

# Programación Funcional

Pedro O. Pérez M., PhD.

Implementación de métodos computacionales  
Tecnológico de Monterrey

*pperezm@tec.mx*

02-2024

## ① Introducción

- Lenguajes de programación funcional
- Estilo de Programación Funcional

## ② Scheme

- Introducción
- La forma especial `define`
- La forma especial `quote`
- La forma especial `if`
- La forma especial `cond`
- Recursividad en Scheme

## ③ Listas

- Listas en Scheme

- Construcción de una lista

- Acceso a una lista

- Unión de 2 listas

- Recursividad en el manejo de listas

- Recursividad Profunda

## 4 Cálculo Lambda

- Función como elementos de primer orden

- Definición del Cálculo Lambda

- La forma especial **lambda**

- Funciones generadoras de funciones

- Evaluación en el Cálculo Lambda

## 5 Recursividad Terminal

Introducción

¿Cómo convertir a recursividad terminal?

En la práctica, los lenguajes funcionales...

- Todo lo modelan con funciones: definiciones y llamadas, la secuencia es una composición de funciones.
- No manejan variables, sólo parámetros.
- No manejan asignación de valores.
- No utilizan iteraciones, sólo recursividad.
- Almacenan todo en listas encadenadas y con asociaciones dinámicas.
- Tratan a las funciones como a los datos: son argumentos, resultados, estructuras.

Conceptualmente, los lenguajes funcionales...

- Son **declarativos**:
  - Expresan qué resolver y no cómo resolverlo.
- Son de **muy alto nivel de abstracción**:
  - Alejados del modelo de Von Nuemann y apegados al pensamiento “natural” humano.
  - Requieren mayor esfuerzo de traducción y pueden consumir muchos recursos en la ejecución.
- Tienen **transparencia referencial**:
  - No hay efectos laterales en memoria que alteren el significado de un programa.
- Son **minimalistas**:
  - Fácil lectura, mantenimiento, **paralelización** y comprobación.

Los lenguajes funcionales...

- Existen desde **1958** con la creación de **LisP** (**List Processing**).
- Tienen diferentes grados de hibridez al combinarse con diversos paradigmas. **Haskell** es uno de los consideramos más puro de todos los lenguajes funcionales.
- Han adquirido mayor importancia y popularidad por sus ventajas en el desarrollo de aplicaciones de **Inteligencia Artificial** y **Ciencia de datos**.



El estilo de la programación funcional se puede usar en los lenguajes imperativos.

```
int factorial (int n)
{ int fact, j;
  fact = 1;
  for (j = 2; j<=n; j++)
    fact = fact * j;
  return fact;
};
```

Estilo imperativo:

- Uso de variables y asignaciones.
- Uso de ciclos (iteraciones).
- Posible efecto lateral si usáramos variables globales.

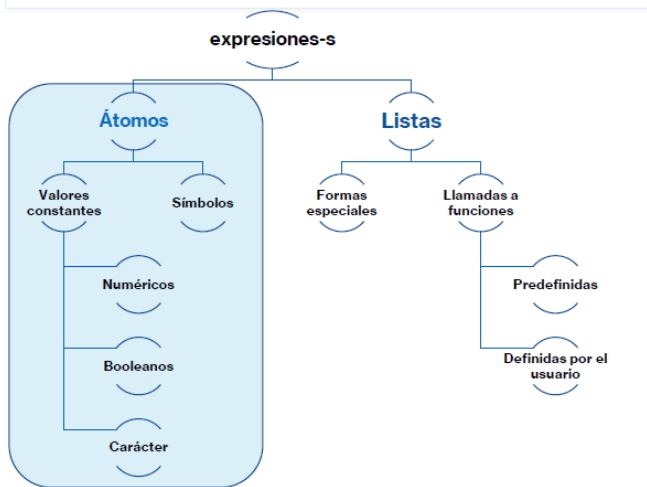
```
int factorial (int n)
{
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return (n*factorial(n-1));
};
```

Estilo funcional:

- No hay variables ni asignaciones.
- Uso de la recursividad.
- No hay efectos laterales al no usar variables globales.

- **Scheme** es un lenguaje funcional sencillo, minimalista, para aprender ágilmente el nuevo paradigma.
- Es un dialecto de **Lisp** creado en 1975 por Steele y Sussman (MIT).

