



第二章 椭圆型方程的有限差分法

有限差分法是通过数值微商或数值积分离散定解问题, 导出相应代数方程组, 从而获得微分方程数值解的方法, 其基本步骤是:

- 1) 对求解域作网格剖分;
- 2) 构造逼近微分方程定解问题的差分格式;
- 3) 解代数方程组获得定解问题的数值解;
- 4) 分析数值解的稳定性和收敛性等.

§1 差分逼近的基本概念

考虑二阶常微分边值问题

$$\begin{cases} Lu \triangleq -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + r\frac{du}{dx} + qu = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $p \in C^1([a, b])$, $p(x) \geq p_{\min} > 0$, $r, q, f \in C([a, b])$, α, β 为常数.

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

第 1 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



将区间 $[a, b]$ N 等分:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b,$$

其中 $x_i = a + ih$ 称为**网格节点**, $h = \frac{b-a}{N}$ 称为**步长**. 由Taylor公式有

$$\begin{aligned}\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} &= u''(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4), \\ \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} &= u'(x_i) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4).\end{aligned}$$

即

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4), \quad (2)$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4). \quad (3)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第2页共51页

返回

全屏显示

关闭

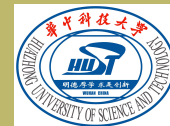
退出

将(2), (3)代入(1)得

$$\begin{aligned} & -p(x_i) \left[\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4) \right] \\ & + [r(x_i) - p'(x_i)] \left[\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4) \right] \\ & + q(x_i)u(x_i) = f(x_i). \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & -p(x_i) \left[\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \right] \\ & + [r(x_i) - p'(x_i)] \left[\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} \right] + q(x_i)u(x_i) \\ & = f(x_i) + \frac{h^2}{12} \left[2(r(x_i) - p'(x_i))u^{(3)}(x_i) - p(x_i)u^{(4)}(x_i) \right] + \mathcal{O}(h^4), \\ & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{4}$$



访问主页

标题页



第 3 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



在上式中去掉余项

$$R_i(u) \triangleq \frac{h^2}{12} \left[2(r(x_i) - p'(x_i))u^{(3)}(x_i) - p(x_i)u^{(4)}(x_i) \right] + \mathcal{O}(h^4), \quad (5)$$

并记

$$\begin{aligned} u_i &\approx u(x_i), & r(x_i) &= r_i, & p(x_i) &= p_i, \\ p'(x_i) &= p'_i, & q(x_i) &= q_i, & f(x_i) &= f_i, \end{aligned}$$

则得差分格式

$$\begin{aligned} L_h u_i &\triangleq -p_i \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + (r_i - p'_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

称 $R_i(u)$ 为(6)的**局部截断误差**. 若将(4)写为

$$L_h u(x_i) = f(x_i) + R_i(u),$$

则由(1)有

$$R_i(u) = L_h u(x_i) - Lu(x_i). \quad (7)$$

因此 $R_i(u)$ 可视为有差分算子 L_h 代替微分算子 L 所引起的截断误差, 其量级为 $\mathcal{O}(h^2)$.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 4 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

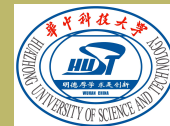
退出

由差分格式(6)联合边界条件即得(1)的差分方法

$$\begin{cases} -p_i \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) + (r_i - p'_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \end{cases} \quad (8)$$

记 $r_i - p'_i = d_i$, 则差分格式(8)可写为

$$\begin{bmatrix} \frac{2p_1}{h^2} + q_1 & \frac{d_1}{2h} - \frac{p_1}{h^2} & & & \\ -\left(\frac{d_2}{2h} + \frac{p_2}{h^2}\right) & \frac{2p_2}{h^2} + q_2 & \frac{d_2}{2h} - \frac{p_2}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\left(\frac{d_{N-2}}{2h} + \frac{p_{N-2}}{h^2}\right) & \frac{2p_{N-2}}{h^2} + q_{N-2} & \frac{d_{N-2}}{2h} - \frac{p_{N-2}}{h^2} \\ & & & -\left(\frac{d_{N-1}}{2h} + \frac{p_{N-1}}{h^2}\right) & \frac{2p_{N-1}}{h^2} + q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \left(\frac{d_1}{2h} + \frac{p_1}{h^2}\right)\alpha \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} - \left(\frac{d_{N-1}}{2h} - \frac{p_{N-1}}{h^2}\right)\beta \end{bmatrix}. \quad (9)$$



访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 5 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



方程组(9)可用追赶法或迭代法求解. 以下记 $I_h = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ 为内节点集, $\bar{I}_h = I_h \cup \{x_0, x_N\}$. 定义在 I_h 上的插值函数 $u_h: u_h(x_i) = u_i$ 称为 I_h 上的**网格函数**. 对 I_h 上的网函数引进范数

$$\|u_h\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i|, \quad \|u_h\|_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h u_i^2},$$

$$\|u_h\|_1 = \sqrt{\|u_h\|_0^2 + |u_h|_1^2}, \quad |u_h|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^N h \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)^2}.$$

若无特殊声明, 则 $\|\cdot\|$ 表示上述任一种范数.

定义2.1 设 \mathcal{M} 是某一充分光滑的函数类, $R_h(u)$ 为由(7)定义的网格函数, 若 $\forall u \in \mathcal{M}$ 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h(u)\| = 0,$$

则称差分算子 L_h 逼近微分算子 L , 且称差分格式(8)为相容的.

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 6 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

由(5)和(7)可知, 差分算子 L_h 逼近微分算子 L , 且有

$$\|R_h(u)\|_C = \mathcal{O}(h^2), \quad \|R_h(u)\|_0 = \mathcal{O}(h^2), \quad \|R_h(u)\|_1 = \mathcal{O}(h).$$

定义2.2 称差分解 u_h 收敛到边值问题的解 u , 若当 h 充分小时, (8)的解 u_h 存在, 且按某一范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0.$$

记误差 $e_i = u(x_i) - u_i$, 则由(7)有

$$L_h e_i = R_i(u), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10)$$

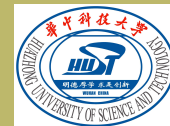
此外由边值条件有 $e_0 = e_N = 0$.

定义2.3 称差分方程 $L_h v_i = f_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$; $v_0 = v_N = 0$)关于右端稳定, 若存在与网格 I_h 及右端网格函数 f_h ($f_h(x_i) = f_i$)无关的正常数 M 和 h_0 , 使得当 $0 < h < h_0$ 时

$$\|v_h\| \leq M \|f_h\|_R,$$

其中 $\|\cdot\|_R$ 为任意范数, $v_h(x_i) = v_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$).

定义2.3中不等式意味着 v_h 连续依赖于右端 f_h .

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[第 7 页 共 51 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



定理2.1 若边值问题(1)的解 u 充分光滑, 差分方程按 $\|\cdot\|_R$ 满足相容条件, 且关于右端稳定, 则差分解 u_h 按 $\|\cdot\|$ 收敛到边值问题的解, 且有和 $\|R_h(u)\|_R$ 相同的收敛阶.

证明 由右端稳定, 相容性及(10)有

$$\|e_h\| \leq M \|R_h(u)\|_R \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

故此结论成立. ■

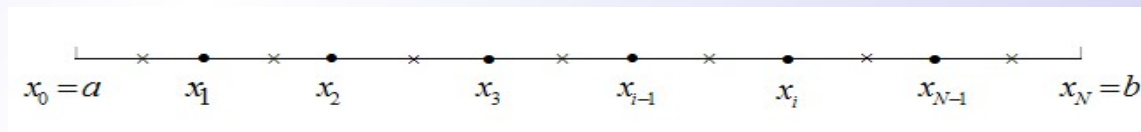
§2. 两点边值问题的非等距差分格式

§2.1 直接差分法

考虑两点边值问题(1), 将区间 $[a, b]$ 分成 N 个小区间

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_N = b.$$

并记 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $x_i = x_{i-1} + h_i$, $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$, $I_h = \{x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}\}$ (内点集), $\bar{I} = I_h \cup \{x_0, x_N\}$.



