ENSA5/FID/2023/2024

Rapport de projet

Réalisé par:

Manal Hamim

Valorisation des options en utilisant le modéle binomiale et trinomiale

Résumé

L'objectif du projet était de développer un outil de valorisation flexible pour estimer les prix des options dans différents contextes financiers. Le projet repose sur les modèles binomiaux et trinomiaux pour évaluer les options, en prenant en compte divers paramètres tels que le prix initial de l'actif sous-jacent, le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque, le temps jusqu'à l'échéance, ainsi que le type d'option (call ou put) et son style (européen ou américain). En résumé, ce projet a combiné des concepts financiers avec la puissance de Python pour créer un outil de valorisation d'options, illustrant comment la technologie peut être un atout essentiel pour la compréhension et l'application de concepts financiers sophistiqués.

Contents

Introduction

Dans le domaine de la finance, l'évaluation des options est une composante essentielle de la gestion des risques et de la prise de décisions en matière d'investissement. Les options, qu'elles soient européennes ou américaines, offrent aux investisseurs une flexibilité et une protection contre les fluctuations des marchés financiers. Comprendre et estimer de manière précise la valeur de ces options est donc d'une importance cruciale. Ce projet se penche sur la valorisation des options européennes et américaines en utilisant deux modèles de calcul bien établis : le modèle binomial et le modèle trinomial. Ces modèles fournissent une méthodologie discrète pour estimer la valeur d'une option à différentes étapes du temps, en prenant en compte des paramètres tels que la volatilité, le temps restant jusqu'à l'échéance, le taux d'intérêt sans risque et le prix de l'actif sous-jacent. Ce projet vise à explorer en profondeur les différences entre ces deux types d'options et à démontrer comment les modèles binomial et trinomial peuvent être utilisés pour estimer leurs valeurs respectives. Il mettra en évidence l'impact de divers paramètres sur la valorisation des options, tout en montrant comment l'augmentation du nombre d'étapes dans les modèles de calcul peut converger vers des résultats similaires, réduisant ainsi l'écart entre le modèle binomial et le modèle trinomial.

Chapter 1

Les produits dérivés

1.1 Introduction

Un dérivé est un instrument financier dont la valeur est basée sur celle d'un actif sous-jacent tel qu'une action, une matière première ou une devise. Les dérivés offrent aux investisseurs un moyen de réduire les risques associés à l'investissement. Les dérivés les plus courants sont les forwards, les futures et les options.

1.2 les forwards

Un contrat à terme entre deux parties oblige l'une d'entre elles à acheter un actif à un moment futur T pour un prix prédéfini K, le prix à terme, et demande à l'autre partie de vendre l'actif dans ces conditions. La partie qui accepte d'acheter l'actif est dite prendre une position longue, tandis que la partie qui vendra l'actif prend une position courte. Le paiement pour la partie en position longue est $ST - K$, tandis que celui pour la partie en position courte est $K - ST$. Le prix à terme K est fixé de manière à ce qu'il n'y ait aucun coût pour aucune des parties pour entrer dans le contrat.

1.3 les futures

Un contrat à terme future ,est un accord entre deux parties visant à acheter ou vendre un actif spécifié à un certain prix à une date future déterminée. Cependant, il existe d'importantes différences. Contrairement aux contrats à terme, les contrats à terme sont généralement négociés sur des bourses plutôt que d'être négociés directement entre les parties. De plus, contrairement à un prix à terme (forward), un prix à terme (futures) est négocié quotidiennement, et les différences quotidiennes sont perçues par le détenteur long du contrat. Le processus est mis en œuvre par l'intermédiaire de courtiers via des comptes sur marge, qui ont pour effet de protéger les parties contre le défaut.

1.4 Les options

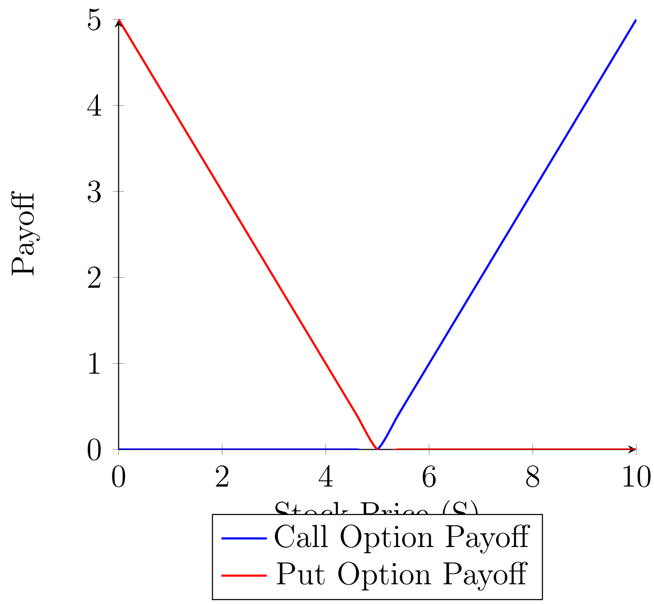
Une option est un contrat entre deux parties, le détenteur et l'émetteur, qui donne au premier le droit, mais pas l'obligation, d'acheter ou de vendre une valeur mobilière particulière selon les modalités spécifiées dans le contrat. Une option a une valeur, car le détenteur n'est pas obligé d'exercer le contrat et pourrait en tirer profit s'il le fait. Le détenteur de l'option est dit être en position longue, tandis que l'émetteur de l'option est en position courte. Une option d'achat (ou "call option" en anglais) est le droit d'acheter un actif particulier pour un montant convenu à un moment spécifié dans le futur. Nous exercerions l'option à l'échéance si le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice (strike) et non si le cours est inférieur.A l'échéance, la valeur de l'option est :

$$C = max(s - k, 0)$$

avec s represente le cours de l'action et k le le prix d'exercice. Une option de vente(ou "put") est le droit de vendre un actif particulier pour un montant convenu à une date spécifiée dans le futur. La fonction de paiement (payoff) pour une option de vente est :

$$max(E - S, 0)$$

Le graph suivant montre le payoff pour une option put et une option call:



Pour une option call;

ST>K L'option est dite "dans la monnaie"

