

Nr.354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 08.01.2019

Abgabe: 15.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	4
3	Auswertung	5
3.1	Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} aus der Zeitabhängigkeit der Amplitude	5
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{ap} bei der Untersuchung des aperiodischen Grenzfalles	7
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	8
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	10
4	Diskussion	13
5	Literaturverzeichnis	14

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, gedämpfte und erzwungene Schwingungen eines RLC-Schwingkreises zu untersuchen und den Dämpfungswiderstand und die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung zu bestimmen. Ein solcher Schwingkreis zeichnet sich durch eine Kapazität C , eine Induktivität L und einen Widerstand R aus. Bei einer Schwingung wird beständig Energie zwischen dem B-Feld der Spule und dem E-Feld des Kondensators ausgetauscht. Der Widerstand R sorgt dafür, dass die Energie des Systems fortlaufend abnimmt und so die Amplituden immer kleiner werden, bis sie irgendwann gänzlich abgeklungen sind. Mit Hilfe des zweiten Kirchhoffschen Gesetztes kann man eine Gleichung für den Schaltkreis aufstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

Durch Umformungen kann eine DGL für das System aufgestellt werden:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1)$$

Eine Lösung der DGL ist:

$$I(t) = e^{-t \frac{R}{2L}} \left(I_1 e^{it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} + I_2 e^{-it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \right). \quad (2)$$

Es gibt drei verschiedene Fälle, die betrachtet werden müssen. Der erste Fall ist, dass $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$. Die Wurzel im Exponenten bleibt reell und (2) geht über in:

$$I(t) = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \cos(2\pi f t + \eta).$$

Hierbei ist η eine Phasenverschiebung. Dieser Fall wird auch als Schwingfall bezeichnet. Wenn nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} &= \frac{R^2}{4L^2} \\ \Leftrightarrow R &= 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \end{aligned} \quad (3)$$

spricht man vom aperiodischen Grenzfall. Bei diesem Fall geht $I(t)$ ohne Überschwung am schnellsten gegen null.

Wird der RLC-Kreis nun von außen durch eine Wechselspannung zum Schwingen angeregt, so spricht man von einer erzwungenen Schwingung. In diesem Fall liegt eine Inhomogenität in der DGL vor. Durch Lösen der resultierenden DGL erhält man schließlich:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (4)$$

Diese Lösung hat ein Maximum bei $f = f_{\text{res}}$, das Resonanzüberhöhung genannt wird. Die Breite Δf kann mit

$$\Delta f = |f_1 - f_2| \quad (5)$$

bestimmt werden. Hierbei gilt:

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (6)$$

und

$$f_{1,2} = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{R}{2L} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (7)$$

Außerdem weist die Kondensatorsspannung $U_C(t)$ eine Phasenverschiebung gegenüber der Erregerspannung auf. Diese kann mit

$$\tan(\phi(\omega)) = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (8)$$

bestimmt werden.

2 Durchführung

Für die vier durchzuführenden Messungen werden die Schaltpläne gemäß Abbildung 1 verwendet. Hierbei ist zu beachten, dass statt eines Nadel-Impulses ein Rechteckssignal genutzt wird.

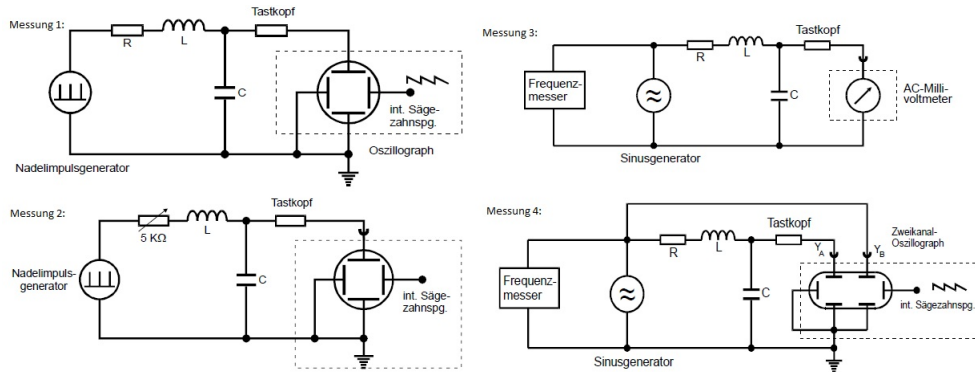


Abbildung 1: Die vier verwendeten Schaltungen [1]. Dabei steht jeweils oben links, für welche Messung welche Schaltung benötigt wird.

