

Nr.354

# **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

AUTOR A

authorA@udo.edu

AUTOR B

authorB@udo.edu

Durchführung: 08.01.2019

Abgabe: 15.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude . . . . .	5
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstandes . . . . .	7
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung . . . . .	7
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>

# 1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, gedämpfte und erzwungene Schwingungen eines RLC-Schwingkreises zu untersuchen und den Dämpfungswiderstand und die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung zu bestimmen. Ein solcher Schwingkreis zeichnet sich durch eine Kapazität  $C$ , eine Induktivität  $L$  und einen Widerstand  $R$  aus. Bei einer Schwingung wird beständig Energie zwischen dem B-Feld der Spule und dem E-Feld des Kondensators ausgetauscht. Der Widerstand  $R$  sorgt dafür, dass die Energie des Systems fortlaufend abnimmt und so die Amplituden immer kleiner werden, bis sie irgendwann gänzlich abgeklungen sind. Mit Hilfe des zweiten Kirchhoffschen Gesetztes kann man eine Gleichung für den Schaltkreis aufstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

Durch Umformungen kann eine DGL für das System aufgestellt werden:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1)$$

Eine Lösung der DGL ist:

$$I(t) = e^{-t \frac{R}{2L}} \left( I_1 e^{it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} + I_2 e^{-it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \right). \quad (2)$$

Es gibt drei verschiedene Fälle, die betrachtet werden müssen. Der erste Fall ist, dass  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ . Die Wurzel im Exponenten bleibt reell und (2) geht über in:

$$I(t) = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \cos(2\pi f t + \eta).$$

Hierbei ist  $\eta$  eine Phasenverschiebung. Dieser Fall wird auch als Schwingfall bezeichnet. Wenn nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} &= \frac{R^2}{4L^2} \\ \Leftrightarrow R &= 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \end{aligned} \quad (3)$$

spricht man vom aperiodischen Grenzfall. Bei diesem Fall geht  $I(t)$  ohne Überschwung am schnellsten gegen null.

Wird der RLC-Kreis nun von außen durch eine Wechselspannung zum Schwingen angeregt, so spricht man von einer erzwungenen Schwingung. In diesem Fall liegt eine Inhomogenität in der DGL vor. Durch Lösen der resultierenden DGL erhält man schließlich:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (4)$$

Diese Lösung hat ein Maximum bei  $f = f_{\text{res}}$ , das Resonanzüberhöhung genannt wird. Die Breite  $\Delta f$  kann mit

$$\Delta f = |f_1 - f_2| \quad (5)$$

bestimmt werden. Hierbei gilt:

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (6)$$

und

$$f_{1,2} = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (7)$$

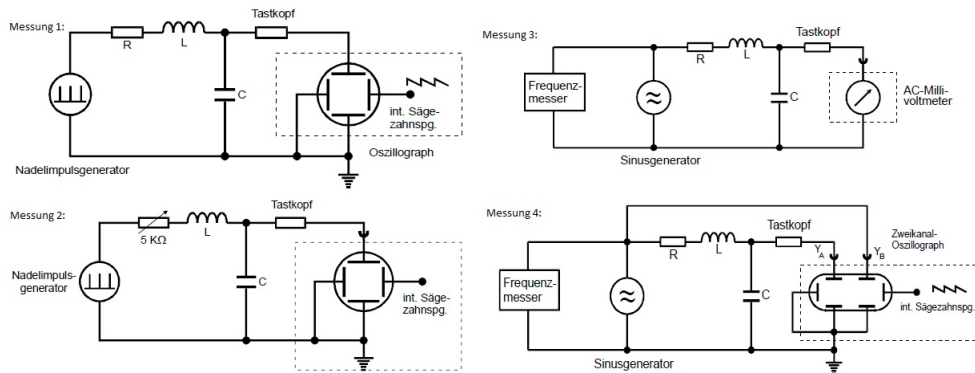
Außerdem weist die Kondensatorspannung  $U_C(t)$  eine Phasenverschiebung gegenüber der Erregerspannung auf. Diese kann mit

$$\tan(\phi(\omega)) = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (8)$$

bestimmt werden.