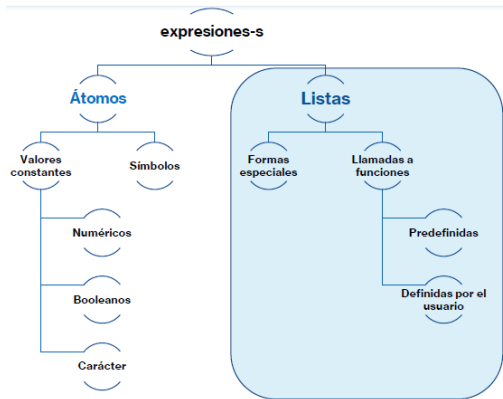
- Toda su sintaxis se reduce al formato de una **lista** que es una **expresión-s**.
  - Las listas se delimitan con **paréntesis** y puede tener cero o más elementos.
  - Una lista es una expresión-s cuyos elementos son a su vez una expresión-s.
- Tiene pocas reglas **semánticas**, pues es un lenguaje tipado débil (no hay declaraciones de tipos de datos).



Átomos:

- La evaluación de una constante genera como resultado el valor de la propia constante.
- La evaluación de un símbolo genera como resultado el valor asociado a ese símbolo.
- Un símbolo es un identificador que se construye con cualquier carácter, excepto:

`()[]{};, ' " # \`



Sintaxis de las listas

$\langle \text{Lista} \rangle ::= ( \langle \text{Elemento} \rangle )$

$\langle \text{Elemento} \rangle ::= \text{átomo } \langle \text{Elemento} \rangle$

$\langle \text{Elemento} \rangle ::= \langle \text{Lista} \rangle \langle \text{Elemento} \rangle$

$\langle \text{Elemento} \rangle ::= \epsilon$

El **primer elemento** en la lista es el **símbolo** que identifica a la **función** o la **forma especial** que se desea evaluar, y los siguientes elementos o datos necesarios para la evaluación.

- Aritméticas:  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , remainder, quotient, sqrt, etc.
- Relacionales:  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$ ,  $=$ .
- Lógicas: and, or, not.
- Predicados: positive?, zero?, even?, null?, char?, etc.
- Manejo de listas: car, cdr, cons, list.
- Manejo de funciones: map, apply.

- No hay operadores, sólo **funciones multiparámetro** que se aplican sobre los argumentos. **Importante: el formato es prefijo.**
- Ejemplos:
  - (+)
  - (- 8)
  - (+ 3 4)
  - (+ 2 3 4 5 6 7 8)
  - (/ (+ 2 3) 5)
  - (+ (/ 2 3) 5)
  - (/ (- 7 3) (\* 2 5))

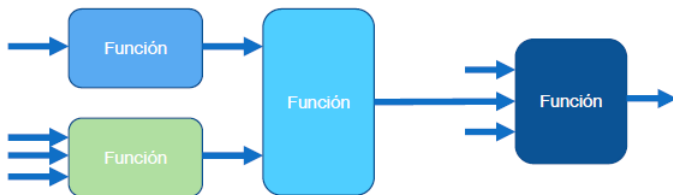
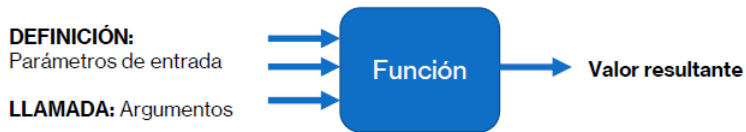
- Sintaxis: (define símbolo expresión).
- Evalúa la expresión y el valor resultante lo asocia con el símbolo, de tal forma que el símbolo queda definido en el ambiente de trabajo.



Vamos a desarrollar las siguientes funciones:

- ① La función `sum` recibe como entrada dos números, `a` y `b`. La función regresa la suma de ambos.
- ② La función `area-of-triangle` recibe como entrada la base y altura de un triángulo. La función regresa el área del triángulo.

En el paradigma funciona, todo es una función...



Vamos a desarrollar las siguientes funciones:

- ① La función `area-of-ring` recibe como entrada el radio interno y externo del anillo. La función regresa el área del anillo.
- ② La función `volume-of-cylinder` recibe como entra el radio u la altura de un cilindro. La función regresa el volumen del mismo.

Revisa la actividad en Canvas.

- Sintaxis: (quote símbolo).
- Sirve para NO evaluar el símbolo, generando como resultado el propio símbolo. Útil para manejar a los símbolos como datos.
- Puede abreviarse con una comilla y sin necesidad de utilizar a la lista.
- (quote abc) es equivalente a 'abc.

- Sintaxis: (if predicado if-true if-false).
- Se evalúa el predicado, si su valor es verdadero se evalúa la expresión consecuente; si es falso, se evalúa la expresión alternativa.
- Un **predicado** es una expresión que genera un valor booleano al evaluarse.
- A este tipo de evaluación se le conoce como **evaluación floja (lazy evaluation)**, pues no se evalúa lo que no es necesario.

