PRIMO APPELLO DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

31 GENNAIO 2018
CORREZIONE

SE AVETE FATTO IL	COMPITO A	SOSTITUITE	$a = 1$;
	COMPITO B		$a = 2\sqrt{2}$;
	COMPITO C		$a = \sqrt{5}$;
	COMPITO D		$a = 4$;

Esercizio 1, Parte 1) Considerate la funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$p(x) = x^3 - x^2 - a^2 x - a^2.$$

Trovate i limiti di p per $x \to +\infty$ e $-\infty$ (**2 punti**); calcolate $p'(x)$ e, studiandone il segno, determinate gli intervalli di monotonìa di p (**3 p.**), i punti di $\max / \min$ locale e i corrispondenti valori di p (**1 p.**). Deducete da tali informazioni il numero di zeri di p (giustificando la vostra affermazione) e localizzate, usando il metodo di bisezione, il massimo di essi con una precisione di $1/2$ (**3 p.**).
Parte 2) Ora studiate la funzione

$$f(x) = e^x \frac{x}{x^2 - a^2}$$

e tracciatene un grafico approssimativo (**1 p.**), dopo averne trovato il dominio naturale, le intersezioni con gli assi e le eventuali simmetrie (**2 p.**), gli intervalli di positività (**2 p.**), gli asintoti attraverso i limiti agli estremi del dominio (**4 p.**) e gli intervalli di monotonia (**2 p.**). Non è richiesto lo studio della convessità.

SOLUZIONE:

Parte 1)

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2 - a^2 x - a^2 = +\infty,$$

perché

$$p(x) = x^3 - x^2 - a^2 x - a^2 = x^3\Big(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{a^2}{x^3} - \frac{a^2}{x^4}\Big);$$

analogamente, con la stessa decomposizione,

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty.$$

Calcoliamo $p'(x) = 3x^2 - 2x - a^2$; visto che $\Delta = 4 + 12a^2 > 0$, le due radici distinte sono

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{1 + 3a^2}}{6} = \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

Quindi p è crescente in $(-\infty, x_1)$ e in $(x_2, +\infty)$ e decrescente in (x_1, x_2): x_1 è massimo locale, mentre x_2 è minimo locale. Calcoliamo i valori di p in questi due punti:

$$a = 1, \qquad x_1 = -\frac{1}{3}, \qquad x_2 = 1, \qquad p(x_1) = -\frac{22}{27}, \qquad p(x_2) = -2;$$

$$a = 2\sqrt{2}, \qquad x_1 = -\frac{4}{3}, \qquad x_2 = 2, \qquad p(x_1) = -\frac{40}{27}, \qquad p(x_2) = -20 :$$

$$a = \sqrt{5}, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = \frac{5}{3}, \qquad p(x_1) = -2, \qquad p(x_2) = -\frac{310}{27};$$

$$a = 4, \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 8/3, \qquad p(x_1) = 4, \qquad p(x_2) = -\frac{1264}{27}.$$

Quindi nei primi tre casi abbiamo un'unica radice per p, mentre nell'ultimo caso ne abbiamo tre, in tutti i casi grazie al teorema degli zeri (il polinomio è continuo). Notiamo che nell'ultimo caso, dato che $p(-4) = -32 = p(4)$, le due radici "più piccole" sono interne all'intervallo $(-4, 4)$ (questa informazione servirà dopo) - anzi, si può anche dire che appartengono a $(-4, 0)$, dato che $p(0) = -16$. Ora usiamo la bisezione per trovare la radice più grande, che in ogni caso sarà maggiore di x_2.
Compito A: Proviamo $p(4) = 43$; quindi la radice starà in $[1, 4]$; valutiamo p in due: $p(2) = 1$; infine, calcoliamo $p(3/2) = -11/8$; quindi la radice appartiene all'intervallo $(3/2, 2)$ (numericamente si trova che la radice è circa $1,8393$).
Compito B: Proviamo $p(4) = 8$; quindi la radice starà in $[2, 4]$; valutiamo p in tre: $p(3) = -14$; infine, calcoliamo $p(7/2) = -43/8$; quindi la radice appartiene all'intervallo $(7/2, 4)$ (numericamente si trova che la radice è $\approx 3,7246$).
Compito C: Proviamo $p(4) = 23$; quindi la radice starà in $[5/3, 4]$. A questo punto è più comodo lavorare con numeri interi per evitare frazioni scomodo da calcolare; quindi valutiamo p in due: $p(2) = -11$. Dal teorema di esistenza degli zeri, la radice appartiene a $(2, 4)$. Calcoliamo $p(3) = -2$ e $p(7/2) = 65/8$. Quindi la radice appartiene a $(3, 7/2)$(numericamente si trova che la radice è circa $3,1179$).
Compito D: Proviamo $p(4) = -32$; questo non ci dice niente dato che sia $p(x_2)$ che $p(4)$ sono negativi. Proviamo $p(5) = 4$; a questo punto posso continuare con la bisezione partendo dall'intervallo $[4, 5]$ dato che $p(4) < 0$, $p(5) > 0$; $p(9/2) = -137/8$ e abbiamo concluso, dato che la radice sarà in $[9/2, 5]$ (numericamente si trova che la radice è $\approx 4,9164$). Notate in ogni caso che $p(a) = a^3 - a^2 - a^3 - a^2 = -a^2 < 0$ (pure questo servirà dopo).