访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 8 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



进一步, 取相邻节点 x_{i-1}, x_i 的中点 $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) (称为**半整数节点**), 则形成新的网格集:

$$a = x_0 < x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_N = b.$$

则称之为**对偶剖分**. 将方程(1)在内节点 x_i 离散化. 由Taylor展式得

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{h_i + h_{i+1}} = u'(x_i) + \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{2}\right)u''(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \quad (11)$$

$$p(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} = p(x_{i-\frac{1}{2}})u'(x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{h_i^2}{24}p(x_i)u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(h^3), \quad (12)$$

$$p(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} = p(x_{i+\frac{1}{2}})u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{h_{i+1}^2}{24}p(x_i)u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(h^3). \quad (13)$$

由 $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h_{i+1}}{2}$, $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h_i}{2}$, (12)与(13)有

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 9 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



$$\begin{aligned} & \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[p(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} - p(x_{i-\frac{1}{2}}) \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} \right] \\ &= \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_i} + \frac{h_{i+1} - h_i}{4} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(p \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_i} + \frac{h_{i+1} - h_i}{12} p(x_i) u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (14)$$

记 $p_{i-\frac{1}{2}} = p(x_{i-\frac{1}{2}})$, $r_i = r(x_i)$, $q_i = q_i(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, 则由(11),(14)及(1)得

$$\begin{aligned} L_h u(x_i) &\triangleq -\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} \right] \\ &\quad + \frac{r_i}{h_i + h_{i+1}} [u(x_{i+1}) - u(x_i)] + q_i u(x_i) = f_i + R_i(u), \end{aligned} \quad (15)$$

其中差分算子 L_h 的截断误差

$$R_i(u) = - \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{12} \right) \left[3 \frac{d^2}{dx^2} \left(p \frac{du}{dx} \right) + p \frac{d^3 u}{dx^3} - 6r \frac{d^2 u}{dx^2} \right]_{x_i} + \mathcal{O}(h^2). \quad (16)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 10 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



记 $u_i \approx u(x_i)$, 舍去 $R_i(u)$ 得逼近边值问题(1)的差分方法

$$\begin{cases} L_h u_i \triangleq -\frac{2}{h_i+h_{i+1}} \left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i-u_{i-1}}{h_i} \right) + \frac{r_i}{h_i+h_{i+1}} (u_{i+1} - u_i) \\ \quad + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \end{cases} \quad (17)$$

由(15)-(17)得 $R_i(u) = L_h(u(x_i) - u_i)$. 以 $R_h(u)$ 表示由 $R_i(u)$ 定义的网格函数, 则知截断误差

$$\|R_h(u)\|_C = \mathcal{O}(h), \quad \|R_h(u)\|_0 = \mathcal{O}(h).$$

当取均匀网格时, 即 $h_1 = h_2 = \dots = h_N = h$, 则差分法(17)简化为

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2} [p_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) u_i + p_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1}] + \frac{r_i}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) \\ \quad + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \end{cases} \quad (18)$$

此时, 截断误差满足

$$\|R_h(u)\|_C = \mathcal{O}(h^2), \quad \|R_h(u)\|_0 = \mathcal{O}(h^2),$$

其精度提高1阶.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 11 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

§2.2 有限体积法

为简单见, 考虑守恒型方程

$$\begin{cases} Lu \triangleq -\frac{d}{dx}(pu') + qu = f(x), \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \quad (19)$$

记 $W(x) = p(x)u'(x)$, 在对偶单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 上积分(19)的微分方程

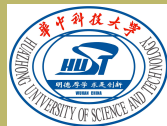
$$W(x_{i-\frac{1}{2}}) - W(x_{i+\frac{1}{2}}) + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx, \quad (20)$$

由 $u'(x) = W(x)/p(x)$ 得

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{p(x)} dx \approx W(x_{i-\frac{1}{2}}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)}.$$

从而

$$W(x_{i-\frac{1}{2}}) = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \quad \text{这里 } a_i = \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1}. \quad (21)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[第 12 页 共 51 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

又

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q u dx \approx \frac{h_i + h_{i+1}}{2} d_i u_i, \quad \text{这里 } d_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q dx. \quad (22)$$

将(21),(22)代入(20)得守恒型差分法

$$-\left[a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}) d_i u_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}) \varphi_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (23)$$

这里

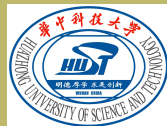
$$\varphi_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx.$$

若 p, q, f 连续, 则由中矩公式有

$$a_i = p_{i-\frac{1}{2}}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i; \quad (24)$$

或由梯形公式有

$$a_i = \frac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1} + p_i}, \quad d_i = \frac{1}{2}(q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}), \quad f_i = \frac{1}{2}(f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}). \quad (25)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 13 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§2.3 边界条件的处理

若边界条件为第二、三类情形

$$u'(a) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1, \quad u'(b) = \beta_0 u(b) + \beta_1. \quad (26)$$

最简单的离散方法是用数值微商

$$u'(a) \approx \frac{u_1 - u_0}{h_1}, \quad u'(b) \approx \frac{u_N - u_{N-1}}{h_N}$$

逼近(26)中的导数项. 但其有两个缺点: 一是截断误差的阶一般会比内节点的阶低; 二是破坏了对称性. 为此我们一般采用有限体积法处理边界条件. 因 $p(x) > 0$, 故不失一般性可考虑边界条件

$$-p(a)u'(a) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1, \quad -p(b)u'(b) = \beta_0 u(b) + \beta_1. \quad (27)$$

将(19)中微分方程在 $[a, x_{\frac{1}{2}}]$ 上积分得

$$W(a) - W(x_{\frac{1}{2}}) + \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} q u dx = \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} f(x) dx. \quad (28)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 14 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 15 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

而
$$W(x_{\frac{1}{2}}) \approx a_1 \frac{u_1 - u_0}{h_1}, \quad \text{这里 } a_1 = \left(\frac{1}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1},$$

$$W(a) = p(a)u'(a) = -(\alpha_0 u_0 + \alpha_1),$$

$$\int_a^{x_{\frac{1}{2}}} q u dx = \frac{h_1}{2} d_0 u_0, \quad \text{这里 } d_0 = \frac{2}{h_1} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} q dx,$$

$$\int_a^{x_{\frac{1}{2}}} f dx = \frac{h_1}{2} \varphi_0, \quad \text{这里 } \varphi_0 = \frac{2}{h_1} \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} f dx.$$

将上述各式代入(28)得

$$-a_1 \frac{u_1 - u_0}{h_1} + (-\alpha_0 + \frac{h_1}{2} d_0) u_0 - (\alpha_1 + \frac{h_1}{2} \varphi_0) = 0. \quad (29)$$

类似地, 将微分方程在区间 $[x_{N-\frac{1}{2}}, b]$ 积分可得

$$a_N \frac{u_N - u_{N-1}}{h_N} + (\beta_0 + \frac{h_N}{2} d_N) u_N + (\beta_1 - \frac{h_N}{2} \varphi_N) = 0. \quad (30)$$

其中

$$a_N = \left(\frac{1}{h_N} \int_{x_N}^{x_{N-1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1}, \quad d_N = \frac{2}{h_N} \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^b q dx, \quad \varphi_N = \frac{2}{h_N} \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^b f dx.$$

联立(23),(29),(30)即可获得下列边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(pu') + qu = f(x), \\ -p(a)u'(a) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1, \\ -p(b)u'(b) = \beta_0 u(b) + \beta_1, \end{cases} \quad (31)$$

的差分求解格式.

