(Deljeno) kromatično in (deljeno) klično število grafa

Poročilo

Projekt pri predmetu Finančni praktikum

Avtorja:
Miha Pelhan, Manca Strgar

Ljubljana, november 2018

Kazalo

1 Kratek opis problema

V projektu sva se najprej ukvarjala z določanjem neodvisnih množic grafa z uporabo backtrackinga. Nato sva problema iskanja kromatičnega in kličnega števila predstavila v obliki celoštevilskih linearnih programov. Dobljena linearna programa sva potem uporabila tudi za računanje deljenega kromatičnega in deljenega kličnega števila. Vse linearne programe sva potem uporabila na nekaj primerih grafov.

Neodvisna množica v grafu $G = (V, E)$ je podmnožica $S \subseteq V$ vozlišč grafa G, pri čemer v grafu G ne obstaja nobena povezava med katerimakoli dvema vozliščema iz množice S. Velikost take množice je določena z številom vozlišč, ki jih vsebuje. Pravimo, da je neodvisna množica maksimalna, ko ji ne moremo dodati nobene točke, ne da bi s tem izgubili pogoj neodvisnosti, se pravi ji ne moremo dodati nobene točke grafa, ki bi bila nesosedna z vsemi točkami, ki so že v neodvisni množici. Velikosti največje neodvisne množice v grafu G pravimo tudi neodvisnostno število grafa G, označimo ga z $\alpha(G)$. Očitno je vsaka največja neodvisna množica poljubnega grafa G tudi maksimalna neodvisna množica, obratna trditev pa v splošnem ne drži.

Najprej za pomoč definirajmo k-barvanje grafa G kot dodelitev k barv vozliščem grafa G, tako da sta sosednji vozlišči obarvani različno.

Kromatično število $\chi(G)$ grafa G je definirano kot najmanjše naravno število k, za katero obstaja k-barvanje grafa G. Grafu s $\chi(G) = k$ rečemo k-kromatičen graf.

Klično število: Klika grafa $G = (V, E)$ je definirana kot podmnožica vozlišč $Q \subseteq V$ v neusmerjenem grafu, tako da sta poljubni vozlišči v kliki sosednji. Maksimalna klika je klika, ki je ne moremo razširiti z dodajanjem kateregakoli novega sosednjega vozlišča. Največja klika v grafu pa je takšna klika, da v grafu ne obstaja taka klika, ki bi imela več vozlišč. Klično število grafa G je število vozlišč v največji kliki grafa G, označimo ga z $\omega(G)$.

Preden si pogledamo naslednja dva pojma, pa še povejmo nekaj o deljenem barvanju grafa. Pri navadnem barvanju grafa, vsakemu vozlišču določimo eno barvo, tako da nobeni dve sosednji vozlišči nimata enake barve. Deljeno barvanje pa se razlikuje ravno v tem, da je vsakemu vozlišču dodeljena množica barv, kjer pa pogoj, da morata biti katerekoli dva sosednja vozlišča različnih barv, še vedno drži. Deljeno barvanje grafa lahko vidimo kot relaksacijo linearnega programa navadnega barvanja grafa in je tudi veliko bolj uporabno.

Deljeno kromatično število je invarianta kromatičnega števila, kjer ni več potrebno, da je rešitev celoštevilska. V resnici rešujemo enak problem, samo da tukaj dopustimo, da je lahko eno vozliše na primer obarvano z rdečo, zeleno in modro, vsaka barva pa zasede $\frac{1}{3}$ vozlišča. Če zelena barva ne zasede več kot $\frac{1}{3}$ katerega koli vozlišča, potem zelena prispeva k skupni vsoti $\frac{1}{3}$ in če imamo 5 barv, ki prispevajo k skupni vsoti $\frac{1}{3}$, je deljeno kromatično število enako $\frac{5}{3}$. Deljeno kromatično število danega grafa G definiramo tudi kot:

$$\chi_f(G) = \inf\{1^T \cdot y; y^T A \geq 1^T, y \geq 0\},$$

kjer je y racionalni stolpični vektor in A matrika z vrstičnim indeksom, ki predstavlja neodvisne množice grafa G in stolpičnim indeksom, ki predstavlja vozlišča grafa G. Se pravi $A_{(S,i)} = 1$, če vozlišče i pripada maksimalni neodvisni množici S, drugače pa $A_{(S,i)}$ zavzame vrednost 0. Kateremukoli y, ki zadostuje tem pogojem pravimo deljeno barvanje grafa G.

Deljeno klično število danega grafa G je ravno dual deljenega kromatičnega števila in ga definiramo kot:

$$\omega_f(G) = \sup\{1^T \cdot x; Ax \leq 1, x \geq 0\},$$

kjer je x definiran kot racionalen stolpični vektor in matrika A definirana enako kot pri deljenem kromatičnem številu. Kateremu koli vektorju x, ki zadostuje tem pogojem, pravimo deljena klika grafa G, številu $1^T \cdot x$ pa velikost klike.