## 2 Durchführung

Für die vier durchzuführenden Messungen werden die Schaltpläne gemäß Abbildung 1 verwendet. Hierbei ist zu beachten, dass statt eines Nadel-Impulses ein Rechteckssignal genutzt wird.



**Abbildung 1:** Die vier verwendeten Schaltungen

Zunächst werden die bauteilspezifischen Werte, wie Kapazität  $C$  und Induktivität  $L$  notiert.

Im ersten Versuchsteil wird ein RLC-Kreis mit niederfrequenten Rechteckimpulsen ausgelenkt und so zum Schwingen angeregt. Nach Abfall eines Rechteckimpulses wird

der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung gemessen. Die so entstehende gedämpfte Schwingung wird mit Hilfe eines Oszilloskops aufgezeichnet und gespeichert.

Bei dem zweiten Versuchsteil wird der zuvor feste Widerstand durch einen regelbaren Widerstand, ein Potentiometer, ersetzt. Dieses wird so eingestellt, dass der aperiodische Grenzfall vorliegt, es also gerade zu keiner Schwingung des Systems mehr kommt. Der dazugehörige Wert für  $R$  wird notiert. Auch diese entstehende Kurve des Spannungsabfalls wird mit dem Oszilloskop aufgezeichnet und gespeichert.

Im dritten Versuchsteil wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz einer anliegenden Sinusspannung untersucht. Die Frequenz liegt dabei in einem Bereich von 1 - 64,5 kHz.

Die letzte Messung untersucht die im dritten Versuchsteil entstehende Phasenverschiebung zwischen der Kondensator- und Sinusspannung. Gemessen wird diese durch den Vergleich der beiden Spannungen auf dem Oszilloskop.

### 3 Auswertung

#### 3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude

Die gemessenen Maxima bei einer gedämpften Schwingung sind in Tabelle 1 zu sehen.

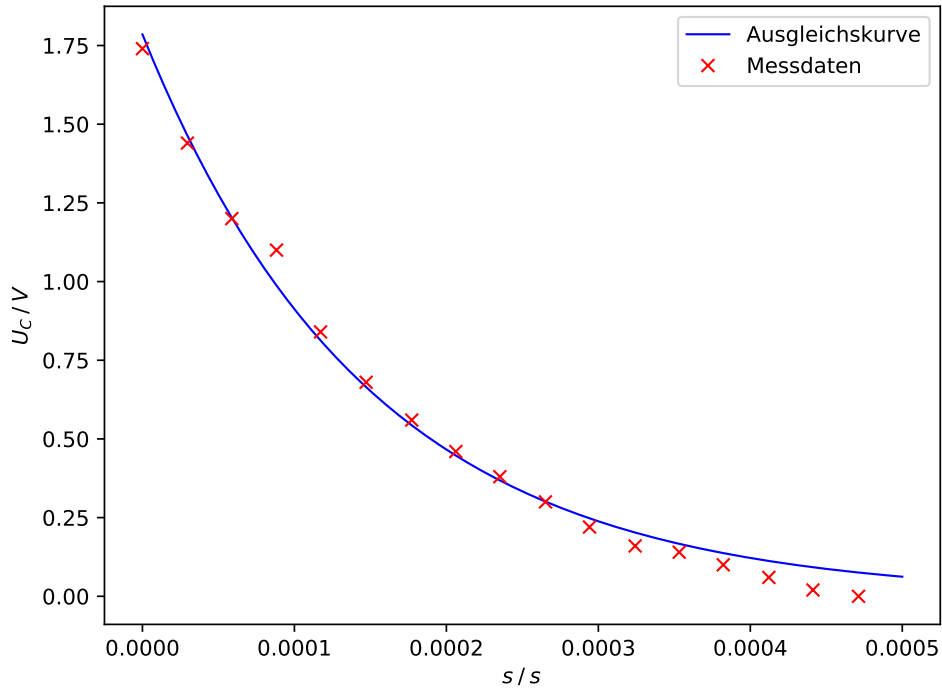
**Tabelle 1:** Messdaten der Maxima der Amplitude

