

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Семинар 10. Линейная регрессия

Краткое резюме по предыдущим семинарам, посвященным линейной регрессии.

Сформулируем еще раз задачу регрессии, представить вектор зависимой переменной в виде линейной комбинации векторов предикторов :

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\epsilon}$$

X - матрица независимых переменных (предикторов),

$\vec{\beta}$ - это истинные значения параметров модели,

\vec{Y} - зависимая переменная (опять вектор, матрицей она стала не на долго)

$\vec{\epsilon}$ - случайный вектор ошибки.

$\hat{\vec{Y}}$ - это значения зависимой переменной, рассчитанные в рамках нашей модели.

$\vec{b} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{Y}$ - обучение модели.

$\hat{\vec{Y}} = H\vec{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T \vec{Y} = X\vec{b}$, где \vec{b} - вектор параметров регрессии.

Так как пространство ошибки ортогонально пространству столбцов матрицы предикторов, то скалярное произведение ошибки на $\hat{\vec{Y}}$ будет равно нулю:

$$\vec{\epsilon}^T \hat{\vec{Y}} = 0$$

Понятно, что \vec{Y} в шляпе включает как ошибку модели, так и ошибку случайности.

Оценка качества регрессии

Для оценки качества регрессии применяется R^2 статистика:

$$R^2 = \frac{[\hat{\vec{Y}} - \vec{I}\bar{Y}]^T [\hat{\vec{Y}} - \vec{I}\bar{Y}]}{[\vec{Y} - \vec{I}\bar{Y}]^T [\vec{Y} - \vec{I}\bar{Y}]}$$

Данный коэффициент характеризует долю вариации зависимой переменной в обучающей выборке, которая описывается вариацией регрессионной модели.

Если, например, мы имеем четыре точки и хотим их описать полиномом третьей степени (матрица предикторов $X = [\vec{1}, \vec{X}, \vec{X}^2, \vec{X}^3]$, то есть, количество точек равно порядку полинома +1, задача регрессии решается однозначно, все матрицы становятся квадратными, псевдообратная матрица - обратной, ошибка равной нулю и т.д., то есть $\hat{\vec{Y}} = \vec{Y}$ в этом случае $R^2=1$.

Если предполагать, что ошибка для каждой точки независима, и все они получены из некоторого распределения с дисперсией σ , тогда:

$$Cov(\vec{\epsilon}) = I\sigma^2$$

Матрица ковариации параметров модели:

$$Cov(\vec{b}) = (X^T X)^{-1} \sigma^2$$

Соответственно, когда мы используем обученную модель для предсказаний, то есть у нас есть новая матрица предикторов X_1 и мы хотим предсказать какие значения \vec{Y}_1 , то :

$$\vec{Y}_1 = X_1 \vec{b}$$

$$Cov[\vec{Y}_1] = X_1^T Cov(\vec{b}) X_1$$

Эта формула следует из того, что $E[\vec{b}] = \vec{\beta}$, $\Rightarrow E[X_1 \vec{b}] = X_1 E[\vec{b}]$, тогда:

$$Cov(\vec{Y}_1) = Cov[X_1 \vec{b}] = [X_1 \vec{b} - E[X_1 \vec{b}]] [X_1 \vec{b} - E[X_1 \vec{b}]]^T = X_1 (\vec{b} - \vec{\beta}) (\vec{b} - \vec{\beta})^T X_1^T = X_1^T Cov(\vec{b}) X_1$$

Для того, чтобы экспериментально оценить σ^2 используется квадратичное отклонение предсказанного значения от исходного вектора зависимой переменной обучающей выборки

$$\sigma^2 = \frac{\vec{\epsilon}^T \vec{\epsilon}}{N - P} = \frac{(\vec{Y} - \hat{\vec{Y}})^T (\vec{Y} - \hat{\vec{Y}})}{N - P}$$

$N-P$ - число степеней свободы вектора ошибки (оно же размерность линейного пространства ошибки)

