Метод инвариантного погружения

Table of Contents


```
[folder,name] = fileparts(matlab.desktop.editor.getActiveFilename);
addpath(fullfile(folder,name+"_deps"));
```

Школьная задачка

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3...}}} - ?$$

$$F(n) = \sqrt{3+_n\sqrt{3+_{n-1}...\sqrt{3+_1\sqrt{3}}}}$$

$$F(n \to \infty) = ?$$

```
function s = fval(N)
% прямое суммирование
    a = 3;
    s = sqrt(3);
    for i = 1:N
        s = sqrt(s + a);
    end
end
```

```
fval(15) % вариант процедурный
```

```
ans = 2.3028
```

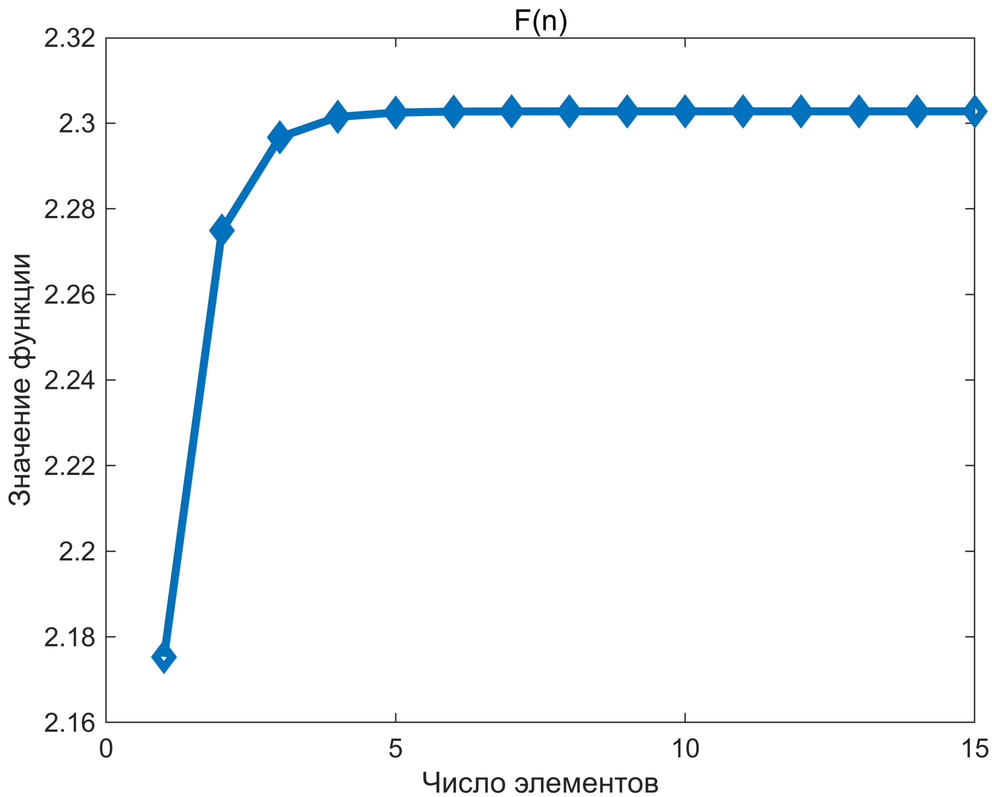
```
function s = fval_rec(s,i,N)
% суммирование через рекурсию
    a=3;
```

```
        if i>=N
            return
        else
             s= sqrt(a + fval_rec(s,i+1,N));
        end
    end
```

```
fval_rec(0,0,15) % враиант через рекурсию
```

```
ans = 2.3028
```

```
plot(arrayfun(@fval,1:15),Marker = 'diamond',linewidth=3)
title(" F(n) ")
xlabel("Число элементов")
ylabel("Значение функции")
```



$$F(n) = \sqrt{3+_n\sqrt{3+_{n-1}\ldots\sqrt{3+_1\sqrt{3}}}} = \sqrt{3+F_{n-1}}$$

$$X = \sqrt{3+X}, X^2 - X - 3 = 0 \;\; (X > 0)$$

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

```
0.5*(1+sqrt(13))
```

```
ans = 2.3028
```

Предполагаем, что решение нам известно и смотрим что будет если к нему добавить еще один элемент.

Последовательность Фибоначчи

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1} \ , \ X_1 = 1, X_2 = 1$$

Процедурное решение и рекурсия

Процедурное решение - суммирование в цикле.

Функциональное решение - суммирование при помощи рекурсии

```
fib_dir(7)
```

```
ans = 13
```

```
fib_rec(7)
```

```
ans = 13
```

```
tic;fib_dir(35);toc
```

```
Elapsed time is 0.000334 seconds.
```

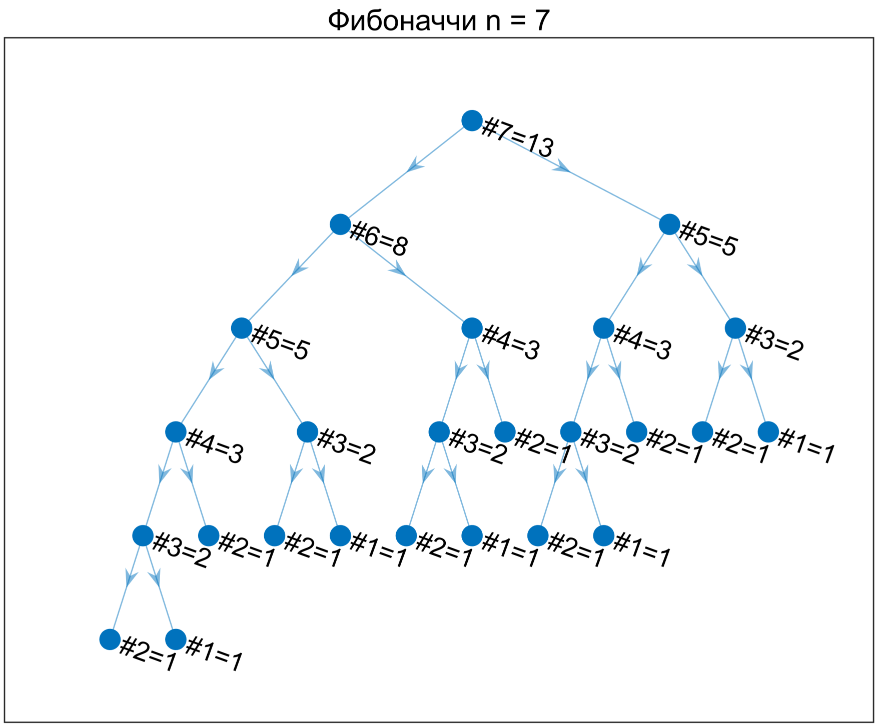
```
tic;fib_rec(35);toc
```

```
Elapsed time is 0.149605 seconds.
```

Почему рекурсия медленно работает можно понять если посмотреть граф вызова

```
function val = fib_rec(N)
% рекурсивное решение
    if N<=2
        val = 1;
        return
    end
    val  = fib_rec(N-1) + fib_rec(N-2);
end
```

```
plotFibTreeGraph(7)
```



Memoization pattern

Как видно из графа для последовательности фибоначчи, при рекурсии происходит частое повторение одного и того же паттерна (так как следующий элемент выражается через предыдущие). Соотвественно, идея состоит в том, чтобы хранить отдельно уже посчитанные элементы последовательности, чтобы не надо было их пересчитывать

Класс dictionary

Словарь - это коллекция данных, организованная по принципу ключ-элемент, данные доступны по ключу, разные элементы не могут иметь один ключ. Словари адаптированы под возможность раширения множества.

```
d = dictionary("a",10)
```

```
d = 

  dictionary (string ⟼ double) with 1 entry:

    "a" ⟼ 10
```

```
f = @(d,x,y)insert(d,x,y)
```

```
f = function_handle with value:
    @(d,x,y)insert(d,x,y)
```

```
% словарь, как и остальные базовые коллекции (struct,cell и др.)
```

```
% используют pass-by-value
f(d,"b",34)
```

```
ans = 

  dictionary (string ⟼ double) with 2 entries:

    "a" ⟼ 10
    "b" ⟼ 34
```

```
d
```

```
d = 

  dictionary (string ⟼ double) with 1 entry:

    "a" ⟼ 10
```