Vamos a desarrollar las siguientes funciones:

- ① La función `max2` recibe como entrada dos números, `a` y `b`. La función regresa el mayor de ambos números.
- ② La función `max3` recibe como entrada tres números, `a`, `b` y `c`. La función regresa el mayor de los tres números.

- Sintaxis:  $(\text{cond } (\text{predicado}_1, \text{expresion}_1), (\text{predicado}_2, \text{expresion}_2), \dots, (\text{else } \text{expresion}_n))$ .
- Forma de evaluación: evalúa la primera secuencia de expresiones cuyo predicado sea verdadero; si ningún predicado se cumple, evalúa la expresión del else



Vamos a desarrollar las siguientes funciones:

- ① la función **interest** recibe como entrada el saldo de una cuenta bancaria de un banco. El banco paga un 4 % fijo para saldos de hasta \$1000, un 4.5 % fijo anual para saldos de hasta \$5000 y un 5 % fijo para saldos de más de \$5000.
- ② La función **how-many** recibe como entrada los coeficientes,  $a$ ,  $b$  y  $c$ , de una ecuación cuadrática. La función determina cuántas soluciones tiene la ecuación. Asumiendo que  $a$  no es 0, la ecuación tiene:
  - 2 soluciones, si  $b^2 > 4ac$ .
  - 1 solución, si  $b^2 = 4ac$ .
  - 0 soluciones, si  $b^2 < 4ac$ .

Revisa la actividad en Canvas.

- Ya conocemos las herramientas necesarias del lenguaje:
  - Definición y llamadas de funciones.
  - Decisiones con las formas especiales **if** y **cond**.
- Lo importante es **desarrollar el pensamiento recursivo** para la solución de problemas.
- Esto va más allá del uso de lenguaje, es un cambio de paradigma mental.

Para pensar recursivamente:

- Paso 1.
  - Analizar cuál es el **caso más simple o pequeño** del problema que se quiere resolver.
  - Este caso debe de tener una **solución clara y directa, no recursiva**.
  - Este caso se considera el **caso base** de la recursividad, y determina una **condición de salida** de la repetición implícita que se dá en la recursividad.
- Paso 2.
  - Analizar cómo se resuelve el **problema general, suponiendo** que ya se tiene “algo” que resuelve el **siguiente caso más pequeño del problema**.
  - Este caso plantea la **solución recursiva** del problema.
  - La solución al siguiente caso más pequeño, se programa con la **llamada recursiva**, que se integra a la solución general del caso.

Vamos a desarrollar las siguientes funciones:

- ① La función que obtiene la sumatoria desde 0 hasta  $n$ .
- ② La función que despliega  $n$  veces el letrero “hola”.
- ③ La función que despliega la secuencia desde  $n$  hasta 1.
- ④ La función que cuenta la cantidad de dígitos de un número entero.

Revisa la actividad en Canvas.

La herramienta “universal” para representar y trabajar con estructuras de datos.

Sintaxis de las listas

$\langle \text{Lista} \rangle ::= ( \langle \text{Elemento} \rangle )$

$\langle \text{Elemento} \rangle ::= \text{átomo } \langle \text{Elemento} \rangle$

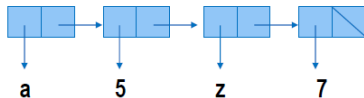
$\langle \text{Elemento} \rangle ::= \langle \text{Lista} \rangle \langle \text{Elemento} \rangle$

$\langle \text{Elemento} \rangle ::= \epsilon$

## Celda cons



Ejemplo: ( a 5 z 7 )



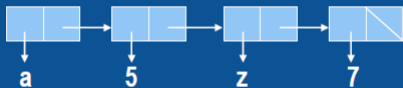
- Las listas están almacenadas internamente en memoria dinámica, utilizando nodos encadenados llamados “**celdas cons**”.
- Una “**celda cons**” consiste de dos apuntadores; ambos pueden apuntar a átomos o a otra “celda cons”.
- null o '()' es un valor atómico que representa a la lista vacía.



Visualmente,

- Utilizar la forma especial **quote** con la lista.
- Ejemplos: `'(1 2 3 4)`, `'(((a 1) (B 2) (+ 4 X)))`, `'()`.

