(Delno) kromatično in (delno) klično število grafa

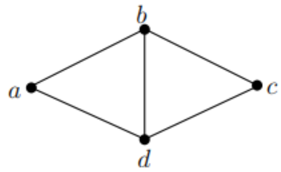
Opis problema in načrt dela

Projekt pri predmetu Finančni praktikum

Avtorja:
Miha Pelhan, Manca Strgar

Ljubljana, november 2018

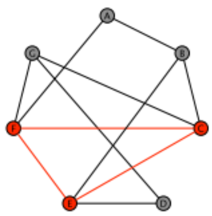
Neodvisna množica v grafu $G = (V, E)$ je podmnožica $S \subseteq V$ vozlišč grafa G, pri čemer v grafu G ne obstaja nobena povezava med katerimakoli dvema vozliščema iz množice S. Velikost take množice je določena z številom vozlišč, ki jih vsebuje. Pravimo, da je neodvisna množica maksimalna, ko ji ne moremo dodati nobene točke, ne da bi s tem izgubili pogoj neodvisnosti, se pravi ji ne moremo dodati nobene točke grafa, ki bi bila nesosedna z vsemi točkami, ki so že v neodvisni množici. Velikosti največje neodvisne množice v grafu G pravimo tudi neodvisnostno število grafa G, označimo ga z $\alpha(G)$. Očitno je vsaka največja neodvisna množica poljubnega grafa G tudi maksimalna neodvisna množica, obratna trditev pa v splošnem ne drži.
PRIMER:



Množice {a,c}, {b} in{d} so maksimalne neodvisne množice zgornjega grafa.

Najprej za pomoč definirajmo k-barvanje grafa G kot dodelitev k barv vozliščem grafa G, tako da sta sosednji vozlišči obarvani različno.
Kromatično število $\chi(G)$ grafa G je definirano kot najmanjše naravno število k, za katero obstaja k-barvanje grafa G. Grafu s $\chi(G) = k$ rečemo k-kromatičen graf.

Klično število: Klika grafa $G = (V, E)$ je definirana kot podmnožica vozlišč $Q \subseteq V$ v neusmerjenem grafu, tako da sta poljubni vozlišči v kliki sosednji. Maksimalna klika je klika, ki je ne moremo razširiti z dodajanjem kateregakoli novega sosednjega vozlišča. Največja klika v grafu pa je takšna klika, da v grafu ne obstaja taka klika, ki bi imela več vozlišč. Klično število grafa G je število vozlišč v največji kliki grafa G, označimo ga z $\omega(G)$.
PRIMER:

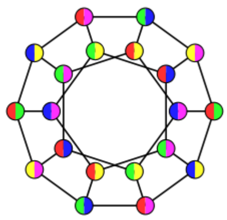


V zgornjem grafu vozlišča C, E in F tvorijo kliko Q velikosti 3.

Delno kromatično število danega grafa G definiramo kot:

$$\chi_f(G) = inf\{1^T \cdot y; y^T A \geq 1^T, y \geq 0\},$$

kjer je y racionalni stolpični vektor in A matrika z vrstičnim indeksom, ki predstavlja neodvisne množice grafa G in stolpičnim indeksom, ki predstavlja vozlišča grafa G. Se pravi $A_{(S,i)} = 1$, če vozlišče i pripada maksimalni neodvisni množici S, drugače pa $A_{(S,i)}$ zavzame vrednost 0. Kateremukoli y, ki zadostuje tem pogojem pravimo delno barvanje grafa G.
PRIMER DELNEGA BARVANJA GRAFA:



Delno klično število danega grafa G definiramo kot:

$$\omega_f(G) = sup\{1^T \cdot x; Ax \leq 1, x \geq 0\},$$

kjer je x definiran kot racionalen stolpični vektor in matrika A definirana enako kot pri delnem kromatičnem številu. Kateremu koli vektorju x, ki zadostuje tem pogojem, pravimo delna klika grafa G, številu $1^T \cdot x$ pa velikost klike.

Povezava med kličnim, delnim kličnim, delnim kromatičnim in kromatičnim številom je:

$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G),$$

kjer enakost $\omega_f(G) = \chi_f(G)$ prihaja iz dualnosti linearnega programa.

OPIS GRAFOV, KI JIH BOVA POTREBOVALA:

Kneserjev graf: $KG_{n,k}$ je graf, katerega vozlišča imajo določene k-elementne podmnožice množice z n elementi, ter pri katerem sta dve vozlišči sosednji natanko tedaj, ko sta njuni pripadajoči k-elementni množici disjunktni. Ima $\binom{n}{k}$vozlišč in $\frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k}}{2}$ povezav.

Krožni graf: je neusmerjen graf, ki ima ciklično skupino simetrij, ki povežejo poljubno vozlišče z poljubnim drugim vozliščem v grafu. (Ciklična skupina simetrij pomeni, da lahko pridemo od enega elementa množice do kateregakoli drugega z ponavljanjem ene inverzne operacije, v primeri krožnega grafa so te operacije take, da dobimo simetričen graf).

Kubični graf: je graf, v katerem imajo vsa vozlišča stopnjo 3.

NAČRT DELA:

Najino delo bo potekalo tako, da bova najprej napisala ILP za kromatično število in klično število. Nato bova napisala kodo za kromatično in klično število, ter delno kromatično in delno klično število, ter primerjala ali velja najina povezava med temi števili. To bova preverila na zgoraj opisanih grafih, ter morda še nekaterih drugih.