Обертка ("wrapper") для стандартного словаря в матлаб, чтобы нам удобнее было писать данные

```
classdef Dict< handle
    % обертка вокруг стандартного словаря (dictionary) чтобы передавать его
    % по указателю (pass-by-handle)
    properties
        d % стандартный словарь
    end
    methods
        function obj = Dict()
            obj.d = dictionary;
        end
        function f = haskey(obj,k) % функция проверяет есть ли данный ключ в коллекции
           f = isConfigured(obj.d) && isKey(obj.d,k);
        end
        function add(obj,key,val) % добавлет в коллекцию элемент val  с ключем key
            obj.d = insert(obj.d,key,val);
        end
        function val = get(obj,key) % достает содержимое по ключу
            val = obj.d(key);
        end
    end
end
```

Рекурсивная функция с запоминанием значений

```
function val = fib_mem(N)
    persistent M % хранилище для уже посчитанных элементов последовательности будет храниться
% в памяти функции
    if isempty(M)
        M = Dict();
    end
    if N<=2 % первые два элемента равны единице
        val = 1;
        M.add(N,val);
        return
    end
    if M.haskey(N) % проверяем есть ли текущий элемент последовательности в хранилище
                   % если есть, то возвращаем его
        val = M.get(N);
        return
```

```
        end
        val  = fib_mem(N-1) + fib_mem(N-2); % рекурсивно рассчитываем следующий
        % элемент последовательности и добавляем его в словарь
        M.add(N,val);
    end
```

```
fib_mem(30)
```

```
ans = 832040
```

```
tic;fib_rec(35);toc
```

```
Elapsed time is 0.140574 seconds.
```

```
tic;fib_mem(35);toc
```

```
Elapsed time is 0.000133 seconds.
```

```
clear fib_mem
```

Класс-"запоминатель"

Функция **fib_mem** позволяет решать рекурсивную задачу фибоначчи с запомимнаем, она специализрованая, при помощи ООП можно сделать некоторый универсальный класс, который позволяет нам использовать произвольную рекурсивную функцию.

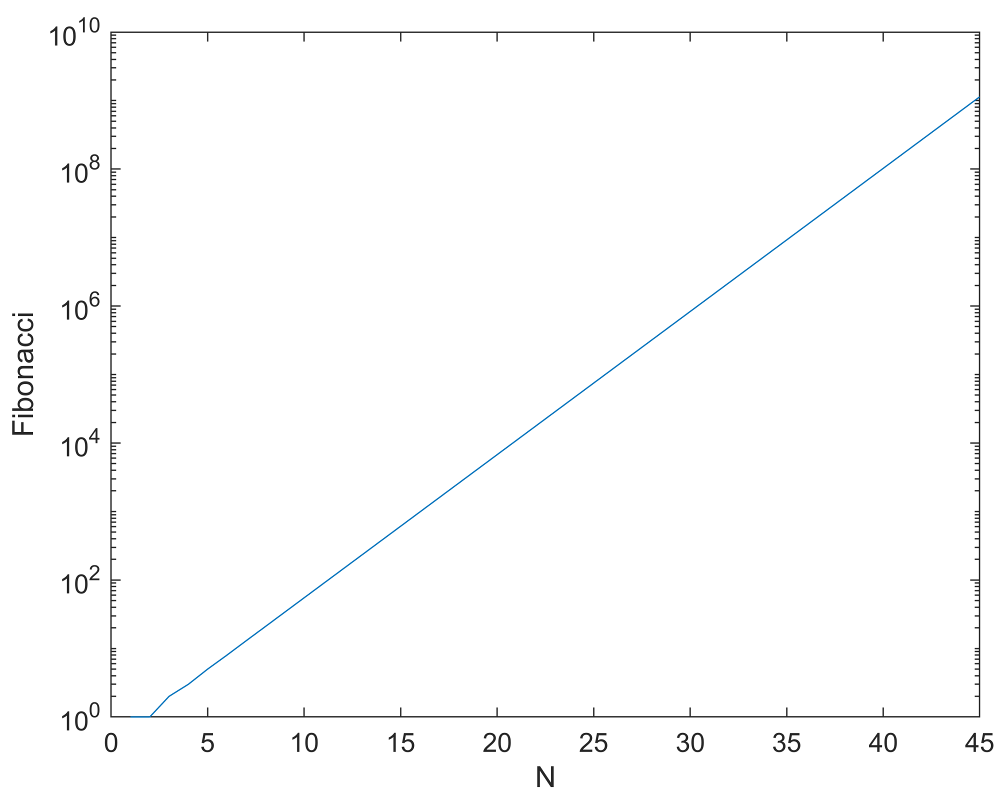
```
classdef memoizer_class<handle
    % позволяет имитировать паттерн closure для рекурсивной
    % функции, которая принимает функцию в качестве второго аргумента
    % f = @(x,f) f(N-2)+ f(N-1)  - например для последоватлеьности
    % Фибоначчи
    properties (SetAccess=private)
        d Dict % словарь, который будет хранить уже посчитанные пары аргумент-значение функции
        f function_handle
    end
    methods
        function obj = memoizer_class(f,init_keys,init_vals)
            arguments
               f function_handle
               init_keys double=[]
               init_vals double=[]
            end
% конструктор
% функция f - указатель на функцию, которая первым аргументом
% принимает независимую переменную, а вторым  - функцию, которая вызывается рекурсивно,
% также она будет опционально принимать стартовые значения для последовательности
% (первые элементы последовательности, стартовые условия, которые сразу записываются в словарь)
% это сделано потому, что анонимные функции в матлаб не
            obj.d = Dict();
            if ~isempty(init_keys)
                arrayfun(@(i)add(obj.d,init_keys(i),init_vals(i)),1:length(init_keys)); % добавляем
стартовые условия в словарь
            end
```

```
            obj.f = f;
        end
        function val = fun(obj,N)
            if obj.d.haskey(N)
                val = get(obj.d,N);
            else
                val = obj.f(N,@obj.fun);
                add(obj.d,N,val)
            end
        end
    end
end
```

```
fib2 = @(N,f) f(N-2) + f(N-1); % создаем анонимную функцию
m = memoizer_class(fib2,[1 2],[1 1]); % передаем мемоизатору функцию и начальные условия
m.fun(45);
```

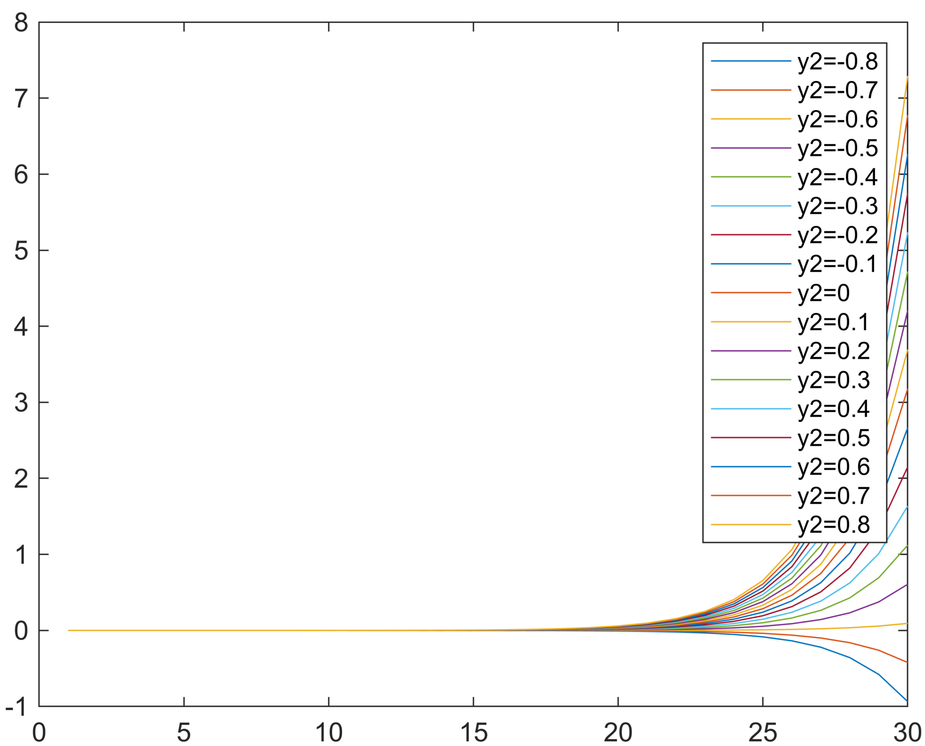
Одно из преимуществ способа запоминания при помощи классов, является то, что после выполнения функции все содержимое словаря может быть легко доступно. Построим график всех значений в словаре.

```
all_values = arrayfun(@(i)get(m.d,i),1:45);
plot(1:45,all_values);xlabel("N");ylabel("Fibonacci")
yscale log;
```