Zunächst werden die bauteilspezifischen Werte, wie Kapazität C und Induktivität L notiert.

Im ersten Versuchsteil wird ein RLC-Kreis mit niederfrequenten Rechteckimpulsen ausgelenkt und so zum Schwingen angeregt. Nach Abfall eines Rechteckimpulses wird

der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung gemessen. Die so entstehende gedämpfte Schwingung wird mit Hilfe eines Oszilloskops angezeigt und 17 Wertepaare entnommen.

Bei dem zweiten Versuchsteil wird der zuvor feste Widerstand durch einen regelbaren Widerstand, ein Potentiometer, ersetzt. Dieses wird so eingestellt, dass der aperiodische Grenzfall vorliegt, es also gerade zu keiner Schwingung des Systems mehr kommt. Der dazugehörige Wert für R wird notiert.

Im dritten Versuchsteil wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz einer anliegenden Sinusspannung untersucht. Die Frequenz liegt dabei in einem Bereich von 9 - 59 kHz.

Die letzte Messung untersucht die im dritten Versuchsteil entstehende Phasenverschiebung zwischen der Kondensator- und Sinusspannung. Gemessen wird diese durch den Vergleich der beiden Spannungen auf dem Oszilloskop. Dabei wird mittels des Oszilloskop durch zwei Cursor die zeitliche Differenz der beiden Maxima der Spannungen gemessen.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} aus der Zeitabhängigkeit der Amplitude

Zunächst werden die bauteilspezifischen Werte notiert:

$$L = (10,11 \pm 0,03) \text{ mH},$$

$$C = (2,089 \pm 0,006) \text{ nF},$$

$$R_1 = (48,1 \pm 0,1) \Omega,$$

$$R_2 = (509,5 \pm 0,5) \Omega.$$

Die gemessenen Maxima bei einer gedämpften Schwingung sind in Tabelle 1 zu sehen. Die Ausgleichsrechnung wird mit der Funktion

$$A = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t}$$

durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 zu sehen. Mittels python ergeben sich die Regressionsparameter zu:

$$A_0 = (1,785 \pm 0,036) \text{ V},$$

$$\mu = (1068,421 \pm 34,320) \frac{1}{\text{s}}.$$

Aus dem Parameter μ lässt sich nun der effektive Dämpfungswiderstand R_{eff} berechnen.

$$R_{\text{eff}} = 4\pi L\mu = (136 \pm 4) \Omega$$

Der Fehler ergibt sich dabei durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu:

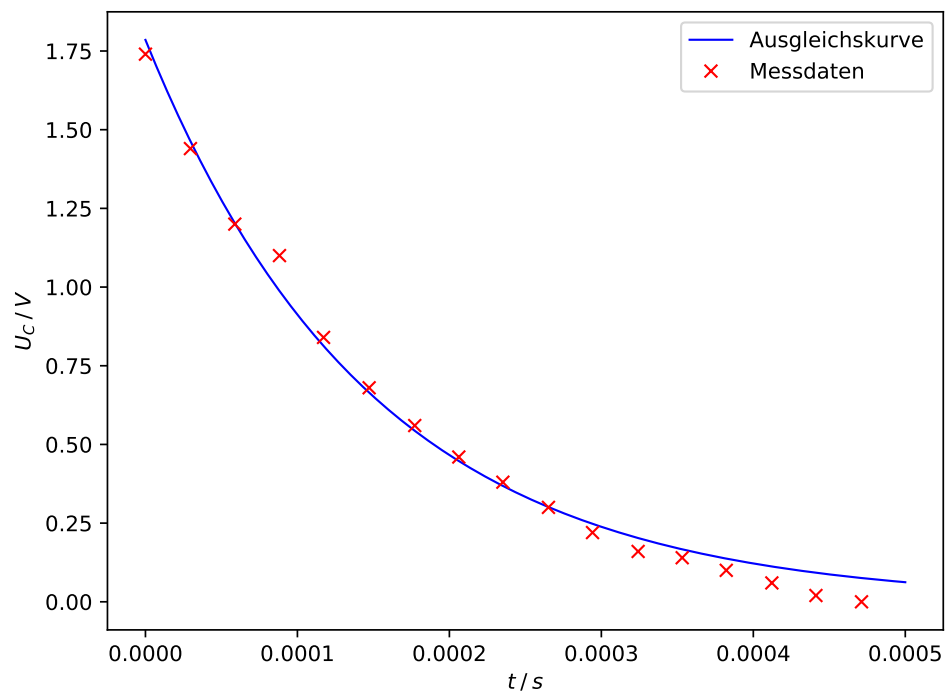


Abbildung 2: Exponentielle Regression der Amplitude zur Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} .

