Badanie efektywności wybranych algorytmów sortowania ze względu na złożoność obliczeniową

AiZO - zadanie projektowe nr 1

Autor : Arkadiusz Błasiak

Nr albumu: 273022

Data: 18.04.2024 godz. 11.15

Wprowadzenie

Pojęcie złożoności obliczeniowej

Złożoność obliczeniowa algorytmu określa, jak wydajny jest algorytm, ile musi on wykonać operacji w zależności ilości danych oraz ile potrzebuje do tego pamięci. Często zdarza się, że dany problem algorytmiczny można rozwiązać kilkoma metodami, czyli algorytmami o różnej złożoności obliczeniowej. Złożoność obliczeniową dzielimy na złożoność pamięciową oraz złożoność czasową.

W tym projekcie pomijamy złożoność pamięciową i skupiamy się w pełnie na złożoności czasowej.

Kilka ważnych pojęć:

- złożoność czasowa
  ilość czasu potrzebnego do wykonania zadania, wyrażona jako funkcja ilości danych.
- złożoność obliczeniowa
  ilość zasobów komputerowych potrzebnych do wykonania zadania.
- złożoność oczekiwana
  inaczej złożoność średnia; ilość zasobów potrzebna do zrealizowania zadania dla statystycznie oczekiwanych danych; zapisywana za pomocą notacji theta – Θ
- złożoność pesymistyczna
  ilość zasobów potrzebna do zrealizowania zadania w przypadku najgorszych danych; zapisywana za pomocą notacji „duże O” – O

Algorytmy sortowania

Sortowanie przez wstawanie (Insertionsort)

Jeden z najprostszych algorytmów sortowania, którego zasada działania odzwierciedla sposób w jaki ludzie ustawiają karty – kolejne elementy wejściowe są ustawiane na odpowiednie miejsca docelowe. Jego zalety: jest stabilny, jest wydajny dla zbiorów o niewielkiej liczebności, liczba wykonanych porównań jest zależna od liczby inwersji w permutacji, dlatego algorytm jest wydajny dla danych wstępnie posortowanych.

Złożoność oczekiwana: $\Theta(N^2)$

Złożoność pesymistyczna: $O(N^2)$

Sortowanie Shella (Shellsort)

Jeden z algorytmów sortowania działających w miejscu i korzystających z porównań elementów. Można go traktować jako uogólnienie sortowania przez wstawianie lub sortowania bąbelkowego, dopuszczające porównania i zamiany elementów położonych daleko od siebie. Na początku sortuje on elementy tablicy położone daleko od siebie, a następnie stopniowo zmniejsza odstępy między sortowanymi elementami. Dzięki temu może je przenieść w docelowe położenie szybciej niż zwykłe sortowanie przez wstawianie.

Złożoność wersji Shella:

Złożoność oczekiwana: $\Theta(NlogN)$

Złożoność pesymistyczna: $O(N^2)$

Złożoność wersji Knutha:

Złożoność oczekiwana: brak danych

Złożoność pesymistyczna: $O\left(N^{\frac{3}{2}}\right)$

Sortowanie przez kopcowanie (Heapsort)

Jeden z algorytmów sortowania, choć niestabilny, to jednak szybki i niepochłaniający wiele pamięci. Podstawą algorytmu jest użycie kolejki priorytetowej zaimplementowanej w postaci binarnego kopca zupełnego. Zasadniczą zaletą kopców jest stały czas dostępu do elementu maksymalnego (lub minimalnego) oraz logarytmiczny czas wstawiania i usuwania elementów; ponadto łatwo można go implementować w postaci tablicy.

Złożoność oczekiwana: $\Theta(NlogN)$

Złożoność pesymistyczna: $O(NlogN)$

Sortowanie szybkie (Quicksort)

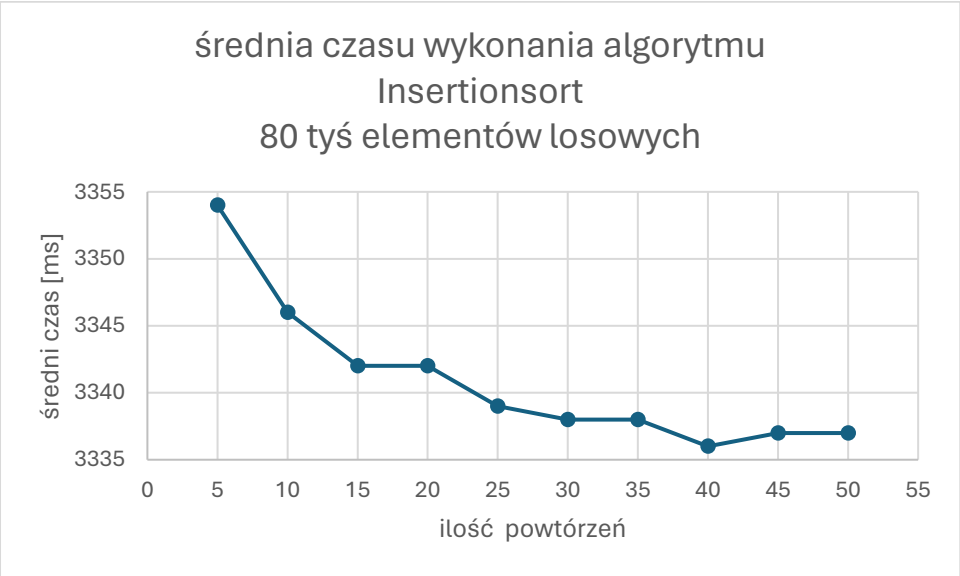
jeden z popularnych algorytmów sortowania działających na zasadzie „dziel i zwyciężaj”. Algorytm sortowania szybkiego jest wydajny. Ze względu na szybkość i prostotę implementacji jest powszechnie używany. Jego implementacje znajdują się w bibliotekach standardowych wielu środowisk programowania.

Złożoność oczekiwana: $\Theta(NlogN)$

Złożoność pesymistyczna: $O(N^2)$

Metody

1. Program zapisany został w języku C++ wykorzystując programowanie obiektowe,
2. Tablice do posortowania tworzone są dynamicznie,
3. Tablice są zapełnione liczbami typu int. Wyjątek stanowi sortownie przez kopcowanie, gdzie wykorzystuje się również tablice z typem float.
4. Program uruchamiany był na laptopie HP Pavilion – 15-bc402nw z procesorem Intel Core i5-8300H, kartą graficzną Nvidia GeForece GTX 1050 oraz 16 GB pamięci RAM,
5. Czas mierzony był, kiedy laptop podłączony był do prądu, w trybie pełnej wydajności, minimalizując udział niepotrzebnych procesów w tle,
6. Do odmierzania czasu program posługuje się funkcją std::chrono::high_resolution_clock z biblioteki chrono,
7. Czas mierzony był mikrosekundach i zaokrąglany do pełnych milisekund za wyjątkiem sytuacji, kiedy pierwsza znacząca cyfra była w ułamku
8. Docelowo program średni czas mierzył wykonując 50 sortowań wyciągając z tego średnią arytmetyczną. Jest to kompromis wyciągnięty z wykresu ilustrujący, iż od już poniżej tej wartości wyniku zaczynają się unormowywać:



Jednakże, kiedy czasy rosły różnica pomiędzy poszczególnymi wynikami mała poniżej 0,5%, jak w poniższym przypadku, kiedy zbadano jak zmienia się średnia dodając kolejne wyniki do wzoru, dla 32 elementowej tablicy posortowanej w 66% sortując algorytmem przez wstawianie:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
średnia	6232	6236	6262	6243	6226	6217	6209	6205	6200	6197