В отличие от функционального решения, класс -запоминатель является универсальным, например, мы можем проанализировать устойчивость рекуррентной последовательности в зависимости от начальных условий:

```
fib2 = @(N,f) f(N-2) + f(N-1); % создаем анонимную функцию
y2_ = -0.8:0.1:0.8;
NMAX = 30;
f_max = zeros(length(y2_),NMAX); % тут будут хранится полученные значения
counter = 0;
for y2 = y2_
    counter = counter+1;
    m = memoizer_class(fib2,[1 2],[1 y2]); % передаем мемоизатору функцию и 
начальные условия
    m.fun(NMAX);
    f_max(counter,:) = arrayfun(@(i)get(m.d,i),1:NMAX);
end
plot(1:NMAX,f_max')
legend("y2=" + string(y2_))
```



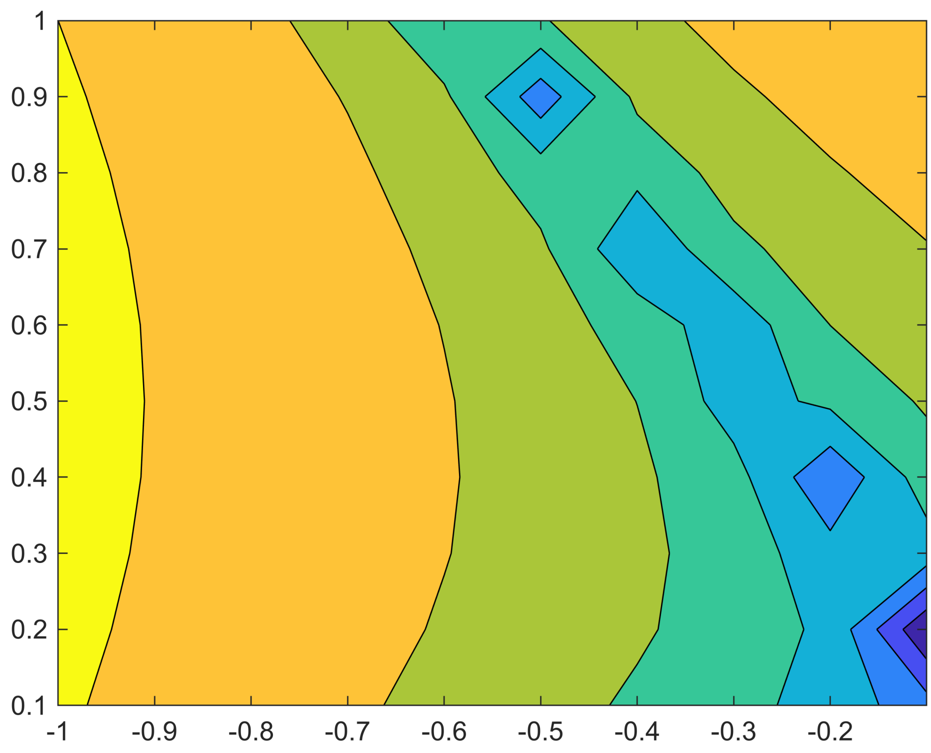
Или изучить параметрическую устойчивость разностной схемы

```
f_new = @(N,f,a,b) a*f(N-2) + b*f(N-1)
```

```
f_new = function_handle with value:
    @(N,f,a,b)a*f(N-2)+b*f(N-1)
```

```
a = 1:-0.1:0.1;
b = -1:0.1:-0.1;
NMAX = 100;
f_max = zeros(length(a),length(b),NMAX); % тут будут хранится полученные значения

for i = 1:length(a)
    for j=1:length(b)
        ai = a(i);bj = b(j);
        fib2 = @(N,f) f_new(N,f,ai,bj);
        m = memoizer_class(fib2,[1 2],[1 1]); % передаем мемоизатору функцию и 
начальные условия
        m.fun(NMAX);
        f_max(i,j,:) = arrayfun(@(i)get(m.d,i),1:NMAX);
    end
end
```

```
sc = 5;
contourf(b,a,log(abs(f_max(:,:,sc ))))
```

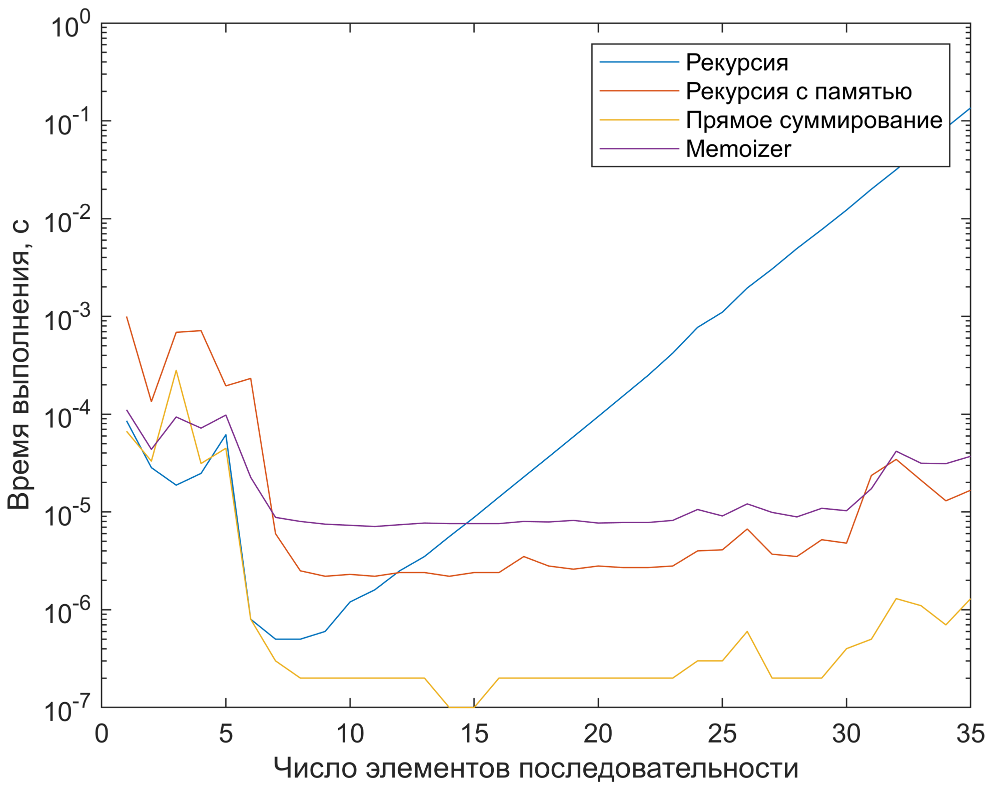



```
NMAX=35;
t_fib_dir= zeros([NMAX,1]);t_fib_rec = t_fib_dir;t_fib_mem_rec=t_fib_rec;
t_fib_mem_class = t_fib_dir;
fib_mem_class = memoizer_class(fib2,[1 2],[1 1])
```

```
fib_mem_class = 
```

```
memoizer_class with properties:

  d: [1×1 Dict]
  f: @(N,f)f_new(N,f,ai,bj)
```

```
for n = 1:NMAX
     tic;fib_rec(n);t_fib_rec(n) = toc;
     tic;fib_mem(n);t_fib_mem_rec(n) = toc;
     tic;fib_dir(n);t_fib_dir(n) = toc;
     tic;fib_mem_class.fun(n);t_fib_mem_class(n)=toc;
end
plot(1:NMAX,t_fib_rec,1:NMAX,t_fib_mem_rec,1:NMAX,t_fib_dir,1:NMAX,t_fib_mem_class)
yscale log
legend(["Рекурсия"  "Рекурсия с памятью" "Прямое суммирование" "Memoizer"])
xlabel("Число элементов последовательности")
ylabel("Время выполнения, с")
```



