# Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 20. Juni 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

**Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.**

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Moduln

**In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung "Ring" stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei $R$ ein Ring.**

## 1.1 Grundlagen über Moduln

**Definition 1.1.1.** Ein *$R$-Linksmodul* ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

a) $a(x + y) = ax + ay$

b) $(a + b)x = ax + bx$

c) $a(bx) = (ab)x$

d) $1x = x$

Ein *$R$-Rechtsmodul* ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \to M$, $(x, a) \mapsto xa$, sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

$a'$) $(x + y)a = xa + yb$

$b'$) $x(a + b) = xa + xb$

$c'$) $x(ab) = (xa)b$

$d'$) $x1 = x$

**Anmerkung.** Es bezeichne $R^{\text{op}}$ den zu $R$ entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge $R$ mit derselbern Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\text{op}} b := b \cdot a$. Ist $M$ ein $R-$Rechtsmodul, dann wird $M$ durch $ax := xa$ zu einem $R^{\text{op}}$-Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\text{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R,\ x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur $R$-Linksmoduln, und unter einem $R$-Modul verstehen wir einen $R$-Linksmodul

- Forderung $a$) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

$$l_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

zum Ring $\operatorname{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$ gehört.

$$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x)))$$

für $f, g \in \mathrm{End}(M)$, $x \in M$). Nach $b) - d)$ ist die Abbildung $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem $R$-Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

**Beispiel 1.1.2.** a) Ist $K$ ein Körper, dann sind $K$-Moduln die $K$-Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe $G$ ist ein $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \ldots x}_{\text{n-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \ldots + x}_{\text{(-n)-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring $R$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe $G$ genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als $\mathbb{Z}-$Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf $G$ überein einstimmt (nämlich obige).

**Definition 1.1.3.** Seien $M, M'$ $R$-Moduln, $\varphi : M \to M'$. Dann heißt $\varphi$ *$R$-Modulhomomorphismus* ($R$-linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

b) $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

$\mathrm{Hom}_R(M, M')$ bezeichne die Menge der $R$-Modulhomomorphismen von $M$ nach $M'$.

**Anmerkung.** $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f + g)(x) := f(X) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

**Beispiel 1.1.4.** Sei $M$ ein $R$-Modul, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M) =: \mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathrm{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \to R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus („$X$ vertauscht mit Elementen aus $R$, $b$ im Allgemeinen nicht"). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \to \mathrm{End}(M), \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da $\varphi$ $R$-linear ist. Somit wird $M$ zum $R[X]$-Modul.

**Definition 1.1.5.** Seien $M, M'$ $R$-Moduln, $\varphi : M \to M'$ $R$-linear. $\varphi$ heißt

*Monomorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi$ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)

*Epimorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi$ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)

*Isomorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi$ ist bijektiv (Notation: $M \xrightarrow{\sim} M'$)

Existiert ein Isomorphismus zwischen $M, M'$, so heißen $M, M'$ "isomorph" (Notation: $M \cong M'$)

**Anmerkung.** Ist $\varphi$ ein Isomorphismus, dann ist $\varphi^{-1}$ ein Isomorphismus.

**Bemerkung 1.1.6.** *Seien $M, M'$ $R$-Moduln. Dann gilt:*

*a) $R$ kommutativ $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist ein $R$-Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$.*

*b) $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M, M)$ ist ein Unterring von $\mathrm{End}(M) = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.*

*c) Die Abbildung $\Phi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist $R$ auf natürliche Weise ein $R$-Linksmodul). Ist $R$ kommutativ, so ist $\Phi$ ein Isomorphismus von $R$-Moduln.*

*d) $\mathrm{End}_R(R) \cong R^{op}$*

*Beweis.* a) Beachte: Für $a \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder $R$-linear, denn für $a, b \in R$, $x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu $\Phi$ ist gegeben durch

$$\Psi : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \to M,\, a \mapsto am)$$

d) Nach Aussage $c$) haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \mathrm{End}_R(R) \to R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1)\cdot 1) = \psi(1)\varphi(1)\\ &= \varphi(1) \cdot_{\mathrm{op}} \psi(1) = \Phi(\varphi) \cdot_{\mathrm{op}} \Phi(\psi)\end{aligned}$$

