UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Manca Murn

METRIČNA DIMENZIJA LEKSIKOGRAFSKEGA PRODUKTA GRAFOV

Delo diplomskega seminarja

Mentor: Sandi Klavžar

Ljubljana, 2023

Kazalo

Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

Povzetek

...

The metric dimension of the lexicographic product of graphs

Abstract

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Uvod

V decembru leta 2010 sta v razmaku 17 dni nastala dva različna članka z enakim naslovom - *"The metric dimension of the lexicographic product of graphs"*. Avtorji obeh člankov bojda niso vedeli za delo drugega in so se teme lotili na dva posvem različna načina. V tem diplomskem seminarju si bomo ogledali pojem metrične dimenzije grafa in njene osnovne lastnosti, definirali leksikografski produkt grafov ter povzeli glavne rezultate o metrični dimenziji leksikografskega produkta iz obeh člankov. Na koncu bomo skušali najti tudi povezavo med enim in drugim pristopom obravnave le te.

1.1 Osnovni pojmi

Za začetek ponovimo nekaj osnovnih definicij in oznak iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali za razumevanje tega diplomskega seminarja.

Definicija 1.1. Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč in $E(G)$ podmnožica v $\binom{V(G)}{2}$, ki vsebuje povezave grafa.

Če je $V(G)$ končna množica, je G končen graf. Če je med dvema različnima vozliščema največ ena povezava in nobeno vozlišče ni povezano samo s seboj, pravimo, da je graf enostaven. Vozlišči $v, u \in G$ sta sosedni, če $uv \in E(G)$. Sosednost je ekvivalenčna relacija, zato sosedni vozlišči označimo $u \sim v$. Če $w, x \in V(G)$ nista sosedni pa pišemo $w \not\sim x$.

Definicija 1.2. Komplement grafa G, je graf $\overline{G}$, za katerega velja $V(G) = V(\overline{G})$ in

$$\forall u, v \in V(\overline{G}) : uvE(\overline{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G).$$

Sprehod v grafu G je zaporedje vozlišč $v_1, v_2, ...v_k$ iz $V(G)$, tako da je $\forall i$: $v_i, v_{i+1} \in E(G)$. Sprehod je enostaven, če vsebuje sama različna vozlišča. Graf je povezan, če med vsakima dvema različnima vozliščema obstaja sprehod. Na povezanem grafu lahko definiramo razdaljo med vozliščema.

Definicija 1.3. Razdalja med dvema vozliščema $u, v \in V(G)$ je dolžina najkrajšega sprehoda in jo označujemo z $d(u, v)$.

Definicija 1.4. Graf H je podgraf grafa G natanko tedaj, ko velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(H)$.

Definicija 1.5. Graf H je induciran podgraf grafa G natanko tedaj, ko velja $\forall u, v \in V(H) : uv \in E(G) \Rightarrow E(H)$.

Definicija 1.6. Komponenta grafa je povezan podgraf, ki ni del nobenega večjega povezanega podgrafa.

Povezan graf ima seveda samo eno komponento. Definirajmo še operacijo združitve grafov.

Definicija 1.7. Združitev grafov G in H, je graf $G+H$, za katerega velja $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ in $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G) \wedge v \in V(H)\}$.

Poglejmo še nekaj primerov osnovnih razredov grafov:

- Polni graf na n vozliščih, ki ga označujemo z K_n, ima vse možne povezave.
- Polni dvodelni graf, ki ga označujemo z $K_{n,m}$ ima množico vozlišč $V(K_{n,m}) = \{v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_m\}$ in povezave $E(K_{n,m}) = \{v_i u_j \mid 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq m\}$.
- Pot na n vozliščih, ki jo označujemo z P_n, ima množico povezav $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n\}$.
- Cikel na n vozliščih, dobimo tako, da grafu P_n dodamo povezavo $n1$.
- Drevo je povezan graf, ki ne vsebuje nobenega cikla.