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} aus der Zeitabhängigkeit der Amplitude.

U / V	$t / \mu\text{s}$
1,74	0,0
1,44	29,6
1,20	58,8
1,10	88,2
0,84	117,2
0,68	147,2
0,56	177,2
0,46	206,2
0,38	235,2
0,30	265,2
0,22	294,2
0,16	324,2
0,14	353,2
0,10	382,2
0,06	412,2
0,02	441,2
0,00	471,2

$$\begin{aligned}\Delta R_{\text{eff}} &= \sqrt{\left(\frac{dR_{\text{eff}}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dR_{\text{eff}}}{d\mu}\right)^2 \cdot (\Delta\mu)^2} \\ &= \sqrt{(4\pi\mu \cdot \Delta L)^2 + (2\pi \cdot \Delta\mu)^2}\end{aligned}$$

Weiterhin kann nun auch die Abklingdauer T_{ex} berechnet werden zu:

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = (0,149 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Der Fehler ergibt sich hierbei zu:

$$\Delta T_{\text{ex}} = \sqrt{\left(\frac{dT_{\text{ex}}}{d\mu}\right)^2 \cdot (\Delta\mu)^2} = \sqrt{\frac{-1}{2\pi\mu^2} \cdot (\Delta\mu)^2}.$$

3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{ap} bei der Untersuchung des aperiodischen Grenzfalles

Hier wurde der aperiodische Grenzfall untersucht. Dabei wurde der Dämpfungswiderstand zu

$$R_{\text{ap}} = (3520 \pm 50) \Omega$$

bestimmt. Der theoretische Wert von R_{ap} kann mit Formel (3) bestimmt werden:

$$R_{\text{ap,theo}} = (4390 \pm 9) \Omega.$$

Der Fehler berechnet sich über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \Delta R_{\text{ap,theo}} &= \sqrt{\left(\frac{dR_{\text{ap}}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dR_{\text{ap}}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\Delta L)^2}{LC} + \frac{L \cdot (\Delta C)^2}{C^3}}. \end{aligned}$$

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die gemessene Kondensatorspannung U_C und die zugehörige Frequenz f , sowie die Erregerspannung U_0 sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Es wird $\frac{U_C}{U_0}$ in Abbildung 3 gegen die Frequenz aufgetragen.

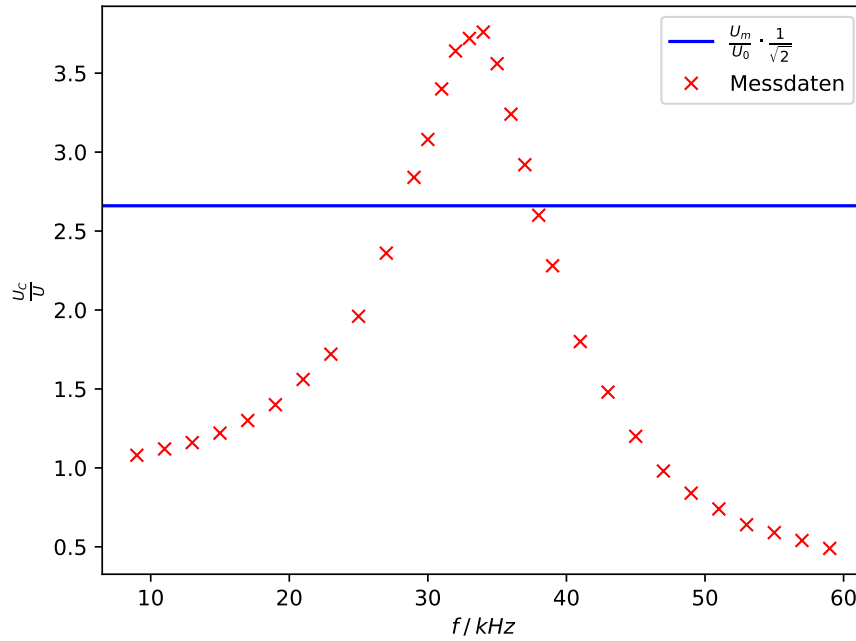


Abbildung 3: Resultierende Resonanzkurve bei Auftragung der normierten Amplitude gegen die Frequenz f .