■

**Definition 1.1.7.** Sei $M$ ein $R$-Modul, $N \subseteq M$. $N$ heißt *$R$-Untermodul* von $M$, wenn gilt:

a) $0 \in N$

b) $x + y \in N$ für alle $x, y \in N$

c) $ax \in N$ für alle $a \in R, x \in N$

**Beispiel 1.1.8.** a) Betrachte $R$ als $R$-Linksmodul. Dann sind die Untermodul von $R$ genau die Linksideale in $R$ (analog: Rechtsideale für $R$ als $R$-Rechtsmodul).

b) Ist $M$ ein $R$-Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Untermoduln. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von $M$, dann ist $\bigcap_{i\in I} M_I \subseteq M$ ein Untermodul, sowie $\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i |\, x_i \in M_i,\, x_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$

c) Sind $M, M'$ $R$-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $N' \subseteq M'$ ein Untermodul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Untermoduln.

$\mathrm{im}\,\varphi := \varphi(M)$ heißt das *Bild* von $\varphi$

$\ker\varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der *Kern* von $\varphi$

Es gilt: $\varphi$ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$ und $\varphi$ surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{im}\,\varphi = M'$

**Bemerkung + Definition 1.1.9.** Sei $M$ ein $R$-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist die Faktorgruppe ${}^{M}\!/_{N}$ via $a(x+N) = ax+N$, $a \in R$, $x \in M$ ein $R$-Modul, der *Faktormodul* von $M$ nach $N$. Die kanonische Abbildung $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$, $m \mapsto m + N$ ist ein Modulepimorphismus mit $\ker\pi = N$.

**Beispiel 1.1.10.** Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, $M$ ein $R$-Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i |\, n \in \mathbb{N},\, a_i \in I,\, x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von $M$. Ist $I$ ein zweiseitiges Ideal, dann ist ${}^{R}\!/_{I}$ ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von $I$ geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$${}^{R}\!/_{I} \times {}^{R}\!/_{I} \longrightarrow {}^{R}\!/_{I}, \quad (a + I, b + I) \mapsto ab + I$$

${}^{M}/_{IM}$ ist ein ${}^{R}/_{I}$-Modul vermöge

$$(a+I)(x+M) := ax + IM, \quad a \in R,\, x \in M$$

*Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)*

**Satz 1.1.11.** *Seien $M, M'$ R-Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}/_{N}$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \to M'$ R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

*i)* $N \subseteq ker\varphi$

*ii) Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\overline{\varphi} : {}^{M}/_{N} \to M'$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$ :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \\ & {}^{M}/_{N} \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

**Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz).** *Seien $M, M'$ R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R-Modulisomorphismus*

$$\overline{\varphi} : {}^{M}/_{ker\varphi} \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi \quad \textit{mit} \quad \overline{\varphi}(x + ker\varphi) = \varphi(x)$$

*für alle $x \in M$.*

**Satz 1.1.13 (Isomorphiesaätze).** *Sei $M$ ein R-Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:*

*a) Die Abbildung*

$$ {}^{N_1}/_{N_1 \cap N_2} \xrightarrow{\sim} {}^{(N_1+N_2)}/_{N_2} \qquad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

*ist ein Isomorphismus.*

*b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist*

$$ {}^{M/N_2}/_{N_1/N_2} \xrightarrow{\sim} {}^{M}/_{N_1} \qquad (x+N_2) + {}^{N_1}/_{N_2} \mapsto x + N_1$$

*ein Isomorphismus.*

**Satz 1.1.14.** *Sei $M$ ein $R$-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}/_{N}$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{\mathit{Untermoduln}\ M' \mathit{von}\ M \mathit{mit}\ N \subseteq M'\} & \longrightarrow & \{\mathit{Untermoduln\ \ von}\ {}^{M}/_{N}\} \\ M' & \mapsto & \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) & \leftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

*die inklusionserhaltend ist.*

**Bemerkung + Definition 1.1.15.** Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Dann gilt: $\prod_{i\in I} M_i$ ist ein $R$-Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das *direkte Produkt* der $M_i$. Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ mit $(m_i)_{i\in I} \mapsto m_j$ sind $R$-Modulhomomorphismen.

