

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Manca Murn

**METRIČNA DIMENZIJA  
LEKSIKOGRAFSKEGA PRODUKTA GRAFOV**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: Sandi Klavžar

Ljubljana, 2023



**Kazalo**



# Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

POVZETEK

...

# The metric dimension of the lexicographic product of graphs

ABSTRACT

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...

Ključne besede: ..., ...

Keywords: ..., ...



# 1 Uvod

V decembru leta 2010 sta v razmaku 17 dni nastala dva različna članka z enakim naslovom - *"The metric dimension of the lexicographic product of graph"*. Avtorji obeh člankov niso vedeli za delo drugega in so se teme lotili na dva posvem različna načina. V tem diplomskem seminarju si bomo ogledali pojma metrične in sosed-ske dimenzije grafa in njune osnovne lastnosti, ter povezave med njima, definirali bomo leksikografski produkt grafov ter povzeli glavne rezultate o metrični dimenziji leksikografskega produkta iz obeh člankov.

## 1.1 Osnovni pojmi

Za začetek ponovimo nekaj osnovnih definicij in oznak iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali za razumevanje tega diplomskega seminarja.

**Definicija 1.1.** Graf  $G$  je urejen par  $(V(G), E(G))$ , kjer je  $V(G)$  množica vozlišč in  $E(G)$  podmnožica v  $\binom{V(G)}{2}$ , ki vsebuje povezave grafa.

Če je  $V(G)$  končna množica, je  $G$  končen graf. Število  $|V(G)|$  imenujemo red grafa. Če je med dvema različnima vozliščema največ ena povezava in nobeno vozlišče ni povezano samo s seboj, pravimo, da je graf enostaven. Povezave med vozlišči  $\{u, v\}$  bomo zaradi preglednosti pisali kar  $uv$ . Vozlišči  $v, u \in G$  sta sosedni, če  $uv \in E(G)$ . Sosednost je ekvivalenčna relacija, zato sosedni vozlišči označimo  $u \sim v$ . Če  $w, x \in V(G)$  nista sosedni pa pišemo  $w \not\sim x$ .

**Definicija 1.2.** Naj bo  $G$  graf in  $v \in V(G)$ . Množico

$$N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$$

imenujemo sosesčina vozlišča  $v$ .

Stopnja vozlišča je  $\deg(u) = |N(u)|$ .

**Definicija 1.3.** Komplement grafa  $G$ , je graf  $\overline{G}$ , za katerega velja  $V(G) = V(\overline{G})$  in

$$\forall u, v \in V(\overline{G}) : uv \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G).$$

Sprehod v grafu  $G$  je zaporedje vozlišč  $v_1, v_2, \dots, v_k$  iz  $V(G)$ , tako da je  $\forall i : v_i, v_{i+1} \in E(G)$ . Sprehod je enostaven, če vsebuje sama različna vozlišča. Graf je povezan, če med vsakima dvema različnima vozliščema obstaja sprehod. Na povezanem grafu lahko definiramo razdaljo med vozliščema.

**Definicija 1.4.** Razdalja med dvema vozliščema  $u, v \in V(G)$  je dolžina najkrajšega sprehoda in jo označujemo z  $d_G(u, v)$ .

Naslednja trditev o razdaji med vozlišči je očitna.

**Trditev 1.5.** Za povezan graf  $G$  in poljubni vozlišči  $v, w \in V(G)$  velja:

$$d_G(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w.$$

**Definicija 1.6.** Premer povezanega grafa  $G$  označujemo z  $\text{diam}(G)$  in je enak največji razdalji med vozlišči. Torej

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_G(u, v).$$

Iz definicije očitno sledi, da za poljubni dve vozlišči  $u, v$  iz povezanega grafa  $G$  velja  $0 \leq d_G(u, v) \leq \text{diam}(G)$ .

**Definicija 1.7.** Graf  $H$  je podgraf grafa  $G$ , če velja  $V(H) \subseteq V(G)$  in  $E(H) \subseteq E(G)$ . Podgraf  $H$  je induciran, če velja  $\forall u, v \in V(H) : uv \in E(G) \Rightarrow uv \in E(H)$ .

**Definicija 1.8.** Komponenta grafa je povezan podgraf, ki ni del nobenega večjega povezanega podgrafa.

Povezan graf ima seveda samo eno komponento. Definirajmo še operacijo spojitve grafov.

**Definicija 1.9.** Spoj grafov  $G$  in  $H$ , je graf  $G + H$ , za katerega velja  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  in  $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G) \wedge v \in V(H)\}$ .

Poglejmo še nekaj primerov osnovnih razredov grafov:

- Graf brez povezav na  $n$  vozliščih, ki ga označujemo z  $N_n$ , nima nobenih povezav.
- Polni graf na  $n$  vozliščih, ki ga označujemo s  $K_n$ , ima vse možne povezave.
- Polni dvodelni graf  $K_{n,m}$  ima množico vozlišč  $V(K_{n,m}) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,m}\}$  in povezave  $E(K_{n,m}) = \{v_{1,i}v_{2,j} \mid i, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ .
- Polni  $t$ -delni graf, ki ga označujemo s  $K_{m_1, \dots, m_t}$ , ima množico vozlišč enako  $V(K_{m_1, \dots, m_t}) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,m_2}, \dots, v_{t,1}, v_{t,2}, \dots, v_{t,m_t}\}$ , množica povezav pa je  $E(K_{m_1, \dots, m_t}) = \{v_{a,i}v_{b,j} \mid a \neq b \wedge i, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ .
- Zvezda na  $n$  vozliščih je poseben primer polnega dvodelnega grafa in jo označujemo s  $S_{n-1} = K_{1, n-1}$ .
- Pot na  $n$  vozliščih, kjer je  $n \geq 2$ , ki jo označujemo s  $P_n$ , ima množico povezav  $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ .
- Cikel na  $n$  vozliščih, kjer je  $n \geq 3$ , dobimo tako, da grafu  $P_n$  dodamo povezavo  $v_nv_1$ . Označimo ga s  $C_n$ .
- Polni razcepljeni graf na  $k+l$  vozliščih je enak spoju poti in grafa brez povezav ter ga označujemo s  $F_{k,l} = N_k + P_l$ .
- Drevo je povezan graf, ki ne vsebuje nobenega cikla.

