Nr. 102

Drehschwingungen

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 11.12.2018 Abgabe: 18.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es die elastischen Konstanten eines Materiales zu bestimmen. Außerdem soll das magnetische Moment eines permanent Magneten bestimmt werden.

In der Mechanik wird generell zwischen zwei Arten von Kräften unterschieden: Volumenkräfte, wie etwa die Gravitationskraft, bewirken eine Änderung des Bewegungszustandes, zum Beispiel eine Translation oder Rotation. Außerdem gibt es Oberflächenkräfte, die eine Gestalts- oder Volumenänderung bewirken. Die Kraft, die dabei auf einen Körper wirkt wird als Spannung bezeichnet. Eine senkrecht zum Körper angreifende Kraft wird als Normalspannung σ benannt, eine die tangential zum Körper angreift als Tangentialspannung τ.

Für den Hookschen Bereich ist dabei die Kraft proportional zur Deformation, sodass elastische Konstanten zur Charakterisierung der Verformung eingeführt werden. Dieser Bereich zeichnet sich dadurch aus, dass dort Körper nach einer Deformation in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren. Es wird von einer "deelastischen Deformation" gesprochen. Für kleine Spannungen gilt also:

$$P = Q\frac{\Delta V}{V}.$$

In einem Kristall mit niedriger Symmertrie werden jeweils 6 Komponenten für die Beschreibung der Deformation und Spannung benötigt. Daraus entsteht eine 6x6 Matrix mit insgesamt 36 Einträgen. Das Energieprinzip reduziert diese Anzahl allerdings aus 21 Komponenten, weitere lassen sich durch weitere Symmertrien eleminieren. In diesem Versuch werden nun isotrope Körper untersucht, wodurch sich die Anzahl auf zwei Konstanten verringert. Isotrope Körper zeichnen sich dadurch aus, dass die elastischen Konstanten richtungsunabhängig sind. Die benötigten Konstanten sind das Schubmodul G für die Gestaltselastizität und das Kompressionsmodul Q für die Volumenelastizität. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit werden außerdem der Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ eingeführt. E beschreibt dabei die relative Längenänderung beim Angreifen einer Normalspannung in Spannungsrichtung und μ die Längenänderung senkrecht zur Normalspannung. μ ist dabei definiert durch:

$$\mu = -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L},$$

was durch Abbildung 1 verdeutlicht wird.

Zwischen den elastischen Konstanten G, E, Q und μ gilt der Zusammenhang:

$$E = 2G(\mu + 1) \leftrightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1 \tag{1}$$

$$E = 3(1 - 2\mu)Q \leftrightarrow Q = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \leftrightarrow Q = \frac{EG}{9G - \frac{3}{2}E} \tag{2}$$

Bei Proben, die deutlich länger als breit sind, also $L >> B$ lassen sich der Elastizitätsmodul E und Schubmodul G besonders einfach bestimmen. Insbesondere bei Metallen

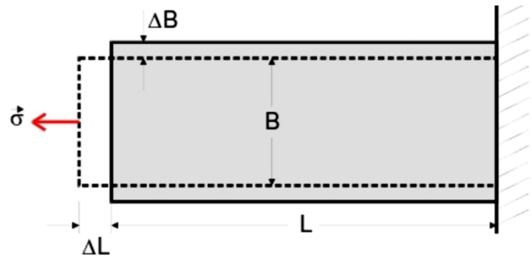

Abbildung 1: Verdeutlichung der Querkontraktionszahl [1]

mit einem niedrigen Schmelzpunkt kommt es zu sogenannten elastischen Nachwirkungen. Damit wird bezeichnet, dass der ursprüngliche Zustand nicht unmittelbar nach der Verformung wieder eingenommen wird. Dies soll vermieden werden.

