Esercizio Calcolare dimensione e base dei seguenti sottospazi giustificando le risposte.

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 = 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

- È un ssv perchè spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo
  - $x + y \in W_1$ se $x, y \in W_1$
  - $ax \in W_1$ se $a \in \mathbb{R}, x \in W_1$ (controllare)
- dim spazio soluzioni?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad r = \text{rango} = 2$$

$$n = 4 \Rightarrow \dim W_1 = 4 - 2 = 2$$

$\Rightarrow$ Servono due vettori lin. indip. per fare una base. Soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ t \\ s-t \end{pmatrix} = 0 + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_2 = s$

$x_3 = t$

$W_2 = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Controllo ssv.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Come faccio a vedere quanti sono i vettori lin. indip? Guardo il rango della matrice di cui sono i vett. colonne

$$\Big\downarrow \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_1 \leftrightarrow R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_2 + 5R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim = 2$$

$\Rightarrow$ due vettori <u>lin. indip</u> sono una base (non multipli!)

7.3 Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ i seg. si st. sono compatibili

1) $\begin{cases} x_1 - tx_2 + tx_3 = 1 \\ x_1 - tx_2 = 0 \\ -x_1 + (t+3)x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & t & 1 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 & 1 \end{array}\right) = (A|b)$$

2) $\begin{cases} x_1 + tx_2 = 0 \\ x_1 + (t+1)x_2 + x_3 = 1 \\ tx_1 + 2x_2 + (t+2)x_3 = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & t+1 & 1 & 1 \\ t & 2 & t+2 & 2 \end{array}\right)$$

1) Rng A ; Rng(A|b) ← Oggetti da comparare

$$\det A = t \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -1 & t+3 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$
$$= 3t = 0 \text{ iff } t = 0$$

$\Rightarrow t \neq 0$ la matrice è inv. e il sistema compatibile.

$$A_{t=0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Rango A = 2
Rango (A|b) = 3
$\Rightarrow$ non compatibile.

$\boxed{2}$ $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & t+1 & 1 & 1 \\ t & 2 & t+2 & 2 \end{array}\right)$

$$\det A = -1 \det \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 2 \end{pmatrix} + (t+2) \det \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot [2+t^2] + [t+2][\underbrace{t+1+t}_{2t+1}] =$$

$$= \cancel{-2} \cancel{-t^2} \cancel{+t^2} + 2t + t \cancel{+2} + t^2 + 2t$$

$$= t^2 + 5t = t(t+5) = 0 \qquad \begin{array}{l} t=0 \\ t=-5 \end{array}$$

$$A_{t=0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Rango $A = 2$

Rango$(A|b) = 2$

$\Rightarrow$ sistema è comp.

$$A_{t=-5} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Rango $A = 2$

Rango $A|b = 3$

$\Rightarrow$ Sistema non compatibile.

Es 7.4 Sia $(A|b)$ sistema lin, $A \neq 0$.

Vero o falso

- Un sistema omogeneo è sempre compatibile V
- Un sistema omogeneo 4 eq. e 12 incognite ammette sempre soluzioni che dipendono da almeno 8 param. V

$\dim$ spazio soluz. $= n - r \geq n - \#eq = 12 - 4$.

- Un s.o. 4 eq. 12 inc. ammette sempre sol. che dip. da esattamente 8 par F
- Un sistema di 2 eq. 4 incognite ammette sempre soluz. e dip. da almeno due param F

$\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}$

- Un sist omog V
- Un s.o. di 4 eq. e 2 incognite ammette sempre sol. e dipendono esattamente da due par. F

RETTE E PIANI CAP 9

Picchi es. 9.

Eq. param. vett. per il piano $x+2y+z=1$

$$x = t$$
$$y = s$$
$$z = 1 - t - 2s$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1-t-2s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

8.9 Determinare eq. cartesiane per $\mathcal{L}(w_1, w_2)$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(w_1, w_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \\ -s \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

8.7 Sia $A_{n\times n}$ non sing, v_1, v_2 lin. indip.

Mostrare che Av_1, Av_2 sono lin. indip.

- Oss. $Av_1, Av_2 \in \mathbb{R}^n$.

$\cancel{B}$ $aAv_1 + bAv_2 = 0 \iff$

$A(av_1) + A(bv_2) = 0$

$\iff A[\underbrace{av_1 + bv_2}_{=0}] = 0 \iff$

(perché A è inv.

$\Rightarrow$ il sistema omogeneo

ha una soluz. unica)

8.8. $B = (v_1 — v_n)$ base ortonormale

v, w t.c. $[v]_B = (x_1 — x_n)^T$

$[w]_B = (y_1 — y_n)^T$

Mostrare

$\Rightarrow \langle v, v_J \rangle = x_J$

$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 x_2 + — + x_n y_n$

Es α piano di eq. $x-y+3=0$

A Una retta che sta su α (in eq. cart) è

B Un piano $\gamma \perp$ ad α e passante per $(1,1,1)$

C Il punto $(2,-1,0) \in \alpha$? C) NO: $2-(-1)+3 \neq 0$

A) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+z=2 \end{cases}$

B) $n_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad n_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma: z=d$

$z=1$

Esercizio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} t \\ s \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Es $v_1\, v_2\, v_3 \in \mathbb{R}^3$ $\quad v_1, v_2$ lin. indip

- v_1, v_2, v_3 sono una base F
- $v_1\, v_2\, v_3$ sono lin. dip. F
- non si può dire nulla su dip. o indip V
- v_1, v_2, v_3 sono lin. indip F

Es Considera il sistema
$$\begin{cases} x+2y+z+w=0 \\ x-y-z+w=0 \end{cases}$$

- Ha due sol. (in $\mathbb{R}^4$)
- Ha una sol.
- Ha ∞ sol.
- Ha $(2,0,0,2)$ come sol.

8.4 ~~[illegible]~~

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre lin. dip F
- 6 in $\mathbb{R}^4$ " " ✓
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ lin. indip. F

8.5 Decidere se i seg. insiemi di vettori sono lin. dip, se sì, scrivere uno in termini degli altri

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \det = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-5) + 4 + 2 = -9 \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \det = 1 \cdot 1 - 0 \left| \quad \right| + 1 \cdot (-1) = 0$$

Osservare che ho uno spazio a un parametro di soluzioni

$$\left(\begin{array}{l} a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \ \text{iff} \\ \lambda(\qquad\qquad) = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \qquad b = a = -c$$

$$(v_1 + v_2 - v_3 = 0 \implies$$

$$\implies v_3 = v_1 + v_2$$

8.2 Mostrare $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

sono una base.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\det = -1 \cdot 2 \cdot 8$ (Δ)

$= -16 \Rightarrow$ lin. indip $\Rightarrow$ base

$\Leftrightarrow$ il sistema $(A \mid b)$ ha una sol. unica per ogni b.

Attenzione: anche se $\det A = 0$ per alcuni b ha sol.

- Esprimere le coord di $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base

$\left(\quad \middle| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right)$

$$-a + 4b + 5c = x_1$$
$$2b - 3c = x_2$$
$$8c = x_3$$

$\Rightarrow c = \frac{x_3}{8}$ $\quad b = x_2 + \frac{3x_3}{8} \cdot 2 = x_2 + \frac{3}{4} x_3$

$$a = 4\left(x_2 + \frac{3x_3}{4}\right) + \frac{5}{8} x_3 - x_1$$