2 Metrična dimenzija grafa

2.1 Definicija

Metrična dimenzija grafa je najmanjše število vozlišč grafa, ki jih potrebujemo, da vsa vozlišča v grafu razlikujemo med sabo zgolj s pomočjo razdalj do izbranih vozlišč. V matematičnem jeziku to povemo takole:

Definicija 2.1. Naj bo G povezan graf in $W = \{w_1, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ neprazna podmnožica vozlišč. Vektor $r_W(v) = (d(v, w_1), ..., d(v, w_k))$ imenujemo metrična predstavitev vozlišča $v \in V(G)$ s podmnožico W.

Definicija 2.2. Neprazna podmnožica $R \subset V(G)$ je rešljiva, če $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_R(v) \neq r_R(u)$.

Definicija 2.3. Najmanjša rešljiva množica grafa G se imenuje rešljiva baza. Njeno velikost imenujemo metrična dimenzija in jo označimo z $\beta(G)$.

Poglejmo si nekaj lahkih osnovnih primerov.

Primer 2.4. Graf poti dolžine n označujmo z P_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1 \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa P_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= d(v_1, v_1) = 0 \\ r_W(v_2) &= d(v_2, v_1) = 1 \\ &\cdots \\ r_W(v_n) &= d(v_n, v_1) = n - 1. \end{aligned}$$

Vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. Sledi, da je W rešljiva množica. Ker je njena velikost enaka 1 in je to najmanjša možna neprazna podmnožica vozlišč, je torej metrična dimenzija grafa poti poljubne dolžine enaka $\beta(P_n) = 1$.

$\diamondsuit$

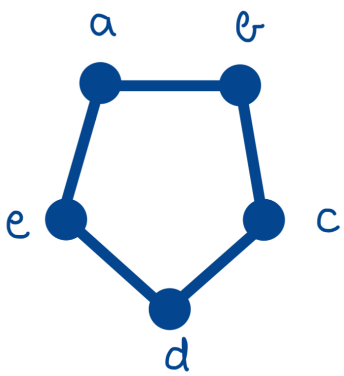
Slika 1: Graf P_5

Primer 2.5. Cikel dolžine n označujmo z C_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1, v_2 \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa C_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$
\begin{aligned}
r_W(v_1) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2)) = (0, 1)\\
r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2)) = (1, 0)\\
r_W(v_3) &= (d(v_3, v_1), d(v_3, v_2)) = (2, 1)\\
r_W(v_4) &= (d(v_4, v_1), d(v_4, v_2)) = (3, 2)\\
&\dots\\
r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2)) = (2, 3)\\
r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2)) = (1, 2)
\end{aligned}
$$

Zopet vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. Če bi vzeli množico $W \setminus \{v_i\}$, bi imeli po dve vozlišči enako metrično prestavitev. W je torej najmanjša rešljiva množica, njena velikost pa je enaka 2. Metrična dimenzija poljubno velikega cikla je enaka $\beta(C_n) = 2$.

Slika 2: Graf C_5.



$\diamondsuit$

Primer 2.6. Polni graf z n vozlišči označujmo s K_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1, v_2, ..., v_{n-1} \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa K_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$\begin{aligned}
r_W(v_1) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), ..., d(v_1, v_{n-1})) = (0, 1, ..., 1) \\
r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), ..., d(v_2, v_{n-1})) = (1, 0, ..., 1) \\
&\qquad \cdots \\
r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2), ..., d(v_{n-1}, v_{n-1})) = (1, 1, ..., 0) \\
r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2), ..., d(v_n, v_{n-1})) = (1, 1, ..., 1)
\end{aligned}$$

Zopet vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. Vsako vozlišče ima na i - ti komponenti 0 in povsod drugje 1, z izjemo vozlišča v_n, ki ima povsod 1. Če bi vzeli poljubno $W \setminus \{v_i\}$, bi imeli vozlišči v_i in v_n enaki metrični predstavitvi. W je torej najmanjša rešljiva množica, njena velikost pa je enaka $n-1$. Metrična dimenzija poljubno velikega cikla je enaka $\beta(K_n) = n - 1$. ♢

Opomba 2.7. Izkaže se $G = K_n \Leftrightarrow \beta(G) = n - 1$.