ST=K L'option est dite "à la monnaie"

ST<K L'option est dite "hors de la monnaie"

Pour une option put:

ST<K L'option est dite "dans la monnaie"

ST=K L'option est dite "à la monnaie"

ST>K L'option est dite "hors de la monnaie"

1.4.1 Option européenne

Une option européenne est un type d'instrument financier dérivé qui confère à son détenteur le droit, mais pas l'obligation, d'acheter (dans le cas d'une option d'achat, appelée "call") ou de vendre (dans le cas d'une option de vente, appelée "put") un actif sous-jacent à un prix convenu, appelé "prix d'exercice", à une date d'échéance spécifique, appelée "date d'expiration". L'élément clé d'une option européenne est qu'elle ne peut être exercée qu'à la date d'expiration, contrairement à une option américaine qui peut être exercée à tout moment avant ou à la date d'expiration. En résumé, une option européenne est un contrat qui offre des droits à son détenteur à une date d'expiration précise et ne permet pas d'exercer ces droits avant cette date.

1.4.2 American option

Une option américaine est un type d'instrument financier dérivé qui confère à son détenteur le droit, mais pas l'obligation, d'acheter (dans le cas d'une option d'achat, appelée "call") ou de vendre (dans le cas d'une option de vente, appelée "put") un actif sous-jacent à un prix convenu, appelé "prix d'exercice", à tout moment avant ou à la date d'échéance spécifique, appelée "date d'expiration". L'élément clé d'une option américaine est la flexibilité accordée à son détenteur pour exercer l'option à n'importe quel moment avant la date d'expiration, ce qui signifie qu'il peut choisir d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent quand bon lui semble.

En résumé, une option américaine est un contrat qui offre des droits à son détenteur, notamment la possibilité d'exercer ces droits avant la date d'expiration, ce qui la distingue des options européennes qui ne peuvent être exercées qu'à la date d'expiration. Cette flexibilité accrue peut être un avantage pour les investisseurs, car elle permet de réagir aux mouvements du marché de manière opportune.

Chapter 2

Modéle binomiale et trinomiale

Dans ce chapitre, nous explorerons en détail les concepts clés qui sous-tendent ces modèles.

2.1 Espaces et hypothéses de travail

Les marchés financiers sont régis autant par des lois que par des hypothèses permettant leur bon fonctionnement ; Ainsi les économistes s'accordent sur un certain nombre d'hypothèses, bien que parfois étant à coté de la réalité.

H1:Le marché est liquide on peut acheter ou vendre à tout instant.

H2:On peut emprunter ou vendre à découvert.

H3:les échanges ont lieu sans côut de transaction.

H4:On peut emprunter et prête eux même taux constant r.

H5:Les actifs sont divisibles à l'infini. Ce qui revient à dire que l'on peut acheter une fraction d'un titre.

H6:Abscence d'opportunité d'arbitrage.

2.2 Arbitrage

L'arbitrage est un concept clé dans le domaine de la finance et des marchés financiers. Il se réfère à l'opportunité de réaliser un profit sans risque en exploitant les écarts de prix entre différents actifs ou marchés. L'arbitrage repose sur l'idée que les marchés ne sont pas toujours parfaitement efficients, ce qui signifie que des opportunités de profit sans risque peuvent se présenter lorsque les prix ne reflètent pas correctement la valeur réelle des actifs.

Un arbitrage est une stratégie de trading résultant un portefeuille avec une probabilité de risque =0 et une probabilité de gain supérieur strictement à zero.

Dans la suite ne supposerons que le marché vérifie l'hypothése d'abscence d'opportunité d'arbitrage

$$X(0) = 0etX(t) >= 0- > P(Xt > 0) = 0$$

2.3 Un portefeuille autofinançant:

Un portefeuille autofinancé, également connu sous le nom de "portefeuille sans risque", est un concept essentiel en finance qui désigne un ensemble d'actifs financiers qui peut être maintenu sans avoir besoin de capital additionnel. Ce type de portefeuille est conçu de manière à ce que les flux de trésorerie générés par les actifs à l'intérieur du portefeuille soient suffisants pour couvrir tous les coûts et obligations associés à ces actifs. Cela signifie que le portefeuille se finance essentiellement lui-même sans nécessiter de capitaux extérieurs. Un portefeuille autofinançant: Un portefeuille (,) est dit autofinançant si

$$B_n \Delta \phi_n + S_n \Delta \theta_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1$$

2.4 parity call put

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, les prix des calls et des puts à l'instant T sont reliés par la relation de parité call-put :

$$Ct - Pt = St - k * B(t, T)$$

Considérons les deux portefeuilles, V1 et V2. Pour le portefeuille V1, on achète un put européen, P_t, à l'instant t, ainsi qu'un actif risqué, S_t. À cet instant, la valeur du portefeuille est $V_t = P_t + S_t$. À l'échéance, la valeur du payoff sera le maximum entre 0 et

$$(K - S_T)$$

. Pour le portefeuille V2, on achète un call européen, C_t, à l'instant t, puis on achète K actifs sans risque. À cet instant, la valeur du portefeuille est $V_t = C_t + K \cdot B(t, T)$. À l'échéance T, la valeur du portefeuille sera le maximum entre 0 et

$$(S_T - K)$$

. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on peut écrire que $V_T 1 = V_T 2$. Par conséquent, à l'instant t, on a :

$$Pt + St = Ct + k * B(t, T)$$

Ce qui permet d'obtenir la relation de parité call: $C_t - P_t = S_t - K \cdot B(t, T)$ Cette relation est fondamentale en finance et démontre comment les prix des options d'achat (call) et de vente (put) sont liés en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Elle constitue un élément essentiel de l'évaluation des options.

2.5 Modéle Binomiale

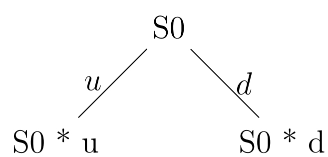
2.5.1 Modéle binomiale à une période

Considérons une action S ayant un prix actuel S0, telle que le prix change à chaque période par un facteur u avec une probabilité p ou par un facteur d avec une probabilité q := 1 p, où 0 < d< u. Les symboles u et d sont destinés à suggérer les mots "hausse" et "baisse", et nous utiliserons ces termes pour décrire l'évolution des prix d'une période à l'autre.

