COMPITINO DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

22 NOVEMBRE 2017
CORREZIONE

SE AVETE FATTO IL	COMPITO A	SOSTITUITE	$a = 1, b = 1;$
	COMPITO B		$a = 2, b = 3;$
	COMPITO C		$a = 1, b = 4;$
	COMPITO D		$a = 3, b = 1;$
	COMPITO E		$a = 2, b = 2.$

- Calcolate, se esistono, i limiti per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni (**4 punti ognuno**):

$$\Big(\frac{n^2+1-a^2}{n^2-a^2}\Big)^{n+a}, \qquad \sqrt{n^2+a}-(n+b), \qquad \frac{1-\cos(a/n^2)}{(1-\cos(\sqrt{b}/n))^2}.$$

SOLUZIONE: Abbiamo

$$\Big(\frac{n^2+1-a^2}{n^2-a^2}\Big)^{n+a} = \Big(1+\frac{1}{n^2-a^2}\Big)^{n+a} = \Big[\Big(1+\frac{1}{n^2-a^2}\Big)^{n^2-a^2}\Big]^{\frac{1}{n-a}}$$

dato che $(n+a)(n-a) = n^2-a^2$. Ora notiamo che tra parentesi quadre abbiamo una sottosuccessione della successione usata per definire il numero di Nepero e, quindi

$$2^{\frac{1}{n-a}} \le \Big[\Big(1+\frac{1}{n^2-a^2}\Big)^{n^2-a^2}\Big]^{\frac{1}{n-a}} \le 3^{\frac{1}{n-a}},$$

dalle proprietà delle potenze. Il teorema dei carabinieri ci permette di concludere che la successione tende ad uno, dato che

$$2^{\frac{1}{n-a}} \to 1, \qquad 3^{\frac{1}{n-a}} \to 1 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Per risolvere la forma indeterminata $+\infty - \infty$ che appare nella seconda, moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{n^2+a}+(n+b)$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+a}-(n+b) &= \frac{[\sqrt{n^2+a}-(n+b)]\cdot[\sqrt{n^2+a}+(n+b)]}{\sqrt{n^2+a}+(n+b)} \\ &= \frac{n^2+a-(n+b)^2}{\sqrt{n^2+a}+(n+b)} \\ &= \frac{-2bn+a-b^2}{\sqrt{n^2+a}+(n+b)}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\sqrt{n^2+a}-(n+b) = \frac{-2bn+a-b^2}{\sqrt{n^2+a}+n+b} = \frac{n(-2b+a/n-b^2/n)}{n(\sqrt{1+a/n^2}+1+b/n)}$$
$$= \frac{-2b+a/n-b^2/n}{\sqrt{1+a/n^2}+1+b/n} \to -b.$$

Per il terzo, ci riconduciamo (due volte) al limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{se } a_n \to 0.$$

Difatti, dato che $(1/n^2)^2 = 1/n^4$,

$$\frac{1-\cos(a/n^2)}{(1-\cos(\sqrt{b}/n))^2} = \frac{\frac{1-\cos(a/n^2)}{a^2/n^4}\cdot a^2 n^{-4}}{\left(\frac{1-\cos(\sqrt{b}/n)}{b/n^2}\right)^2 \cdot b^2 n^{-4}} = \frac{\frac{1-\cos(a/n^2)}{a^2/n^4}}{\left(\frac{1-\cos(\sqrt{b}/n)}{b/n^2}\right)^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}.$$

Il numeratore della prima frazione tende ad $1/2$, il denominatore ad $(1/2)^2$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(a/n^2)}{(1-\cos(\sqrt{b}/n))^2} = 2\frac{a^2}{b^2}.$$

- Si trovino le 2 soluzioni z_1, z_2 dell'equazione di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{C}$

$$z^2 - 2iz - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 0$$

(**6 punti**); si calcolino, inoltre, $a(z_1+z_2), b(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}), \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ (**1+2+1 punto**).

SOLUZIONE: Riscriviamo

$$z^2 - 2iz - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = (z-i)^2 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

quindi per trovare le due soluzioni basta trovare le due radici di $-1/2+i\sqrt{3}/2$ e sommar loro i: difatti

$$z^2 - 2iz - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (z-i)^2 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora,

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

quindi le sue due radici quadrate sono

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$w_2 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = -w_1.$$

Quindi le radici dell'equazione di secondo grado sono

$$z_{1,2} = i \pm \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{cioè} \quad z_1 = \frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i, \quad z_1 = -\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i.$$

Alle stesse soluzioni si perviene applicando la formuletta risolutiva delle equazioni di secondo grado. Ora $a(z_1+z_2) = 2ai$ perchè la parte col $+$ si elide con quella col $-$; per il prodotto dei coniugati, calcoliamo $z_1 \cdot z_2$ usando la formula per la differenza di quadrati

$$\begin{aligned}\Big[i + \Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big]\Big[i - \Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big] &= i^2 - \Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2 \\ &= -1 - \Big(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

quindi $b(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = b(\overline{z_1 \cdot z_2}) = b(-1/2 + i\sqrt{3}/2)$. Infine

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = -2\frac{2i}{1 + i\sqrt{3}} = -i(1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i\,:$$

abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per $1 - i\sqrt{3}$ nel penultimo passaggio.