**Opomba 1.10.** Očitno velja  $K_1 = N_1$ . To je graf s samo enim vozliščem. Običajno ga bomo označevali s  $K_1$ .



## 2 Metrična dimenzija grafa

motivacija TODO

### 2.1 Definicija

Metrična dimenzija grafa je najmanjše število vozlišč grafa, ki jih potrebujemo, da vsa vozlišča v grafu razlikujemo med sabo zgolj s pomočjo razdalj do izbranih vozlišč. Formalno to povemo takole:

**Definicija 2.1.** Naj bo  $G$  povezan graf.

- Naj bo  $W = \{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$  neprazna podmnožica vozlišč. Vektor  $r_W(v) = (d(v, w_1), \dots, d(v, w_k))$  imenujemo metrična predstavitev vozlišča  $v \in V(G)$  s podmnožico  $W$ .
- Neprazna podmnožica  $R \subseteq V(G)$  je rešljiva, če  $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_R(v) \neq r_R(u)$ .
- Najmanjša rešljiva množica grafa  $G$  se imenuje metrična baza. Njeno velikost imenujemo metrična dimenzija in jo označimo z  $\beta(G)$ .

Za lažje razumevanje si pogledjmo nekaj lahkih osnovnih primerov.

**Primer 2.2.** Označimo vozlišča poti z  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , kot je prikazano na spodnji sliki ???. Izberimo podmnožico  $W = \{v_1\} \subseteq V(G)$ . Metrične predstavitve vozlišč grafa  $P_n$ , glede na  $W$ , so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= d(v_1, v_1) = 0 \\ r_W(v_2) &= d(v_2, v_1) = 1 \\ &\dots \\ r_W(v_{n-1}) &= d(v_{n-1}, v_1) = n - 2 \\ r_W(v_n) &= d(v_n, v_1) = n - 1. \end{aligned}$$

Vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. Sledi, da je  $W$  rešljiva množica. Ker je njena velikost enaka 1 in je to najmanjša možna neprazna podmnožica vozlišč, je torej metrična dimenzija grafa poti poljubne dolžine enaka  $\beta(P_n) = 1$ .



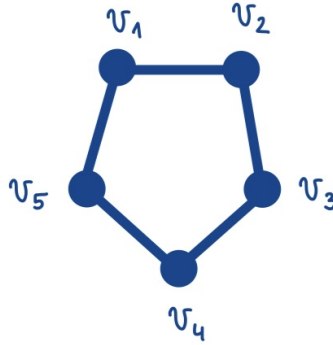
Slika 1: Graf  $P_5$

◇

**Primer 2.3.** Označimo vozlišča cikla z  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , kot je prikazano na sliki ?? . Izberimo podmnožico  $W = \{v_1, v_2\} \subseteq V(G)$ . Metrične predstavitev vozlišč grafa  $C_n$ , glede na  $W$ , so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2)) = (0, 1) \\ r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2)) = (1, 0) \\ &\dots \\ r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2)) = (2, 3) \\ r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2)) = (1, 2) \end{aligned}$$

Zopet vidimo, da so metrične predstavitev vseh vozlišč med seboj različne. Če bi vzeli množico s samo enim vozliščem, bi imeli po dve vozlišči enako metrično predstavitev.  $W$  je torej najmanjša rešljiva množica, njena velikost pa je enaka 2. Metrična dimenzija poljubno velikega cikla je enaka  $\beta(C_n) = 2$ .



Slika 2: Graf  $C_5$ .

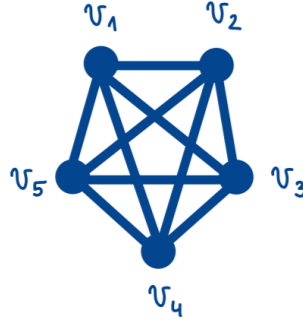
◇

**Primer 2.4.** Označimo vozlišča polnega grafa z  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , kot je prikazano na sliki ?? . Izberimo podmnožico  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \subseteq V(G)$ . Metrične predstavitev vozlišč grafa  $K_n$ , glede na  $W$ , so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), \dots, d(v_1, v_{n-1})) = (0, 1, \dots, 1) \\ r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), \dots, d(v_2, v_{n-1})) = (1, 0, \dots, 1) \\ &\dots \\ r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2), \dots, d(v_{n-1}, v_{n-1})) = (1, 1, \dots, 0) \\ r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2), \dots, d(v_n, v_{n-1})) = (1, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

Zopet vidimo, da so metrične predstavitev vseh vozlišč med seboj različne. Vsako vozlišče ima na  $i$ -ti komponenti metrične predstavitev 0 in povsod drugje 1, z izjemo vozlišča  $v_n$ , ki ima povsod 1. Če bi iz  $W$  izvzeli poljubno vozlišče  $v_i$ , bi imeli vozlišči  $v_i$  in  $v_n$  enaki metrični predstavitvi.  $W$  je torej najmanjša rešljiva množica, njena velikost pa je  $n - 1$ . Metrična dimenzija poljubno velikega polnega grafa je enaka  $\beta(K_n) = n - 1$ .

◇



Slika 3: Graf  $K_5$ .