Povezava med kličnim, deljenim kličnim, deljenim kromatičnim in kromatičnim številom je:

$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G),$$

kjer enakost $\omega_f(G) = \chi_f(G)$ prihaja iz dualnosti linearnega programa.

2 Postopek

2.1 Opis podatkov

Najina naloga temelji na eksperimentalnem določanju relacij med vsemi zgoraj opisanimi lastnostmi grafa. Zato sva si za zglede izbrala nekaj grafov, in sicer: Kneserjev, kubični in krožni graf. Ker pa je iskanje maksimalne neodvisne množice NP-težek problem (torej se algoritem za večje grafe ne bi končal v doglednem času), sva bila omejena na manjše grafe, kar pa na koncu ni vplivalo na preverjanje relacij.

2.2 Opis dela

V svojem delu sva napisala 6 različnih funkcij, katere sva rabila za iskanje vseh zgoraj naštetih lastnosti grafov. Te funkcije bova sedaj podrobneje opisala.

2.2.1 Maksimalne neodvisne množice

Funkciji $maksimalne\_neodvisne\_mnozice(G)$ in $backtrack(A, B)$ s pomočjo gnezdenja in rekurzije poiščeta vse maksimalne neodvisne množice danega grafa G.

Vhodni podatki: Graf $G = (V, E)$.

Opis: Funkcija $backtrack(A, B)$ deluje tako, da z zanko najprej vzame eno vozlišče v iz množice B, ki na začetku predstavlja množico vseh vozlišč grafa G. Potem ustvari novo množico C, ki vsebuje vozlišča, ki so v množici A (na začetku je to prazna množica), ter tem doda vozlišče v. Da se nam maksimalne neodvisne množice nebi ponavljale, pogledamo ali je bila množica C že pregledana, če je bila, se vrnemo na začetek zanke in vzamemo novo vozlišče u, če pa še ni bila pregledana, množico C dodamo v množico *pregledane*, katero smo definirali kot prazno množico pred funkcijo $backtrack(A, B)$. Potem pa z rekurzijo ponovimo funkcijo $backtrack(A, B)$, samo da sedaj namesto prazne množice A vzamemo množico C, množici B, ki predstavlja vsa vozlišča grafa G, pa odstranimo vozlišče v ter vsa njegova sosednja vozlišča. S tem zagotovimo, da vozlišču v v množico ne moremo dodati nobenega sosednjega vozlišča, saj če bi ga dodali, to nebi bila več neodvisna množica. Ker množici B odstranjujemo elemente, bo ta množica enkrat dolžine 0, se pravi ne bo vsebovala nobenega elementa več, takrat smo našli našo maksimalno neodvisno množico, ki jo dodamo seznamu *mnozice*, katerega definiramo pred funkcijo. Ko najdemo eno maksimalno neodvisno množico, ta zagotova vsebuje vozlišče v, saj smo z njim začeli. Zato moramo ponovno zagnati funkcijo $backtrack(A, B)$, kjer A ponovno predstavlja prazno množico in B množico vseh vozlišč grafa G. To moramo narediti zaradi tega, da dobimo še maksimalne neodvisne množice, ki ne vsebujejo vozlišča v. Funkcija $backtrack(A, B)$ se tako rekurzivno ponavlja, znotraj funkcije $maksimalne\_neodvisne\_mnozice(G)$, dokler ne najdemo vseh maksimalnih neodvisnih množic. Na začetku funkcije
$maksimalne\_neodvisne\_mnozice(G)$ definiramo že prej omenjen prazen seznam *mnozice* in prazno mnozico *pregledane*.

Izhodni podatek: Seznam vseh maksimalnih neodvisnih množic.

2.2.2 Neodvisnostno število

Funkcija $independence\_number(G)$ vrne neodvisnostno število grafa G, torej velikost največje maksimalne neodvisne množice tega grafa.

Vhodni podatki: Graf $G = (V, E)$

Opis: Najprej z prejšnjo funkcijo poiščemo vse maksimalne neodvisne množice grafa G. Nato pa le-te primerjamo po velikosti in poiščemo velikost največje.

Izhodni podatek: Neodvisnostno število grafa G.

2.2.3 Kromatično število

Funkcija $kromaticno\_stevilo(G)$ z uporabo celoštevilskega linearnega programa poišče kromatično število grafa G.

Vhodni podatki: Graf $G = (V, E)$.

