Programación dinámica

Pedro O. Pérez M., PhD.

Análisis y diseño de algoritmos avanzados
Tecnológico de Monterrey

pperezm@tec.mx

01-2023

Contenido

La programación dinámica, al igual que Divide y conquista, resuelve problemas combinando soluciones a subproblemas; pero a diferencia de esta, se aplica cuando los subproblemas se solapan, es decir, cuando comparten problemas más pequeños. Aquí la técnica cobra importancia, ya que calcula cada subproblema una sola vez; esto es, parte del principio de no calcular dos veces la misma información. Por tanto, utiliza estructuras de almacenamiento como vectores, tablas, arreglos, archivos, con el fin de almacenar los resultados parciales a medida que se resuelven los subcasos que contribuyen a la solución definitiva.

- Es una técnica ascendente que, normalmente, empieza por los subcasos más pequeños y más sencillos. Combinando sus soluciones, obtenemos las respuestas para los subcasos cada vez más grandes, hasta que llegamos a la solución del problema original.
- Se aplica muy bien a problemas de optimización. El mayor número de aplicaciones se encuentran en problemas que requieren maximización o minimización, ya que se pueden hallar múltiples soluciones y así evaluar para determinar cuál es la óptima.

La forma general de las soluciones desarrolladas mediante programación dinámica requiere los siguientes pasos:

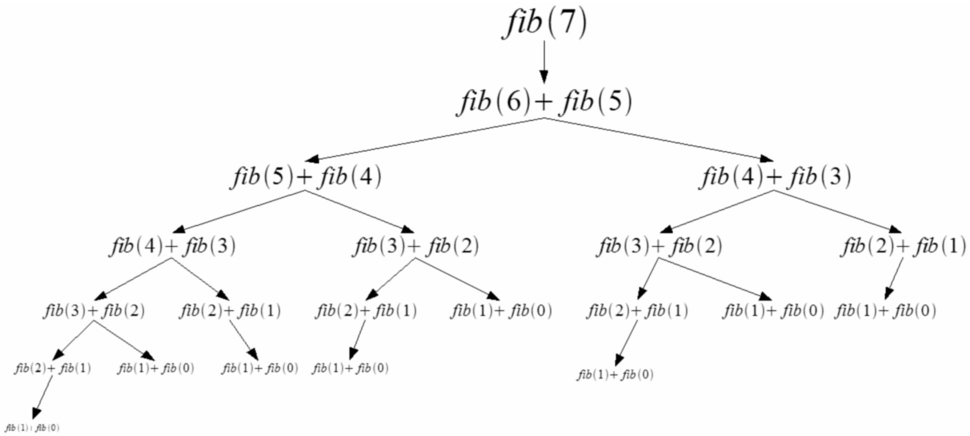
1. Plantear la solución, mediante una serie de decisiones que garanticen que será óptima, es decir, que tendrá la estructura de una solución óptima.
2. Encontrar una solución recursiva de la definición.
3. Calcular la solución teniendo en cuenta una tabla en la que se almacenen soluciones a problemas parciales para su reutilización, y así evitar un nuevo cálculo.
4. Encontrar la solución óptima utilizando la información previamente calcular y almacenada en las tablas.

Principio de optimalidad de Bellman: Cualquier subsecuencia de decisiones de una secuencia óptima de decisiones que resuelve un problema también debe ser óptima respecto al subproblema que resuelve.

Procedure 1 FIBONACCI

Input: n : *Integer*

```
if n < 1 then
    return −1
else if n = 1 or n = 2 then
    return 1
else
    return FIBONACCI(n − 1) + FIBONACCI(n − 2)
end if
```


fib(7)
fib(6)+ fib(5)
fib(5)+ fib(4)
fib(4)+ fib(3)
fib(4)+ fib(3)
fib(3)+ fib(2)
fib(3)+ fib(2)
fib(2)+ fib(1)
fib(3)+ fib(2)
fib(2)+ fib(1)
fib(2)+ fib(1)
fib(1)+ fib(0)
fib(2)+ fib(1)
fib(1)+ fib(0)
fib(1)+ fib(0)
fib(2)+ fib(1)
fib(1)+ fib(0)
fib(1)+ fib(0)
fib(1)+ fib(0)
fib(1)+ fib(0)
fib(1)+ fib(0)

Procedure 2 FIBONACCI_WITH_MEMORY1

```
Input: n : Integer, A : Array
  if n < 1 then
    return −1
  else if n = 1 or n = 2 then
    return 1
  else if A[n] <> −1 then
    return A[n]
  else
    A[n] ← FIBONACCI(n − 1) + FIBONACCI(n − 2)
    return A[n]
  end if
```

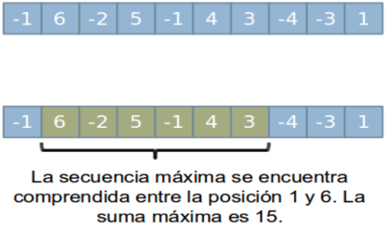
Procedure 3 FIBONACCI_WITH_MEMORY2

Input: n : *Integer*, A : *Array*

```
if n < 1 then
    return −1
else
    A[1] ← 1
    A[2] ← 1
    for i ← 3 to n do
        A[i] ← A[i − 1] + A[i − 2]
    end for
end if
```

Secuencia de suma máxima

Dado un arreglo de n números enteros positivos y negativos, encontrar los i elementos del arreglo cuya suma se la máxima posible.



