Table of Contents

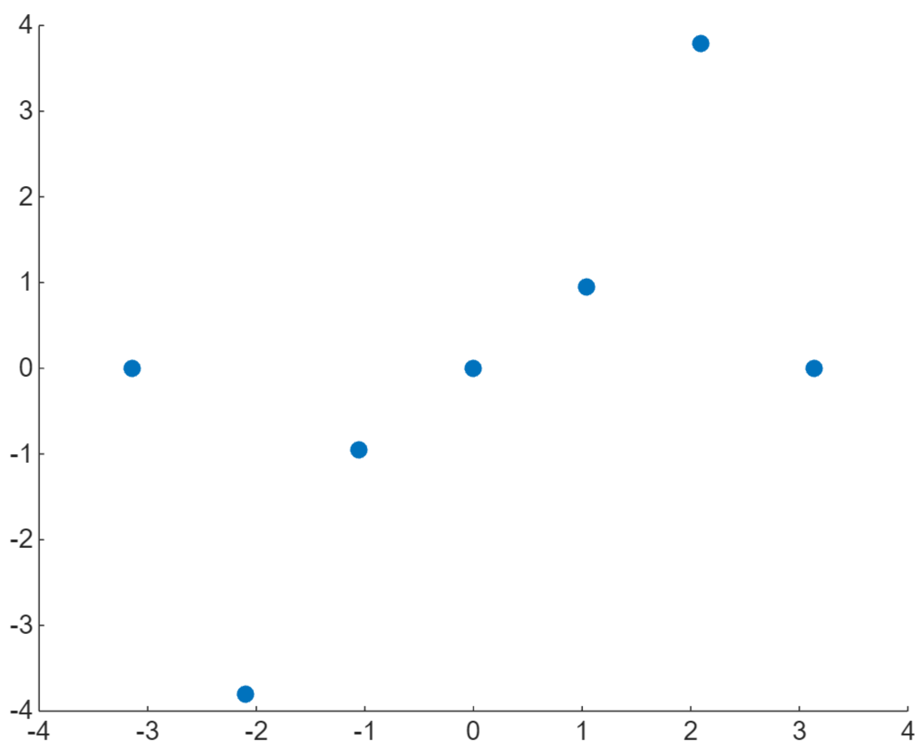
Суминар 18. Введение в интерполяцию

Допустим у нас есть набор данных

```
clearvars
N = 7
```

```
N = 7
```

```
x = linspace(-pi, pi,N);
y = @(x) sin(x).*x.^2;
scatter(x,y(x), MarkerFaceColor="flat")
```



Задача состоит в том, чтобы заполнить недостающие данные между известными точками.

Самый общий метод, использующийся для этой задачи это полиномиальная интерполяция.

Общая формула для степени $(n-1)$ может быть записана как

$$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1}$$

В матлабовской реализации эта сумма записывается в обратном порядке

$$f(x) = p_nx^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_{n-1}x + p_n$$

полиномиальная интерполяция состоит в определении $(n-1)$ полиномов которые опишут n экспериментальных точек.

В нашем случае у нас N точек.

Попробуем решить задачу "в лоб"

$$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & ... & x_1 & 1 \\ ... & & & & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & ... & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ ... \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ ... \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

или можно записать так

$$Xp = F$$

Матрицу X получим с помощью функции `vander`

```
X = vander(x)
```

```
X = 7×7
  961.3892 -306.0197   97.4091  -31.0063    9.8696   -3.1416    1.0000
   84.4018  -40.2989   19.2413   -9.1870    4.3865   -2.0944    1.0000
    1.3188   -1.2593    1.2026   -1.1484    1.0966   -1.0472    1.0000
         0         0         0         0         0         0    1.0000
    1.3188    1.2593    1.2026    1.1484    1.0966    1.0472    1.0000
   84.4018   40.2989   19.2413    9.1870    4.3865    2.0944    1.0000
  961.3892  306.0197   97.4091   31.0063    9.8696    3.1416    1.0000
```

Решить данное матричное уравнение можно через стандартный для матлаба способ "\"

```
p = X\y(x)'
```

```
p = 7×1
   -0.0000
   -0.0691
    0.0000
    0.6547
   -0.0000
    0.2721
```

```
        0
```