Число степеней свободы случайного вектора

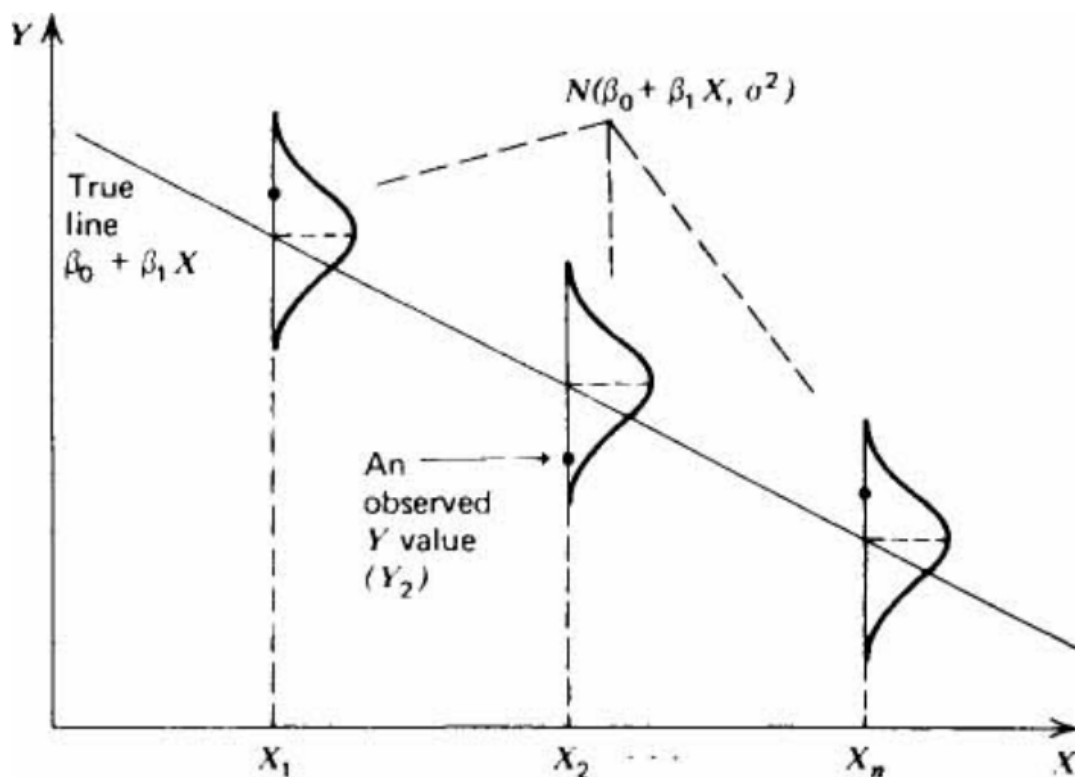
При расчете матрицы ковариации, квадратичное отклонение нормируется на число степеней свободы

$$Cov(\vec{\Psi}) = [\vec{\Psi} - \bar{\vec{\Psi}}][\vec{\Psi} - \bar{\vec{\Psi}}]^T / df$$

df - число степеней свободы. С точки зрения линейной алгебры число степеней свободы - это размерность пространства, из которого "набирается" случайный вектор. Например, из общей картины

линейной алгебры мы помним, что размерность пространства ошибки регрессии равна $N - P$, где N - число координат вектора ошибки, а P - число коэффициентов линейной регрессии (ранг матрицы предикторов).

Принцип максимального правдоподобия



$$\vec{Y} = X \vec{\beta} + \vec{\epsilon}$$

Для каждого наблюдаемого значения Y ошибка берется из одного и того же стандартного распределения, сами наблюдаемые точки соответственно распределены сог

$\mathcal{N}(0, 1)$ - стандартное нормальное распределение (функция randn)

Чтобы получить переменную, взятую из $\zeta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ из переменной, взятой из стандартного распределения $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\zeta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mu + \sigma^2 \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\vec{Y} = \vec{\mu_Y} + \vec{\epsilon},$$

где $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ - каждая координата вектора ошибки

$$\vec{\mu_Y} = X \vec{\beta} - \text{вектор средних значений}$$

$y_i \sim \mathcal{N}(X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \dots X_{ip}\beta_p, \sigma^2)$ - то есть каждая координата вектора зависимой переменной - это случайная величина, поученная из нормального распределения со своим средним значением, но дисперсия для всех одинаковая

Плотность вероятности для конкретной наблюдаемой точки будет:

$$p(y_i; \mu_i, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Теперь зададимся вопросом, какова вероятность получить тот набор точек, который мы имеем?

$$P(\vec{Y} | \sigma^2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]^N \prod_{i=1}^N e^{\frac{-(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]^N e^{\frac{-\sum_i (y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]^N e^{\frac{-(\vec{Y} - X\vec{\beta})^T (\vec{Y} - X\vec{\beta})}{2\sigma^2}}$$

Теперь, если рассмотреть данную вероятность как функцию параметров при измеренных значениях случайной величины, то она называется функция правдоподобия (likelihood):

$$\mathcal{L}(\vec{\beta} | \vec{Y}) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]^N e^{\frac{-(\vec{Y} - X\vec{\beta})^T (\vec{Y} - X\vec{\beta})}{2\sigma^2}}$$

Что мы отсюда видим:

1. Уменьшение показателя экспоненты приводит к увеличению правдоподобия наших данных
2. В показателе экспоненты стоит $(\vec{Y} - X\vec{\beta})^T (\vec{Y} - X\vec{\beta}) = \vec{\epsilon}^T \vec{\epsilon}$ - то есть максимизация правдоподобия эквивалентна минимизации квадрата ошибки
3. Отсюда можно интуитивно понять что нужно минимизировать, если ошибка для каждой точки получена из распределения с различной дисперсией

$$P(\vec{Y} | \sigma^2) \sim \prod_{i=1}^N e^{\frac{-(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} = e^{\frac{-\sum_i (y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} = e^{\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2} = e^{-(\vec{Y}' - X'\vec{\beta})^T (\vec{Y}' - X'\vec{\beta})}$$

