Linear Algebra

——HOFFMAN AND RAY KUNZE

ManJack

2023 年 12 月 2 日

前言

数据分析中方差分析的实验报告

ManJack

2023 年 12 月 2 日

目录

第一章　Linear Equations

对于总体 X_i 的样本 $X_{ij}\quad i=1,2,\cdots,k; j=1,2,\cdots,n_i$，有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij},\quad \overline{x}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij},\quad \overline{\overline{X}}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i$$

$$S_t=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2, S_e=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{x}_i)^2, S_A=\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{x}_i-\overline{\overline{X}})^2$$

在平方和的基础上，可以得到平方和的期望

$$E(S_e)=(n-k)\sigma^2,\quad E(S_A)=(k-1)\sigma^2,\quad E(S_t)=n\sigma^2$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\overline{x}_i-\overline{\overline{X}})^2}{\sigma^2},\quad S_e=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(X_{ij}-\overline{x}_i)^2}{\sigma^2}.$$

于是

$$ES_A=\sum_{i=1}^{r}n_iE(\overline{X}_i^2)-nE(\overline{\overline{X}}^2)=\sum_{i=1}^{r}(\frac{\sigma}{n_i}+\mu^2)n_i-n(\frac{\sigma}{n}+\mu^2)=\sigma^2\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{n}=(r-1)\sigma^2+\sum_{i=1}^{r}n_i\alpha^2.$$

于是可得

$$E(\frac{S_e}{n-r})=\sigma^2,\quad E(\frac{S_A}{r-1})=\sigma^2+\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}n_i\alpha^2$$

因此不论，H_0 是否成立，都有

$$E(\frac{S_e}{n-r})=E(\frac{S_A}{r-1})=\sigma^2$$

都是 σ^2 的无偏估计量，因此

$$\frac{S_e}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-r),\quad \frac{S_A}{\sigma^2}\sim\chi^2(r-1)$$

因此我们可以给定判断显著性水平当 F 统计量 $F_0=\frac{S_A/(r-1)}{S_e/(n-r)}$ 的值大于 $F_\alpha(r-1,n-r)$ 时，拒绝 H_0，否则不拒绝 H_0. 其中 $F_\alpha(r-1,n-r)$ 是 F 分布的上 α 分位数. 当计算 F 时我们还可以利用以下公式来简化计算若令

$$R=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_ij)^2, K=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}, Q=\sum_{i=1}^{r}n_i\overline{X}_i^2.$$

则有

$$S_t=R-\frac{K^2}{n},\quad S_A=\frac{K^2}{n}-Q,\quad S_e=R-Q$$