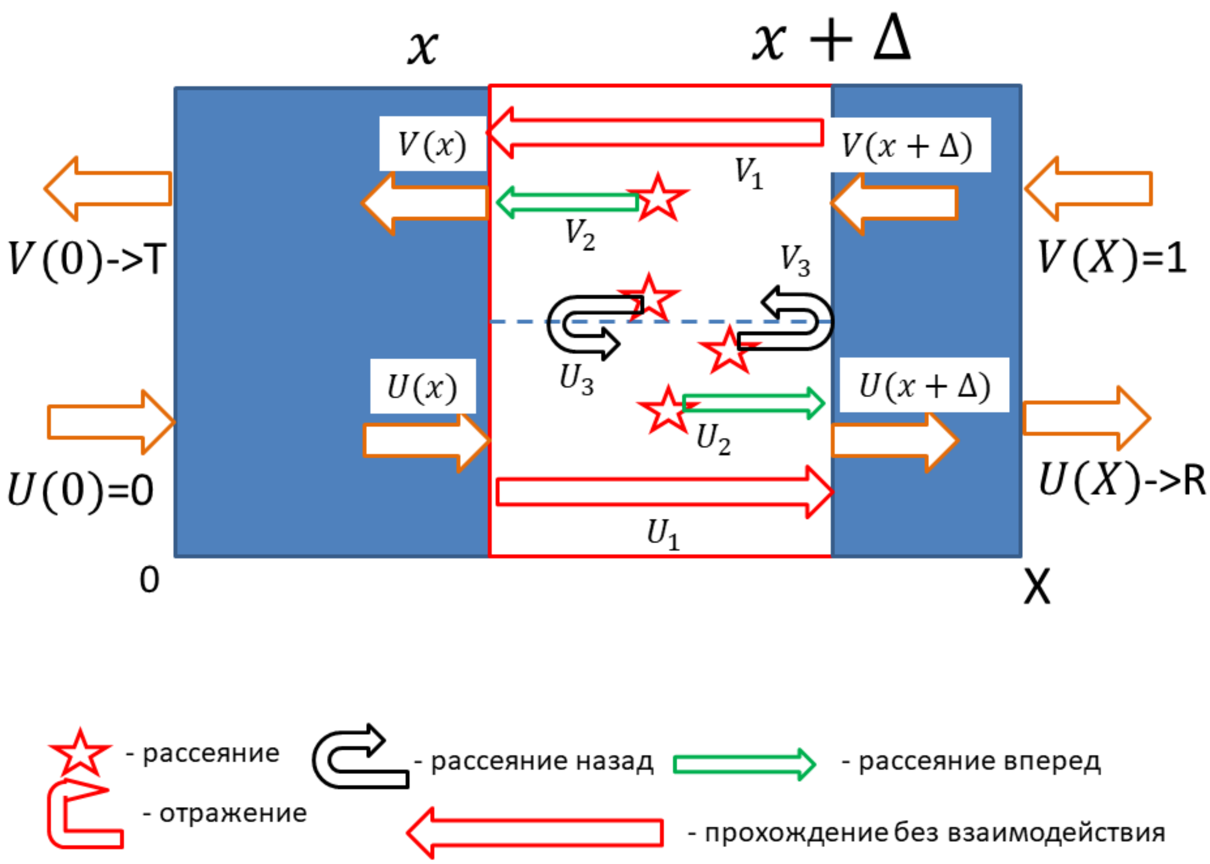
Уравнение переноса излучения в двухпотоковом приближении

Будем решать следующую задачу:

Пусть у нас есть некоторая одномерная среда длиной X, в которой распространяется излучение (поток частиц). Вероятность того, что частица на участке пути длиной Δ равна $\sigma \cdot \Delta$. Доля частиц, рассеиваемых вперед (продолжающих двигаться в томже направлении, что и до рассеяния) равна f, а в противоположном - b ($f + b = 1$). Все параметры (σ, f, b) могут зависеть от координат. Излучение падает с левого края.

Классический подход

Будем рассматривать задачу в двух потоковом приближении, то есть у нас есть плотность излучения движущегося вправо (U) и влево - V.



Рассмотрим небольшой участок пути излучения длиной Δ и, чтобы сформулировать дифференциальное уравнение переноса, рассмотрим потоки излучения на этом участке. Поток излучения в объеме этого элемента формулируется как сумма потоков движущихся влево и вправо:

Для излучения, движущегося вправо:

$$U(x+\Delta) = U_1 + V_3 + U_3$$

$U_1 = (1-\sigma\Delta)U(x)$ - излучение, которое пролетает через слой не рассеиваясь $(1-\sigma\Delta)$ - вероятность того, что рассеяния не произойдет (единица минус вероятность рассеяния $\sigma\Delta$).

$U_2 = f\sigma\Delta U(x)$ - доля излучения, рассеянного вперед

$U_3 = b\sigma\Delta V(x+\Delta)$ - часть потока, идущего влево, рассеянная назад (для потока, идущего вправо - это попутное направление).

$$U(x+\Delta) - U(x) = \sigma\Delta[(f-1)U(x) + bV(x+\Delta)] + o(\Delta)$$

Аналогично для потока вправо: $V(x) = (1-\sigma\Delta)V(x+\Delta) + f\sigma\Delta V(x+\Delta) + b\sigma\Delta U(x)$

$V(x+\Delta) - V(x) = \sigma\Delta[-bU(x) - (f-1)V(x+\Delta)] + o(\Delta)$

Теперь можно поделить на Δ и устремить его к нулю, что даст систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx} = \sigma[(f-1)U(x) + bV(x)] \\ \frac{dV}{dx} = \sigma[-bU(x) - (f-1)V(x)] \end{cases}$$

Удобно систему переписать в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{d}{dx}\vec{Y} = \sigma\begin{bmatrix} f-1 & b \\ -b & -(f-1) \end{bmatrix}\vec{Y}; \quad \vec{Y} = \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\vec{Y} = T\vec{Y}$$

Граничные условия :

$U(0) = 0$ - слева излучение не падает

$V(X) = 1$ - справа излучение падает

Это краевая задача

$$\frac{d}{dx}\vec{Y} = f(x, \vec{Y})$$

$G(\vec{Y}(0), \vec{Y}(X)) = \Gamma \cdot [\vec{Y}(0); \vec{Y}(X)] = \vec{0}$ - граничные условия ($x = 0, x = X$ - гранцы области)

В нашем случае :

$f(x, \vec{Y}) = T(x)\vec{Y}$ (если σ, f, b не зависят от координат, то T - постоянная матрица)

Граничные условия:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) & U(X) \\ V(0) & V(X)-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матлаб имеет несколько численных методов для решения краевых задач.

