

# Семинар 14. Теорема Эххарта-Янга и сжатие изображений

## Table of Contents

Семинар 11. Теорема Эххарта-Янга и сжатие изображений.....	1
Теорема Эххарта-Янга:.....	1
Спектр сингулярных значений.....	3
Спектр сингулярных значений как "признак" матрицы.....	4

### Теорема Эххарта-Янга:

Пусть  $A_k = \sum_{i=1}^k [\sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T]$ , где  $\forall k \leq m$ , тогда для  $\forall$  матрицы  $B$  ранга  $k$ :  $\|A - B\| \geq \|A - A_k\|$ .

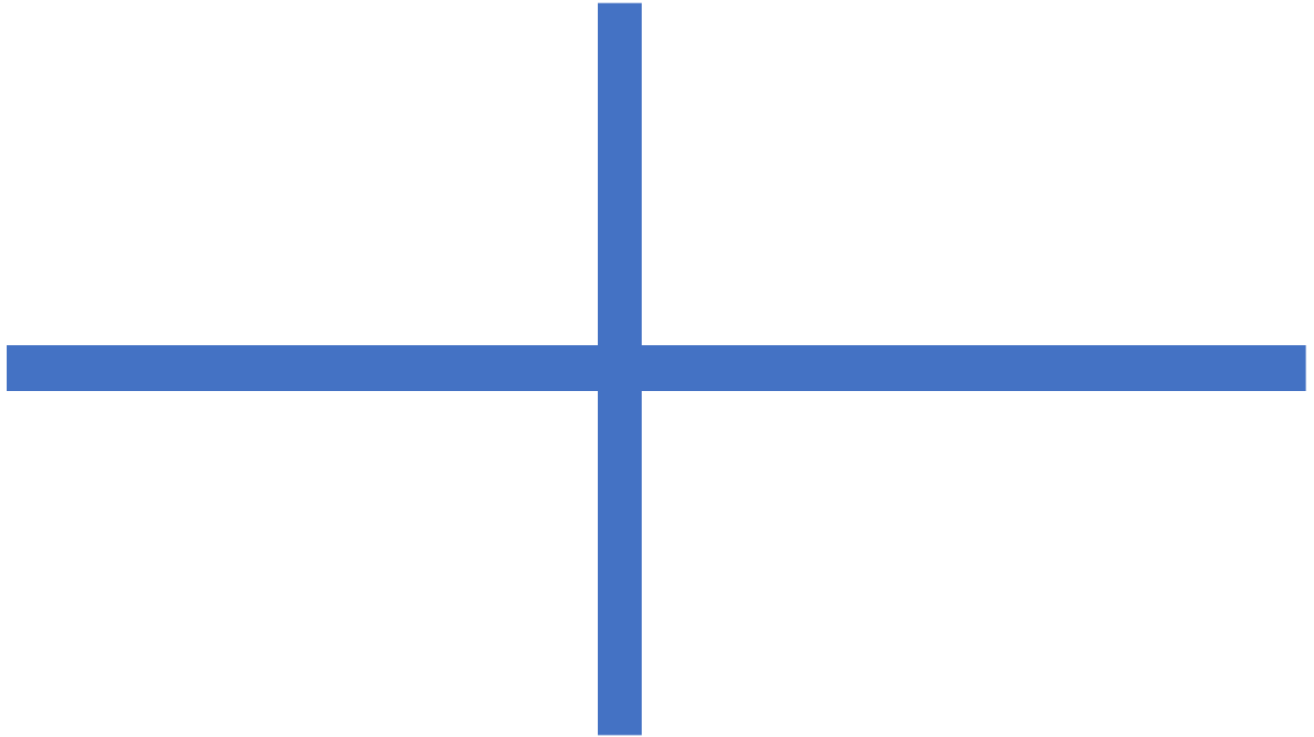
Иными словами, матрица  $A_k$  является наилучшей аппроксимацией матрицы  $A$  среди всех матриц ранга  $k$ .

Картинка - это же матрица!

```
clearvars
% Import image
folder = get_folder();
selected_image= "cross.png";
figs_folder =folder + "\figs";
full_file = fullfile(figs_folder,selected_image);
figs = imread(full_file);

% Display results
imshow(figs);
title("Image Data from figs.png");
```

Image Data from figs.png



```
A = double(im2gray(figs));  
[U,S,V] = svd(A);% сингулярное разложение исходной картинки
```

```
number_of_dimensions=24; % ранг матрицы Ak  
if number_of_dimensions>size(U,2)  
    number_of_dimensions = size(U,2);  
end  
% уменьшаем размерность исходной картинки  
Uk = U(:,1:number_of_dimensions);  
Sk = diag(S(1:number_of_dimensions,1:number_of_dimensions));  
Vk = V(:,1:number_of_dimensions);  
Ak = Uk.*Sk'*Vk'; % матрица уменьшенной размерности  
disp("Слева-сжатая, справа - исходная:")
```