## 2.2 Sosedska dimenzija grafa

V nekaterih primerih si bomo pri obravnavanju metrične dimenzije pomagali tudi s pojmom sosedske dimenzije.

Pri sosedski dimenziji zopet iščemo podmnožico vozlišč, s pomočjo katerih bomo lahko vsa vozlišča v grafu med sabo razlikovali, vendar tokrat ne s pomočjo razdalje, pač pa s pomočjo relacije sosednosti.

Definirajmo preslikavo  $a : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  takole:

$$a(v, w) = \begin{cases} 0; & v = w \\ 1; & v \sim w \\ 2; & v \not\sim w \end{cases} \quad (2.1)$$

Sedaj lahko zapišemo naslednjo definicijo.

**Definicija 2.5.** Naj bo  $G$  poljuben graf.

- Naj bo  $W = \{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$  neprazna podmnožica vozlišč. Vektor  $s_W(v) = (a(v, w_1), \dots, a(v, w_k))$  imenujemo sosedski predstavitev vozlišča  $v \in V(G)$  s podmnožico  $W$ .
- Podmnožica vozlišč  $S \subseteq V(G)$  je sosedsko rešljiva, če  $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies s_S(v) \neq s_S(u)$ .
- Najmanjša sosedsko rešljiva množica grafa  $G$  se imenuje sosedska baza. Njeno velikost imenujemo sosedska dimenzija in jo označimo z  $\mu(G)$ .

### 2.2.1 Lastnosti sosedske dimenzije

**Trditev 2.6.** Naj bo  $G$  povezan graf. Potem velja:

1.  $\mu(G) \geq \beta(G)$ .
2.  $\text{diam}(G) = 2 \implies \mu(G) = \beta(G)$ .
3.  $\mu(G) = \mu(\overline{G})$ .

$$4. \mu(G) = 1 \Leftrightarrow G \in \{P_1, P_2, P_3, \overline{P_2}, \overline{P_3}\}.$$

$$5. \mu(G) = n - 1 \Leftrightarrow G \in \{K_n, \overline{K_n}\}.$$

*Dokaz.* TODO □

## 2.3 Lastnosti metrične dimenzije

Oglejmo si nekaj osnovnih ugotovitev o metrični dimenziji. Iz primera ?? lahko hitro razberemo, da metrična baza ni nujno enolično določena. Za  $W$  bi lahko vzeli tudi vozlišče  $v_n$  in prišli do enakega rezultata. Poiščimo sedaj najbolj splošno omejitev za metrično dimenzijo.

**Trditev 2.7.** *Za povezan graf  $G$ , je  $V(G)$  rešljiva množica. Še več, za poljubno vozlišče  $v_i \in V(G)$  je  $W_i = V(G) \setminus \{v_i\}$  rešljiva množica.*

*Dokaz.* Naj bo  $G$  povezan in  $|V(G)| = n$ . Označimo vozlišča z  $v_1, \dots, v_n$ . Upoštevajoč trditev ?? hitro opazimo, da velja  $\forall j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  : vozlišče  $v_j$  ima natanko  $j$ -to komponento metrične predstavitve glede na  $W_i$  enako 0. Vozlišče  $v_i$  pa je edino, ki ima vse komponente različne od 0. Sledi  $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \Rightarrow r_{W_i}(v) \neq r_{W_i}(u)$ , torej je  $W_i$  rešljiva množica. Če rešljivi množici dodamo še kako vozlišče, je tudi slednja očitno rešljiva. Torej je tudi  $V(G) = W_i \cup \{v_i\}$  rešljiva. □

Metrična baza povezanega grafa torej vselej obstaja.

**Posledica 2.8.** *Za povezan graf  $G$  velja*

$$1 \leq \beta(G) \leq |V(G)| - 1.$$

**Opomba 2.9.** Če za neko množico  $S \subseteq V(G)$  preverjamo, če je rešljiva, je dovolj preveriti metrične predstavitve vozlišč  $v \in V(G) \setminus S$ . Vozlišča iz  $S$  bodo imela natanko eno komponento vektorja enako nič.

**Lema 2.10.** *Naj bo  $G$  povezan graf in  $|V(G)| = n$ , ter naj bodo  $u_1, \dots, u_k \in V(G)$  vozlišča stopnje  $n - 1$ . Potem metrična baza v  $G$  vsebuje vsaj  $k - 1$  vozlišč stopnje  $n - 1$ .*

*Dokaz.* Denimo, da je  $R$  metrična baza povezanega grafa  $G$ , ki vsebuje manj kot  $k - 1$  vozlišč stopnje  $n - 1$ . Potem imajo vozlišča stopnje  $n - 1$ , ki niso vsebovana v  $R$ , metrično predstavitev glede na  $R$  enako  $(1, 1, \dots, 1)$  in sledi, da  $R$  ne more biti metrična baza. □

**Lema 2.11.** *Naj bo  $G$  povezan graf in  $|V(G)| = n$ , ter naj bo  $u \in V(G)$  vozlišče stopnje  $n - 1$ . Potem obstaja metrična baza v  $G$ , ki ne vsebuje vozlišča  $u$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n$ ,  $u$  vozlišče stopnje  $n - 1$  in  $R$  metrična baza.

1. Če  $u \notin R$  smo končali.

2. Denimo, da  $u \in R$ . Želimo si  $u$  zamenjati z nekim drugim vozliščem grafa. Označimo  $R = \{v_1, v_2, \dots, v_k, u\}$  in  $V(G) = R \cup \{v_{k+1}, v_{k+3}, \dots, v_n\}$ . Velja:

$$\begin{aligned} r_R(v_{k+1}) &= (d(v_{k+1}, v_1), d(v_{k+1}, v_2), \dots, 1) \\ r_R(v_{k+2}) &= (d(v_{k+2}, v_1), d(v_{k+2}, v_2), \dots, 1) \\ &\dots \\ r_R(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2), \dots, 1). \end{aligned}$$

Vidimo, da se morajo metrične predstavitve vozlišč, ki niso vsebovana v  $R$ , razlikovati v prvih  $k$  komponentah.

