МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра автоматизованих систем управління

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з дисципліни

«Дослідження операцій»

Виконав: студент групи ОІ-11сп

Вальчевський Павло

Варіант № 3

Прийняв: асистент кафедри АСУ

Зварич В. І.

Львів, 2024

Завдання 1. Одновимірна оптимізація.

Знайти мінімальне / максимальне значення функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$. Точку x^* визначити з точністю $\varepsilon = 0.01$. Розрахунки зробити вручну двома методами, вказати кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності. Зробити висновок про ефективність методів. Варіанти завдань наведено в таблиці.

Варіант індивідуального завдання № 3

Таблиця 1 Умова завдання № 1.

Функція	**Інтервал**	$\boldsymbol{f_{min}/f_{max}}$	**Метод**
$f(x) = 1 + x - 2.5x^2 + 0.25x^4$	[0; 1]	f_{max}	Ньютона-Рафсона Ділення інтервалу наполовину

Метод Ньютона-Рафсона

Нехай $a = 0, b = 1$.

Перевірка на збіжність:

$$f(a)' \leq L_1, \text{де } L_1 = |f(a)''| \rightarrow 1 \leq 5$$

$$f(b)' \leq L_2, \text{де } L_2 = |f(b)''| \rightarrow -5 \leq 2$$

Отже, перевірка на збіжність успішна. Записую ітераційні формули:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)'}{f(x_n)''}$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$ – загальна ітераційна формула

$|f(x_n)'| \leq \varepsilon -$ умова завершення циклу ітерацій

Ітерація № 1:

$x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)'}{f(x_0)''} = 0 - \frac{1}{-5} = 0.2 \rightarrow f(x_0)' > \varepsilon$$

Ітерація № 2:

$x_1 = 0.2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)'}{f(x_2)''} = 0 - \frac{0{,}008}{-4.88} = 0.2016 \rightarrow f(x_1)' \leq \varepsilon$$

$x^* = x_2 = 0.2016 \rightarrow f(x^*) = 1.1004$

Висновок:

Для цього методу було використано всього 2 ітерації, що показало, що цей метод дуже ефективний для даної функції у пошуку максимуму на заданому відрізку і точністю.

Метод ділення інтервалу наполовину

Нехай $a = 0, b = 1$.

Записую ітераційні формули:

$x_n = \frac{a+b}{2}$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$ – загальна ітераційна формула

$L = b - a$ – параметр для обрахунку меж й виходу з циклу

$|L| \leq \varepsilon$ – умова завершення циклу ітерацій

$x_1 = x_n - \frac{L}{4}$ – обрахунок лівої межі

$x_2 = x_n + \frac{L}{4}$ – обрахунок правої межі

$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2), \text{тоді } a = x_1 \\ f(x_1) > f(x_2), \text{тоді } b = x_2 \end{cases}$ – умови для задання нових меж (параметрів a, b)

Ітерація № 1:

$n = 1$

$a = 0$

$b = 1$

$L = b - a = 1 - 0 = 1$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.25$$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.75$

$\begin{cases} f(x_1) = 1.0947 \\ f(x_2) = 0.4228 \end{cases} \to f(x_1) > f(x_2) \to b = x_2$

Ітерація № 2:

$n = 2$

$a = 0$

$b = 0.75$

$L = b - a = 0.75$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.75}{2} = 0.375$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.1875$$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.5625$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.09991 \\ f(x_2) = 0.79651 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow b = x_2$$

Ітерація № 3:

$n = 3$

$a = 0$

$b = 0.5625$

$L = b - a = 0.5625$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.5625}{2} = 0.28125$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.140625$$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.421875$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.091284 \\ f(x_2) = 0.984847 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow b = x_2$$

Ітерація № 4:

$n = 4$

$a = 0$

$b = 0.421875$

$L = b - a = 0.421875$

$|L| \geq \varepsilon$

$x_n = \dfrac{a+b}{2} = 0.2109375$

$x_1 = x_n - \dfrac{L}{4} = 0.10546875$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.31640625$

$\begin{cases} f(x_1) = 1.0776905 \\ f(x_2) = 1.068629 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > \ f(x_2) \rightarrow \ b = \ x_2$

Ітерація № 5:

$n = 5$

$a = 0$

$b = 0.31640625$

$L = b - a = 0.31640625$

$|L| \geq \varepsilon$

$x_n = \dfrac{a+b}{2} = 0.158203125$

$x_1 = x_n - \dfrac{L}{4} = 0.0791015625$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.2373046875$

$\begin{cases} f(x_1) = 1.06346 \\ f(x_2) = 1.097313 \end{cases} \rightarrow f(x_1) \leq \ f(x_2) \rightarrow \ a = \ x_1$

Ітерація № 6:

$n = 6$

$a = 0.0791015625$

$b = 0.31640625$

$L = b - a = 0.2373046875$

$|L| \geq \varepsilon$

$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.19775390625$

$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.138427734375$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.257080078125$

$\begin{cases} f(x_1) = 1.090613 \\ f(x_2) = 1.09294 \end{cases} \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow a = x_1$

Ітерація № 7:

$n = 7$

$a = 0.138427734375$

$b = 0.31640625$

$L = b - a = 0.177978515625$

$|L| \geq \varepsilon$

$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.2274169921875$

$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.18292236328125$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.27191162109375$

$\begin{cases} f(x_1) = 1.09955 \\ f(x_2) = 1.0884 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow b = x_2$

Ітерація № 8:

$n = 8$

$a = 0.138427734375$

$b = 0.27191162109375$

$L = b - a = 0.13348388671875$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.205169677734375$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.1717987060546875$$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.2385406494140625$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.0982 \\ f(x_2) = 1.097 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow b = x_2$$

Ітерація № 9:

$n = 9$

$a = 0.138427734375$

$b = 0.2385406494140625$

$L = b - a = 0.100113$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.18848419189453125$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.16345596313476562$$

$$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.21351242065429688$$

$$\begin{cases} f(x_1)4 = 1.0968 \\ f(x_2) = 1.10006 \end{cases} \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow a = x_1$$

Ітерація № 10:

$n = 10$

$a = 0.16345596313476562$

$b = 0.2385406494140625$

$L = b - a = 0.075084$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.2009983$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.18222713470458984$$

$$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.21976947784423828$$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.09948 \\ f(x_2) = 1.0996 \end{cases} \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow a = x_1$$

Ітерація № 11:

$n = 11$

$a = 0.18222713470458984$

$b = 0.2385406494140625$

$L = b - a = 0.0563135$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.21038389$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.196305513381958$$

$$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.22446227073669434$$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.100337 \\ f(x_2) = 1.09913861 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow b = x_2$$

Ітерація № 12:

$n = 12$

$a = 0.18222713470458984$

$b = 0.22446227073669434$

$L = b - a = 0.042235$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.2033447$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.1927859187$$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4}$ =0.21390348672

$\begin{cases} f(x_1) = 1.100215 \\ f(x_2) = 1.10004 \end{cases} \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow \ b = \ x_2$

Ітерація № 13:

$n = 13$

$a = 0.18222713470458984$

$b = 0.21390348672$

$L = b - a = 0.031676352024$

$|L| \geq \varepsilon$

$x_n = \dfrac{a + b}{2} = 0.19806531071$

$x_1 = x_n - \dfrac{L}{4} = 0.1901462227$

$x_2 = x_n + \dfrac{L}{4} = 0.205984398722$

$\begin{cases} f(x_1) = 1.100084 \\ f(x_2) = 1.10036 \end{cases} \rightarrow f(x_1) \leq \ f(x_2) \rightarrow \ a = \ x_1$

Ітерація № 14:

$n = 14$

$a = 0.1901462227$

$b = 0.21390348672$

$L = b - a = 0.023757264$

$|L| \geq \varepsilon$

$x_n = \dfrac{a + b}{2} = 0.2020248547$

$x_1 = x_n - \dfrac{L}{4} = 0.196085538$

$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.20796417$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.100331 \\ f(x_2) = 1.1003 \end{cases} \to f(x_1) > f(x_2) \to b = x_2$$

Ітерація № 15:

$n = 15$

$a = 0.1901462227$

$b = 0.20796417$

$L = b - a = 0.017818$

$|L| \geq \varepsilon$

$$x_n = \frac{a+b}{2} = 0.199055196$$

$$x_1 = x_n - \frac{L}{4} = 0.1946007098$$

$$x_2 = x_n + \frac{L}{4} = 0.203509683$$

$$\begin{cases} f(x_1) = 1.10028564 \\ f(x_2) = 1.100398 \end{cases} \to f(x_1) \leq f(x_2) \to a = x_1$$

$x^* = x_n = x_{15} = 0.199055196 \to f(x^*) = 1.10026$ – обраховано x^*, через максимальну кількість ітерацій.

Висновки:

Для цього методу було використано 15 ітерації (максимальної кількості ітерацій), що показало, що цей метод не ефективний для даної функції у пошуку максимуму на заданому відрізку і точністю. Точність упродовж кожної ітерації зменшувалась, тобто, максимум можна буде досягнути через кілька подальших ітерацій

Завдання 2. Лінійне програмування.

- Сформувати таблицю вхідних даних задачі відповідно до варіанту (різні задачі для парних і непарних варіантів);
- Побудувати математичну модель задачі з поясненням змінних, обмежень і цільової функції;
- Привести математичну модель задачі ЛП до канонічної форми;
- *Знайти рішення задачі: вручну, або з використанням Excel – пошук рішення, або з використанням MathCAD, або скласти власну програму.
- Вихідні дані для задачі подано у таблиці варіантів.

Варіант індивідуального завдання № 3

Завдання для <u>непарних</u> варіантів.

Є n типів спеціалізованих автомобілів для перевезення поштових відправлень. Необхідно за певним маршутом перевезти m видів поштових відправлень (контейнери, посилки, мішки). Відомі наступні величини:

$b_i(i=\overline{1,m})-$ кількість поштових відправлень і-го виду, які необхідно перевезти;

$a_{ij}(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})-$ міткість поштових відправлень і-го виду, за один рейс j-го типу;

$c_j(j=\overline{1,n})-$ витрати на один рейс автомобіля j-го типу;

Потрібно скласти такий план перевезення поштових відправлень, щоб при їхньому перевозі витрати були мінімальні.

Таблиця 2 Вхідні дані задачі для варіанту № 3.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
10	11	16	10	12	19	15	13	9
b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3			
380	280	370	20	9	14			

Таблиця вхідних даних відповідно до варіанту № 3

Таблиця 3 Вхідні дані.

Поштові відправлення i-го виду	**Тип спеціалізованого авто j-го типу**			**Кількість необхідних відправлень i-го виду**
	j1	*j2*	*j3*	
i1	10	11	16	380
i2	10	12	19	280
i3	15	13	9	370
Витрати за один рейс j-го типу	20	9	14	

Математична модель задачі ЛП

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) = 20x_1 + 9x_2 + 14x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 11x_2 + 16x_3 \geq 380 \\ 10x_1 + 12x_2 + 19x_3 \geq 280 \\ 15x_1 + 13x_2 + 9x_3 \geq 370 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

$b_i(i = \overline{1,m}) -$ кількість поштових відправлень i-го виду, які необхідно перевезти (вільні коефіцієнти);

$a_{ij}(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) -$ міткість поштових відправлень i-го виду, за один рейс j-го типу (коефіцієнти матриці);

$c_j(j = \overline{1,n}) -$ витрати на один рейс автомобіля j-го типу (коефіцієнти цільової функції);

$x_j(j = \overline{1,n}) -$план перевезення на один рейс автомобіля j-го типу (шукані змінні);

Канонічна модель задачі ЛП

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) = 20x_1 + 9x_2 + 14x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 11x_2 + 16x_3 = 380 \\ 10x_1 + 12x_2 + 19x_3 = 280 \\ 15x_1 + 13x_2 + 9x_3 = 370 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

Знаходження рішення задачі

Рішення задачі буду шукати за допомогою Excel (пошуку рішення):

1. Вмикаю інструмент Пошук рішення:
   1.1. Заходжу в Excel;
   1.2. Переходжу на вкладку Файл;
   1.3. Натискаю на бічний пункт меню Налаштування;
   1.4. Активізується вікно Налаштувань, де обираю вкладку Надбудови та перейшов на цю вкладку шукаю Пошук рішень. Після знаходження, виділяю шуканий пункт та натискаю на кнопку Далі.
   1.5. Активізується вікно, де ставлю галочку навпроти Пошук рішення та натискаю на кнопку ОК.
   1.6. Усе Пошук рішення додано до Excel, цей інструмент знаходиться на вкладці Дані, у розділі інструментів Аналіз.
2. Будую таблицю вхідних даних (вигляд аналогічний, як у таблиці, що розміщена зверху);
3. Будую під таблицею вхідних даних, у вільних комірка, нову таблицю план перевезень (шукані змінні). На даний момент значення пусті, я їх продемонструю в кінці:

Таблиця 4 План перевезення.