Tabelle 2: Gemessene Kondensatorspannungen U_C und Generatorspannung U_0 bei verschiedenen Frequenzen f .

f / kHz	U_C / V	U / V
09	1,08	0,56
11	1,12	0,56
13	1,16	0,56
15	1,22	0,54
17	1,30	0,56
19	1,40	0,54
21	1,56	0,56
23	1,72	0,56
25	1,96	0,56
27	2,36	1,04
29	2,84	0,96
30	3,08	1,00
31	3,40	1,00
32	3,64	1,00
33	3,72	1,00
34	3,76	1,00
35	3,56	1,00
36	3,24	1,00
37	2,92	1,00
38	2,60	1,00
39	2,28	1,00
41	1,80	1,00
43	1,48	1,04
45	1,20	1,04
47	0,98	0,52
49	0,84	0,52
51	0,74	0,52
53	0,64	0,52
55	0,59	0,21
57	0,54	0,21
59	0,49	0,21

Ein Maß für die Schärfe der Resonanz ist die Breite der Resonanzkurve. Man kann sie durch die beiden Frequenzen ω_+ und ω_- charakterisieren, bei welchen U_C auf den Bruchteil $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seines Maximalwertes abgesunken ist. Dieser Wert ist als horizontal Linie in Abbildung 3 eingetragen.

Der experimentelle Wert dieser Halbwertsbreite b wird aus der Abbildung als

$$b_{\text{ex}} = \omega_+ - \omega_- = (38,0 \pm 1,5) \text{ kHz} - (28,0 \pm 1,5) \text{ kHz} = (10,0 \pm 2,1) \text{ kHz}$$

abgelesen. Der theoretische Wert für die Breite liegt jedoch bei

$$b_{\text{theo}} = \frac{R}{2\pi L} = (8,021 \pm 0,025) \text{ kHz}.$$

Dabei ergibt sich der Fehler mit:

$$\begin{aligned} \Delta b_{\text{theo}} &= \sqrt{\left(\frac{db}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{db}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\Delta R)^2}{4\pi^2 L^2} + \frac{R^2 (\Delta L)^2}{4\pi^2 L^4}}. \end{aligned}$$

Die experimentelle Resonanzüberhöhung wird aus Tabelle 2 als

$$q_{\text{ex}} = 3,76$$

abgelesen.

Außerdem lässt sich der theoretische Wert berechnen:

$$q_{\text{theo}} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = 4,309 \pm 0,010.$$

Der Fehler ergibt sich dabei durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \Delta q_{\text{theo}} &= \sqrt{\left(\frac{dq}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{dq}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dq}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2} \\ &= \sqrt{\frac{L \cdot (\Delta R)^2}{R^4 C} + \frac{L \cdot (\Delta L)^2}{4C^3 R^2} + \frac{L^3 \cdot (\Delta C)^2}{4R^2 C^5}}. \end{aligned}$$

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Die Messwerte der Zeitdifferenz Δt in Abhängigkeit der Frequenz f , sowie die daraus errechnete Phasendifferenz

$$\phi = 2\pi - \frac{\Delta t}{f} \cdot 2\pi \tag{9}$$

Tabelle 3: Messdaten der Phasendifferenzen ϕ , errechnet aus dem zeitlichen Abstand t der Maxima, bei verschiedenen Frequenzen f

f / kHz	$\Delta t / \mu\text{s}$	Φ / rad
09	107,0	0,232
11	088,0	0,201
13	075,0	0,157
15	065,2	0,138
17	056,8	0,216
19	050,4	0,266
21	045,6	0,266
23	041,2	0,329
25	037,6	0,376
27	034,0	0,515
29	031,2	0,598
30	029,2	0,779
31	027,6	0,907
32	025,6	1,136
33	024,0	1,307
34	022,0	1,583
35	020,4	1,797
36	019,2	1,940
37	018,0	2,099
38	016,4	2,368
39	016,0	2,362
41	014,4	2,574
43	013,6	2,609
45	012,8	2,664
47	011,6	2,858
49	011,2	2,835
51	010,8	2,822
53	010,4	2,820
55	009,6	2,966
57	009,2	2,988
59	008,8	3,021

sind in Tabelle 3 aufgelistet. Die Subtraktion von 2π in (9) hängt dabei mit der Messdurchführung zusammen, d.h. Δt wurde zuzüglich einer Periode gemessen.

