Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 23. April 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.

Inhaltsverzeichnis

1 Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung "Ring" stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei R ein Ring.

1.1 Grundlagen über Moduln

Definition 1.1.1. *Ein "R-Linksmodul" ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:*

a) $a(x + y) = ax + ay$

b) $(a + b)x = ax + bx$

c) $a(bx) = (ab)x$

d) $1x = x$

Ein "R-Rechtsmodul" ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \to M$, $(x, a) \mapsto xa$, sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

a') $(x + y)a = xa + yb$

b') $x(a + b) = xa + xb$

c') $x(ab) = (xa)b$

d') $x1 = x$

Anmerkung: Es bezeichne R^{op} den zu R entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge R mit derselbern Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\mathrm{op}} b := b \cdot a$. Ist M ein $R-$Rechtsmodul, dann wird M durch $ax := xa$ zu einem R^{op}-Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\mathrm{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R,\ x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur R-Linksmoduln, und unter einem R-Modul verstehen wir einen R-Linksmodul

- Forderung a) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

$$l_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

zum Ring $\mathrm{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$ gehört.

$$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

für $f, g \in \mathrm{End}(M)$, $x \in M$). Nach $b) - d)$ ist die Abbildung $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem R-Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

Beispiel 1.1.2: a) Ist K ein Körper, dann sind K-Moduln die K-Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe G ist ein $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \ldots x}_{\text{n-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \ldots + x}_{\text{(-n)-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe G genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als $\mathbb{Z}-$Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf G überein einstimmt (nämlich obige).

Definition 1.1.3. *Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$. Dann heißt φ "R-Modulhomomorphismus"(R-linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:*

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

b) $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

$Hom_R(M, M')$ bezeichne die Menge der R-Modulhomomorphismen von M nach M'.

Anmerkung: $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f + g)(x) := f(X) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

Beispiel 1.1.4: Sei M ein R-Modul, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M) =: \mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathrm{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \to R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus ("X vertauscht mit Elementen aus R, b im Allgemeinen nicht"). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \to \mathrm{End}(M), \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da φ R-linear ist. Somit wird M zum $R[X]$-Modul.

Definition 1.1.5. *Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ R-linear. φ heißt*

"Monomorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ φ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)

"Epimorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ φ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)

"Isomorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ φ ist bijektiv (Notation: $M \overset{\sim}{\to} M'$)

Existiert ein Isomorphismus zwischen M, M', so heißen M, M' "isomorph" (Notation: $M \cong M'$)

Anmerkung: Ist φ ein Isomorphismus, dann ist φ^{-1} ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.1.6. *Seien M, M' R-Moduln. Dann gilt:*

a) R kommutativ $\Rightarrow$ $Hom_R(M, M')$ ist ein R-Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R$, $\varphi \in Hom_R(M, M')$, $x \in M$.

b) $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ ist ein Unterring von $End(M) = End_{\mathbb{Z}}(M)$.

c) Die Abbildung $\Phi : Hom_R(R, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist R auf natürliche Weise ein R-Linksmodul). Ist R kommutativ, so ist Φ ein Isomorphismus von R-Moduln.

d) $End_R(R) \cong R^{op}$

Beweis. a) Beachte: Für $a \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder R-linear, denn für $a, b \in R$, $x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu Φ ist gegeben durch

$$\Psi : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \to M,\, a \mapsto am)$$

d) Nach Aussage *c*) haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \mathrm{End}_R(R) \to R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1)\cdot 1) = \psi(1)\varphi(1)\\ &= \varphi(1)\cdot_{\mathrm{op}}\psi(1) = \Phi(\varphi)\cdot_{\mathrm{op}}\Phi(\psi)\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.7. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$. N heißt R-Untermodul von M, wenn gilt:*

a) $0 \in N$

b) $x + y \in N$ *für alle* $x, y \in N$

c) $ax \in N$ *für alle* $a \in R, x \in N$

Beispiel 1.1.8: a) Betrachte R als R-Linksmodul. Dann sind die Untermodul von R genau die Linksideale in R (analog: Rechtsideale für R als R-Rechtsmodul).

b) Ist M ein R-Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Untermoduln. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M, dann ist $\bigcap_{i\in I} M_I \subseteq M$ ein Untermodul, sowie $\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i | \, x_i \in M_i,\, x_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$

c) Sind M, M' R-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $N' \subseteq M'$ ein Untermodul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Untermoduln.

im $\varphi := \varphi(M)$ heißt das "Bild" von φ

$\ker\varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der "Kern" von φ

Es gilt: φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$ und φ surjektiv $\Leftrightarrow$ im $\varphi = M'$

Bemerkung + Definition 1.1.9. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist die Faktorgruppe ${}^{M}\!/_{N}$ via $a(x+N) = ax+N$, $a \in R$, $x \in M$ ein R-Modul,der "Faktormodul" von M nach N. Die kanonische Abbildung $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$, $m \mapsto m + N$ ist ein Modulepimorphismus mit* $\ker\pi = N$.