План перевезення	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$

4. Будую нову допоміжну таблицю на основі таблиць вхідних даних і плану перевезень та прописую формули для кожного варіанту (коефіцієнт матриці a_{ij} множиться на відповідний план перевезення x_j) і після цього прописую формулу для знаходження суми i-го рядка, щоб в результаті, коли інструмент Пошук рішень виконає свою роботу, переглянути кількість витрати (на разі ця таблиця пуста і я її продемонструю вкінці):

Таблиця 5 Допоміжня таблиця.

Міткість поштових відправлень i-го виду	**Тип спеціалізованого авто j-го типу**			**Витрати**	**Кількість необхідних відправлень i-го виду**
	J1	**J2**	**J3**		
I1					380
I2					280
I3					370

5. Далі використовую Пошук рішення та задаю такі параметри:

5.1. Обираю клітинку для визначення результату;
5.2. Обираю пошук мінімуму;
5.3. Обираю ряд змінних (дані у таблиці план перевезення);
5.4. Задаю умови:
   5.4.1. Ряд змінних (дані у таблиці план перевезення) мають бути цілими числами;
   5.4.2. У допоміжній таблиці, комірки стовпця Витрати мають бути більшими за відповідну комірку у стовпці Кількість необхідних відправлень і-го виду;
5.5. Ставлю галочку, щоб ряд змінних були невід'ємними;
5.6. Обираю метод вирішення – Симплекс метод;

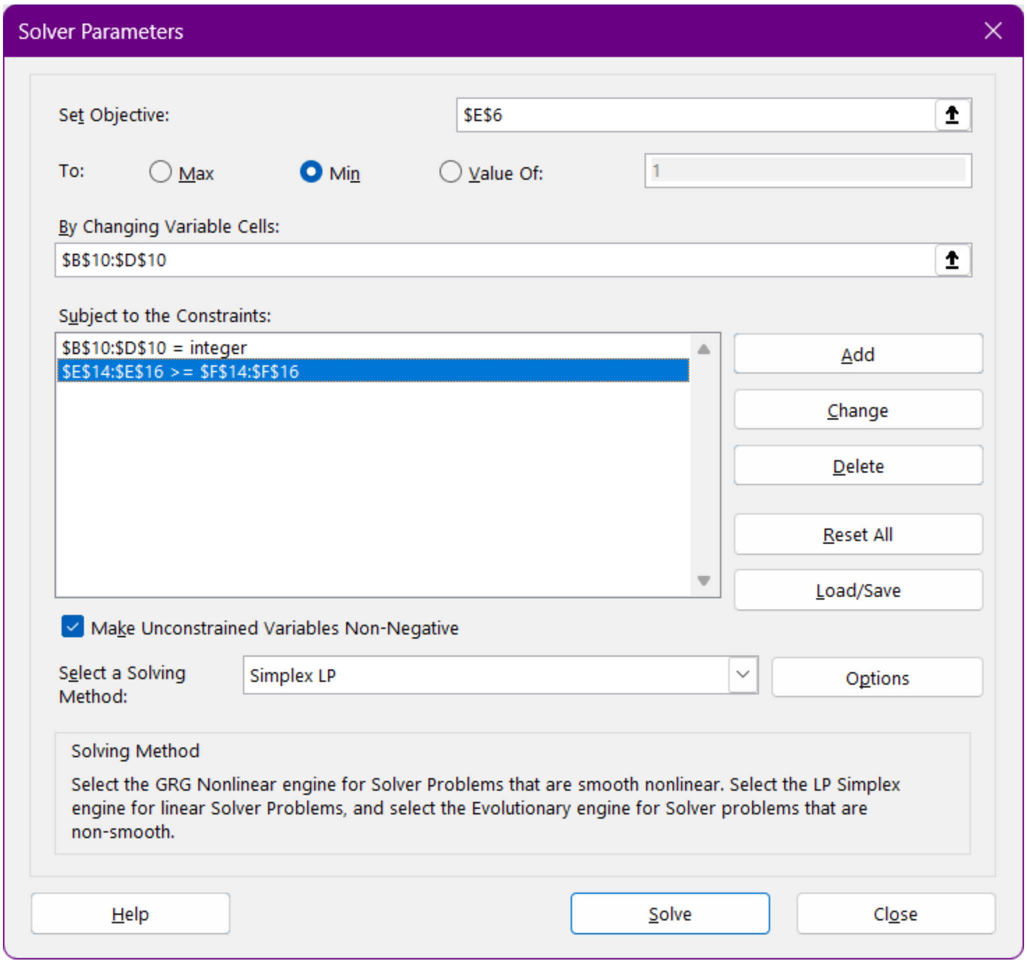

Рис. 1 Вікно налаштування Пошук рішення для мого завдання.

6. Отже, після роботи інструменту Пошуку рішення було знайдено оптимальний план перевезення. Тепер, щоб порахувати значення цільової функції (мінімальні витрати), прописую формулу – коефіцієнт цільової функції (витрати на один рейс c_j) множиться на відповідний план перевезення (x_j). Результат був записаний у єдину вільну комірку у таблиці вхідних даних.

7. Підсумовуючи роботу, було знайдено план перевезень: $x_1 = 0, x_2 = 35, x_3 = 0$ та мінімальне значення витрат усіх перевезень: 315.

