Algoritmos Z-Function y KMP

Pedro O. Pérez M., PhD.

Análisis y diseño de algoritmos avanzados
Tecnológico de Monterrey

pperezm@tec.mx

01-2023

Contenido

- El manejo de texto involucra una gran cantidad de información, por lo que es evidente la necesidad de automatizar ciertas tareas del manejo de texto. Funciones tales como búsqueda de un cadena, búsqueda y reemplazo de palabras y detección de errores ortográficos, entre otros.
- En años recientes, la biología molecular, al representar el genoma como una secuencia de caracteres llamados bases (A de adenina, C de citosina, G de guanina y T de tiamina), se ha enfrentado a la necesidad de realizar el tratamiento y análisis de grandes cantidad de cadenas de caracteres.

- Un cadena de caracteres (o string) es una secuencia ordenada de caracteres. El primer carácter en la cadena es el más izquierdo y ocupa la posición 1, el siguiente la posición 2 y así sucesivamente.
- La longitud de un cadena S, $|S|$, está dada por el número de caracteres que contiene.

- Una subcadena (o substring) de la cadena S es cualquier cadena de caracteres que se encuentran en S. La subcadena $S[i..j]$ es la cadena formada por los caracteres de S que están de la posición i a la j, inclusive.
  - Prefijo: dada una cadena S, un prefijo $S[1..i]$ del mismo es cualquier subcadena que inicia en la posición 1 y termina en la posición i.
  - Sufijo: dada una cadena S, un sufijo $S[i..n]$ del mismo es cualquier subcadena que inicia en la posición i y termina en el último elemento de S.

Problema de la coincidencia de un patrón

El problema de la coincidencia de un patrón en un texto (Pattern Matching Problem) también conocido como búsqueda de una subcadena en un texto (Substring Search), se define de la siguiente forma:

- Dada una cadena P, llamada patrón (pattern) y una cadena más grande T llamada el texto, encontrar la primer ocurrencia del patrón P en el texto T y regresar la posición del texto T donde inicial el patrón o -1 en caso de que el patrón no existe en el texto T.

Por ejemplo, si $P =$ "*aca*" y $T =$ "*bacacabcaca*", el patrón P se encuentra en T iniciando en las posiciones 2, 4 y 9. Observa que las ocurrencias pueden estar sobrepuestas tal y como sucede en las ocurrencias que inicial en 2 y 4. Para este caso, la respuesta es 2, debido a que es la posición de la primera ocurrencia de P en T.

La forma más simple de resolver este problema es por fuerza bruta, el cual consiste en ir moviendo a la derecha (shifting) una ventana que contiene el patrón, llamada ventana de deslizamiento (sliding windows), casilla por casilla sobre la cadena T y, en cuanto se encuentre la coincidencia, se regresa el número de la casilla de inicio.

Procedure 1 PATTERN_MATCHING

```
Input: P, T : String
  for i ← 1 to T.length - P.length do
    if P = T[i..(i + P.length)] then
      return i
    end if
  end for
  return -1
```

La complejidad del algoritmo anterior es $O(nm)$. Sin embargo, existen varias formas de mejorar este algoritmo para hacerlo en tiempo lineal:

- Función Z.
- Algoritmo KMP.

Dada una cadena S de longitud n, la función Z es un arreglo de longitud n donde el i-ésimo elemento es igual al máximo número de caracteres empezando desde la posición i que coincide con los primeros caracteres de S. En otras palabras, $Z[i]$ es la longitud del prefijo común más largo entre S y el sufijo de S que empiezan en i, $S[i..n]$.

Veamos un ejemplo. Dada la cadena $S =$ "*aaabaaab*", para cualquier $i > 1$,

- Posición 2,

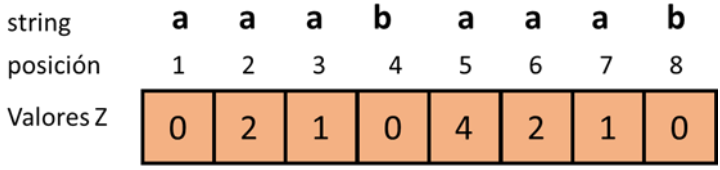
S = `aaabaaab`
S[2..n] = `aabaab`

- Posición 3,

S = `aaabaaab`
S[3..n] = `abaaab`

- Posición 4,

S = `aaabaaab`
S[4..n] = `baab`


string
a a a b a a a b
posición
1 2 3 4 5 6 7 8
Valores Z
0 2 1 0 4 2 1 0

Procedure 2 Z_FUNCTION

```
Input: S : String
    Z : Array[S.length]
    INIT(Z, 0)
    for i ← 1 to S.length do
        for j ← i to S.length do
            if S[i] = S[j - i] then
                Z[i] ← Z[i] + 1
            else
                break
            end if
        end for
    end for
    return Z
```

Este algoritmo tiene una complejidad $O(n^2)$. Para obtener un algoritmo eficiente, calcularemos los valores de $Z[i]$ de 1 a (n - 1), pero al mismo tiempo, al calcular un nuevo valor, intentaremos hacer el mejor uso posible de los valores anteriormente calcular. Es decir, vamos a usar memorización. Y, bueno, recuerda que estamos buscando el máximo prefijo. ¿Qué técnica podríamos emplear para este algoritmo?