Слева-сжатая, справа - исходная:

```
imshow(uint8([Ak,A]))
```



```
display("Ранг исходной картинки:" + rank(A))
```

"Ранг исходной картинки:2"

```
display("Ранг сжатой картинки:" + rank(Ak))
```

"Ранг сжатой картинки:2"

```
wA = mem_size_summ("A") ;% объем памяти в байтах, занимаемой исходной матрицей  
wAk = mem_size_summ("Uk", "Sk", "Vk") ; % объем памяти в байтах  
disp("Объем исходной матрицы в байтах :"+ wA)
```

Объем исходной матрицы в байтах :7156800

```
disp("Объем сжатой матрицы в байтах :"+wAk)
```

Объем сжатой матрицы в байтах :378432

```
disp("Относительный объем памяти сжатый/несжатый:"+ wAk/wA)
```

Относительный объем памяти сжатый/несжатый:0.052877

## Спектр сингулярных значений

```
ax = get_next_ax();
```

fig1

```
plot(ax, 1:size(S,2), log(sum(S)), 'ob', 1:number_of_dimensions, log(Sk), '*r')  
title(ax, "Спектр сингулярных значений матрицы");  
xlabel(ax, "Порядковый номер");  
ylabel(ax, "log(\sigma_n)");  
legend(ax, ["Исходная матрица" " Матрица уменьшенной размерности"]);
```



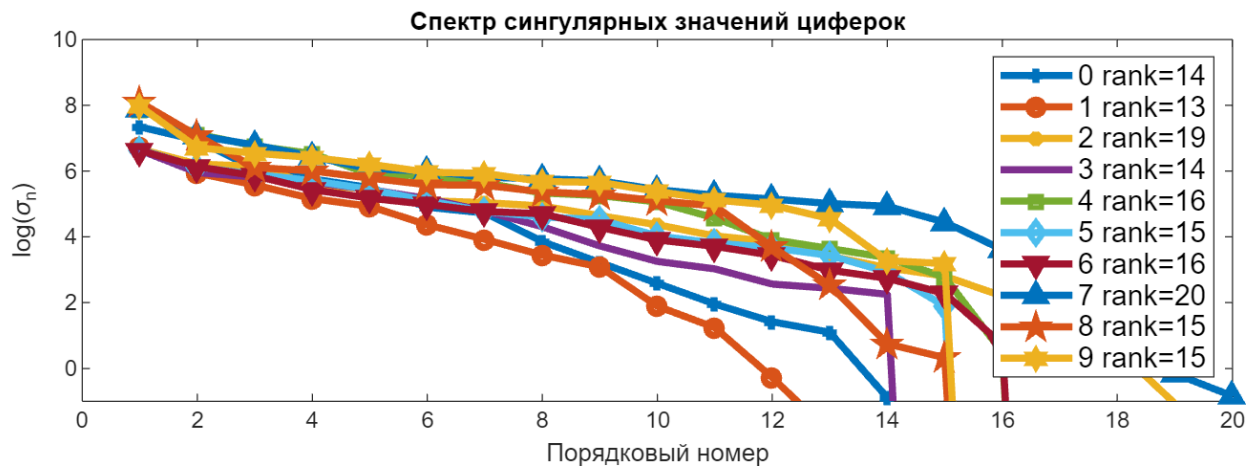
## Спектр сингулярных значений как "признак" матрицы

```
% загружаем картинки написанных от руки цифр и пытаемся сравнить спектры их
% сингулярных значений
check_numbers_flag = true;
if check_numbers_flag

    path = get_folder + "\figs\";
    svd_struct(10) = struct("V",[],"S",[],"U",[],"M",[]);
    for ii=0:9
        cur_im = imread(fullfile(path,ii+".png"));
        mat = double((im2gray(cur_im)));
        i = ii +1;
        svd_struct(i).M = (mat);
        [svd_struct(i).V,svd_struct(i).S,svd_struct(i).U] = svd(mat);
    end
    imshow(uint8([svd_struct(:).M]))
    ranks = arrayfun(@(X)rank(X.M),svd_struct)
    sig_mat = ones(size(mat,1),10); % матрица спектров сингулярных значений
    for iii = 1:numel(svd_struct)
        sig_mat(:,iii) = sum(svd_struct(iii).S);
    end
    p = plot(get_next_ax(),log(sig_mat), 'LineWidth',3,'MarkerSize',6);
    ylim([-1,10])
    legend(string(0:9) + " rank=" + string(ranks),'FontSize',12);
    mark = ["+", "o", "*", ".", "square", "diamond", "v", "^", "pentagram", "hexagram"];
    arrayfun(@(ii)set(p(ii),"Marker",mark(ii)),1:10);
    title("Спектр сингулярных значений циферок");
    xlabel("Порядковый номер");
    ylabel("log(\sigma_n)");
end
```