**Satz 1.1.16 (Universelle Eingenschaft des Produkts).** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Dann gilt: Für jeden $R$-Modul $M$ ist die Abbildung*

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i) \qquad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i\in I}$$

*eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von $R$-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \to M_i$ ex. genau ein $R$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i\in I})$*

**Definition 1.1.17.** Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Der Untermodul

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \text{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

heißt die *direkte Summe* der $M_i$. Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i\in I} \quad \text{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sind $R$-Modulhomomorphismen.

**Anmerkung.** Ist $I$ endlich, dann ist $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

**Satz 1.1.18 (Universelle Eingenschaft der Summe).** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Dann gilt: Für jeden $R$-Modul $M$ ist die Abbildung*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) \quad \mathit{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i\in I}$$

*eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von $R$-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to M$ ex. genau ein $R$-Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \psi_i(m_i)$ definierte).*

**Anmerkung.** Sei $I$ eine Indexmenge, $M$ ein $R$-Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i\in I} M, \qquad M^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} M, \qquad M^r := M^{\{1,..,r\}} = M^{(\{1,..,r\})}$$

**Bemerkung 1.1.19.** *Sei $M$ ein $R$-Modul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von $M$. Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von $\bigoplus$ mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen $R$-Modulhomomorphismus*

$$\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i \quad \textit{mit} \quad \operatorname{im}\psi = \sum_{i\in I} M_i$$

*Ist $\psi$ injekitv, so heißt die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ "direkt", und wir schreiben auch $\bigoplus_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$.*

**Anmerkung.** In der Situation von 1.1.19 gilt:

- $\sum_{i\in I} M_i$ direkt $\Longleftrightarrow \sum_{i\in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \bigoplus M_2 \Longleftrightarrow M_1 \cap M_2 = 0$

**Definition 1.1.20.** Sei $M$ ein $R$-Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \to M, a \mapsto ax$ ist ein $R$-Modulhomomorphismus, das Linksideal

$$ann_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der *Annulator* von $x$. Das Bild $\operatorname{im} f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von $x$ erzeugte Untermodul von M. Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$

$$RX := \langle X\rangle_R := \sum_{x\in X} Rx = \operatorname{im}(R^{(X)} \to M) = \bigcap_{\substack{X\subseteq N\subseteq M \\ N\text{Untermodul mit } X\subseteq N}} N$$

Der von X *erzeugte Untermodul* von M.

**Definition 1.1.21.** Sei $M$ ein $R$-Modul, $(x_i)_{i\in I}$ Familie von Elementen aus $M$, $\psi : R^{(I)} \to M, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i\in I}$ heißt

*Erzeugendensystem* von $M$ mit $R \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \psi$ surjektiv $\Longleftrightarrow M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten Untermodul überein

*linear abhängig* $\Longleftrightarrow \psi$ injektiv

*Basis* von $M$ über $R \Longleftrightarrow \psi$ bijektiv

$M$ heißt

*endlich erzeugt* $\Longleftrightarrow$ $M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem

*frei* $\Longleftrightarrow$ $M$ besitzt eine Basis

**Anmerkung.**
- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle $K$-Moduln frei (LA1)
- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Gruppe (=$\mathbb{Z}$ Modul), die nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.
- Jeder $R$-Modul $M$ ist Faktormodul eines freien $R$-Moduls, denn:

$$R^{(M)} \to M, (a_x)_{x\in M} \mapsto \sum_{x\in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$

- Basen eines freien $R$-Moduls können unterschiedliche Länge haben.