- Llamemos "coincidencias de segmento" a las subcadenas que coinciden con el prefijo de S. Por ejemplo, el valor de $Z[i]$ es la longitud de la coincidencia de segmento que comienza en la posición i y que termina en la posición $i + Z[i] - 1$.
- Para hacer esto, mantendremos los índices $[l, r]$ del segmento coincidente más derecho. Es decir, entre todos los segmentos detectados mantendremos el que termina más al a derecha. En cierto modo, el índice r puede verse como el límite de lo que se ha registrado. Todo lo que está más allá aún no se conoce.

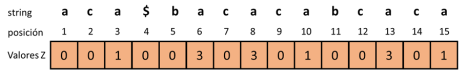
Entonces, si el índice actual, i, podemos tener que:

- $i > r$: La posición está fuera de lo que ya hemos procesado. Entonces, no nos queda más utilizar la comparación carácter a carácter que vimos en el algoritmo ingenuo. Sin embargo, al final, si $Z[i] > 0$, tendremos que actualizar los índices del segmento más derecho, porque está garantizado que el nuevo $r = i + Z[i] - 1$ es menor que el r anterior.

- $i \leq r$, la posición está dentro del segmento de coincidencias actual $[l, r]$.
  - Entonces podemos usar los valores Z ya calculados para inicializar el valor de $Z[i]$ a algo (mejor que comenzar desde cero), tal vez incluso un número más grande. Para ello, observamos si las subcadenas $S[l..r]$ y $S[0..(r-l)]$ coinciden. Eso significa que, como aproximación inicial para $Z[i]$, podemos tomar el valor ya calculado del segmento correspondiente $S[0..(r-l)]$, que es $Z[i-l]$.
  - Sin embargo, el valor $Z[i-l]$ podría ser demasiado grande: cuando se aplica a la posición i, ya que podría exceder el índice r. Esto no está permitido porque no sabemos nada sobre los caracteres a la derecha de r. Por lo tanto, como una buena aproximación, podemos decir que $Z[i] = min(r - i + 1, Z[i-l])$. Ahora solo falta calcular las posiciones que se encuentran a la derecha de r, y para ello usamos el algoritmo previo.

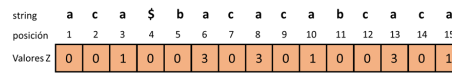
Procedure 3 Z_FUNCTION_DP

Input: S : String
  Z : Array[S.length]
  left $\leftarrow$ 1, right $\leftarrow$ 1, INIT(Z, 0)
  for i $\leftarrow$ 2 **to** S.length **do**
    if i $>$ right **then**
      CONTINUE_PART_1
      {if i $>$ right nothing matches so we will calculate Z[i] using naive way.}
    else
      CONTINUE_PART_2
    end if
  end for
  return Z



Procedure 4 CONTINUE_PART_1

left ← right ← i {right - left = 1 in starting, so it will start checking from 1'th index.}
while right ≤ S.length **and** S[right - left + 1] = S[right] **do**
  right ← right + 1
end while
Z[i] ← right - left
right ← right - 1



string	a	c	a	$	b	a	c	a	c	a	b	c	a	c	a
posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valores Z	0	0	1	0	0	3	0	3	0	1	0	0	3	0	1

Procedure 5 CONTINUE_PART_2

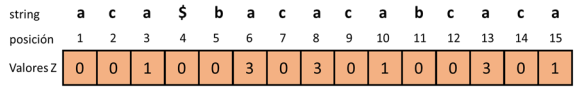
{k = i - left so k corresponds to number which matches in [left, right] interval.}
k = i - left + 1
{if Z[k] is less than remaining interval then Z[i] will be equal to Z[k].}
if Z[k] $\leq$ right - i + 1 **then**
  Z[i] $\leftarrow$ Z[k]
else
  {else start from right and check manually.}
  left $\leftarrow$ i
  while right $\leq$ S.length **and** S[right - left + 1] = S[right] **do**
    right $\leftarrow$ right + 1
  end while
  Z[i] $\leftarrow$ right - left
  right $\leftarrow$ right - 1
end if

string	a	c	a	$	b	a	c	a	c	a	b	c	a	c	a
posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valores Z	0	0	1	0	0	3	0	3	0	1	0	0	3	0	1

Usando la función Z para encontrar un patrón

Cómo mencionamos antes, podemos usar la Función Z para encontrar un patrón. Para lograrlo, basta con concatenar el patrón al inicio del texto, separados por un carácter que no esté en el texto. Normalmente se utiliza el signo de pesos ($).