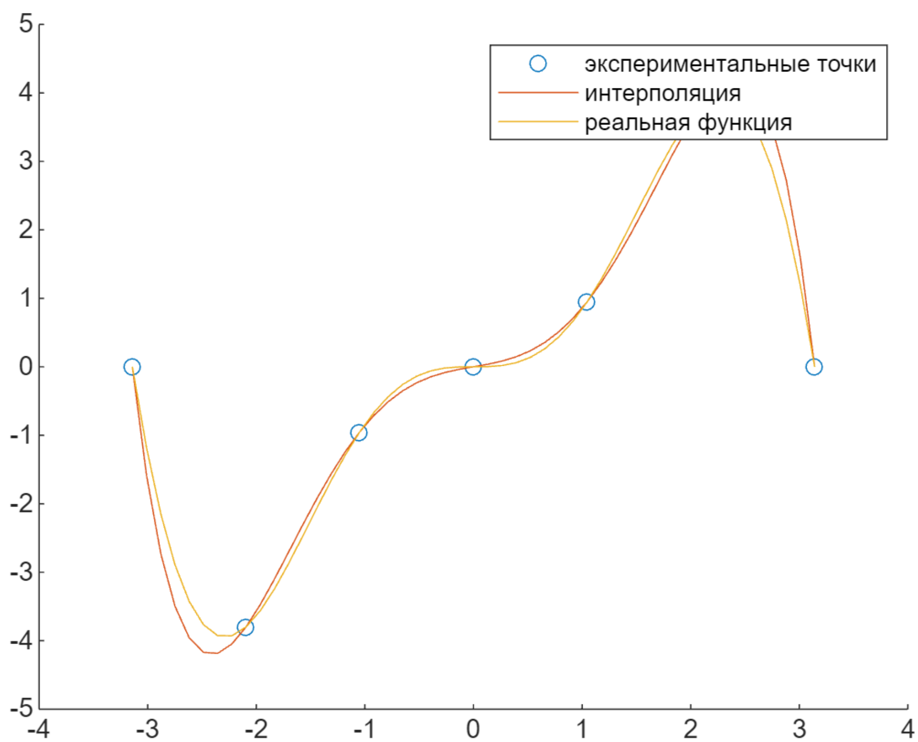
Посчитаем значение нашей функции с полученными коэффициентами (воспользуемся функцией `polyval`)

```
x_s = linspace(-pi,pi,N*N);
y_s = polyval(p,x_s)
```

```
y_s = 1×49
   -0.0000   -1.5861   -2.7277   -3.4968   -3.9583   -4.1704   -4.1850   -4.0478 ⋯
```

Нарисуем графики исходных точек и получившегося полинома

```
scatter(x,y(x), DisplayName="экспериментальные точки")
hold on
plot(x_s,y_s, DisplayName="интерполяция")
plot(x_s,y(x_s), DisplayName="реальная функция")
legend
hold off
```



Вроде все хорошо, но давайте посчитаем число обусловленности. Оно получается достаточно высокое. Это неудивительно, так как мы имеем дело с матрицей Вандермонда, а она "плохо обусловлена". Это значит, что решение будет очень сильно зависеть от ошибок округления.

```
cond(X)
```

```
ans = 2.5242e+03
```

Матлабовская реализация возможна с помощью функции `polyfit` Результат такой же как и наш "ручной". С функцией `polyval` мы познакомились ранее

```
disp(polyfit(x,y(x),N-1))
```

```
   -0.0000   -0.0691    0.0000    0.6547   -0.0000    0.2721    0.0000
```

```
disp(p')
```

```
   -0.0000   -0.0691    0.0000    0.6547   -0.0000    0.2721         0
```

Интерполяционные формулы Ньютона

Существует много альтернативных формул для интерполяции. Ньютоновская интерполяция является одной из самых популярных и полезных форм.