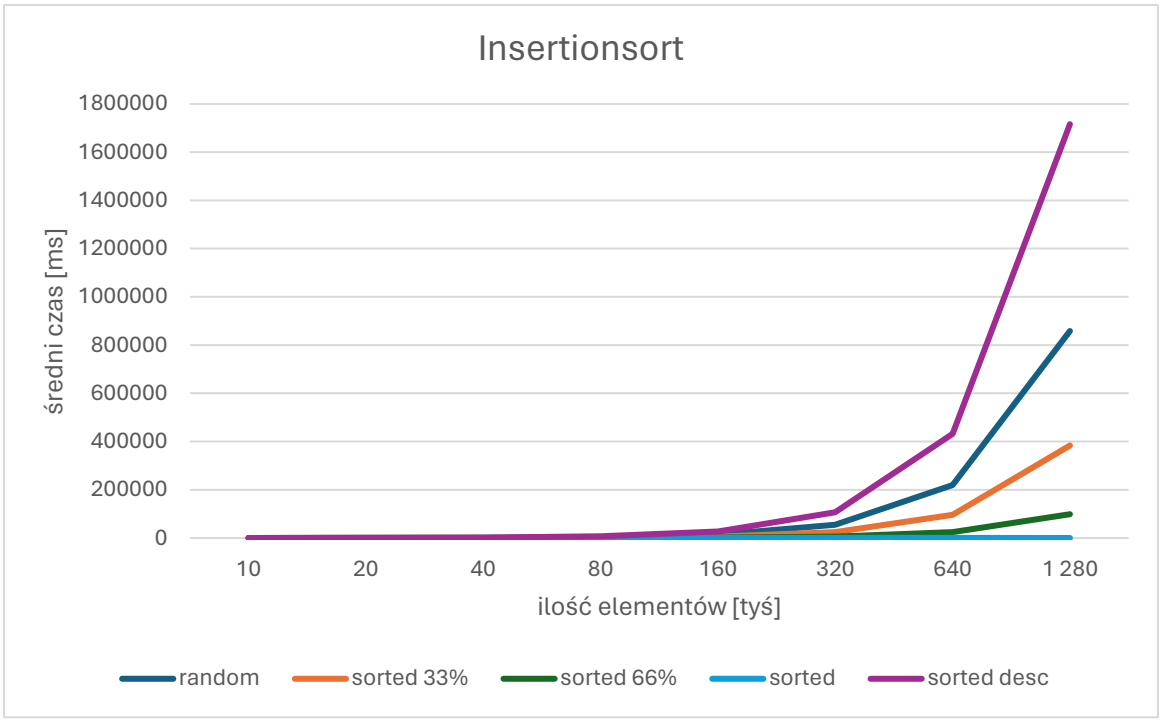
$$\Delta x = \frac{(6232-6197)}{6197} \cdot 100\% = \frac{32}{6197} \cdot 100\% = 0{,}56\%$$

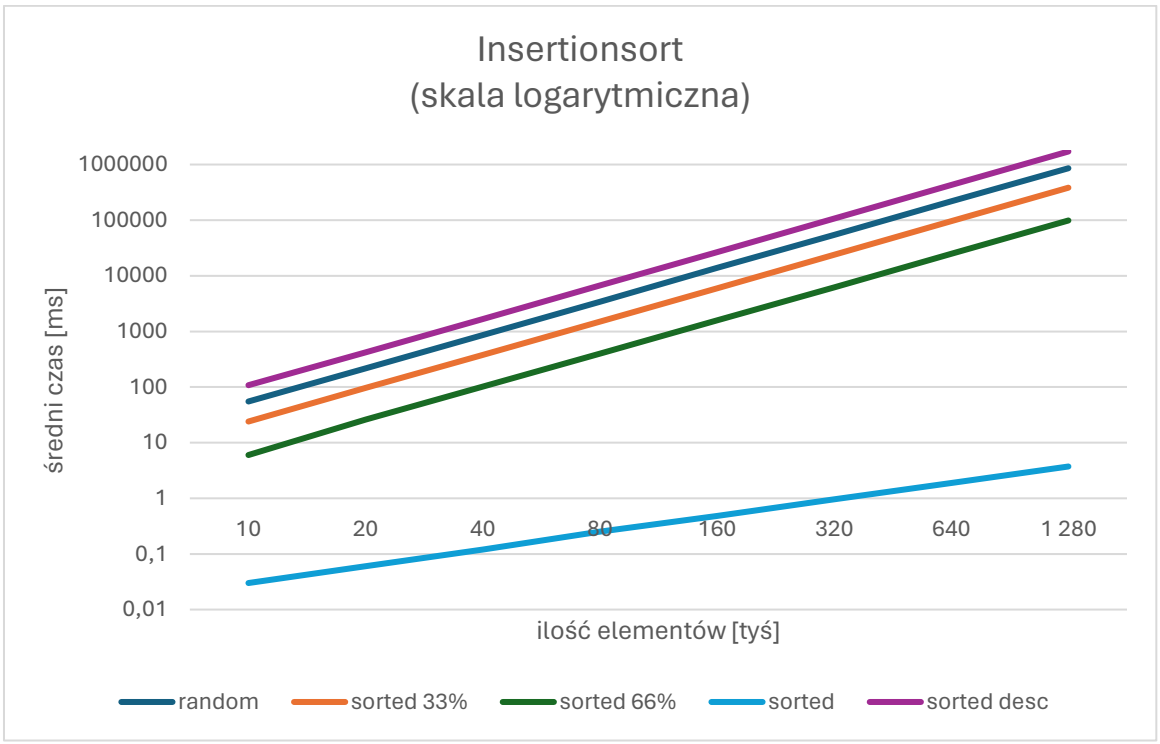
Kiedy czasy są na poziomie dziesiątek czy też nawet setek sekund, fluktuacje na poziomie sekund i milisekund są pomijalne. Dlatego też brana była średnia z 5, 3, a nawet 1 wyniku, kiedy to wynik czas potrzebny na odczytanie wyniku był długi.

Pomiary

Sortowanie przez wstawanie (Insertionsort)

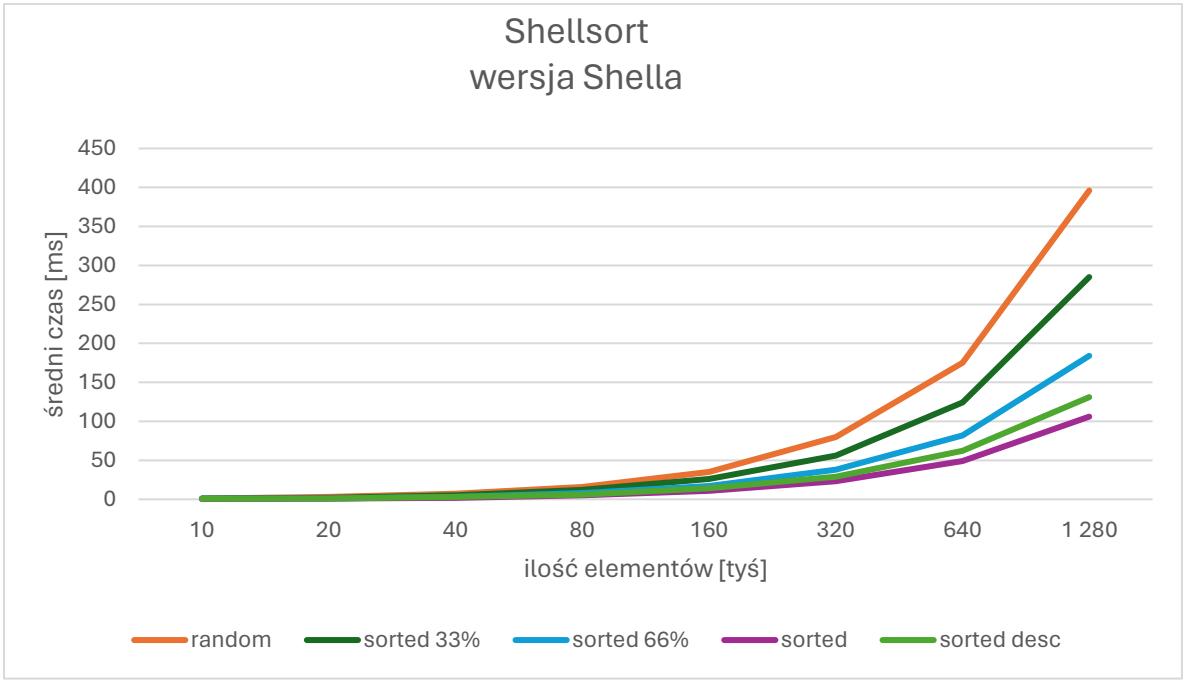
elements [10^3]	time [ms]				
	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc
10	55	24	6	0,03	108
20	218	97	26	0,06	422
40	856	378	102	0,12	1677
80	3415	1500	398	0,25	6716
160	13981	5986	1578	0,48	26699
320	54528	24011	6197	0,96	106961
640	219694	95890	24733	1,88	432132
1 280	858402	383674	98744	3,73	1716160

