ENSA5/FID/2023/2024

Rapport de projet

Réalisé par:

Manal Hamim

Estimation de la var d'un portefeuille

Contents

Introduction

La gestion des risques financiers joue un rôle essentiel dans la prise de décision stratégique pour les investisseurs et les gestionnaires de portefeuille. L'un des outils fondamentaux dans cette démarche est la mesure du risque à travers des techniques telles que la Value at Risk (VaR). La Valeur à Risque (VaR) est la mesure de risque la plus populaire en finance ,« La VaR est un outil qui permet d'estimer le risque total du portefeuille », défini par John C. Hull. Le risque total d'un portefeuille est catégorisé en deux composantes.

La Valeur à Risque Conditionnelle (CVaR), aussi appelée Expected Shortfall, est une mesure alternative qui a gagné en popularité au cours des dernières années. Contrairement à la VaR, elle est une mesure de risque cohérente qui prend en compte l'ensemble des pertes dans la queue de gauche de la distribution. Ce projet se concentre sur l'estimation de la VaR et CVae en utilisant trois approches différentes : historique, paramétrique et Monte Carlo. Chacune de ces méthodes présente des caractéristiques distinctes et offre une perspective unique sur la mesure du risque.

Chapter 1

Value at Risk

1.1 Risque de marché

Le risque de marché peut être définie comme le risque de fluctuation des prix à la hausse ou à la baisse des produits financiers (actions, obligations, dérivés) pouvant engendrer une plus ou moins-value lors d'une transaction pour son détenteur.

1.2 Les mesures de risques

Certains mesures du risque sont plus judicieuses que d'autres. Artzner et Delbaen, Eber et Heath (1997) ont énoncé certaines propriétés que des mesures de risque sensées devraient avoir, qu'ils appellent des mesures "cohérentes". Si l'on utilise

$$\rho(X)$$

pour représenter cette mesure de risque pour un ensemble de résultats X, les propriétés nécessaires sont les suivantes :

Sous-additivité :

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Cela signifie simplement que si on ajoute deux portefeuilles ensemble, le risque total ne peut pas être pire que d'additionner les deux risques séparément. En effet, il peut y avoir des effets d'annulation ou des économies d'échelle qui amélioreront le risque.

Monotonie Si$X \leq Y$ pour chaque scénario, alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$. De manière assez évidente, si un portefeuille a de meilleures valeurs qu'un autre dans tous les scénarios, son risque sera meilleur.

Homogénéité positive: Pour tout $> 0, (X) = (X)$.Si on double le portefeuille, on double le risque.

Invariance par translation : Pour toute constante c,$\rho(X + c) = \rho(X) - c$,Ceci signifie que, si le montant c est initialement investi dans la position, alors la variation de la mesure de risque est égale à a lui-même.

1.3 Value at Risk

La Value-At-Risk représente la perte potentielle maximale d'un investisseur sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs financiers qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon donné.

Elle est, en d'autres termes, la pire perte attendue sur un horizon de temps donné pour un certain niveau de confiance. La VaR peut être spécifiée pour un actif individuel, un portefeuille d'actifs ou pour une entreprise entière. Quelle que soit l'utilisation de la VaR, lorsque les risques de marché sont pris en considération, les analystes calculent en premier lieu la VaR sur un horizon temporel d'un jour.

La formule pour calculer la VaR à N-jour est donnée par:

$$\text{VaR}_{N\text{-jour}} = \text{VaR}_{\text{1-jour}} \cdot \sqrt{N}$$

L'expression mathématique est donnée par: :

$$P(V \leq V_0 - \text{VaR}) = \alpha$$

- V: Valeur terminale du portefeuille.
- V_0: Valeur initiale du portefeuille.
- VaR: Value-at-Risk.
- α: Le niveau de risque.

1.3.1 Hypothèses nécessaires au calcul de la VAR

La détermination de la Value-At-Risk repose principalement sur trois hypothèses:

- La première hypothèse, et non des moindres, concerne la normalité des distributions considérées. On suppose généralement que le prix d'un instrument financier suit une loi log-normale.

- La deuxième hypothèse concerne le lien entre une VAR à N jours et une VAR à 1 jour. En effet on considère que la VAR à N jours est égale à la racine carré de N multipliée par la VAR 1 jour.