Давайте сначала разберемся с формулами первого и второго порядка для наглядности

Линейная интерполяция

$$\frac{f_1(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

Выразим $f_1(x)$

$f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ Это линейная интерполяционная формула Ньютона. Индекс единички у $f_1(x)$ значит, что у нас интерполяционный полином первого порядка

Пример

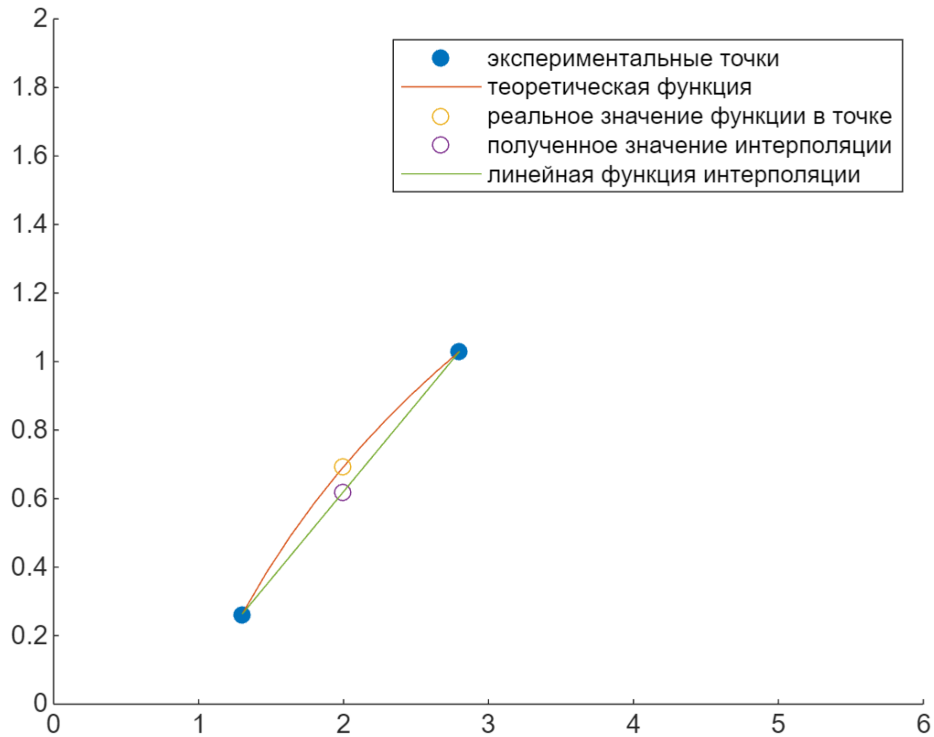
сделаем линейную интерполяцию для функции логарифма по полученной формуле.

```
clearvars
x_1 = 1.3;
x_2 = 2.8;
x = [x_1, x_2]; % две точки 1 и 6
f = @(x) log(x);


% воспользуемся формулой f_1(x)
f_1 = @(x,y) f(x(1))+(f(x(2))-f(x(1)))/(x(2)-x(1))*(y-x(1));

disp(["Вычисленное значение",f_1(x,2), "Реальное значение", log(2), "ошибка:",
(abs(f_1(x,2)-log(2))/log(2))*100])
```

```
    "Вычисленное значение"    "0.62042"    "Реальное значение"    "0.69315"    "ошибка:"    "10.4928"
```

```


scatter(x,f(x), MarkerFaceColor="flat", DisplayName="экспериментальные точки");
hold on
```

```
plot(linspace(x_1,x_2,10),f(linspace(x_1,x_2,10)), DisplayName="теоретическая функция")
scatter(2,log(2),DisplayName="реальное значение функции в точке")
scatter(2,f_1(x,2),DisplayName="полученное значение интерполяции")
legend
plot(x,f(x),DisplayName="линейная функция интерполяции")
xlim([0,6]);
ylim([0,2]);
hold off
```



квадратичная интерполяция

Ошибки возникающие для линейной интерполяции складываются из того, что у нас по сути прямая линия. Снизить ошибку можно за счет введения некой кривизны.

Если имеются 3 точки, то через них мы можем построить параболу (полиномы второго порядка).

Запишем формулу для такой параболы следующим способом:

$f_2 = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2)$

Найдем коэффициенты b

Подставим x вместо x_1

$f_2(x_1) = b_1 + b_2(x_1 - x_1) + b_3(x_1 - x_1) = b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = b_1$

