Formule parametriche

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(x) &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}\right\} \text{dove } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Integrali di funzioni razionali

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \qquad \text{es: } \int \frac{3+4x^3}{2x^2+3x-1}\,dx \text{ o } \int \frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\,dx \text{ o } \int \frac{x+1}{x^2+4x+1}\,dx$$

Caso 1) $N(x)$ grado $>$ o $=$ di $D(x)$

- applicare divisione polinomiale

$$N(x) = Q(x)\,D(x) + R(x)$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx \rightarrow \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

esempio: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$ $\qquad Q(x) = x-1$

$R(x) = 2$

quindi $\displaystyle\int x\,dx - \int 1\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x+1| + c$

Caso 2) $N(x)$ grado $<$ di $D(x)$

2.A) $\displaystyle\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ con $\deg(N) = 0$, $\deg(D) = 1$

2.B) $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ con $\begin{cases} \deg(N)=0, \ \deg(D)=2 \\ \text{oppure} \\ \deg(N)=1, \ \deg(D)=2 \end{cases}$ e $\Delta(D)<0$

2.C) tutti gli altri casi per cui $\deg(N) < \deg(D)$

$\Downarrow$ quindi:

2.A) $\int \frac{A}{Bx+C}\,dx$ primitiva logaritmica, int fondamentale.

2.B) $\begin{cases} \int \frac{A}{Bx^2+Cx+D}\,dx \\ \int \frac{Ax+E}{Bx^2+Cx+D}\,dx \end{cases}$ con $\Delta(D)<0$ $\quad \Delta$ negativo

k costante

$$\frac{2k \cdot \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)}{\sqrt{-\Delta}} + C$$

Se $N(x)$ 1° grado

$\downarrow$

$\ln + \arctan$ $\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} + \int \frac{k}{ax^2+bx+c}$

2.C) Casi $\deg(N) \geq \deg(D)$ integrazione fratti semplici

$\rightarrow$ esprimere la funzione integranda come somma di funzioni razionali fratte i cui integrali sono noti

$x-a_i \qquad \frac{A_i}{x-a_i}$

$(x-a_i)^n \qquad \frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,n}}{(x-a_i)^n}$

$x^2+a_ix+b_i \qquad \frac{A_ix+B_i}{x^2+a_ix+b_i}$ con $\Delta<0$

$(x^2+a_ix+b_i)^n \qquad \frac{A_{i1}x+B_{i1}}{x^2+a_ix+b_i} + \frac{A_{i2}x+B_{i2}}{(x^2+a_ix+b_i)^2} + \frac{A_{in}x+B_{in}}{(x^2+a_ix+b_i)^n} \qquad \Delta<0$

Principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A=0 \\ -B=1 \end{cases}$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx \qquad deg(N)=0 \quad deg(D)=3$$

$x^3-x^2=x^2(x-1)$ fattorizzo il denominatore

a x^2 associo $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$

a $x-1$ associo $\frac{C}{x-1}$

determinare le costanti di modo che:

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{(A+C)x^2+(B-A)x-B}{x^2(x-1)}$$

Semplifico denom, ottengo uguaglianza:

$$(A+C)x^2+(B-A)x-B=1$$

risolvendo il sistema (principio identità polinomi) ottengo:

$A=-1 \qquad B=-1 \qquad C=1$

quindi $\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$

calcolo l'integrale $\int\left(-\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x-1}\right)dx=$

$$-\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-1|+c$$

Proprietà integrali

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad c \in [a,b]$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b [c\,f(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad c \in \mathbb{R}$

Linearità
- $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$