A l'instant t=1 l'actif S0 peut prendre différent valeur Une valeur de haute S1=S0*u ou une valeur de baisse S1=S0*d avec d< u.

$$P_n(\omega_1) = \begin{cases} p & \text{if } \omega_1 = u, \\ \\ 1-p & \text{if } \omega_1 = d. \end{cases}$$

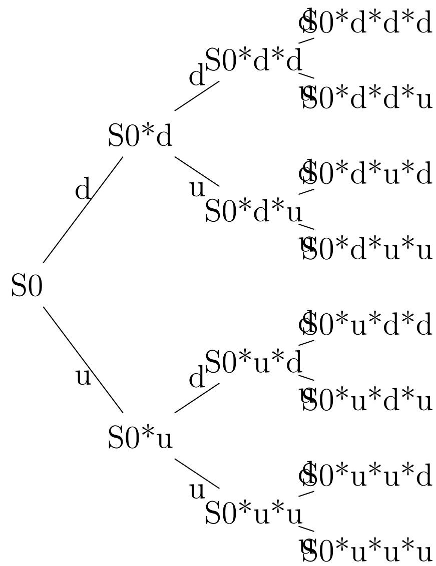
avec P une probabilité historique sur ω



A t=1 $\Omega_1 = \{u, d\}$ avec Ω représente les mouvements possible à t=1

2.5.2 Modéle binomiale à N périodes

On considére un intervalle de temps [0,T] , le marché est composé de deux actifs : Un actif sans risque Un actif risqué dont la valeur peut augmenter d'une valeur u ou diminuer d'une valeur d



Nous modélisons le comportement aléatoire de l'action de la manière suivante : Soit Ω l'ensemble de toutes les séquences = (1, 2, . . . , N), où n = u si le cours de l'action augmente pendant la n-ème période et n = d si le cours de l'action diminue. Ainsi, Ω = Ω1 × Ω2 × · · · × ΩN, où Ωn = u, d représente les mouvements possibles à l'instant n. On définit une mesure de probabilité Pn sur Ωn de la manière suivante :

$$P_n(\omega_n) = \begin{cases} p & \text{if } \omega_n = u, \\ 1-p & \text{if } \omega_n = d. \end{cases}$$

En utilisant les mesures Pn, on définit une mesure de probabilité P sur les sous-ensembles A de Ω comme suit :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} (P_1(\omega_1) \cdot P_2(\omega_2) \cdot \ldots \cdot P_N(\omega_N))$$

où $\omega = (\omega 1, \omega 2, ..., \omega N)$. Par exemple, la probabilité que le cours de l'action augmente au cours de la première période et diminue au cours de la suivante est donnée par :

$$P_1(u) \cdot P_2(d) \cdot P_3(\Omega_3) \cdot \ldots \cdot P_N(\Omega_N) = pq$$

Le prix de l'action à l'instant n est une variable aléatoire Sn sur Ω telle que:

$$S_n(\omega) = \begin{cases} uS_{n-1}(\omega) & \text{if } \omega_n = u, \\ dS_{n-1}(\omega) & \text{if } \omega_n = d. \end{cases}$$

Par itératation on obtiendra:

$$S_n(\omega) = \omega_n S_{n-1}(\omega) = \omega_n \omega_{n-1} S_{n-2}(\omega) = \ldots = \omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_1 S_0$$

Pour construire un portefeuille autofinancé de réplication, nous commençons par définir VN = H, le portefeuille est constitué d'une quantité d'actifs risqués et d'une quantité d'actif sans risque

$$V_{n+1} = \theta_{n+1} S_{n+1} + (1+i)(V_n - \theta_{n+1} S_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots, N-1$$

pour $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$,on aura:

$$\theta_{n+1}(\omega) S_{n+1}(\omega, u) + (1+i)[V_n(\omega) - \theta_{n+1}(\omega) S_n(\omega)] = V_{n+1}(\omega, u) \tag{2.1}$$

$$\theta_{n+1}(\omega) S_{n+1}(\omega, d) + (1+i)[V_n(\omega) - \theta_{n+1}(\omega) S_n(\omega)] = V_{n+1}(\omega, d) \tag{2.2}$$

Puisque: $\cdot S_{n+1}(\omega, \omega_{n+1}) = \omega_{n+1} \cdot S_n(\omega)$

On obtient:

$$\theta_{n+1}(\omega) = \frac{V_{n+1}(\omega, u) - V_{n+1}(\omega, d)}{(u-d) S_n(\omega)} \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Remplaçons θ_{n+1} par sa valeur:

$$
\begin{aligned}
(1+i)V_n(\omega) &= V_{n+1}(\omega,u) + \theta_{n+1}(\omega)S_n(\omega)(1+i-u) && (2.3)\\
&= V_{n+1}(\omega,u) + [V_{n+1}(\omega,u) - V_{n+1}(\omega,d)]\,\frac{1+i-u}{u-d} && (2.4)\\
&= V_{n+1}(\omega,u)\cdot\frac{1+i-d}{u-d} + V_{n+1}(\omega,d)\cdot\frac{u-1-i}{u-d} && (2.5)
\end{aligned}
$$

Étant donné une réclamation européenne H dans le modèle binomial, il existe une unique stratégie de trading autofinancée (,) avec un processus de valeur V satisfaisant VN = H. De plus, V est déterminé par le schéma de récursion inverse suivant.

$$V_n(\omega) = \frac{1}{1+i}\left[V_{n+1}(\omega,u)p^* + V_{n+1}(\omega,d)q^*\right]$$

avec p* représente la probabilité risque neutre:

$p^* := \frac{1+i-d}{u-d}$ et $q^* := \frac{u-1-i}{u-d}$ avec 0 < d < 1 + i < u Puisqu'on a supposé que le marché est complet alors tous les produits dérivé est duplicable par une stratégie de portfeuille simple . Donc on peut déduit le produit dérivé d'une option Eur est donné par:

$$V_0 = (1+i)^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j} f(S_0u^jd^{N-j})p^*jq^*N-j$$

Pour une option call:

$$C_0 = (1+i)^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j} f(S_0u^jd^{N-j})p^*jq^*N-j$$

avec f(x)=max(x-k,0)

2.5.3 Valorisation Neutre au Risque

La valorisation neutre au risque repose sur deux idées clés : . Le rendement attendu d'un actif (ou d'un investissement) est égal au taux d'intérêt sans risque.

