数学分析

——张筑生

ManJack

2025 年 4 月 19 日

前言

这是数学系线性代数的笔记，写给自己。如有错误请见谅，这些只是作为分享。

ManJack

2025 年 4 月 19 日

目录

1. Linear Equations

1.1 线性方程组的解法

1.1.1 解线性方程组的矩阵消元法

Example： 将前面系数提取出来记录为:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=9 \\ -x_1-5x_2+4x_3=10 \\ 2x_1+7x_2+x_3=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

将上述例子化简后的结果为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

矩阵的初等行变换:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

我们可以将其化为:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

1.1.2 行列式

逆序数

Theorem 1.1.1

对换改变 n 元排列逆序数的奇偶性

证明: 首先考虑相邻元素对换的情况, 若序列 n 的排列为:

$$n=\begin{pmatrix} \cdots & i & j & \cdots \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

对换 i, j 后：

$$n_1 = \begin{pmatrix} \cdots & j & i & \cdots \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

则无非两种情况：

$$\begin{cases} \tau(n_1) = \tau(n) - 1 & \text{(i,j) 是逆序对} \\ \tau(n_1) = \tau(n) + 1 & \text{(i,j) 不是逆序对} \end{cases} \tag{1.7}$$

那有了相邻的情况，借此我们可以推广到相距较远的情况若 n 的排列为：

$$n = \begin{pmatrix} \cdots & i & \overbrace{\cdots}^{k} & j & \cdots \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

则我们可以逐项移动，当 j 移到到 i 有，此时移到了 k+1 次。

$$\begin{pmatrix} \cdots & j & i & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

在将 i 移动到 j 的位置则有 k 次：

$$\begin{pmatrix} \cdots & j & \overbrace{\cdots}^{k} & i & \cdots \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

这时候完成了对换，总相邻对换数为 k+1+k = 2k+1, 所以改变了奇偶性。

Theorem 1.1.2

若对一个完全顺序排列的 n 元排列进行 k 次对换，则其逆序数的奇偶性与 k 的奇偶性相同。

n 阶行列式的定义

Definition 1.1.1

设

$$A = (a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.11}$$

n 阶的行列式记作 $|A|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$

主对角线下方全为 0 的行列式称为**上三角行列式**，主对角线上的元素称为主对角线元素。

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

由于 $|A| = \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 从最下面往上取我们可以得知，

$$\begin{cases} a_{nj_n} = a_{nn} & j_n = n \\ a_{(n-1)j_{n-1}} = a_{(n-1)(n-1)} & j_{(n-1)} = n-1 \\ \vdots & \\ a_{ij_i} = a_{ii} & j_i = i \\ a_{1j_1} = a_{11} & j_1 = 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

则上三角 n 的行列式的值为：$|A| = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

命题 1

给定行指标的一个排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$,A 的行列式为

$$|A| = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} \tag{1.14}$$

证明: 对于单个排列, 假设该排列 $a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n}$ 经过 s 次变换成为 $a_{1 s_1} a_{2 s_2} \cdots a_{n s_n}$，则该排列的逆序数为 $\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)$，则对于行的逆序数我们可得知 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = s$, 且有对于列逆序数

$$(-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n) + s} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} \tag{1.15}$$

则由此变换我们可以得知：

$$|A| = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \tag{1.16}$$

$j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 变换成全排列 $1, 2, \cdots, n$ 后 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的对应变化。所以第一步行逆序数相加是为了将行变为全排列，因为行列同排列的逆序数也需要加上行的逆序数变为全排列后的逆序数。