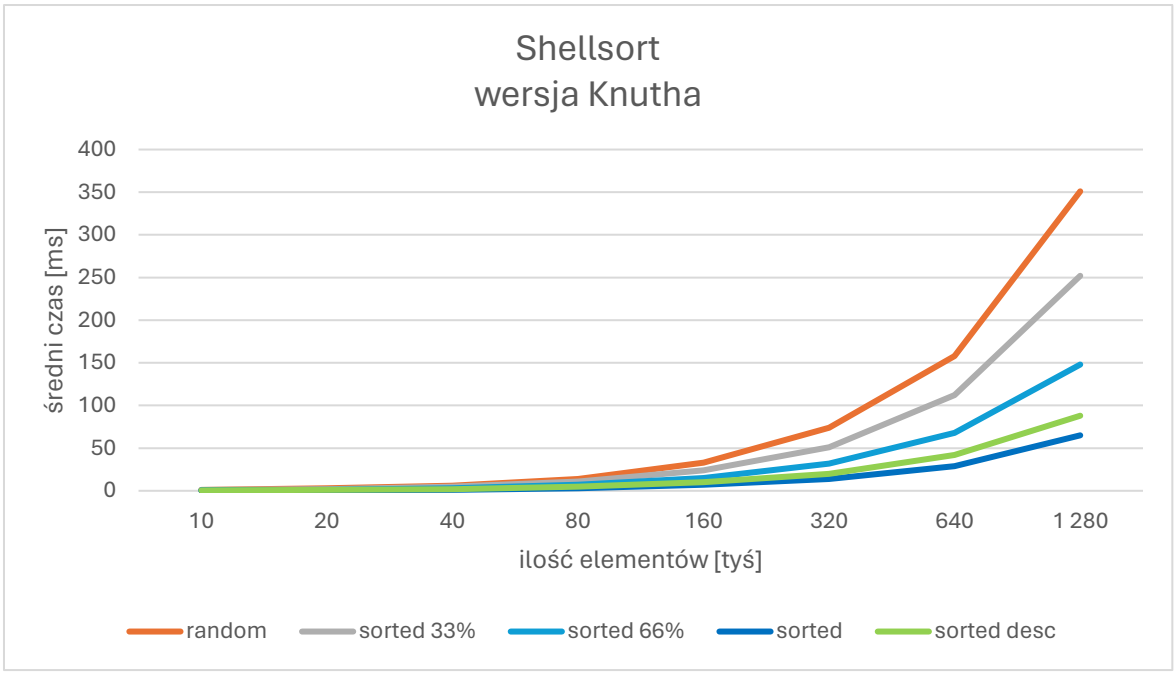

Insertionsort
1800000
1600000
1400000
1200000
1000000
800000
600000
400000
200000
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc

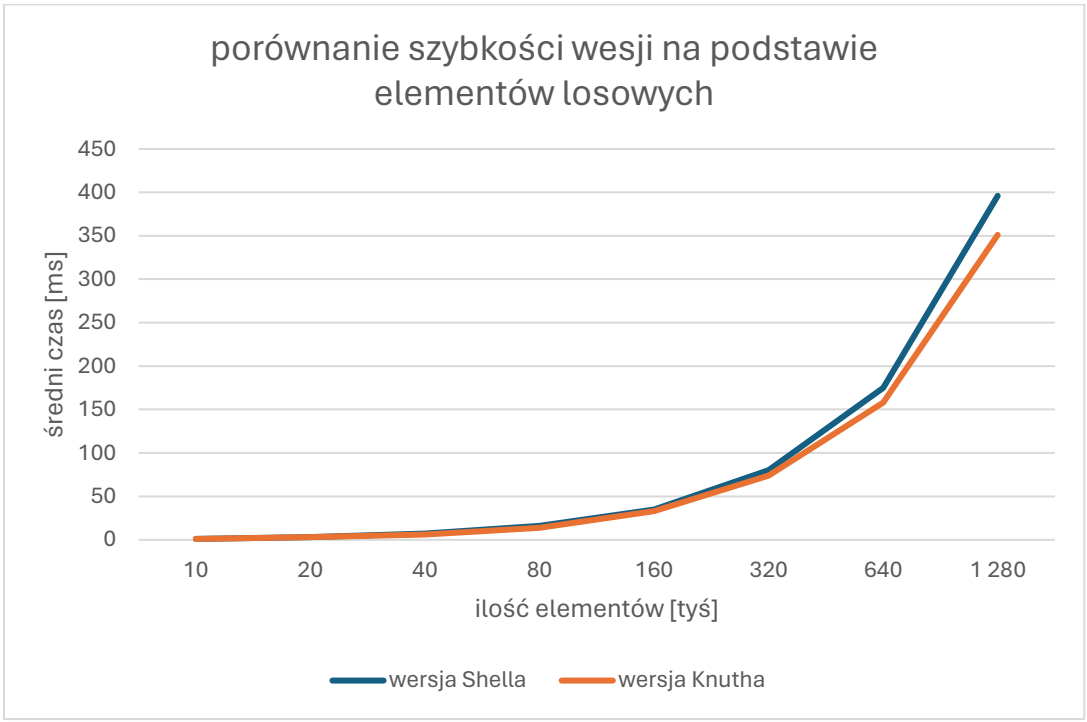

Insertionsort
(skala logarytmiczna)
1000000
100000
10000
1000
100
10
1
0,1
0,01
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc

Sortowanie Shella (Shellsort)

elements [10^3]	time [ms]									
	Shell version					Knuth version				
	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc
10	1	1	0,8	0,5	0,7	1	1	0,6	0,3	0,5
20	3	2	1	1	1	3	2	1	0,6	1
40	7	5	3	2	3	6	5	3	1	2
80	16	12	8	5	6	14	11	7	3	5
160	35	26	17	11	14	33	24	15	7	10
320	80	56	38	23	29	74	51	32	14	20
640	175	124	82	49	62	158	112	68	29	42
1 280	396	285	184	106	131	351	252	148	65	88