. Le taux d'actualisation utilisé pour évaluer le paiement attendu d'un produit dérivé est également le taux d'intérêt sans risque.

En d'autres termes, dans un monde neutre au risque, les investisseurs valorisent les actifs comme s'ils étaient indifférents au risque. Cela peut sembler contre-intuitif, car les produits dérivés, comme les options, sont intrinsèquement risqués. La valorisation neutre au risque est particulièrement utile pour évaluer les options, car ces produits sont intrinsèquement risqués en raison de leur nature liée aux fluctuations des prix des actifs sous-jacents. Cependant, en supposant un monde neutre au risque, on peut simplifier la tarification en se basant sur des probabilités de hausse et de baisse pour les prix des actifs sous-jacents, ce qui permet d'évaluer les options sans avoir besoin de connaître les préférences individuelles en matière de risque des investisseurs. Nous supposons que le paramètre p représente la probabilité d'une hausse dans un monde neutre au risque,tandis que 1 p représente la probabilité d'une baisse(Nous supposons $u > e^{rT}$, de sorte que $0 < p' < 1$. En effet, avec cette interprétation La valeur attendue du cours de l'action à l'instant T est donnée par:

$$E[ST] = p' \cdot S_0u + (1 - p') \cdot S_0d = p' \cdot S_0u - d + S_0d$$

En remplaçant p par p=$p' = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$ On obtient:

$$E[ST] = S_0 \cdot e^{rT}$$

Pour appliquer la valorisation neutre au risque à la tarification d'un dérivé, nous commençons par calculer quelles seraient les probabilités de différents résultats si le monde était neutre au risque. Ensuite, nous calculons le paiement attendu du dérivé et actualisons ce paiement attendu au taux d'intérêt sans risque.

2.5.4 Adapter la volatilité avec u et d

Pour de petites valeurs de δt et des valeurs particulières de u et d, l'hypothèse de volatilité est la même à la fois dans le monde réel et dans le monde sans risque,Le prix attendu de l'action à la fin de la première étape de temps dans le monde réel est

$$S_0 e^{rt}$$

,où r est le rendement attendu. Sur l'arbre, le prix attendu de l'action à ce moment est $pS_0u + (1-p)S_0d$. Donc on aura

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{-rt}$$

La volatilité du prix d'une action est définie de telle sorte que t fois la racine carrée de p représente l'écart-type du rendement du prix de l'action sur une courte période de temps de longueur t. De manière équivalente, la variance du rendement est de 2t. La variance du prix de l'actif sur l'arbre est :

$$(pu^2 + (1-p)d^2) - (pu + (1-p)d)^2$$

Pour correspondre à la volatilité du prix de l'action avec les paramètres de l'arbre, nous devons donc avoir: $(pu^2 + (1-p)d^2) - (pu + (1-p)d)^2 = \delta t^* \sigma^2$ Remplaçons p par ça valeur: $p = \frac{e^{-\delta t} - d}{u - d}$

Donc on aura: $e^{*\delta t}(u + d) - ud - e^{2\delta t} = \sigma^2 * \delta t$

Lorsque les termes en δt^2 et les puissances supérieures de δt sont négligés, une solution à cette équation est:

$$u = e^{\sqrt{\delta t} \cdot \sigma}$$

$$d = e^{-\sqrt{\delta t} \cdot \sigma}$$

Il s'agit des valeurs de u et d proposées par Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour correspondre à la volatilité.

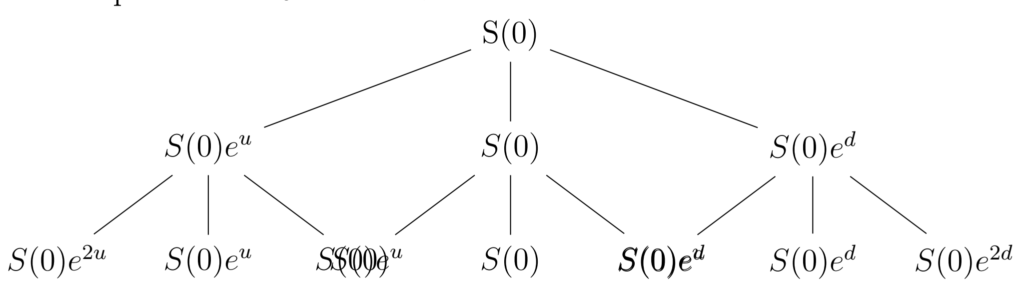
2.6 Modéle trinomiale

Considérons un actif risqué d'un prix S(t-1) à l'instant t le prix sera:

$$S(t) = \begin{cases} S(t-1)e^u & \text{avec prob. } p_u \\ S(t-1) & \text{avec prob. } p_0 = 1 - p_u - p_d \\ S(t-1)e^d & \text{avec prob. } p_d \end{cases} \tag{2.6}$$

avec u $>$ 0, d $<$ 0, $p_u, p_d \in (0,1)$ et $p_0 = 1 - p_u - p_d > 0$

Par conséquent, le prix de l'action à chaque étape de temps donnée peut augmenter, diminuer ou rester le même. Nous supposons que S0 = S(0), c'est-à-dire que le prix de l'actif au moment présent t = 0 est connu.