Так как правая часть у нас имеет некоторые параметры, сделаем функцию, которая оборачивает конкретные значчния параметров и возвращает анонимную функцию в нужной форме, правая часть нашего дифференциального уравнения:

```
function fun = dy(sigma,alfa,b,f)
 % функция оборачивает конкретные значения параметров в анонимную функцию,
 % которая будет использована в решателе краевых задач
    T = zeros(2);
    T(1) = sigma*(f-1)-alfa;
    T(2) = sigma*b;
    T(3) = -T(2);
    T(4) = -T(1);
```

```
    fun = @(x,y)T*y(:);
    % первый аргумент  - независимая переменная (сетка)
    % второй аргумент - само значение функции
end
```

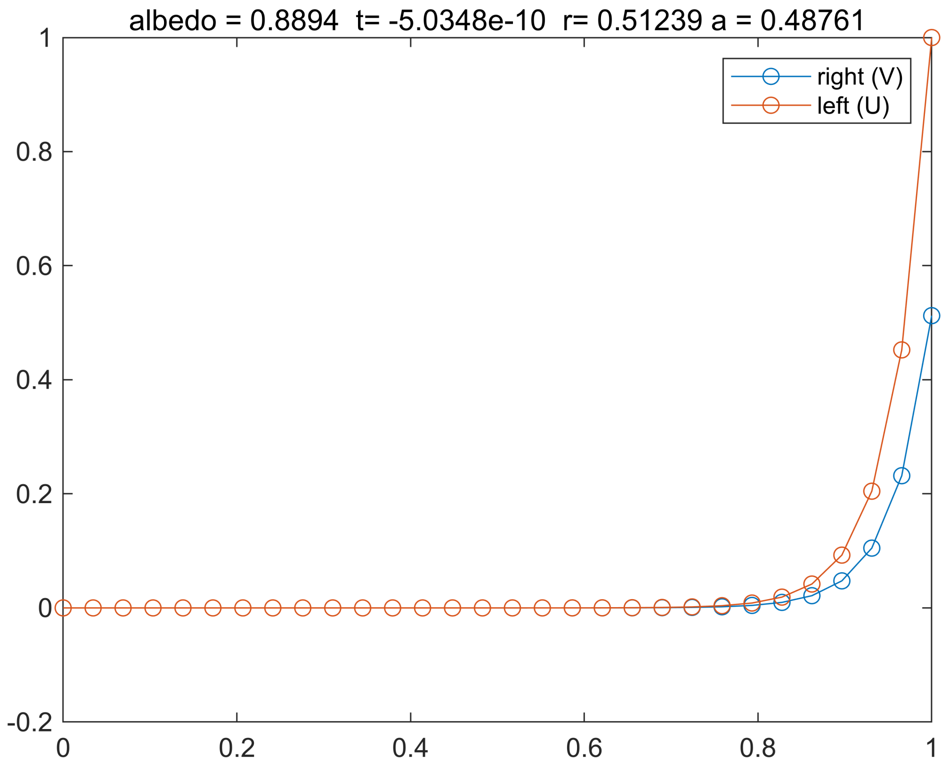
Граничные условия в форме:

```
function res = bcfun(y0,yX) % y0 и yX - вектора решения уравнения слева и справа соотвественно
res = [y0(1)
       yX(2)-1];
end
```

Также для решения краевых задач требуется стартовая аппроксимация, мы возьмем линейную зависимость:

```
function g = guess(x)
% стартовая аппроксимация
% x - сетка, на которой будет решаться уравнение
    g = [0.5*x
        x];
end
```

```
xmesh = linspace(0,1,30);% строим сетку, на которой будет
% искаться решение краевой задачи
solinit = bvpinit(xmesh, @guess); % исходное распределение
sigma=59.674;
% коэффициент f
forward_fraction = 0.464;
alfa = 7.421;
% коэффициент b в уравнении
backward_fraction = 1 - forward_fraction;
dy_fun = dy(sigma,alfa,backward_fraction,forward_fraction);
sol = bvp4c(dy_fun, @bcfun, solinit);
t = sol.y(2,1);
r = sol.y(1,end);
a = 1 - t - r;

plot(sol.x, sol.y,"-o" )
legend(["right (V)", "left (U)"])
title ( "albedo = "+ ...
    string(sigma/(sigma+alfa)) ...
    +"  t= "+string(t)+ ...
    "  r= "+string(r) + ...
    " a = "+string(a))
```



Когда потоки в объеме расчетной области найдены, коэффициент отражения это $R = U(X) = \overrightarrow{Y}(X)(1)$ - последний элемент в функции для потока, движущегося вправо.

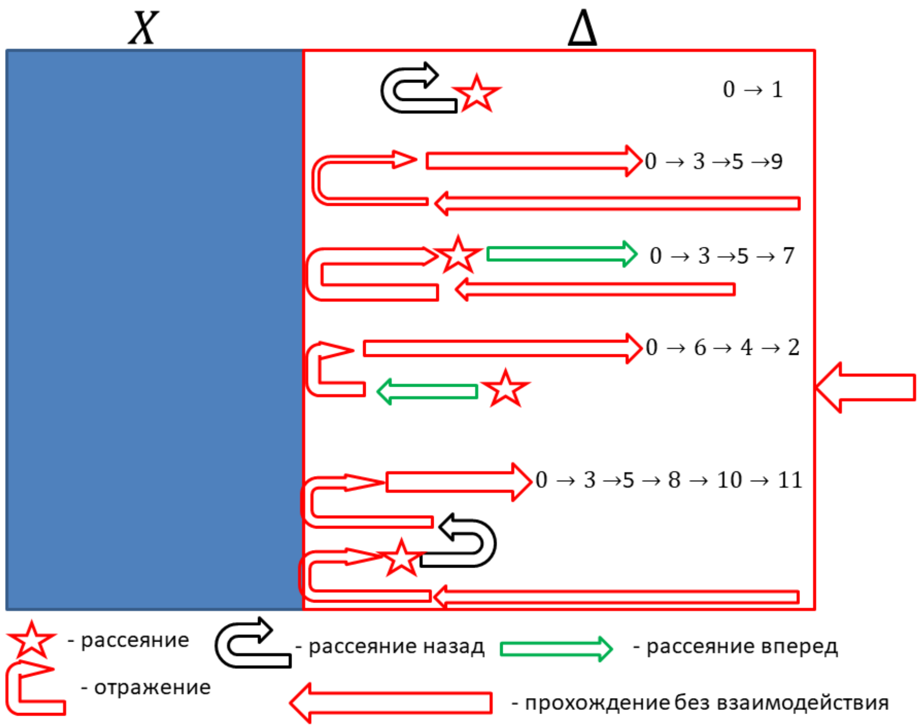
А коэффициент пропускания:

$T = V(0) = \overrightarrow{Y}(0)(2)$ - то есть второй элемент вектора решения на левой границе (поток, идущий с границы влево)

Метод инвариантного погружения для уравнения переноса излучения в двухпотоковом приближении

В действительности нам, как правило, не нужны внутренние поля, нас интересуют коэффициенты отражения и пропускания на границе.

Поэтому будем писать уравнения сразу для отражения (для пропускания не будем, но логика там такая же).



Предположим, что нам уже известно отражения от слоя толщиной X, растянем слой, добавив к нему слой толщиной Δ и рассмотрим как падающее излучение может взаимодействовать с этим добавленным слоем. На картинке выше каждому элементарному акту взаимодействия соотвествует своя пиктограмма.

Излучение:

1. Рассеивается назад, падающее излучения сразу выходит, рассеявшись назад (путь 0-1 на графе ниже)
2. Проходит через слой нерассеявшись, отражается и опять нерассеявшись выходит из слоя (0-3-5-9)
3. Проходит не рассявшись, отражается и рассеивается вперед (0-3-5-7)
4. Рассеивается вперед, отражается, проходит нерассеявшись (0-6-4-2)
5. Проходит, отражается,рассеивается назад,отражается,проходит без рассеяния (0-3-5-8-10-11)

Ниже приведен направленный граф рассеяний в добавленном слое. Каждый узел - единичный акт взаимодействия между излучением и добаленным слоем среды толщиной Δ.

