

Nr. 103

Biegung elastischer Stäbe

Sara Krieg
sara.krieg@udo.edu

Marek Karzel
marek.karzel@udo.edu

Durchführung: 27.11.2018

Abgabe: 04.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Die Spannung an elastischen Körpern	3
1.2	Die Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung	3
1.3	Die Biegung eines Stabes mit beidseitiger Auflage	4
2	Durchführung	4
3	Auswertung	4
3.1	Bestimmung des Elastizitätsmodul zweier einseitig eingespannter Stäbe .	4
3.1.1	Stab mit quadratischem Querschnitt	4
3.1.2	Stab mit zylindrischem Querschnitt	7
4	Diskussion	10
5	Literaturverzeichnis	10

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, Elastizitätsmodule verschiedener Materialien zu ermitteln, indem die Biegung elastischer Stäbe untersucht wird.

1.1 Die Spannung an elastischen Körpern

Die physikalische Größe der mechanischen Spannung σ_m ist die wirkende Kraft F pro Fläche A . Sie setzt sich zusammen aus der Normalspannung σ , die senkrecht zur Oberfläche wirkt und einer tangential zur Fläche wirkenden Tangentialspannung.

Spannungen können an Körpern zu Gestalt- und Volumenveränderungen führen. Liegt durch Druck oder Zug eine Spannung nur in einer Körperdimension vor, so ist sie proportional zur Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ und es ergibt sich das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

mit dem materialspezifischen Elastizitätsmodul E als Proportionalitätsfaktor. Mithilfe einer hinreichend genauen Apparatur kann der Elastizitätsmodul durch Messung der Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ bestimmt werden.

Allerdings kann der Elastizitätsmodul E auch unter geringerem Kraftaufwand durch die Biegung von Stäben bestimmt werden, so wie es Gegenstand dieses Versuches sein soll. Hier reichen schon kleinere Kräfte aus, um eine Veränderung des Körpers zu bewirken. Dazu werden zwei unterschiedliche Arten der Biegung untersucht, wie sie in den Abbildungen , dargestellt sind.

Bei den dargestellten Biegungen handelt es sich um die Biegungen eines einseitig eingespannten und eines beidseitig aufgelegten Stabes.

1.2 Die Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Die am uneingespannten Ende des Stabes wirkende Gravitationskraft F eines aufgehängten Gewichtes biegt den Stab mit der Durchbiegung $D(x)$ aus und bewirkt ein angreifendes Drehmoment

$$M_F = F \cdot (L - x) \quad (2)$$

mit der Länge des Hebelarms $(L - x)$.

Dieses Drehmoment verursacht eine Dehnung der oberen und eine Stauchung der unteren Stabschichten, sodass der Querschnitt Q sich nicht mehr in vertikaler, sondern in verdrehter Position befindet. Einzig die neutrale Faser in der Mitte des Querschnitts Q behält ihre Länge bei. An allen anderen Fasern kommt es , aufgrund der Elastizität des Körpers, zu Normalspannungen, die sich zu einem zu M_F entgegengesetzten Drehmoment M_σ aufsummieren:

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) \, dq \quad (3)$$

Dabei beschreibt y den Abstand des Flächenelements dq zur neutralen Faser.

Zwischen den Drehmomenten stellt sich ein Gleichgewicht mit fester Durchbiegung $D(x)$ ein, sodass

$$M_F = M_\sigma \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \int_Q y \sigma(y) \, dq = F \cdot (L - x) \quad (5)$$

gilt.

Damit ergibt sich für die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \quad (6)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 \, dq(y) \quad (7)$$

1.3 Die Biegung eines Stabes mit beidseitiger Auflage

Am beidseitig aufgelegten Stab wirkt nach Abbildung ... die Gravitationskraft $\frac{F}{2}$ eines Gewichtes an der Mitte der Querschnittsfläche Q mit einem Hebelarm der Länge x und bewirkt somit das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (8)$$

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x) \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (9)$$

Damit ergibt sich analog die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (10)$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (11)$$

2 Durchführung

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des Elastizitätsmodul zweier einseitig eingespannter Stäbe

3.1.1 Stab mit quadratischem Querschnitt

Bei der Messung des Stabes mit rechteckigem Querschnitt, einer Länge $L_1 = 60 \text{ cm}$ und einem Gewicht von $m_1 = 464,3 \text{ g}$ ergaben sich die Messwerte in Tabelle 1. Dabei ergibt

sich die Durchbiegung D durch die Differenz von b_1 und b_2 . Der Linearisierungsterm ergibt sich mit $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$

