UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Manca Murn

METRIČNA DIMENZIJA LEKSIKOGRAFSKEGA PRODUKTA GRAFOV

Delo diplomskega seminarja

Mentor: Sandi Klavžar

Ljubljana, 2023

Kazalo

Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

Povzetek

...

The metric dimension of the lexicographic product of graphs

Abstract

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Uvod

2 Metrična dimenzija grafa

2.1 Definicija

Metrična dimenzija grafa je najmanjše število vozlišč grafa, ki jih potrebujemo, da vsa vozlišča v grafu razlikujemo med sabo zgolj s pomočjo razdalj do izbranih vozlišč. V matematičnem jeziku to povemo takole:

Definicija 2.1. Naj bo G povezan graf in $W = \{w_1, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ neprazna podmnožica vozlišč. Vektor $r_W(v) = (d(v, w_1), ..., d(v, w_k))$ imenujemo metrična predstavitev vozlišča $v \in V(G)$ s podmnožico W.

Definicija 2.2. Neprazna podmnožica $R \subset V(G)$ je rešljiva, če $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_R(v) \neq r_R(u)$.

Definicija 2.3. Najmanjša rešljiva množica grafa G se imenuje rešljiva baza. Njeno velikost imenujemo metrična dimenzija in jo označimo z $\beta(G)$.

Poglejmo si nekaj lahkih osnovnih primerov.

Primer 2.4. Graf poti dolžine n označujmo z P_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1 \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa P_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= d(v_1, v_1) = 0 \\ r_W(v_2) &= d(v_2, v_1) = 1 \\ &\cdots \\ r_W(v_n) &= d(v_n, v_1) = n - 1. \end{aligned}$$

Vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. Sledi, da je W rešljiva množica. Ker je njena velikost enaka 1 in je to najmanjša možna neprazna podmnožica vozlišč, je torej metrična dimenzija grafa poti poljubne dolžine enaka $\beta(P_n) = 1$. $\diamondsuit$

Primer 2.5. Cikel dolžine n označujmo z C_n. Vozlišča označimo z $v_1, v_2, ..., v_n$, kot je prikazano na spodnji sliki. Izberimo podmnožico $W = v_1, v_2 \subseteq V(G)$. Metrične predstavitve vozlišč grafa C_n, glede na izbrano podmnožico vozlišč, so potem sledeče:

$$\begin{aligned} r_W(v_1) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2)) = (0, 1) \\ r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2)) = (1, 0) \\ r_W(v_3) &= (d(v_3, v_1), d(v_3, v_2)) = (2, 1) \\ r_W(v_4) &= (d(v_4, v_1), d(v_4, v_2)) = (3, 2) \\ &\cdots \\ r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2)) = (2, 3) \\ r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2)) = (1, 2) \end{aligned}$$

Zopet vidimo, da so metrične predstavitve vseh vozlišč med seboj različne. W je torej rešljiva množica, njena velikost pa je enaka 2. Metrična dimenzija poljubno velikega cikla je enaka $\beta(C_n) = 2$. $\diamondsuit$

2.2 Lastnosti

Nekaj osnovnih ugotovitev o rešljivih množicah grafa lahko razberemo iz zgornjih primerov.

Trditev 2.6. *Za povezan graf G, je $V(G)$ rešljiva množica.*

Dokaz. Predpostavimo, da ima graf G n vozlišč. Označimo vozlišča grafa G z $v_1, ..., v_n$. Za posamezno vozlišče bo metrična predstavitev sledeča:

$$r_{V(G)}(v_k) = (d(v_k, v_1), ..., d(v_k, v_k), ..., d(v_k, v_n)) = (d(v_k, v_1), ..., 0, ..., d(v_k, v_n)).$$

Torej za vsako vozlišče v_k bo k-ta komponenta metrične predstavitve enaka 0. To je tudi edina komponenta v vektorju, ki bo enaka 0, saj za razdaljo med vozlišči velja

$$d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w.$$

Sledi $\forall u, v \in V(G) : u \neq v \implies r_{V(G)}(v) \neq r_{V(G)}(u)$, torej je $V(G)$ rešljiva množica. □