$U / \text{V}$	$s / \mu\text{s}$
1,74	0,0
1,44	29,6
1,20	58,8
1,10	88,2
0,84	117,2
0,68	147,2
0,56	177,2
0,46	206,2
0,38	235,2
0,30	265,2
0,22	294,2
0,16	324,2
0,14	353,2
0,10	382,2
0,06	412,2
0,02	441,2
0,00	471,2

Die Ausgleichsrechnung wird mit der Funktion

$$A = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t}$$

durchgeföhrt. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 zu sehen.



**Abbildung 2:** Exponentielle Regression der Amplitude

Mittels python ergeben sich die Regressionsparamter zu:

$$A_0 = (1,785 \pm 0,036) \text{ V},$$

$$\mu = (1068,421 \pm 34,320) \frac{1}{\text{s}}.$$

Mit Formel... lässt sich nun der effektive Widerstand berechnen.

$$R_{\text{eff}} = 4\pi L\mu = (136 \pm 4) \Omega$$

Der Fehler ergibt sich dabei durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta R_{\text{eff}} = \sqrt{\left(\frac{dR_{\text{eff}}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dR_{\text{eff}}}{d\mu}\right)^2 \cdot (\Delta\mu)^2}.$$

Weiterhin wird die Abklingdauer mit Formel... berechnet und es ergibt sich:

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = (0,149 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Der Fehler ergibt sich hierbei zu:

$$\Delta T_{\text{ex}} = \sqrt{\left(\frac{dT_{\text{ex}}}{d\mu}\right)^2 \cdot (\Delta\mu)^2}.$$

### 3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes

Hier wurde der aperiodische Grenzfall untersucht. Dabei wurde der Dämpfungswiderstand zu

$$R_{\text{ap}} = (3520 \pm 50) \Omega$$

bestimmt. Der theoretische Wert von  $R_{\text{ap}}$  kann mit Formel (3) bestimmt werden:

$$R_{\text{ap,theo}} = (4390 \pm 9) \Omega.$$

Der Fehler berechnet sich über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta R_{\text{ap,theo}} = \sqrt{\left(\frac{dR_{\text{ap}}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dR_{\text{ap}}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}.$$

### 3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die gemessene Kondensatorspannung  $U_C$  und die zugehörige Frequenz  $f$ , sowie die Erregerspannung  $U_0$  sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Es wird  $\frac{U_C}{U_0}$  in Abbildung ... gegen die Frequenz aufgetragen.

Die experimentelle Resonanzüberhöhung wird aus der Abbildung als

$$q_{\text{ex}} = 3,76$$

Der theoretische Wert der Resonanzüberhöhung berechnet sich über die Formel ... zu:

$$q_{\text{theo}} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = 4,309 \pm 0,010.$$

Der Fehler ergibt sich dabei durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta q_{\text{theo}} = \sqrt{\left(\frac{dq}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{dq}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dq}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}.$$

Der experimentelle Wert der Halbwertsbreite  $b$  wird aus der Abbildung als

$$b_{\text{ex}} = \omega_+ - \omega_- = 38 \text{ kHz} - 28 \text{ kHz} = 10 \text{ kHz}$$