Beispiel 1.1.10: Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, M ein R-Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i | \, n \in \mathbb{N},\, a_i \in I,\, x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von M. Ist I ein zweiseitiges Ideal, dann ist R/I ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von I geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$$R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \quad (a+I, b+I) \mapsto ab+I$$

M/IM ist ein R/I-Modul vermöge

$$(a+I)(x+M) := ax + IM, \quad a \in R,\, x \in M$$

Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)

Satz 1.1.11. *Seien M, M' R-Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to M/N$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \to M'$ R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

i) $N \subseteq ker\varphi$

ii) Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\overline{\varphi} : M/N \to M'$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\
& M/N \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz)**.** *Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R-Modulisomorphismus $\overline{\varphi} : M/ker\varphi \xrightarrow{\sim} im\,\varphi$ mit $\overline{\varphi}(x + ker\varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in M$.*

Satz 1.1.13. *(Isomorphiesätze) Sein M ein R-Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:*

a) Die Abbildung

$$N_1/N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\sim} (N_1+N_2)/N_2 \qquad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

ist ein Isomorphismus.

b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist

$$M/N_2 \big/ M/N_1 \xrightarrow{\sim} M/N_1 \qquad (x+N_2) + N_1/N_2 \mapsto x + N_1$$

ein Isomorphismus.

Satz 1.1.14. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{Untermoduln } M' \textit{ von } M \textit{ mit } N \subseteq M'\} & \longrightarrow & \{\textit{Untermoduln von } {}^{M}\!/_{N}\} \\ M' & \mapsto & \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) & \leftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

die inklusionserhaltend ist.

Bemerkung + Definition 1.1.15. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: $\prod_{i\in I} M_i$ ist ein R-Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das "direkte Produkt" der M_i. Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ mit $(m_i)_{i\in I} \mapsto m_j$ sind R-Modulhomomorphismen.*

Satz 1.1.16 (Universelle Eingenschaft des Produkts)**.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung*

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i) \qquad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \to M_i$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i\in I})$

Definition 1.1.17. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Der Untermodul*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \textit{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

heißt die "direkte Summe" der M_i. Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i\in I} \quad \textit{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

sind R-Modulhomomorphismen.

Anmerkung: Ist I endlich, dann ist $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

Satz 1.1.18 (Universelle Eingenschaft der Summe)**.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) \quad \textit{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to M$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \psi_i(m_i)$ definierte).

Anmerkung: Sei I eine Indexmenge, M ein R-Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i\in I} M, \qquad M^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} M, \qquad M^r := M^{\{1,..,r\}} = M^{(\{1,..,r\})}$$

Bemerkung 1.1.19. *Sei M ein R-Modul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von $\bigoplus$ mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R-Modulhomomorphismus*

$$\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i \quad \textit{mit} \quad \textit{im}\,\psi = \sum_{i\in I} M_i$$

Ist ψ injekitv, so heißt die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ "direkt", und wir schreiben auch $\bigoplus_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$.

Anmerkung: In der Situation von 1.19 gilt:

- $\sum_{i\in I} M_i$ direkt $\Longleftrightarrow \sum_{i\in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \bigoplus M_2 \Longleftrightarrow M_1 \cap M_2 = 0$

Definition 1.1.20. *Sei M ein R-Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \to M, a \mapsto ax$ ist ein R-Modulhomomorphismus, das Linksideal*

$$ann_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der "Annulator"von x. Das Bild im $f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von x erzeugte Untermodul von M. Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$

$$RX := \langle X \rangle_R := \sum_{x\in X} Rx = im\,(R^{(X)} \to M) = \bigcap_{\substack{X\subseteq N\subseteq M \\ N\,Untermodul\ mit\ X\subseteq N}} N$$

Der von X erzeugte Untermodul von M.

Definition 1.1.21. *Sei M ein R-Modul, $(x_i)_{i\in I}$ Familie von Elementen aus M, $\psi : R^{(I)} \to M, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i\in I}$ heißt*

> *"Erzeugendensystem" von M mit $R \overset{Def}{\Leftrightarrow} \psi$ surjektiv $\Longleftrightarrow M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten Untermodul überein*
>
> *"linear abhängig" $\Longleftrightarrow \psi$ injektiv*

“Basis“ von M über $R \Longleftrightarrow \psi$ bijektiv

M heißt

“endlich erzeugt“ $\Longleftrightarrow M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem

“frei“ $\Longleftrightarrow M$ besitzt eine Basis

Anmerkung:

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K-Moduln frei (LA1)
- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Gruppe (=$\mathbb{Z}$ Modul), die nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.
- Jeder R-Modul M ist Faktormodul eines freien R-Moduls, denn:

$$R^{(M)} \to M, (a_x)_{x\in M} \mapsto \sum_{x\in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$

- Basen eines freien R-Moduls können unterschiedliche Länge haben.

