch geometrische Figuren genähert werden. Dabei beschreiben die Figuren  $K_i$  den Kopf,  $T_i$  den Torso,  $A_i$  die Arme und  $B_i$  die Beine.

Die verwendeten geometrischen Figuren sind (Halb-)Kugeln - als (Halb-)Kreise dargestellt und mit angegebenen Radien  $r$  -, Zylinder - als Rechtecke dargestellt und mit angegebenen Radien  $r$  und Höhen  $h$  -, Quader - als Rechtecke dargestellt und mit angegebenen Seitenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  - und Kegelstümpfe - als Trapeze dargestellt und mit angegebenen Radien  $r_1$  und  $r_2$ .

Die Abmessungen und resultierenden Volumina  $V$  dieser Figuren sind in Tabelle 5 aufgelistet.

**Tabelle 5:** Abmessungen der Figuren

Figur	Abmessungen	in mm	$V/10^{-5} \text{ m}^3$
$K1$	$r_{K1} =$	$16.00 \pm 0.25$	$1.72 \pm 0.08$
$K2$	$r1_{K2} =$	$16.00 \pm 0.25$	$2.35 \pm 0.08$
	$r2_{K2} =$	$9.50 \pm 0.25$	
	$h_{K2} =$	$45.50 \pm 0.50$	
$K3$	$r_{K3} =$	$8.00 \pm 0.25$	$0.21 \pm 0.02$
$T1$	$a_{T1} =$	$48.70 \pm 0.50$	$7.01 \pm 0.15$
	$b_{T1} =$	$40.00 \pm 0.50$	
	$c_{T1} =$	$36.00 \pm 0.50$	
$T2$	$r_{T2} =$	$12.85 \pm 0.25$	$0.69 \pm 0.04$
	$h_{T2} =$	$13.30 \pm 0.50$	
$T3$	$r1_{T3} =$	$15.15 \pm 0.25$	$3.41 \pm 0.08$
	$r2_{T3} =$	$19.70 \pm 0.25$	
	$h_{T3} =$	$35.50 \pm 0.50$	
$A1$	$r_{A1} =$	$8.00 \pm 0.25$	$0.21 \pm 0.02$
$A2$	$r_{A2} =$	$8.00 \pm 0.25$	$0.86 \pm 0.05$
	$h_{A2} =$	$42.80 \pm 0.50$	
$A3$	$r_{A3} =$	$5.80 \pm 0.25$	$0.08 \pm 0.01$
$A4$	$r_{A4} =$	$7.15 \pm 0.25$	$0.69 \pm 0.05$
	$h_{A4} =$	$42.80 \pm 0.50$	
$A5$	$r_{A5} =$	$4.75 \pm 0.25$	$0.05 \pm 0.01$
$A6$	$r_{A6} =$	$7.75 \pm 0.25$	$0.50 \pm 0.03$
	$h_{A6} =$	$26.70 \pm 0.50$	
$B1$	$r_{B1} =$	$8.40 \pm 0.25$	$0.25 \pm 0.02$
$B2$	$r_{B2} =$	$9.10 \pm 0.25$	$1.47 \pm 0.08$
	$h_{B2} =$	$56.40 \pm 0.50$	
$B3$	$r_{B3} =$	$6.25 \pm 0.25$	$0.10 \pm 0.01$
$B4$	$r_{B4} =$	$7.35 \pm 0.25$	$1.13 \pm 0.08$
	$h_{B4} =$	$66.30 \pm 0.50$	
$B5$	$r_{B5} =$	$4.60 \pm 0.25$	$0.04 \pm 0.01$
$B6$	$a_{B6} =$	$5.40 \pm 0.25$	$0.25 \pm 0.02$
	$b_{B6} =$	$42.30 \pm 0.50$	
	$c_{B6} =$	$10.80 \pm 0.50$	

## 4 Diskussion