$\vec{\epsilon} \Rightarrow W\vec{\epsilon}$, W - диагональная матрица дисперсий ошибки, X' - матрица предикторов, в которой каждая строка умножена на корень соответствующего веса, \vec{Y}' - вектор зависимой переменной в которой каждый элемент умножен на вес

Таким образом, чтобы учесть веса мы должны:

$$X' \Rightarrow WX$$

$$Y' \Rightarrow W\vec{Y}$$

Это дает формулу для линейной регрессии с весами:

$$\vec{b} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y$$

Линейная регрессия с весами (weighted regression)

```
x = sort(rand(10,1));
y = 2 + 3*x + randn(size(x));
```

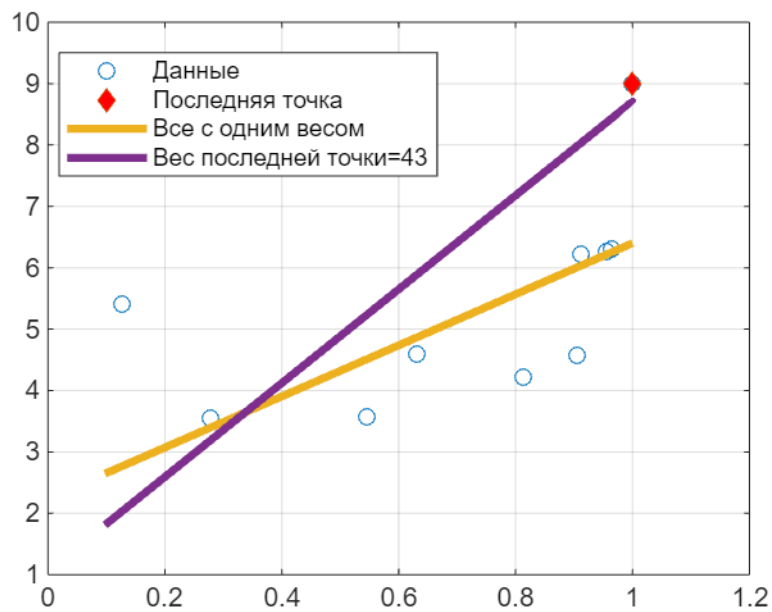
```
% добавляем веса последней точки путем повторения ее значения в выборке
nreps = 43
```

```
nreps = 43
```

```
% просто повторим одну точку nreps раз
ax = get_next_ax();
plot(ax,[x;1],[y;9], 'o');
hold(ax,"on");
plot(ax,[1],[9], 'diamond', "MarkerFaceColor", "r");
for n = [1,nreps]
    x2 = [x;ones(n,1)];
    y2 = [y;repmat(9,n,1)];
    % and solve
    M2 = [ones(size(x2)),x2];
    coef = M2\y2;
    yhat = M2*coef;
    plot(ax,x2,yhat, '-', "LineWidth",3);
end
hold(ax,"off")
xlim(ax,[0 1.2]);
ylim(ax,[1 10]);
legend(ax,["Данные", "Последняя точка", "Все с одним весом", "Вес последней точки="+string(nreps)], "Location", "best")
coef
```

```
coef = 2×1
    1.0642
    7.6436
```

```
grid(ax,"on")
```



% как можно симитировать подобное поведение

```
x3 = [x;1];
```

```
y3 = [y;9];
```

```
weights = [ones(size(y));sqrt(nreps)];
```

```
M3 = [ones(size(x3)),x3];
```

% умножем каждую строку матрицы предикторов на веса и кажд

```
coef = (diag(weights)*M3)\(weights.*y3)
```

```
coef = 2×1
```

```
1.0642
```

```
7.6436
```

% взвешенная регрессия делается функцией:

```
weights = [ones(size(y));nreps];
```

```
coef = lscov(M3,y3,weights)
```

```
coef = 2×1
```

```
1.0642
```

```
7.6436
```

Локально-взвешенная линейная регрессия (local-weighted regression)

Основная идея локально взвешенной регрессии состоит в том, что мы задаем веса как некоторую функцию от независимых переменных таким образом, чтобы наибольший вес имели те точки, которые лежат в той области, которая представляет для нас наибольший интерес.

В следующем ниже примере мы будем пытаться описать квадратичную зависимость линейной, в качестве весов будет выступать функция:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Она выглядит знакомо и удобна тем, что имеет максимум и два параметра, которыми регулируется ее ширина и положение этого максимума. Таким образом матрица весов будет:

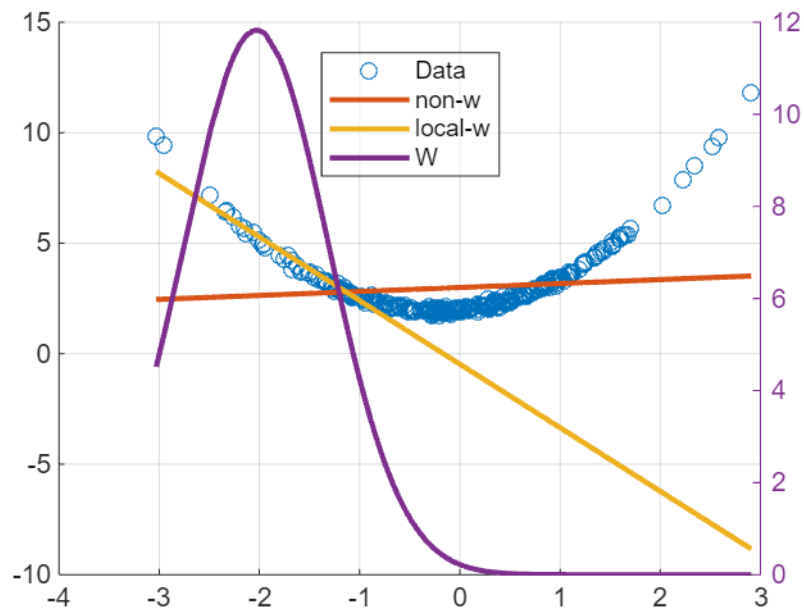
$$W = \text{diag}(f(\vec{X}))$$

Таким образом, в окрестности координаты $x = \mu$ точки будут иметь наибольший вес.

Локально взвешенная регрессия сравнивается с классической линейной регрессией.

```
clearvars
N= 300;
x = randn(N,1);
x=sort(x);
y_measured = 2 + 0.4*x + x.^2 + 0.1*randn(N,1); % истинная модель
Ivect = ones(size(x));
X = [Ivect,x]; % матрица предикторов
```

```
% в качестве весовой функции выберем Гауссову функцию (она имеет два
% параметра, четкий максимум - удобно)
mu = -2.03;sig = 0.72;
weights_function = norm_distribution_function(mu,sig);
weights= weights_function(x);% вектор весов
coeff_unweighted = X\y_measured;
coef_weighted = (diag(weights)*X)\(weights.*y_measured);
ax = get_next_ax();
scatter(ax,x,y_measured);
hold(ax,"on")
plot(ax,x,X*coeff_unweighted,"LineWidth",2);
plot(ax,x,X*coef_weighted,"LineWidth",2);
yyaxis(ax,"right")
plot(x,weights*max(y_measured)/max(weights),"LineWidth",2);
hold(ax,"off")
grid(ax,"on")
legend(ax,["Data", "non-w", "local-w", "W"],Location="best",BackgroundAlpha=0.5)
```



Пример 2. Применение линейной регрессии для сшивки двух кривых

```
% склейка двух спектров
clearvars
use_weights = true;
rate1 = -0.07;
rate2 = 0.021;
y1_0 = 1.071;
y2_0 = 0.845;
x = linspace(1,4,100)';
f1 = @(1) y1_0 + rate1*x;
f2 = @(1) y2_0 + rate2*x;
x_1 = x(x<2.7);
y1 = f1(x_1);
x_2 = x(x>2.4);
y2 = f2(x_2);
ax = get_next_ax();
plot(ax,x_1,y1,'or',x_2,y2,'+b','MarkerSize',9)
% формируем весовую функцию и рассчитываем веса
mu = 2.49;sig = 0.6;
ndist = norm_distribution_function(mu,sig);
weights_function = @(u) 1 - ndist(u)/max(ndist(u));
hold(ax,"on")
yyaxis(ax,"right")
plot(x,weights_function(x))
hold(ax,"off")
X1 = [x_1;x_2];Y = [y1;y2];Ist = ones(size(X1));
if use_weights
    weights = weights_function(X1);
```