$(1-\sigma\Delta)$ - прямое прохождение слоя без рассеяния

$f\sigma\Delta$ - рассеяние вперед

$b\sigma\Delta$ - рассеяние назад

R - отражение от слоя толщиной X

Использованная для построения графа функция **inv_emb_refl_graph** возвращает:

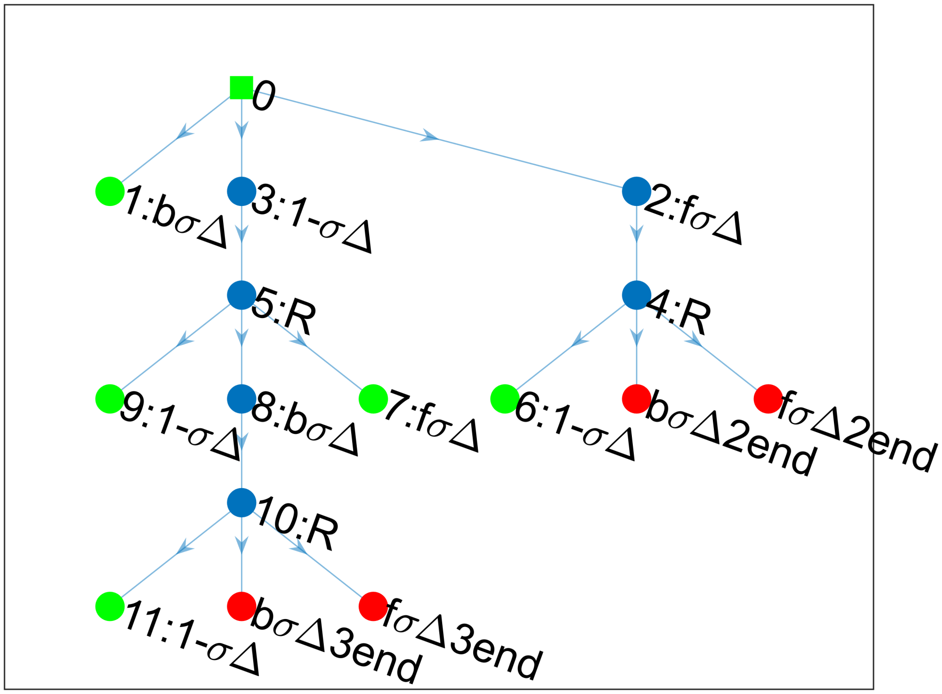
G - сам граф

real_leafNodes - узлы, вносящие вклад первого порядка в отражение

dead_leafNodes - узлы, вносящие вклад второго порядка в отражение

p - картинка (для объекта типа направленный граф (класс **digraph** в матлаб)

```
[G,real_leafNodes,dead_leafNodes,p] = inv_emb_refl_graph()
```




```
G =
  digraph with properties:

    Edges: [15×1 table]
    Nodes: [16×1 table]
real_leafNodes = 5×1 table
```

	Name
1	'1:b\sigma\Delta'
2	'9:1-\sigma\Delta'
3	'7:f\sigma\Delta'
4	'6:1-\sigma\Delta'
5	'11:1-\sigma\Delta'

```
dead_leafNodes = 4×1 table
```

	Name
1	'b\sigma\Delta2end'
2	'f\sigma\Delta2end'
3	'b\sigma\Delta3end'

	Name
4	'f\sigma\Delta3end'

```
p = 
  GraphPlot with properties:

     NodeColor: [16×3 double]
    MarkerSize: 10
        Marker: {'square'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'  'o'}
     EdgeColor: [0 0.4470 0.7410]
     LineWidth: 0.5000
     LineStyle: '-'
     NodeLabel: {1×16 cell}
     EdgeLabel: {}
         XData: [2 2 5 1 2 5 1 2 3 4 5 6 2 1 2 3]
         YData: [6 5 5 5 4 4 3 3 3 3 3 3 2 1 1 1]
         ZData: [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

  Show all properties
```

Синие узлы - промежуточные взаимодействия

Красные - пути, которые далее ведут к событиям второго порядка малости (Δ^2)

Зеленые узлы - те, которые приводят к выходу излучения на поверхность из добавленного слоя и дают вклад первого порядка.

Зеленый квадратик "0" - узел, соотвествующий акту падения излучения на добавленный слой.

Таким образом, пути от зеленого квадратика к любому из зеленых кружочков дадут нам вклад первого порядка в отражение.

Матлаб позволяет анализировать пути в графах между узлами. Нас интересуют пути между **real_leafNodes** зелеными кружочками и стартовой точкой.

```
pat = digitsPattern(1,2)+":";
disp("Ближайшие пути обратно на поверхность:")
```

```
Ближайшие пути обратно на поверхность:
```

```
for i =1:height(real_leafNodes)
    ppath = shortestpath(G,"0",real_leafNodes{i,1}{1}); % ищет пути между узлами
    out_str = join(ppath,[' ',char(8594),' ']);
    out_str = replace(out_str,pat,"");
    out_str = strrep(out_str, '\sigma', char(963)); % sigma σ
    out_str = strrep(out_str, '\Delta', char(916)); % delta Δ
    disp(out_str)
end
```

```
0 → bσΔ
0 → 1-σΔ → R → 1-σΔ
0 → 1-σΔ → R → fσΔ
0 → fσΔ → R → 1-σΔ
0 → 1-σΔ → R → bσΔ → R → 1-σΔ
```

Просуммируем все полученные ветки (только надо выкинуть те, которые дают второй порядок по Δ)

$$R(X+\Delta) = b\sigma\Delta + (1-\sigma\Delta)\cdot R\cdot(1-\sigma\Delta) + (1-\sigma\Delta)\cdot R\cdot f\sigma\Delta + f\sigma\Delta\cdot R\cdot(1-\sigma\Delta) + (1-\sigma\Delta)\cdot R\cdot b\sigma\Delta\cdot R\cdot(1-\sigma\Delta)$$

После простых преобразований, а также занулив все члены второго порядка получим выражение для коэффициента отражения "расширенного" слоя через коэффициент отражения исходного слоя:

$$R(X+\Delta) = R(X) + \sigma\Delta[b + 2(f-1)R(X) + R^2 b(X)]$$

В форме дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dx}R(x) = \sigma[b + 2(f-1)R(x) + R(x)^2]$$

Какое граничное условие? Если исследуемый слой полностью пропадет, то отражение от него будет равно нулю.

$$R(0) = 0$$

Аналогично можно сформулировать уравнение для пропускания (оно складывается из прохождения без изменений и прохождения излучения отраженного от слоя и рассеянного назад в направлении распространения):

$$\frac{d}{dx}T(x) = \sigma[(f-1) + bR(x)]T(x)$$

Граничное условие для пропускания соотвественно

$$T(0) = 1$$

Сравним одну и ту же задачу в постановке инвариантного подгружения и классической (локальной):

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx} = \sigma[(f-1)U(x) + bV(x)] \\ \dfrac{dV}{dx} = \sigma[-bU(x) - (f-1)V(x)] \\ V(X) = 1 \\ U(0) = 0 \end{cases}$$

И принципа инвариантности:

$$\begin{cases} \dfrac{dR(x)}{dx} = \sigma\Delta[b + 2(f-1)R(x) + R(x)^2] \\ \dfrac{dT(x)}{dx} = \sigma[(f-1) + bR(x)]T(x) \\ R(0) = 0 \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

С одной стороны, кажется, что уравнение для коэффициентов отражения и пропускания хуже, чем для потоков влево-вправо, так как оно нелинейно (в первом стоит квадрат отражения, во втором - произведение отражения и пропускания (это уравнение Рикатти, которое, вообще говоря, можно решить аналитически при помощи определенной подстановки).

Но обратим внимание на граничные условия, первая система - это краевая задача слева от слоя принулевой координате мы знаем только поток, идущий вправо (слева на слой ничего не падает) а справа мы знаем поток, идущий влево (падает излучение). Вторая система - это принципиально другой и значительно более простой для решения тип дфференциального уравнения - задача с начальными условиями (задача Коши)!

Решение задачи с начальными условиями в матлаб. Как правило задачи с начальными условиями описывают эволюцию процессов во времени от некоторого начального состояния до нужного (сам диффур решается, например, методом Рунге-Кутта)

Задача с начальными условиями:

$$\frac{d}{dx}\vec{Y} = f(x, \vec{Y})$$

$\vec{Y}(x) = \vec{Y_0}$ - начальные условия.