Ejemplo: `(a 5 z 7)`



```
(cons 'a (cons 5 (cons 'z (cons 7 null))))  
(list 'a 5 'z 7)
```

Funcionalmente,

- Función primitiva de bajo nivel: **cons**.
  - Formato: `(cons arg1 arg2)`.
  - Crea una “**celda cons**” en memoria, en donde el apuntador apunta a **arg1** y el segundo argumento a **arg2**.
- Función primitiva de alto nivel: **list**.
  - Formato: `(list arg1 arg2 arg3 ...)`.
  - Crea una lista propia en la que cada argumento se convierte en un elemento de la lista (en el orden correspondiente).

- Lista propia. Es aquella cuyo último nodo de la lista apunta a la lista vacía. Visualmente utiliza el formato normal. Ejemplo: (1 2 3 4).
- Lista impropia. Es aquella donde el último nodo de la lista apunta a un átomo diferente a la lista vacía. Sólo se puede construir con la función **cons**. Visualmente termina con un punto antes del último dato. Ejemplo: (a . 1). *Útil cuando se requiere una estructura para almacenar un par de datos relacionados.*

- Lista plana. Es aquella que únicamente contiene átomos en todos los primeros apuntadores de sus “**celdas cons**”. Visualmente no tiene lista anidadas. Ejemplos: (1 2 3 4), (a . 1).
- Lista imbricada (o profunda). Es aquella cuyos elementos no son solo átomos, sino que sus primeros apuntadores de sus “**celdas cons**” apuntan a otras listas de cualquier tipo. Visualmente es una lista con listas anidadas. Ejemplo: ((a 1) (b 2) ((1) (z d))). *Permite representar cualquier estructura de datos no lineales y/o complejos.*

## Función `car`

- Formato: `(car lista)`.
- Genera como resultado el primero elemento de la lista, es decir, el valor apuntado por el primer apuntador de la primera “celda cons” de la lista.



## Función `cdr`

- Formato: `(cdr lista)`.
- Genera como resultado el “resto de la lista”, es decir, el valor apuntado por el segundo apuntador de la primera “celda cons” de la lista.

```
(car (cons X Y))  --> X  
(cdr (cons X Y)) --> Y  
(cons (car X) (cdr X)) --> X
```

## ¿Porqué **car** y **cdr**?

- **Lisp** fue implementado original en la computadora **IBM 704** en 1958.
- Esta computadora tuvo un soporte especial para dividir una palabra de máquina de 36 bits en cuatro partes, una “address part” y “decrement part” de 15 bits cada una y una “prefix part” y “tag part” de tres bits cada una.
- El lenguaje Lisp se definió asociando esta parte técnica:
  - **car**: Abreviación de “**C**ontents of the **A**ddress part of **R**egister number”.
  - **cdr**: Abreviación de “**C**ontents of the **D**ecrement part of **R**egister number”.
- Otros lenguajes han sustituido estos nombres por: **first/rest** o **head/tail**.

Lenguajes como Scheme permiten simplificar las composiciones entre ambas funciones, combinando hasta cuatro a's o d's entre la c y la r

Ejemplo: `(caddr list)`  
es equivalente a `(car (cdr (cdr (cdr list))))`

- ¿Cómo se accede el segundo elemento de una lista?
- ¿Cómo acceder al dato “b” en la lista : (a (b c))?
- ¿Qué resultado se obtiene de: (caddr '(a (b c)))?
- ¿Cómo acceder al dato “c” en la lista : (a (b c))?
- ¿Qué resultado se obtiene de : (cons (cadr '(a (b c) d)) (list 'e))?

Función primitiva de alto nivel: **append**

- Formato: `(append lista1 lista2)`
- Genera una lista que es el resultado de encadenar la `lista1` con la `lista2`, es decir, la última “**celda cons**” de la primera lista apuntará con su segundo apuntador a la primera “**celda cons**” de la segunda lista.
- Sólo se puede utilizar con listas propias.
- Ejemplo: `(append '(1 2 3) (cons 'a (list 'b 'c)))` genera como resultado `(1 2 3 a b c)`.

- **Caso Base.** Normalmente, está basado en la solución al caso de la lista vacía.
- **Caso General.** Normalmente, supone que se tiene la solución al caso del “resto” (cdr) de la lista (que es una lista más pequeña), y utiliza ese resultado para calcular el resultado general.

- `null?`: Verifica si su argumento es la lista vacía o no.
- `list?`: Verifica si su argumento es una lista propia o no.
- `pair?`: Verifica si su argumento es una “**celda cons**” o no.
- `equal?`: Verifica si sus dos argumentos son idénticos en contenido.
- `eq?`: Verifica si sus dos argumentos son idénticos en contenido y en su representación física (mismo espacio de memoria).



# Tipos de problemas con listas

## *Por el tipo de entrada y resultado*

1. Problemas que reciben listas y generan un resultado atómico.
2. Problemas que reciben un valor atómico y generan una lista.
3. Problemas que reciben listas y generan una lista.