Tabelle 1: Biegung eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt

x / cm	b_1 / mm	b_2 / mm	D / mm	$Lx^2 - \frac{x^3}{3} / 10^5 \text{ mm}^3$
2.5	-0.005	0.060	0.065	3.323
5.5	-0.270	-0.215	0.055	15.780
8.5	-0.380	-0.280	0.100	36.968
11.0	-0.435	-0.300	0.135	60.903
13.0	-0.480	-0.305	0.175	83.937
15.0	-0.500	-0.310	0.190	110.250
17.0	-0.540	-0.265	0.275	139.683
19.0	-0.580	-0.265	0.315	172.077
21.0	-0.620	-0.240	0.380	207.270
23.0	-0.620	-0.225	0.395	245.103
25.0	-0.720	-0.220	0.500	285.417
27.0	-0.810	-0.235	0.575	328.050
29.0	-0.850	-0.220	0.630	372.843
31.0	-0.900	-0.250	0.650	419.637
33.0	-0.990	-0.190	0.800	468.270
35.0	-1.025	-0.130	0.895	518.583
37.0	-1.040	-0.080	0.960	570.417
39.0	-1.050	-0.070	0.980	623.610
41.0	-1.080	-0.030	1.050	678.003
42.0	-1.100	-0.020	1.080	705.600
43.0	-1.100	0.005	1.105	733.437
44.0	-1.100	0.030	1.130	761.493
45.0	-1.090	0.055	1.145	789.750
46.0	-1.090	0.120	1.210	818.187
47.0	-1.090	0.160	1.250	846.783
48.0	-1.100	0.160	1.260	875.520
49.0	-1.100	0.190	1.290	904.377
49.5	-1.110	0.220	1.330	918.843

Nun wird die Durchbiegung D gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ graphisch aufgetragen und eine lineare Regressions mittels Python und matplotlib durchgeführt. Der resultierende Graph ist in Abbildung 1 dargestellt.

Die Regression wird mit $D(x) = m_1 \cdot x + c_1$ durchgeführt. Dabei ergeben sich die Parameter zu:

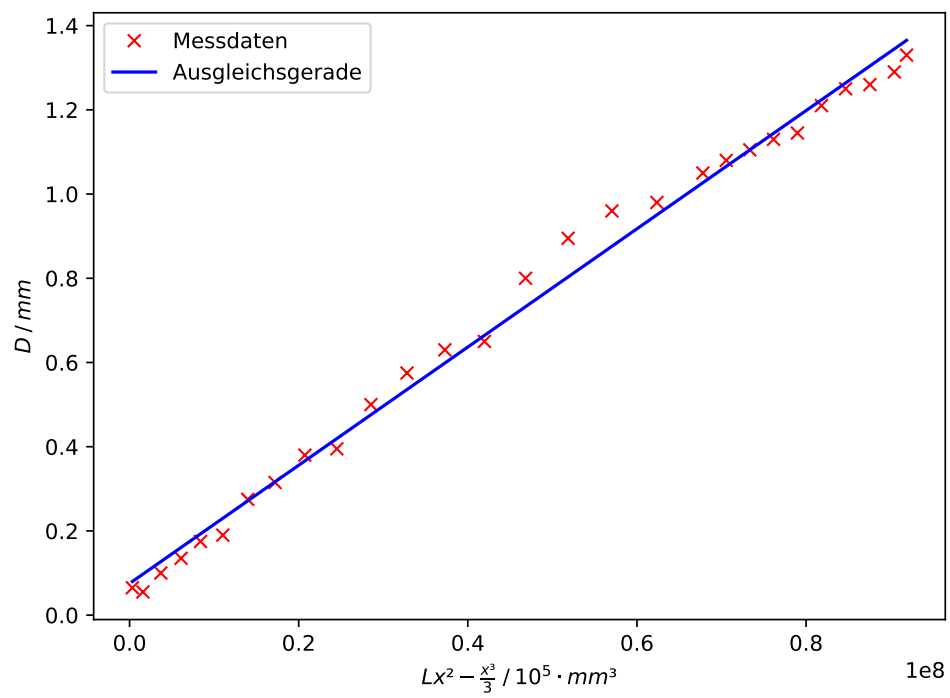


Abbildung 1: Durchbiegung mit Regression

$$m_1 = (0,0140 \pm 0,0002) \text{ 1/m}^2$$

$$c_1 = (0,07520 \pm 0,01364) \text{ mm}$$

Nach Formel (6) ergibt sich die Formel:

$$E = \frac{F_G}{2m_1 I}$$

Hierbei ist $F_G = m_g \cdot g$ mit $m_g = 0,528 \text{ kg}$ und $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Das Flächenträgheitsmoment ergibt sich nach Formel ... zu $\frac{1}{12} 10^4 \text{ mm}^4$. Das Elastizitätsmodul ist also gegeben durch:

$$E = (2,220 \pm 0,032) \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

Der statische Fehler ergibt sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = \frac{-F_G}{2Im^2} \cdot \Delta m_1$$

Es scheint sich demnach bei dem Material um Stahl zu handeln, dessen Elastizitätsmodul bei $E = 220\,000 \text{ N/mm}^2$ [1] liegt.