Opis: Funkcija za reševanje uporabi linearni program:
Najprej uvedemo dve binarni spremenljivki: x_{ij}, ki je enaka ena, če je vozlišče i barve j ter y_j, ki je enaka ena, če je vsaj eno vozlišče barve j. C predstavlja množico barv.

$$\min \sum_j y_j$$

$$\begin{aligned} p.p. \quad \forall u, v \in E, j \in C: &\quad x_{uj} + x_{vj} \leq 1 \\ \forall i \in V, j \in C: &\quad x_{ij} \leq y_j \\ \forall u, v \in E, j \in C: &\quad x_{uj} + x_{vj} \leq y_j \end{aligned}$$

Izhodni podatki: Kromatično število grafa.

2.2.4 Klično število

Funkcija $klicno\_stevilo(G)$ z uporabo celoštevilskega linearnega programiranja poišče klično število grafa G.

Vhodni podatki: Graf $G = (V, E)$.

Opis: Funkcija za reševanje uporabi linearni program:
Najprej uvedemo binarno spremenljivko x_i, ki je pokaže 1, če je vozlišče i v maksimalni kliki. Nato z ukazom $G.complement()$ dobimo komplement grafa G. Označimo ga z $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$.

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_j$$
$$p.p. \quad \forall u, v \in \overline{E}: \quad x_i + x_j \leq 1$$

Izhodni podatek: Klično število grafa.

2.2.5 Deljeno kromatično število

Funkcija $deljeno\_kromaticno\_stevilo(G, mnozice = None)$ z uporabo linearnega programa poišče deljeno kromatično število.

Vhodni podatki: Graf $G = (V, E)$.

Opis: Funkcija najprej pod spremenljivko *mnozice* spravi seznam vseh maksimalnih množic, katerega dobi s funkcijo $maksimalne\_neodvisne\_mnozice(G)$. Potem s pomočjo linearnega programa rešuje minimizacijski problem. Definiramo novo realno in nenegativno spremenljivko y. Iščemo minimum vsote y_i, kjer i teče od 0 do n, kjer n predstavlja število vozlišč grafa G. Upoštevati pa moramo pogoj, da se mora vsako vozlišče pojaviti v vsaj eni maksimalni neodvisni množici.

Izhodni podatek: Deljeno kromatično število grafa.

2.2.6 Deljeno klično število

Funkcija $deljeno\_klicno\_stevilo(G, mnozice = None)$ z uporabo linearnega programa poišče deljeno klicno število.

Vhodni podatki: Graf $G = (V, E)$.

Opis: Funkcija $deljeno\_klicno\_stevilo(G, mnozice = None)$ predstavlja dual linearnega programa, ki ga uporabimo pri funkciji $deljeno\_kromaticno\_stevilo(G, mnozice = None)$. Zato iščemo maksimum y_v, kjer v predstavlja vozlišče grafa G. Moramo pa upoštevati pogoj, da se v vsaki neodvisni množici vsako vozlišče pojavi največ enkrat.

Izhodni podatek: Deljeno klično število grafa.

3 Rezultati

Najine kode sva preizkusila na treh grafih, s tem pa bova tudi preverila ali najina zveza

$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G),$$

res velja. Poleg tega pa sva preverjala še eno zvezo, in sicer:

$$\chi_f(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)},$$

kjer je $\alpha(G)$ neodvisnostno število grafa G ter $|G|$ število vozlišč.

- Kesnerjev(5,2) graf: Ta graf je enak Petersenovemu grafu, njegovo kromatično število pa je enako 3, klično število je enako 2, deljeno kromatično in klično število pa je enako $2,5$. Graf ima 10 vozlišč, njegovo neodvisnostno število pa je 4. Vidimo da obe zgornji zvezi na tem grafu veljata.
- 'Hypercube" graf: Je graf, sestavljen iz vozlišč in povezav n-dimenzionalne hiperkocke. Ima 2^n vozlišč in $2^{n-1}n$ povezav. Kromatično število tega grafa je enako 2, prav tako vrednost ima tudi klično število, ter deljeni števili.Vse te karakteristike so neodvisne od n, neodvisnostno število pa je 2^{n-1}. Torej tudi za ta graf veljata zgornji zvezi.
- Krožni graf (13,2): To je krožni graf s 13 vozlišči, vsako vozlišče i pa je povezano z vozliščema $i-2$ in $i+2$. Pri tem grafu dobimo kromatično število enako 3, klično število enako 2, deljeno kromatično in klično število pa je $2,16$ in je enako, saj predstavljata je en drugemu dualni linearni program. Neodvisnostno število tega grafa je 6. Pokazali smo, da tudi na krožnem grafu veljo naše neenakosti.

Seveda s tem, da sva preverila pravilnost neenačb na treh različnih grafih, ne morava dokazati, da neenakosti res veljajo. Najina literatura pa podpira in dokazuje te neenakosti, midva pa sva to preverila še na parih grafih.