Procedure 4 MAX_SUM(A:Array)

Input: n : *Integer*, A : *Array*

```
sum ← 0
ans ← 0
for i ← 1 to A.length do
    sum ← sum + A[i]
    ans ← MAX(ans, sum)
    if sum < 0 then
        sum ← 0
    end if
end for
return ans
```

Dado un sistema monetario S con N monedas de diferentes denominaciones y una cantidad de cambio C, calcular el menor número de monedas del sistema monetario S equivalente a C.

Ejemplos:

- **Input** : s[] = 1, 3, 4 c = 6
  Output : 2
  Explanation : The change will be (3 + 3) = 2

$$C[j] = \begin{cases} \infty & \text{if } j < 0, \\ 0 & \text{if } j = 0, \\ 1 + \min\limits_{1 \le i \le k} \{C[j - d_i]\} & \text{if } j \ge 1 \end{cases}$$

Procedure 5 COIN_CHANGE

```
Input: S : Array, C : Integer
  M : Matrix[0...S.length][0..C]
  n ← S.length
  for j ← 1 to n do
    M[0][j] ← ∞
  end for
  for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to C do
      /* Can i use currency of this denomination to this change (j)? */
      if j < S[i] then
        M[i][j] ← M[i − 1][j]
      else
        M[i][j] ← MIN(1 + M[i][j − S[i]], M[i − 1][j])
      end if
    end for
  end for
  return M[n][C]
```

Los números feos son números cuyos únicos factores primos son 2, 3 o 5 (o combinación de ellos). La secuencia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, ... muestra los primeros 11 números feos. Por convención, se incluye 1.

Como vemos en la diapositiva anterior, la secuencia de los primeros números feos es 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, ... Es más fácil de determinar la forma en que se genera está secuencia si la dividimos entre sus tres factores:

- 1x2, 2x2, 3x2, 4x2, 5x2...
- 1x3, 2x3, 3x3, 4x3, 5x3...
- 1x5, 2x5, 3x5, 4x5, 5x5...

¿Cuál se imprime primero?

Procedure 6 UGLY_NUMBER

Input: n : *Integer*

A : $Array[n]$

$A[1] = 1$

$i2 \leftarrow 1$

$i3 \leftarrow 1$

$i5 \leftarrow 1$

$ugly\_number \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 2$ to n **do**

next slide

end for

return $ugly\_number$

$ugly\_number = MIN((A[i2] * 2), (A[i3] * 3), (A[i5] * 5))$
$A[i] \leftarrow ugly\_number$
if $ugly\_number == (A[i2] * 2)$ **then**
    $i2 \leftarrow i2 + 1$
end if
if $ugly\_number == (A[i3] * 3)$ **then**
    $i3 \leftarrow i3 + 1$
end if
if $ugly\_number == (A[i5] * 5)$ **then**
    $i5 \leftarrow i5 + 1$
end if

Cuenta el número de formas posibles

Queremos dar un cambio de C pesos y tenemos un suministro infinito de monedas de valor S = $[S_1, S_2, ..., S_n]$ pesos, ¿de cuántas maneras podemos dar el cambio? Por ejemplo para C = 4, S = [1, 2, 3], existen cuatro formas de dar el cambio: [1, 1, 1, 1], [1, 1, 2], [2, 2], [1, 3]. Para C = 10, S = [2, 5, 3, 6], existen cinco soluciones: [2, 2, 2, 2, 2], [2, 2, 3, 3], [2, 2, 6], [2, 3, 5], [5, 5].

$$COUNT(type, value) = \begin{cases} 0, & \text{si } value < 0, \\ 1, & \text{si } value = 0, \\ COUNT(type+1, value) & \\ +COUNT(type, value - coins[type]), & \text{si } value > type. \end{cases}$$

Procedure 7 COUNT

Input: $S : Array, c : Integer$

$table : Matrix[0..S.length][0..c]$

for $j \leftarrow 0$ to c **do**

  $table[0][j] \leftarrow 0$

end for

for $i \leftarrow 0$ to $S.length$ **do**

  $table[i][0] \leftarrow 1$

end for

NEXT SLIDE

return $table[S.length][c]$

```
for i ← 1 to S.length do
  for j ← 1 to c do
    if S[i] > j then
      table[i][j] ← table[i − 1][j]
    else
      table[i][j] ← table[i − 1][j] + table[i − 1][j − S[i]]
    end if
  end for
end for
```