**Satz 1.1.22.** *Sei $A$ ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt:*

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \Longleftrightarrow n_1 = n_2$$

*Beweis.* Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in $A$ ein maximales Ideal $J$ . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A^n/_{JA^n}$ ein $A/_J$-Modul (vgl Beispiel 1.10) und $A/_J$ ist ein Körper. Die Abbildung $A^n/_{JA^n} \to (A/_J)^n, (x_1, .., x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, ..., x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von $A/_J$-Moduln, d.h. $A^n/_{JA^n} \simeq (A/_J)^n$ ist ein n-dimensionaler $A/_J$-Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt $A^{n_1}/_{JA^{n_1}} \simeq A^{n_2}/_{JA^{n_2}}$, also $(A/_J)^{n_1} \simeq (A/_J)^{n_2}$ (als $A/_J$-Vektorraum) ■

**Definition 1.1.23.** Sei $A$ ein kommutativer Ring, $M$ ein freier $A$-Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der *Rang* von M (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.1.22)

## 1.2 Exakte Folgen

**Definition 1.2.1.** Eine *exakte Folge* (*exakte Sequenz*) von $R$-Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von $R$-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \to M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \in \mathbb{Z}$, sodass:

$$\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I \text{mit} \;\; i+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise: $\quad \ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots .$

Eine exakte Folge der Form:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

heißt eine *kurze exakte Folge* (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ bedeutet explizit:

- $f$ injektiv
- $g$ surjektiv
- $\operatorname{im} f = \ker g$.

**Anmerkung.**

- Seien $M, N$ $R$-Moduln und $f : M \to N$ ein $R$-Modulhomomorphismus.
  Falls $f$ injektiv, dann ist $\;0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} {}^{N}\!/_{\operatorname{im} f} \longrightarrow 0\;$ exakt.

  falls $f$ surjektiv, so ist $\;0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0\;$ exakt.

- Ist $\;0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0\;$ eine exakte Folge von $R$-Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\overline{g} : {}^{M}\!/_{N} \xrightarrow{\sim} M''$, und $f$ beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sim"', "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "e"] & M \arrow[r, "f"] & {}^{M}\!/_{N} \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & 0
\end{tikzcd}$$

  ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $\;M_i \longrightarrow M_i' \longrightarrow M_i''\;$, $\;i \in I\;$ eine Familie exakter Folgen von $R$-Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i\in I} M_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i''$$

sowie

$$\bigoplus_{i\in I} M_i' \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i''$$

(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

**Satz 1.2.2.** *Sei* $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[l, bend right, dashed, "t"'] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$ *eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i) Es gibt ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker g \oplus N'$*

*ii) Es gibt einen R-Moduolhomomorphismus $s : M'' \to M$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$*

*iii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $t : M \to M'$ mit $t \circ f = \mathrm{id}_{M'}$*

*Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, das die kurze exakte Sequenz "spaltet". In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus $s$ heißt ein "Schnitt" von $g$.*

*Beweis.* $i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = \ker g \oplus N'$. Dann ist $N' \cap \ker g = 0$. Dann ist $g\big|_{N'} : N' \to M''$ injektiv. Außerdem gilt: $M'' = g(M) = g(N')$, also ist $G\big|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$ ein Isomorphismus. Setze $s : M'' \to N' \hookrightarrow M$. Dann ist $s$ ein $R$-Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Außerdem ist

$$M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \operatorname{im} s = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} s = f(M') \oplus s(M'') \underset{f,s \text{ inj}}{\cong} M' \oplus M''$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $s : M'' \to M$ ein Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Sei $h : f(M') \to M'$ invers zu $f\big|^{f(M)} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$. Für $m \in M$ ist

$$g \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g))(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - ((\underbrace{g \circ s}_{=\mathrm{id}_{M''}}) \circ g)(m) = 0$$

Also ist $(\mathrm{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \operatorname{im} f$. Wir setzen $t : M \xrightarrow{\mathrm{id}_M - s\circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$, welcher ein $R$-Modulhomomorphisus ist mit

$$t \circ f = h \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \mathrm{id}_M \circ f}_{=\mathrm{id}_{M'}} - h \circ s \circ \underbrace{g \circ f}_{=0} = \mathrm{id}_{M'}$$

