Introducción a los lenguajes de programación

Pedro O. Pérez M., PhD.

Implementación de métodos computacionales
Tecnológico de Monterrey

pperezm@tec.mx

02-2023

Probar los programas es fundamental. Sin embargo, la realización de pruebas sólo llega hasta cierto punto, ya que no es posible probar los programas para todas las posibles entrada. Aún más importante, si el programa es complejo, por ejemplo contiene recursiones o iteraciones, entonces si no se comprende qué es lo que ocurre al ejecutar un ciclo o una llamada a una función en forma recursiva, es poco probable que podamos escribir el código correctamente. Si al probar el código resulta ser incorrecto, será necesario corregirlo.

Para conseguir iteraciones o recursiones correctas, es necesario establecer hipótesis inductivas, y resulta útil razonar, formal o informalmente, que la hipótesis es coherente con la iteración o recursión. Este proceso sirve para compreder que el trabajo que realiza un programa correcto es esencialmente el mismo que el proceso de demostrar teoremas por inducción.

Como mencionamos anteriormente, una demostración deductiva consta de una secuencia de proposiciones cuya veracidad se comprueba partiendo de una proposición inicial, conocida como hipótesis o de una serie de proposiciones dadas, hasta llegar a una conclusión. Cada uno de los pasos de la demostración, hay que deducirlos mediante algún principio lógico aceptado, bien a partir de los postulados o de algunas de las proposiciones anteriores de la demostración deductiva o de una combinación de éstas.

El teorema que se demuestra partiendo de una hipótesis H para llegar a una conclusión C es la proposición "si H entonces C". Decimos entonces que C *se deduce de* H.

Por ejemplo, demostrar que:

- Teorema 1. Si $x \geq 4$, entonces $2^x \geq x^2$.
- Teorema 2. Si x es la suma de los cuadrados de cuatro enteros positivos, entonces $2^x \geq x^2$.

Reducción a definiciones

En los dos ejemplos anteriores, la hipótesis emplea términos familiares: enteros, suma y multiplicación, por ejemplo. En muchos otros teoremas, incluyendo los de la teoría de autómatas, el término utilizado en la proposición puede tener implicaciones que son menos obvias. Una forma útil de proceder en muchas demostraciones es: "Si no estamos seguros de cómo comenzar una demostración, convertimos todos los términos de la hipótesis a sus definiciones".

Demostrar, Teorema 3: Sea S un subconjunto finitos de un determinado conjunto infinito U. Sea T el conjunto complementario de S con respecto a U. Entonces T es infinito.

1. Un conjunto S es finito si existe un entero n tal que S tiene exactamente n elementos. Escribimos $||S||$ se utiliza para designar el número de elementos de un conjunto S. Si el conjunto S no es finito, decimos que S es infinito. Intuitivamente, un conjunto infinito es un conjunto que contiene más que cualquier número entero de elementos.
2. Si S y T son subconjuntos de algún conjunto U, entonces T es el complementario de S (con respecto a U) si $S \cup T = U$ y $S \cap T = \emptyset$. Es decir, cada elemento de U es exactamente uno de S y otro de T; dicho de otra manera, T consta exactamente de aquellos elementos de U que no pertenecen a S.
3. Demostración por reducción a lo absurdo.

Demostración formal

Sabemos que $S \cup T = U$ y que S y T son disjuntos, por lo que $||S|| + ||T|| = ||U||$. Dado que S es finito, $||S|| = n$ para algún entero n, y como U es infinito, no existe ningún entero p tal que $||U|| = p$. Por tanto, suponemos que T es infinito; es decir, $||T|| = m$ para algún m. Entonces $||U|| = ||S|| + ||T|| = n + m$, lo que contradice la proposición dada de que no existe ningún entero p que sea igual a $||U||$.

la forma "si-entonces" del teorema es la más común den las áreas típicas de las matemáticas. Sin embargo, vamos a ver otros tipos de proposiciones que también resultan ser teoremas.

En primer lugar, existen diversos tipos de enunciados de teoremas que parecen diferentes de la forma simple "si H entonces C", pero de hecho expresan lo mismo: si la hipótesis H es verdadera para un valor determinado del (o de los) parámetro(s), entonces la conclusión C es verdadera para el mismo valor. A continuación se enumeran varias formas en las que puede expresarse "si H entonces C".

1. H implica C.
2. H sólo si C.
3. C si H.
4. Si se cumple H, se cumple C.

Expresemos el Teorema 1 de las cuatro formas antes mencionadas:

1. $x \geq 4$ implica $2^x \geq x^2$.
2. $x \geq 4$ sólo si $2^x \geq x^2$.
3. $x \geq 4$ si $2^x \geq x^2$.
4. Si $x \geq 4$, entonces $2^x \geq x^2$.