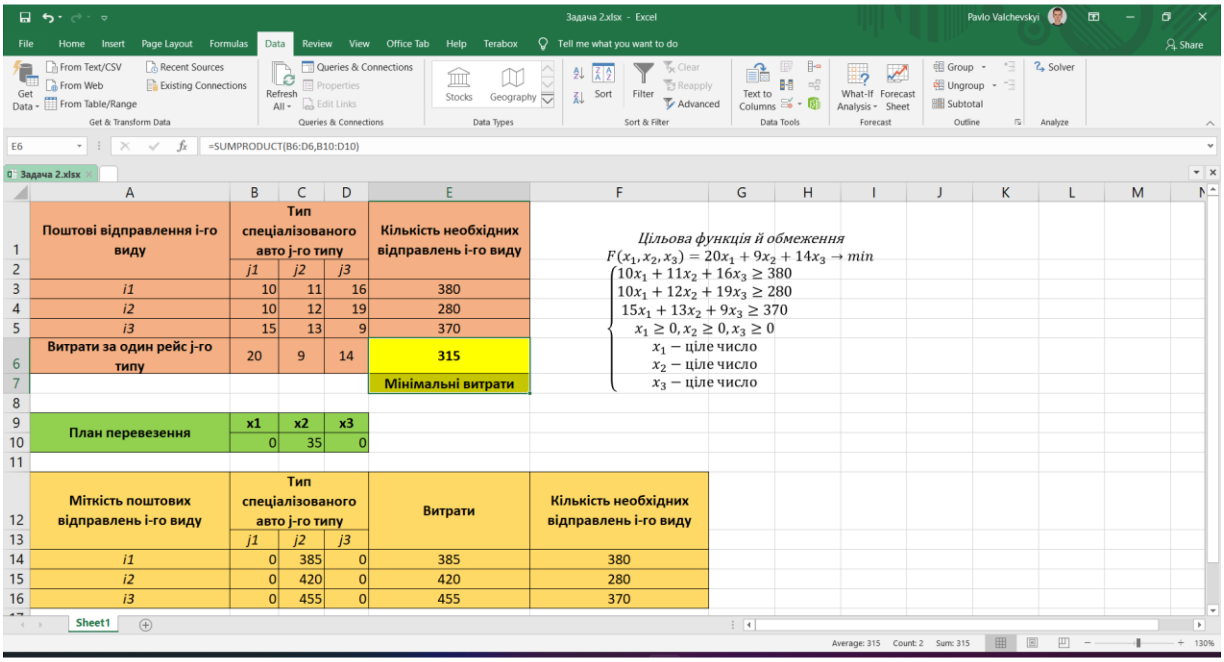

Рис. 2 Вікно Excel після виконання мого завдання.

Висновки

У цьому завданні було знайдено оптимальний план перевезень. Спершу було сформовано таблицю вхідних даних для мого варіанту завдання. Далі було записано математичну та канонічні форми задачі ЛП. Після цього було знайдено рішення задачі за допомогою Excel (Пошук рішення).

Завдання 3. Багатопараметрична оптимізація.

Розв’язати задачу багатопараметричної оптимізації вказаним методом прямого пошуку. Цільова функція – це функція двох змінних, тип екстремуму вказано у варіанті (мінімум/максимум). Зробити висновок про ефективність методу. Варіанти завдань наведено в таблиці.

Варіант індивідуального завдання № 3

Таблиця 6 Умова завдання № 3.

Функція	**Метод**
$f(x) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$	Знайти мінімум методом Хука-Джівса

Для виконання завдання я взяв крок $h = 2$ та початкову точку (0; 0). Значення кожного x і y обираємо по найменшому значенню через приріст аргументу функції. Умова завершення циклу ітерацій буде той випадок, коли значення у певній точці піде знизу до верху (для мінімуму). Також, якщо точка не змінюється потрібно буде зменшити крок h (можна зменшити у n-разів) і якщо буде ситуація, коли крок стане дуже малим, то ми можемо завершити цикл ітерацій.

Метод Хука-Джівса

Ітерація №1:

Початкова точка: (0; 0)

$$f(0;\ 0) = 0.0$$

$$h = 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(0 + 2;\ 0) = -8$$

$$f(0 - 2;\ 0) = 16.$$

Вибираємо: x = 2

Проходимось по змінній y:

$$f(2;\ 0 + 2) = -8$$

$$f(2;\ 0 - 2) = 24$$

Вибираємо: y = 2

Наступна точка: (2; 2)

Ітерація №2:

Точка: (2; 2)

$$f(2;\ 2)\ =\ 0$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(2\ +\ 2;\ 2)\ =\ 16$$

$$f(2\ -\ 2;\ 2)\ =\ -8$$

Вибираємо: x = 0

Проходимось по змінній y:

$$f(0;\ 2\ +\ 2)\ =\ 0$$

$$f(0;\ 2\ -\ 2)\ =\ 0$$

Вибираємо: y = 4

Наступна точка: (0; 4)

Ітерація №3:

Точка: (0; 4)

$$f(0;\ 4) =\ 0$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(0\ +\ 2;\ 4)\ =\ 24$$

$$f(0\ -\ 2;\ 4)\ =\ -16$$

Вибираємо: x = -2

Проходимось по змінній y:

$$f(-2;\ 4\ +\ 2)\ =\ -8$$

$$f(-2;\ 4\ -\ 2)\ =\ -8$$

Вибираємо: y = 6

Наступна точка: (-2; 6)

Ітерація №4:

Точка: (-2; 6)

$$f(-2;\ 6) = -8$$

$$h\ =\ 2.0$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-2 +\ 2;\ 6)\ =\ 24$$

$$f(-2\ -\ 2;\ 6)\ =\ -32$$

Вибираємо: x = -4

Проходимось по змінній y:

$$f(-4;\ 6\ +\ 2)\ =\ -24$$

$$f(-4;\ 6\ -\ 2)\ =\ -24$$

Вибираємо: y = 8

Наступна точка: (-4; 8)

Ітерація №5:

Точка: (-4; 8)

$$f(-4;\ 8) = -24$$

$$h\ =\ 2.0$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-4 +\ 2;\ 8)\ =\ 16$$

$$f(-4\ -\ 2;\ 8)\ =\ -56$$

Вибираємо: x = -6

Проходимось по змінній y:

$$f(-6;\ 8\ +\ 2)\ =\ -54$$

$$f(-6;\ 8\ -\ 2)\ =\ -48$$

Вибираємо: y = 10

Наступна точка: (-6; 10)

Ітерація №6:

Точка: (-6; 10)

$$f(-6;\ 10)\ =\ -48$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-6 + 2; 10) = 0$$

$$f(-6 - 2; 10) = -88$$

Вибираємо: x = -8

Проходимось по змінній y:

$$f(-8; 10 + 2) = -80$$

$$f(-8; 10 - 2) = -80$$

Вибираємо: y = 12

Наступна точка: (8; 12)

Ітерація №7:

Точка: (-8; 12)

$$f(-8; 12) = -80$$

$$h = 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-8 + 2; 12) = -24$$

$$f(-8 - 2; 12) = -128$$

Вибираємо: x = -10

Проходимось по змінній y:

$$f(-10; 12 + 2) = -120$$

$$f(-10; 12 - 2) = -120$$

Вибираємо: y = 14

Наступна точка: (-10; 14)

Ітерація №8:

Точка: (-10; 14)

$$f(-10; 14) = -120$$

$$h = 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-10 + 2; 14) = -56$$

$$f(-10 - 2; 14) = -176$$

Вибираємо: x = -12

Проходимось по змінній y:

$$f(-12; 14 + 2) = -168$$

$$f(-12; 14 - 2) = -168$$

Вибираємо: y = 16

Наступна точка: (-12; 16)