Satz 1.1.22. *Sei A ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt:*

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \Longleftrightarrow n_1 = n_2$$

Beweis. Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in A ein maximales Ideal J . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A^n/_{JA^n}$ ein $A/_J$-Modul (vgl Beispiel 1.10) und $A/_J$ ist ein Körper. Die Abbildung $A^n/_{JA^n} \to (A/_J)^n, (x_1, .., x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, ..., x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von $A/_J$-Moduln, d.h. $A^n/_{JA^n} \simeq (A/_J)^n$ ist ein n-dimensionaler $A/_J$-Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt $A^{n_1}/_{JA^{n_1}} \simeq A^{n_2}/_{JA^{n_2}}$, also $(A/_J)^{n_1} \simeq (A/_J)^{n_2}$ (als $A/_J$-Vektorraum) $\square$

Definition 1.1.23. *Sei A ein kommutativer Ring, M ein freier A-Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der "Rang"von M (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.22)*

1.2 Exakte Folgen

Definition 1.2.1. *Eine "'exakte Folge (exakte Sequenz) "' von R-Moduln ist eine Familie* $(f_i)_{i\in I}4$ *von R-Modulhomomorphismen* $f_i : M_i \to M_{i+1}$ *für ein (endliches oder unendliches) Intervall* $I \in \mathbb{Z}$*, sodass:*

$$im\ f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I miti+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise: $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$. *Eine exakte Folge der Form:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

heißt eine "kurze exakte Folge" (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ *bedeutet explizit:*

- f *injektiv*
- g *surjektiv*
- *im* $f = \ker g$.

Anmerkung:

- Seien M, N R-Moduln und $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Falls f injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/_{\text{im } f} \longrightarrow 0$ exakt.

  falls f surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.

- Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R-Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\overline{g} : M/_N \xrightarrow{\sim} M''$, und f beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sim"', "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "e"] & M \arrow[r, "f"] & M/_N \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & 0 \end{tikzcd}$$

  ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i' \longrightarrow M_i'' \longrightarrow 0$, $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von R-Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i\in I} M_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i''$$

sowie

$$\bigoplus_{i\in I} M_i' \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i''$$

(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

Satz 1.2.2. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[l, bend right, dashed, "t"'] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

i) Es gibt ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker g \oplus N'$

ii) Es gibt einen R-Moduolhomomorphismus $s : M'' \to M$ mit $g \circ s = id_{M''}$

iii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $t : M \to M'$ mit $t \circ f = id_{M'}$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, das die kurze exakte Sequenz “spaltet“. In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus s heißt ein “Schnitt“ von g.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = \ker g \oplus N'$. Dann ist $N' \cap \ker g = 0$. Dann ist $g\big|_{N'} : N' \to M''$ injektiv. Außerdem gilt: $M'' = g(M) = g(N')$, also ist $G\big|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$ ein Isomorphismus. Setze $s : M'' \to N' \hookrightarrow M$. Dann ist s ein R-Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Außerdem ist $M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \mathrm{im}\ s = \mathrm{im}\ f \oplus \mathrm{im}\ s = f(M') \oplus s(M'') \underset{f,s\text{ inj}}{\cong} M' \oplus M''$

$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $s : M'' \to M$ ein Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Sei $h : f(M') \to M'$ invers zu $f\big|^{f(M)} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$. Für $m \in M$ ist

$$g \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g))(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - ((\underbrace{g \circ s}_{=\mathrm{id}_{M''}}) \circ g)(m) = 0$$

Also ist $(\mathrm{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \mathrm{im}\ f$. Wir setzen $t : M \xrightarrow{\mathrm{id}_M - s\circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$, welcher ein R-Modulhomomorphisus ist mit

$$t \circ f = h \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \mathrm{id}_M \circ f}_{=\mathrm{id}_{M'}} - h \circ s \circ \underbrace{g \circ f}_{=0} = \mathrm{id}_{M'}$$

iii) $\Rightarrow$ *i)* Setze $t : M \to M'$ ein Modulhomomorphismus mit $t \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Setze $N' := \ker t$. Für $m \in M$ ist $m = \mathrm{id}_M(m) = \underbrace{(\mathrm{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \operatorname{im} f}$, also ist $M = N' + \operatorname{im} f$. Sei außerdem $m \in N' \cap \operatorname{im} f$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \mathrm{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch $m = 0$. Damit ist $M = N' \oplus \operatorname{im} f$. □