Denimo, da obstaja vozlišče, ki ima metrično predstavitev enako  $(1, 1, \dots, 1)$ . Po definiciji je tako največ eno in BŠS naj bo to  $v_{k+1}$ . Vzemimo  $R' = (R \setminus \{u\}) \cup \{v_{k+1}\}$ . Metrične predstavitve vozlišč  $v_{k+2}, \dots, v_n$  glede na  $R'$  se še vedno razlikujejo v prvih  $k$  komponentah,  $u$  pa je edino vozlišče z metrično predstavitvijo  $(1, 1, \dots, 1)$ .  $R'$  je torej metrična baza.

Če nobeno vozlišče nima metrične predstavitve glede na  $R$  enako  $(1, 1, \dots, 1)$ , lahko  $u$  zamenjamo s poljubnim drugim vozliščem, ki še ni vsebovano v  $R$ .

□

V splošnem je iskanje metrične dimenzije grafa NP-poln problem. Za nekatere vrste grafov pa lahko najdemo eksplisitne formule za njen izračun.

**Trditev 2.12.** *Naj bo  $G$  povezan graf in  $|V(G)| = n \geq 2$ . Potem velja:*

1.  $G = K_n \Leftrightarrow \beta(G) = n - 1$ .
2.  $G = P_n \Leftrightarrow \beta(G) = 1$ .

*Dokaz.* Implikacijo v desno stran za obe točki smo že pokazali v ?? in ??.

1.  $\Leftarrow$  Recimo, da imamo povezan graf  $G$  na  $n$  vozliščih z  $\beta(G) = n - 1$ . Označimo metrično bazo z  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  in  $V(G) = W \cup \{v_n\}$ .

Če odstranimo poljubno vozlišče  $v_i$  iz množice  $W$ , se metrične predstavitve vozlišč ne razlikujejo več - če bi se, potem  $W$  ni bila metrična baza. Vemo, da se metrična predstavitev vozlišča, ki je vsebovano v  $W' = W \setminus \{v_i\}$  še vedno razlikuje od vseh ostalih. Sledi  $r_{W'}(v_i) = r_{W'}(v_n)$ . Ker smo vzeli poljubno vozlišče iz množice  $W$ , torej velja

$$r_{W'}(v_1) = r_{W'}(v_2) = \dots = r_{W'}(v_n).$$

Označimo  $\deg(v_n) = k, 1 \leq k \leq n - 1$ . Metrične predstavitve vseh vozlišč

glede na  $W$  so potem sledeče:

$$\begin{aligned}
r_W(v_1) &= (0, 1, \dots, 1, d(v_n, v_{k+1}), \dots, d(v_n, v_{n-1})) \\
r_W(v_2) &= (1, 0, \dots, 1, d(v_n, v_{k+1}), \dots, d(v_n, v_{n-1})) \\
&\dots \\
r_W(v_k) &= (1, 1, \dots, 0, d(v_n, v_{k+1}), \dots, d(v_n, v_{n-1})) \\
r_W(v_{k+1}) &= (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, d(v_n, v_{n-1})) \\
&\dots \\
r_W(v_{n-1}) &= (1, 1, \dots, 1, d(v_n, v_{k+1}), \dots, 0) \\
r_W(v_n) &= (1, 1, \dots, 1, d(v_n, v_{k+1}), \dots, d(v_n, v_{n-1})).
\end{aligned}$$

Ker je  $G$  povezan, mora obstajati vsaj eno vozlišče  $v_i$ , da velja  $d(v_i, v_{k+1}) = 1$ . Potem sledi

$$d(v_1, v_{k+1}) = d(v_2, v_{k+1}) = \dots d(v_k, v_{k+1}) = d(v_{k+2}, v_{k+1}) = \dots d(v_n, v_{k+1}) = 1.$$

Podobno velja za  $v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, v_{n-1}$ . Sledi, da so vsa vozlišča stopnje  $n - 1$  in  $G = K_n$ .

2.  $\Leftarrow$  Recimo, da imamo povezan graf  $G$  na  $n$  vozliščih z  $\beta(G) = 1$ . Sledi, da obstaja neka rešljiva baza  $W = \{w\}$ . Označimo  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w\}$ . Sedaj mora veljati, da so števila

$$d(v_1, w), d(v_2, w), \dots, d(v_{n-1}, w), d(w, w)$$

paroma različna. Vemo  $d(w, w) = 0$ . Ker je  $G$  povezan, mora obstajati vsaj eno vozlišče, ki je sosednje z  $w$ . BSŠ naj bo  $v_{n-1} \sim w$ . Torej je  $d(v_{n-1}, w) = 1$  in sledi, da nobeno drugo vozlišče ni sosednje z  $w$ . Zopet zaradi povezanosti grafa obstaja vozlišče sosednje z  $v_{n-1}$ , ki je različno od  $w$ . Recimo, da je to  $v_{n-2}$ , za katerega sedaj velja  $d(v_{n-2}, w) = 2$ . Spet je to edino takšno vozlišče. Nadaljujemo podobno, dokler ne pridemo do  $v_1$ . Dobimo graf  $P_n$ .

□

**Trditev 2.13.** *Naj bo  $n \geq 4$ , potem velja:*

1.  $n \neq 6 \Rightarrow \beta(C_n + K_1) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ .
2.  $n \neq 6 \Rightarrow \beta(P_n + K_1) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ .

*Dokaz.* TODO

□

|

**Opomba 2.14.** Za manjše  $n$  velja:

- $C_3 + K_1 = K_4 \Rightarrow \beta(C_3 + K_1) = 3$ .
- $P_2 + K_1 = C_3 \Rightarrow \beta(P_2 + K_1) = 2$ .
- $\beta(P_3 + K_1) = 2$ .

### 2.3.1 Metrična dimenzija in premer grafa

Ni presenetljivo, da lahko najdemo povezavo med metrično dimenzijo in premerom grafa.

**Trditev 2.15.** *Naj bo  $G$  povezan graf in  $|V(G)| = n$ . Potem velja naslednja povezava:*

$$n \leq (\text{diam}(G))^{\beta(G)} + \beta(G).$$

*Dokaz.* Naj bo  $R$  rešljiva baza grafa  $G$ , torej  $|R| = \beta(G)$ . Zanima nas, največ koliko vozlišč ima lahko tak graf. Vozlišča iz množice  $R$  bodo imela natanko eno komponento metrične predstavitve enako nič, tako se bodo te razlikovale med sabo in od vseh ostalih. Če vzamemo vozlišče  $v \notin R$ , pa velja sledeče:

$$\forall r_i \in R : 1 \leq d(v, r_i) \leq \text{diam}(G).$$

Vseh možnih različnih metričnih predstavitev za vozlišča izven rešljive množice  $R$  je tako  $(\text{diam}(G))^{\beta(G)}$  in lahko zapišemo:

$$n \leq (\text{diam}(G))^{\beta(G)} + \beta(G).$$

□

V resnici lahko red grafa z dano metrično dimenzijo in premerom še bolj omejimo.

**Trditev 2.16.** *Naj bo  $G$  povezan graf in  $|V(G)| = n$ . Označimo  $\delta = \text{diam}(G)$  in  $\beta = \beta(G)$ . Potem velja*

$$n \leq \left( \left\lfloor \frac{2\delta}{3} \right\rfloor + 1 \right)^{\beta} + \beta \sum_{i=1}^{\lceil \delta/3 \rceil} (2i-1)^{\beta-1}.$$

*Dokaz.* TODO

□

Ta zgornja meja postane še bolj natančna za posamezne družine grafov, vendar v tem delu tega ne bomo obravnavali tako podrobno.

### 2.3.2 Dvojčki in metrična dimenzija

Vpeljimo ekvivalenčno relacijo na vozliščih:

$$v \equiv u \Leftrightarrow N(v) \setminus \{u\} = N(u) \setminus \{v\}. \quad (2.2)$$

Če sta vozlišči v tej ekvivalenčni relaciji, pravimo, da sta dvojčka. Ekvivalenčni razred vozlišča  $v$  označimo z  $v^*$ , množico vseh ekvivalenčnih razredov s  $\tau(G)$ , število vseh razredov pa naj bo označeno z  $\iota(G) = |\tau(G)|$ .

**Lema 2.17.** *Naj bosta  $u, v \in v(G)$  dvojčka. Potem je*

$$\forall w \in V(G) \setminus \{u, v\} : d(u, w) = d(v, w).$$

*Dokaz.* Naj bosta  $u$  in  $v$  dvojčka v grafu  $G$ . Označimo  $V(G) = \{u, v, w_1, \dots, w_k\}$  in  $S = N(v) \setminus \{u\} = N(u) \setminus \{v\}$ . Izberimo vozlišče  $w_i \in V(G) \setminus \{u, v\}$ .

$$1. w_i \in S \Rightarrow d(u, w_i) = d(v, w_i) = 1.$$

$$2. w_i \notin S \Rightarrow d(u, w_i) = m \geq 2.$$

Denimo  $m = 2$ . Potem obstaja  $w_j \in S$ , da je  $w_j \sim w_i$  in sledi  $d(v, w_i) = 2$ .

Naj bo sedaj  $m > 2$ . Obstaja vozlišče  $w_j$ , sosednje od  $w_i$ , za katerega velja  $d(u, w_j) = m - 1$ . Potem je po induksijski predpostavki tudi  $d(v, w_j) = m - 1$  in sledi  $d(v, w_i) = m - 1 + 1 = m$ .

□

Iz tega sledi, da mora vsaka rešljiva množica vsebovati vsaj enega od dvojčkov. Zapišemo lahko naslednjo trditev:

**Trditev 2.18.** *Za povezan graf  $G$  velja*

$$\beta(G) \geq \sum_{v^* \in \tau(G)} (|v^*| - 1).$$

*Dokaz.* Vzemimo ekvivačenčni razred  $v^* \in \tau(G)$ . Po ?? vidimo, da mora metrična baza vsebovati vse razen največ enega elementa  $v^*$ . V nasprotnem primeru bi imeli tisti, ki niso vsebovani v rešljivi bazi med seboj enake metrične predstavitve. To velja za vse ekvivalenčne razrede, neenačba sledi. □

### 2.3.3 Metrična dimenzija in sosedska dimenzija

**Trditev 2.19.** *Za poljuben graf  $G$  velja*

$$\beta(G + K_1) - 1 \leq \mu(G) \leq \beta(G + K_1).$$

*Velja še več,  $\mu(G) = \beta(G + K_1) \Leftrightarrow$  obstaja sosedska baza  $S$  grafa  $G$ , da nobeno vozlišče ni sosednje vsem vozliščem iz  $S$ .*

*Dokaz.* TODO □

**Trditev 2.20.** *Če je  $n \geq 4$ , velja  $\mu(C_n) = \mu(P_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ .*

*Dokaz.* Opazimo, da velja  $\text{diam}(P_n + K_1) = \text{diam}(C_n + K_1) = 2$ . Vozlišča so namreč sosednja, ali pa najdemo sprehod dolžine dva preko vozlišča, ki pripada  $K_1$ . Po ?? velja

$$\beta(P_n + K_1) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$$

Če se spomnimo še druge točke ?? sledi

$$\mu(P_n + K_1) = \beta(P_n + K_1) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor.$$

Spojitev dodatnega vozlišča s potjo ne vpliva na sosednost vozlišč v grafu  $P_n$ , zato velja

$$\mu(P_n) \leq \mu(P_n + K_1) \leq \mu(P_n) + K_1.$$



Na novo spojeno vozlišče, je sosednje z vsemi vozlišči v poti. Enakost z zgornjo mejo torej velja natanko tedaj, ko ima eno od vozlišč v poti sosedsko predstavitev enako vektorju samih enic, sicer je  $\mu(P_n + K_1) = \beta(P_n + K_1)$ .

