UNIVERSITE GRENOBLE ALPES **M1-info**

Complexité **Année 2016-17**

TD-1 — Machines de Turing simples — énoncé

Machines de Turing simples

On s'intéresse d'abord au modèle le plus simple de machine de Turing (MT), à quadruplets. Dans un état q_i et lisant un symbole S_j, la MT passe dans un état q_l après avoir effectué l'une des 3 actions suivantes : écrire un symbole S_k, aller à droite (R), ou aller à gauche (L). Un quadruplet "simple" est donc de forme $(q_i \quad S_j \quad S_k \mid L \mid R \quad q_l)$.

On code un entier x sur la bande par $\overline{x} = \overbrace{|| \cdots |}^{x+1 \text{ fois}} B$,
et un vecteur $\vec{x} = (x_1 \dots x_n)$ par $\overline{\vec{x}} = \overline{x_1} \dots \overline{x_n} = |^{x_1+1}B|^{x_2+1}B \dots |^{x_n+1}B$.
Le calcul de la machine Z sur l'entrée $\vec{x}$ commence avec la configuration initiale
$Init(\vec{x}) = q_0\overline{\vec{x}} = \dots BBBq_0|^{x_1+1}B|^{x_2+1}B \dots |^{x_n+1}BBBB \dots$
Si le calcul s'arrête dans une configuration $u = vqw$, le résultat est le nombre de $|$ sur la bande, soit$\Psi_Z^{(n)}(\vec{x}) = \#(u, |)$ (noté souvent $\langle u \rangle$).

1. Quelles fonctions calcule la machine $[q_0BBq_0]$?
2. Quelles fonctions calcule la machine $[q_0||q_0]$?
3. Quelles fonctions calcule la machine

$$Z = \begin{bmatrix} q_0 & | & B & q_0 \\ q_0 & B & R & q_1 \\ q_1 & | & R & q_1 \\ q_1 & B & R & q_2 \\ q_2 & | & | & q_0 \end{bmatrix}$$

   pour toutes les arités n ? Quelle est sa complexité (le nombre des pas de calculs en fonction de la taille de l'entrée) ?
4. Construire une MT qui calcule $\mathit{Diff} = \lambda xy[x \dot{-} y]$, c'est-à-dire :
   $Diff(x, y) = x - y$ si $x \geq y$ et $Diff(x, y) = 0$ sinon. Quelle est sa complexité dans le cas le pire (le nombre maximum des pas de calculs en fonction de la taille de l'entrée) ?
5. Construire une MT qui calcule le maximum de 3 arguments. Donner sa complexité.
6. Généraliser pour construire une MT qui calcule, pour tout n, le maximum de n arguments.
7. Construire une MT Z qui calcule $3^{(0)}$.
8. Construire une MT Z qui calcule $3^{(n)}$, pour toutes les arités n.
9. Construire une MT Z qui calcule $n^{(n)}$, pour toutes les arités n. [Attention, ce n'est pas $\lambda n[n^n]$.]
10. Construire une MT Z qui calcule la fonction prédécesseur $\mathit{Pred}^{(1)}$ définie par :
    $\mathit{Pred}(x) = \begin{cases} x - 1 & \texttt{si } x > 0 \\ 0 & \texttt{sinon} \end{cases}$
11. Construire une MT Z qui calcule la division *entière* par 3, c'est-à-dire que :
    $\Psi_Z^{(1)} = \lambda x. \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$. Justifier la correction et la terminaison.

12. En modifiant le plus simplement possible la machine précédente, construire une machine Z' qui calcule la division *exacte* par 3 de la somme de deux arguments, c'est-à-dire que : $\Psi^{(2)}_{Z'} = \lambda xy.\frac{x+y}{3}$, ou encore : $\Psi^{(2)}_{Z'}(x,y) = \begin{cases} p & \texttt{si } x+y=3p \\ \uparrow & \texttt{sinon} \end{cases}$

13. Soit la MT Z définie par ses quadruplets :

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} q_0 & B & R & q_0 \\ q_0 & | & B & q_1 \\ q_1 & B & R & q_2 \\ q_2 & | & B & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 & B & R & q_4 \\ q_3 & B & R & q_4 \\ q_4 & | & B & q_3 \\ q_4 & B & R & q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 & B & R & q_6 \\ q_6 & | & R & q_6 \\ q_6 & B & R & q_7 \\ q_7 & | & B & q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_7 & B & R & q_8 \\ q_8 & | & | & q_7 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \right\}$$

Quelles sont les fonctions $\Psi^{(n)}_Z$ calculées par Z, pour toutes les arités n ?

Machines de Turing transformant des chaînes de caractères

Il ne faut pas oublier que les MT les plus “naturelles” transforment simplement des chaînes de caractères. Voici un petit problème illustrant cela.

