

Formule parametriche

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \end{array} \right\} \text{dove } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Integrali di funzioni razionali

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad \text{es: } \int \frac{3+4x^3}{2x^2+3x-1} dx \quad \text{or} \quad \int \frac{x^2+3}{x^2+2x+1} dx \quad \text{or} \quad \int \frac{x+1}{x^2+4x+1} dx$$

Caso 1) $N(x)$ grado $>$ di $D(x)$

- applicare divisione polinomiale

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx \rightarrow \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

esempio: $\int \frac{x^2+1}{x+1} dx$ $Q(x) = x-1$
 $R(x) = 2$

quindi $\int x dx - \int 1 dx + \int \frac{2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln|x+1| + c$

Caso 2) $N(x)$ grado $<$ di $D(x)$

2.A) $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ con $\deg(N) = 0$, $\deg(D) = 1$

2.B) $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ con $\begin{cases} \deg(N)=0, \deg(D)=2 \\ \text{oppure} \\ \deg(N)=1, \deg(D)=2 \end{cases}$ e $\Delta(D) < 0$

2.C) tutti gli altri casi per cui $\deg(N) < \deg(D)$

\Downarrow quindi:

2.A) $\int \frac{A}{Bx+C} dx$ primitive logaritmiche, int fondamentali.

2.B) $\begin{cases} \int \frac{A}{Bx^2+Cx+D} dx \\ \int \frac{Ax+E}{Bx^2+Cx+D} dx \end{cases}$ con $\Delta(D) < 0$ Δ negativo \downarrow k costante
 $\frac{2R \cdot \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)}{\sqrt{-\Delta}} + C$

Se $N(x)$ 1° grado

\downarrow lin + arctan $\int \frac{l'(x)}{l(x)} + \int \frac{k}{ax^2+bx+c}$

2.C) casi $\deg(N) \geq \deg(D)$ integrazione protti semplici
 \rightarrow esprimere la funzione integranda come somma di funzioni razionali protte i cui integrali sono noti

$x - a_i$ $\frac{A_i}{x - a_i}$

$(x - a_i)^n$ $\frac{A_{i,1}}{(x - a_i)} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,n}}{(x - a_i)^n}$

$x^2 + a_i x + b_i$ $\frac{A_i x + B_i}{x^2 + a_i x + b_i}$ con $\Delta < 0$

$(x^2 + a_i x + b_i)^n$ $\frac{A_{i,1}x + B_{i,1}}{x^2 + a_i x + b_i} + \frac{A_{i,2}x + B_{i,2}}{(x^2 + a_i x + b_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,n}x + B_{i,n}}{(x^2 + a_i x + b_i)^n}$ $\Delta < 0$

Principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A=0 \\ -B=1 \end{cases}$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx \quad \deg(N)=0 \quad \deg(D)=3$$

$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ fattorizzo il denominatore

e x^2 associò $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$

e $x-1$ associò $\frac{C}{x-1}$

determinare le costanti di modo che:

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)}$$

Semplifico denom, ottengo uguaglianza:

$$(A+C)x^2 + (B-A)x - B = 1$$

risolvendo il sistema (principio identità polinomi) ottengo:

$$A = -1 \quad B = -1 \quad C = 1$$

$$\text{quindi } \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{calcolo l'integrale } \int \left(-\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$-\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + c$$

Proprietà integrali

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \bullet \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad c \in [a, b]$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b [c f(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Lineare: } \bullet \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$