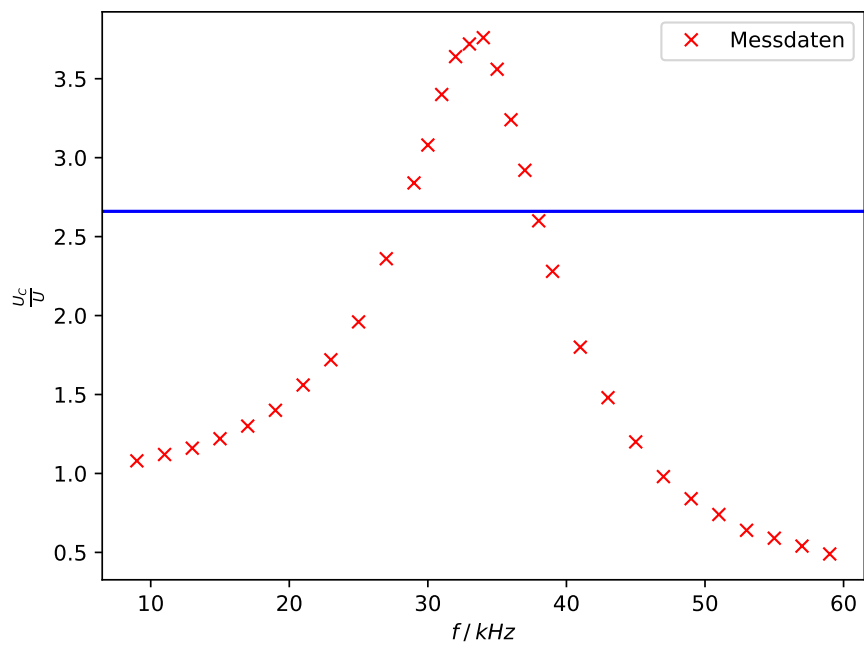
abgelesen. Der theoretische Wert für die Breite liegt jedoch bei

$$b_{\text{theo}} = \frac{R}{2\pi L} = (8,021 \pm 0,025) \text{ kHz}.$$

**Tabelle 2:** Messdaten der frequenzabhängigen Kondensatorspannung

$f / \text{kHz}$	$U_C / \text{V}$	$U / \text{V}$
09	1,08	0,56
11	1,12	0,56
13	1,16	0,56
15	1,22	0,54
17	1,30	0,56
19	1,40	0,54
21	1,56	0,56
23	1,72	0,56
25	1,96	0,56
27	2,36	1,04
29	2,84	0,96
30	3,08	1,00
31	3,40	1,00
32	3,64	1,00
33	3,72	1,00
34	3,76	1,00
35	3,56	1,00
36	3,24	1,00
37	2,92	1,00
38	2,60	1,00
39	2,28	1,00
41	1,80	1,00
43	1,48	1,04
45	1,20	1,04
47	0,98	0,52
49	0,84	0,52
51	0,74	0,52
53	0,64	0,52
55	0,59	0,21
57	0,54	0,21
59	0,49	0,21





**Abbildung 3:** Resonanzkurve

Dabei ergibt sich der Fehler mit:

$$\Delta b_{\text{theo}} = \sqrt{\left(\frac{db}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{dq}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2}.$$