§3 二维椭圆边值问题的差分格式

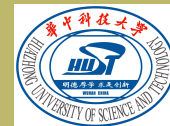
考虑Poisson方程

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (32)$$

这里, $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为Laplace算子, G 是 xy 平面上的有界域, 其边界 Γ 为分段光滑曲线. $u(x, y)$ 可在 Γ 上满足下列边值条件之一:

$$u|_{\Gamma} = \alpha(x, y) \quad (\text{第一类}), \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \beta(x, y) \quad (\text{第二类}), \quad (34)$$



访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 16 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + ku\right)|_{\Gamma} = \gamma(x, y) \text{ (第三类)}, \quad (35)$$

其中 $f, \alpha, \beta, \gamma, k(\neq 0)$ 均为连续函数, \vec{n} 为边界 Γ 的外法线方向.

§3.1 五点差分格式

作两族与坐标轴 X, Y 平行的直线

$$x = ih_1, \quad y = jh_2, \quad i, j = 0, \pm 1, \dots$$

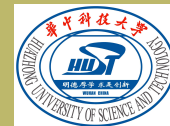
其中 h_1, h_2 分别为 x, y 轴方向的步长, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, 其两族直线的交点 (ih_1, jh_2) 称为网格点或节点, 记为 (x_i, y_j) . 若

$$\left|\frac{x_i - x_{i'}}{h_1}\right| + \left|\frac{y_j - y_{j'}}{h_2}\right| = 1 \quad \text{或} \quad |i - i'| + |j - j'| = 1,$$

则 (x_i, y_j) 与 $(x_{i'}, y_{j'})$ 是相邻的. 以下记

$$\Gamma_h = \{\text{网线 } x = x_i \text{ 或 } y = y_j \text{ 与 } \Gamma \text{ 的交点}\} \text{ (} G \text{ 的界点集),}$$

$$G_h = \{(x_i, y_j) \in G\} \text{ (} G \text{ 的内点集), } \quad \bar{G}_h = G_h \cup \Gamma_h.$$



访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

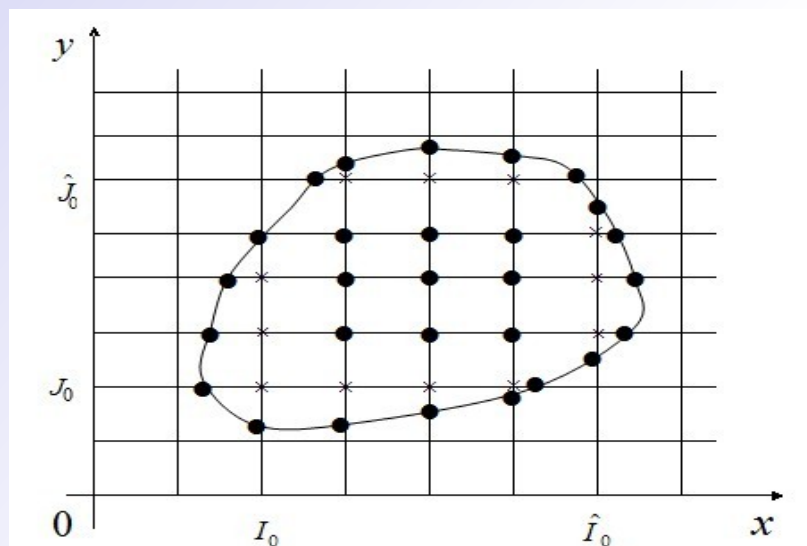
第 17 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



若内节点 (x_i, y_i) 的四个邻点均属于 G_h , 称 (x_i, y_j) 为**正则内节点**. 当 (x_i, y_j) 为内节点时, 沿 x, y 方向分别用二阶中心差商代替 u_{xx} 和 u_{yy} , 则得五点差分格式

$$-\Delta_h u_{ij} \triangleq - \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \right] = f_{ij},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M, \quad (36)$$

其中 $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, $f_{ij} = f(x_i, y_j)$.

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 18 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



又由Taylor展式有

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_1^2} \\ &= \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial x^6} + \mathcal{O}(h_1^6), \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_2^2} \\ &= \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial y^6} + \mathcal{O}(h_2^6), \quad (38) \end{aligned}$$

从而得差分算子 $-\Delta_h$ 的截断误差

$$\begin{aligned} R_{ij}(u) &= \Delta u(x_i, y_j) - \Delta_h u(x_i, y_j) \\ &= -\frac{1}{12} \left(h_1^2 \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + \mathcal{O}(h^4) = \mathcal{O}(h^2). \quad (39) \end{aligned}$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

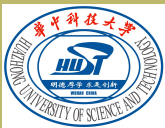
第 19 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

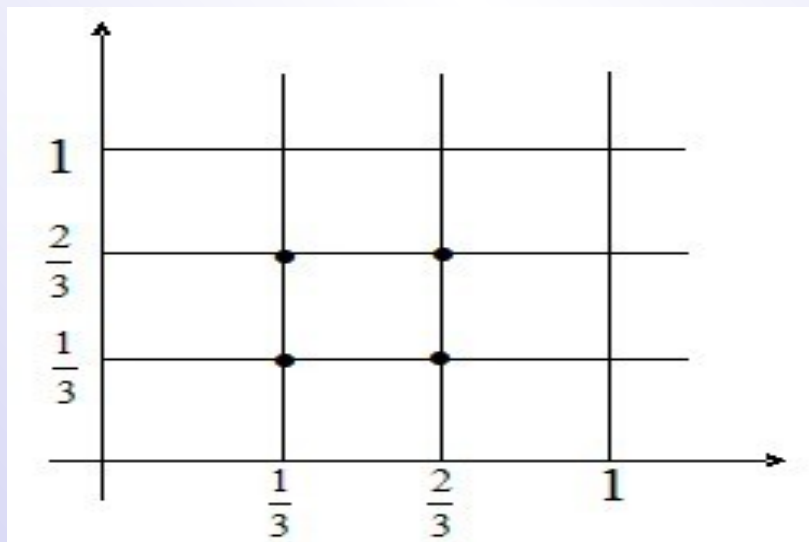


特别取正方形网格: $h_1 = h_2 = h$ 时, 差分格式(36)可简化为

$$u_{ij} - \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) = \frac{h^2}{4}f_{ij},$$
$$i, j = 1, 2, \dots, M. \quad (40)$$

例1 试用差分格式(40)求解Laplace方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D := \{(x, y) : 0 < x, y < 1\} \\ u(x, y) = \ln[(1+x)^2 + y^2], & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$



访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 20 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

解 取网格步长 $h_1 = h_2 = h = \frac{1}{3}$, 则网格点为

$$x_i = \frac{i}{3}, \quad y_j = \frac{j}{3}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

由于边界条件为第一类, 则只须求网格内节点上的逼近值:
 $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$. 由(40)有

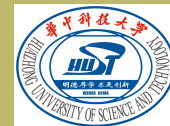
$$\begin{cases} u_{11} - \frac{1}{4}(u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12}) = 0 \\ u_{12} - \frac{1}{4}(u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13}) = 0 \\ u_{21} - \frac{1}{4}(u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22}) = 0 \\ u_{22} - \frac{1}{4}(u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23}) = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{01} + u_{10} \\ u_{02} + u_{13} \\ u_{20} + u_{31} \\ u_{32} + u_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln[(1 + \frac{1}{3^2})(\frac{4}{3})^2] \\ \ln[(1 + (\frac{2}{3})^2)(1 + (\frac{4}{3})^2)] \\ \ln[(\frac{5}{3})^2(2^2 + (\frac{1}{3})^2)] \\ \ln[(2^2 + (\frac{2}{3})^2)((\frac{5}{3})^2 + 1)] \end{bmatrix}$$