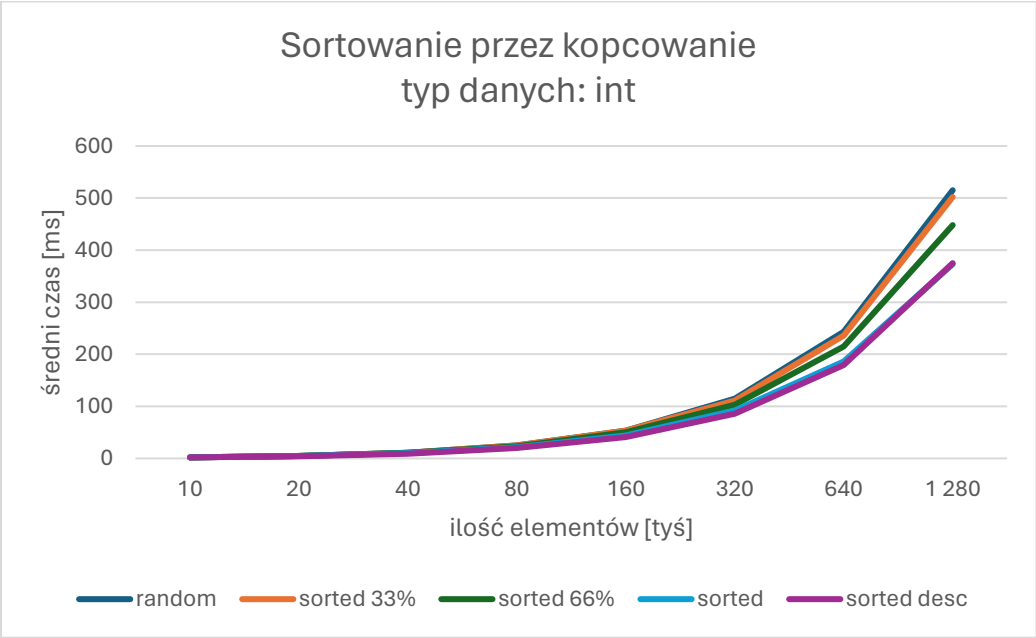


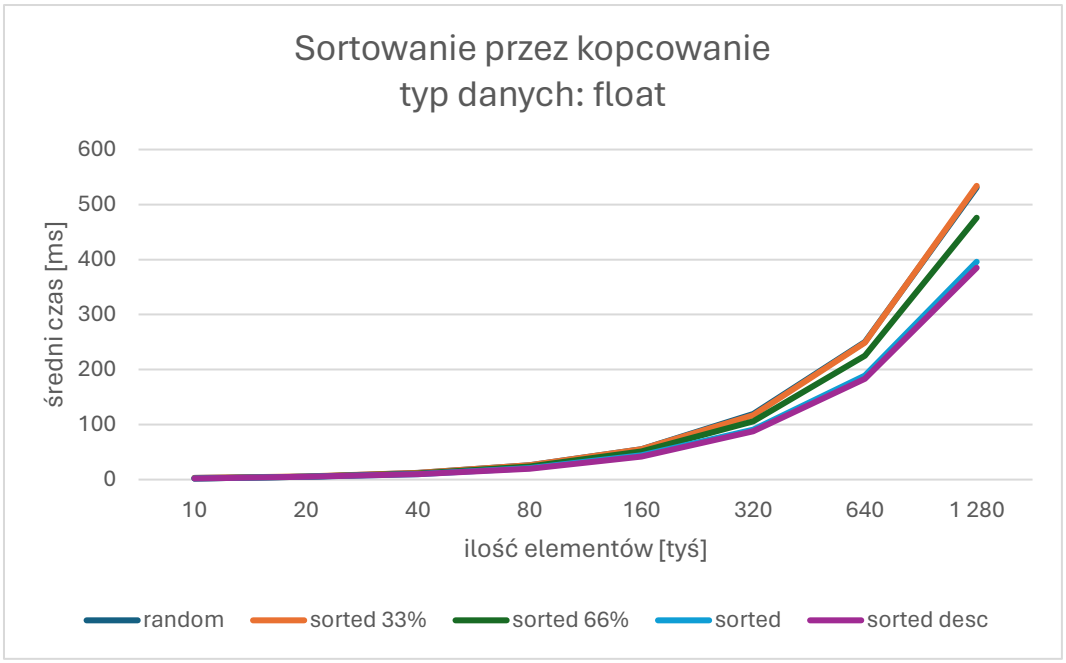

Shellsort
wersja Knutha
400
350
300
250
200
150
100
50
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc

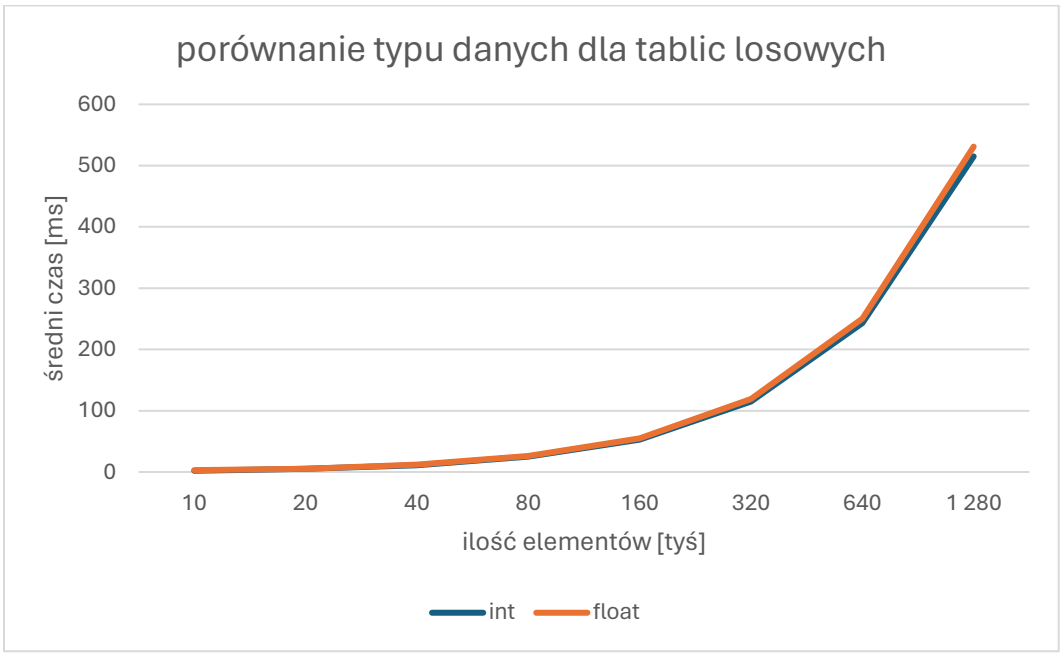

porównanie szybkości wesji na podstawie elementów losowych
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
wersja Shella
wersja Knutha

Sortowanie przez kopcowanie (Heapsort)

elements [10^3]	time [ms]									
	integer					float				
	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc
10	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2
20	5	5	5	5	4	5	6	5	5	5
40	11	11	11	10	9	12	12	11	10	10
80	25	25	23	21	20	26	26	24	21	20
160	53	53	50	44	41	55	55	51	44	42
320	115	111	103	92	86	119	117	106	91	88
640	243	236	215	186	179	250	249	225	189	183
1 280	515	502	448	373	375	531	534	476	396	385



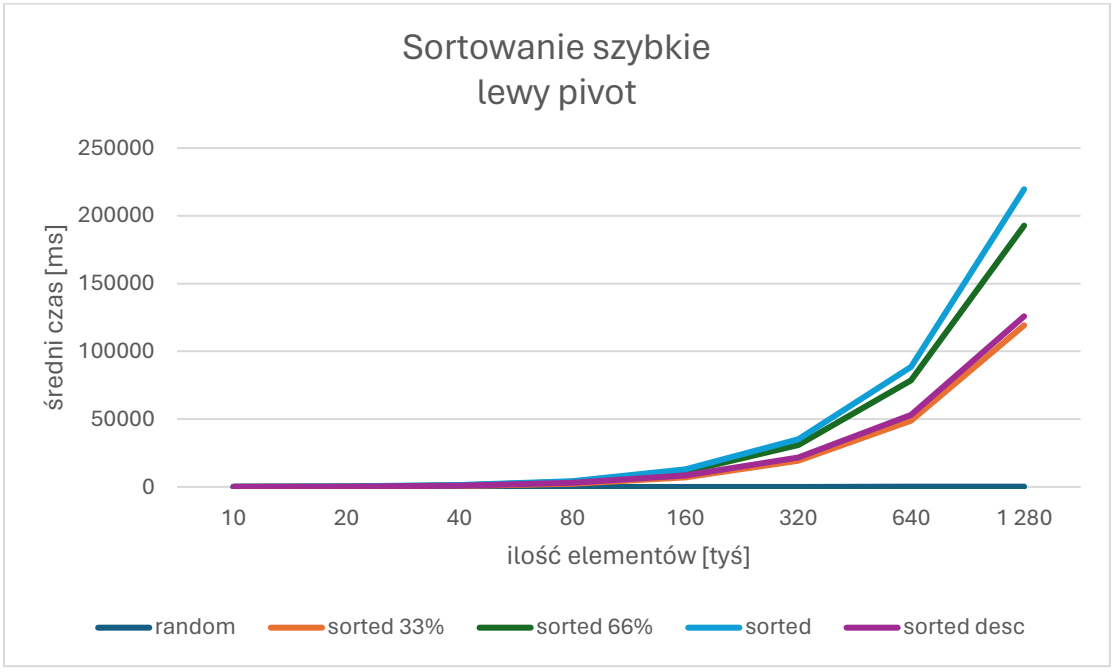

Sortowanie przez kopcowanie
typ danych: float
600
500
400
300
200
100
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc

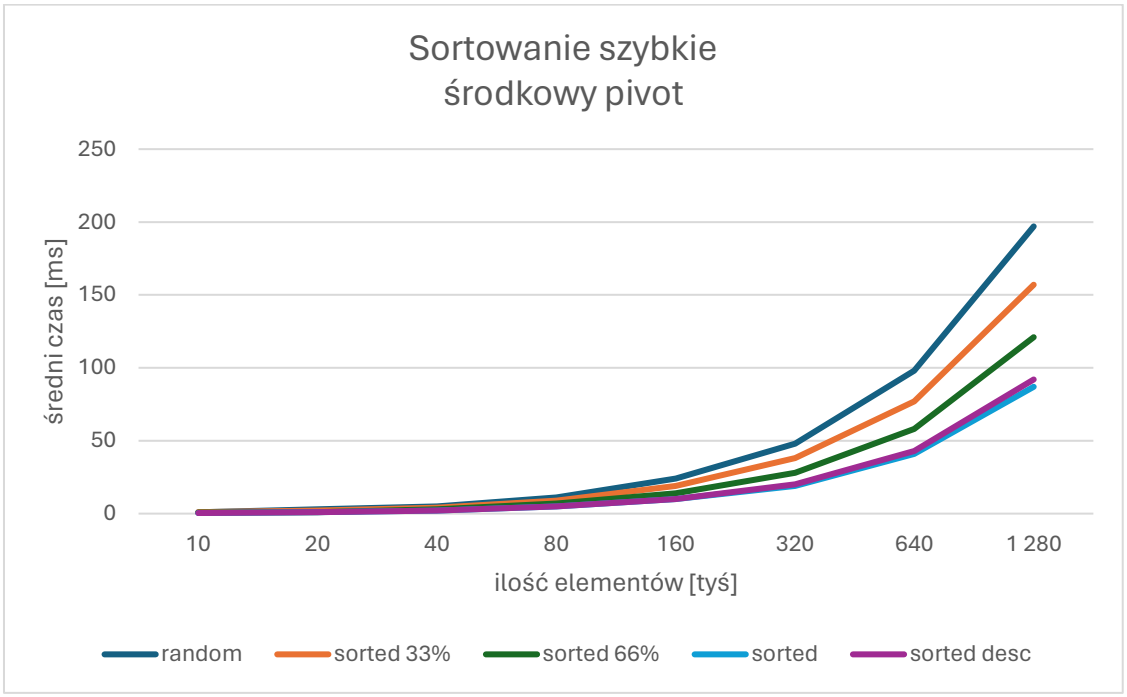

porównanie typu danych dla tablic losowych
600
500
400
300
200
100
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
int
float

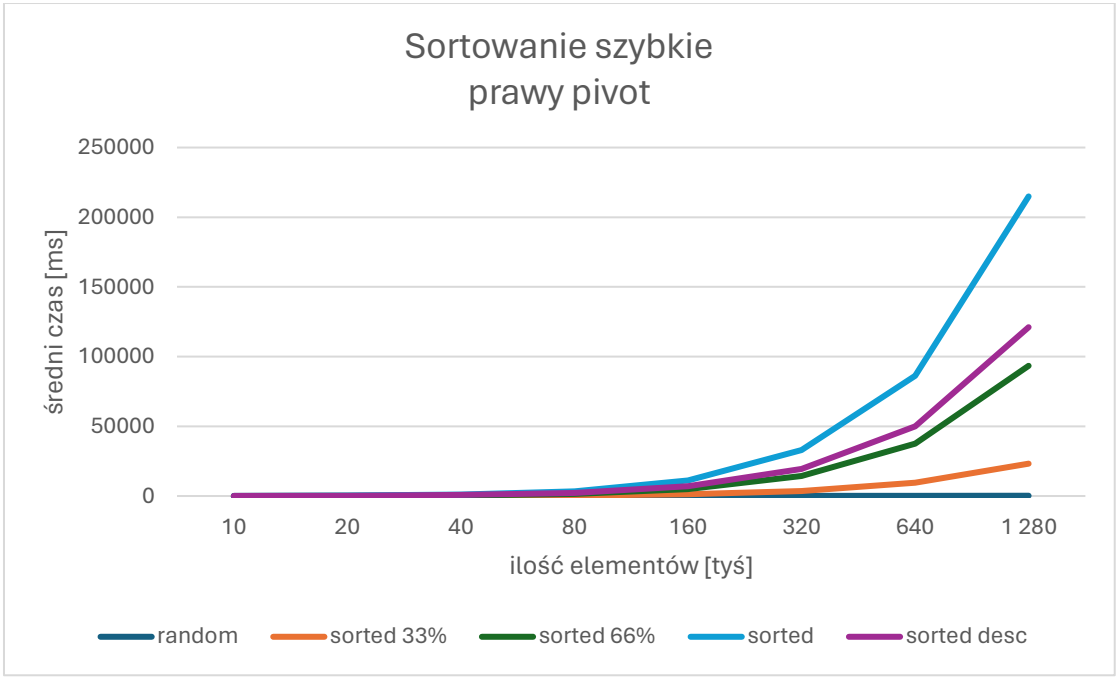
Sortowanie szybkie (Quicksort)

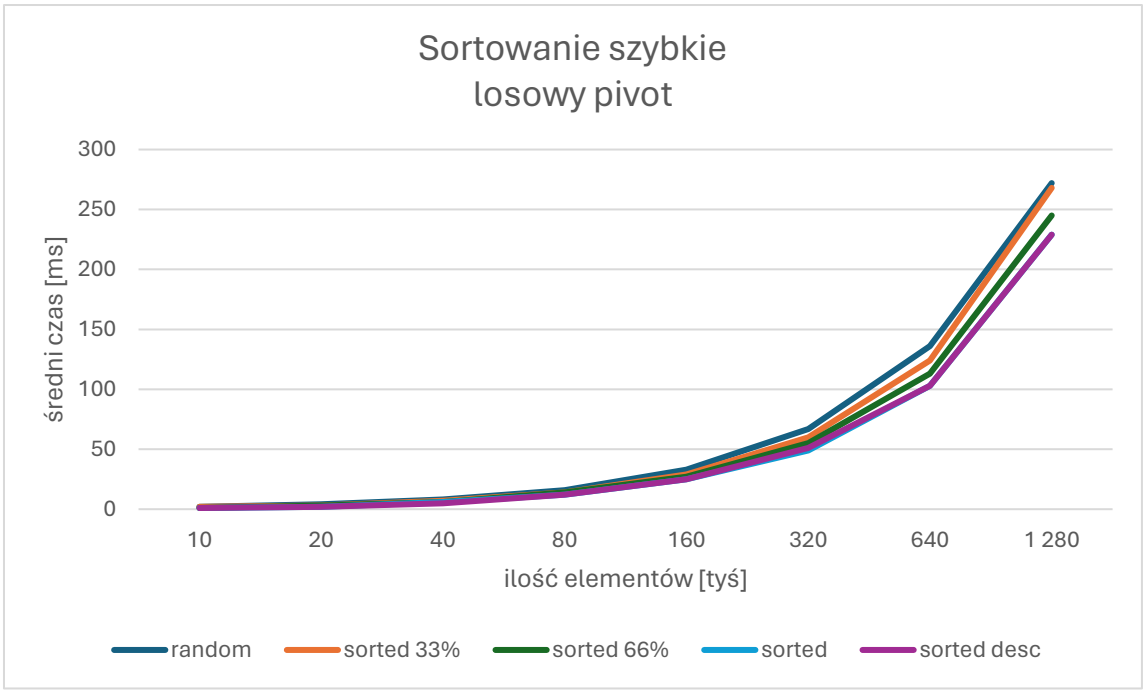
elements [*10^3]	time [ms]									
	left pivot					right pivot				
	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc
10	1	50	80	90	83	1	9	35	78	73
20	3	190	303	340	298	3	32	123	277	242
40	5	693	1119	1270	990	5	110	421	952	747
80	11	2341	3849	4240	3047	11	372	1461	3329	2277
160	24	7037	11362	13064	8371	24	1233	4878	11110	6969
320	49	19255	30916	35070	21650	48	3629	14429	33032	19496
640	100	48755	78521	88528	53167	99	9579	37498	86254	49909
1 280	201	119242	192757	219592	125890	200	23215	93420	214934	121115

