SECONDO APPELLO DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

20 FEBBRAIO 2018
CORREZIONE

Esercizio 1) Considerate la funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + x.$$
Tracciate un grafico approssimativo di f (**1 p.**), dopo averne trovato il dominio naturale $\mathrm{Dom}(f)$ (**1 p.**), le eventuali simmetrie (**2 p.**), gli asintoti attraverso i limiti agli estremi del dominio (**4 p.**), gli intervalli di monotonia, punti di $\max$ / $\min$ locale, corrispondenti valori di f e il loro segno attraverso lo studio del segno della derivata prima (**4 p.**) e studiato la convessità attraverso lo studio del segno della derivata seconda (**2 p.**). Potete dire qualcosa sulla **stretta** convessità/concavità (**1 p.**)? Notate che lo studio della monotonia permette di ottenere informazioni sulle intersezioni con gli assi. (**Facoltativo:** detto m il valore di f nel suo unico minimo locale, dedurre dal grafico di f il grafico di $f(x+2\sqrt{2}) - m$ (**3 p.**)).

SOLUZIONE: Per quanto riguarda il dominio, dobbiamo imporre che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Quindi, facendo il grafico dei segni,
$$\frac{x+2}{x-2} > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x < -2 \quad \text{o} \quad x > 2.$$
Calcoliamo $f(-x)$:
$$f(-x) = \log\left(\frac{-x+2}{-x-2}\right) - x = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - x = -\log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - x = -f(x)$$
per le proprietà dei logaritmi; quindi la funzione è dispari. Da ciò, basta calcolare i limiti a $+\infty$ e per $x \to 2^+$; abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
dato che, per la continuità del logaritmo,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \log 1 = 0;$$
osservate che per scrivere che il limite della somma è la somma dei limiti ho prima verificato che non si trattasse di una forma indeterminata, ed implicitamente usato il fatto che la somma di una funzione limitata e una divergente ha limite $+\infty$. Usando le stesse cautele, dato che
$$\lim_{x\to2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to2^+} \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = +\infty$$
dato che il denominatore tende a 0^+ e il numeratore a 4, abbiamo
$$\lim_{x\to2^+} \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + x = +\infty.$$
Quindi, dalla simmetria, abbiamo anche
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad\qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty.$$

Quindi le rette $x = 2$, $x = -2$ sono asintoti verticali, rispettivamente, da destra e da sinistra. Dato che la funzione diverge all'infinito, cerchiamo gli asintoti obliqui (ovviamente solo a $+\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 1;$$

osservate che il secondo limite NON contiene una forma indeterminata, dato che "$0/\infty$" non la è. Quindi possiamo provare a trovare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 0,$$

che è già stato calcolato prima. Quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$, e per simmetria anche a $-\infty$. Notate che $f(x) > x$ per $x > 2$ (dato che il $(x+2)/(x-2) > 1$), quindi la funzione "sta sempre sopra" l'asintoto per $x > 0$ (e sotto per $x < 0$).

Calcoliamo $f'(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + x\right) &= \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + 1 \\ &= \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{x-2-(x+2)}{(x-2)^2} + 1 = -\frac{4}{(x-2)(x+2)} + 1 = \frac{x^2-8}{x^2-4}.\end{aligned}$$

Osserviamo che $x^2 - 4 > 0$ in $\mathrm{Dom}\,(f)$, quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq -2\sqrt{2}$ o $x \geq 2\sqrt{2}$; quindi, dati i limiti a $\pm\infty$, $x_M = -2\sqrt{2}$ è punto di massimo locale e $x_m = 2\sqrt{2}$ di minimo locale (e sono gli unici punti di estremo locale). Osserviamo che, facendo qualche conto (in particolare, "razionalizzando")

$$\begin{aligned}m = f(x_m) &= f(2\sqrt{2}) = \log(3+2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} > 0 \\ M = f(x_M) &= f(-2\sqrt{2}) = -f(2\sqrt{2}) = \log(3-2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} = -f(2\sqrt{2}) < 0\end{aligned}$$