Аналогично можно сделать для других коэффициентов

При $x = x_2$

$$f_2(x_2) = f_2(x_1) + b_2(x_2 - x_1) + b_3(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = f_2(x_1) + b_2(x_2 - x_1) + b_3(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = f_2(x_1) + b_2(x_2 - x_1)$$

$$b_2 = \frac{f_2(x_2) - f_2(x_1)}{x_2 - x_1}$$

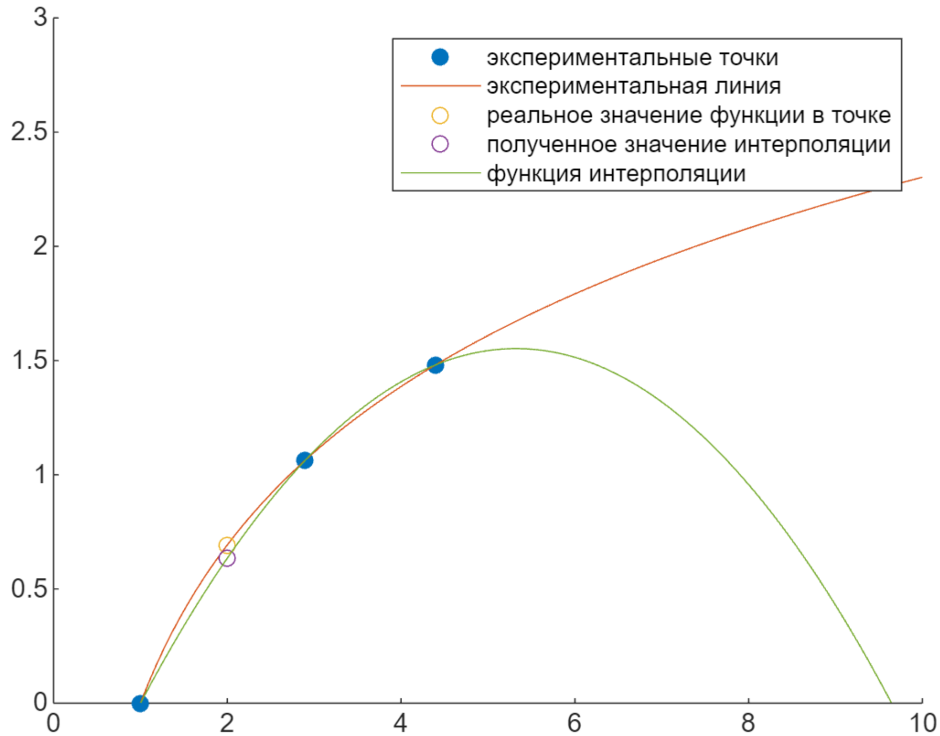
ну и третий коэффициент находится подобным образом

$$b_3 = \frac{\frac{f_2(x_3) - f_2(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f_2(x_2) - f_2(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

Пример

сделаем квадратичную интерполяцию (Ньютоновская интерполяция второго порядка), чтобы получить значение ln2, если известны три промежуточные точки

```
clearvars;
x_1 = 1;
x_2 = 2.9;
x_3 = 4.4;
x = [x_1,x_2,x_3];
y = @(x) log(x); % наша функция
f2 = y([x_1,x_2,x_3]);
b_1 = y(1);
b_2 = (f2(2)-f2(1))/(x_2-x_1);
b_3 = ((f2(3)-f2(2))/(x_3-x_2)-(f2(2)-f2(1))/(x_2-x_1))/(x_3-x_1);
%общий вид нашей функции будет следующий
f_2 = @(x) b_1+b_2.*(x-x_1)+b_3.*(x-x_1).*(x-x_2);

%построим графики
scatter(x,f2, MarkerFaceColor="flat", DisplayName="экспериментальные точки");
hold on
plot(linspace(1,10,100), log(linspace(1,10,100)),  DisplayName="экспериментальная
линия");
scatter(2,log(2),DisplayName="реальное значение функции в точке")

scatter(2,f_2(2),DisplayName="полученное значение интерполяции")
legend
plot(linspace(1,10,100),f_2(linspace(1,10,100)),DisplayName= "функция интерполяции")
xlim([0,10]);
ylim([0,3]);
hold off
```



Общая форма интерполяционных многочленов Ньютона

Общая формула для интерполяции полиномом $(n-1)$ степени для n экспериментальных точек выглядит следующим образом

$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + ... + b_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})$

коэффициенты будут выглядеть следующим образом

$b_1 = f(x_1)$

$b_2 = f[x_2, x_1]$

$b_3 = f[x_3, x_2, x_1]$

...