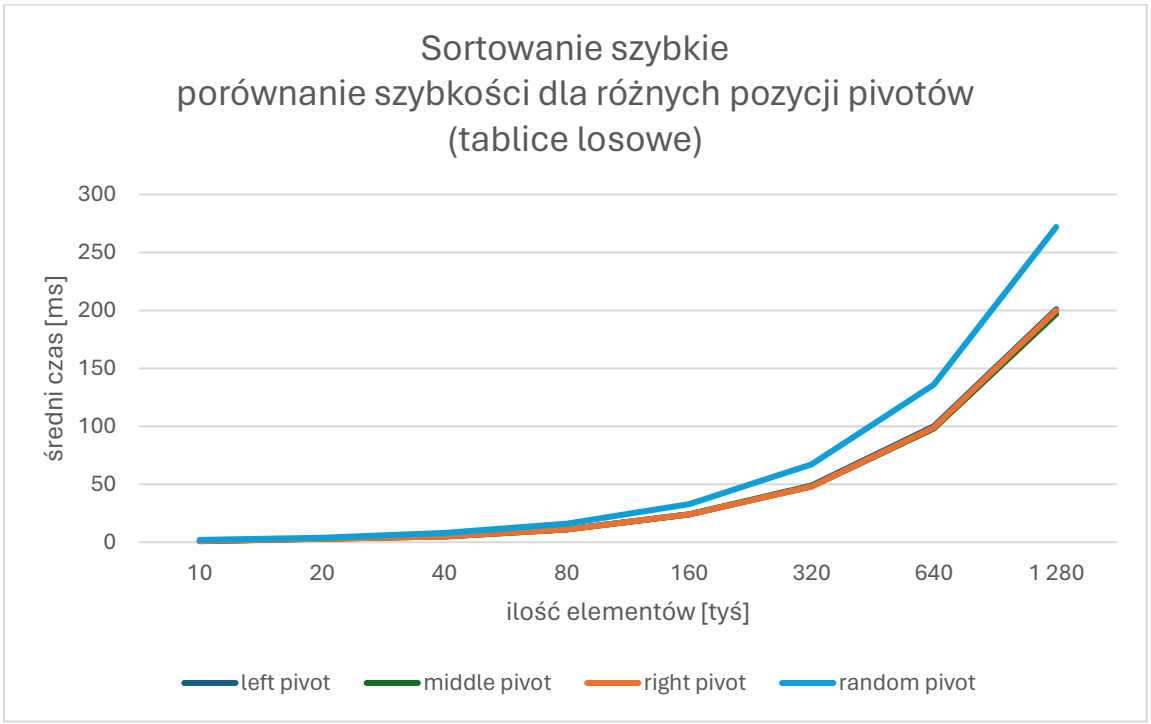
elements [*10^3]	time [ms]									
	middle pivot					random pivot				
	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc	random	sorted 33%	sorted 66%	sorted	sorted desc
10	0,9	1	0,7	0,4	0,4	2	2	1	1	1
20	3	2	1	0,9	0,9	4	3	3	2	2
40	5	4	3	2	2	8	7	6	6	5
80	11	9	7	5	5	16	14	14	12	12
160	24	19	14	10	10	33	29	27	25	25
320	48	38	28	19	20	67	60	55	49	51
640	98	77	58	41	43	136	124	113	103	103
1 280	197	157	121	87	92	272	268	245	229	229

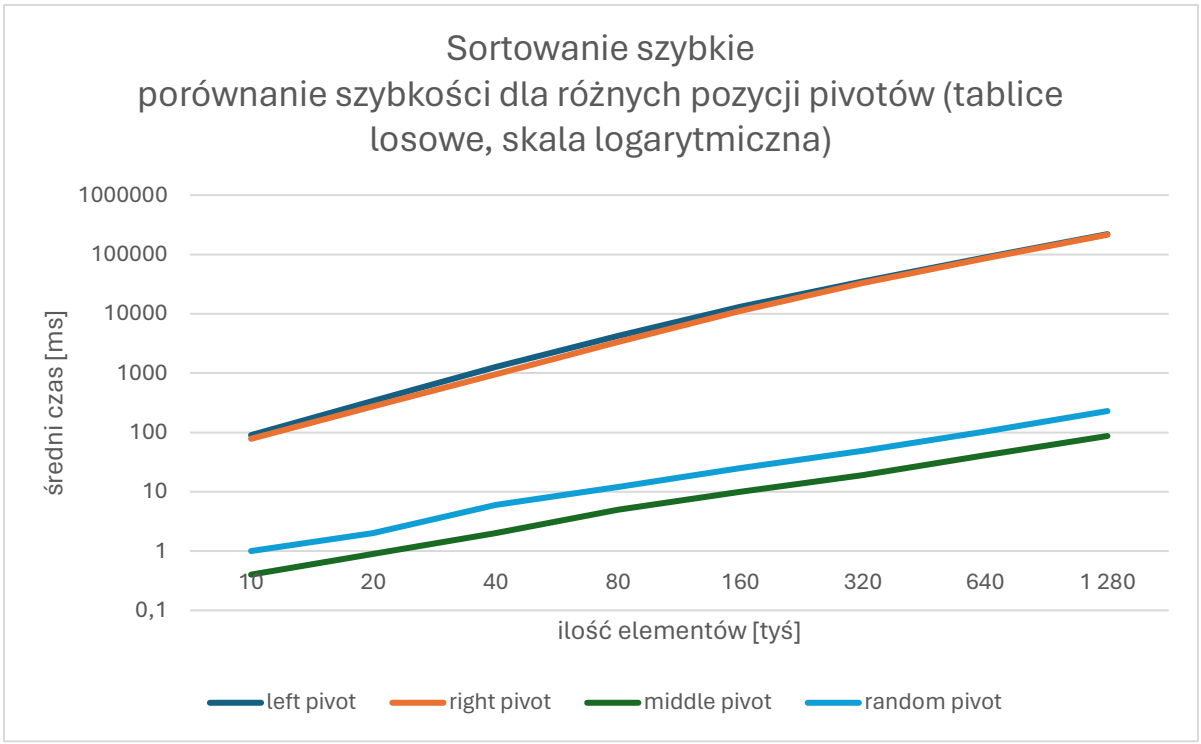



Sortowanie szybkie
środkowy pivot
250
200
150
100
50
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc


Sortowanie szybkie
prawy pivot
250000
200000
150000
100000
50000
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc


Sortowanie szybkie
losowy pivot
300
250
200
150
100
50
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
random
sorted 33%
sorted 66%
sorted
sorted desc