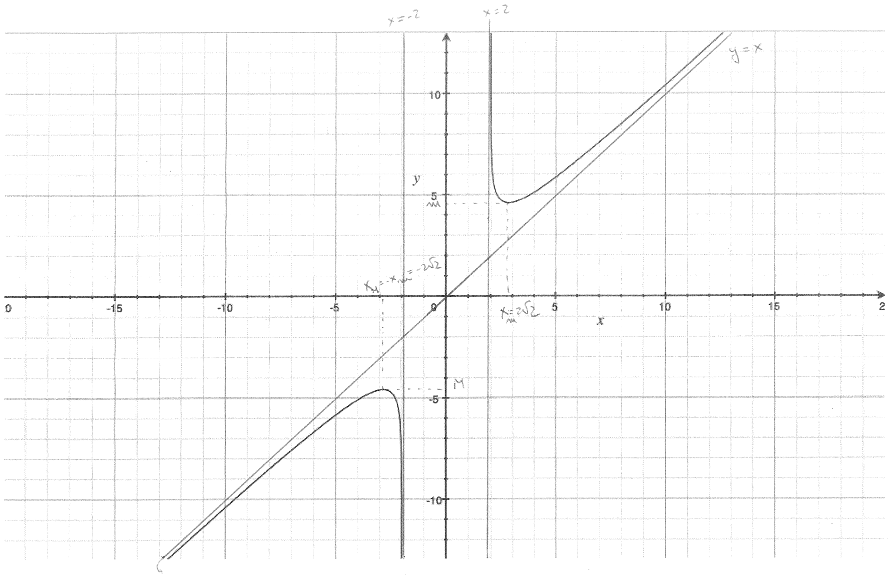
(verificate che $\log(3-2\sqrt{2}) = -\log(3+2\sqrt{2})$). Quindi la funzione non interseca mai l'asse delle x, dato che per $x \in (-\infty, 0) \cap \mathrm{Dom}\,(f)$ è minore o uguale ad $M < 0$, mentre in $(0, \infty) \cap \mathrm{Dom}\,(f)$ è maggiore o uguale ad $m > 0$.

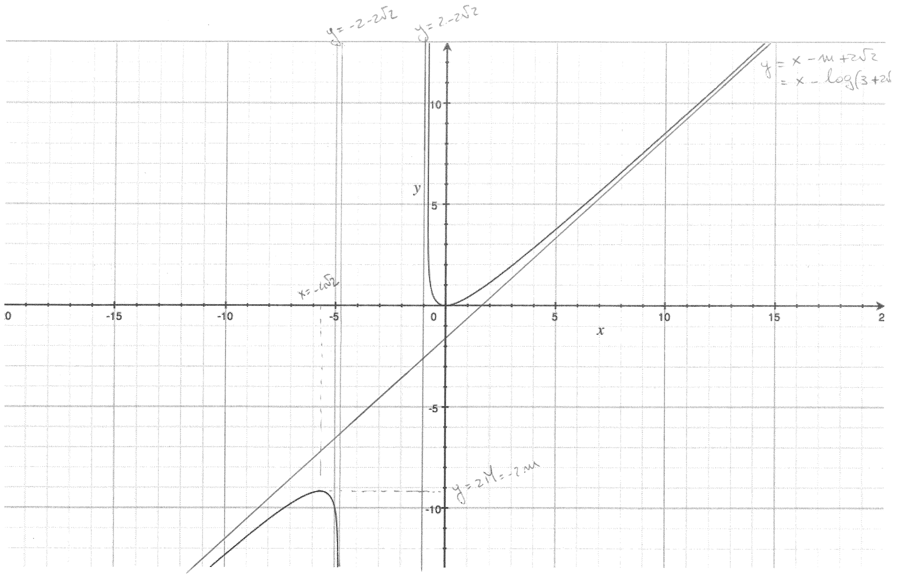
Per la derivata seconda, abbiamo

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2-8}{x^2-4} = \frac{2x(x^2-4-(x^2-8))}{(x^2-4)^2} = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

Quindi, dato che il denominatore è (strettamente) positivo, $f''(x) > 0$, quindi f è strettamente convessa, se $x \in (0, \infty) \cap \mathrm{Dom}\,(f)$; altrimenti (cioè altrove), è strettamente concava.