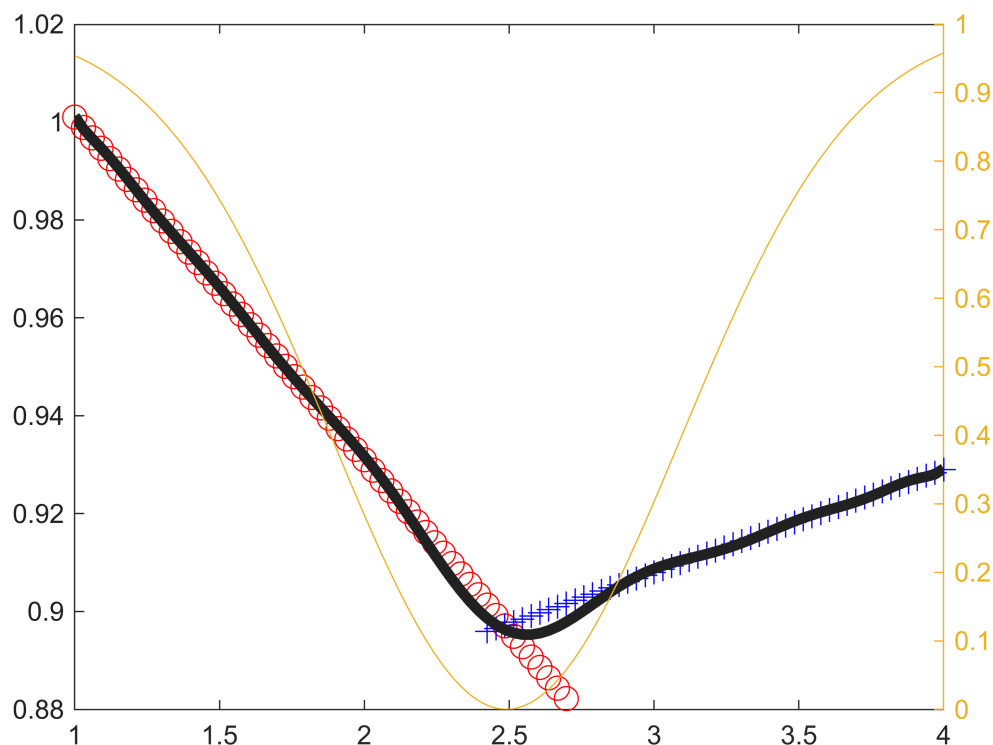
```

else
    weights = Ist; % если веса не используются то все они равны единице
end
% формируем матрицу предикторов и вектор зависимой переменной, складываем
% туда все имеющиеся данные

% параметры полинома которым фитим
type_fit = "legP"; % тип базиса для фитинга
Pfit = 16;
%Pfit = 10 ;% степень полинома для фитинга
alpha = 4.25;
[X,SX1] = vandermatrix(X1,Pfit,type_fit,[],alpha); % формируем матрицу Вандермонда

%X = [Ist,X1,X1.^2,X1.^3,X1.^4,X1.^5];
b = lsconv(X,Y,weights);
% рассчитываем предсказание модели
%Xcalc = [ones(size(x)),x,x.^2,x.^3,x.^4,x.^5];
Xcalc = vandermatrix(x,Pfit,type_fit,[],alpha);
hold(ax,"on")
yyaxis(ax,"left")
plot(x,Xcalc*b,"LineWidth",4)
hold(ax,"off")

```



Robust regression

Робастная регрессия нужна в тех случаях, когда исходные данные имеют выбросы. Основная идея робастной регрессии состоит в том, чтобы сделать веса обратно пропорциональными (это может быть и некоторая функция, которая стремится к нулю при увеличении аргумента) ошибкам регрессии, таким образом, стартуя с регрессии с равномерными весами, для которой выбросы будут иметь большой вклад в ошибку регрессии, можно постепенно прийти к регрессии с малыми весами выбросов.

Данные будут представлять собой достаточно гладкую монотонную кривую, на которой будут отдельные случайные выбросы, выбросы будут иметь не гауссово распределение, поэтому их вклад в ошибку регрессии будет плохо описываться методом наименьших квадратов (см. принцип максимального правдоподобия). Весовая функция будет иметь форму :

$$f(\vec{\epsilon}) = \exp(-(\mu \vec{\epsilon} / \max(\vec{\epsilon}))^2)$$

μ - это параметр. В общем-то, функция может быть любой, главное, чтобы она спадала с ростом аргумента и стремилась в пределе к нулю, а при нулевой ошибке давала единицу, тот же гауссиан подходит.

```
% пример взят из [1]
clearvars
n = 20;
m = 3;% число выбросов
x = 2*rand(n,1) - 1;
x=sort(x);
y0 = exp(x); % создаются данные с простой монотонной зависимостью
%теперь к ним добавляются точки шума с негауссовой формой распределения -
%выбросы
noise = randn(m,1)/2;
noise = sign(noise).*abs(noise).^4;
y = y0;
coeff_no_noise = polyfit(x,y0,4)
```

```
coeff_no_noise = 1×5
    0.0463    0.1751    0.4976    0.9984    1.0001
```

```
y(randi(n,[m 1]))= y(randi(n,[m 1])) + noise; % добавляем шумы к m случайным точкам
```

```
iterations = 3;% число итераций
% далее будем итерационно менять веса обратной пропорционально величине
% ошибки
% исходно все веса равны единице
mu = 4.93
```

```
mu = 4.9300
```

```
weights = ones(n,1);

ax = get_next_ax();
plot(ax,x,y0,'ro',x,y,'b+', "MarkerSize",8)
```

```

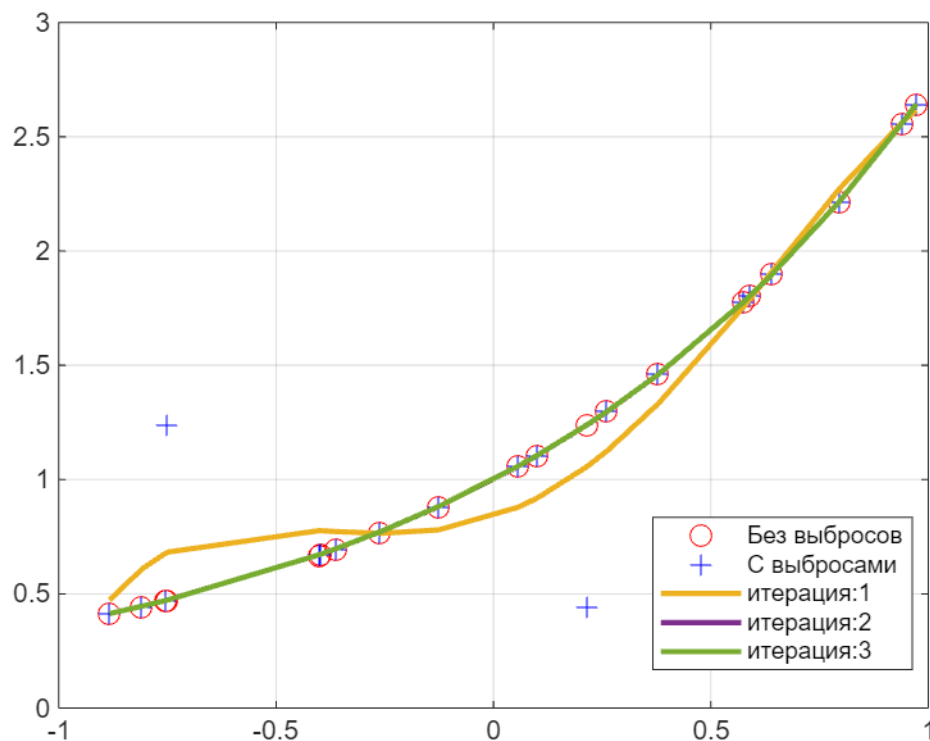
% для решения задачи линейной регрессии будет использоваться функция lscov
X = [x.^4,x.^3,x.^2,x,ones(size(x))];
% предикторы в матрице в обратном порядке, но это нормально
tb = table();
tb("no noise")=coeff_no_noise(:);
hold(ax,"on");
for i = 1:iterations % производим несколько итераций
    poly = lscov(X,y,weights)';

    % ошибка регрессии
    resid = polyval(poly,x) - y; % для расчета используем поливал

    % find the maximum residual to scale the problem
    maxr = max(abs(resid));

    % расс
    weights = exp(-(mu*resid/maxr).^2);
    plot(x,polyval(poly,x),"LineWidth",2)
    tb("iter "+ string(i))=poly(:);
end
hold(ax,"off")
iterstr = "итерация:" + string(1:iterations);
legend(ax,["Без выбросов", "С выбросами",iterstr ],"Location","best")
grid(ax,"on")

