UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Manca Murn

METRIČNA DIMENZIJA LEKSIKOGRAFSKEGA PRODUKTA GRAFOV

Delo diplomskega seminarja

Mentor: Sandi Klavžar

Ljubljana, 2023

Kazalo

Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

Povzetek

...

The metric dimension of the lexicographic product of graphs

Abstract

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Uvod

2 Metrična dimenzija grafa

2.1 Definicija

Metrična dimenzija grafa je najmanjše število vozlišč grafa, ki jih potrebujemo, da vsa vozlišča v grafu razlikujemo med sabo zgolj s pomočjo razdalj do izbranih vozlišč. V matematičnem jeziku to povemo takole:

Definicija 2.1. Naj bo G povezan graf in $W = \{w_1, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ neprazna podmnožica vozlišč. Vektor $r_W(v) = (d(v, w_1), ..., d(v, w_k))$ imenujemo metrična predstavitev vozlišča $v \in V(G)$ s podmnožico W.

Definicija 2.2. Neprazna podmnožica $R \subset V(G)$ je rešljiva, če $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_R(v) \neq r_R(u)$.

Definicija 2.3. Najmanjša rešljiva množica grafa G se imenuje rešljiva baza. Njeno velikost imenujemo metrična dimenzija in jo označimo z $\beta(G)$.

Poglejmo si nekaj lahkih osnovnih primerov.

Primer 2.4. Graf poti dolžine n označujmo z P_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1 \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa P_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= d(v_1, v_1) = 0 \\ r_W(v_2) &= d(v_2, v_1) = 1 \\ &\dots \\ r_W(v_n) &= d(v_n, v_1) = n - 1. \end{aligned}$$

Vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. Sledi, da je W rešljiva množica. Ker je njena velikost enaka 1 in je to najmanjša možna neprazna podmnožica vozlišč, je torej metrična dimenzija grafa poti poljubne dolžine enaka $\beta(P_n) = 1$. $\diamondsuit$

Primer 2.5. Cikel dolžine n označujmo z C_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1, v_2 \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa C_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2)) = (0, 1) \\ r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2)) = (1, 0) \\ r_W(v_3) &= (d(v_3, v_1), d(v_3, v_2)) = (2, 1) \\ r_W(v_4) &= (d(v_4, v_1), d(v_4, v_2)) = (3, 2) \\ &\dots \\ r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2)) = (2, 3) \\ r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2)) = (1, 2) \end{aligned}$$

Zopet vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. W je torej rešljiva množica, njena velikost pa je enaka 2. Metrična dimenzija poljubno velikega cikla je enaka $\beta(C_n) = 2$. $\diamondsuit$

2.2 Rešljiva množica

Nekaj osnovnih ugotovitev o rešljivih množicah grafa lahko razberemo iz zgornjih primerov.

Trditev 2.6. *Za povezan graf G, je $V(G)$ rešljiva množica.*

Dokaz. Predpostavimo, da ima graf G n vozlišč. Označimo vozlišča grafa G z $v_1, ..., v_n$. Za posamezno vozlišče bo metrična predstavitev sledeča:

$$r_{V(G)}(v_k) = (d(v_k, v_1), ..., d(v_k, v_k), ..., d(v_k, v_n)) = (d(v_k, v_1), ..., 0, ..., d(v_k, v_n)).$$

Torej za vsako vozlišče v_k bo k-ta komponenta metrične predstavitve enaka 0. To je tudi edina komponenta v vektorju, ki bo enaka 0, saj za razdaljo med vozlišči velja

$$d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w.$$

Sledi $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_{V(G)}(v) \neq r_{V(G)}(u)$, torej je $V(G)$ rešljiva množica. □

Trditev 2.7. *Rešljiva baza grafa G ni enolično določena.*

Dokaz. To hitro vidimo na primeru Za W bi lahko vezli tudi vozlišče v_2 in prišli do enakega rezultata. □

V defnicijah 2.1. in 2.2. smo prepostavili, da imamo neprazno podmnožico vozlišč. Če bi vzeli prazno množico, bi bila definicija očitno nesmiselna. Iz trditve 2.6. lahko potem sklepamo, da metrična dimenzija za graf vselej obstaja in lahko zapišemo naslednjo posledico:

Posledica 2.8. *Za povezan graf G velja*

$$1 \leq \beta(G) \leq |V(G)| - 1.$$

Dokaz. Iz definicije metrične dimenzije sledi $1 \leq \beta(G)$. Iz trditve 2.6. pa sledi $\beta(G) \leq |V(G)|$. Predpostavimo $|V(G)| = n$ in $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$. Vzemimo sedaj podmnožico $W = \{v_1, ..., v_{n-1}\}$. Metrične predstavitve vozlišč glede na W so sledeče:

$$\begin{aligned}
r_W(v_1) &= (0, d(v_1, v_2), ..., d(v_1, v_k), ..., d(v_1, v_{n-1}))\\
r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), 0, ..., d(v_2, v_k), ..., d(v_2, v_{n-1}))\\
&\dots\\
r_W(v_k) &= (d(v_k, v_1), d(v_k, v_2), ..., 0, ..., d(v_k, v_{n-1}))\\
&\dots\\
r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2), ..., d(v_{n-1}, v_k), ..., 0)\\
r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2), ..., d(v_n, v_k), ..., d(v_n, v_{n-1}))
\end{aligned}$$

Vidimo, da so vse metrične predstavitve med seboj različne, torej je W rešljiva in $\beta(G) \leq n - 1$.

□

3 Leksikografksi produkt grafov

4 Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

Slovar strokovnih izrazov