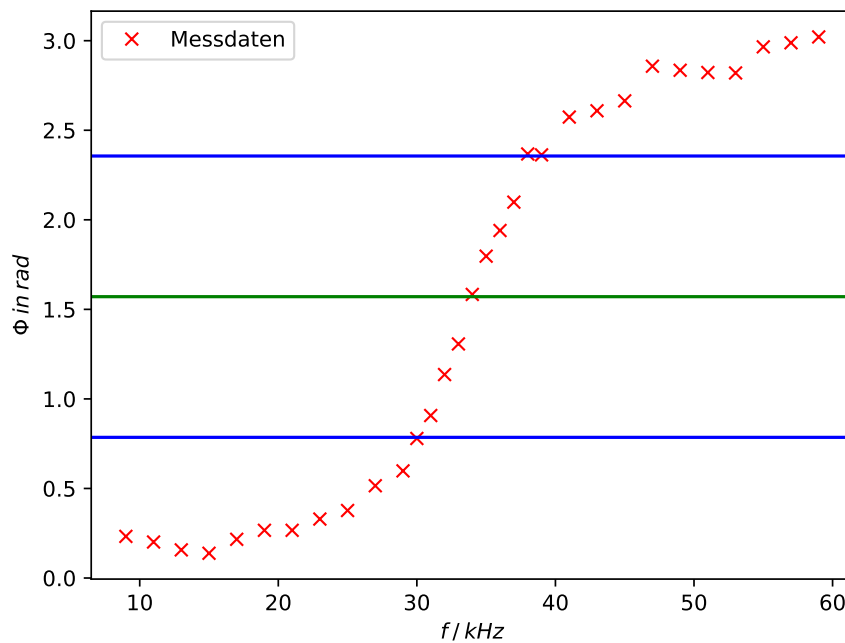
### 3.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Die Messwerte der Zeitdifferenz  $\Delta t$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$ , sowie die daraus errechnete Phasendifferenz

$$\phi = 2\pi - \frac{\Delta t}{f} \cdot 2\pi \quad (9)$$

sind in Tabelle 3 aufgelistet. Die Subtraktion von  $2\pi$  in (9) hängt dabei mit der Messdurchführung zusammen, d.h.  $\Delta t$  wurde zuzüglich einer Periode gemessen.

In Abbildung 4 sind die Phasendifferenz gegen die Frequenz aufgetragen und markierende Geraden für Phasen von  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  und  $\frac{\pi}{2}$ , für welche die Frequenzen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_{\text{res}}$  (Resonanzfrequenz) ablesbar sind, eingezeichnet.



**Abbildung 4:** Phasendifferenz

Die abgelesenen Frequenzen sind somit:

**Tabelle 3:** Messdaten der frequenzabhängigen Phasendifferenz

$f / \text{kHz}$	$\Delta t / \mu\text{s}$	$\Phi$ in rad
09	107,0	0.232
11	088,0	0.201
13	075,0	0.157
15	065,2	0.138
17	056,8	0.216
19	050,4	0.266
21	045,6	0.266
23	041,2	0.329
25	037,6	0.376
27	034,0	0.515
29	031,2	0.598
30	029,2	0.779
31	027,6	0.907
32	025,6	1.136
33	024,0	1.307
34	022,0	1.583
35	020,4	1.797
36	019,2	1.940
37	018,0	2.099
38	016,4	2.368
39	016,0	2.362
41	014,4	2.574
43	013,6	2.609
45	012,8	2.664
47	011,6	2.858
49	011,2	2.835
51	010,8	2.822
53	010,4	2.820
55	009,6	2.966
57	009,2	2.988
59	008,8	3.021

$$\begin{aligned}
f_{1,\text{ex}} &= 30 \text{ kHz} \\
f_{2,\text{ex}} &= 38 \text{ kHz} \\
f_{\text{res},\text{ex}} &= 34 \text{ kHz} .
\end{aligned}$$

Die nach den Formeln (7) und (6) berechneten Frequenzen sind:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (30,780 \pm 0,006) \text{ kHz} \\
f_2 &= (38,800 \pm 0,008) \text{ kHz} \\
f_{\text{res}} &= (34,090 \pm 0,007) \text{ kHz} .
\end{aligned}$$

Dabei berechnen sich deren Fehler nach

$$\begin{aligned}
\Delta f_{1,2} &= \sqrt{\left(\frac{df_{1,2}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{df_{1,2}}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{df_{1,2}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2} \\
\Delta f_{\text{res}} &= \sqrt{\left(\frac{df_{\text{res}}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{df_{\text{res}}}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{df_{\text{res}}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2} .
\end{aligned}$$

## 4 Diskussion

Weitesgehend zeigt sich in allen Versuchsteilen eine sehr hohe Übereinstimmung zwischen den gemessenen und theoretisch berechneten Werten.