解之得

$$u_{11} = 0.634804, \quad u_{12} = 1.059993, \quad u_{21} = 0.798500, \quad u_{22} = 1.169821. \quad \blacksquare$$



访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 21 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.2 九点差分格式

以下, 我们继续推导九点差分格式. 由(39)得

$$\begin{aligned}
 \Delta_h u(x_i, y_j) &= \Delta u(x_i, y_j) + \frac{1}{12} \left(h_1^2 \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= \Delta u(x_i, y_j) + \frac{1}{12} \left(h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= -f(x_i, y_j) - \frac{1}{12} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} + \mathcal{O}(h^4).
 \end{aligned}$$

此外

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 22 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{u''_{xx}(x_i, y_{j+1}) - 2u''_{xx}(x_i, y_j) + u''_{xx}(x_i, y_{j-1})}{h_2^2} + \mathcal{O}(h_2^2) \\
&= \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_{j+1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) \\
&\quad - 2[u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)] \\
&\quad + u(x_{i+1}, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j-1})\} + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\Delta_h u(x_i, y_j) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12h_1^2 h_2^2} \{4u(x_i, y_j) - 2[u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) \\
&\quad + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1})] + u(x_{i-1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) \\
&\quad + u(x_{i+1}, y_{j+1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1})\} \\
&= -f(x_i, y_j) - \frac{1}{12} \left[h_1^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \right] + \mathcal{O}(h^4). \quad (41)
\end{aligned}$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 23 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



舍去截断误差 $\mathcal{O}(h^4)$, 得九点差分格式

$$\begin{aligned}
 & -\left\{ \Delta_h u_{ij} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12h_1^2 h_2^2} [4u_{ij} - 2(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) \right. \\
 & \quad \left. + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}] \right\} \\
 & = f_{ij} + \frac{1}{12} [h_1^2 f''_{xx}(x_i, y_j) + h_2^2 f''_{yy}(x_i, y_j)], \quad i, j = 1, 2, \dots, M. \quad (42)
 \end{aligned}$$

§3.3 有限体积法

本节, 我们用有限体积法推导求解Poisson方程(32)的五点格式. 为此, 我们以网格线:

$$x = x_i = ih_1, \quad y = y_j = jh_2, \quad i, j = 0, \pm 1, \dots$$

将求解域 G 作剖分, 并进一步对 G 做对偶剖分

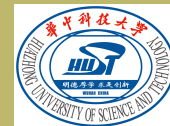
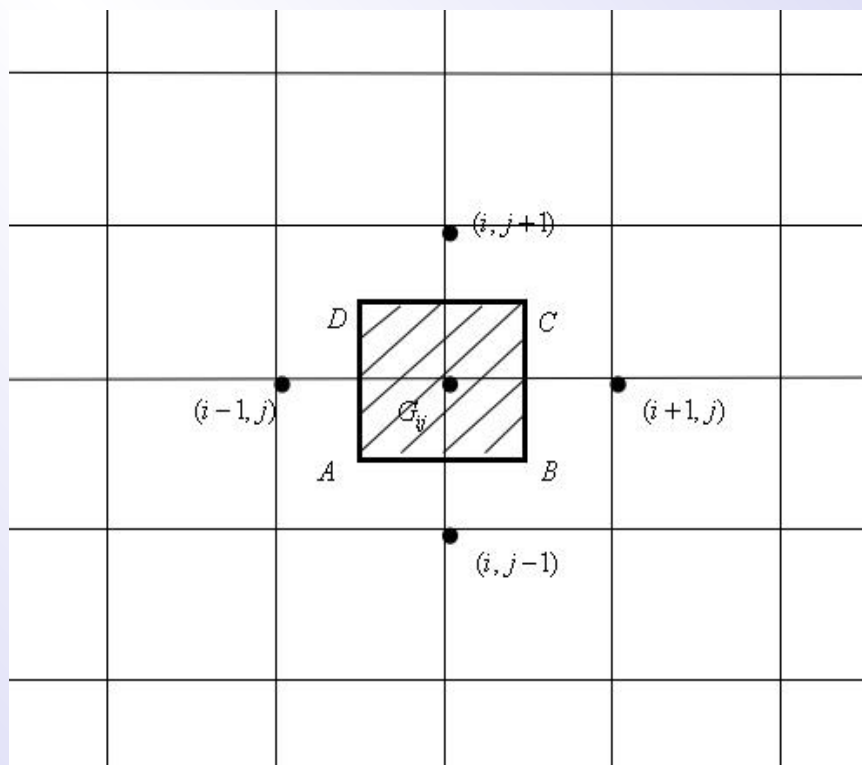
$$x = x_{i-\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2})h_1, \quad y = y_{j-\frac{1}{2}} = (j - \frac{1}{2})h_2, \quad i, j = 0, \pm 1, \dots$$

[访问主页](#)
[标题页](#)
[◀](#) [▶](#)
[◀](#) [▶](#)

第 24 页 共 51 页

[返回](#)
[全屏显示](#)
[关闭](#)
[退出](#)

网线交点属于 G 内部者为对偶剖分的内点, 网线与边界 Γ 的交点为对偶剖分的界点. 对于任一内点 (x_i, y_i) , 我们考虑对偶剖分的网点: $A(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}})$, $B(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}})$, $C(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$, $D(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$, 用记以 A, B, C, D 为顶点的矩形的内部区域为 G_{ij} .



访问主页

标题页



第 25 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



在 G_{ij} 上积分Poisson 方程(32), 并利用Green公式, 得到Poisson方程的积分守恒形式:

$$-\int_{\partial G_{ij}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int_{G_{ij}} f dxdy. \quad (43)$$

式中 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 表示 u 沿矩形 ∂G_{ij} 边界外法向的导数. 用中矩形公式逼近该矩形边界的线积分, 且用一阶差商逼近其外法向导数, 则

$$\begin{aligned} \int_{\partial G_{ij}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \int_{\overrightarrow{AB}} \frac{-\partial u}{\partial y} dx + \int_{\overrightarrow{BC}} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{\overrightarrow{CD}} \frac{\partial u}{\partial y} (-dx) + \int_{\overrightarrow{DA}} \frac{-\partial u}{\partial x} (-dy) \\ &\approx -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_j)} h_1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_j)} h_2 - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_j)} h_1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_j)} h_2 \\ &\approx \frac{u_{i,j-1} - u_{ij}}{h_2} h_1 + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1} h_2 + \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2} h_1 + \frac{u_{i-1,j} - u_{ij}}{h_1} h_2. \end{aligned}$$

将上式代入(43), 并除以 $h_1 h_2$, 即得五点差分格式:

$$-\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \right] = \varphi_{ij},$$

这里 $\varphi_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{G_{ij}} f dxdy \approx f_{ij}$.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 26 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

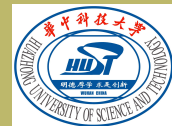
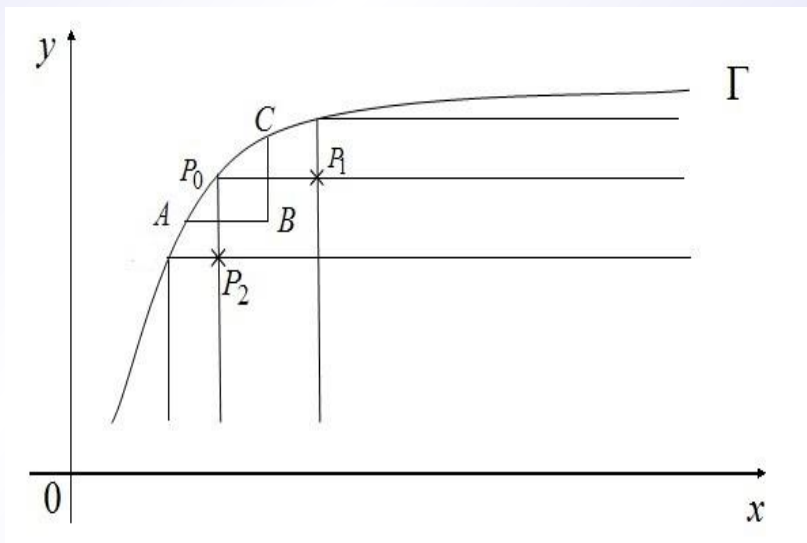
退出