Parte 2) Per il dominio naturale, basta imporre il denominatore diverso da $\pm a$ (dato che nei quattro casi a è positivo):

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, +\infty).$$

Se $x = 0$, allora $f(x) = 0$. D'altra parte, se cerchiamo x tali che $f(x) = 0$, sarà solo $x = 0$, dato che $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$f(-x) = -x\frac{e^{-x}}{(-x)^2 - a^2} = -x\frac{e^{-x}}{x^2 - a^2}$$

che non è nè $f(x)$, nè $f(-x)$, quindi la funzione non ha simmetrie significative. Per la positività, dato che $e^x > 0$,

$$f(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{x^2 - a^2} \geq 0.$$

Per trovare le soluzioni della disequazione fratta, facciamo il grafico dei segni dopo aver visto che il numeratore $N \geq 0$ sse $x \geq 0$ e denominatore $D > 0$ sse $x < -a$ oppure $x > a$. Quindi la funzione è positiva in $(-a, 0] \cup (a, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, -a) \cup (0, a)$.

Dobbiamo ora calcolare i sei limiti agli estremi del dominio, aiutandoci eventualmente con la positività della funzione. Ad esempio, se quando cerchiamo

$$\lim_{x \to (-a)^-} e^x \frac{x}{x^2 - a^2}$$

non riusciamo a capire se il denominatore $x^2 - a^2$ tende a 0_+ o 0_- (quindi non capiamo se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, dato che il numeratore tende a $-e^{-a}a < 0$), ci possiamo ricordare che in $(-\infty, -a)$ la funzione è negativa, quindi il limite non potrà essere che $-\infty$. Oppure notiamo che

$$x \to (-a)_- \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \to -a \\ x < -a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 \to (-a)^2 = a^2 \\ x^2 > a^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \to (a^2)^+;$$

notate che abbiamo cambiato il verso della disuguaglianza perchè i due termini sono entrambi negativi. Quindi, ragionando in uno dei due modi e stando attenti al segno del numeratore, si ha

$$\lim_{x \to (-a)^-} e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a^-} e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to (-a)^+} e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a^+} e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = +\infty.$$

Poi abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = 0^-,$$

dato che $e^x \to 0^+$ e $\frac{x}{x^2 - a^2} \to 0^-$ per $x \to -\infty$, e

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = +\infty$$

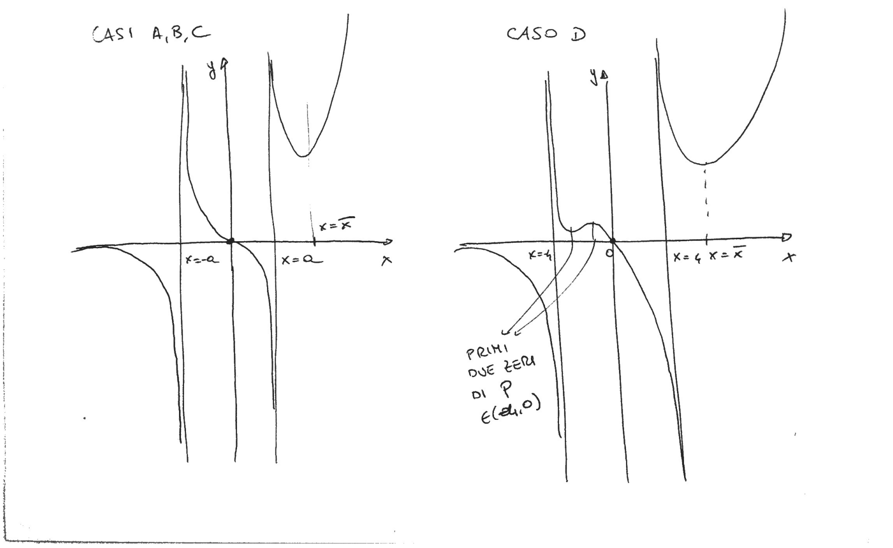
per la gerarchia degli infiniti, dato che

$$e^x \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{e^x}{\frac{x^2 - a^2}{x}} = \frac{e^x}{x} \frac{1}{1 - (a/x)^2} \to +\infty.$$

