2024 年 02 月 09 日

詳解 確率ロボティクス メモ

Manato1fg

1. 第一章

省略

2. 第二章

定理 **2.1** (中心極限定理): ある確率分布Pにしたがう確率変数$X_1, X_2, ...X_N$に対し，確率変数Yを次のように定義する．

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{\sqrt{N}} \tag{1}$$

このとき，YはNが十分大きくなると正規分布に収束する．

証明: 特性関数を用いた厳密でない証明を行う．
特性関数$\Theta(ju)$は以下のように定義される．

$$\Theta(ju) = \mathbb{E}[e^{jux}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} p(x) \,\mathrm{d}x \tag{2}$$

ここで，$p(x)$は確率変数Xの確率密度関数である．

　確率変数の和で定義される確率変数の計算の際に畳み込み演算をすることに注意して，確率変数Zを

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{3}$$

とすると，重畳積分定理からZの特性関数$\Theta_z(ju)$は次のようになる．

$$\Theta_z(ju) = (\Theta(ju))^N \tag{4}$$

また，$Y = \dfrac{Z}{\sqrt{N}}$と定義すると，Yの特性関数$\Theta_y(ju)$は次のようになる．

$$\Theta_y(ju) = \Theta_z\left(j\sqrt{N}u\right) = \left(\Theta\left(\frac{ju}{\sqrt{N}}\right)\right)^N \tag{5}$$

キュムラントと特性関数の関係から，

$$\begin{aligned} \log\left(\Theta_{y(ju)}\right) &= N\log\left(\Theta\left(\frac{ju}{\sqrt{N}}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Nk_n}{N^{\frac{n}{2}}}\frac{(ju)^n}{n!} \end{aligned} \tag{6}$$

となる．ここで，k_nは確率変数Xのn次のキュムラントである．

$n \geq 3$の項はNが十分大きくなるにつれて0に収束する．よって，Yの三次以上のキュムラントは0であり，定義からYは正規分布に収束する． □

系 **2.1.1**:

$$Y = \frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu}{\sqrt{N}\sigma} \tag{7}$$

とおけば，Yは標準正規分布に収束する．

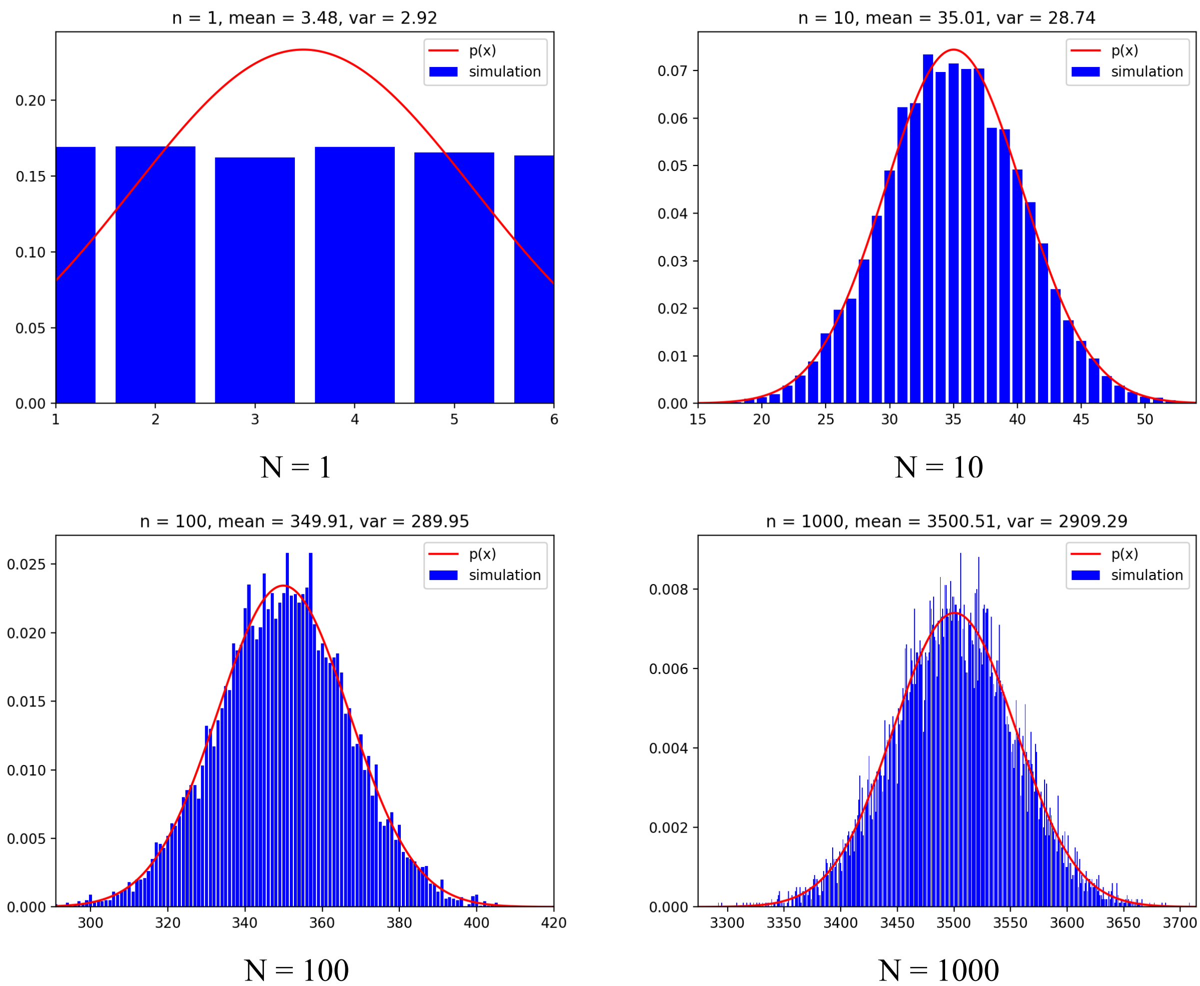

Figure 1: 中心極限定理のシミュレーション