Per disegnare il grafico di $f(x + 2\sqrt{2}) - m$, dobbiamo traslare verso il basso il grafico di f in modo tale che il valore del minimo locale sia zero, e traslarlo poi a *sinistra* di $2\sqrt{2}$; quindi il minimo locale ora è in zero e la funzione vale ivi zero. L'asintoto obliquo diventa $y = x - m + 2\sqrt{2} = x - \log(3+2\sqrt{2})$ e i due verticali $x = 2 - 2\sqrt{2}$ e $x = -2 - 2\sqrt{2}$.





Esercizio 2) Calcolate il limite per $n \to +\infty$ delle successioni (**3 p. ciascuno**)

$$a_n = n!\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n}\Big), \qquad b_n = \frac{\log(1 + 1/n)}{\cos(1/n) - 1}.$$

SOLUZIONE: Calcoliamo, raccogliendo l'infinito più veloce, 2^n, al numeratore nel secondo passaggio e semplificando:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - n^2}{2^n \cdot n^2} = \frac{1 - n^2/2^n}{n^2}.$$

Quindi

$$a_n = \frac{n!}{n^2}\Big(1 - \frac{n^2}{2^n}\Big).$$

Dalla gerarchia degli infiniti, il primo fattore tende a $+\infty$, mentre il secondo fattore tende a 1. Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Per b_n usiamo i limiti notevoli:

$$b_n = \frac{\log(1+1/n)}{1/n} \cdot \frac{1/n}{1/n^2} \cdot \frac{(1/n)^2}{\cos(1/n)-1} = \frac{\log(1+1/n)}{1/n} \cdot n \cdot \frac{(1/n)^2}{\cos(1/n)-1};$$

il primo fattore tende ad uno, il secondo diverge mentre il terzo tende a $-1/2$. Quindi $b_n \to -\infty$.

Esercizio 3) Calcolate i seguenti integrali (**7+4 p.**)

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+2x+3}\, dx, \qquad\qquad 3\int \sin x \cos(2x)\, dx.$$

SOLUZIONE: Per il primo, abbassiamo il grado al numeratore:

$$\frac{x^2+x}{x^2+2x+3} = 1 + \frac{x^2+x}{x^2+2x+3} - 1 = 1 - \frac{x+3}{x^2+2x+3}$$

Quindi

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+2x+3}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\, dx$$

Ora facciamo apparire al numeratore la derivata del polinomio al denominatore:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{2}{x^2+2x+3}$$

Abbiamo dunque

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+2x+3}\, dx = x - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx.$$

Dato che il discriminante del denominatore è negativo, dobbiamo ricondurci all'arcotangente, cioè dobbiamo scrivere

$$x^2+2x+3 = (x-x_0)^2 + d;$$

si vede, in uno dei due modi visti in aula, che $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$. Quindi

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{[(x+1)/\sqrt{2}]^2+1}\, dx$$

e questo porta a

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c;$$

infine, riassemblando tutti i pezzi,

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+2x+3}\, dx = x - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

Per il secondo, integriamo per parti con $f(x) = \cos(2x), g'(x) = \sin x$ (quindi $f'(x) = -2\sin(2x), g(x) = -\cos x$)

$$3\int \sin x \cos(2x)\, dx = -3\cos x\cos(2x) - 6\int \cos x \sin(2x)\, dx.$$

Integriamo nuovamente per parti con $f(x) = \sin(2x), g'(x) = \cos x$ ($f'(x) = 2\cos(2x)$, $g(x) = \sin x$), per ottenere

$$\int \cos x \sin(2x)\, dx = \sin x \sin(2x) - 2\int \sin x \cos(2x)\, dx.$$

Unendo le due uguaglianze abbiamo

$$3\int \sin x\cos(2x)\,dx = -3\cos x\cos(2x) - 6\sin x\sin(2x) + 12\int \sin x\cos(2x)\,dx.$$

da cui

$$-9\int \sin x\cos(2x)\,dx = -3\cos x\cos(2x) - 6\sin x\sin(2x) + c;$$

quindi, dividendo per -3,

$$3\int \sin x\cos(2x)\,dx = \cos x\cos(2x) + 2\sin x\sin(2x) + c.$$

Un altro metodo è il seguente: dato che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$,

$$\begin{aligned} 3\int \sin x\cos(2x)\,dx &= 6\int \sin x\cos^2(x)\,dx - 3\int \sin x\,dx \\ &= -2\cos^3(x) + 3\cos x + c. \end{aligned}$$

Un veloce calcolo mostra che i due risultati, chiaramente, coincidono.