2.6.1 Portefeuilles autofinancés

Considérons un actif sans risue dont la valeur à l'instant t est égale à

$$B(t) = B_0 e^{rt}$$

considérons maintenant un portefeuille$\{hS(t), hB(t)\}_{t \in I}$ où hS(t) et hB(t) représentent les positions dans l'action et l'actif sans risque, respectivement, à l'instant t.De plus, (hS(t), hB(t)) est la position dans l'intervalle (t-1, t]. Ce portefeuille est appelé autofinancé si et seulement si:

$$hS(t)S(t-1) + hB(t)B(t-1) = hS(t-1)S(t-1) + hB(t-1)B(t-1)$$

$$V(t) - V(t-1) = hS(t)(S(t) - S(t-1)) + hB(t)(B(t) - B(t-1))$$

Où V(t) est la valeur du portefeuille autofinancé à l'instant t, ce qui montre clairement que les changements dans la valeur du portefeuille sont provoqués par les changements dans la valeur de l'action et de l'actif sans risque. Il s'ensuit que les changements dans la position du portefeuille ne génèrent pas, en eux-mêmes, de valeur au sein du portefeuille. Que (q+1, q0, q1) soit un triplet de nombres réels défini par:

$$q_{+1} + q_0 + q_{-1} = 1 \tag{2.7}$$

$$q_{+1}e^u + q_0 + q_{-1}e^{-u} = e^r \tag{2.8}$$

La bonne égalité découle du fait que nous devons avoir la valeur actuelle d'un actif égale à sa valeur actualisée à un moment futur. Par conséquent, nous imposons cette condition sur le triplet (q+1, q0, q1). En choisissant q0 comme variable libre, nous pouvons représenter la solution du système sous la forme suivante :

$$q_{+1} = \frac{e^r - e^{-u}}{e^u - e^{-u}} - q_0 \frac{1 - e^{-u}}{(e^u - e^{-u})}$$

$$q_{-1} = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^{-u}} - q_0 \frac{e^{-u} - 1}{(e^u - e^{-u})}$$

En abscence d'opportunité d'arbitrage on aura :

$$0 < q_0 < \frac{e^u - e^r}{e^u - 1}$$

Ensemble de paramètres de l'arbre trinomial:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2$$

$$p_u = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Chapter 3

Partie pratique

3.1 Utilisation de Python pour la Valorisation des Options Européennes et Américaines

Ce projet de valorisation des options européennes et américaines a bénéficié de l'utilisation du langage de programmation orienté objet Python. Python est un choix puissant pour la mise en œuvre de modèles financiers et d'outils d'analyse, en particulier pour sa flexibilité, sa lisibilité et sa grande variété de bibliothèques dédiées à la finance. En utilisant Python, nous avons pu créer des outils de modélisation financière efficaces et flexibles, permettant d'explorer divers scénarios de valorisation d'options. La simplicité de Python a également facilité la visualisation des résultats, ce qui est essentiel pour la compréhension des concepts financiers complexes.

Python a également été utilisé pour le calcul des prix des options en utilisant les modèles binomial et trinomial. Sa capacité à effectuer des calculs mathématiques complexes et à manipuler des données a été un atout précieux pour obtenir des résultats précis et fiables.

En somme, l'utilisation de Python dans ce projet a permis de combiner des concepts financiers avancés avec un langage de programmation puissant, facilitant ainsi la mise en œuvre de modèles sophistiqués et l'analyse des résultats. Cela démontre comment la technologie peut être un atout essentiel pour la compréhension et l'application de concepts financiers avancés.

3.1.1 Interface de Pricing d'Options avec Python

Dans le cadre de ce projet, nous avons développé une interface conviviale en utilisant Python, permettant de calculer les prix des options européennes et américaines. Cette interface repose sur les modèles binomiaux et trinomiaux de Cox-Ross, qui fournissent une méthode robuste pour estimer les prix des options en fonction des caractéristiques spécifiques de chaque contrat financier.

L'élément clé de cette interface est la capacité de calculer les valeurs de 'u' et 'd' dans le modèle binomial (ou 'u', 'd', et 'm' dans le modèle trinomial) en fonction de la volatilité du marché. Ces valeurs jouent un rôle essentiel dans la modélisation de l'évolution des prix des actifs sous-jacents au fil du temps, ce qui permet de calculer la valeur de l'option à différents moments.

La polyvalence de notre interface réside dans sa capacité à calculer les prix des options européennes et américaines. Pour les options européennes, l'interface utilise le modèle binomial ou trinomial pour estimer le prix de l'option en fonction des paramètres de l'option, tels que le prix d'exercice, la durée de l'option, le taux d'intérêt sans risque et la volatilité. Pour les options américaines, l'interface prend en compte la possibilité d'exercer l'option à tout moment avant l'échéance, ce qui ajoute une dimension supplémentaire au pricing.