§3.4 边值条件的处理

对于第一类边值条件, 若 $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in \Gamma_h$, 则取 $u_{ij} = \alpha(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$. 对于第二、三类边值条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + ku \right) |_{\Gamma} = \gamma,$$

我们假设边界节点均是两族网线的交点, 如图设 $P_0(x_{i_0}, y_{j_0})$ 是边界节点, $P_1(x_{i_0+1}, y_{j_0})$ 与 $P_2(x_{i_0}, y_{j_0-1})$ 是相邻的内节点. 过 $(x_{i_0+\frac{1}{2}}, y_{j_0})$, $(x_{i_0}, y_{j_0-\frac{1}{2}})$ 分别作与 y 轴和 x 轴平行的直线, 其与边界 Γ 截出一曲边 $\triangle ABC$. 在该曲边三角形上积分(32), 并利用 $Green$ 公式得

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 27 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



$$-\int_{\widehat{ABCA}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int_{\Delta ABC} f dx dy, \quad (44)$$

而 $\int_{\overline{AB}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \approx \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0}\right) \overline{AB} \approx \frac{u_{P_2} - u_{P_0}}{h_2} \overline{AB},$

$$\int_{\overline{BC}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0}\right) \overline{BC} \approx \frac{u_{P_1} - u_{P_0}}{h_1} \overline{BC},$$

$$\int_{\widehat{CA}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int_{\widehat{CA}} (\gamma - ku) ds \approx (\gamma - ku) \Big|_{P_0} \widehat{CA},$$

代入诸式于(44)得

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{u_{P_2} - u_{P_0}}{h_2} \overline{AB} + \frac{u_{P_1} - u_{P_0}}{h_1} \overline{BC} + (\gamma - ku) \Big|_{P_0} \widehat{CA} \right] \\ & = \int_{\Delta ABC} f dx dy. \end{aligned} \quad (45)$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

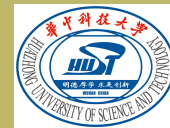
第 28 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§4 极坐标形式的差分格式

若求解域为圆域, 环形域或扇形域, 则采用极坐标是方便的. 此时可将 *Poisson* 方程化为

$$-\Delta_{r,\theta} u \triangleq - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = f(r, \theta), \quad (46)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = y/x$, $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 方程(46)于 $r = 0$ 奇异, 仅当 $r > 0$ 时才有意义, 为保证方程的解有意义, 我们设 u, u_r 在 $r = 0$ 及其邻近有界, 则由Taylor展式

$$u(0, \theta) = u(r, \theta) - ru_r(r, \theta) + \mathcal{O}(r^2), \quad r \rightarrow 0$$

有 $\lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$. 今取网格点

$$r_i = (i + 0.5)h_r, \quad \theta_j = (j + 1)h_\theta, \quad i = 0, 1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, J - 1.$$

其中 $h_r, h_\theta = \frac{2\pi}{J}$ 分别为变量 r, θ 的步长.

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 29 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



对任一点 (r_i, θ_j) ($i \geq 1$), 用中心差商公式得

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_{(r_i, \theta_j)} \approx \frac{1}{r_i} \frac{r_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1,j} - (r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}) u_{ij} + r_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1,j}}{h_r^2},$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]_{(r_i, \theta_j)} \approx \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_\theta^2}.$$

将上式代入(46)得

$$-\left[\frac{1}{r_i} \frac{r_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1,j} - (r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}) u_{ij} + r_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1,j}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_\theta^2} \right] = f(r_i, \theta_j). \quad (47)$$

下面用有限体积法导出点 (r_0, θ_j) 的差分方程. 以 r 乘方程(46), 并将其两边在域 $\{(r, \theta) : \epsilon \leq r \leq h_r, \theta_{j-\frac{1}{2}} \leq \theta \leq \theta_{j+\frac{1}{2}}\}$ 上积分, 然后令 $\epsilon \rightarrow 0$, 且利用条件: $\lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ 可得

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 30 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



$$\begin{aligned}
 & -h_r \int_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial r} u(h_r, \theta) d\theta - \int_0^{h_r} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta_{j-\frac{1}{2}}) \right] dr \\
 & = \int_0^{h_r} r dr \int_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} f(r, \theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

利用中矩公式代替上述积分得

$$-h_r h_\theta \frac{\partial u(h_r, \theta_j)}{\partial r} - 2 \left[\frac{\partial u\left(\frac{h_r}{2}, \theta_{j+\frac{1}{2}}\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial u\left(\frac{h_r}{2}, \theta_{j-\frac{1}{2}}\right)}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{2} h_r^2 h_\theta f\left(\frac{h_r}{2}, \theta_j\right).$$

再用一阶差商代替一阶微商得点 (r_0, θ_j) 的差分方程

$$-h_r h_\theta \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h_r} - 2 \frac{u_{0,j+1} - 2u_{0,j} + u_{0,j-1}}{h_\theta} = \frac{1}{2} h_r^2 h_\theta f_{0,j},$$

即

$$-\frac{2}{h_r^2} \left[u_{1j} - u_{0j} + 2 \left(\frac{u_{0,j+1} - 2u_{0,j} + u_{0,j-1}}{h_\theta^2} \right) \right] = f_{0,j}. \quad (48)$$

将(47)与(48)联立即得逼近(46)的差分格式.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 31 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

§5 线性差分格式的迭代算法

线性常及偏微分方程边值问题经有限差分法离散后均形成一个大型稀疏线性方程组:

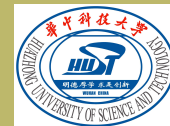
$$AX = b, \quad (49)$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 系数矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. 例如, 若记 I 为 $N-1$ 级单位阵,

$$X = (u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N-1,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{N-1,2}, \dots, u_{1,N-1}, u_{2,N-1}, \dots, u_{N-1,N-1})^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -I & & & \\ -I & \tilde{A} & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & \tilde{A} & -I \\ & & & -I & \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)},$$

则当应用五点差分格式(40)于Poisson方程第一类边值问题(32)-(33)时, 可导出一个大型分块三对角线性方程组: $AX = b$, 其中向量 b 由Poisson方程的右函数 $f(x, y)$ 在诸网格节点的值及边界函数 $\alpha(x, y)$ 在边界节点处的值确定.

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[第 32 页 共 51 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



众所周知, 求解线性方程组主要有三类方法, 即直接法、迭代法及Krylov子空间方法. 直接法通常有Gauss消元法、Cramer法则、Doolittle分解法(三角分解法、LU分解法)、Cholesky分解法(平方根法)、QR分解法及追赶法等, 但这些方法除追赶法适合于求解三对角线性方程组外, 其余方法由于其计算量大、计算速度慢、所需计算存储单元多等缺点一般均不适宜于求解大型线性方程组. 在实际求解线性常及偏微分方程边值问题的差分格式时, 人们通常采用迭代法、Krylov子空间方法及其它有效算法. 本节将主要介绍经典迭代法、交替方向迭代法及Krylov子空间方法中的二类重要方法: 共轭梯度法和预优共轭梯度法.