Trditev 2.7. *Rešljiva baza grafa G ni enolično določena.*

Dokaz. To hitro vidimo na primeru Za W bi lahko vezli tudi vozlišče v_2 in prišli do enakega rezultata. □

V defnicijah 2.1. in 2.2. smo prepostavili, da imamo neprazno podmnožico vozlišč. Če bi vzeli prazno množico, bi bila definicija očitno nesmiselna. Iz trditve 2.6. lahko potem sklepamo, da metrična dimenzija za graf vselej obstaja in lahko zapišemo naslednjo posledico:

Posledica 2.8. *Za povezan graf G velja*

$$1 \leq \beta(G) \leq |V(G)| - 1.$$

Dokaz. Iz definicije metrične dimenzije sledi $1 \leq \beta(G)$. Iz trditve 2.6. pa sledi $\beta(G) \leq |V(G)|$. Predpostavimo $|V(G)| = n$ in $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$. Vzemimo sedaj podmnožico $W = \{v_1, ..., v_{n-1}\}$. Metrične predstavitve vozlišč glede na W so sledeče:

$$\begin{aligned}
r_W(v_1) &= (0, d(v_1, v_2), ..., d(v_1, v_k), ..., d(v_1, v_{n-1})) \\
r_W(v_2) &= (d(v_2, v_1), 0, ..., d(v_2, v_k), ..., d(v_2, v_{n-1})) \\
&\dots \\
r_W(v_k) &= (d(v_k, v_1), d(v_k, v_2), ..., 0, ..., d(v_k, v_{n-1})) \\
&\dots \\
r_W(v_{n-1}) &= (d(v_{n-1}, v_1), d(v_{n-1}, v_2), ..., d(v_{n-1}, v_k), ..., 0) \\
r_W(v_n) &= (d(v_n, v_1), d(v_n, v_2), ..., d(v_n, v_k), ..., d(v_n, v_{n-1}))
\end{aligned}$$

Vidimo, da so vse metrične predstavitve med seboj različne, torej je W rešljiva in $\beta(G) \leq n - 1$. □

2.2.1 Metrična dimenzija in premer grafa

Ni presenetljivo, da lahko najdemo povezavo med metrično dimenzijo in premerom grafa. Spomnimo se matematične definicije premera.

Definicija 2.9. Premer grafa G označujemo z $\text{diam}(G)$ in je enak dolžini najdaljše najkrajše poti v grafu. Torej

$$\text{diam}(G) = \max_{v,u \in V(G)} d(u,v).$$

Trditev 2.10. *Naj bo G povezan graf in $|V(G)| = n$. Potem velja naslednja povezava:*

$$n \leq (\text{diam}(G))^{\beta(G)} + \beta(G).$$

Dokaz. Naj bo R rešljiva baza grafa G, torej $|R| = \beta(G)$. Zanima nas, največ koliko vozlišč ima lahko tak graf G. Vozlišča iz množice R bodo imela natanko eno komponento metrične predstavitve enako nič, tako se bodo te razlikovale med sabo in vseh ostalih. Če pa vzamemo vozlišče $v \notin R$, pa velja sledeče:

$$\forall r_i \in R : 1 \leq d(v, r_i) \leq \text{diam}(G).$$

Vseh možnih različnih metričnih predstavitev za vozlišča izven rešljive množice R je tako $(\text{diam}(G))^{\beta(G)}$ in lahko zapišemo:

$$n \leq (\text{diam}(G))^{\beta(G)} + \beta(G).$$

□

V resnici lahko red grafa z dano metrično dimenzijo in premerom še bolj omejimo.

Trditev 2.11. *Naj bo G povezan graf in $|V(G)| = n$. Označimo $\delta = \text{diam}(G)$ in $\beta = \beta(G)$. Potem velja*

$$n \leq \left(\left\lfloor \frac{2\delta}{3} \right\rfloor + 1 \right)^{\beta} + \beta \sum_{i=1}^{\lceil D/3 \rceil} (2i-1)^{\beta-1}.$$

Dokaz. □

Ta zgornja meja postane še bolj natančna za posamezne družine grafov, vendar v tem delu tega ne bomo obravnavali tako podrobno.