Ітерація №9:

Точка: (-12; 16)

$$f(-12; 16) = -168$$

$$h = 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-12 + 2; 16) = -96$$

$$f(-12 - 2; 16) = -232$$

Вибираємо: x = -14

Проходимось по змінній y:

$$f(-14; 16 + 2) = -224$$

$$f(-14; 16 - 2) = -224$$

Вибираємо: y = 18

Наступна точка: (-14; 18)

Ітерація №10:

Точка: (-14; 18)

$$f(-14; 18) = -224$$

$$h = 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-14 + 2; 18) = -144$$

$$f(-14 - 2; 18) = -296$$

Вибираємо: x = -16

Проходимось по змінній y:

$$f(-16;\ 18\ +\ 2)\ =\ -288$$

$$f(-16;\ 18\ -\ 2)\ =\ -288$$

Вибираємо: y = 20

Наступна точка: (-16; 20)

Ітерація №11:

Точка: (-16; 20)

$$f(-16;\ 20)\ =\ -288$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-16\ +\ 2.0;\ 20)\ =\ -200$$

$$f(-16\ -\ 2.0;\ 20)\ =\ -368$$

Вибираємо: x = -18

Проходимось по змінній y:

$$f(-18;\ 20\ +\ 2)\ =\ -368$$

$$f(-18;\ 20\ -\ 2)\ =\ -360$$

Вибираємо: y = 22

Наступна точка: (-18; 22)

Ітерація №12:

Точка: (-18; 22)

$$f(-18;\ 22)\ =\ -368$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-18\ +\ 2;\ 22)\ =\ -264$$

$$f(-18\ -\ 2;\ 22)\ =\ -448$$

Вибираємо: x = -20

Проходимось по змінній y:

$$f(-20;\ 22\ +\ 2)\ =\ -440$$

$$f(-20;\ 22\ -\ 2)\ =\ -440$$

Вибираємо: y = 24

Наступна точка: (-20; 24)

Ітерація №13:

Точка: (-20; 24)

$$f(-20;\ 24)\ =\ -440$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-20\ +\ 2;\ 24)\ =\ -336$$

$$f(-20\ -\ 2;\ 24)\ =\ -536$$

Вибираємо: x = -22

Проходимось по змінній y:

$$f(-22;\ 24\ +\ 2)\ =\ -528$$

$$f(-22;\ 24\ -\ 2)\ =\ -528$$

Вибираємо: y = 26

Наступна точка: (-22; 26)

Ітерація №14:

Точка: (-22; 26)

$$f(-22;\ 26)\ =\ -528$$

$$h\ =\ 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-22\ +\ 2;\ 24)\ =\ -416$$

$$f(-22\ -\ 2;\ 24)\ =\ -632$$

Вибираємо: x = -24

Проходимось по змінній y:

$$f(-24;\ 26\ +\ 2)\ =\ -624.0$$

$$f(-24;\ 26\ -\ 2)\ =\ -624.0$$

Вибираємо: y = 28

Наступна точка: (-24; 28)

Ітерація №15:

Точка: (-24; 28)

$$f(-24; 28) = -624$$

$$h = 2$$

Проходимось по змінній x:

$$f(-24 + 2; 28) = -504.0$$

$$f(-24 - 2; 28) = -736.0$$

Вибираємо: x = -26

Проходимось по змінній y:

$$f(-26; 28 + 2) = -728$$

$$f(-26; 28 - 2) = -728$$

Вибираємо: y = 30

Наступна точка: [-26; 30]

Висновки:

Було зроблено 15 ітерацій і значення функції щоразу зменшувалось, що означає, що мінімум знаходиться далі або він недосяжний. Цей метод виявився не ефективним для даної функції для пошуку мінімуму.

Завдання 4. Градієнтні методи.

Розв'язати задачу знаходження мінімуму функції, використовуючи вказаний градієнтний метод. Зробити висновок про ефективність методу. Варіанти завдань наведено в таблиці.

Варіант індивідуального завдання № 3

Таблиця 7 Умова завдання № 4.

Функція, початкова точка	Метод пошуку
$f(x) = 5x_1^2 + 2.8x_1x_2 + 4.2x_2^2, x^{(0)} = [7;\ 7.2]$	Метод Марквардта

Нехай, M = 15 – задана максимальна кількість ітерацій; ε = 0.1 (його не було в умові завданні, тому обрав на власний розсуд); $\lambda^{(0)}$ = 10000 (обрав на власний розсуд); $k\ =\ 0, x^{(0)} = [7;\ 7.2]$.

Алгоритм методу:

1. Задаємо початкові дані;
2. Задаємо $k = 0, \lambda^{(k)} -$ велике позитивне число;
3. $\nabla f(x^k)$;
4. $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon$;
    a. Якщо так – завершити обчислення;
    b. Якщо ні – перехід до 5 пункту;
5. Якщо $k \geq M$:
    a. Якщо так – завершити обчислення;
    b. Якщо ні – перехід пункту 6;
6. $s^{(k)} =\ -\left(H + \lambda^{(k)} I\right)^{-1} \nabla f(x^{(k)})$
7. $x^{(k+1)} = x^{(k)} +\ s^{(k)}$
8. Якщо $f(x^{k+1}) < f(x^k)$:
    a. $\lambda^{k+1} = \frac{1}{2}\lambda^k -$ перейти до пункту 3;
    b. $\lambda^k = 2\lambda^k$

Використовувані формули для ітерацій:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} +\ s^{(k)}$$

$$s^{(k)} =\ -\left(H + \lambda^{(k)} I\right)^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$

$$\|\nabla f(x^k)\| = \sqrt{\left(x_1^k\right)^2 + \left(x_2^k\right)^2} < \varepsilon - \text{умова для виходу}$$

Знаходимо градієнт функції за допомогою часткових похідних:

$$\nabla f(x^k) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_1 + 2.8x_2 \\ 2.8x_1 + 8.4x_2 \end{bmatrix}$$

Матриця Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix}$$

Одинична матриця:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Метод Марквардта

Ітерація 1:

$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 7.2 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^0)\| = \sqrt{7^2 + 7.2^2} = 10.0419 > \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(0)} = -\left(H + \lambda^{(0)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(0)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 10000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 7 \\ 7.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000689 \\ -0.0366 \end{bmatrix}$