В нашем случае:

$$\frac{d}{dx}\vec{Y} = \begin{matrix} \sigma\Delta[b + 2(f-1)Y(1) + Y(1)^2] \\ \sigma[(f-1) + bY(1)]Y(2) \end{matrix}; \quad \vec{Y} = \begin{matrix} R \\ T \end{matrix}$$

```
function fun =dRdx(sigma,alfa,b,f)
% производная функции отражения
    fun = @(x,R) sigma*(b + 2*(f-1)*R  + R.*R*b) - 2*alfa*R; % в отличие от формул в тексте добавлено также поглощение в слое
end
function fun = dTdx(sigma,alfa,b,f)
% производная функции пропускания
    fun = @(x,R,T) (sigma*((f-1)  + b*R)-alfa).*T;
end
function fun = iem(sigma,alfa,b,f)
% функция для векторной формы дифференциального уравнения для решателя
    funR = dRdx(sigma,alfa,b,f);
    funT = dTdx(sigma,alfa,b,f);
    fun =@(x,Y) [funR(x,Y(1));
        funT(x,Y(1),Y(2))];
end
```

```
sigma=6.04
```

```
sigma = 6.0400
```

```
% коэффициент f
forward_fraction = 0.45
```

```
forward_fraction = 0.4500
```

```
alfa = 0.819
```

```
alfa = 0.8190
```

```
% коэффициент b в уравнении
backward_fraction = 1 - forward_fraction
```

```
backward_fraction = 0.5500
```

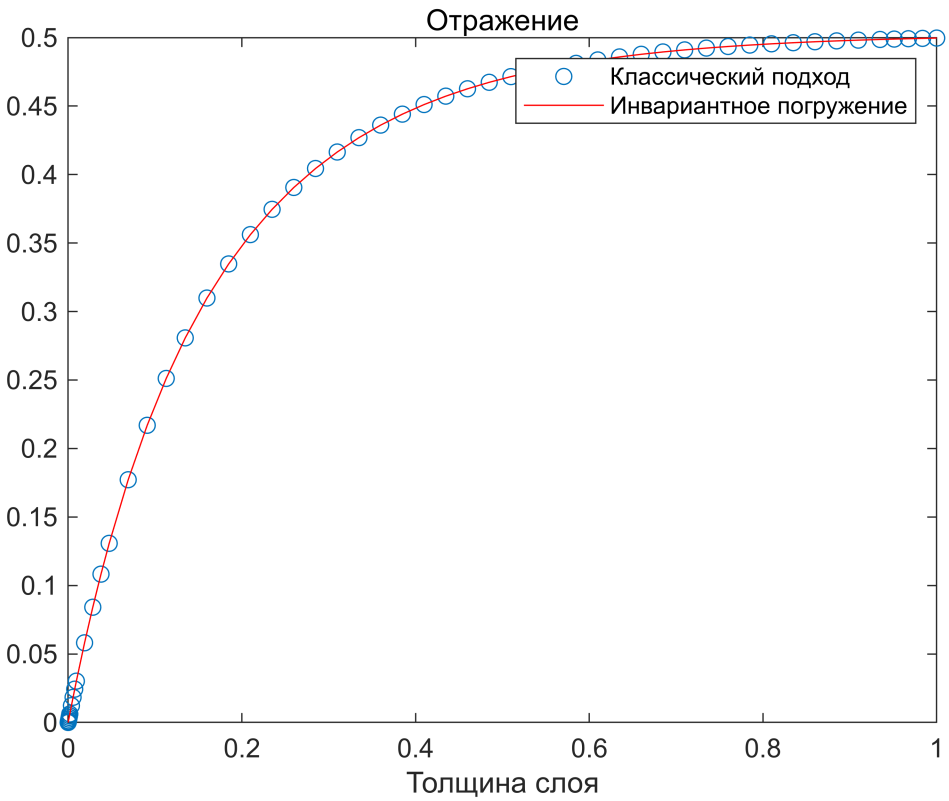
```
%dR_fun = dRdx(sigma,alfa,backward_fraction,forward_fraction)
iem_fun = iem(sigma,alfa,backward_fraction,forward_fraction)
```

```
iem_fun = function_handle with value:
    @(x,Y)[funR(x,Y(1));funT(x,Y(1),Y(2))]
```

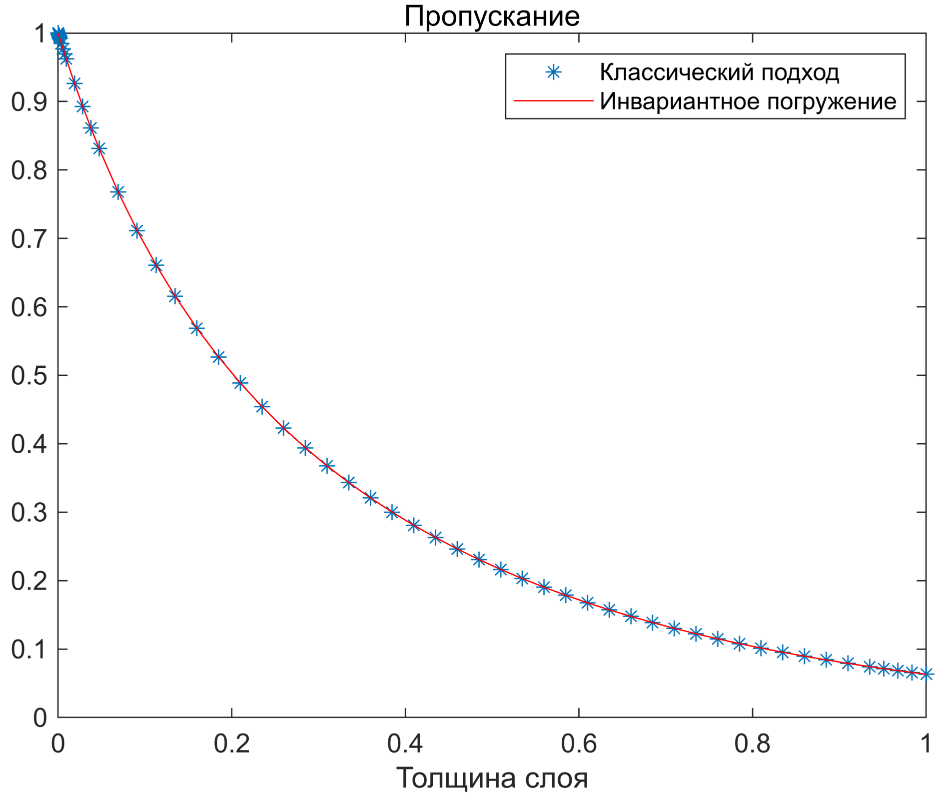
```
F = ode; % создаем объект решателя
F.ODEFcn =iem_fun; %dR_fun;
F.InitialValue = [0;1];% начальные условия
sol_inv = solve(F,0,1) % решаем
```

```
sol_inv = 
  ODEResults with properties:

        Time: [0 1.5123e-05 3.0245e-05 4.5368e-05 6.0491e-05 1.3610e-04 2.1172e-04 2.8733e-04 3.6295e-04 7.4101e-04
    Solution: [2×61 double]
```

```

r_dir =  zeros(size(sol_inv.Time));
t_dir =  ones(size(sol_inv.Time));
for i =2:numel(sol_inv.Time)
    [r_dir(i),t_dir(i)] =
r_direct(sol_inv.Time(i),alfa,sigma,forward_fraction,backward_fraction);
end
plot(sol_inv.Time,r_dir,'o',sol_inv.Time,sol_inv.Solution(1,:),'r')
legend(["Классический подход","Инвариантное погружение"])
title("Отражение");xlabel("Толщина слоя")
```




```
plot(sol_inv.Time,t_dir,'*',sol_inv.Time,sol_inv.Solution(2,:),'r')
legend(["Классический подход","Инвариантное погружение"])
title("Пропускание");xlabel("Толщина слоя")
```



Аналитическое решение уравнения инвариантного погружения для функции отражения.

