# Linear Algebra

——HOFFMAN AND RAY KUNZE

ManJack

2023 年 9 月 17 日

# 前言

这是数学系线性代数的笔记，写给自己。如有错误请见谅，这些只是作为分享。

MaJack

2023 年 9 月 17 日

# 目录

**第一章 Linear Equations** **1**

1.1 环和域 . . . . . . . . . . . . 1

1.1.1 加群和环的定义 . . . . . . . . . . . . 1

1.1.2 交换元、单位元、零因子、整环 . . . . . . . . . . . . 1

1.1.3 除环、域 . . . . . . . . . . . . 2

# 第一章　Linear Equations

## 1.1　环和域

### 1.1.1　加群和环的定义

**定义 1.1.1** (加群)**.** *假如一个* ***Abel*** *群的代数运算为加法，并且用符号'+'表示，则该群叫做***加群***。*

**注 1.1.1.** *加群的单位元 $e$ 是唯一的，且 $e$=0。称作零元，我们有以下的计算规则:*

$$0 + a = a + 0 = a$$

**定义 1.1.2** (环)**.** *一个集合 $R$ 称之为环满足:*

*1. $R$ 是一个加群*

*2. $R$ 对一个乘法来说是一个半群 (半群是一个群胚 + 结合律)*

*3. 在集合 $R$ 上，乘法对加法满足分配率 $a(b+c)=(ab+ac)$*

### 1.1.2　交换元、单位元、零因子、整环

**定义 1.1.3** (交换环)**.** *一个环叫做一个交换环，假如:*

$$ab = ba$$

在环中乘法运算下的单位元，叫做环的单位元。

**定义 1.1.4** (单位元)**.** *环中的单位元 $e$, 假如对于 $R$ 的任意元素 $a$ 来说，有:*

$$e\,a = a\,e = a$$

单位元

**定义 1.1.5** (零因子)**.** *一个环中的两个元素 $a,b$ 之间如果有一个是 0, 那么 $ab$=0. 但反之不成立.*

$$ab = 0 \xRightarrow{\text{不成立}} a = 0 \ or \ b = 0$$

**例 1.1.1.** 例如模 $n$ 的**剩余类环**: 假设 $n$=$ab$
若 $n$ 不是素数, 假设:

$$[\alpha] \neq [0], [b] \neq [0], [\alpha][b] = [\alpha b] = [n] = [0]$$

则我们可以得知 $ab = 0 \xRightarrow{\text{不成立}} a = 0 \ or \ b = 0$

**注 1.1.2.** 若是在一个环里,

$$a \leq 0, b \neq 0, ab = 0$$

则 $a$ 被称为**左零因子**,$b$ 被称为**右零因子**

**定义 1.1.6** (整环)**.** 一个环叫做**整环**, 满足:

1. 乘法交换律:

$$ab = ba$$

2. $R$ 有单位元 1:

$$1a = a1 = a$$

3. $R$ 没有零因子:

$$ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \ or \ b = 0$$

**注 1.1.3.** $a$,$b$ 可以是任意 $R$ 中的元.

### 1.1.3 除环、域

**定义 1.1.7** (除环)**.** 一个环 $R$ 叫做一个除环，满足:

1. $R$ 至少包含一个不为 0 的元
2. $R$ 有一个单位元
3. $R$ 的每个不等于 0 的元有一个逆元

**定义 1.1.8** (除环)**.** 一个集合 $F$ 被称为域，如果满足以下条件:

1. 加法封闭性：$\forall a, b \in F$，有 $a + b \in F$。
2. 加法可交换性：$\forall a, b \in F$，有 $a + b = b + a$。
3. 加法单位元素：存在加法单位元素 0，使得 $\forall a \in F$，有 $a + 0 = a$。
4. 加法逆元素：$\forall a \in F$，存在加法逆元素 $-a$，使得 $a + (-a) = 0$。
5. 乘法封闭性：$\forall a, b \in F$，有 $a \cdot b \in F$。
6. 乘法可交换性：$\forall a, b \in F$，有 $a \cdot b = b \cdot a$。

7. 乘法单位元素：存在乘法单位元素 *1*，使得 $\forall a \in F$，有 $a \cdot 1 = a$。

8. 乘法逆元素：$\forall a \in F$，对于非零元素，存在乘法逆元素 $a^{-1}$，使得 $a \cdot a^{-1} = 1$。

9. 分配律：$\forall a, b, c \in F$，满足 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$。

**定义 1.1.9** (Subfiled)**.** 设 $F$ 是一个域。如果 $K \subseteq F$ 满足以下条件，则称 $K$ 是 $F$ 的子域：

1. $K$ 非空，并且包含域 $F$ 中的加法单位元素 *0* 和乘法单位元素 *1*。

2. 对于任意的 $a$ 和 $b$ 属于 $K$，$a + b$ 和 $a \cdot b$ 也都属于 $K$（其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示域 $F$ 中的加法和乘法运算）。

3. 对于任意的 $a$ 属于 $K$，它的相反元素 $-a$ 也属于 $K$。

4. 对于任意的非零元素 $a$ 属于 $K$，它的乘法逆元素 $a^{-1}$ 也属于 $K$。

**定义 1.1.10** (Characteristic)**.** *In abstract algebra, "characteristic" is an important concept for a ring or a field. The characteristic is used to describe the smallest positive integer $n$ for which $n$ times the multiplicative identity* 1 *equals the additive identity (usually denoted as* 0*) in the algebraic structure.*

*For a ring (a set with addition and multiplication operations, satisfying certain algebraic rules), the characteristic refers to the smallest positive integer $n$ such that $n$ times* 1 *equals* 0 *(or defined as* 0 *if there is no such $n$).*

*For a field (a special type of ring where every non-zero element has a multiplicative inverse), the characteristic is also a positive integer $n$ or zero, representing $n$ times* 1 *equals* 0 *or having characteristic zero if there is no such $n$.*

*The significance of the characteristic lies in its impact on the properties and structure of the ring or field. Particularly, in the case of a field, the characteristic is either a prime number or zero. This distinction is useful as it allows us to differentiate between fields of different characteristics and has important applications in properties of algebraic equations and polynomials.*