$x^{(1)} = 7.0 - 0.000689; 7.2 - 0.0366 = [6.99931; 7.1633]$

$f(x^0) = 603.84$

$f(x^1) = 600.86$

Оскільки $f(x^1) < f(x^0)$, $\lambda^1 = \frac{1}{2}\lambda^0$

Ітерація 2:

$\nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 6.99931 \\ 7.1633 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^1)\| = \sqrt{6.99931^2 + 7.1633^2} = 10.01 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(1)} = -\left(H + \lambda^{(1)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(1)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 5000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 6.99931 \\ 7.1633 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0013797 \\ -0.03107547 \end{bmatrix}$

$x^{(2)} = 7.0 - 0.0013797; 7.2 - 0.03107547 = [6.9979312; 7.132324]$

$f(x^1) = 600.86$

$f(x^2) = 598.26165$

Оскільки $f(x^2) < f(x^1)$, $\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda^1$

Ітерація 3:

$\nabla f(x^2) = \begin{bmatrix} 6.9979312 \\ 7.132324 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^2)\| = 9.98$ => ε , отже продовжуємо розрахунок

$s^{(2)} = -\left(H + \lambda^{(2)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(2)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 2500 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 6.9979312 \\ 7.132324 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -0.002757294 \\ -0.027543853 \end{bmatrix}$

$x^{(3)} = [6.99517394; 7.1047804]$

$f(x^2) = 598.26165$

$f(x^3) = 595.82718$

Оскільки $f(x^3) < f(x^2)$, $\lambda^3 = \frac{1}{2}\lambda^2$

Ітерація 4:

$\nabla f(x^3) = \begin{bmatrix} 6.99517394 \\ 7.1047804 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^3)\| = 9.97$ => ε , отже продовжуємо розрахунок

$s^{(3)} = -\left(H + \lambda^{(3)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(3)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} 1250 * \begin{bmatrix} 6.99517394 \\ 7.1047804 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -0.0054925 \\ -0.026634423 \end{bmatrix}$

$x^{(4)} = [6.9896814; 7.07814602]$

$f(x^3) = 595.82718$

$f(x^4) = 593.22602$

Оскільки $f(x^4) < f(x^3)$, $\lambda^4 = \frac{1}{2}\lambda^3$

Ітерація 5:

$\nabla f(x^4) = \begin{bmatrix} 6.9896814 \\ 7.07814602 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^4)\| = 9.94 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(4)} = -\left(H + \lambda^{(4)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(4)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 625 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 6.9896814 \\ 7.07814602 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -0.010876 \\ -0.0297807 \end{bmatrix}$

$x^{(5)} = [6.978805; 7.0483652]$

$f(x^4) = 593.22602$

$f(x^5) = 589.90199$

Оскільки $f(x^5) < f(x^4)$, $\lambda^5 = \frac{1}{2}\lambda^4$

Ітерація 6:

$\nabla f(x^5) = \begin{bmatrix} 6.978805 \\ 7.0483652 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^5)\| = 9.91 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(5)} = -\left(H + \lambda^{(5)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(5)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 312.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 6.978805 \\ 7.0483652 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -0.02129415 \\ -0.0397996 \end{bmatrix}$

$x^{(6)} = [6.957511189; 7.00856564]$

$f(x^5) = 589.90199$

$f(x^6) = 584.8728$

Оскільки $f(x^6) < f(x^5)$, $\lambda^6 = \frac{1}{2}\lambda^5$

Ітерація 7:

$\nabla f(x^6) = \begin{bmatrix} 6.957511189 \\ 7.00856564 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^6)\| = 9.87 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(6)} = -\left(H + \lambda^{(6)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(6)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 156.25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$
$\begin{bmatrix} 6.957511189 \\ 7.00856564 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0408123 \\ -0.06158993 \end{bmatrix}$

$x^{(7)} = [6.9166988;\ 6.946975]$

$f(x^6) = 584.8728$

$f(x^7) = 576.43798$

Оскільки $f(x^7) < f(x^6), \lambda^7 = \frac{1}{2}\lambda^6$

Ітерація 8:

$\nabla f(x^7) = \begin{bmatrix} 6.9166988 \\ 6.946975 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^7)\| = 9.8$ => ε , отже продовжуємо розрахунок

$s^{(7)} = -\left(H + \lambda^{(7)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(7)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 78.125 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$
$\begin{bmatrix} 6.9166988 \\ 6.946975 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.075241 \\ -0.102146 \end{bmatrix}$

$x^{(8)} = [6.8414569; 6.8448295]$

$f(x^7) = 576.43798$

$f(x^8) = 561.92486$

Оскільки $f(x^8) < f(x^7), \lambda^8 = \frac{1}{2}\lambda^7$

Ітерація 9:

$\nabla f(x^8) = \begin{bmatrix} 6.8414569 \\ 6.8448295 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^8)\| = 9.677$ => ε , отже продовжуємо розрахунок

$s^{(8)} = -\left(H + \lambda^{(8)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(8)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 39.0625 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$
$\begin{bmatrix} 6.8414569 \\ 6.8448295 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1298793 \\ -0.1675899 \end{bmatrix}$

$x^{(9)} = [6.711577; 6.677239]$

$f(x^8) = 561.92486$

$f(x^9) = 537.967062$

Оскільки $f(x^9) < f(x^8), \lambda^9 = \frac{1}{2}\lambda^8$

Ітерація 10:

$\nabla f(x^9) = \begin{bmatrix} 6.711577 \\ 6.677239 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^9)\| = 9.4673$ => ε , отже продовжуємо розрахунок

$s^{(9)} = -\left(H + \lambda^{(9)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(9)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 19.53125 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$
$\begin{bmatrix} 6.711577 \\ 6.677239 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2030936 \\ -0.254988625 \end{bmatrix}$

$x^{(10)} = [6.508483943; 6.4222509]$

$f(x^9) = 537.967062$

$f(x^{10}) = 502.069636$

Оскільки $f(x^{10}) < f(x^9)$, $\lambda^{10} = \frac{1}{2}\lambda^9$

Ітерація 11:

$\nabla f(x^{10}) = \begin{bmatrix} 6.508483943 \\ 6.4222509 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^{10})\| = 9.14 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(10)} = -\left(H + \lambda^{(10)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(10)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 9.765625 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$
$\begin{bmatrix} 6.508483943 \\ 6.4222509 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2803948 \\ -0.34510889 \end{bmatrix}$

$x^{(11)} = [6.2280891; 6.07714208]$

$f(x^{10}) = 502.069636$

$f(x^{11}) = 455.0355755$

Оскільки $f(x^{11}) < f(x^{10})$, $\lambda^{11} = \frac{1}{2}\lambda^{10}$

Ітерація 12:

$\nabla f(x^{11}) = \begin{bmatrix} 6.2280891 \\ 6.07714208 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^{11})\| = 8.7 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(11)} = -\left(H + \lambda^{(11)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(11)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 4.8828125 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$
$\begin{bmatrix} 6.2280891 \\ 6.07714208 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.341049969 \\ -0.411537989 \end{bmatrix}$

$x^{(12)} = [5.8870391455; 5.66560409]$

$f(x^{11}) = 455.0355755$

$f(x^{12}) = 401.4924148$

Оскільки $f(x^{12}) < f(x^{11})$, $\lambda^{12} = \frac{1}{2}\lambda^{11}$

Ітерація 13:

$\nabla f(x^{12}) = \begin{bmatrix} 5.8870391455 \\ 5.66560409 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^{12})\| = 8.1704 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(12)} = -\left(H + \lambda^{(12)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(12)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 2.44140625 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 5.8870391455 \\ 5.66560409 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.373892199 \\ -0.441176568 \end{bmatrix}$

$x^{(13)} = [5.5131469; 5.22442752]$

$f(x^{12}) = 401.4924148$

$f(x^{13}) = 347.259949$

Оскільки $f(x^{13}) < f(x^{12})$, $\lambda^{13} = \frac{1}{2}\lambda^{12}$

Ітерація 14:

$\nabla f(x^{13}) = \begin{bmatrix} 5.5131469 \\ 5.22442752 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^{13})\| = 7.595 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(1)} = -\left(H + \lambda^{(1)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(1)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 1.220703125 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} 5.5131469 \\ 5.22442752 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3817299 \\ -0.439238644 \end{bmatrix}$

$x^{(14)} = [5.131416968; 4.785188877]$

$f(x^{13}) = 347.259949$

$f(x^{14}) = 296.5823757$

Оскільки $f(x^{14}) < f(x^{13})$, $\lambda^{14} = \frac{1}{2}\lambda^{13}$

Ітерація 15:

$\nabla f(x^{15}) = \begin{bmatrix} 5.131416968 \\ 4.785188877 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^{15})\| = 7.0163717 => \varepsilon$, отже продовжуємо розрахунок

$s^{(15)} = -\left(H + \lambda^{(15)} I\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(15)}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 10 & 2.8 \\ 2.8 & 8.4 \end{bmatrix} + 0.6103515625 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} *$ $\begin{bmatrix} 5.131416968 \\ 4.785188877 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.373286402 \\ -0.4181132156 \end{bmatrix}$

$x^{(16)} = [4.758130566; 4.36707566]$

$f(x^{15}) = 296.5823757$

$f(x^{16}) = 251.480227$

Оскільки $f(x^{16}) < f(x^{15})$, $\lambda^{16} = \frac{1}{2}\lambda^{15}$, але було досягнуто умову $k = M = 15$, тобто, максимальна кількість ітерацій.

Висновки:

Цей метод є дуже важки для обрахунку вручну та дуже довгим через це. Протягом усього циклу значення точності, змінних, функції зменшувалось, що може свідчити про те, що мінімум є близько (5 останніх ітерацій значення змінювались більше, ніж попередні). Я зробив 15 ітерацій та показав, як застосовувати алгоритм даного методу.

Завдання 5. Транспортна задача.

Знайти оптимальний план транспортної задачі, якщо відома матриця вартості перевезень (C_{ij}) одиниці вантажу, запаси (a_i) і потреби (b_j) вантажів. Задачу розв'язати методом мінімальної вартості (або північно-західного кута, або Фогеля) та перевірити на оптимальність методом потенціалів. Порівняти початковий опорний план і оптимальний план, зробити висновок. Побудувати математичну модель транспортної задачі, а також двоїсту до неї.

Варіант індивідуального завдання №3

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 5 & 10 \\ 13 & 10 & 2 & 8 \\ 10 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a_i = 150;\ 250;\ 100, \\ b_j = 250;\ 70;\ 65;\ 185 \end{matrix}$$

Метод мінімальної вартості

Перевіряємо умову балансу:

$$150 + 250 + 100 = 500$$
$$250 + 70 + 65 + 185 = 570$$

Збалансовуємо задачу, додаючи ще один рядок (фіктивного постачальника) у розмірі 70 одиниць. Просто починаємо з найменшого значення поставки доки не сума стовпців не буде рівна потребам, а сума рядків запасам.

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**
A1	12	3	5	10	**150**
A2	13	10	2	8	**250**
A3	10	5	8	7	**100**
A4	0 **70**	0	0	0	**70**
Потреби	**~~250~~ 180**	**70**	**65**	**185**	

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**
A1	12	3	5	10	**150**
A2	13	10	2 **65**	8	**~~250~~ 185**
A3	10	5	8	7	**100**
A4	0 **70**	0	0	0	**70**

Потреби	~~250~~ 180	70	65	185

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	12	3 70	5	10	~~150~~ 80
A_2	13	10	2 65	8	~~250~~ 185
A_3	10	5	8	7	100
A_4	0 70	0	0	0	70
Потреби	~~250~~ 180	70	65	185	

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	12	3 70	5	10	~~150~~ 80
A_2	13	10	2 65	8	~~250~~ 185
A_3	10	5	8	7 100	100
A_4	0 70	0	0	0	70
Потреби	~~250~~ 180	70	65	~~185~~ 85	

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	12	3 70	5	10	~~150~~ 80
A_2	13	10	2 65	8 85	~~250~~ ~~185~~ 100
A_3	10	5	8	7 100	100
A_4	0 70	0	0	0	70
Потреби	~~250~~ 180	70	65	185	

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	12	3 70	5	10	~~150~~ 80
A_2	13 100	10	2 65	8 85	250
A_3	10	5	8	7 100	100
A_4	0	0	0	0	70

	70								
Потреби	**~~250~~ ~~180~~ 80**		**70**		**65**		**185**		

	B1		**B2**		**B3**		**B4**		**Запаси**
A1		**12**		**3**		**5**		**10**	**150**
	80		**70**						
A2		**13**		**10**		**2**		**8**	**250**
	100				**65**		**85**		
A3		**10**		**5**		**8**		**7**	**100**
							100		
A4		**0**		**0**		**0**		**0**	**70**
	70								
Потреби	**250**		**70**		**65**		**185**		

У результаті було заповнено 7 клітинок, отже задача не вироджена: n + m – 1 = 4 + 4 – 1 = 7.