注: 如记迭代法的第 k 次迭代逼近值为 $X^{(k)}$, 残差 $r_k = b - AX^{(k)}$, 则由向量 $r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0$ 所张成的线性空间

$$\mathcal{K}(A, r_0, k+1) \triangleq \text{Span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\}$$

称为**Krylov子空间**.

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 33 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§5.1 一般单步迭代法

对于线性方程组(49), 我们有如下一般单步迭代格式

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + F, \quad k = 0, 1, 2, \dots; X^{(0)} \text{ 给定}, \quad (50)$$

其中 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 矩阵 B 称为其迭代格式的**迭代矩阵**. 若有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} = X^*,$$

则称其迭代格式是**收敛的**, 此时由(50) 二端取极限得

$$X^* = BX^* + F. \quad (51)$$

若方程组(51)与方程组(49)**相容**, 即存在可逆阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I - B) = A, \quad GF = b, \quad (52)$$

则方程组(51) 与(49) 等价. 从而 X^* 必为方程组(49) 的精确解, 因此我们可将迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 的某项 $X^{(k)}$ 作为精确解 X^* 的近似值.

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

第 34 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



定理 2.2 迭代格式(50)收敛的充要条件是其迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B) < 1$.

事实上, 当迭代法应用于高维线性方程组时, 利用其迭代阵的谱半径来判别收敛性是十分困难的, 因此有必要给出方便易行的收敛性判别准则. 下面我们给出一个利用矩阵范数来判别收敛性的准则, 其不但给出了收敛性判据, 而且给出了迭代法的先验与后验误差估计.

定理 2.3 若存在从属于某向量范数 $\|\cdot\|$ 的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得迭代法(50) 的迭代阵 B 满足 $\|B\| < 1$, 则该迭代法是收敛的, 且满足先验误差估计

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (53)$$

及后验误差估计

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (54)$$

其中 X^* 为方程组(49) 的精确解.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 35 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



后验误差估计(54) 通常可作为迭代法计算程序的终止准则, 即当用户要求数值解的精度满足: $\|X^{(k)} - X^*\| \leq \varepsilon$ 时, 我们仅需在计算程序中设置终止准则: $\frac{\|B\|}{1-\|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$. 通常, 我们也可近似地取终止准则为: $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$.

定理2.2和定理2.3是二个针对一般单步迭代法的收敛性判据. 对于具体单步迭代法的收敛性判据可参见教材《张诚坚, 李东方, 数值代数, 科学出版社, 2016》. 求解线性方程组有着多种收敛的迭代算法, 但其计算效率有时存在着较大差异. 评价一个算法计算效率的重要标志是其收敛速度. 对于单步迭代法(50), 由递推关系

$$X^{(k)} - X^* = B(X^{(k-1)} - X^*) = \cdots = B^k(X^{(0)} - X^*) \quad (55)$$

得 $\|X^{(k)} - X^*\| \leq \|B^k\| \|X^{(0)} - X^*\|$. 因此, 人们常常用

$$R_k(B) := -\ln \sqrt[k]{\|B^k\|}$$

来刻画迭代法的**收敛速度**. 特别, 当 B 为对称阵、Hermite阵或正规阵时, $\|B^k\|_2 = [\rho(B)]^k$. 因此 $R_k(B) = -\ln[\rho(B)]$.

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 36 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



对于分别具迭代阵 G, H 的二个迭代法而言, 在迭代过程中 $R_k(G), R_k(H)$ 常常无固定大小之分, 为此人们以 $R_\infty(B) := \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(B)$ 来比较二者的收敛速度, 并称之为**渐近收敛速度**.

定理 2.4 设单步迭代法(50)的迭代阵为 B , 则其渐近收敛速度

$$R_\infty(B) = -\ln[\rho(B)].$$

§5.2 经典迭代法

将线性方程组(49)的系数阵 A 分解为:

$$A = L + D + U, \quad (56)$$

这里, 我们假设 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 为可逆阵, 且

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 37 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



当初始迭代向量 $X^{(0)}$ 给定时, 据系数阵 A 的分解式(56)可得:

- **Jacobi 迭代公式**

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (57)$$

- **Gauss-Seidel 迭代公式**

$$X^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}UX^{(k)} + (D + L)^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (58)$$

通过引入松弛因子 $\omega > 0$, 我们进一步有下列加速迭代公式:

- **JOR迭代公式**

$$X^{(k+1)} = (I - \omega D^{-1}A)X^{(k)} + \omega D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (59)$$

这里 ω 可取其最佳松弛因子

$$\tilde{\omega}_{opt} = \frac{2}{2 - \lambda_{\max}^{B_J} - \lambda_{\min}^{B_J}},$$

其中 $\lambda_{\max}^{B_J}$, $\lambda_{\min}^{B_J}$ 分别表示Jacobi迭代阵 $B_J := -D^{-1}(L + U)$ 的最大和最小特征值.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 38 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



• SOR迭代公式

$$X^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1} \{ [(1 - \omega)D - \omega U]X^{(k)} + \omega b \}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (60)$$

这里 ω 可取其最佳松弛因子

$$\hat{\omega}_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2[-D^{-1}(L + U)]}},$$

其中 $\rho(\cdot)$ 为矩阵的谱半径.

§5.3 交替方向迭代法

设线性方程组(49)的系数阵 A 可分解为 $A = A_1 + A_2$. 据此, Peaceman和Rachford于1955年引入了如下求解方程组(49)的交替方向隐式(ADI)迭代格式:

$$\begin{cases} (I + \theta_k A_1)X^{(k+\frac{1}{2})} = (I - \theta_k A_2)X^{(k)} + \theta_k b, \\ (I + \theta_k A_2)X^{(k+1)} = (I - \theta_k A_1)X^{(k+\frac{1}{2})} + \theta_k b, \\ k = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (61)$$

这里 θ_k 为一个实参数序列.

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 39 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 40 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

对于上述ADI迭代格式, 我们具有如下收敛性判据.

定理 2.5 设方程组(49)的系数阵 A 有分解式 $A = A_1 + A_2$, 其中 A_1 和 A_2 为正实矩阵(即 $Y^T A_i Y > 0, \forall Y \in \mathbb{R}^n, Y \neq 0, i = 1, 2$), 且 $\theta_k > 0$, 则由ADI迭代格式(61)产生的迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 是收敛的. 此外, 若 A_1 和 A_2 为实对称正定阵, 且 $\theta_k \equiv \theta > 0$, 则由ADI迭代格式(61)产生的迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 也是收敛的.

当 A_1, A_2 不满足定理2.5中的条件或难以判断是否符合其条件时, 我们需采用其它方法进行分析. 例如, 对于求解Poisson方程第一边值问题的五点差分格式(36), 若定义:

$$(A_1 u)_{ij} = \frac{-u_{i-1,j} + 2u_{ij} - u_{i+1,j}}{h^2}, \quad (A_2 u)_{ij} = \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{ij} - u_{i,j+1}}{h^2},$$

$$(A_h u)_{ij} = (A_1 u)_{ij} + (A_2 u)_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M,$$

则(36)可等价地写成:

$$A_h u = A_1 u + A_2 u = b. \quad (62)$$

其中 $u = \{u_{i,j}\}$, 向量 b 由右函数 $f(x, y)$ 在诸网格节点的值及边界函数 $\alpha(x, y)$ 在边界节点处的值确定. 由此得其ADI迭代格式:



$$\begin{cases} (I + \theta_k A_1)u^{(k+\frac{1}{2})} = (I - \theta_k A_2)u^{(k)} + \theta_k b, \\ (I + \theta_k A_2)u^{(k+1)} = (I - \theta_k A_1)u^{(k+\frac{1}{2})} + \theta_k b, \\ k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (63)$$

该迭代格式由 $u^{(k)}$ 到 $u^{(k+1)}$ 只需交替解两个具分块三对角系数阵的方程组, 其可用P98习题2求解.