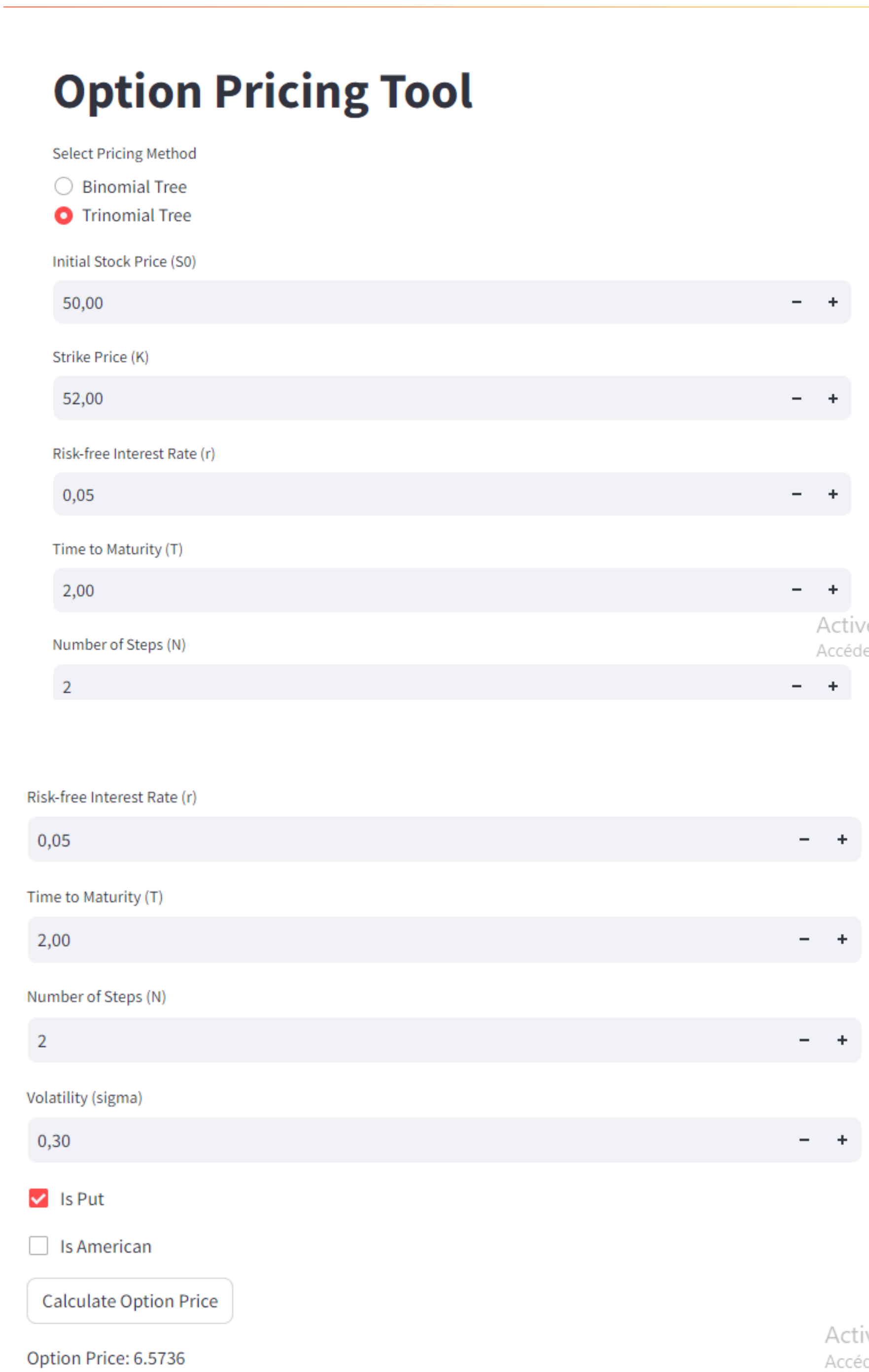


Figure 3.1: Interface

Exemple: Prenons un exemple d'un call européen en utilisant le modéle binomiale:

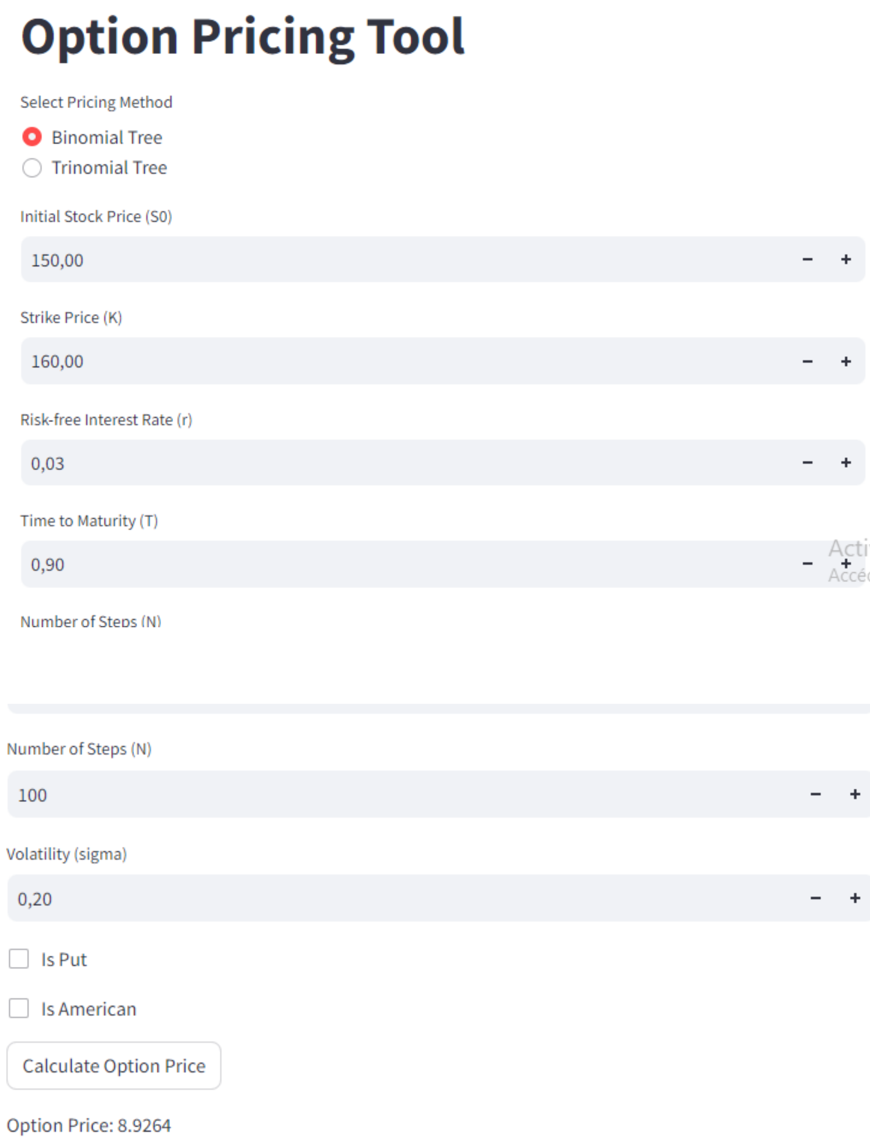


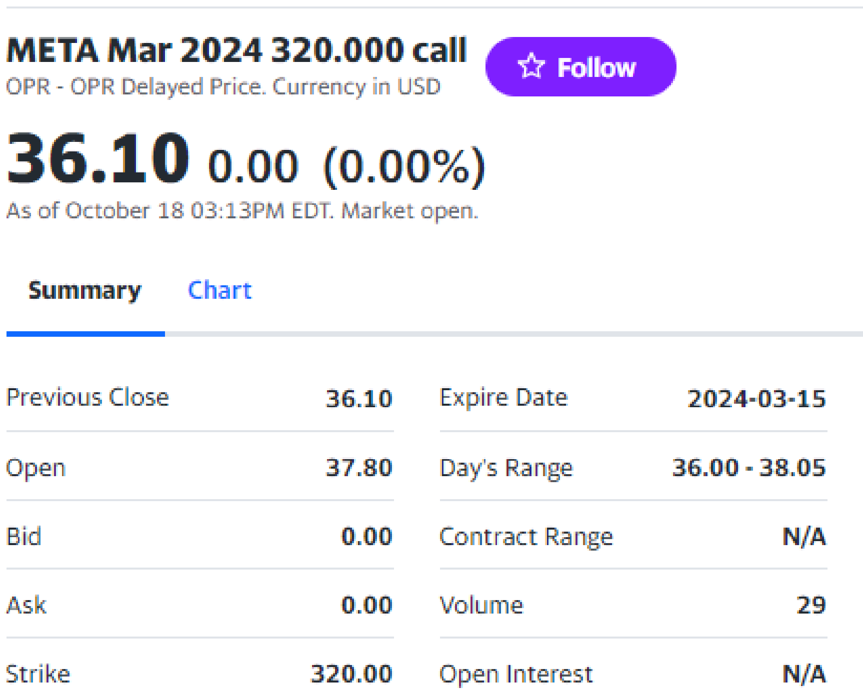
Figure 3.2: Interface

Prenons maintent un exemple d'un put américain avec les paramétres suivants:

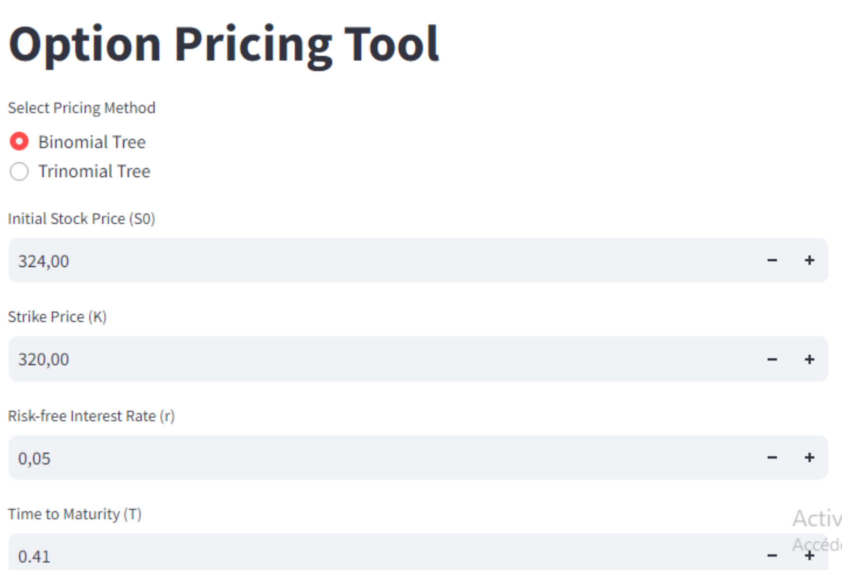
Figure 3.3: Interface

Les paramètres de l'option, tels que le prix initial de l'actif (S0) égal au prix d'exercice (K), classent cette option comme étant 'at the money', indiquant que le prix de l'actif sous-jacent est actuellement en ligne avec le prix d'exercice de l'option. L'analyse des résultats révèle que la valeur de cette option est principalement influencée par deux facteurs clés : la volatilité du marché et le temps restant jusqu'à la date d'expiration. La durée relativement courte jusqu'à l'échéance de seulement 0,33 ans renforce la valeur temporelle de l'option, indiquant que la possibilité de fluctuations favorables du prix de l'actif sous-jacent pendant cette période contribue considérablement à la valeur globale de l'option. Le taux d'intérêt sans risque, bien que relativement bas à 1%, a également un effet sur la valeur temporelle de l'option, mais son impact est moins significatif que celui de la volatilité et du temps restant. Le modèle de l'arbre binomial a été utilisé pour estimer le prix de l'option, aboutissant à une valeur de 4.4990 USD. Cependant, il est essentiel de rappeler que cette valeur est une estimation théorique et que les prix d'options réelles sont susceptibles de varier en fonction des conditions du marché et d'autres facteurs. En résumé, l'option est attribuable à une valeur significative, principalement due à la volatilité et à la durée relativement courte jusqu'à la date d'expiration, mais les conditions du marché réel peuvent influencer le prix de l'option de manière importante." Si on calcule la valeur de l'option en utilisant les mêmes paramétres mais avec le modéle binomial on obtient: Option Price: 4.4941

Plus le nombre d'étapes (N) est élevé, plus les valeurs des modèles binomial et trinomial se rapprochent. Cela s'explique par le fait que l'augmentation du nombre d'étapes permet une modélisation plus précise des mouvements du prix de l'actif sous-jacent, réduisant ainsi l'écart entre les deux modèles. Cependant, il est important de noter que l'utilisation de plus d'étapes peut également nécessiter davantage de calculs informatiques. En résumé, l'option a une valeur significative, principalement due à la volatilité et à la durée relativement courte jusqu'à la date d'expiration, et l'augmentation du nombre d'étapes amène les valeurs des modèles binomial et trinomial à converger vers des résultats similaires. exemple d'une option meta:



avec le prix à S0=324 et la volatility 0.39



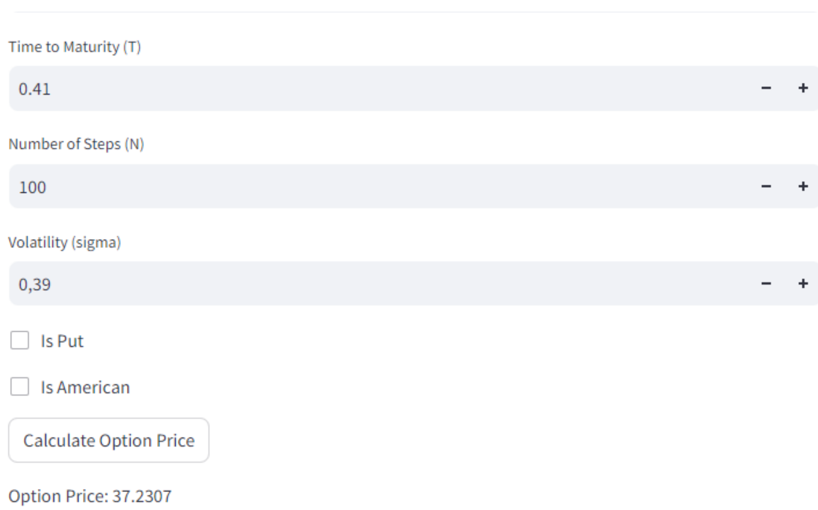


Figure 3.4: Interface

On obtient comme résultat: En calculant la valeur de cette option, nous obtenons pour N = 2 :