V poti je vsako vozlišče sosedno kvečjemu dvem ostalim, torej imamo lahko vektor samih enic samo, če je  $\mu(P_n) = 2$  - manj ni, saj je  $n \geq 4$ , glej ??, točko 4. Denimo, da je  $s_W(u_i) = (1, 1)$ . To pomeni, da je  $W = \{u_{i-1}, u_{i+1}\}$ . TODO  $\square$

**Trditev 2.21.** Naj bo  $K_{m_1, \dots, m_t}$   $t$ -delni polni graf, v katerem ima  $r$  delov vsaj 2 vozlišči, ter naj velja  $\sum_{i=1}^t m_i = m$ . Potem je

$$\mu(K_{m_1, \dots, m_t}) = \beta(K_{m_1, \dots, m_t}) = \begin{cases} m - r - 1; & r \neq t \\ m - r; & r = t \end{cases}.$$

Dokaz. TODO  $\square$

### 3 Leksikografski produkt grafov

**Definicija 3.1.** Leksikografski produkt  $G[H]$  grafov  $G$  in  $H$  je definiran na množici vozlišč  $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ . Dve različni vozlišči  $(u, v)$  in  $(x, y)$  sta sosedni, kadar velja

- $ux \in E(G)$  ali
- $u = x$  in  $vy \in E(H)$ .

#### 3.1 Primer

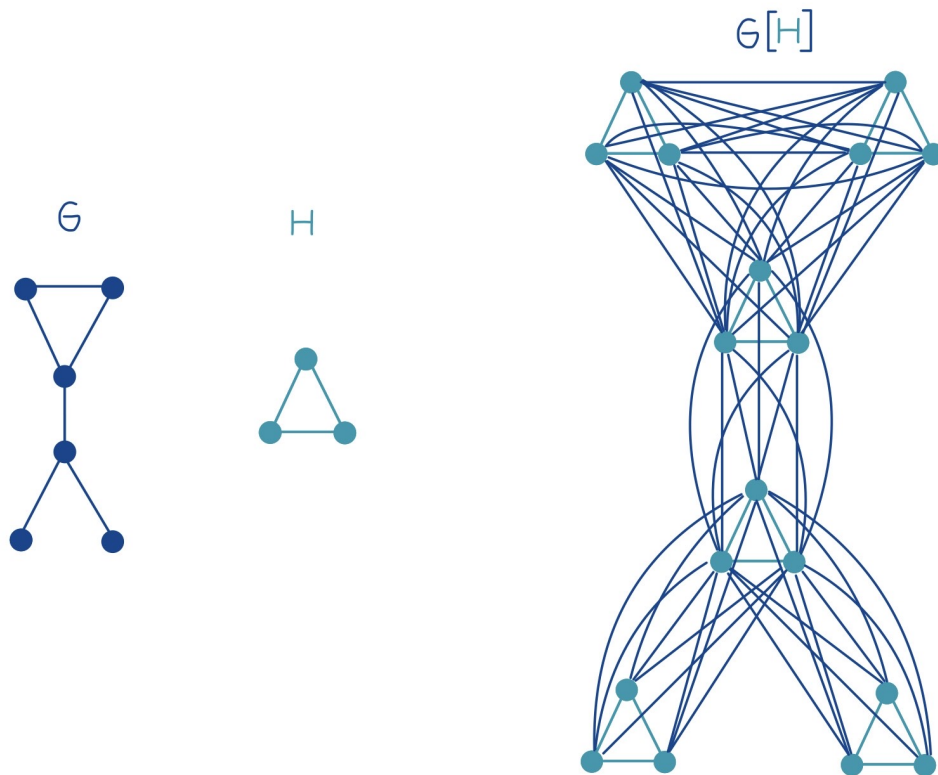
Za lažjo predstavo si lahko ogledamo sliko ??, ki prikazuje leksikografski produkt dveh naključnih povezanih grafov.

#### 3.2 Lastnosti

Nekaj osnovnih lastnosti leksikografskega produkta grafov:

- RED:  $|V(G)| = n$  in  $|V(H)| = m \Rightarrow |V(G[H])| = n \cdot m$ .
- POVEZANOST:  $G[H]$  je povezan  $\Leftrightarrow G$  povezan.
- NEKOMUTATIVNOST: v splošnem velja  $G[H] \neq H[G]$ .
- DISTRIBUTIVNOST:  $(G_1 + G_2)[H] = G_1[H] + G_2[H]$ ,
- ENAKOST KOMPLEMENTOV:  $\overline{G[H]} = \overline{G}[\overline{H}]$ .
- PREMER:

$$\text{diam}(G[H]) = \begin{cases} \text{diam}(G); & |V(G)| \geq 2 \\ \text{diam}(H); & G = K_1 \end{cases}$$



Slika 4: Leksikografski produkt povezanih grafov  $G$  in  $H$ .