$iii) \Rightarrow i)$ Setze $t : M \to M'$ ein Modulhomomorphismus mit $t \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Setze $N' := \ker t$. Für $m \in M$ ist $m = \mathrm{id}_M(m) = \underbrace{(\mathrm{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \operatorname{im} f}$, also ist

$M = N' + \operatorname{im} f$. Sei außerdem $m \in N' \cap \operatorname{im} f$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \mathrm{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch $m = 0$. Damit ist $M = N' \oplus \operatorname{im} f$. ∎

**Satz 1.2.3.** *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von* $R$*-Moduln,* $M''$ *ein freier* $R$*-Modul. Dan spaltet die obige Folge.*

*Beweis.* Sei also $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von $M''$. Wähle für alle $i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $g(m_i) = v_i$ (beachte: $g$ ist surjektiv). Sei $s : M'' = \bigoplus_{i\in I} Rv_i \to M$ der durch die Vorgabe $s(v_i) = m_i$ induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von $\bigoplus$). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$ ∎

**Folgerung 1.2.4.** *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von* $R$*-Moduln,* $M', M''$ *freie* $R$*-Moduln. Dann ist auch* $M$ *frei.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist $M' \cong R^{(I)}$, $M'' \cong R^{(J)}$. Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot\cup J)}$$

und damit auch frei. ∎

**Anmerkung.** Ist $R$ kommutativ, und haben $M, M'$ endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M') + \operatorname{rang}(M'')$$

**Bemerkung 1.2.5.** *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von* $R$*-Moduln. Dann gilt:*

a) *Ist* $M$ *endlich erzeugt, dann ist* $M''$ *endlich erzeugt.*

b) *Sind* $M'$, $M''$ *endlich erzeugt, dann ist* $M$ *endlich erzeugt.*

*Beweis.* a) Ist $M$ endlich erzeugt, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $\varphi : R^n \to M$. Dann ist $g \circ \varphi : R^n \to M''$ ebenfalls ein Epimorphismus, also ist $M''$ endlich erzeugt.

b) Sei $(x_1, \ldots, x_r)$ ein Erzeugendensystem von $M'$, $(y_1, \ldots, y_s)$ ein Erzeugendensystem von $M''$. Da $g$ surjektiv, exitieren $z_1, \ldots, z_s \in M$ mit $g(z_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, s$.
Behauptung: $f(x_1), \ldots, f(x_r), z_1, \ldots, z_s$ ist ein Erzeugendensystem von $M$, denn sei $m \in M$. Dann exsitieren $a_1, \ldots, a_s \in R$ mit $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$. Damit ist $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \operatorname{im} f$. Also existiert ein $v \in M'$, etwa $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$ mit $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$. Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^r b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

**Anmerkung.** Aus $M$ endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass $M'$ endlich erzeugt ist.

**Beispiel 1.2.6.** Sei $K$ ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \ldots]$. Dann ist $R$ als $R$-Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setze

$$I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$$

Dann ist $I$ ein Ideal in $R$, aber $I$ ist nicht endlich erzeugt als $R$-Modul, denn angenommen ex existieren $f_1, \ldots, f_r \in I$ mit $I = \sum_{i=1}^r R f_i$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_n] \subseteq R$.
Problem: $X_{n+1} \notin I$, denn andernfalls wäre $X^{n+1} = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$ mit $a_1, \ldots, a_r \in R$ und setze $X_1 = \ldots = X_n = 0,\ X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$ Widerspruch!