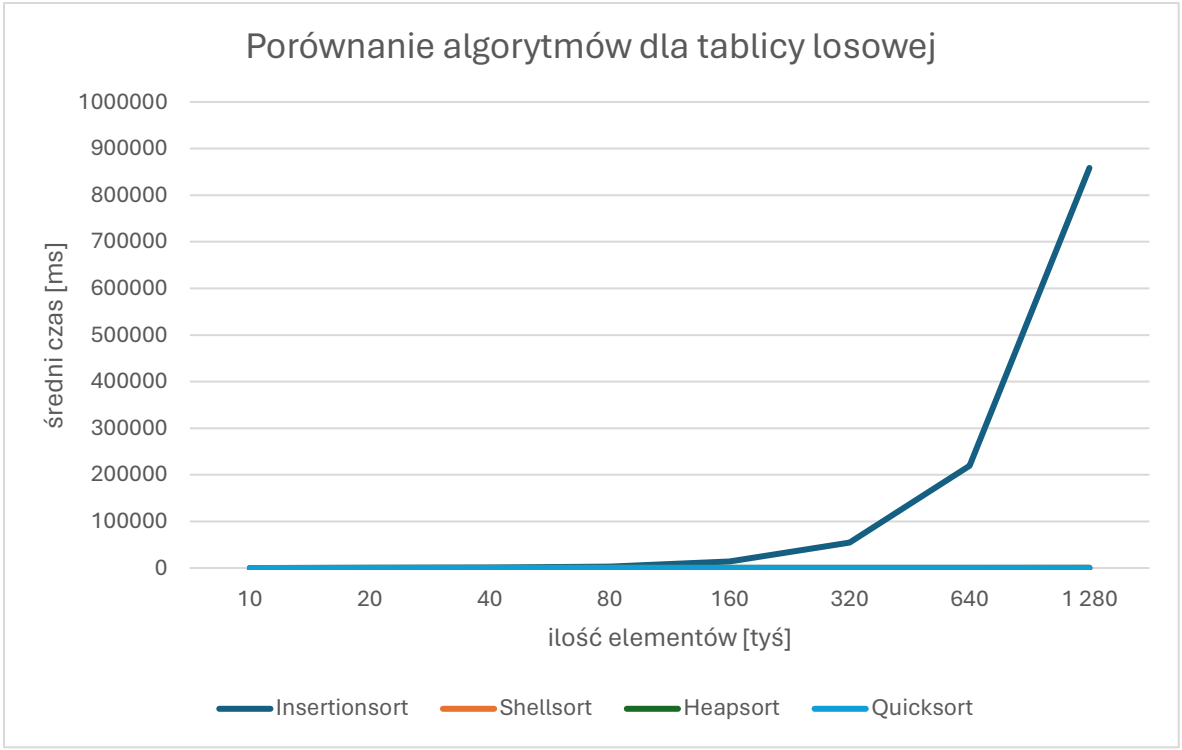

Sortowanie szybkie
porównanie szybkości dla różnych pozycji pivotów
(tablice losowe)
300
250
200
150
100
50
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
left pivot
middle pivot
right pivot
random pivot