2.2 Lastnosti

Nekaj osnovnih ugotovitev o rešljivih množicah grafa lahko razberemo iz zgornjih primerov.

Trditev 2.8. *Za povezan graf G, je $V(G)$ rešljiva množica.*

Dokaz. Predpostavimo, da ima graf G n vozlišč. Označimo vozlišča grafa G z $v_1, ..., v_n$. Za posamezno vozlišče bo metrična predstavitev sledeča:

$$r_{V(G)}(v_k) = (d(v_k, v_1), ..., d(v_k, v_k), ..., d(v_k, v_n)) = (d(v_k, v_1), ..., 0, ..., d(v_k, v_n)).$$

Torej za vsako vozlišče v_k bo k-ta komponenta metrične predstavitve enaka 0. To je tudi edina komponenta v vektorju, ki bo enaka 0, saj za razdaljo med vozlišči velja

$$d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w.$$

Sledi $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_{V(G)}(v) \neq r_{V(G)}(u)$, torej je $V(G)$ rešljiva množica. □

Trditev 2.9. *Rešljiva baza grafa G ni enolično določena.*

Dokaz. To hitro vidimo na primeru Za W bi lahko vezli tudi vozlišče v_2 in prišli do enakega rezultata. □

V definicijah 2.1. in 2.2. smo prepostavili, da imamo neprazno podmnožico vozlišč. Če bi vzeli prazno množico, bi bila definicija očitno nesmiselna. Iz trditve 2.6. lahko potem sklepamo, da metrična dimenzija za graf vselej obstaja in lahko zapišemo naslednjo posledico:

Posledica 2.10. *Za povezan graf G velja*

$$1 \leq \beta(G) \leq |V(G)| - 1.$$

Dokaz. Iz definicije metrične dimenzije sledi $1 \leq \beta(G)$. Iz trditve 2.6. pa sledi $\beta(G) \leq |V(G)|$. Predpostavimo $|V(G)| = n$ in $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$. Vzemimo sedaj podmnožico $W = \{v_1, ..., v_{n-1}\}$. Metrične predstavitve vozlišč glede na W so sledeče:

$$\begin{aligned}
r_W(v_1) &= (0, d(v_1, v_2), ..., d(v_1, v_k), ..., d(v_1, v_{n-1})) \\
r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), 0, ..., d(v_2, v_k), ..., d(v_2, v_{n-1})) \\
&\dots \\
r_W(v_k) &= (d(v_k, v_1), d(v_k, v_2), ..., 0, ..., d(v_k, v_{n-1})) \\
&\dots \\
r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2), ..., d(v_{n-1}, v_k), ..., 0) \\
r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2), ..., d(v_n, v_k), ..., d(v_n, v_{n-1}))
\end{aligned}$$

Vidimo, da so vse metrične predstavitve med seboj različne, torej je W rešljiva in $\beta(G) \leq n - 1$. □

2.2.1 Metrična dimenzija in premer grafa

Ni presenetljivo, da lahko najdemo povezavo med metrično dimenzijo in premerom grafa. Spomnimo se matematične definicije premera.