```



tb

tb = 5x4 table

	no noise	iter 1	iter 2	iter 3
1	0.0463	-1.1040	0.0406	0.0417
2	0.1751	0.6090	0.1790	0.1787
3	0.4976	1.6674	0.5023	0.5007
4	0.9984	0.6484	0.9958	0.9961
5	1.0001	0.8364	0.9998	1.0003

Видно, что на третьей итерации мы получили очень близкие значения к данным без выбросов.

Выводы

1. Было рассмотрено обоснование метода наименьших квадратов с точки зрения принципа максимального правдоподобия
2. Обсудили примеры линейной регрессии с весами (weighted regression)
3. Локально-взвешенной регрессии (local-weighted regression)
4. Робастной регрессии (robust regression)

ЛИТЕРАТУРА

1. John D'Errico (2025). Optimization Tips and Tricks (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8553-optimization-tips-and-tricks>), MATLAB Central File Exchange. Retrieved January 30, 2025.

```
function M = join_matrix(UL,UR,DL,DR,w,val)
% функция склеивает четыре матрицы в одну, вставляя между ними нуль, так,
% чтобы была рамка на картинке
arguments
    UL
    UR
    DL
    DR
    w = 10
    val = 0;
end
r1 = size(UL,1);r2 = size(DL,1);
c1 = size(DL,2);c2 = size(DR,2);
M = ones(r1+r2+w,c1+c2+w)*val;
M(1:r1,1:c1) = UL;
M(1:r1,(c1+w+1):end)=UR;
M((r1+w+1):end,1:c1) = DL;
M((r1+w+1):end,(c1+w+1):end) = DR;
end
function data = read_bottle_dataset(vars)
    data = struct();
    info = h5info(filename)
```

```

data = h5read("E:\projects\datasets\bases\bottle\bottle.h5",ds)
% Open HDF5 file
% fileID = H5F.open("E:\projects\datasets\bases\bottle\bottle.h5");
%
% data.Datasets(1).Name = "BtlNum";
% dsID1 = H5D.open(fileID, "/BtlNum");
% data.Datasets(1).Value = H5D.read(dsID1);
%
% data.Datasets(2).Name = "Depthm";
% dsID2 = H5D.open(fileID, "/Depthm");
% data.Datasets(2).Value = H5D.read(dsID2);
end
function rus_name = rus(type)
possible_types = ["stand" "legA" "trig" "legP" "sigpoly" "custom"];
possible_rus_names = ["Стандартный базис" "Присоединенные полиномы Лежандра"
"Тригонометрический базис" "Полиномы лежандра" "Сигмоиды" "Кастомный"];
flag = possible_types==type;
if any(flag)
    rus_name = possible_rus_names(flag);
else
    rus_name = type;
end

end
function val = convert_rating_to_number(rating)
%rating = string(rating);
switch rating(1)
    case "A"
        val = 7+count(rating,"A");
    case "B"
        val = 8-count(rating,"B");
    case "C"
        val = 4-count(rating,"C");
end

end
function f = norm_distribution_function(mu,sig)
% возвращает анонимную функцию для нормального распределения
f =@(x) exp(-(x-mu).^2./(2*sig^2))./(sig*sqrt(2*pi));
end
function [V,s] = vandermatrix(t,P,type,polyprod_function,parameters)
arguments
    t double
    P (1,1) double {mustBeInteger,mustBePositive} = 2
    type (1,1) string {mustBeMember(type,["stand" "legA" "trig" "legP" "sigpoly"
"custom"])} = "stand"
    polyprod_function =[]
    parameters=[]
end
% создаем матрицу Вандермонда
% type - тип полинома (стандартный базис, полиномы лежандра,