Satz 1.2.3. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von* R*-Moduln,* M'' *ein freier* R*-Modul. Dan spaltet die obige Folge.*

Beweis. Sei also $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von M''. Wähle für alle $i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $g(m_i) = v_i$ (beachte: g ist surjektiv). Sei $s : M'' = \bigoplus_{i \in I} Rv_i \to M$ der durch die Vorgabe $s(v_i) = m_i$ induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von $\bigoplus$). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$ □

Folgerung 1.2.4. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von* R*-Moduln,* M', M'' *freie* R*-Moduln. Dann ist auch* M *frei.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M' \cong R^{(I)}$, $M'' \cong R^{(J)}$. Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot\cup J)}$$

und damit auch frei. □

Anmerkung: Ist R kommutativ, und haben M, M' endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(M') + \mathrm{rang}(M'')$$

Bemerkung 1.2.5. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von* R*-Moduln. Dann gilt:*

a) Ist M *endlich erzeugt, dann ist* M'' *endlich erzeugt.*

b) Sind M', M'' *endlch erzeugt, dann ist* M *endlich erzeugt.*

Beweis. a) Ist M endlich erzeugt, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $\varphi : R^n \to M$. Dann ist $g \circ \varphi : R^n \to M''$ ebenfalls ein Epimorphismus, also ist M'' endlich erzeugt.

b) Sei $(x_1, \dots, x_r)$ ein Erzeugendensystem von M', $(y_1, \dots, y_s)$ ein Erzeugendensystem von M''. Da g surjektiv, exitieren $z_1, \dots, z_s \in M$ mit $g(z_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, s$.
Behauptung: $f(x_1), \dots, f(x_r), z_1, \dots, z_s$ ist ein Erzeugendensystem von M, denn sei $m \in M$. Dann exsitieren $a_1, \dots, a_s \in R$ mit $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$. Damit ist $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \operatorname{im} f$. Also existiert ein $v \in M'$, etwa $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$ mit $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$. Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^r b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

□

Anmerkung: Aus M endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass M' endlich erzeugt ist.

Beispiel 1.2.6: Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$. Dann ist R als R-Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setzt $I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$. Dann ist I ein Ideal in R, aber I ist nicht endliche erzeugt als R-Modul, denn angenommen ex existieren $f_1, \dots, f_r \in I$ mit $I = \sum_{i=1}^r R f_i$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_n] \subseteq R$.
Problem: $X_{n+1} \notin I$, denn andernfalls wäre $X^{n+1} = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$ mit $a_1, \dots, a_r \in R$ und setze $X_1 = \ldots = X_n = 0,\ X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$ Widerspruch!

Bemerkung 1.2.7. *Seien $M_1, \dots, M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ ist endlich erzeugt.

ii) $M_1, \dots, M_r$ sind endlich erzeugt.

Beweis. Es genügt, die Behaptung für $r = 2$ zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 2.5 □

Anmerkung: Ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_I$ mit $|I| = \infty,\ M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist M nicht endlich erzeugt, dann für $x_1, \dots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \dots, x_s \in \bigoplus_{j \in J} M_j$, also $\sum_{i=1}^s R_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i \in I} M_i$

Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma)**.** *Ist ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphisme mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

gegeben und φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen, φ_5 injektiv. Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd (Übungen). ☐

Anmerkung: Wir meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$ angewandt.

Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma)**.** *Sei folgendes Diagramm von R Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$\ker\varphi' \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{f} \ker\varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\varphi' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi''$$

wobei δ die

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & \ker\varphi' \arrow[r] \arrow[d] & \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \ker\varphi'' \arrow[d] \arrow[ddll, rounded corners, to path={-- ([xshift=8ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-4ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes}, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker}\varphi' \arrow[r] & \operatorname{coker}\varphi \arrow[r] & \operatorname{coker}\varphi'' &
\end{tikzcd}$$

Konstruktion von δ : Sei $m'' \in \ker \varphi'' \subseteq M''$. Da f surjektiv existiert ein $m \in M$ mit $m'' = f(m)$. Setze $n := \varphi(m)$. Dann ist $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$. Dann ist $n \in \ker g = \text{im } g'$. Also existiert ein $n' \in N'$ mit $g'(n') = n$ (n' ist eindeutig bestimmt wegen g' injektiv.) Setze $\delta(m'') := n' + \text{im } \varphi'$
Wohldefiniertheit von δ: Sei $\tilde{m} \in M$ mit $m'' = f(\tilde{m})$. Dann ist $(\tilde{m}) = f(m)$, also $\tilde{m} - m \in \ker f = \text{im } f'$. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\tilde{m} - m = f'(m')$. Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m+f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist $\tilde{n}' + \text{im } \varphi' = n' + \text{im } \varphi'$, Rest ist Übungsaufgabe. $\square$