Definicija 2.11. Premer grafa G označujemo z $\text{diam}(G)$ in je enak dolžini najdaljše najkrajše poti v grafu. Torej

$$\text{diam}(G) = \max_{v,u \in V(G)} d(u, v).$$

Trditev 2.12. *Naj bo G povezan graf in $|V(G)| = n$. Potem velja naslednja povezava:*

$$n \leq (\text{diam}(G))^{\beta(G)} + \beta(G).$$

Dokaz. Naj bo R rešljiva baza grafa G, torej $|R| = \beta(G)$. Zanima nas, največ koliko vozlišč ima lahko tak graf G. Vozlišča iz množice R bodo imela natanko eno komponento metrične predstavitve enako nič, tako se bodo te razlikovale med sabo in vseh ostalih. Če pa vzamemo vozlišče $v \notin R$, pa velja sledeče:

$$\forall r_i \in R : 1 \leq d(v, r_i) \leq \text{diam}(G).$$

Vseh možnih različnih metričnih predstavitev za vozlišča izven rešljive množice R je tako $(\text{diam}(G))^{\beta(G)}$ in lahko zapišemo:

$$n \leq (\text{diam}(G))^{\beta(G)} + \beta(G).$$

□

V resnici lahko red grafa z dano metrično dimenzijo in premerom še bolj omejimo.

Trditev 2.13. *Naj bo G povezan graf in $|V(G)| = n$. Označimo $\delta = \operatorname{diam}(G)$ in $\beta = \beta(G)$. Potem velja*

$$n \leq \left(\left\lfloor\frac{2\delta}{3}\right\rfloor + 1\right)^{\beta} + \beta \sum_{i=1}^{\lceil D/3 \rceil} (2i-1)^{\beta-1}.$$

Dokaz. □

Ta zgornja meja postane še bolj natančna za posamezne družine grafov, vendar v tem delu tega ne bomo obravnavali tako podrobno.

2.2.2 Dvojčki in metrična dimenzija

Spomnimo se pojma soseščine vozlišča.

Definicija 2.14. Naj bo G povezan graf in $v \in V(G)$ vozlišče na grafu. Množico

$$N(v) = \{u \in V(G) \,|\, vu \in E(G)\}$$

imenujemo soseščina vozlišča v.

Sedaj vpeljimo ekvivalenčno relacijo na vozliščih

$$v \equiv u \Leftrightarrow N(v) \setminus \{u\} = N(u) \setminus \{v\}$$

Če sta vozlišči v tej ekvivalenčni relaciji, pravimo, da sta dvojčka. Ekvivalenčni razred vozlišča v označimo z v^*, množico vseh ekvivalenčnih razredov z $\tau(G)$, število vseh razredov pa naj bo označeno z $|\tau(G)| = \iota(G)$.

Lema 2.15. *Naj bosta $u, v \in v(G)$ dvojčka. Potem je*

$$\forall w \in V(G) \setminus \{u, v\} : d(u, w) = d(v, w).$$

Dokaz. □

Iz tega sledi, da mora vsaka rešljiva množica vsebovati vsaj enega od dvojčkov. Zapišemo lahko naslednjo trditev:

Trditev 2.16. *Za povezan graf G velja*

$$\beta(G) \geq \sum_{v^* \in \tau(G)} (|v^*| - 1).$$

Dokaz. □

2.3 NP - poln problem

3 Leksikografski produkt grafov

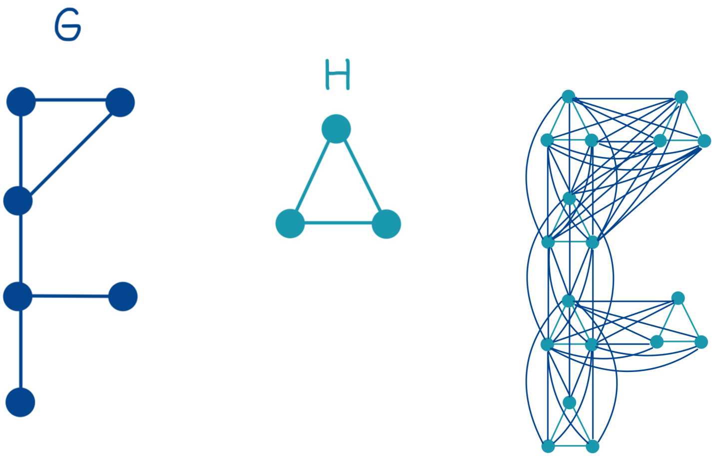
Definicija 3.1. Leksikografski produkt $G[H]$ grafov G in H je definiran na množici vozlišč $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$. Dve različni vozlišči (u, v) in (x, y) sta sosedni, kadar velja

- $ux \in E(G)$ ali
- $u = x$ in $vy \in E(H)$.