In Abbildung 4 ist die Phasendifferenz gegen die jeweilige Frequenz aufgetragen. Außerdem markieren die Geraden die Phasen von $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$, für welche die Frequenzen f_1 , f_2 und f_{res} (Resonanzfrequenz) ablesbar sind.

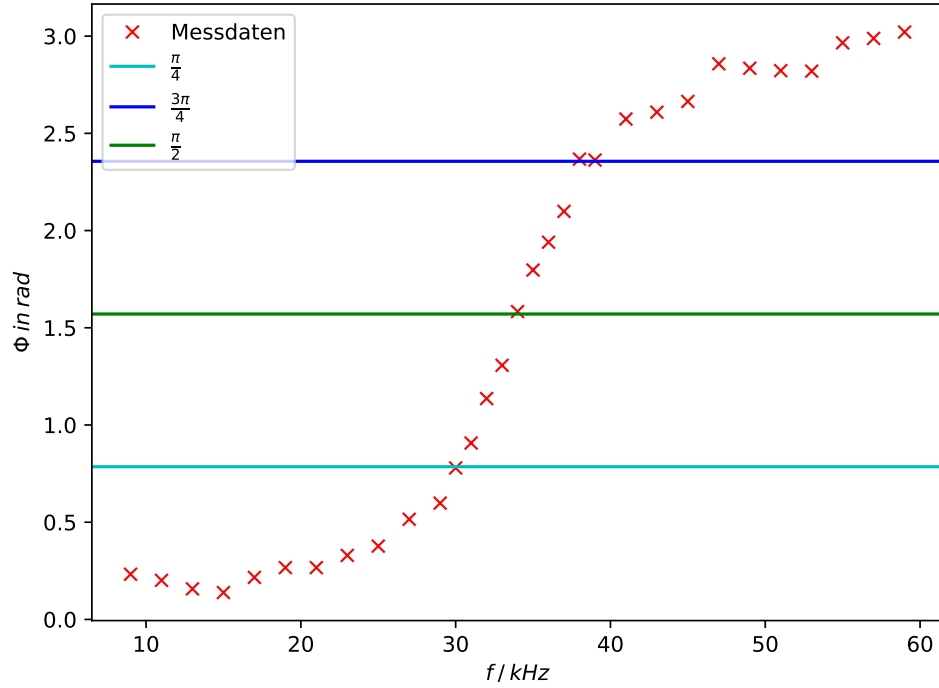


Abbildung 4: Phasendifferenz ϕ aufgetragen gegen die Frequenz f .

Die abgelesenen Frequenzen ergeben sich somit zu:

$$f_{1,\text{ex}} = (30,0 \pm 1,5) \text{ kHz} ,$$

$$f_{2,\text{ex}} = (38,0 \pm 1,5) \text{ kHz} ,$$

$$f_{\text{res,ex}} = (34,0 \pm 1,5) \text{ kHz} .$$

Die nach den Formeln (6) und (7) berechneten Frequenzen sind:

$$f_1 = (30,780 \pm 0,006) \text{ kHz} ,$$

$$f_2 = (38,800 \pm 0,008) \text{ kHz} ,$$

$$f_{\text{res}} = (34,090 \pm 0,007) \text{ kHz} .$$

Dabei berechnen sich deren Fehler nach

$$\begin{aligned}\Delta f_{1,2} &= \sqrt{\left(\frac{df_{1,2}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{df_{1,2}}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{df_{1,2}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-\frac{1}{CL^2} - \frac{R^2}{2L^3}}{4\pi\sqrt{\frac{1}{CL} + \frac{R^2}{4L^2}}} \mp \frac{R}{4\pi L^2}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{(\Delta C)^2}{16\pi^2 L^2 C^4 \left(\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}\right)}\right) + \left(\frac{R}{8\pi L^2 \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL}}} \pm \frac{1}{4\pi L}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Delta f_{\text{res}} &= \sqrt{\left(\frac{df_{\text{res}}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{df_{\text{res}}}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{df_{\text{res}}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-L + CR^2}{4\pi CL^3 \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}}}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \frac{R^2 \cdot (\Delta R)^2}{16\pi^2 L^4 \cdot \left(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}\right)} + \frac{(\Delta C)^2}{16\pi^2 L^2 C^4 \left(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}\right)}}\end{aligned}$$