Опорний план:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 65 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розрахунок значення оптимального плану:

$$Z = 80 * 12 + 100 * 13 + 70 * 0 + 70 * 3 + 65 * 2 + 85 * 8 + 100 * 7 = 3980$$

Метод потенціалів

Завжди беру перший потенціал u_1=0. Для обрахунку потенціалів використовую формулу: $u_i + v_i = c_{ij}$; для обрахунку оцінок використовую: $S_{ij} = c_{ij} - u_i - v_i$, які записую у матрицю оцінок Δ_k, якщо матриця буде мати усі елементи більш рівні нулю, то план оптимальний, у іншому випадку план не оптимальний ($i = 1..m, j = 1..n, k = 1, 2, 3, ...$). Обираємо найменший елемент, якщо план не оптимальний, тоді будуємо ланцюг ТЗ, щоб отримати наступний план та перевірити вже його на оптимальність.

	B1		**B2**		**B3**		**B4**		**u_i**
A1		**12**		**3**		**5**		**10**	**0**
	80		**70**						
A2		**13**		**10**		**2**		**8**	**1**
	100				**65**		**85**		
A3		**10**		**5**		**8**		**7**	**0**
							100		
A4		**0**		**0**		**0**		**0**	**-12**
	70								

v_j	12	3	1	7

Матриця оцінок Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 11 & 5 \end{vmatrix}$$

Оскільки у матриці Δ_1 є від'ємні елементи, то план не оптимальний, будуємо ланцюг ТЗ:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 0 & 0 \\ 100(-) & 0 & 65 & 85(+) \\ 0(+) & 0 & 0 & 100(-) \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 100$$

Наступний план:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 65 & 185 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Загальна вартість перевезень:

$$Z = 80 * 12 + 100 * 10 + 70 * 0 + 70 * 3 + 65 * 2 + 185 * 8 = 3780$$

Наступна ітерація:

Введемо e (дуже мале число), оскільки задача стала виродженою (кількість клітинок стала меншою за 7: m + n – 1 = 7).

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 80	3 70	5	10	0
A_2	13	10	2 65	8 185	-10
A_3	10 100	5	8	7	-2
A_4	0 70	0	0 e	0	-12
v_j	12	3	12	18	

Матриця оцінок Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -7 & -8 \\ 11 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 9 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Оскільки у матриці Δ_1 є від'ємні елементи, то план не оптимальний, будуємо ланцюг ТЗ:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 65(+) & 185(-) \\ 100(-) & 0 & 0 & 0(+) \\ 70(+) & 0 & e(-) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \text{e}$$

Наступний план:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 65 + e & 185 - e \\ 100 - e & 0 & 0 & e \\ 70 + e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Загальна вартість перевезень:

$$Z = 80 * 12 + 100 * 10 + 70 * 0 + 70 * 3 + 65 * 2 + 185 * 8 = 3780$$

Наступна ітерація:

	B_1		**B_2**		**B_3**		**B_4**		**u_i**
A_1		**12**		**3**		**5**		**10**	**0**
	80		**70**						
A_2		**13**		**10**		**2**		**8**	**-1**
					65		**185**		
A_3		**10**		**5**		**8**		**7**	**-2**
	100						**e**		
A_4		**0**		**0**		**0**		**0**	**-12**
	70								
v_j	**12**		**3**		**3**		**9**		

Матриця оцінок Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Оскільки у матриці Δ_3 немає від'ємних елементів, то план оптимальний.

$$Z = 80 * 12 + 100 * 10 + 70 * 0 + 70 * 3 + 65 * 2 + 185 * 8 = 3780$$

Математична модель транспортної задачі

$$F = 12x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 10x_{14} + 13x_{21} + 10x_{22} + 2x_{23} + 8x_{24} + 10x_{31} + 5x_{32} + 8x_{33} + 7x_{34} \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 250 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 70 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 250 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 65 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 185 \end{cases}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

Двоїста задача до математичної моделі транспортної задачі

$$F = 150y_1 + 250y_2 + 100y_3 + 70y_4 + 250y_5 + 70y_6 + 65y_7 + 185y_8 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} y_1 + y_5 \leq 12 \\ y_1 + y_6 \leq 3 \\ y_1 + y_7 \leq 5 \\ y_1 + y_8 \leq 10 \\ y_2 + y_5 \leq 13 \\ y_2 + y_6 \leq 10 \\ y_2 + y_7 \leq 2 \\ y_2 + y_8 \leq 8 \\ y_3 + y_5 \leq 10 \\ y_3 + y_6 \leq 5 \\ y_3 + y_7 \leq 8 \\ y_3 + y_8 \leq 7 \\ y_4 + y_5 \leq 0 \\ y_4 + y_6 \leq 0 \\ y_4 + y_7 \leq 0 \\ y_4 + y_8 \leq 0 \end{cases}$$

Висновки

Було знайдено оптимальний план методом мінімальної вартості $Z = 3980$ та оптимізувано результат методом потенціалів $Z = 3780$. Було описано математичну модель транспортної задачі та двоїсту до неї задачу.

Висновки по практиній роботі

У першому завданні було виконано завдання за допомогою методів Ньютона-Рафсона, ділення інтервалу напловину. У результаті виконання за першим методом було зроблено 2 ітерації та знайдено максимум функції. У результаті виконання за другим завданням було зроблено 15 ітерацій, але точність не досягнута, але результат був ближче до заданої точності і в подальших ітераціях було б досягнуто необхідну точність.

У другому завданні було сформовано таблицю вхідних даних до задачі. Також, було побудовано математичну модель, зведено математичну модель до канонічної форми. Рішення задачі було знайдено за допомогою Excel – пошук рішення.

У третьому завданні була задача багатопараметричної оптимізації, для якої потрібно було знайти мінімум за допомогою методу Хука-Джівса. Для моєї функції цей метод виявся не ефективним, оскільки за 15 ітерацій значення функції тільки збільшувалось, що означає, що мінімум може бути недосяжним.

У четвертому завданні була задача на застосування градієнтного методу Марквардта. Для моєї функції, щоб знайти мінімум знадобилось би більше ітерацій (було зроблено 15 – максимальну кількість). Можна сказати, що мінімум був би досягнутий приблизно на 25 ітерації, оскільки, значення точності почало більше змінюватись в останніх ітераціях, як і значення змінних та самої функції.

У п’ятому завданні було потрібно розв’язати транспортну задачу. За допомогою методу мінімальної вартості і методом потенціалів знайти мінімальний план і розв’язати задачу. Результат у методі потенціалів виявився найменшим. Було побудовано математичну та двоїсті моделі для транспортної задачі.