

Linear Algebra

—HOFFMAN AND RAY KUNZE

ManJack

2023 年 9 月 17 日

前言

这是数学系线性代数的笔记，写给自己。如有错误请见谅，这些只是作为分享。

MaJack

2023 年 9 月 17 日

目录

第一章 Linear Equations	1
1.1 环和域	1
1.1.1 加群和环的定义	1
1.1.2 交换元、单位元、零因子、整环	1
1.1.3 除环、域	2

第一章 Linear Equations

1.1 环和域

1.1.1 加群和环的定义

定义 1.1.1 (加群). 假如一个 *Abel* 群的代数运算为加法, 并且用符号 ‘+’ 表示, 则该群叫做加群。

注 1.1.1. 加群的单位元 e 是唯一的, 且 $e=0$ 。称作零元, 我们有以下的计算规则:

$$0 + a = a + 0 = a$$

定义 1.1.2 (环). 一个集合 R 称之为环满足:

1. R 是一个加群
2. R 对一个乘法来说是一个半群 (半群是一个群胚 + 结合律)
3. 在集合 R 上, 乘法对加法满足分配率 $a(b+c)=(ab+ac)$

1.1.2 交换元、单位元、零因子、整环

定义 1.1.3 (交换环). 一个环叫做一个交换环, 假如:

$$ab = ba$$

在环中乘法运算下的单位元, 叫做环的单位元。

定义 1.1.4 (单位元). 环中的单位元 e , 假如对于 R 的任意元素 a 来说, 有:

$$\boxed{e} a = a \boxed{e} = a$$

↑ ↑
单位元

定义 1.1.5 (零因子). 一个环中的两个元素 a, b 之间如果有一个是 0 , 那么 $ab=0$. 但反之不成立.

$$ab = 0 \not\Rightarrow a = 0 \text{ or } b = 0$$

例 1.1.1. 例如模 n 的剩余类环: 假设 $n=ab$

若 n 不是素数, 假设:

$$[\alpha] \neq [0], [b] \neq [0], [\alpha][b] = [\alpha b] = [n] = [0]$$

则我们可以得知 $ab = 0 \xrightarrow{\text{不成立}} a = 0 \text{ or } b = 0$

注 1.1.2. 若是在一个环里,

$$a \neq 0, b \neq 0, ab = 0$$

则 a 被称为左零因子, b 被称为右零因子

定义 1.1.6 (整环). 一个环叫做整环, 满足:

1. 乘法交换律:

$$ab = ba$$

2. R 有单位元 1 :

$$1a = a1 = a$$

3. R 没有零因子:

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ or } b = 0$$

注 1.1.3. a, b 可以是任意 R 中的元.

1.1.3 除环、域

定义 1.1.7 (除环). 一个环 R 叫做一个除环, 满足:

1. R 至少包含一个不为 0 的元

2. R 有一个单位元

3. R 的每个不等于 0 的元有一个逆元

定义 1.1.8 (域). 一个集合 F 被称为域, 如果满足以下条件:

1. 加法封闭性: $\forall a, b \in F$, 有 $a + b \in F$ 。

2. 加法可交换性: $\forall a, b \in F$, 有 $a + b = b + a$ 。

3. 加法单位元素: 存在加法单位元素 0 , 使得 $\forall a \in F$, 有 $a + 0 = a$ 。

4. 加法逆元素: $\forall a \in F$, 存在加法逆元素 $-a$, 使得 $a + (-a) = 0$ 。

5. 乘法封闭性: $\forall a, b \in F$, 有 $a \cdot b \in F$ 。

6. 乘法可交换性: $\forall a, b \in F$, 有 $a \cdot b = b \cdot a$ 。

7. 乘法单位元素: 存在乘法单位元素 1 , 使得 $\forall a \in F$, 有 $a \cdot 1 = a$ 。

8. 乘法逆元素: $\forall a \in F$, 对于非零元素, 存在乘法逆元素 a^{-1} , 使得 $a \cdot a^{-1} = 1$ 。

9. 分配律: $\forall a, b, c \in F$, 满足 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 。

定义 1.1.9 (Subfield). 设 F 是一个域。如果 $K \subseteq F$ 满足以下条件, 则称 K 是 F 的子域:

1. K 非空, 并且包含域 F 中的加法单位元素 0 和乘法单位元素 1 。

2. 对于任意的 a 和 b 属于 K , $a + b$ 和 $a \cdot b$ 也都属于 K (其中 $+$ 和 \cdot 分别表示域 F 中的加法和乘法运算)。

3. 对于任意的 a 属于 K , 它的相反元素 $-a$ 也属于 K 。

4. 对于任意的非零元素 a 属于 K , 它的乘法逆元素 a^{-1} 也属于 K 。

定义 1.1.10 (Characteristic). *In abstract algebra, "characteristic" is an important concept for a ring or a field. The characteristic is used to describe the smallest positive integer n for which n times the multiplicative identity 1 equals the additive identity (usually denoted as 0) in the algebraic structure.*

For a ring (a set with addition and multiplication operations, satisfying certain algebraic rules), the characteristic refers to the smallest positive integer n such that n times 1 equals 0 (or defined as 0 if there is no such n).

For a field (a special type of ring where every non-zero element has a multiplicative inverse), the characteristic is also a positive integer n or zero, representing n times 1 equals 0 or having characteristic zero if there is no such n .

The significance of the characteristic lies in its impact on the properties and structure of the ring or field. Particularly, in the case of a field, the characteristic is either a prime number or zero. This distinction is useful as it allows us to differentiate between fields of different characteristics and has important applications in properties of algebraic equations and polynomials.