$b_n = f[x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1]$

$f[]$ - обобщенная разность

$f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$

$f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$

```
x = [1 4 6 5]';
y = log(x);
Newtint(x,y,2)
```

```
ans = 0.6288
```

```
log(2)
```

```
ans = 0.6931
```

Интерполяционные многочлены Лагранжа

Запишем функцию для линейной интерполяции следующим образом

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

где

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Итоговый вид функции будет выглядеть следующим образом

$$f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Подставим вместо x какую-то экспериментальную точку из набора данных. Допустим $x = x_1$, тогда

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1$$

$$L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} = 0$$

Для случая, когда $x = x_2$ получим обратную ситуацию

Такая же схема будет работать, когда экспериментальных точек больше 2ух

Общий вид полинома будет выглядеть следующим образом:

$$f_{n-1}(x) = \Sigma_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i = \Pi_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

n - число экспериментальных данных

пример линейной интерполяции с помощью многочленов Лагранжа

```
clearvars
x_1 = 0;
```

```
x_2 = 20;
x_3 = 40;

x = [x_1, x_2, x_3];

y_1 = 3.85;
y_2 = 0.800;
y_3 = 0.212;

y = [y_1, y_2, y_3];

% функция для интерполяции первого порядка будет выглядеть следующим образом
L_1 = @(x) (x-x_2)/(x_1-x_2);
L_2 = @(x) (x-x_1)/(x_2-x_1);

f_1 = @(x) L_1(x)*y_1+L_2(x)*y_2;

f_1(15)
```

```
ans = 1.5625
```

```


% подобным образом функция второго порядка будет выглядеть так:
L_1 = @(x) ((x-x_2)*(x-x_3))/((x_1-x_2)*(x_1-x_3));

L_2 = @(x) ((x-x_1)*(x-x_3))/((x_2-x_1)*(x_2-x_3));

L_3 = @(x) ((x-x_1)*(x-x_2))/((x_3-x_1)*(x_3-x_2));

f_2 = @(x) L_1(x)*y_1+L_2(x)*y_2+L_3(x)*y_3;
f_2(15) %значение в точке 15
```

```
ans = 1.3317
```

```
%Давайте взглянем как выглядит каждый из базовых полиномов L1 L2 L3
L1_array = arrayfun(@(k)L_1(k),x);
L2_array = arrayfun(@(k)L_2(k),x);
L3_array = arrayfun(@(k)L_3(k),x);
L1_array,L2_array,L3_array
```

```
L1_array = 1×3
     1     0     0
L2_array = 1×3
     0     1     0
L3_array = 1×3
     0     0     1
```

```
clearvars
% Применение функции для интерполяции полиномами лагранжа
 T = [-40 0 20 50];
 d = [1.52 1.29 1.2 1.09];
 density = Lagrange (T,d,15)
```