1.1 Bestimmung des Schubmoduls G

Treten an einem Körper lediglich Tangentialspannungen auf, kommt es zu einer Scherung. Dabei wird der Körper in eine Richtung deformiert. Allerdings ist es sehr schwierig, den den sogenannten Scherungswinkel α zu bestimmen. Aus diesem Grund wird stattdessen die Torsion eines zylindrischen Stabes betrachtet. Dabei greifen an zwei gegenüberliegenden Punkten des Kreisdurchmessers Kräfte in entgegengesetzten Richtungen an, wie in Abbildung 2 dargestellt. Dies führt zu einer "Verzwirbelung" des Probekörpers. Wird dieses Beispiel auf einen Draht projeziert, so wirkt nun ein Drehmoment M auf diesen. Dieses hängt auch von dem Hebelarm, also dem Abstand des Massepunktes von der Drehachse, ab. Die Variation über den Durchmesser hinweg, ergibt die Notwendigkeit den Körper in Holzylinder mit der infinitesimalen Dicke dr und dem Radius r zu zerlegen. Für das Drehmoment M ergibt sich dadurch schließlich zu:

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr = \frac{\pi G R^4 \varphi}{2L}. \tag{3}$$

Dabei ist R der Radius des Drahtes, L die Länge und φ der Torsionswinkel.
Somit lautet die Richtgröße D:

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L}. \tag{4}$$

Angesprochene Nachwirkungen werden vermieden durch eine Messmethode, bei der die Spannung eine periodische Funktion der Zeit ist. Dafür wird eine Kugel an den Draht gehängt und ausgelenkt. Durch die entgegengesetzt wirkenden Drehmomente kommt es zu einer Drehschwingung. Es ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch einen Cosinusansatz gelöst wird. Dadurch ergibt sich für die Periodendauer T folgender Zusammenhang:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}} \tag{5}$$

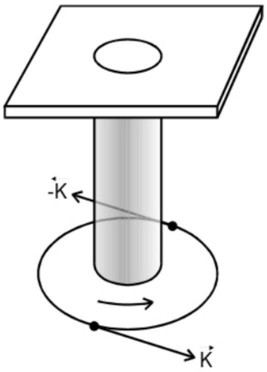

Abbildung 2: Verdeutlichung der Torsion [1]

Dabei bezeichnet θ das Trägheitsmoment der Kugel. Dieses ist im Allgemeinem gegeben durch:

$$\theta_{\mathrm{K}} = \frac{2}{5} m_{\mathrm{K}} R_{\mathrm{K}}^2$$

m_{K} ist dabei gegeben als Masse der Kugel und R_{K} als Radius der Kugel. Wird θ_{K} und D in (5) eingesetzt ergibt sich:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4 L m_{\mathrm{K}} R_{\mathrm{K}}^2}{5 \pi G R^4}}$$

Umformen zu G führt zu:

$$G = \frac{16 \pi m_{\mathrm{K}} R_{\mathrm{K}}^2 L}{5 T^2 R^4} \tag{6}$$

1.2 Bestimmung des magnetischen Momentes des Permanentmagneten

Für die Bestimmung des magnetischen Momentes eines Permanentmagneten ist folgende Beziehung gegeben:

$$\vec{m} = p\vec{a}$$

mit p als Polstärke und a als Abstand der Pole, der von Nord- zum Südpol zeigt. In einem homogenen B-Feld wirken auf den Magneten zwei entgegengesetzte Kräfte, was in Abbildung 3 veranschaulicht wird. Diese Kräfte sind entgegengesetzt durch das unterschiedliche Vorzeichen von p. Es wirkt also ein magnetisches Drehmoment, dass betraglich durch

$$M_{\mathrm{mag}} = mB \sin\gamma \tag{7}$$

gegeben ist.

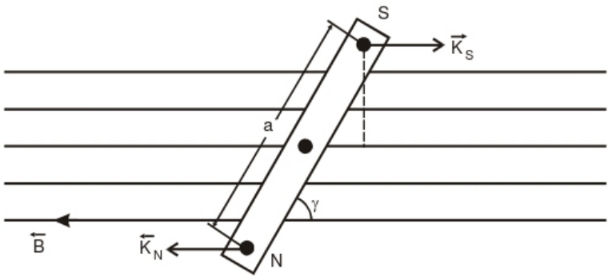

Abbildung 3: Permanentmagnet in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ [1]

Die nicht-lineare Differentialgleichung wird durch eine Kleinwinkelnäherung linearisiert und lässt sich ebenfalls durch einen Cosinusansatz lösen. Daraus ergibt sich die Periodendauer bei aktivierten Magnetfeld und daraus widerrum das magnetische Moment m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \leftrightarrow m = \frac{4\pi^2\theta}{BT^2} - \frac{D}{B} \tag{8}$$

2 Durchführung

3 Auswertung

Abbildung 4: Plot.

4 Diskussion