## *Por el tipo de lista*

- a. Problemas que trabajan con listas planas, o sólo con los elementos de su primer nivel:

### **RECURSIVIDAD PLANA**

- b. Problemas que trabajan con listas imbricadas (listas anidadas) y se desea llegar hasta los átomos:

### **RECURSIVIDAD PROFUNDA**

# Problemas que reciben listas y generan un valor atómico

- **Caso Base:** **Valor atómico** que soluciona el problema cuando la **lista está vacía o tiene un elemento**.
- **Caso General:** **Suponer** que ya se tiene la **solución con el resto de la lista**, y construir la **expresión** que resuelve el problema general.

## Ejercicios

- ① Contar los elementos de una lista.
- ② Sumar los elementos de una lista.
- ③ Contar la cantidad de números pares de una lista.
- ④ Obtener el número mayor de una lista.

Revisa la actividad en Canvas.

# Problemas que reciben un valor atómico y generan una lista

- **Caso Base: Lista** que soluciona el problema cuando el valor atómico de entrada es el más pequeño (**cero o uno**).
- **Caso General: Suponer** que ya se tiene la **lista** que es solución para el **siguiente valor más pequeño** del problema, y utilizarla para **construir la lista** (`cons`, `list`, `append`) que resuelve el problema general.

## Ejercicios

- ① Generar una lista con  $n$  ceros.
- ② Generar una lista con los valores de  $n$  a 1.
- ③ Generar una lista con los valores de 1 a  $n$ .
- ④ Generar una lista con los valores de la serie de Fibonacci hasta el  $n$ -ésimo elemento de la serie.

# Problemas que reciben una lista y generan una lista

- **Caso Base:** **Lista** que soluciona el problema cuando la **lista de entrada está vacía o tiene un elemento**.
- **Caso General:** **Suponer** que ya se tiene la **lista** que es solución para el **resto de la lista de entrada**, y utilizarla para **construir la lista** (`cons`, `list`, `append`) que resuelve el problema general.

## Ejercicios

- ① Incrementar los números de una lista.
- ② Unir 2 listas en una sola (implementación del `append`).
- ③ Invertir los elementos de una lista (implementación del `reverse`).

Revisa la actividad en Canvas.

- Útil principalmente en problemas que reciben como entrada una lista profunda y se desea llegar a los átomos de la lista.
- La estrategia del pensamiento recursivo se mantiene, pero en la solución al caso general hay que agregar la **validación** de si el elemento a analizar (típicamente el **car**) **es una lista o no**.
  - Si **no es una lista** se aplica la solución típica de la **recursividad plana**.
  - Si **es una lista**, se aplica la **recursividad sobre ese elemento**, y **sobre el resto de la lista** para obtener la solución general.

- Contar los elementos de una lista profunda.
- Sumar los elementos de una lista profunda.
- Contar la cantidad de números pares de una lista profunda.
- Obtener el número mayor de una lista profunda.



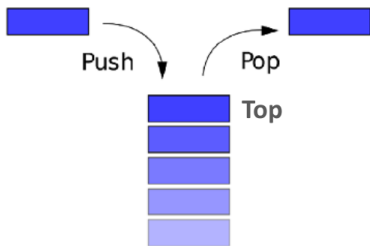
Revisa la actividad en Canvas.

La herramienta “universal” para representar y trabajar con estructuras de datos.

- **Modelación.** La lista tiene la capacidad de representar a cualquier estructura de datos, sin importar si es lineal o no, al permitir **anidamientos**.
- **Inmutabilidad.** Las estructuras de datos implícitamente utilizan **memoria dinámica**, pero no son estructuras cuyo estado se modifique en memoria. . . Por lo tanto, se implementarán funciones que transforman las estructuras de datos de entrada en nuevas estructuras de datos modificadas.

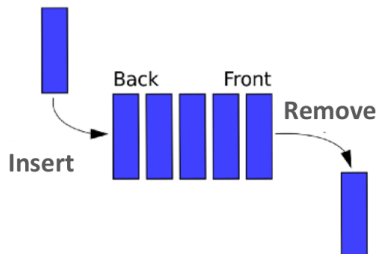
- Dado que una lista en Scheme acepta elementos de diferentes tipos, una lista de campos es la relación directa para almacenar un **registro**.
- Ejemplo, registro con datos de alumnos: matricula, nombre, calificaciones:  
(176432 Juan Pérez 78 95 87), (176432 (Juan José Pérez Pérez) (78 95 87)).
- Una lista de registros conforma una base de datos. Ejemplo, ((*registro*<sub>1</sub>) (*registro*<sub>2</sub>) (*registro*<sub>3</sub>) ... (*registro*<sub>n</sub>))