Poglejmo si, kako izgleda razdalja med vozliščema v leksikografskem produktu grafov. Opazujemo leksikografski produkt povezanega grafa  $G$  reda  $n$ , z množico vozlišč  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  in grafa  $H$  reda  $m$ , z množico vozlišč  $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Vpeljimo oznako  $v_{ij} := (v_i, u_j) \in V(G[H])$ . Sedaj lahko zapišemo

$$d_{G[H]}(v_{ij}, v_{rs}) = \begin{cases} d_G(v_i, v_r); & v_i \neq v_r \\ a_H(u_j, u_s); & \text{sicer} \end{cases} \quad (3.1)$$

Tu je preslikava  $a$  definirana v (??).

## 4 Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

### 4.1 Metrična dimenzija leksikografskega produkta glede na metrično dimenzijo grafa $H$

V tem razdelku obravnavamo leksikografski produkt  $G[H]$ , kjer je  $G$  povezan graf in  $H$  poljuben graf. Naj bosta  $a \in V(G)$  in  $b \in V(H)$  poljubni vozlišči. Za potrebe tega podpoglavlja vpeljimo naslednje oznake:

- $H(a) = \{(a, v) \mid v \in V(H)\}$ .
- $G(b) = \{(v, b) \mid v \in V(G)\}$ .
- Če so  $H_1, H_2, \dots, H_k$  komponente grafa  $H$ , označimo  $H_i(a) = \{(a, v) \mid v \in V(H_i)\}$ .

Vzemimo sosednji vozlišči  $a, b \in V(G)$ . Vemo, da je vsako vozlišče iz  $H(b)$  sosednje vsakemu iz  $H_i(a)$ . Hitro lahko preverimo, da je inducirani podgraf grafa  $G[H]$ , kjer vzamemo eno vozlišče iz množice  $H(b)$  in vsa vozlišča iz  $H_i(a)$ , izomorfen grafu  $H_i + K_1$ . V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko z rešljivo bazo tega združenega grafa omejimo rešljivo bazo  $G[H]$ .

TODO - leme

#### 4.1.1 H je nepovezan graf

**Izrek 4.1.** *Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n \geq 2$  in  $H$  poljuben graf reda  $m \geq 2$ , s  $k \geq 1$  komponentami  $H_1, H_2, \dots, H_k$ . Potem velja:*

$$n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p) \right) - 1 \right) \leq \beta(G[H]) \leq n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p + K_1) \right) + k - 1 \right) + (n - 2).$$

V dokazu naslednjega izreka bomo konstruirali grafe, katerih metrična dimenzija je enaka spodnji ali zgornji meji iz izreka ?? ter dvema vmesnima vrednostima.

**Izrek 4.2.** *Obstajata taka grafa  $G$  in  $H$ , da je  $G$  povezan graf reda  $n \geq 2$  in  $H$  poljuben graf reda  $m \geq 2$ , s  $k \geq 1$  komponentami  $H_1, H_2, \dots, H_k$ , da velja:*

1.  $\beta(G[H]) = n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p) \right) - 1 \right).$
2.  $\beta(G[H]) = n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p + K_1) \right) + k - 1 \right) + (n - 2).$
3.  $\beta(G[H]) = n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p + K_1) \right) + k - 1 \right).$
4.  $\beta(G[H]) = n \cdot \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p + K_1) \right).$

*Dokaz.* 1. Naj bo  $G = P_n$ ,  $n \geq 4$  in  $H = N_k$ ,  $k \geq 2$ . Zaradi izreka ?? je dovolj pokazati  $\beta(G[H]) \leq n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p) \right) - 1 \right) = n \cdot (k - 1)$ . Označimo  $V(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , kjer so  $\forall 1 \leq i < n : p_i p_{i+1} \in E(G)$ , in  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . Definirajmo množico  $W = V(G[H]) \setminus G(v_k)$ . Velja  $|W| = n \cdot (k - 1)$ . Pokažimo, da je  $W$  rešljiva množica. Opomba ?? nam pove, da je dovolj preveriti vozlišča iz množice  $G(v_k) = \{(p_1, v_k), (p_2, v_k), \dots, (p_n, v_k)\}$ . Če se spomnimo formule (??), vidimo, da velja:

- $2 \leq d((p_i, v_k), (p_{j+1}, v_1)) \neq d((p_j, v_k), (p_{j+1}, v_1)) = 1$ , za  $1 \leq i \leq j < n$ .
- $2 \leq d((p_n, v_k), (p_{i-1}, v_1)) \neq d((p_i, v_k), (p_{i-1}, v_1)) = 1$ , za  $2 \leq i < n$ .
- $1 = d((p_1, v_k), (p_2, v_1)) \neq d((p_n, v_k), (p_2, v_1)) \geq 2$ .

Sledi, da so metrične predstavitve vozlišč iz  $G(v_k)$  paroma različne in je  $W$  rešljiva množica.

2. Naj bo  $G = S_{n-1}$  zvezda na  $n$  vozliščih,  $n \geq 4$ , in  $H$  graf s  $k \geq 2$  komponentami  $H_1, H_2, \dots, H_k$ , kjer je  $H_i = P_8$ . Velja  $\beta(P_8 + K_1) = \left\lfloor \frac{2 \cdot 8 + 2}{5} \right\rfloor = 3$ . Zato je, podobno kot v prvi točki, dovolj pokazati

$$\beta(G[H]) \geq n \cdot \left( \left( \sum_{p=1}^k \beta(H_p + K_1) \right) + k - 1 \right) + (n - 2) = 4kn - 2.$$

Naj bo  $B$  metrična baza  $P_8 + K_1$ , potem obstaja  $v \in V(P_8)$ , da je  $r_B(v) = (2, 2, 2)$ .

Recimo, da je  $\beta(G[H]) < 4kn - 2$ , in naj bo  $W$  metrična baza  $G[H]$ .