1. Construire une MT Z à deux bandes qui transforme une chaîne w sur $V = \{a,b,c\}$ en son miroir $\widetilde{w}$. Bien sûr, on suppose que le blanc S_0, usuellement noté B, n'est pas dans V. La configuration initiale sera $c_0 = (B,B)q_0(wB, q_0B)$, ou, si on préfère une notation “verticale”, $c_0 = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} q_0 \begin{pmatrix} wB \\ B \end{pmatrix}$, et la configuration finale contiendra $\widetilde{w}$ sur la deuxième bande, et rien sur la première (seulement des blancs). On ne demande rien de particulier sur la position finale des deux têtes de lecture-écriture.

   [Ne pas oublier qu'on peut utiliser autant de symboles qu'on veut, et autant d'états qu'on veut.]

2. Même question, mais avec une MT Z' à une seule bande. On essaiera de trouver deux méthodes radicalement différentes.

Compléments de cours sous forme d'exercices libres

Encadrement de la partie active de la bande d'une MT

Soit Z une MT quelconque, $r(Z)$ le plus grand indice d'un de ses états et $s(Z)$ le plus grand indice d'un de ses caractères. Donc $E(Z) \subseteq \{q_0, \dots q_{r(Z)}\}$ et $A(Z) \subseteq \{S_0 = B, S_1 = |, \dots S_{s(Z)}\}$.
On appelle $\lambda(Z)$ et $\delta(Z)$ les deux prochains caractères non utlisés par Z, i.e. $\lambda(Z) = S_{s(Z)+1}$ et $\delta(Z) = S_{s(Z)+2}$. Dans la suite, on abrège en notant simplement λ et δ.
Détailler une méthode générique pour transformer Z en une MT équivalente Z' qui

- commence par encadrer la partie active de la bande initiale par λ et δ.
- simule le calcul de Z pas à pas, en poussant λ d'une case vers la gauche et δ d'une case vers la droite si nécessaire.
- si et quand le calcul de Z s'arrête, tasse le $|$ juste à droite de λ, en restant à gauche de δ, et en "effaçant" (transformant en B) tous les caractères différents de $|$.
- efface le δ, revient à gauche, efface le λ, et s'arrête dans la configuration finale $q_{r(Z')}\ |^{<\alpha>}B$, si Z s'arrête en α sur cette même entrée. [$< \alpha >$ est le nombre de $|$ de la description instantanée α.]

Variantes de machines de Turing

On obtient des variantes des MT de multiples façons.

1. Si on permet d'écrire puis de mouvoir la tête de lecture-écriture en un pas de calcul, on obtient des *MT à quintuplets*. Un quintuplet "simple" est de forme
   $(q_i \quad S_j \quad S_k \quad q_l \quad L \mid R \mid N)$, et un quintuplet "à oracle" est de forme
   $(q_i \quad S_j \quad q_k \quad q_l \quad L \mid R \mid N)$. ($N$ pour "no move".)

   Montrer qu'on peut simuler toute MT à quintuplets (simple ou à oracle) par une MT à quadruplets.
2. On peut permettre plusieurs bandes, avec une tête de lecture-écriture par bande.

   - Définir ce modèle pour $k+1$ bandes, k étant un entier quelconque.
   - Montrer qu'on peut simuler une MT à 2 bandes par une MT à 1 bande.
   - Essayer d'évaluer le coût de cette simulation sans regarder le cours (le livre de Hopcroft & Ullman "Formal Languages and their Relation to Automata", Addison-Wesley, 1969, donne un certain nombre d'évaluations de ce genre).
3. On peut permettre plusieurs têtes de lecture-écriture par bande, et aussi remplacer les bandes par des structures plus compliquées, comme des matrices (non bornées) de cellules à 2 dimensions ou plus ("plan" ou "(hyper)volume" de travail), avec des mouvements élémentaires adaptés (N, NE, E, SE, S, SO, O, NO par exemple, en suivant la rose des vents dans un "plan de travail" à 2 dimensions).
   Réfléchir à la façon de simuler de telles MT augmentées par les MT précédentes.
4. Enfin, on peut essayer de réduire la puissance en définissant des MT à 1/2 bandes. Définir ce modèle et montrer qu'il est aussi puissant que celui des MT à bandes doublement infinies.
5. Définir un automate à pile déterministe [1] comme une MT à deux demi-bandes, la première correspondant à un flot d'entrée (en lecture seulement, tête allant dans un seul sens, arrêt forcé en fin d'entrée), et la seconde soumise aux restrictions usuelles des piles. [2]
6. Montrer par contre qu'une MT à 2 piles est équivalente à une MT à une bande.

1. Pas de transition avec ε en entrée, pas deux arcs quittant un état avec le même symbole d'entrée et la même chaîne lue en haut de pile (il est toujours possible d'éliminer les ε d'un AP, mais pas toujours possible de le déterminiser).
2. Ce modèle est nécessairement moins puissant que celui des MT générales, puisque les AP ne peuvent calculer que des langages hors-contexte, tous décidables.

[3]

3. page vide intentionnellement.