下面, 我们研究方法(63)的收敛性及其迭代参数 θ_k 的选择. 为简单见, 这里我们仅讨论单参数情形, 即 $\theta_k \equiv \theta > 0$. 由(62)可知差分解 u_i 满足下列等式:

$$\begin{cases} (I + \theta A_1)u = (I - \theta A_2)u + \theta b, \\ (I + \theta A_2)u = (I - \theta A_1)u + \theta b, \\ k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (64)$$

因此, 由(64)-(63)可推得迭代误差 $e^{(k)} := u - u^{(k)}$ 满足方程:

$$\begin{cases} (I + \theta A_1)e^{(k+\frac{1}{2})} = (I - \theta A_2)e^{(k)}, \\ (I + \theta A_2)e^{(k+1)} = (I - \theta A_1)e^{(k+\frac{1}{2})}, \\ k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (65)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 41 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



记 $T = (I + \theta A_2)^{-1}(I - \theta A_1)(I + \theta A_1)^{-1}(I - \theta A_2)$, 则将(65)中的过渡层 $e^{(k+\frac{1}{2})}$ 消去可得递推式:

$$e^{(k+1)} = T e^{(k)} = \dots = T^{k+1} e^{(0)}.$$

通过对迭代阵 T 的特征值分析可得其最佳参数 $\theta_{opt} = \frac{h^2}{2 \sin(\pi h)}$. 此时, T 的谱半径

$$\rho(T) = \frac{1 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h} < 1,$$

此表明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^{k+1} = 0$. 因此 $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{(k+1)} = 0$, 即当ADI迭代格式(63)取最佳参数 θ_{opt} 时, 其是收敛的.

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 42 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

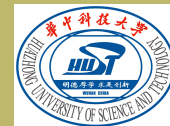
§5.4 共轭梯度法

设 n 维线性方程组(49)的系数阵 A 为实对称正定阵. 记 $r_k = b - AX^{(k)}$, 并取 $P_0 = r_0$, 则我们有如下**共轭梯度法**:

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{P_k^T A P_k}, & X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k P_k, \\ r_{k+1} = r_k - \alpha_k A P_k, & \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}, \\ P_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k P_k, & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (66)$$

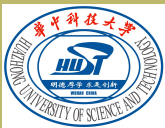
上述方法通常以 $\|r_k\| < \varepsilon$ 作为终止准则, 其中 $\varepsilon > 0$ 为预定精度. 理论分析表明共轭梯度法至多迭代 n 步即可获得方程组的精确解. 故共轭梯度法既是一种迭代法也是一种直接方法. 公式(66)中向量 P_i, r_i 具有下列性质:

- (1) $P_i^T r_j = 0, \quad 0 \leq i < j \leq k;$
- (2) $r_i^T r_j = 0, \quad i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq k;$
- (3) $P_i^T A P_j = 0, \quad i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq k$ (即 $\{P_i\}_{i=0}^k$ 是相互共轭正交的);
- (4) $\mathcal{K}(A, r_0, k+1) = \text{Span}\{r_0, r_1, \dots, r_k\} = \text{Span}\{P_0, P_1, \dots, P_k\}.$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 43 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



定理 2.6 设方程组(49)的系数阵 A 的特征值为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 则由共轭梯度法产生的迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 收敛于其方程组的精确解 X^* , 且满足

$$\|X^{(k)} - X^*\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_1}} \right)^k \|X^{(0)} - X^*\|_A, \quad (67)$$

其中 $\|X\|_A = \sqrt{X^T A X}$.

共轭梯度法的程序代码如下:

```
function X=congrad(A,b)
    n=length(b); X0=zeros(n,1); r0=b-A*X0; P0=r0;
while norm(r0)>=10^(-12)
        alpha=r0'*r0/(P0'*A*P0); X1=X0+alpha*P0;
        r1=r0-alpha*A*P0; beta=r1'*r1/(r0'*r0);
        P1=r1+beta*P0; r0=r1; X0=X1; P0=P1;
end
X0
```

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 44 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



对于系数阵 A 为正定阵的 n 维线性方程组, 当其最大特征值和最小特征值分别为 λ_n, λ_1 时, 其条件数 $\text{cond}(A)_\infty = \lambda_n/\lambda_1$. 由此可知, 当 $\lambda_n \gg \lambda_1$ 时, 该方程组为病态的, 否则其是良态的. 鉴此及定理2.6中的误差估计式(67)可知, 当方程组为良态时, 共轭梯度法的收敛速度较快; 当方程组为病态时, 共轭梯度法的收敛速度缓慢. 为提高共轭梯度法解病态方程组的计算效率, 以下我们引入**预优共轭梯度法**.

预优共轭梯度法的基本思想是: 首先通过引入一个 n 级对称正定阵 E 设法将病态方程组 $AX = b$ 转换为良态方程组 $\hat{A}\hat{X} = \hat{b}$, 其中 $\hat{A} = E^{-1}AE^{-1}$, $\hat{X} = EX$, $\hat{b} = E^{-1}b$; 然后应用共轭梯度法于上述良态方程组, 即产生下列计算方案

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\hat{r}_k^T \hat{r}_k}{\hat{P}_k^T \hat{A} \hat{P}_k}, & \hat{X}^{(k+1)} = \hat{X}^{(k)} + \alpha_k \hat{P}_k, \\ \hat{r}_{k+1} = \hat{r}_k - \alpha_k \hat{A} \hat{P}_k, & \beta_k = \frac{\hat{r}_{k+1}^T \hat{r}_{k+1}}{\hat{r}_k^T \hat{r}_k}, \\ \hat{P}_{k+1} = \hat{r}_{k+1} + \beta_k \hat{P}_k, & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (68)$$

为直接得到原方程组 $AX = b$ 的逼近解 $X^{(k)}$, 令

$$\hat{X}^{(k)} = EX^{(k)}, \quad \hat{r}_k = E^{-1}r_k, \quad \hat{P}_k = EP_k, \quad M = E^2,$$

$$\omega_k = AP_k, \quad \rho_k = r_k^T \zeta_k, \quad \zeta_k = M^{-1}r_k,$$

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

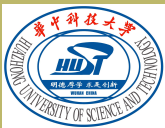
第 45 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



则计算方案(68)可等价地写成

$$\begin{cases} \omega_k = AP_k, \quad \alpha_k = \frac{\rho_k}{P_k^T \omega_k}, \quad X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k P_k, \\ r_{k+1} = r_k - \alpha_k \omega_k, \quad \zeta_{k+1} = M^{-1} r_{k+1}, \quad \rho_{k+1} = r_{k+1}^T \zeta_{k+1}, \\ \beta_k = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}, \quad P_{k+1} = \zeta_{k+1} + \beta_k P_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (69)$$

其程序代码如下:

```
function X=precongrad(A,b,M)
    n=length(b); X0=zeros(n,1); r0=b-A*X0;
    zeta0=M\r0; rho0=r0'*zeta0; P0=zeta0;
while norm(r0)>=10^(-12)
        omega=A*P0; alpha=rho0/(P0'*omega); X1=X0+alpha*P0;
        r1=r0-alpha*omega; zeta1=M\r1; rho1=r1'*zeta1;
        beta=rho1/rho0; P1=zeta1+beta*P0;
        r0=r1; X0=X1; P0=P1; rho0=rho1;
end
X0
```

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

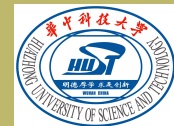
第 46 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出



上述算法中的矩阵 M 称为**预优矩阵**, 对于其选择人们已导出多种方法, 但其中有些方法异常复杂, 有的是针对非常特殊的方程组给出的. 这里, 我们介绍二种简单易行的方法:

[1] 若原方程组的系数阵为分块阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ii} 均是易于求逆的方阵, 则可取

$$M = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{pp}).$$

特别, 当原方程组系数阵的对角元素非零且有较大差异时, 则可取

$$M = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}).$$

[2] 若原方程组的系数阵可作如下不完全 Cholesky 分解

$$A = LL^T + R,$$

其中 L 为单位下三角阵, 且 $LL^T \approx A$, 则可取 $M = LL^T$.