Infine, calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(e^x \frac{x}{x^2 - a^2}\Big) &= e^x \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 - a^2} + e^x \frac{x}{x^2 - a^2} \\ &= e^x \frac{x^2 - a^2 - 2x^2}{(x^2 - a^2)^2} + e^x \frac{x}{x^2 - a^2} \\ &= \frac{e^x}{(x^2 - a^2)^2} \Big(-x^2 - a^2 + x(x^2 - a^2) \Big) \\ &= \frac{e^x}{(x^2 - a^2)^2} \big(x^3 - x^2 - a^2 x - a^2 \big). \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $p(x) \geq 0$, dove $p(\cdot)$ è il polinomio studiato nella prima parte. Quindi nei primi tre casi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq \bar{x}$, con $\bar{x}$ la radice trovata approssimativamente, mentre nel quarto caso se e solo se x sta tra le prime due radici o se $x > \bar{x}$. Quindi possiamo disegnare il grafico come segue (ricordate che in ogni caso $\bar{x} > a$):



Esercizio 2) Calcolate il limite per $n \to +\infty$ della seguente successione (**4 p.**)

$$n^2\big(\sqrt{n^4+a^2}-\sqrt{n^4-a^2}\big).$$

SOLUZIONE: Visto che è una forma determinata $+\infty-\infty$, moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici:

$$\begin{aligned} n^2\big(\sqrt{n^4+a^2}-\sqrt{n^4-a^2}\big) &= n^2\,\frac{\big(\sqrt{n^4+a^2}-\sqrt{n^4-a^2}\big)\big(\sqrt{n^4+a^2}+\sqrt{n^4-a^2}\big)}{\sqrt{n^4+a^2}+\sqrt{n^4-a^2}} \\ &= n^2\,\frac{n^4+a^2-(n^4-a^2)}{\sqrt{n^4+a^2}+\sqrt{n^4-a^2}} = \frac{2n^2a^2}{\sqrt{n^4+a^2}+\sqrt{n^4-a^2}}. \end{aligned}$$

Ora raccogliamo al numeratore e al denominatore l'infinito che "va più veloce" per risolvere la forma indeterminata ∞/∞:

$$\begin{aligned} \frac{2n^2a^2}{\sqrt{n^4+a^2}+\sqrt{n^4-a^2}} &= \frac{2n^2a^2}{\sqrt{n^4}\big(\sqrt{1+a^2/n^4}+\sqrt{1-a^2/n^4}\big)} \\ &= \frac{2a^2}{\sqrt{1+a^2/n^4}+\sqrt{1-a^2/n^4}} \end{aligned}$$

dato che $\sqrt{n^4}=n^2$. Ora, per n che tende a $+\infty$, il denominatore tende a $\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$, e quindi la successione tende a a^2.

Esercizio 3) Calcolate i seguenti integrali (**4 p. ciascuno**)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+a^2}\,dx, \qquad\qquad \int (x-a)^2 e^x\,dx.$$

Facoltativo, (4 p.)

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx.$$

SOLUZIONE: Per il primo, effettuiamo la sostituzione $t=\sqrt{x}$, da cui $dt = dx/(2\sqrt{x})$. Quindi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+a^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}+a^2}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t+a^2}\,dt.$$

Abbiamo

$$\frac{t^2}{t+a^2} = t + \frac{t^2}{t+a^2} - t = t - \frac{a^2 t}{t+a^2}$$

e

$$\frac{t}{t+a^2} = 1 - \frac{a^2}{t+a^2},$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2}{t+a^2}\,dt &= \int_0^1 t\,dt - a^2 \int_0^1 \,dt + a^4 \int_0^1 \frac{1}{t+a^2} \\ &= \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_{t=0}^1 - a^2 + a^4 \big[\log(t+a^2)\big]_{t=0}^1 = \frac{1}{2} - a^2 + a^4 \log\Big(\frac{a^2+1}{a^2}\Big)\end{aligned}$$

e

$$2\int_0^1 \frac{t^2}{t+a^2}\,dt = 1 - 2a^2 + 2a^4 \log\Big(\frac{a^2+1}{a^2}\Big).$$

Per il secondo, integriamo per parti due volte: la prima con $f(x) = (x-a^2)^2$ e $g'(x) = e^x$, da cui $f'(x) = 2(x-a^2)$ e $g(x) = e^x$.

$$\int (x-a^2)^2 e^x\,dx = (x-a^2)^2 e^x - 2\int (x-a^2)e^x\,dx.$$

La seconda, per l'ultimo integrale, con $f(x) = (x-a^2)$ e $g'(x) = e^x$, da cui $f'(x) = 1$ e $g(x) = e^x$:

$$\int (x-a^2)e^x\,dx = (x-a^2)e^x - \int e^x\,dx = (x-a^2-1)e^x;$$

quindi

$$\int (x-a^2)^2 e^x\,dx = e^x\Big[(x-a^2)^2 - 2(x-a^2) + 2\Big].$$

Per il facoltativo, integriamo per parti usando $f(x) = x^3$, $g'(x) = x^2 e^{x^3}$; quindi, $f'(x) = 3x^2$ e

$$g(x) = \int_0^x t^2 e^{t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{x^3} e^y\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}.$$

Quindi

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\Big[x^3 e^{x^3} - \Big(\int e^t\,dt\Big)_{t=x^3}\Big]$$

ed infine

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\Big[x^3 e^{x^3} - e^{x^3}\Big] + c.$$