- Enfin, la dernière hypothèse est que le rendement moyen d'un actif financier est nul pour la période considérée. (Si l'on s'attend à un rendement annuel moyen de 15% pour un certain actif, le rendement journalier moyen est de 15/252=0,06%, 252 correspondant au nombre de jours où la bourse est ouverte. Ainsi faire l'hypothèse d'un rendement journalier nul n'est donc pas restrictif).

1.3.2 Var Historique

La Value at Risk historique (VaR), également connue sous le nom de simulation historique ou méthode historique, fait référence à une manière particulière de calculer la VaR. Dans cette approche, nous calculons la VaR directement à partir des rendements passés. Par exemple, supposons que nous voulions calculer la VaR à 1 jour à 95 % pour une action en utilisant 100 jours de données. Le 95e percentile correspond au moins bon des pires 5 % des rendements. Dans ce cas, parce que nous utilisons 100 jours de données, la VaR correspond simplement au 5e pire jour.

Pour un titre à durée de vie infinie tel qu'une action, l'approche historique ne pourrait pas être plus simple. Pour des produits dérivés, tels que des options sur actions, ou d'autres instruments avec des durées de vie finies, comme des obligations, cela est légèrement plus compliqué.

1.3.3 Var Paramétrique

La méthode paramétrique ou méthode de variance-covariance a été introduite par le service RiskMetrics proposé par J.P. Morgan en 1995.

La VaR paramétrique repose sur l'hypothèse que les rendements des actifs suivent une loi normale. C'est globalement vrai pour un portefeuille contenant des actions voire même des obligations mais cette proposition est largement remise en cause dès lors que le portefeuille comprend des produits dérivés (options, futures, etc.) pour lesquels le profil de distribution des rendements est très asymétrique. Pour calculer la VAR, on doit d'abord estimer la volatilité du portefeuille ou du titre (), la valeur du portefeuille ou du titre (Vp) et, si nécessaire, le rendement attendu (expected return,). La formule pour $VaR_\alpha(X)$ est donnée par:

$$VaR_\alpha(X) = \mu(\Delta t) - z_\alpha \sigma(\Delta t)$$

Avec :

- α: Le niveau de risque.
- μ: L'espérance sur la période Δt.
- σ: L'écart-type sur la période Δt.

- z_α: Le quantile d'ordre α.

1.3.4 Var Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est un processus qui aide à générer des scénarios de prix aléatoires pour déterminer les mouvements approximatifs des prix futurs des actifs financiers. Dans l'application de l'estimation de la VaR par simulation de Monte Carlo, on peut générer la distribution de probabilité des taux de rendement des portefeuilles. Afin de calculer une VaR à 100 jours pour un portefeuille, la simulation de Monte Carlo suit les procédures ci-dessous :

- **Déterminer la dynamique des actifs du portefeuille:** Analyser et modéliser le comportement des actifs du portefeuille au fil du temps.
- **Utiliser la simulation de Monte Carlo:** Appliquer la simulation de Monte Carlo pour simuler la valeur de ces actifs sur une période de n-jours dans le futur.
- **Déterminer la valeur du portefeuille dans chaque scénario:** Calculer la valeur du portefeuille pour chaque itération de la simulation de Monte Carlo en utilisant la dynamique des actifs déterminée précédemment.
- **Déterminer le quantile d'ordre α:** Une fois les valeurs futures du portefeuille obtenues, calculer le quantile d'ordre α pour évaluer la Value at Risk (VaR_α) du portefeuille.

1.4 Conditionnal value at Risk

La CVaR est calculée en prenant une moyenne pondérée de la VaR estimée et de pertes attendues au-delà de la VaR. La CVaR est calculée en tant que VaR incrémentée de la probabilité pondérée des pertes dépassant la VaR. L'estimation de la VaR ne peut jamais dépasser l'estimation de la CVaR. la VaR conditionnelle CVaR. Pour une variable aléatoire X, elle est définie par :

$$CVaR_\alpha = E\left[-X \mid X < -VaR_\alpha(X)\right]$$

En d'autres termes, la VaR conditionnelle peut se définir comme l'espérance de la perte lorsque cette perte dépasse la VaR. Puisque la VaR mesure la valeur qui sépare les $1-\alpha\%$ de la distribution, on cherche à se focaliser sur la queue de distribution de la perte, les $\alpha\%$ restant, dont on ne connaît ni la distribution, ni l'espérance. Contrairement à la VaR, la CVaR est une mesure cohérente du risque qui respecte les axiomes définis par Artzner et introduits au premier chapitre.