3.1 primer

Za lažjo predstavo si lahko ogledamo spodnjo skico, ki prikazuje leksikografski produkt dveh naključnih povzeanih grafov.

Slika 3: Leksikografski produkt poljubnih povezanih grafov G in H.



3.2 lastnosti

Nekaj osnovnih lastnosti leksikografskega produkta grafov:

- POVEZANOST: Če je G povezan graf, potem je $G[H]$ povezan.
- NEKOMUTATIVNOST: v splošnem velja $G[H] \neq H[G]$.
- DISTRIBUTIVNOST: $(G_1 + G_2)[H] = G_1[H] + G_2[H]$, kjer $+$ označuje disjunktno unijo oz. vsoto grafov.
- ENAKOST KOMPLEMENTOV: $\overline{G[H]} = \overline{G}[\overline{H}]$.

Poglejmo si kako izgleda razdalja med vozliščema v leksikografskem prodkutu grafov. Označimo preslikavo $a : V(G) \times V(G) \to \mathbb{N}$;

$$a(v,w) = \begin{cases} 0; & v = w \\ 1; & v \sim w \\ 2; & v \not\sim w \end{cases}$$

Opazujemo Leksikografski produkt povezanega grafa G reda n, z množico vozlišč $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ in grafa H reda m, z množico vozlišč $V(H) = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$. Zaradi boljše preglednosti vpeljimo oznako $v_{ij} := (v_i, u_j) \in V(G[H])$. Sedaj lahko zapišemo

$$d_{G[H]}(v_{ij}, v_{rs}) = \begin{cases} d_G(v_i, v_r); & v_i \neq v_r \\ a_H(u_j, u_s); & \text{sicer} \end{cases}$$

4 Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

Decembra leta 2010 sta v razmaku 17 dni nastala dva različna članka na temo metrične dimenzije leksikografskega produkta grafov. Avtorji so se lotili teme s povsem različnima pristopoma, v tem diplomskem seminarju pa bomo povzeli rezultate obeh in poskusili poiskati povezavo med njimi.

4.1 Metrična dimenzija in komponente

Obravnavamo leksikografski produkt $G[H]$, kjer je G povezan graf in H pojuben graf. Za potrebe tega podpoglavlja vpeljimo naslednje oznake:

- Za poljubno vozlišče $a \in G$ označimo množico vozlišč $H(a) = \{(a, v)|v \in V(H)\}$.
- Za poljubno vozlišče $b \in H$ označimo množico vozlišč $G(b) = \{(v, b)|v \in V(G)\}$.
- Če ima so $H_1, H_2, ..., H_k$ komponente grafa H, označimo $H_i(a) = \{(a, v)|v \in V(H_i)\}$

Vzemimo sosednji vozlišči a, $b \in V(G)$. Vemo, da je vsako vozlišče iz $H(b)$ sosednje vsakemu iz $H_i(a)$. Inducirani podraf grafa $G[H]$, kjer vzamemo eno vozlišče iz množice $H(b)$ in vsa vozlišča iz $H_i(a)$ je izomorfen združenemu grafu $H_i + K_1$. S pomočjo rešljive baze tega združenega grafa bomo konstruirali rešljivo bazo $G[H]$.

4.2 Metrična dimenzija, sosedska dimenzija in dvojčki

4.3 Povezave in skupni rezultati??

Slovar strokovnih izrazov