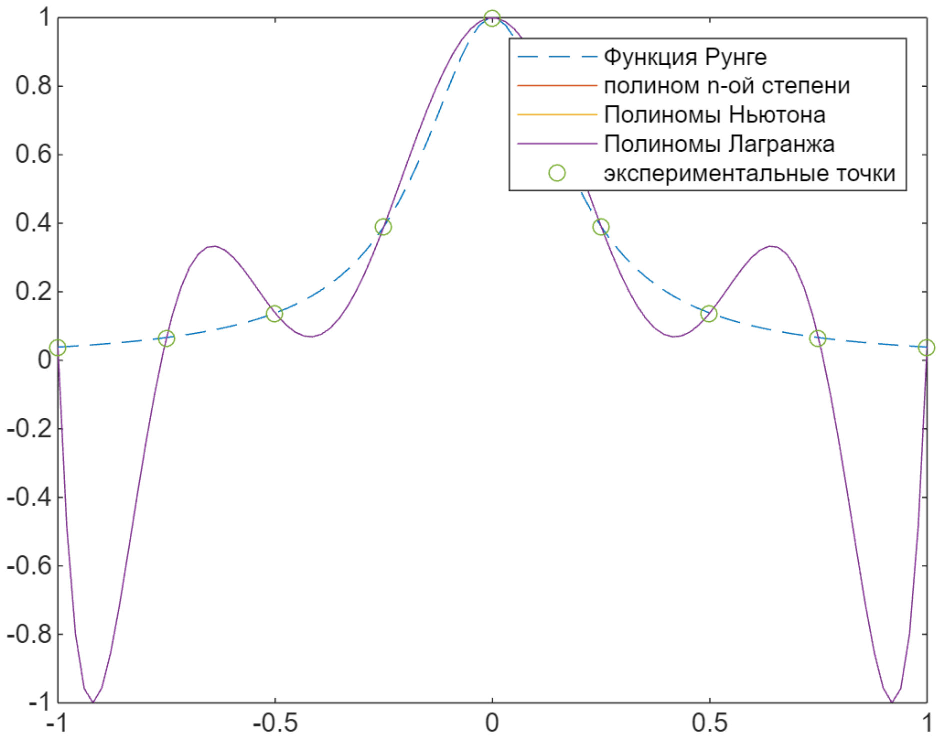
```
density = 1.2211
```

осциляции при интерполяции

Не всегда использование высоких степеней полинома обеспечивает лучший результат

Пример "плохой" функции это функция Рунге

```
clearvars
runge = @(x) 1./(1+25.*x.*x);
x = linspace(-1,1,100);
plot(x,runge(x), DisplayName="Функция Рунге", LineStyle="--");
hold on
legend
%попытаемся провести интерполяцию



n = 9;
xp = linspace(-1,1,n);
yp = runge(xp);

NewtonY = arrayfun(@(k)Newtint(xp,yp,k),x);
LagrangeY = arrayfun(@(k)Lagrange(xp,yp,k),x);

%полифит
p = polyfit(xp,yp,n-1);
yn = polyval(p,x);
plot(x,yn, DisplayName="полином n-ой степени");



%полиномы Ньютона
plot(x,NewtonY,DisplayName="Полиномы Ньютона");

%Полиномы Лагранжа
plot(x,LagrangeY,DisplayName="Полиномы Лагранжа");


scatter(xp,yp,DisplayName="экспериментальные точки");
hold off
```



Сравнение методов

```
clearvars

runge = @(x) 1./(1+25.*x.*x);

n = 5;
xp = linspace(-1,1,n);
yp = runge(xp);

%полифит
p = polyfit(xp,yp,n-1);
x = 0.5;
yn = polyval(p,x)
```

```
yn = 0.1379
```

```
%Ньютон
Newtint(xp,yp,x)
```

```
ans = 0.1379
```

```
%Лагранж
Lagrange(xp,yp,x)
```

```
ans = 0.1379
```

Метод	Плюсы	Минусы
Полиномиальная	простота	плохая обусловленность
Лагранжа	Явная формула, простота реализации	Неэффективен при добавлении новых точек
Ньютона	эффективен при добавлении новых точек	Сложность вычисления разделенной разности

```
function yint = Newtint(x,y,xx)
% Newtint: Newton interpolating polynomial
% yint = Newtint(x,y,xx): Uses an (n – 1)-order Newton
% interpolating polynomial based on n data points (x, y)
% to determine a value of the dependent variable (yint)
% at a given value of the independent variable, xx.
% input:
% x = independent variable
% y = dependent variable
% xx = value of independent variable at which
% interpolation is calculated
% output:
% yint = interpolated value of dependent variable
% compute the finite divided differences in the form of a
% difference table
n = length(x);
if length(y)~=n, error('x and y must be same length'); end
b = zeros(n,n);
% assign dependent variables to the first column of b.
b(:,1) = y(:); % the (:) ensures that y is a column vector.
for j = 2:n
for i = 1:n-j+1
b(i,j) = (b(i+1,j-1)-b(i,j-1))/(x(i+j-1)-x(i));
end
end
% use the finite divided differences to interpolate
xt = 1;
yint = b(1,1);
for j = 1:n-1
xt = xt*(xx-x(j));
yint = yint+b(1,j+1)*xt;
end
```

```
end


function yint = Lagrange(x,y,xx)
% Lagrange: Lagrange interpolating polynomial
% yint = Lagrange(x,y,xx): Uses an (n – 1) –order
% Lagrange interpolating polynomial based on n data points
%     to determine a value of the dependent variable (yint) at
%     a given value of the independent variable, xx.
% input:
%   x = independent variable
%   y = dependent variable
%   xx = value of independent variable at which the
%        interpolation is calculated
% output:
%   yint = interpolated value of dependent variable
n = length(x);
if length(y) ~= n, error('x and y must be same length'); end
s = 0;
for i = 1:n
    product = y(i);
    for j = 1:n
        if i ~= j
            product = product*(xx - x(j))/(x(i) -x(j));
        end
    end
    s = s + product;
end
yint = s;
end
```