Chapter 2

Application

2.1 Portefeuille equipondéré

Dans le cadre de ce projet, nous avons créé un portefeuille composé de six actifs : AAPL, AMZN, MSFT, GLD, TLT et JPM. Ce portefeuille a été construit en attribuant des poids égaux à chaque actif. Ensuite, nous avons procédé au calcul des rendements pour chaque actif ainsi que pour l'ensemble du portefeuille.

AAPL - Apple Inc. (Technology/Electronics)

AMZN - Amazon.com Inc. (E-commerce/Technology)

MSFT - Microsoft Corporation (Technology/Software)

JPM - JPMorgan Chase Co. - Financial Services/Banking

GLD - SPDR Gold Shares - Exchange-Traded Fund (ETF)/Gold

TLT - iShares 20+ Year Treasury Bond ETF - Exchange-Traded Fund (ETF)/Bonds

Date	AAPL	AMZN	GLD	JPM	MSFT	TLT	portfolio
2021-10-07	0.009043	0.012315	-0.005286	0.006311	0.005919	-0.010513	0.002076
2021-10-08	-0.002725	-0.004191	0.000426	0.000764	0.000000	-0.007023	-0.003681
2021-10-11	-0.000630	-0.012952	-0.001889	-0.021256	-0.002105	-0.002541	-0.008005
2021-10-12	-0.009145	0.000317	0.004504	-0.007711	-0.004599	0.016955	0.003811
2021-10-13	-0.004249	0.011314	0.017638	-0.026721	0.011643	0.009679	0.005067
...	...	...	...	...	...	...	...
2023-12-11	-0.013012	-0.010433	-0.011104	0.003652	-0.007860	-0.002118	-0.006134
2023-12-12	0.007889	0.010840	-0.000545	0.008886	0.008261	0.002964	0.006664
2023-12-13	0.016554	0.009179	0.022312	0.003358	-0.000027	0.023191	0.014217
2023-12-14	0.000757	-0.009586	0.005845	0.018029	-0.022803	0.022464	0.005733
2023-12-15	-0.004173	0.011432	-0.001591	0.006140	0.012006	-0.001617	0.004056

Aprés nous avons calculé la matrice de covariance entre ces actifs:

	AAPL	AMZN	GLD	JPM	MSFT	TLT	portfolio
AAPL	0.000329	0.000292	0.000010	0.000131	0.000251	0.000011	0.000158
AMZN	0.000292	0.000677	0.000026	0.000155	0.000336	0.000034	0.000294
GLD	0.000010	0.000026	0.000079	0.000002	0.000013	0.000039	0.000030
JPM	0.000131	0.000155	0.000002	0.000255	0.000111	-0.000015	0.000095
MSFT	0.000251	0.000336	0.000013	0.000111	0.000360	0.000012	0.000169
TLT	0.000011	0.000034	0.000039	-0.000015	0.000012	0.000145	0.000060
portfolio	0.000158	0.000294	0.000030	0.000095	0.000169	0.000060	0.000151

Aprés nous avons calculé la matrice de corrélation entre les différents actifs ce qui nous montre les actifs qui ont une corrélation positifs entre eux at les autres qui ont une corrélation négatifs entre eux.

	AAPL	AMZN	GLD	JPM	MSFT	TLT	portfolio
AAPL	1.000000	0.618891	0.061073	0.452747	0.729192	0.050632	0.837037
AMZN	0.618891	1.000000	0.112936	0.371894	0.680426	0.108269	0.818946
GLD	0.061073	0.112936	1.000000	0.010848	0.079279	0.361304	0.271311
JPM	0.452747	0.371894	0.010848	1.000000	0.365859	-0.077866	0.657319
MSFT	0.729192	0.680426	0.079279	0.365859	1.000000	0.052004	0.764794
TLT	0.050632	0.108269	0.361304	-0.077866	0.052004	1.000000	0.298645
portfolio	0.837037	0.818946	0.271311	0.657319	0.764794	0.298645	1.000000

Puis nous calculons le rendement moyen de ce portefeuille.On trouve le résultat suivant:

```
Expected Portfolio Return:       -176.31
```

2.1.1 Calcul de la var historique

Nous avons calculé la var historique pour ce portefeuille pour une periode T=100,pour different alpha: avec un investissement initial I=10000

```
Value at Risk 99th CI: 3175.78
Conditional VaR 99th CI: 4170.5
Value at Risk 97.5th CI: 2300.89
Conditional VaR 97.5th CI: 3323.91
Value at Risk 95th CI: 2028.96
Conditional VaR 95th CI: 2733.55
```

Cela signifie que, avec une probabilité de 95%, la perte maximale de 100 jours ne peut pas dépasser 2028.96 selon la simulation historique.Dans notre cas, le CVaR à 95% CI de 2733.55 indique que la moyenne des pertes au-delà du niveau VaR à 95% est de 2733.55. Ainsi on peut constater que plus le niveau de confiance est élevé, plus la mesure de risque est conservatrice.

