数学分析

——张筑生

ManJack

2025 年 4 月 19 日

前言

这是数学系线性代数的笔记，写给自己。如有错误请见谅，这些只是作为分享。

ManJack

2025 年 4 月 19 日

目录

1. Linear Equations

线性方程组的解法

解线性方程组的矩阵消元法

Example：将前面系数提取出来记录为：

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=9 \\ -x_1-5x_2+4x_3=10 \\ 2x_1+7x_2+x_3=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

将上述例子化简后的结果为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的初等行变换：考虑一个简单的二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

我们可以将其增广矩阵化为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{bmatrix}$$

这里假设 $a_{11}\neq 0$。

行列式

逆序数

Theorem 1.0.1

对换改变 n 元排列逆序数的奇偶性。

证明：首先考虑相邻元素对换的情况。若序列 n 的排列为：

$$n=(\dots,i,j,\dots)$$

对换 i,j 后得到：

$$n_1=(\dots,j,i,\dots)$$

则逆序数 τ 的变化只有两种情况：

$$\begin{cases} \tau(n_1) = \tau(n) - 1 & \text{如果}(i,j) \text{ 是一个逆序对} \\ \tau(n_1) = \tau(n) + 1 & \text{如果}(i,j) \text{ 不是一个逆序对} \end{cases}$$

在这两种情况下，逆序数的奇偶性都发生了改变。

接下来考虑相距较远元素对换的情况。若 n 的排列为：

$$n = (\dots, i, \overbrace{\dots}^{k\text{个元素}}, j, \dots)$$

我们可以通过一系列相邻对换来实现 i 和 j 的对换。首先，将 j 向左移动 $k+1$ 次，越过 k 个中间元素和元素 i，得到：

$$(\dots, j, i, \dots, \dots)$$

这一步进行了 $k+1$ 次相邻对换。然后，将 i 向右移动 k 次，越过它右边的 k 个中间元素，到达原来 j 的位置，得到：

$$(\dots, j, \overbrace{\dots}^{k\text{个元素}}, i, \dots)$$

这一步进行了 k 次相邻对换。总共进行了 $k+1+k = 2k+1$ 次相邻对换。由于 $2k+1$ 是奇数，每次相邻对换都改变奇偶性，所以总共进行了奇数次奇偶性改变，最终排列 n_1 的逆序数 $\tau(n_1)$ 的奇偶性与原排列 n 的逆序数 $\tau(n)$ 相反。 ■

Theorem 1.0.2

若对一个标准顺序排列（$1, 2, \dots, n$）的 n 元排列进行 k 次对换得到新的排列，则新排列逆序数的奇偶性与 k 的奇偶性相同。

证明： 标准排列的逆序数为 0（偶数）。根据上一个定理，每次对换改变逆序数的奇偶性。进行 k 次对换后，逆序数的奇偶性改变了 k 次。因此，最终排列的逆序数的奇偶性与 k 的奇偶性相同。 ■

n 阶行列式的定义

Definition 1.0.1

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵。其行列式定义为：

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列，$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是该排列的逆序数，求和遍及所有 $n!$ 个不同的排列。

n 阶的行列式记作 $|A|$ 或 $\det(A)$。

主对角线下方全为 0 的行列式称为**上三角行列式**。主对角线上的元素称为主对角线元素。

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义 $\det(A) = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，考虑求和中的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。如果这一项非零，则必须满足 $a_{ij_i} \neq 0$ 对所有 $i = 1,\ldots,n$ 成立。对于上三角矩阵：

- 从最后一行 $i = n$ 开始，由于 $a_{nk} = 0$ 对 $k < n$，只有当 $j_n = n$ 时 a_{nj_n} 才可能非零。
- 考虑倒数第二行 $i = n-1$。由于 $a_{(n-1)k} = 0$ 对 $k < n-1$，且 $j_n = n$ 已被选定，所以 j_{n-1} 只能是 $n-1$ (因为 $j_{n-1} \neq j_n = n$)，才可能使 $a_{(n-1)j_{n-1}}$ 非零。
- 以此类推，从下往上，第 i 行的列指标 j_i 必须满足 $j_i \geq i$。同时，由于 $j_1,\ldots,j_n$ 是 $1,\ldots,n$ 的一个排列，它们必须互不相同。结合这两个条件，唯一可能使乘积项非零的排列是 $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_n = n$。

$$\begin{cases} a_{nj_n} \neq 0 \implies j_n = n \\ a_{(n-1)j_{n-1}} \neq 0 \implies j_{n-1} = n-1 \text{ (因为} j_{n-1} \neq j_n) \\ \vdots \\ a_{1j_1} \neq 0 \implies j_1 = 1 \end{cases}$$

这个排列是 $1,2,\ldots,n$，其逆序数 $\tau(12\ldots n) = 0$。因此，行列式定义中的求和只有一项是非零的，即对应于主对角线元素的乘积。所以，上三角行列式的值为：$\det(A) = (-1)^0 a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$。

命题 1　给定行指标的一个排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$，A 的行列式也可以表示为：

$$\det(A) = \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

其中求和遍及列指标的所有排列 $k_1k_2\cdots k_n$。

证明： 考虑行列式定义中的任意一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。我们可以将因子 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 按照给定的行指标排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 重新排序。设 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$ 是 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 重新排序后的形式。这意味着，当 $i_p = r$ 时，必然有 $k_p = j_r$。也就是说，$(i_1,k_1),(i_2,k_2),\ldots,(i_n,k_n)$ 与 $(1,j_1),(2,j_2),\ldots,(n,j_n)$ 是相同的一组成对下标，只是顺序不同。将行指标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 通过 $s = \tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 次相邻对换恢复成标准顺序 $1,2,\ldots,n$，同时对列指标 $k_1k_2\cdots k_n$ 进行同样的伴随对换，会得到排列 $j_1j_2\cdots j_n$。根据排列理论，两个排列同时进行相同的 s 次对换后，它们的逆序数奇偶性之和保持不变，或者说 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 的奇偶性相同。即 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$。因此，

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

对所有排列求和，即可得到两种定义形式是等价的：

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

这证明了命题。这个命题说明行列式也可以按任意行（或类似的可以证明按任意列）展开，符号取决于行排列和列排列的逆序数。 ■

$$\det(A).$$