2.2.2 Dvojčki in metrična dimenzija

Spomnimo se pojma soseščine vozlišča.

Definicija 2.12. Naj bo G povezan graf in $v \in V(G)$ vozlišče na grafu. Množico

$$N(v) = \{u \in V(G) \,|\, vu \in E(G)\}$$

imenujemo soseščina vozlišča v.

Sedaj vpeljimo ekvivalenčno relacijo na vozliščih

$$v \equiv u \Leftrightarrow N(v) \setminus \{u\} = N(u) \setminus \{v\}$$

Če sta vozlišči v tej ekvivalenčni relaciji, pravimo, da sta dvojčka. Ekvivalenčni razred vozlišča v označimo z v^*, množico vseh ekvivalenčnih razredov z $\tau(G)$, število vseh razredov pa naj bo označeno z $|\tau(G)| = \iota(G)$.

Lema 2.13. *Naj bosta $u, v \in v(G)$ dvojčka. Potem je*

$$\forall w \in V(G) \setminus \{u, v\} : d(u, w) = d(v, w).$$

Dokaz. □

Iz tega sledi, da mora vsaka rešljiva množica vsebovati vsaj enega od dvojčkov. Zapišemo lahko naslednjo trditev:

Trditev 2.14. *Za povezan graf G velja*

$$\beta(G) \geq \sum_{v^* \in \tau(G)} (|v^*| - 1).$$

Dokaz. □

3 Leksikografski produkt grafov

Definicija 3.1. Leksikografski produkt $G[H]$ grafov G in H je definiran na množici vozlišč $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$. Dve različni vozlišči (u, v) in (x, y) sta sosedni, kadar velja

- $ux \in E(G)$ ali
- $u = x$ in $vy \in E(H)$.

3.1 primer

3.2 lastnosti

Nekaj osnovnih lastnosti leksikografskega produkta grafov:

- POVEZANOST: Če je G povezan graf, potem je $G[H]$ povezan.
- NEKOMUTATIVNOST: v splošnem velja $G[H] \neq H[G]$.
- DISTRIBUTIVNOST: $(G_1 + G_2)[H] = G_1[H] + G_2[H]$, kjer $+$ označuje disjunktno unijo oz. vsoto grafov.
- ENAKOST KOMPLEMENTOV: $\overline{G[H]} = \overline{G}[\overline{H}]$.

Poglejmo si kako izgleda razdalja med vozliščema v leksikografskem prodkutu grafov. Označimo preslikavo $a : V(G) \times V(G) \to \mathbb{N}$;

$$a(v,w) = \begin{cases} 0; & v = w \\ 1; & v \sim w \\ 2; & v \not\sim w \end{cases}$$

Opazujemo Leksikografski produkt povezanega grafa G reda n, z množico vozlišč $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ in grafa H reda m, z množico vozlišč $V(H) = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$. Zaradi boljše preglednosti vpeljimo oznako $v_{ij} := (v_i, u_j) \in V(G[H])$. Sedaj lahko zapišemo

$$d_{G[H]}(v_{ij}, v_{rs}) = \begin{cases} d_G(v_i, v_r); & v_i \neq v_r \\ a_H(u_j, u_s); & \text{sicer} \end{cases}$$

4 Metrična dimenzija leksikografskega produkta grafov

Decembra leta 2010 sta v razmaku 17 dni nastala dva različna članka na temo metrične dimenzije leksikografskega produkta grafov. Avtorji so se lotili teme s povsem različnima pristopoma, v tem diplomskem seminarju pa bomo povzeli rezultate obeh in poskusili poiskati povezavo med njimi.

4.1 Metrična dimenzija in komponente

4.2 Metrična dimenzija, sosedska dimenzija in dvojčki

4.3 Povezave in skupni rezultati??

Slovar strokovnih izrazov