```

```

% тригонометрические полиномы)
t = t(:);
N = numel(t);
V = zeros(N,P);
if ~(type=="custom")
    [Pfun,s] = producing_function(type,t,parameters); % возвращаем производящую
функцию для колонки матрицы вандермонда
else
    assert(~isempty(polyprod_function)||
~isa(polyprod_function,"function_handle"),"Если выбрана кастомная производящая
функция, то нужно ее предоставить")
    s = normalize(t);
    Pfun = @(i)polyprod_function(i,s.x);
end
for jj = P:-1:1
    V(:,jj) = Pfun(jj);
end
end
function dist= make_dist(type,options)
% возвращает генератор N случайных чисел, распределенных в соответствии
% с двух параметрическими распределениями: нормальным, дельта-равномерным,
% Вейбулла и Хи-квадрат
arguments
    type (1,1) string {mustBeMember(type,["Normal" "Uniform" "Weibull" "Chi2"])}
    options.mu (1,1) =0
    options.sig (1,1)=0
end
mu=options.mu;
sig2=options.sig^2;
switch type
    case "Normal"
        dist = @(N) mu + sig2*randn([N 1]);
    case "Uniform"
        dist = @(N) sqrt(sig2)*(rand([N 1]) -0.5)+ mu;
    case "Weibull"
        dist = @(N) wblrnd(mu,sqrt(sig2),N,1);
    case "Chi2"
        dist = @(N) (mu + sig2*randn([N 1]).^2);
end

end
function norm_struct = normalize2(t)
% функция возвращает стурктуру, в которой хранятся данные для нормировки
if ~issorted(t)
    t = sort(t,"ascend");
end
tmin = t(1);
tmax = t(end);
x = 2.0*((t - tmin) / (tmax - tmin))- 1;
norm_struct = struct("tmin",tmin,"tmax",tmax,"x",x); %t,(max(t) - min(t))

```

```

end
function t = denormalize2(s)
    t = 0.5*(s.x + 1.0)*(s.tmax - s.tmin) + s.tmin;
end
function Pn = leg_polyA(i,t) % производящая функция для присоединенных полиномов
Лежандра
    persistent P
    persistent tleg
    leg_type = 'norm';
    if isempty(tleg)||isempty(P)||(~isequal(t,tleg))
        P = transpose(legendre(i-1,t,leg_type)); % встроенная функция по сути
возвращает уже матрицу Вандермонда
        tleg = t;
    end
    if i<=size(P,2)
        Pn = P(:,i);
        return
    end
    P = transpose(legendre(i,t,leg_type));
    tleg = t;
    Pn = P(:,end);
end
function Pn = trig_poly(i,t) % производящая функция для тригонометрических полиномов
    if i==1
        Pn = ones(size(t));
        return
    end
    if mod(i,2)==0
        Pn = cos(i*t*pi);
    else
        Pn = sin(i*t*pi);
    end
end
function y = sigmoid(t,mu,alpha)
    y = 1./(1+ exp(-2*alpha*(t-mu)));
end
function Pn=sig_poly(i,t,alpha)
    arguments
        i
        t
        alpha=1
    end
    if i==1
        Pn = sigmoid(t,0,alpha);
        return
    end
    if mod(i,2)==0
        Pn = sigmoid(t,1/i,alpha) + 1 - sigmoid(t,-1/i,alpha);
    else
        Pn = sigmoid(t,-1/i,alpha) + 1 - sigmoid(t,1/i,alpha);
    end
end

```

```

end
end
function [P,s] = producing_function(type,t,parameter)
% функция возвращает производящую функцию для полинома
arguments
    type string
    t double
    parameter=[]
end
s = normalize2(t);
switch type
    case "stand" % стандартный базис полинома
        P = @(i) s.x.^(i-1);
    case "legA" % присоединенные полиномы Лежандра
        P = @(i) leg_polyA(i,s.x);
    case "legP" % полиномы Лежандра
        P = @(i) legendreP(i-1,s.x) ; % стандартная функция для полиномов лежандра
    case "trig" % тригонометрический базис
        P = @(i) trig_poly(i,s.x);
    case "sigpoly"
        P = @(i) sig_poly(i,s.x,parameter);

end

end
function [new_ax,fig_handle] = get_next_ax(index, axes_name_value_pairs)
% функция, которая возвращает новые оси на новой фигуре (нужна чтобы
% картинки в ливскрипте нормально строились)
arguments
    index = []
    axes_name_value_pairs cell = {}
end
persistent N;
if isempty(index)
    if isempty(N)
        N=1;
    else
        N = N+1;
    end
    fig_handle = figure(N);
    clf(fig_handle);
    new_ax = axes(fig_handle,axes_name_value_pairs{:});
    %disp("fig"+ N)
else
    fig_handle = figure(index);
    clf(fig_handle);
    new_ax = axes(fig_handle,axes_name_value_pairs{:});
end
end
function ax = get_named_ax(title_string)