Además de las formas antes mencionadas, podemos emplear el operador $\implies$, $H \implies C$.

En ocasiones, encontraremos proposiciones de la forma "A si y sólo B" ("A if and only if B"). Otras formas de esta proposición son "A iff b", "A es equivalente a B" o "A exactamente si B". Realmente, esta proposición se corresponde con dos proposiciones si-entonces: "si A entonces B" y "si B entonces A". En estos casos, demostraremos la proposición "A si y sólo si B" demostrando las dos proposiciones siguientes:

1. La *parte si*: "si B entonces A" y
2. La *sólo si*: "si A entonces B", lo que a menudo se escribe equivalente "A sólo si B".

Las demostraciones pueden presentarse en cualquier orden. Se puede emplear los operadores $\iff$ or $\equiv$.

Al demostrar una proposición si-y-solo-si, es importante recordar que es necesario probar tanto la parte "si" como la parte "sólo-si". En ocasiones, resultará útil dividir una proposición si-y-solo-si en una sucesión de varias equivalencias. Es decir, para demostrar "A si y sólo si B", primero hay que demostrar "A si y sólo si C" y luego demostrar "C si y sólo si B".

A continuación veremos un ejemplo de este tipo de proposiciones con una demostración sencilla. Para ello, emplearemos la siguiente notación:

1. $\lfloor x \rfloor$, el *suelo* del número real x, es el mayor entero igual o menor que x.
2. $\lceil x \rceil$, el *techo* del número real x, es el menor entero igual o mayor que x.

Demostrar que, Teorema 4. Sea x un número real. Entonces $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ si y sólo si x es un entero.

Teoremas que parecen no ser proposiciones si-entonces

En ocasiones, nos encontraremos con teoremas que no parecen contener una hipótesis. Un ejemplo muy conocido de esto lo encontraremos en el campo de la trigonometría.

Teorema 5. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow$ si θ es un ángulo, entonces $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Otras formas de demostración

Existen varias formas en que podemos construir demostraciones:

1. Empleando conjuntos.
2. Por reducción al absurdo.
3. Mediante contraejemplo.

Demostración de equivalencias entre conjuntos

En la teoría de autómatas, frecuentemente es necesario demostrar un teorema que establece que los conjuntos construidos de dos formas diferentes son el mismo conjunto. A menudo, se trata de conjuntos de cadenas de caracteres y se denominan "lenguajes".

Veamos un ejemplo. Si E y F son dos expresiones que representan conjuntos, la proposición $E = F$ quiere decir que los dos conjuntos representados son iguales. De forma má precisa, cada uno de los elementos del conjunto representado por E está en el conjunto representado por F, y cada uno de los elementos del conjunto representado por F está en el conjunto representado por E.
Demostrar, Teorema 6. $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$.

Figura: Pasos correspondientes a la parse “si” del Teorema 6

	Proposición	Justificación
1.	x pertenece a $R \cup (S \cap T)$	Postulado
2.	x pertenece a R o x pertenece a $S \cap T$	(1) y la definición de unión
3.	x pertenece a R o x pertenece a S y T	(2) y la definición de intersección
4.	x pertenece a $R \cup S$	(3) y la definición de unión
5.	x pertenece a $R \cup T$	(3) y la definición de unión
6.	x pertenece a $(R \cup S) \cap (R \cup T)$	(4), (5), y la definición de intersección

Figura: Pasos correspondientes a la parse “sólo si” del Teorema 6

	Proposición	Justificación
1.	x pertenece a $(R \cup S) \cap (R \cup T)$	Postulado
2.	x pertenece a $R \cup S$	(1) y la definición de intersección
3.	x pertenece a $R \cup T$	(1) y la definición de intersección
4.	x pertenece a R o x pertenece a S y T	(2), (3), y el razonamiento sobre la unión
5.	x pertenece a R o x pertenece a $S \cap T$	(4) y la definición de intersección
6.	x pertenece a $R \cup (S \cap T)$	(5) y la definición de unión

Toda proposición si-entonces tiene una forma equivalente que, en algunas circunstancias, es más fácil de demostrar. La conversión contradictoria de la proposición “si H entonces C” es “si no C entonces no H”. Una proposición y su contradictoria son ambas verdaderas o ambas falsas, por lo que podemos demostrar una u otra.

Para ver por qué "si H entonces C" y "si no C entonces no H" son lógicamente equivalente, en primer lugar, observamos que hay que considerar cuatro casos:

1. $H = verdadero$, $C = verdadero$.
2. $H = verdadero$, $C = falso$.
3. $H = falso$, $C = verdadero$.
4. $H = falso$, $C = falso$.