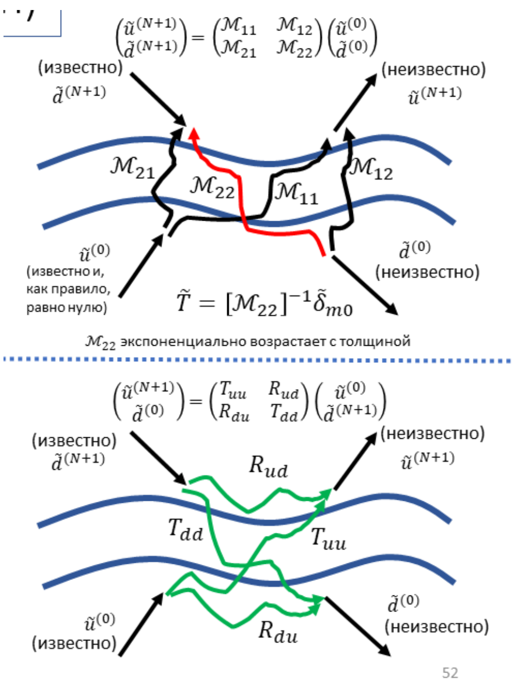
$\frac{d}{dx}R(x) = \sigma b + 2[\sigma(f-1) - \alpha]R(x) + R(x)^2$ (здесь добавлено еще поглощение α - поглощение на единице длины пути)

Следует отметить, что при выводе мы нигде не ограничивали материальные функции среды, поэтому все коэффцииенты в уравнении могут зависеть от координаты.

Это уравнение общего вида:

$$\frac{d}{dx}Y(x) = A(x) + B(x)Y(x) + C(x)Y(x)^2$$

Хотел бы обратить внимание на глубокую связь между идеей принципа инвариантности и метода матриц рассеяния, который применяется для составления эффективных алгоритмов решения задачи рассеяния на многослойках гомогенных слоев и многослойных дифракционных решетках.



Метод S-матриц (forward propagation)

$$\boxed{\begin{pmatrix}\tilde u^{(l+1)}\\ \tilde d^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_{uu}^{(l)} & R_{ud}^{(l)}\\ R_{du}^{(l)} & T_{dd}^{(l)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde u^{(0)}\\ \tilde d^{(l+1)}\end{pmatrix}}$$

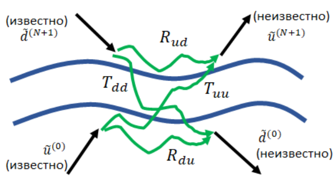
$$\Psi_{(l+1)l}^{-1}=\left[\mathfrak{I}_{21}^{(l+1)l}R_{ud}^{(l-1)}+\mathfrak{I}_{22}^{(l+1)l}\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{R}_{ud}^{(l)}=\left[\boldsymbol{\mathfrak{I}}_{11}^{(l+1)l}\boldsymbol{R}_{ud}^{(l-1)}+\boldsymbol{\mathfrak{I}}_{12}^{(l+1)l}\right]\Psi_{(l+1)l}^{-1}$$ - зависит только от $\boldsymbol{R}_{ud}^{(l-1)}$

$$\boldsymbol{T}_{dd}^{(l)}=\boldsymbol{T}_{dd}^{(l-1)}\Psi_{(l+1)l}^{-1}$$ - зависит от $\boldsymbol{R}_{ud}^{(l-1)}$ и $\boldsymbol{T}_{dd}^{(l-1)}$

$$T_{uu}^{(l)}=\mathfrak{I}_{11}^{(l+1)l}-R_{ud}^{(l)}T_{uu}^{(l-1)}$$ - зависит от $\boldsymbol{R}_{ud}^{(l-1)}$ и $\boldsymbol{T}_{uu}^{(l-1)}$

$$R_{du}^{(l)}=\left[R_{du}^{(l-1)}-T_{dd}^{(l-1)}\Psi_{(l+1)l}^{-1}\mathfrak{I}_{21}^{(l+1)l}T_{uu}^{(l-1)}\right]$$- зависит от $\boldsymbol{R}_{ud}^{(l-1)}$, $\boldsymbol{T}_{uu}^{(l-1)}$ и $T_{dd}^{(l-1)}$



Идея метода с-матриц в том, чтобы связь между падающим полем (на картинке выше стрелочки направлены к объекту) и рассеянным полем (стрелочки от объекта). В отличие от классического матричного метода, для которого ищется связь между полями идущими вверх и вниз на картинке в каждом слое.

```
%% задачка
function s = fval(N)
% прямое суммирование
    a = 3;
    s = sqrt(3);
    for i = 1:N
        s = sqrt(s + a);
    end
end
function s = fval_rec(s,i,N)
```

```
% суммирование через рекурсию
    a=3;
    if i>=N
        return
    else
         s= sqrt(a + fval_rec(s,i+1,N));
    end
end
%% последовательность фибоначчи
function val = fib_dir(N)
% процедурное решение
    if N<=2
        val = 1;
        return
    end
    val = 0;
    x1 = 1;
    x2 = 1;
    for i = 3:N
        val = x1 + x2;
        x1 = x2;
        x2 = val;
    end
end
function val = fib_rec(N)
% рекурсивное решение
    if N<=2
        val = 1;
        return
    end
    val  = fib_rec(N-1) + fib_rec(N-2);
end
function plotFibTreeGraph(n)
    % для построения графа используем рекурсию в процедурном
    % стиле
    edges = [];
    labels = string([]);
    nodeCount = 0;

    % рекурсиный вызов (как в простой версии
    % рекурсивной функции, только каждый нод добавляется в граф)
    % nested function (переменные edges,labels и nodeCount) для нее
    % глобальные
    function nodeID = buildFibGraph(num)
        nodeCount = nodeCount + 1;
        nodeID = nodeCount;
        val = fib_mem(num);
        labels(nodeID) = "#"+string(num)+"="+string(val);
        if num <= 2
            return;
```

```
        end
        % рекурсиный вызов
        leftID = buildFibGraph(num - 1);
        rightID = buildFibGraph(num - 2);

        edges(end+1, :) = [nodeID, leftID];
        edges(end+1, :) = [nodeID, rightID];
    end

    % запуск расчета
    buildFibGraph(n);

    % строим направленный граф
    G = digraph(edges(:,1), edges(:,2));

    % рисуем граф
    figure;
    h = plot(G, 'Layout', 'layered', 'NodeLabel', labels, 'Direction','down', ...
        'Interpreter','none', 'NodeFontSize', 10, 'MarkerSize', 7);
    title(sprintf('Фибоначчи n = %d', n));
    set(gca,'XTick',[], 'YTick', []);
end
%% Решение уравнения переноса в двух-потоковом приближении

function fun = dy(sigma,alfa,b,f)
 % функция оборачивает конкретные значения параметров в анонимную функцию,
 % которая будет использована в решателе краевых задач
    T = zeros(2);
    T(1,1) = sigma*(f-1) - alfa;
    T(1,2) = sigma*b;
    T(2,1) = -T(1,2);
    T(2,2) = -sigma*(f-1)+alfa;
    fun = @(x,y)T*y(:);% первый аргумент  - независимая переменная
    % второй аргумент - само значение функции
end
function res = bcfun(y0,yX)
% граничные условия для решения краевой задачи
% для классической постановки
res = [y0(1)
       yX(2)-1];
end
function g = guess(x)
% стартовая аппроксимация
    g = [0.5*x
        x];
end

function [r,t] = r_direct(X,alfa,sigma,f,b)
        dy_fun = dy(sigma,alfa,b,f);
        xmesh = linspace(0,X,10);
```

```
        solinit = bvpinit(xmesh, @guess);
        sol = bvp4c(dy_fun, @bcfun, solinit);
        t = sol.y(2,1);
        r = sol.y(1,end);
end
function fun =dRdx(sigma,alfa,b,f)
    fun = @(x,R) sigma*(b + 2*(f-1)*R  + R.*R*b) - 2*alfa*R;
end
function fun = dTdx(sigma,alfa,b,f)
    fun = @(x,R,T) (sigma*((f-1)  + b*R)-alfa).*T;
end
function fun = iem(sigma,alfa,b,f)
    funR = dRdx(sigma,alfa,b,f);
    funT = dTdx(sigma,alfa,b,f);
    fun =@(x,Y) [funR(x,Y(1));
        funT(x,Y(1),Y(2))];
end
```