3.1.2 Stab mit zylindrischem Querschnitt

Das Verfahren läuft analog mit dem runden Stab mit $L = 55,2 \text{ cm}$. Die entsprechenden Messdaten finden sich in Tabelle 2.

Trägt man nun erneut D gegen $L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}$ auf und führt eine Ausgleichsrechnung mittels matplotlib durch ergibt sich Abbildung 2.

Die Regressionsparamter ergeben sich dabei zu:

$$m_2 = (0,0497 \pm 0,0004) \text{ 1/m}^2$$

$$c_2 = (0,1362 \pm 0,0232) \text{ mm}$$

Bei diesem Stab ist das Flächenträgheitsmoment nach Formel ... gegeben durch $\frac{\pi}{64} \text{ cm}^4$. Schließlich ergibt sich für das Elastizitätsmodul E wie oben mit Formel (6) und durch das Flächenträgheitsmoment:

$$E = (1,037 \pm 0,008) \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

Tabelle 2: Biegung eines Stabes mit zylindrischem Querschnitt

x / cm	b_1 / mm	b_2 / mm	D / mm	$Lx^2 - \frac{x^3}{3} / 10^5 \text{ mm}^3$
2.5	0.000	0.170	0.170	3.398
5.5	-0.110	0.050	0.160	16.143
8.5	-0.310	0.020	0.330	37.835
11.0	-0.395	0.030	0.425	62.355
13.0	-0.455	0.065	0.520	85.965
15.0	-0.510	0.013	0.523	112.950
17.0	-0.570	0.270	0.840	143.151
19.0	-0.600	0.400	1.000	176.409
21.0	-0.645	0.560	1.205	212.562
23.0	-0.710	0.775	1.485	251.451
25.0	-0.680	0.985	1.665	292.917
27.0	-0.650	1.150	1.800	336.798
29.0	-0.630	1.565	2.195	382.935
31.0	-0.600	1.700	2.300	431.169
33.0	-0.560	2.000	2.560	481.338
35.0	-0.560	2.260	2.820	533.283
37.0	-0.555	2.460	3.015	586.845
39.0	-0.550	2.820	3.370	641.862
41.0	-0.550	3.050	3.600	698.175
42.0	-0.550	3.200	3.750	726.768
43.0	-0.550	3.385	4.935	755.625
44.0	-0.550	3.500	4.050	784.725
45.0	-0.540	3.630	4.170	814.050
46.0	-0.520	3.780	4.300	843.579
47.0	-0.500	3.930	4.430	873.291
48.0	-0.480	4.030	4.510	903.168

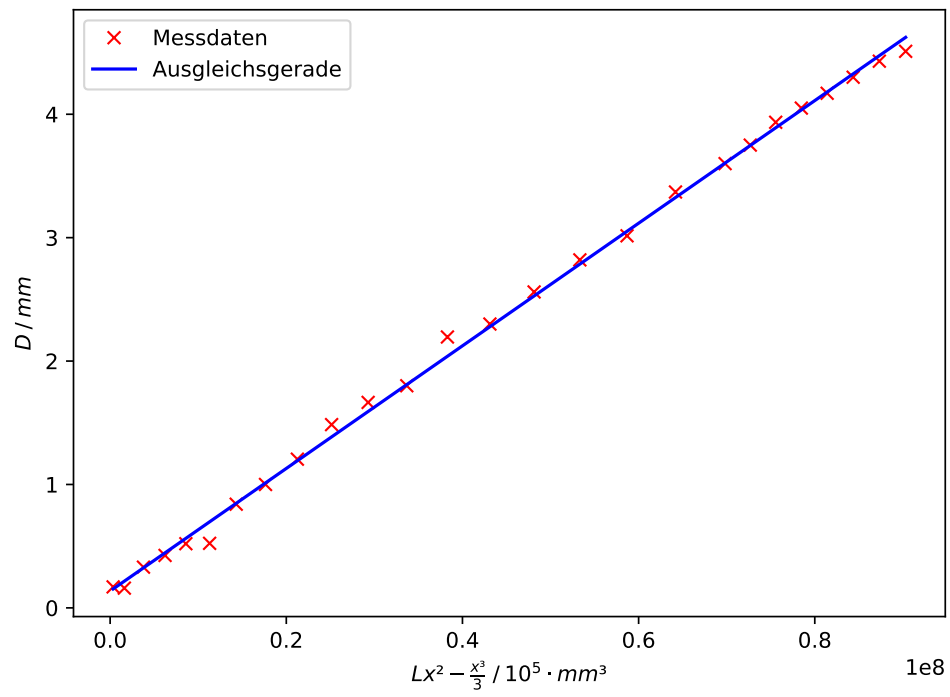


Abbildung 2: Durchbiegung mit Regression

4 Diskussion

5 Literaturverzeichnis

- [1]: TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe.*
- [2]: <https://vergleichsspannung.de/glossar/e-modul/>