一、填空题

1、数 $x=0.5616\times10^{5}$ 的近似值 $x^{*}=0.56\times10^{5}$ 的有效数字位数是____，其绝对误差为_________；数 $y=0.51016$ 的近似值 $y^{*}=0.511$ 的有效数字位数是_____，其绝对误差为_____________。

2、若数值求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{10}A_k f(x_k)$ 是插值型求积公式，则其代数精度_______，即该公式对次数____________的多项式都精确成立，此时 $A_k=$_______________；该公式最高精度可达：_________。

3、用秦九韶算法写出计算 $p(x)=2x^3+7x^2+6x-9$ 的公式：___________；数值稳定的算法指：____。

4、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$ ____________，$\|A\|_\infty=$____________，$Cond(A)_1=$________，$Cond(A)_\infty=$___________。

5、下列不相容方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1-x_2=3\\ x_1+2x_2=4\end{cases}$ 的最小二乘解为：_________________。

6、求方程 $f(x)=x^3-12x+16=0$ 根的牛顿迭代格式：______________，取 $x_0=1.95$，计算 x_1,x_2：______________________。（小数点后取两位）

7. 计算 $p_4(x)=3x^3+x^2+x+2$ 的 Horner 算法_____________________。

8. 用牛顿法求 $x^k-a=0$ 的根 $\sqrt[k]{a}$，其迭代格式为________________________。

9. 设 $A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$_________，$cond(A)_\infty=$__________。

10. 已知

x	0	1	2
y	1	4	6

则其二次插值多项式 $p_2(x)=$ ________________________。

12．已知函数 $y = f(x)$ 的数据表为

x	1	2	3
y	2	-1	3

用复化梯形公式计算 $\int_1^3 f(x)dx \approx$ __________，用 Simpson 公式计算 $\int_1^3 f(x)dx \approx$ _________。

13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 3 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 LU 分解为 $L=$ ____________________，

$U=$ _______________。

14、近似值 $x^* = 0.231$ 关于真值 $x = 0.229$ 有_____位有有效数字，绝对误差限为_______。

15、设 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，则 A 的 LU 分解为 A=__________________。

16、建立求 $\sqrt{3}$ 近似值的收敛的迭代格式___________________，收敛速度为______阶。

17、线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的最小二乘解为_______________。

18、两点 Gauss 公式求积分 $\int_0^1 f(x)dx \approx$ ______________________，代数精度_____。

19、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{cond(A)}_{\infty}=$ _______________；

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$，则 $\rho(\boldsymbol{B})=$ _______________。

20、当 n=2 时，用复化梯形公式计算 $\boldsymbol{I}=\int_1^3 \frac{1}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}\approx$ _______________。

21、满足数据表

x	1	2	3
y	-1	4	5

的分段线性插值多项式 $P(x)=$ ________________________________。

二、计算题

一、 （1）写出数值计算的五个原则。

（2）为使 $x=1/3$ 的近似值的相对误差限不超过 0.1×10^{-2}，则近似值应取几位有效数字？

二、 利用 Newton 法建立求解 $\sqrt{20}$ 的近似值的迭代格式，说明是几阶收敛的，取 $x_0=4$，计算 x_2。（小数点后取 3 位有效数字）

三、 设 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 9\end{pmatrix}$，用 LU 分解法求解此方程。

四、 （15 分）对下面方程组考察用雅可比和高斯—塞德尔迭代是否收敛？若收敛写出迭代格式。

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=1\\ 2x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$$

五、 利用下表数据，用线性插值和抛物插值求 $f(\frac{1}{2})$，并估计截断误差。记

$M_1=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right|, M_2=\max\limits_{x\in[0,2]}\left|f'''(x)\right|$（线性插值用 $x=0$ 和 $x=1$）

x	0	1	2
$f(x)$	1	2	3

六、 利用最小二乘原理求下面不相容方程的近似解。

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 4x-5y=3 \\ 2x+y=11 \\ -x+3y=10 \end{cases}$$