TODO

3. TODO

4. TODO

□

#### 4.1.2 H je povezan graf

**Izrek 4.3.** Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n \geq 2$  in  $H$  povezan graf reda  $m \geq 2$ . Potem velja:

$$n \cdot \beta(H) \leq \beta(G[H]) \leq n \cdot \beta(H_p + K_1) + (n - 2).$$

**Izrek 4.4.** Obstajata taka grafa povezana  $G$  in  $H$ , reda vsaj 2, da velja:

1.  $\beta(G[H]) = n \cdot \beta(H)$
2.  $\beta(G[H]) = n \cdot \beta(H_p + K_1) + (n - 2)$
3.  $\beta(G[H]) = n \cdot \beta(H_p + K_1)$

Dokaz. TODO

□

Na tej točki se lahko vprašamo, če za vsako vrednost  $c$  znotraj zgornjih mej lahko najdemo grafa  $G$  in  $H$ , ki bosta zadoščala  $\beta(G[H]) = c$ .

## 4.2 Metrična dimenzija, sosedska dimenzija in dvojčki

V tem podpoglavju bomo obravnavali metrično dimenzijo leksikografskega produkta  $G[H]$  na podlagi reda grafa  $G$  in sosedske dimenzije grafa  $H$ .

**Lema 4.5.** Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n$  in  $H$  poljuben graf. Potem velja  $\beta(G[H]) \geq n \cdot \mu(H)$ .

Dokaz. TODO

□

**Trditev 4.6.** Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n$  in  $H$  poljuben graf. Če obstajata dve sosedski bazi grafa  $H$ ,  $S_1$  in  $S_2$ , da nobeno vozlišče nima sosedske predstavitev z množico  $S_1$  enako  $(1, 1, \dots, 1)$  in nobeno vozlišče nima sosedske predstavitev z množico  $S_2$  enako  $(2, 2, \dots, 2)$ , potem velja

$$\beta(G[H]) = \beta(G[\overline{H}]) = n \cdot \mu(H).$$

*Dokaz.* TODO □

**Trditev 4.7.** Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n$  in  $H$  poljuben graf. Če za vsako sosedsko bazo  $S$  grafa  $H$  obstajata vozlišči s sosedskima predstavitevama glede na  $S$  enakima  $(1, 1, \dots, 1)$  in  $(2, 2, \dots, 2)$ , potem je

$$\beta(G[H]) = \beta(G[\overline{H}]) = n \cdot (\mu(H) + 1) - \iota(G).$$

*Dokaz.* TODO □

**Trditev 4.8.** Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n$  in  $H$  poljuben graf. Naj ima  $H$  sledeči lastnosti:

1. za vsako sosedsko bazo obstaja vozlišče s sosedsko predstavitevijo  $(1, 1, \dots, 1)$ ,
2. obstaja sosedska baza  $S$ , da nobeno vozlišče nima sosedske predstavitev enake  $(2, 2, \dots, 2)$ .

Potem velja

$$\beta(G[H]) = n \cdot \mu(H) + a(G) - \iota_K(G).$$

*Dokaz.* TODO □

**Trditev 4.9.** Naj bo  $G$  povezan graf reda  $n$  in  $H$  poljuben graf. Naj ima  $H$  sledeči lastnosti:

1. za vsako sosedsko bazo obstaja vozlišče s sosedsko predstavitevijo  $(2, 2, \dots, 2)$ ,
2. obstaja sosedska baza  $S$ , da nobeno vozlišče nima sosedske predstavitev enake  $(1, 1, \dots, 1)$ .

Potem velja

$$\beta(G[H]) = n \cdot \mu(H) + b(G) - \iota_N(G).$$

*Dokaz.* TODO □

**Izrek 4.10.** Če je  $G$  povezan graf reda  $n$ , ki nima dvojčkov, velja  $\beta(G[H]) = n \cdot \mu(H)$ .

*Dokaz.* Če  $G$  nima dvojčkov, je  $\iota(G) = n$ ,  $\iota_K(G) = a(G) = 0$  in  $\iota_N(G) = b(G) = 0$ . Graf  $H$  gotovo zadostuje pogojem v eni od zgornjih treh trditev, zato sledi  $\beta(G[H]) = n \cdot \mu(H)$ . □

**Izrek 4.11.** Naj bo  $G = P_n$ , za  $n \geq 4$  ali  $G = C_n$  za  $n \geq 5$ , ter naj bo  $m \geq 3$ . Tedaj velja  $\beta(G[P_m]) = \beta(G[C_m]) = \beta(G[\overline{P}_m]) = \beta(G[\overline{C}_m]) = n \cdot \left\lfloor \frac{2 \cdot m + 2}{5} \right\rfloor$ .

Velja še več,

$$\beta(G[K_{m_1, \dots, m_t}]) = \beta(G[\overline{K}_{m_1, \dots, m_t}]) = \begin{cases} n \cdot (m - r - 1); & r \neq t, \\ n \cdot (m - r); & r = t, \end{cases}$$

kjer so  $m_1, \dots, m_r \geq 2$ ,  $m_{r+1} = \dots = m_t = 1$  in  $\sum_{i=1}^t m_i = m$ .

*Dokaz.* TODO

□

**Izrek 4.12.** *Naj bodo  $n, m, m_1, \dots, m_t$  števila, za katera velja:*

- $n \geq 2$ ,
- $m_1, \dots, m_r \geq 2$ ,
- $m_{r+1} = \dots = m_t = 1$ ,
- $\sum_{i=1}^t m_i = m$ .

*Potem velja*

$$\beta(K_n[K_{m_1, \dots, m_t}]) = \begin{cases} n \cdot (m - r) - 1; & r \neq t, \\ n \cdot (m - r); & r = t, \end{cases}$$

.

*Dokaz.* TODO

□

## 5 Zaključek

### Slovar strokovnih izrazov