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

```
ranks = 1x10
    14    13    19    14    16    15    16    20    15    15
fig2
```



```
function ax = draw_vector(ax,ttl, names,type,varargin)
% функция строит двух- и трех-мерные вектора, а также рассеянные данные из
% матрицы
% ax - оси (если пустые, то создаются новые)
% ttl - заголовок картинки
% names - имена векторов
% type:
%     "vector" - аргументы, которые передаются после интерпретируются
%               как отдельные вектора
%     "point"  - в этом случае передается матрица в качестве аргумента и
%               столбцы матрицы строятся при помощи функций scatter и scatter3 d
%               в зависимости от размерности массива
arguments
    ax =[]
    ttl string =strings(0,1)
    names string =strings(0,1)
    type string {mustBeMember(type,["vector" "point"])}="vector"
end
arguments (Repeating)
    varargin double
end
was_empty = isempty(ax); % это признак того, что все строится на новых осях
if was_empty
    ax = get_next_ax();
else
    hold(ax,"on");
    % if ~isempty(ax.Legend)
    %     leg_before = ax.Legend.String;
    % else
    %     leg_before = strings(0,1);
    % end
end
```

```

if strcmp(type,"vector")
    is_3D = numel(varargin{1})==3;
    if is_3D
        [x,y,z] = make_xy(varargin{1});
        plot3(ax,x,y,z,'LineWidth',2,'Marker','o');
        hold on
        for iii = 2:numel(varargin)
            [x,y,z] = make_xy(varargin{iii});
            plot3(ax,x,y,z,'LineWidth',2,'Marker','o');
        end
        grid on
        hold off
    else
        [x,y] = make_xy(varargin{1});
        plot(ax,x,y,'LineWidth',2,'Marker','o');
        hold on
        for iii = 2:numel(varargin)
            [x,y] = make_xy(varargin{iii});
            plot(ax,x,y,'LineWidth',2,'Marker','o');
        end
        grid on
        hold off
    end
    if isempty(names)|| (numel(names)~=numel(varargin))
        legend(ax,string(1:numel(varargin)));
    else
        % if ~was_empty
        %     names= [names(:);leg_before(:)];
        % end
        legend(ax,names);
    end
    xlim(ax,[-1 1]);
    ylim(ax,[-1 1]);
    if ~isempty(ttl)
        title(ax,ttl);
    end
else
    %data_number = numel(varargin); % число массивов данных
    is_3D = numel(varargin)==3;
    data = varargin{1};
    if size(data,2)>1
        data = transpose(data);
        is_transpose = true;
    else
        is_transpose = false;
    end
    if ~is_transpose
        for iii = 2:numel(varargin)
            data = [data,varargin{iii}];
        end
    end
end

```

```

        end
    else
        for iii = 2:numel(varargin)
            data = [data,transpose(varargin{iii})];
        end
    end

    if is_3D
        scatter3(ax,data(:,1),data(:,2),data(:,3));
    else
        scatter(ax,data(:,1),data(:,2));
    end

end

if ~was_empty
    hold(ax,"off");
end

end

function [x,y,z] = make_xy(col)
% добавляет к координатам вектора нули так, чтобы при помощи функции plot
% строилась линия
switch numel(col)
    case 1
        x = [col(1)];
        y = 0;
        z = 0;
    case 2
        x = [0 col(1)];
        y = [0 col(2)];
        z = zeros(1,2);
    case 3
        x = [0 col(1)];
        y = [0 col(2)];
        z = [0 col(3)];
end

end

function [bpar,bper,ang] = projection_matrix(A,b)
% функция считает угол между вектором и пространством столбцов матрицы A
for ii =1:size(A,2)
    A(:,ii) = A(:,ii)/norm(A(:,ii));
end
beta = A*transpose(A)*b;
beta = beta/norm(beta); % нормируем вектор beta
Pbeta = beta*transpose(beta); % оператор проектирования вектора на
bpar = Pbeta*b;
bper = b-bpar;
ang = rad2deg(acos(norm(bpar)/norm(b)));
end

function [new_ax,fig_handle] = get_next_ax(index)
% функция, которая возвращает новые оси на новой фигуре

```

```

arguments
    index = []
end
persistent N;
if isempty(index)
    if isempty(N)
        N=1;
    else
        N = N+1;
    end
    fig_handle = figure(N);
    clf(fig_handle);
    new_ax = axes(fig_handle);
    disp("fig"+ N)
else
    fig_handle = figure(index);
    clf(fig_handle);
    new_ax = axes(fig_handle);
end
end
function mem_size = mem_size_summ(varargin)
% функция считает объем нескольких переменных в памяти base workspace
names = string(varargin);
mem_size = 0;
base_vars = evalin("base","whos");
flag = arrayfun(@(X)any(strcmp(X.name,names)),base_vars);
if ~any(flag)
    return
end
mem_size = sum(arrayfun(@(X)X.bytes,base_vars(flag)));
end
function folder = get_folder()
% текущая папка
folder = fileparts(matlab.desktop.editor.getActiveFilename);
end

```