2.1.2 Calcul de la var paramétrique

* Nous avons calculé la var paramétrique pour ce portefeuille pour une periode T=100,pour alpha=5: selon la méthode paramétrique,la perte maximale de 100 jours ne peut pas dépasser

	VaR 95th CI	**CVaR 95th CI**
Normal	2199.53	2713.52
t-distribution	2127.88	2828.47

Table 2.1: Value at Risk (VaR) and Conditional Value at Risk (CVaR) at 95th Confidence Interval

2199.53 et le CVaR à 95% CI de 2713.52 indique que la moyenne des pertes au-delà du niveau VaR à 95% est de 2713.52.

2.1.3 Calcul de la var monte carlo

le calcul de la de monte carlo nous donne le résultat suivant: VaR 1755.55 CVaR 2167.16 Ceci indique que selon la méthode de monte carlo,la perte maximale de 100 jours avec une probabilité de 95% ne peut pas dépasser 2199.53 et le CVaR à 95% CI de 2713.52 indique que la moyenne des pertes au-delà du niveau VaR à 95% est de 2713.52.

2.2 Portefeuille de variance minimale

Nous construisons un portefeuille de variance minimale. Selon cette stratégie, les poids des actifs détérminée après la résolution du problème d'optimisation sont :

Asset	Weight
AAPL	0.17546658
AMZN	0.13245057
GLD	0.15153128
JPM	0.1661963
MSFT	0.13878349
TLT	0.23557178

2.2.1 Var Historique

Pour ce portefeuille nous obtenons les résultats suivant pour le calcul de la var historique:

Confidence Interval	Value at Risk (VaR)	Conditional Value at Risk (CVaR)
99%	2611.86	3452.41
97.5%	2024.11	2780.29
95%	1699.97	2317.97

Cela signifie que, avec une probabilité de 95%, la perte maximale de 100 jours ne peut pas dépasser 1699.97 selon la simulation historique.Dans notre cas, le CVaR à 95% CI de 2317.97 indique que la moyenne des pertes au-delà du niveau VaR à 95% est de 2317.97.

2.2.2 Var Paramétrique

Risk Measure	Value at Risk (VaR)	Conditional Value at Risk (CVaR)
Normal, 95% CI	1728.02	2168.96
t-dist, 95% CI	1666.55	2267.58

Cela signifie que, avec une probabilité de 95%, la perte maximale de 100 jours ne peut pas dépasser 1728.02 selon la simulation paramétrique .Dans notre cas, le CVaR à 95% CI de 2168.96 indique que la moyenne des pertes au-delà du niveau VaR à 95% est de 2168.96.

2.2.3 Var monte carlo

Nois calculons la var et la cvar pour ce portefeuille et on obtient les résultats suivants: VaR 1611.1 CVaR 1951.78

Ceci indique que selon la méthode de monte carlo,la perte maximale de 100 jours avec une probabilité de 95% ne peut pas dépasser 1611.1 et le CVaR à 95% CI de 1951.78 indique que la moyenne des pertes au-delà du niveau VaR à 95% est de 1951.78.

2.3 Conclusion

Nous constatons que la VaR du portefeuille de variance minimale est inférieure à celle du portefeuille de poids équivalents, cela suggère que le portefeuille de variance minimale a une meilleure protection contre les pertes potentielles à un certain niveau de confiance.Cela souligne l'importance de la diversification basée sur la volatilité des actifs dans la construction de portefeuilles pour gérer le risque. Un portefeuille de variance minimale est construit en minimisant la variance du rendement du portefeuille, ce qui revient à réduire la volatilité globale du portefeuille. Une volatilité plus faible implique généralement des risques plus bas. Un portefeuille de poids équivalents, par contre, alloue la même proportion de capital à chaque actif sans tenir compte de leur volatilité respective. Cela peut conduire à un portefeuille plus équilibré en termes de répartition des actifs, mais il peut également entraîner une volatilité plus élevée si certains actifs sont naturellement plus volatils que d'autres.