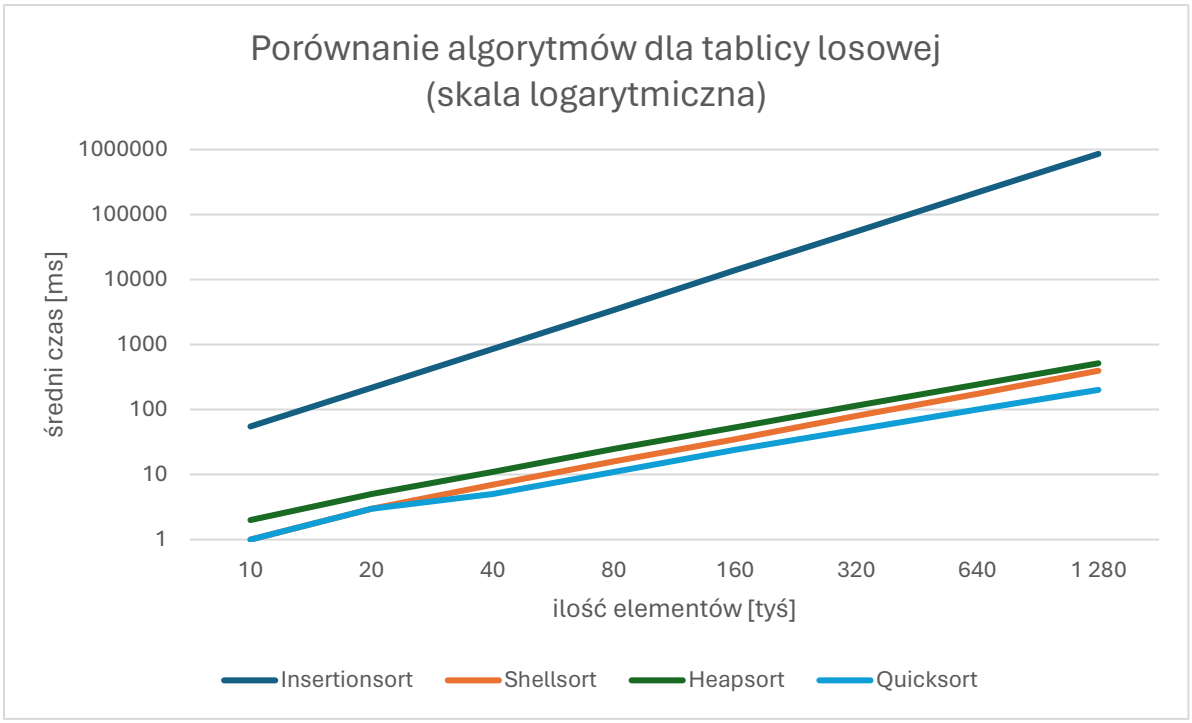


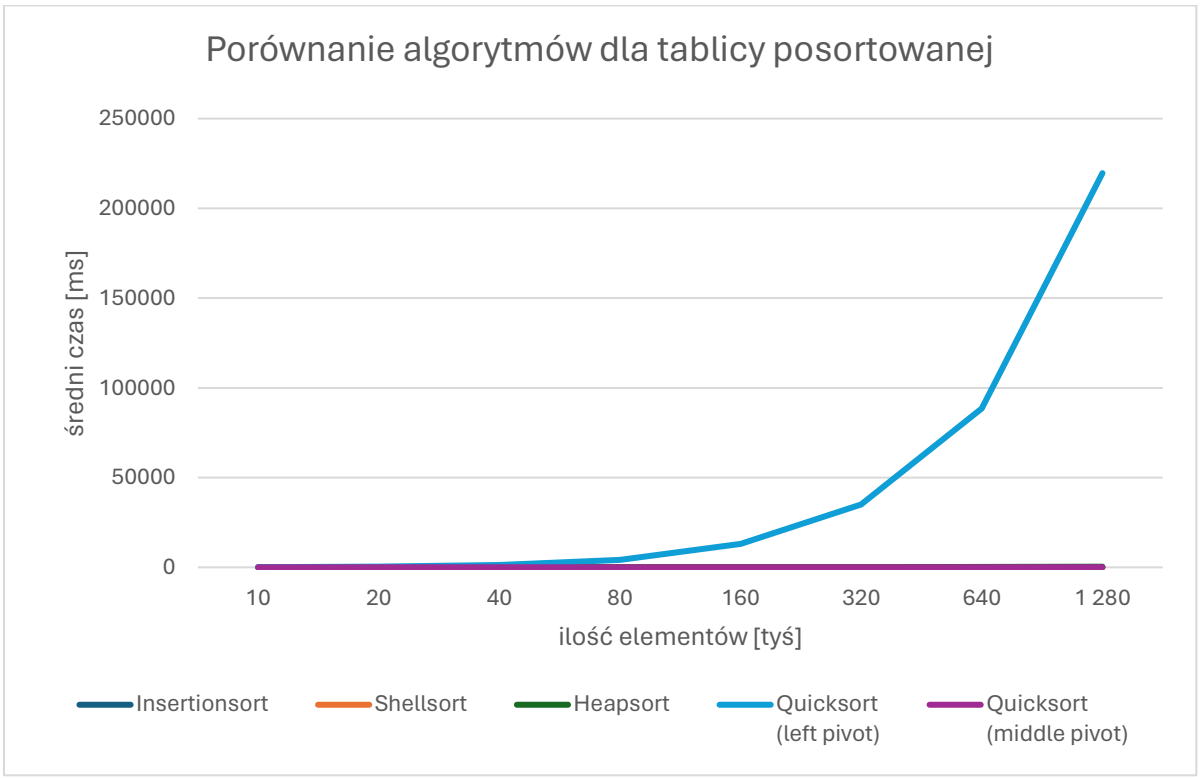
Zbiorcze porównanie algorytmów

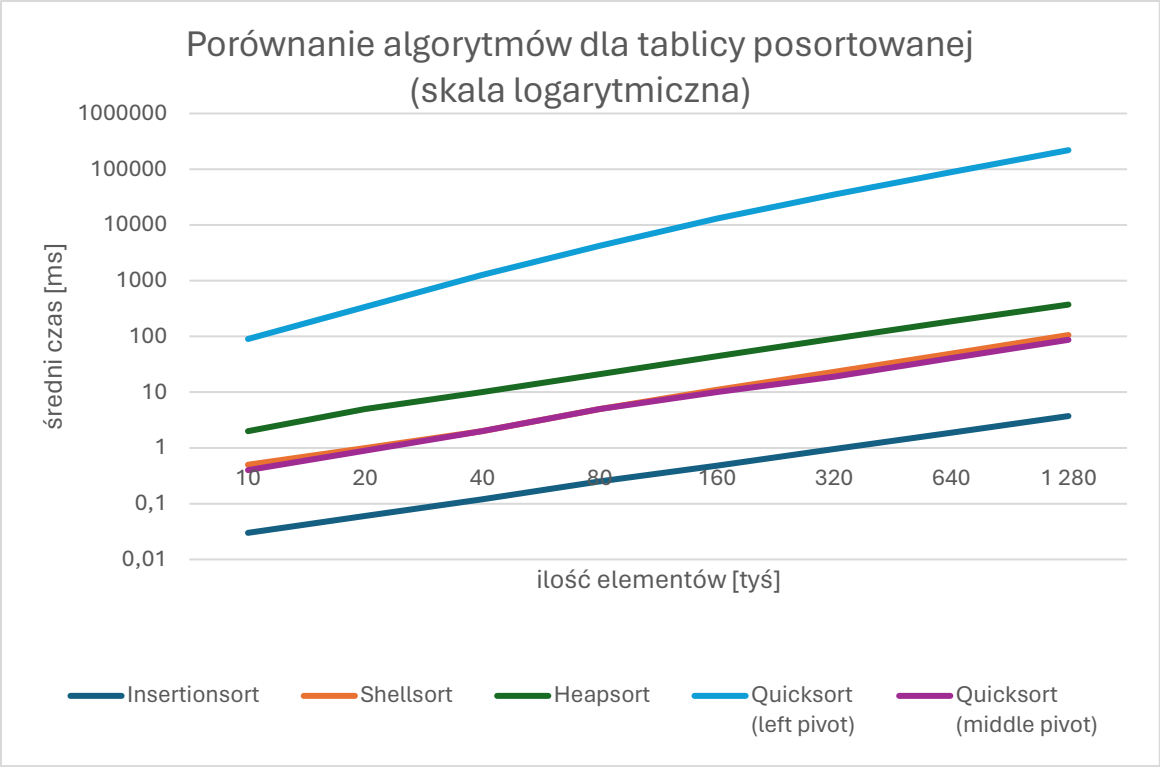
random				
elements [10^3]	time [ms]			
	Insertionsort	Shellsort	Heapsort	Quicksort
10	55	1	2	1
20	218	3	5	3
40	856	7	11	5
80	3415	16	25	11
160	13981	35	53	24
320	54528	80	115	49
640	219694	175	243	100
1 280	858402	396	515	201

sorted					
elements [10^3]	time [ms]				
	Insertionsort	Shellsort	Heapsort	Quicksort (left pivot)	Quicksort (middle pivot)
10	0,03	0,5	2	90	0,4
20	0,06	1	5	340	0,9
40	0,12	2	10	1270	2
80	0,25	5	21	4240	5
160	0,48	11	44	13064	10
320	0,96	23	92	35070	19
640	1,88	49	186	88528	41
1 280	3,73	106	373	219592	87




Porównanie algorytmów dla tablicy losowej
(skala logarytmiczna)
1000000
100000
10000
1000
100
10
1
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
Insertionsort
Shellsort
Heapsort
Quicksort


Porównanie algorytmów dla tablicy posortowanej
250000
200000
150000
100000
50000
0
średni czas [ms]
10
20
40
80
160
320
640
1 280
ilość elementów [tyś]
Insertionsort
Shellsort
Heapsort
Quicksort
(left pivot)
Quicksort
(middle pivot)



Podsumowanie i wnioski

Dla wyników sortowania przez wstawianie można zobaczyć wyraźną funkcję kwadratową. Jest on najwolniejszy ze wszystkich mierzonych sortowań. Z plusów jednak bardzo dobrze radzi sobie z tablicami wstępnie i całkowicie posortowanymi, ponieważ nie wykonuje wtedy żadnych zamian, dlatego też jest on wtedy nieporównywalnie szybszy od tablic o elementach czysto losowych, co można wyraźnie dostrzec na wykresach – im tablica zawiera więcej elementów posortowanych, tym algorytm zaczyna działać znacznie szybciej.

Algorytm sortowania Shela jest znacznie szybszy od poprzednika, czasy nie rosną w wysokim tempie, co może wykazywać zależność quasi-logarytmiczną. Algorytm Knutha jest zgodnie z przewidywaniami nieco szybszy od wersji Shella. Dla obydwu przypadków na korzyść gra posortowanie tablic, które również potrafią się dość znacząco przyczynić do zmniejszenia czasów działania algorytmów.

W Algorytm przez kopcowanie, również wykazuje zależność quasi-logarytmiczną, jednak jest on wolniejszy od Shellsorta, mimo iż jego złożoność pesymistyczna pozostaje na poziomie NlogN. Wpływ posortowania danych przyczynia się do szybszego wykonywania algorytmu, ale przyrost ten nie jest tak znaczy jak w poprzednich przypadkach. Podczas badania tego algorytmu przeprowadzono również wpływ danych na zachowanie algorytmu. Obliczenia wykonywane na typie float są średnio o ok 5% wolniejsze względem typu int.

Sortowanie szybkie dla losowych danych jest szybkie. Znacznie wyprzedza on pozostałe algorytmy dla liczb losowych. Jednakże sytuacja ulega odwróceniu, kiedy dane zaczynają być posortowane. Wtedy to dla lewego i prawego pivota czas potrzebny do posortowania tablic wydłuża się pesymistyczną tj. kwadratową złożoność obliczeniową, gdzie metoda „dziel i rządź” nie sprawdza się. Dla pivota losowego oraz środkowego taka sytuacja nie zachodzi. Dalej jest on bardzo szybki, przy czym dla pivota losowego zmiana posortowania czyni mało znaczące różnice w wydajności, natomiast dla pivota środkowego posortowanie tablic przyspiesza dodatkowo jego działanie. Dla wyników z losowej próby pivot lewy, środkowy i prawy zachowują identyczną wydajność pomijając różnice wynoszące 1 bądź 2 milisekundy. Dla pivota losowego ten czas jednak jest wyższy. Jest to prawdopodobnie spowodowane dodatkowymi wywołaniami funkcji odpowiedzialnych za losowanie indeksu pivota.

Źródła

- https://www.algorytm.edu.pl/matura-informatyka/zlozonosc-algorytmu
- https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/DNDIkCVVg
- https://wikipedia.org/