4 Diskussion

Aus der Methode der Zeitabhängigkeit der Amplitude ergibt sich der Dämpfungswiderstand R_{eff} zu

$$R_{\text{eff}} = (136 \pm 4) \Omega$$

und die Abklingdauer zu

$$T_{\text{ex}} = (0,149 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Bei der Untersuchung des aperiodischen Grenzfalles wurde der Dämpfungswiderstand ermittelt zu:

$$R_{\text{ap}} = (3520 \pm 50) \Omega.$$

Desweiteren wurden die Halbwertsbreite b_{ex} und die Resonanzüberhöhung q_{ex} durch die Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung ermittelt zu:

$$b_{\text{ex}} = (10,0 \pm 2,1) \text{ kHz}$$

$$q_{\text{ex}} = 3,76$$

Zuletzt ergeben sich die verschiedenen Frequenzen bei der Untersuchung der Phasendifferenz:

$$\begin{aligned}
f_{1,\text{ex}} &= (30,0 \pm 1,5) \text{ kHz} , \\
f_{2,\text{ex}} &= (38,0 \pm 1,5) \text{ kHz} , \\
f_{\text{res,ex}} &= (34,0 \pm 1,5) \text{ kHz} .
\end{aligned}$$

Weitergehend zeigt sich in allen Versuchsteilen eine hohe Übereinstimmung zwischen den gemessenen und theoretisch berechneten Werten.

Der experimentell ermittelte Wert des Dämpfungswiderstandes R_{eff} kann nicht mit einem theoretischen Wert verglichen werden, da der Innenwiderstand des Frequenzgenerators berücksichtigt werden muss. Dadurch addiert sich zum Widerstand $R_1 = 48,1 \Omega$ ein unbekannter Wert. Da der ermittelte Wert für R_{eff} größer als R_1 ist, lässt sich allerdings zumindest feststellen, dass der ermittelte Wert für den Dämpfungswiderstandes nicht falsch ist.

Die Abweichung des Dämpfungswiderstandes bei dem aperiodischen Grenzfalles zum theoretischen Wert beträgt 19,82 %. Dies kann damit erklärt werden, dass der aperiodische Grenzfall nicht ganz genau zu bestimmen war. Die Methode des Bestimmens setzte ein gewisses Augenmaß voraus, wodurch sich Ungenauigkeiten ergeben.

Der theoretische Wert der Resonanzüberhöhung ist 12,74 % größer als der experimentell ermittelte Wert. Dies könnte ebenfalls an dem vernachlässigten Innenwiderstand der Messgeräte liegen, da ein größerer Wert für R zu einem kleineren Theoriewert führen würde.

Der theoretische Wert der Halbwertsbreite ist um 24,67 % kleiner als der experimentell ermittelte. Auch bei dieser Rechnung müsste der Innenwiderstand beachtet werden.

Außerdem wurde bemerkt, dass die Messwerte der Anregespannung U das Verhältnis $\frac{U_c}{U}$ dahingehend beeinflussen, dass keine aussagekräftige Resonanzkurve zustande kommt. Da dies für die Frequenzen der Fall ist, für die U von dem Wert 1 V abweicht, wird dieser Wert für U angenommen. Ursache für diese Fehlerquelle mag die Ungenauigkeit des Tastkopfes sein.

Weiterhin weichen die experimentell ermittelten Frequenzen f_1 um 2,53 %, f_2 um 2,06 % und die Resonanzfrequenz f_{res} nur um 0,26 % von ihren theoretischen Werten nach unten ab. Diese Messung ist also recht präzise.

5 Literaturverzeichnis

[1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen.*

<http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf> (Informationen entnommen am 13.01.2018)