Solo existe una manera de hacer que una proposición si-entonces sea falsa: la hipótesis tiene que ser verdadera y la conclusión falsa (inciso 2). En los otros tres casos, la proposición si-entonces es verdadera.

Consideremos ahora en qué casos la conversión contradictoria "si no C entonces no H" es falsa. Para que la esta proposición sea falsa, su hipótesis (que es "no C") tiene que ser verdadera y su conclusión (que es "no H") tiene que ser falta. Pero "no C" es verdadera cuando C es falsa y "no H" es falsa justamente cuando H es verdadera. Estas dos condiciones corresponden al inciso 2, lo que demuestra que en cada uno de los cuatros casos, la proposición original y su conversión contradictoria son ambas verdaderas o falsas; es decir, son lógicamente equivalentes.

Demostración por reducción al absurdo

Otra forma de demostrar una proposición de la forma "si H entonces C" consiste en demostrar la proposición: "H y no C implica falsedad". Es decir, comenzamos suponiendo que tanto la hipótesis H como la negación de la conclusión C son verdaderas. La demostración se completa probando que algo que se sabe que es falso se deduce lógicamente a partir de H y C. Esta forma de demostración se conoce como demostración por reducción al absurdo.

Recuerda la forma en que demostramos el Teorema 3: Sea S un subconjunto finitos de un determinaod conjunto infinito U. Sea T el conjunto complementario de S con respecto a U. Entonces T es infinito.

Una de las pruebas más importantes y reconocidas que utiliza la reducción al absurdo es “The Halting Problem - Prueba de que las computadoras no pueden hacer todo (El Problema de la Parada)”

En grupos de tres personas, discute las siguientes preguntas:

- ¿Porqué crees que es importante esta demostración?
- ¿Qué implicaciones tiene?

Revisemos el siguiente vídeo. En él, encontraremos respuestas a las preguntas antes planteadas: “The Halting Problem - An Impossible Problem to Solve”

En la práctica, no se habla de demostrar un teorema, sino que tenemos que enfrentarnos a algo que parece que es cierto, por ejemplo, una estrategia para implementar un programa y tenemos que decidir si el "teorema" es o no verdadero. Para resolver este problema, podemos intentar demostrar el teorema, y si no es posible, intentar demostrar que la proposición es falsa.

Generalmente, los teoremas son proposiciones que incluyen un número infinito de casos, quizás todos los valores de sus parámetros.

Suele ser más fácil demostrar que una proposición no es un teorema que demostrar que sí lo es.

1. Demostrar, Supuesto Teorema 1. Si un entero x es un número primo, entonces x es impar.
2. Demostrar, Supuesto Teorema 2. No existe ninguna pareja de enteros a y b tal que $a \mod b = b \mod a$.

Existe una forma especial de demostración, denominada "inductiva", que es esencial a la hora de tratar con objetos definidos de forma recursiva. Muchas de las demostraciones inductivas más habituales trabajan con enteros, pero en la teoría de autómatas, también necesitamos demostraciones inductivas, por ejemplo, para conceptos definidos recursivamente como pueden ser árboles y expresiones de diversas clases, como expresiones regulares.

Supón que tenemos que demostrar una proposición $S(n)$ acerca de un número entero n. Un enfoque que se emplea habitualmente consiste en demostrar dos cosas:

1. El *caso base*, donde demostramos $S(i)$ para un determinado entero i. Normalmente, $i = 0$ o $i = 1$, pero habrá ejemplos en los que desearemos comenzar en cualquier valor mayor de i, quizá porque la proposición S sea falsa para los enteros más pequeños.
2. El *paso de inducción*, donde suponemos que $n \geq i$, siendo i el entero empleado en el caso base, y demostramos que "si $S(n)$ entonces $S(n+1)$".

Intuitivamente, estas dos partes deberían convencernos de que $S(n)$ es verdadera para todo entero n que sea igual o mayor que el entero de partida i.

Para algunos de los ejemplos que vamos a desarrollar, nos basaremos en alguno de los siguientes teoremas:

- Si $A \leq B$, entonces $A + C \leq B + C$.
- Si $A \leq B$ y $B \leq C$, entonces $A \leq C$.

Demostrar, para todo $n \geq 3$:

$$2n + 1 \leq 2^n$$

Demostrar, para todo $n \geq 4$:

$$n^2 \leq 2^n$$

Demostrar, para todo $n \geq 1$:

$$\sum_1^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Supón una sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$ que cumplen las siguientes reglas:

1. $a_1 = 1$
2. $a_{n+1} = 2a_n + 1$ para toda $n \geq 1$.

Demostrar, para todo $n \geq 1$:

$$a_n = 2^n - 1$$