# ¿Cómo implementar una **fila** o una **pila**



```
(define (push pila dato)  
  (cons dato pila))
```

```
(define (pop pila)  
  (cdr pila))
```



```
(define (insert fila dato)  
  (append fila (list dato)))
```

```
(define (remove fila)  
  (cdr fila))
```

- Se representa con una lista de renglones (o columnas), donde cada reglón (o columna), es a su vez, una lista con los datos correspondientes.

$$\begin{pmatrix} (1 & 2 & 3) \\ (4 & 5 & 6) \\ (7 & 8 & 9) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

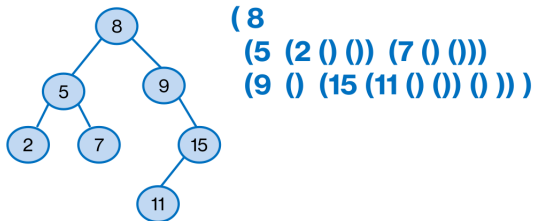
- Ejercicio: Implementar la suma de dos matrices.

# Representación de un árbol binario en listas

- Formato de representación:

( raíz (subárbol izquierdo) (subárbol derecho) )

- Ejemplo:



- Ejercicio:

- Implementar la búsqueda en un ABB.
- Implementar recorrido en PREORDEN.
- Implementar la inserción en un ABB.

- Un grafo tiene múltiples formas de almacenarse en memoria:
  - Matriz de adyacencias.
  - Matriz de transiciones.
  - Lista de adyacencias.
  - Lista de arcos.
- Al representarlo en listas de Scheme, se tiene la ventaja que se puede definir el estándar de la modelación.

# ¿Qué significa que las funciones son de primer orden?

¡Se tratan como a los datos!

- Se pueden enviar como **argumentos** a los parámetros de otra función.
- Se pueden generar como **resultado** de otra función.
- Pueden ser parte de una **estructura de datos**.



## Funciones como argumentos

```
(define (aplica proc a b)
  (proc a b))

>(aplica + 3 5)
8
>(aplica * 3 5)
15
>(aplica < 3 5)
#T
```

El orden aplicativo evalúa a los símbolos que identifican a las funciones y envía como argumento el código asociado a la función.

## Funciones como resultado

```
(define (tipo n)
  (cond ((= n 1) +)
        ((= n 2) -)
        ((= n 3) *)
        ((= n 4) /)))

>((tipo 2) 3 5)
-2
>((tipo 3) 3 5)
15
```

El resultado de una llamada a una función que genera una función, es aplicable con argumentos.

## Funciones en estructuras

```
(define LF (list + - * /))

>((car LF) 3 5)
8
>((caddr LF) 3 5)
0.6
```

El orden aplicativo evalúa a los símbolos que identifican a las funciones generando el código asociado a cada función, y formando una lista de códigos.

- Programar con funciones de primer orden representa una característica distintiva del paradigma funcional, que le da flexibilidad a los lenguajes, y potencializa las estrategias de solución de problemas en forma eficiente.

```
(define (inserta elem lista tipo)
  (cond ((null? lista) (list elem))
        ((tipo elem (car lista)) (cons elem lista))
        (else (cons (car lista)
                      (inserta elem (cdr lista) tipo)))))
```

```
(define (ordena lista tipo)
  (cond ((null? lista) ())
        (else (inserta (car lista)
                        (ordena (cdr lista) tipo) tipo))))
```

- Formato: `(map función lista)`.
- Genera una lista con el resultado de aplicar la función a cada elemento de la lista de entrada.
- Ejemplo: `(map sqrt '(4 16 25 81))`  
`=> '(2 4 5 9)`

## Implementación

```
(define (map fn lista)
  (cond ((null? lista) '())
        (else (cons (fn (car lista))
                      (map fn (cdr lista))))))
```

- Formato: `(apply función lista)`.
- Genera el resultado de la aplicación sucesiva de la función con los datos de la lista de entrada.
- Ejemplo: `(apply + '(3 5 7 1))` => 16

## Implementación

```
(define (apply fn lista)
  (cond ((null? lista) (fn))
        (else (fn (car lista)
                    (apply fn (cdr lista))))))
```

Dada una matriz almacenada por renglones:

- Obtener los datos de la primera columna.

```
(map car matriz)
```

- Obtener la sumatoria del primer renglón.

```
(apply + (car matriz))
```

Dada una base de datos en donde se almacenan datos de empleados en el siguiente formato de registro: (nómina (nombre) depto sueldo).