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 47 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

§5.5 数值实例

考虑下列Poisson方程边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = \cos 3x \sin \pi y, & (x, y) \in G := (0, \pi) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \quad (70)$$

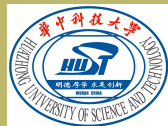
其精确解为 $u = (9 + \pi^2)^{-1} \cos 3x \sin \pi y$.

取 x, y 方向的步长分别为 $h_1 = \frac{\pi}{N}, h_2 = \frac{1}{N}$ ($N \in \mathbb{N}$), 网格节点为 $x_i = ih_1, y_j = jh_2, (i, j = 0, 1, \dots, N)$, 则求解域 G 被剖分为 N^2 个小矩形. 应用中心差分公式逼近(70)中微分方程的二阶偏导数, 即得下列计算格式:

$$-\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \right) = \cos 3x_i \sin \pi y_j, \\ i, j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (71)$$

其边界条件的离散为:

$$u_{i,0} = u_{i,N} = 0, \quad u_{0,j} = u_{1,j}, \quad u_{N,j} = u_{N-1,j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (72)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[第 48 页 共 51 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



当取 $N = 32$ 时, 应用共轭梯度法解差分格式(71)-(72)得其解曲面(见图1).

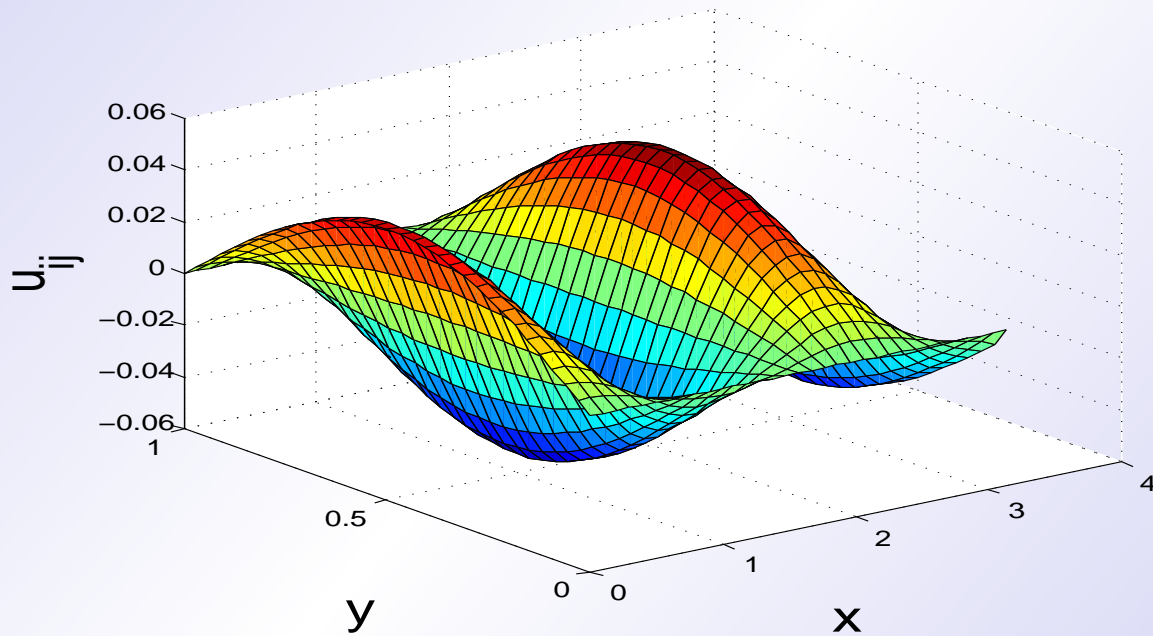


图1. 边值问题(70)的数值解曲面图.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 49 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出

定义上述数值解的误差 $e_{ij} = |u(x_i, y_j) - u_{i,j}|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 31$), 其数值解的误差曲面图见以下图2.

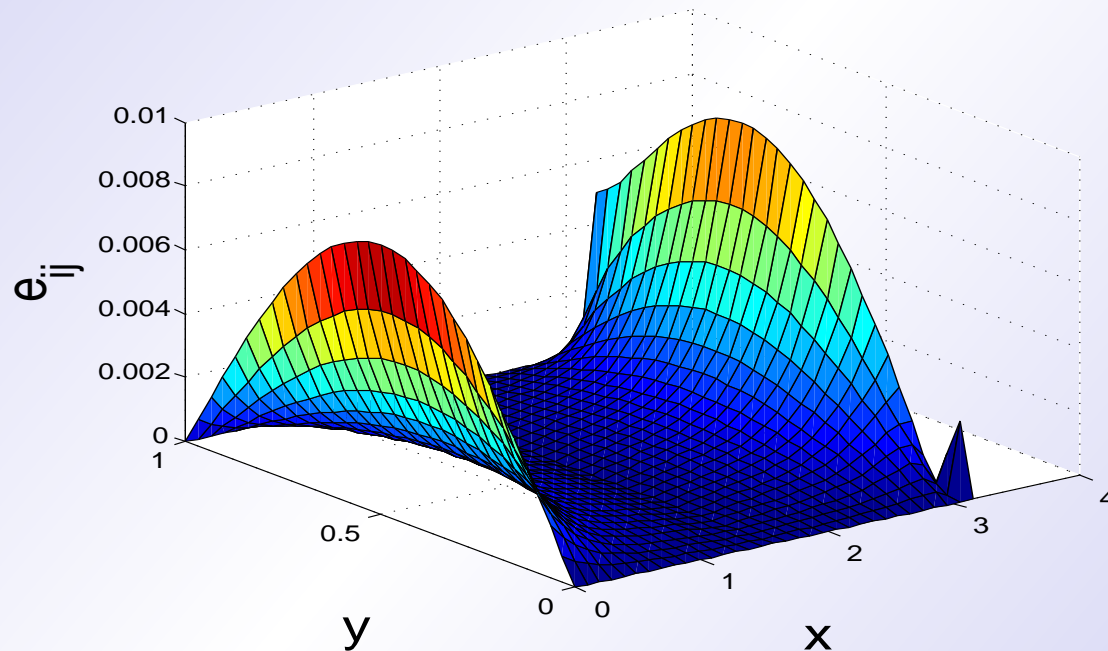


图2. 边值问题(70)的误差曲面图.

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 50 页 共 51 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



取迭代初值 $u^{(0)} = 1$, 依次用Jacobi迭代法, Gauss-Seidel(GS)迭代法, SOR迭代法($\omega = 1.45$), 单参数ADI迭代法和共轭梯度法解差分格式(71)-(72)($h = h_1 = h_2 = 1/2^i, i = 2, 3, 4, 5$). 其迭代步数见表1, 该表结果表明: GS迭代法的敛速几乎为Jacobi迭代法的2倍, 而SOR迭代法, ADI迭代法和共轭梯度法的敛速比GS迭代法更快.

表1 五种迭代法方法的迭代次数

	h	Jacobi迭代法	GS迭代法	SOR迭代法	ADI迭代法	共轭梯度法
迭	1/4	42	23	21	17	5
代	1/8	160	86	28	34	9
次	1/16	571	306	124	64	18
数	1/32	1974	1065	446	120	42

访问主页

标题页



第 51 页 共 51 页

返回

全屏显示

关闭

退出