Modèle binomial : 34.50

Modèle trinomial : 35.97

Pour N = 100 :

Modèle binomial : 37.23

Modèle trinomial : 37.22 Tous simmplement on peut voir que l'option est in the money puisque S0>K

Annexe

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
class StockOption(object):
    def __init__(
        self, S0, K, r=0.05, T=1, N=2,
         sigma=0, is_put=False, is_am=False):
        self.S0 = S0
        self.K = K
        self.r = r
        self.T = T
        self.N = max(1, N)
        self.STs = [] # Declare the stock prices tree
        self.sigma = sigma
        self.is_call = not is_put
        self.is_european = not is_am
        self.dt=T/N


    @property
```

```
    def df(self):
        return math.exp(-(self.r)*self.dt)
class BinomialTreeOption(StockOption):
    def setup_parameters(self):
        self.dt=self.T/self.N
        self.u = math.exp(self.sigma * math.sqrt(self.dt))
        self.d = 1./self.u
        self.qu = (math.exp((self.r)*self.dt) -
                     self.d)/(self.u-self.d)
        self.qd = 1-self.qu
    def init_stock_price_tree(self):
        # Initialize a 2D tree at T=0
        self.STs = [np.array([self.S0])]
         # Simulate the possible stock prices path
        for i in range(self.N):
            prev_branches = self.STs[-1]
            st = np.concatenate(
                (prev_branches*self.u,
                 [prev_branches[-1]*self.d]))
            self.STs.append(st) # Add nodes at each time step
    def init_payoffs_tree(self):
        if self.is_call:
            return np.maximum(0, self.STs[self.N]-self.K)
        else:
            return np.maximum(0, self.K-self.STs[self.N])
    def check_early_exercise(self, payoffs, node):
        if self.is_call:
```

```
        return np.maximum(payoffs, self.STs[node] - self.K)
    else:
        return np.maximum(payoffs, self.K - self.STs[node])


def traverse_tree(self, payoffs):
    for i in reversed(range(self.N)):
        # The payoffs from NOT exercising the option
        payoffs = (payoffs[:-1]*self.qu +
                   payoffs[1:]*self.qd)*self.df

        # Payoffs from exercising, for American options
        if not self.is_european:
            payoffs = self.check_early_exercise(payoffs,i)

    return payoffs

def begin_tree_traversal(self):
    payoffs = self.init_payoffs_tree()
    return self.traverse_tree(payoffs)

def price(self):
    """ The pricing implementation """
    self.setup_parameters()
    self.init_stock_price_tree()
    payoffs = self.begin_tree_traversal()
    return payoffs[0]
```

```python
class TrinomialTreeOption(BinomialTreeOption):

    def setup_parameters(self):
        """ Required calculations for the model """
        self.u = math.exp(self.sigma*math.sqrt(2.*self.dt))
        self.d = 1/self.u
        self.m = 1
        self.qu = ((math.exp(self.r *
                             self.dt/2.) -
                    math.exp(-self.sigma *
                             math.sqrt(self.dt/2.))) /
                   (math.exp(self.sigma *
                             math.sqrt(self.dt/2.)) -
                    math.exp(-self.sigma *
                             math.sqrt(self.dt/2.))))**2
        self.qd = ((math.exp(self.sigma *
                             math.sqrt(self.dt/2.)) -
                    math.exp(self.r *
                             self.dt/2.)) /
                   (math.exp(self.sigma *
                             math.sqrt(self.dt/2.)) -
                    math.exp(-self.sigma *
                             math.sqrt(self.dt/2.))))**2.

        self.qm = 1 - self.qu - self.qd
```

```
    def init_stock_price_tree(self):
            self.STs = [np.array([self.S0])]
            for i in range(self.N):
                prev_nodes = self.STs[-1]
                self.ST = np.concatenate(
                (prev_nodes*self.u, [prev_nodes[-1]*self.m,
                                     prev_nodes[-1]*self.d]))
                self.STs.append(self.ST)
    def traverse_tree(self, payoffs):
        # Traverse the tree backwards
        for i in reversed(range(self.N)):
            payoffs = (payoffs[:-2] * self.qu +
                       payoffs[1:-1] * self.qm +
                       payoffs[2:] * self.qd) * self.df

            if not self.is_european:
                payoffs = self.check_early_exercise(payoffs,i)
        return payoffs

import streamlit as st
import one as tc
from one import BinomialTreeOption   # Import your binomial tree option prici
from one import TrinomialTreeOption  # Import your trinomial tree option pric

st.title('Option Pricing Tool')

# Radio button for selecting the pricing method
```

```
method = st.radio("Select Pricing Method", ["Binomial Tree", "Trinomial Tree"

# Input fields for option parameters
S0 = st.number_input("Initial Stock Price (S0)")
K = st.number_input("Strike Price (K)")
r = st.number_input("Risk-free Interest Rate (r)")
T = st.number_input("Time to Maturity (T)")
N = st.number_input("Number of Steps (N)", step=1)
sigma = st.number_input("Volatility (sigma)")

is_put = st.checkbox("Is Put")
is_am = st.checkbox("Is American")

# Function to calculate and display the option price


def calculate_option_price():
    option_price=None

    if method == "Binomial Tree":
        option = tc.BinomialTreeOption(S0, K, r, T, N, sigma, is_put, is_am)
    else:
        option = tc.TrinomialTreeOption(S0, K, r, T, N, sigma, is_put, is_am)

    option_price = option.price()
    st.write(f'Option Price: {option_price:.4f}')
```

```python
# Button to trigger the calculation
if st.button("Calculate Option Price"):
    calculate_option_price()
```