- Obtener una lista con los nombres de los empleados.

```
(map cadr datos)
```

- Obtener la sumatoria de los sueldos.  
(apply + (map caddr datos))

- Implementar una función que sirva para obtener la sumatoria de todos los elementos de una matriz.
- Implementar una función que sirva para obtener la matriz transpuesta de una matriz

- **map** se puede aplicar sobre varias listas, en cuyo caso, el procedimiento a mapear deberá considerar un parámetro para cada lista.
- **filter** sirve para filtrar los datos que cumplen la condición del predicado enviado como parámetro.
- **foldl** y **foldr** para realizar compresiones de listas según el procedimiento indicado.

Detrás de todo esto está el Cálculo Lambda.

- Propuesto por **Alonzo Church** en los años 30's, para formalizar nociones intuitivas acerca de funciones.
- En los 50's, **John McCarthy**, creador de Lisp , lo toma como base matemática, teórica y formal de los lenguajes funcionales.
- Es una **notación** especial para definir **funciones sin nombre**.
- Conocer un poco del cálculo lambda, permite entender mejor el concepto de las **funciones como elementos de primer orden** en los lenguajes funcionales.



# Definición y aplicación de funciones

- Formato general de una  $\lambda$ -**expresión**:  $\lambda$  variable . cuerpo donde el cuerpo es a su vez una  $\lambda$ -**expresión**.
- Una  $\lambda$ -**expresión** es:
  - Un valor constante.
  - Una variable.
  - Una expresión aritmética en prefijo.
  - Una  $\lambda$ -expresión.
- Formato para aplicar (evaluar) una función: (función argumento)

Ejemplos:	Equivalentes a:
$\lambda z . z$	$f(z) = z$
$\lambda x . + x 2$	$g(x) = x+2$
$\lambda x . \lambda y . * x y$	$h(x,y) = x*y$
$(\lambda x . + x 2) 7$	$g(7)$

- Formato: `(lambda (parámetros) cuerpo)`
- Sirve para definir una **función sin nombre**, equivalente a las  $\lambda$ -**expresiones** del cálculo lambda de Alonzo Church.
- El cuerpo se compone de las **expresiones-s** que conforman el código de la función. Ejemplo:  
`(lambda (x) (+ x 2)).`
- Útil para construir funciones “en línea” sin necesidad de definir las con nombre y enviarlas como argumento, y también para generar funciones como resultado. Ejemplo: `(map (lambda (x) (+ x 2)) '( 1 2 3)).`

Para darle nombre a una función definida con **lambda** usaremos la forma especial **define** en su concepto original.

Ejemplo:

```
(define g
  (lambda (x)
    (+ x 2)))
```

En vez de:

```
(define (g x) (+ x 2))
```

- Utilizando a la forma especial lambda, **implementa una solución sin recursividad** equivalente a la siguiente función que suma todos los datos de una matriz

```
(define (sumatoria matriz)
  (cond ((null? matriz) 0)
        (else (+ (apply + (car matriz))
                  (sumatoria (cdr matriz))))))
```

# Funciones generadoras de funciones

- Una función genera como resultado una función cuando su código de implementación es una lambda.
- Ejemplo: función que genera una función que sirve para incrementar un valor en tantas unidades como se indique en el parámetro.

```
(define genera-fn-incremento  
  (lambda (inc)  
    (lambda (valor)  
      (+ valor inc)))))
```

```
> ((genera-fn-incremento 5) 8)  
13  
> (define ++ (genera-fn-incremento 1))  
> (++ 8)  
9  
> (define lista-fn-inc  
    (map genera-fn-incremento '(1 2 3)))  
> ((cadr lista-fn-inc) 5)  
7
```

```
(define ejemplo  
  (lambda (a b)  
    (+ a b)))
```



*“Currificación”*

```
(define ejemplo  
  (lambda (a)  
    (lambda (b)  
      (+ a b)))))
```

- La función sirve para sumar dos datos.
- La función genera una función que sirve para incrementar un valor en tantas unidades como se indique en el parámetro

- Implementar una función que sirva para generar funciones que apliquen dos veces sobre un valor la función recibida como parámetro.
  - ¿Cuál es el parámetro del procedimiento generador?
  - ¿Cuál es el parámetro del procedimiento a generar?

Revisa la actividad en Canvas.