```



```

    ax = get_next_ax();
    title(title_string);
end
function ax = draw_vector(ax,ttl, names,type,varargin)
% функция строит двух- и трех-мерные вектора, а также рассеянные данные из
% матрицы
% ax - оси (если пустые, то создаются новые)
% ttl - заголовок картинки
% names - имена векторов
% type:
%     "vector" - аргументы, которые передаются после интерпретируются
%                как отдельные вектора
%     "point"  - в этом случае передается матрица в качестве аргумента и
%                столбцы матрицы строятся при помощи функций scatter и scatter3 d
%                в зависимости от размерности массива
arguments
    ax =[]
    ttl string =strings(0,1)
    names string =strings(0,1)
    type string {mustBeMember(type,["vector" "point"])}="vector"
end
arguments (Repeating)
    varargin double
end
was_empty = isempty(ax); % это признак того, что все строится на новых осях
if was_empty
    ax = get_next_ax();
else
    hold(ax,"on");
    % if ~isempty(ax.Legend)
    %     leg_before = ax.Legend.String;
    % else
    %     leg_before = strings(0,1);
    % end
end

if strcmp(type,"vector")
    is_3D = numel(varargin{1})==3;
    if is_3D
        [x,y,z] = make_xy(varargin{1});
        plot3(ax,x,y,z,'LineWidth',2,'Marker','o');
        hold on
        for iii = 2:numel(varargin)
            [x,y,z] = make_xy(varargin{iii});
            plot3(ax,x,y,z,'LineWidth',2,'Marker','o');
        end
        grid on
        hold off
    else
        [x,y] = make_xy(varargin{1});

```

```

        plot(ax,x,y,'LineWidth',2,'Marker','o');
        hold on
        for iii = 2:numel(varargin)
            [x,y] = make_xy(varargin{iii});
            plot(ax,x,y,'LineWidth',2,'Marker','o');
        end
        grid on
        hold off
    end
    if isempty(names) || (numel(names)~=numel(varargin))
        legend(ax,string(1:numel(varargin)));

    else
        % if ~was_empty
        %     names= [names(:);leg_before(:)];
        % end
        legend(ax,names);
    end
    xlim(ax,[-1 1]);
    ylim(ax,[-1 1]);
    if ~isempty(ttl)
        title(ax,ttl);
    end
else
    %data_number = numel(varargin); % число массивов данных
    is_3D = numel(varargin)==3;
    data = varargin{1};
    if size(data,2)>1
        data = transpose(data);
        is_transpose = true;
    else
        is_transpose = false;
    end
    if ~is_transpose
        for iii = 2:numel(varargin)
            data = [data,varargin{iii}];
        end
    else
        for iii = 2:numel(varargin)
            data = [data,transpose(varargin{iii})];
        end
    end

    if is_3D
        scatter3(ax,data(:,1),data(:,2),data(:,3));
    else
        scatter(ax,data(:,1),data(:,2));
    end
end
end

```

```

    if ~was_empty
        hold(ax,"off");
    end
end
function [x,y,z] = make_xy(col)
% добавляет к координатам вектора нули так, чтобы при помощи функции plot
% строилась линия
    switch numel(col)
        case 1
            x = [col(1)];
            y = 0;
            z = 0;
        case 2
            x = [0 col(1)];
            y = [0 col(2)];
            z = zeros(1,2);
        case 3
            x = [0 col(1)];
            y = [0 col(2)];
            z = [0 col(3)];
    end
end
function folder = get_folder()
% текущая папка
folder = fileparts(matlab.desktop.editor.getActiveFilename());
end
function [sampling_volume,tests_number,beta_mat] =
sampling_surf_plot(beta,Nmax,Mmax,delta)
    % N
    P = numel(beta);
    sampling_volume = 2:Nmax;
    tests_number = 2:Mmax;
    beta_mat = zeros([Nmax-1,Mmax-1,P]);
    for N=sampling_volume % первый индекс - объем выборки
        x = transpose(linspace(-1,1,N));% столбец координат
        X = vandermatrix(x,P); % матрица вандермонда
        Yo = X*beta;% истинное значение
        for ii = tests_number% второй индекс - номер теста
            Y = Yo + delta*randn(N,1);
            b_values = X\Y;
            beta_mat(N-1,ii-1,:) = b_values;
        end
    end
end
end

```