- Por ejemplo, si $P =$ "*aca*" y $T =$ "*bacacabcaca*", haremos una nueva cadena T' formado con la concatenación de P y T, separados por un \$.
- Después de este proceso, las ocurrencias estarán indicadas en el arreglo de la función Z por las posiciones que tengan un valor de Z igual a la longitud del patrón y restándole la longitud del patrón más 1 (por el \$).



string	a	c	a	$	b	a	c	a	c	a	b	c	a	c	a
posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valores Z	0	0	1	0	0	3	0	3	0	1	0	0	3	0	1

Algoritmo KMP (Knuth-Morris-Pratt)

- Una mejor forma de resolver el problema de la coincidencia de un patrón es utilizar el algoritmo KMP, propuesto por Donald Knuth, James Morris y Vaughan Pratt en 1977.
- Recordemos que la forma ingenua resuelve el problema utilizando una ventana deslizante que se recorre un carácter a la vez. Lo que busca el algoritmo KMP es que, cuando se tenga una NO coincidencia, se recorran tantos caracteres como sea necesario siempre que se garantice que el patrón no estará ahí.

La idea básica es:

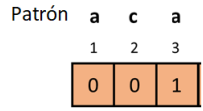
- Se van comparando los caracteres a partir de la posición i del texto con los del patrón.
- Cuando uno coincide, en la subcadena del patrón que se tiene antes la NO coincidencia, buscamos el máximo prefijo que al mimos tiempo sea sufijo de la subcadena.
- Si no existe, nos regresamos solo a la posición inicial de patrón.
- Si existe un prefijo que es sufijo, y la longitud de este prefijo es k, continuamos a partir de la posición $i + k$ del texto y $j + k$ del patrón.
- Este proceso se hace tan hacia atrás como sea necesario, pudiendo llegar a inicial el patrón a su posición inicial.

Por ejemplo, si parte del texto es $T =$ "*abcabx...*", y el patrón es $P =$ "*abcaby*", iniciamos comparando los caracteres uno a uno, hasta que llegamos a la posición 6. En esta posición falla porque tenemos una x en el texto y una y en el patrón. En el método ingenuo tendríamos que iniciar todo desde la posición 2 del texto y la 1 del patrón. Pero, podemos observar que en la subcadena anterior a la falla, es decir, en "*abcab*", existe el prefijo *ab*, con longitud 2, que al mismo tiempo es sufijo de la misma cadena (*abcab*), lo que nos dice qué es seguro que los 2 caracteres anteriores al fallo coinciden completamente con el inicio del patrón, por lo que las siguientes comparaciones se pueden hacer a partir de la 6 del texto y la posición 3 del patrón.

Para poder hacer todo lo anterior en tiempo lineal, es necesario hacer un pre-procesamiento del patrón. Este pre-procesamiento se hace usando un arreglo que inicia en la posición 1 (que sería la posición inicial de la cadena). Al final de este proceso, el arreglo contiene la longitud del máximo prefijo que es también sufijo en la subcadena $P[1..i]$.

Procedure 6 PREPROCESSING

```
Input: P : String
   V : Array[P.length]
   V[1] ← 0 i ← 2, j ← 1,
   while i ≤ P.length do
      if P[i] = P[j] then
         j ← j + 1, V[i] ← j, i ← i + 1,
      else
         if j = 1 then
            V[i] ← 0, i ← i + 1
         else
            j ← V[len - 1]
         end if
      end if
   end while
   return V
```



- Una vez preprocesado el patrón, el algoritmo es muy simple dado que el arreglo V no dice que, una vez hallado un fallo, a qué posición se debe regresar el patrón para seguir comparando con el texto.
- La complejidad del algoritmo resultante es lineal sobre la longitud del texto, $O(n)$.Y como la complejidad del preprocesamiento es lineal sobre la longitud del patrón, $O(m)$, la complejidad final del algoritmo KMP es lineal sobre los procesos, $O(n+m)$, mucho más eficiente que el $O(nm)$ del algoritmo ingenuo.

```
Input: P, T : String
    V ← PREPROCESSING(P), i ← 1, j ← 1
    while (T.length - i) ≥ (P.length - j) do
        if T[i] = P[j] then
            i ← i + 1, j ← j + 1
        end if
        if j > P.length then
            print  i - j
            j ← V[j - 1]
        else
            if i ≤ T.length and P[j] <> T[i] then
                if j <> 1 then
                    j ← V[j - 1]
                else
                    i ← i + 1
                end if
            end if
        end if
    end while
    return  -1
```