- La evaluación de funciones en cálculo lambda, sigue formalmente un proceso de transformaciones para normalizar la  $\lambda$ -expresión a su mínima expresión
- Tipos de transformaciones:
  - $\beta$ -**reducción**: Reemplazo del parámetro por el argumento en el cuerpo de la función, eliminando el encabezado  $\lambda$ .
  - $\delta$ -**reducción**: Aplicación de una función primitiva operaciones aritméticas.
  - $\alpha$ -**reducción**: Substitución de nombre de variable.
  - $\eta$ -**reducción**,  $\theta$ -**reducción**, etc.



$$(\lambda x. + x 3) 5$$

$$\beta: + \ 5 \ 3$$

$$\delta: 8$$

$$(\lambda g. \lambda x. \lambda y. g - x y) (\lambda f. \lambda y. \lambda x. f x y) 4 5$$

$$\beta g: (\lambda x. \lambda y. (\lambda f. \lambda y. \lambda x. f x y) - x y) 4 5$$

$$\beta x: (\lambda y. (\lambda f. \lambda y. \lambda x. f x y) - 4 y) 5$$

$$\beta y: (\lambda f. \lambda y. \lambda x. f x y) - 4 5$$

$$\beta f: (\lambda y. \lambda x. - x y) 4 5$$

$$\beta y: (\lambda x. - x 4) 5$$

$$\beta x: - 5 4$$

$$\delta: 1$$

## Normal

- Comienza reduciendo la  $\lambda$ -expresión de más a la izquierda.
- Equivale a una sustitución tipo **parámetro por nombre**.
- Asegura llegar a la forma mínima posible.
- Ejemplo:

$(\lambda x . * x x) (+ 2 3)$   
 $\beta x: (* (+ 2 3) (+ 2 3))$   
 $\delta (* 5 (+ 2 3))$   
 $\delta (* 5 (+ 2 3))$   
 $\delta (* 5 5) \delta 25$

## Aplicativo

- Comienza reduciendo la  $\lambda$ -expresión más interna y/o sus argumentos.
- Equivale a una sustitución tipo **parámetro por valor**.
- Es más eficiente.
- Es la utilizada por los intérpretes.
- Ejemplo:

$(\lambda x . * x x) (+ 2 3)$   
 $\delta: (\lambda x . * x x) 5 \beta x: (* 5 5)$   
 $\delta 25$

- La forma especial lambda es equivalente a las  $\lambda$ -expresiones.
- Por ejemplo,  $(\lambda x . \lambda y . x y) (\lambda x . * x x) 5$  es equivalente a  $((\text{lambda } (x) (\text{lambda } (y) (x y))) (\text{lambda } (x) (* x x))) 5$ .
- Y el intérprete evalúa haciendo las transformaciones usando el orden aplicativo.

```
((lambda (x) (lambda (y) (x y))) (lambda (x) (* x x))) 5)
```

```
 $\beta$ x: ((lambda (y) ((lambda (x) (* x x)) y)) 5) <- Función como argumento
```

```
 $\beta$ x: ((lambda (x) (* x x)) 5) <- Función como resultado
```

```
 $\beta$ x: (* 5 5)
```

```
 $\delta$ : 25
```

- **Estilo de programación recursiva** en donde la **solución al problema** se obtiene al **llegar al caso base** (la “cola” del proceso).
- Se logra cuando la **solución recursiva al problema** no contiene operaciones adicionales a la llamada recursiva.
- No siempre corresponde al pensamiento natural recursivo y requerirá una **conversión** si se desea obtener sus ventajas.





## Ventajas

- En muchos casos es una manera de hacer **más eficiente** la ejecución de la recursividad.
- En algunos casos, el **orden de complejidad de tiempo** se mejora significativamente.
- Algunos intérpretes son capaces de identificarla y **hacer más eficiente la ejecución**, descartando el uso de la pila de llamadas y la ejecución del regreso de todas las llamadas recursivas pendientes.

Revisaremos la función factorial  
( $n!$ )

# ¿Cómo convertir a recursividad terminal?

- ① La función original se convierte en una interfase que solo sirve para llamar a una **función auxiliar** que estará implementada con la **recursividad terminal**.
  - La función auxiliar contendrá un **parámetro extra** que será el **acumulador del resultado**.
  - La **llamada** a la función auxiliar enviará al **parámetro extra** el valor de la **solución del caso base del problema**.
- ② La **función auxiliar**, contendrá el código para resolver el problema recursivamente, pero cuidando de hacer la **llamada recursiva en forma terminal**.
  - El **resultado del caso base** será directamente el **valor del parámetro extra** (acumulador del resultado).
  - La llamada recursiva enviará como **argumento** al **parámetro extra** el **resultado de la expresión que se realizaba en forma no terminal**, pero ahora **utilizando el parámetro extra** (acumulador).

Revisa la actividad en Canvas.