七、 方程 $\boldsymbol{x}^2-0.9\boldsymbol{x}-8.5=0$ 在[3,4]中有一实根，

(1) 若用二分法求此根，若要使得误差不超过 0.01，应将其二分几次？

(2) 给出求此根的牛顿迭代格式，并计算 3 步。（小数点后保留 3 位）

十、求一经过原点的抛物线 $\boldsymbol{s(x)=ax+bx^2}$，使其按最小二乘原理拟合下表中的数据：

	1	2	3	4
	0.	1.5	1.8	2.0

并求平方误差 $\|\delta\|^2$ (运算结果保留 4 位有效数字)。

十一、已知方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法是否收敛，若收敛写出迭代矩阵，迭代格式。

十二、确定下述求积公式的待定系数 $\boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_3$，使其代数精度尽可能高，并判断其代数精度为多少？

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_2)+3f(x_3)]$$

十三、请推导出常微分方程数值求解的 Euler 法，后退 Euler 公式，梯形公式，改进的欧拉公式（预测矫正公式），并用其求解如下初值问题：(步长 h=0.1)

$$\begin{cases} y' = 6 - 3y \\ y(0) = 3 \end{cases}, 0 < x \le 3$$

十四、 已知方程 $f(x) = x^3 - 2x - 3$ 在 $[1,2]$ 内有一根，能用 $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k^3 - 3)$ 求此根吗？说明原因，若不能，建立一个收敛的迭代格式。

十六、

（1）确定下述求积公式的待定系数 A 和 B，使其代数精度尽可能高，并判断其代数精度为多少？

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(-1) + f(1)] + B[f(\frac{-1}{\sqrt{5}}) + f(\frac{1}{\sqrt{5}})]$$

（2）用上述公式求积分 $\int_{-1}^{3} \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx$。

（3）用两点高斯勒让德公式计算上述积分。

十七、设求解线性方程组 $Ax = b$ 的迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)})$$

其中 ω 为实参数。当 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 时，

（1）试确定使迭代公式收敛的 ω 的范围；

（2）试确定使迭代公式收敛速度最快的 ω 的值。

十八、设 $y_0 = 28$，按递推公式 $y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$（n=1,2,…）计算到 y_{100}。若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$（五位有效数字），试问计算 y_{100} 将有多大误差？

十九、证明方程 $1 - x - \sin x = 0$ 在[0，1]上有一个根。使用二分法求误差不

大于$\frac{1}{2}\times10^{-4}$的根，并讨论需要迭代多少次？

二十、 已知矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 2 & -3\end{bmatrix}$

1. .求 A 的 LU 分解；

2. 设线性方程组 $AX=b$ 的系数阵为 A, 试推导：

(1).用 Jacobi 迭代是否收敛； (2).用 Gauss-seidel 迭代是否收敛.

二十一、

1. 写出计算$\int_{-1}^{1}f(x)dx$的两点高斯—勒让德公式；

2. 用上述公式计算$\int_0^1 x^{9/2}dx$。

二十二、已知$\cos0=1,\cos\frac{\pi}{3}=0.5$，用线性插值求$\cos0.5$的近似值，并估计其截断误差

二十三、

1. 利用数值积分的思想导出欧拉公式，并写出欧拉公式的余项。
   利用欧拉公式计算下面的初值问题：（步长 h=0.1）

$$\begin{cases}y'+y=x\\y(0)=0\end{cases},0<x\le0.4$$

二十四、设$A=\begin{pmatrix}a & -1 & 1\\a & -a & 2\\-a & 0 & a\end{pmatrix}$，求 a 的范围使得求方程组 Ax=b 近似解的jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法收敛。

二十五、设函数方程 $f(x)=e^x+10x-2=0$，（1）构造两个收敛的迭代法：一个是牛顿迭代法，另外一个是一般迭代法；（2）求出它们的迭代函数和收敛速度。