- Date le espressioni

$$f(y) = e^{1-\sqrt{y}}, \qquad g(x) = \frac{x+a}{x-b}$$

si trovi il dominio delle due funzioni, si scriva la funzione composta $h = f \circ g$ e si ottenga il dominio di h (**2+2+4 punti**) (Facoltativo: prendendo per buono che la composizione sia biiettiva, si scriva l'espressione della funzione inversa h^{-1} e si trovi l'immagine di h) (**5 punti**).

SOLUZIONE: Dato che la funzione esponenziale ha dominio $\mathbb{R}$, l'unico problema può derivare dalla radice che ha dominio massimale $[0, \infty)$. Quindi il dominio massimale di f è $[0, \infty)$. Il dominio di g è costituito da tutti i punti che non fanno annullare il denominatore, quindi $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} \setminus \{b\} = (-\infty, b) \cup (b, +\infty)$. La composizione delle due funzioni è

$$h(x) = f(g(x)) = e^{1-\sqrt{\frac{x+a}{x-b}}}.$$

Per il dominio della funzione composta, o si osserva l'espressione per h e si deduce che è necessario imporre le condizioni $x \neq b$ e $\dfrac{x+a}{x-b} \geq 0$ (e la prima è implicita nella seconda), oppure si osserva che il dominio della composizione è formato dai valori x nel dominio di g per cui $g(x)$ appartiene al dominio di f, cioè $g(x) = \dfrac{x+a}{x-b} \in [0, \infty)$. In entrambi i casi otteniamo la condizione

$$\frac{x+a}{x-b} \geq 0$$

che si traduce in $\operatorname{Dom} h = (-\infty, -a] \cup (b, \infty)$ (la potete risolvere con la regola del segno del prodotto, ricordando che $x \neq b$).

Parte facoltativa: cerchiamo le condizioni su y per cui trovo (e se lo trovo, è unico, dato che il testo mi dice che h è biiettiva!) x tale che

$$h(x) = e^{1-\sqrt{\frac{x+a}{x-b}}} = y.$$

L'esponenziale è suriettiva su $(0, \infty)$, quindi se $y \in (0, \infty)$, trovo $t \in \mathbb{R}$ tale che $e^t = y$ (ed è $t = \log y$). Ora che condizione devo imporre su y per trovare x tale che

$$1 - \sqrt{\frac{x+a}{x-b}} = \log y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{\frac{x+a}{x-b}} = 1 - \log y?$$

Per elevare al quadrato (cioè per trovare s tale che $\sqrt{s} = 1 - \log y$, e sarà $s = (1 - \log y)^2$), devo imporre che $1 - \log y \geq 0$, cioè $y \leq e$. In tal caso ho

$$\frac{x+a}{x-b} = (1 - \log y)^2 \iff x\big[(1-\log y)^2 - 1\big] = b(1-\log y)^2 + a.$$

Infine, per dividere per $(1 - \log y)^2 - 1$, devo imporre un'ulteriore restrizione: che tale quantità sia diversa da zero, cioè che $(1 - \log y)^2 \neq 1$: $\log y \neq 0$ e $\log y \neq 2$, cioè $y \neq 1$ e $y \neq e^2$ (ma questo valore è già stato scartato prima). Tirando le somme, abbiamo

$$x = \frac{b(1-\log y)^2 + a}{(1-\log y)^2 - 1}$$

che vale se $y \in (0, e]$ e $y \neq 1$; l'inversa è quindi

$$h^{-1} : x \mapsto \frac{b(1-\log x)^2 + a}{(1-\log x)^2 - 1}$$

e il suo dominio, cioè l'immagine di h, è $(0,1) \cup (1,e]$. Notate che, dato che in ogni passaggio sono riuscito ad invertire unicamente le funzioni (t, s, x sono univocamente determinate), tale dimostrazione mi dice pure che h è iniettiva. Un altro modo (equivalente) sarebbe osservare che h è composizione di funzioni iniettive.