**Bemerkung 1.2.7.** *Seien $M_1, \ldots, M_r$ $R$-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i)* $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ *ist endlich erzeugt.*

*ii)* $M_1, \ldots, M_r$ *sind endlich erzeugt.*

*Beweis.* Es genügt, die Behaptung für $r = 2$ zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 1.2.5 ■

**Anmerkung.** Ist $M = \bigoplus_{i\in I} M_I$ mit $|I| = \infty$, $M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist $M$ nicht endlich erzeugt, dann für $x_1, \ldots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \ldots, x_s \in \bigoplus_{j\in J} M_j$, also

$$\sum_{i=1}^{s} R_i \subseteq \bigoplus_{j\in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i\in I} M_i$$

**Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma).** *Ist ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

*gegeben und $\varphi_1$ surjektiv, $\varphi_2, \varphi_4$ Isomorphismen, $\varphi_5$ injektiv. Dann ist $\varphi_3$ ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Diagrammjagd (Übungen). ■

**Anmerkung.** Wir meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$ angewandt.

**Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma).** *Sei folgendes kommutatives Diagramm von R Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N''
\end{tikzcd}$$

*Dann existiert eine exakte Sequenz von R-Moduln*

$$\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{f} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$$

*wobei $\delta$ die sogenannte Übergangabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und $f', f, g', g$ induziert sind. Ist $f'$ injektiv, dann ist auch* $\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi$ *injektiv. Ist $g$ surjektiv, dann auch* $\operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$

*Beweis.* Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & \ker\varphi' \arrow[r] \arrow[d] & \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \ker\varphi'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker}\varphi' \arrow[r] & \operatorname{coker}\varphi \arrow[r] & \operatorname{coker}\varphi'' &
\end{tikzcd}$$

Konstruktion von $\delta$ : Sei $m'' \in \ker\varphi'' \subseteq M''$. Da $f$ surjektiv, existiert ein $m \in M$ mit $m'' = f(m)$. Setze $n := \varphi(m)$. Dann ist $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$. Dann ist $n \in \ker g = \operatorname{im} g'$. Also existiert ein $n' \in N'$ mit $g'(n') = n$ ($n'$ ist eindeutig bestimmt wegen $g'$ injektiv.) Setze $\delta(m'') := n' + \operatorname{im}\varphi'$

Wohldefiniertheit von $\delta$: Sei $\tilde{m} \in M$ mit $m'' = f(\tilde{m})$. Dann ist $(\tilde{m}) = f(m)$, also $\tilde{m} - m \in \ker f = \operatorname{im} f'$. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\tilde{m} - m = f'(m')$. Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m+f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist $\tilde{n}' + \operatorname{im}\varphi' = n' + \operatorname{im}\varphi'$, Rest ist Übungsaufgabe. ■

## 1.3 Noethersche und Artinsche Moduln

**Definition 1.3.1.** Sei $M$ ein $R$-Modul. $M$ heißt *noethersch* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ jeder Untermodul von $M$ ist endlich erzeugt.

**Anmerkung.** $M$ noethersch $\Rightarrow M$ ist endlich erzeugt.

**Beispiel 1.3.2.** Sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-VR. Dann gilt: $V$ noethersch $\Leftrightarrow V$ ist endlich dimensional

**Satz 1.3.3.** *Sei $M$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i)* *$M$ ist noethersch*

*ii)* *Jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ von Untermoduln wird stationär, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$.*

*iii)* *Jede nichtleere Menge von Untermoduln von $M$ enthält ein maximales Element.*

*Man sagt in diesem Fall auch: die Untermoduln von $M$ erfüllen die* aufsteigende Kettenbedingung.

*Beweis.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sei $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von $M$. Setze $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_i \subseteq M$. $N$ ist Untermodul von $M$ (beachte: $a, b \in N \Rightarrow$ Es existieren $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $a \in M_i$, $b \in M_j$, Œgilt: $i \leq j \Rightarrow M_i \subseteq M_j$, $a, b \in M_j \Rightarrow a + b \in M_j \subseteq N$). Da $M$ noethersch, ist $N$ endlich erzeugt, d.h. es existiert ein endliches Erzeugendensystem $x_1, \dots x_r$ von $N$. Für jedes $i \in \{1, \dots r\}$ exsistieren $j_i \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in M_{j_i}$. Setze $n := max\{j_i \mid i = 1, \dots r\} \Rightarrow x_1, \dots, x_r \in M_n \Rightarrow N \subseteq M_n \subseteq N \Rightarrow N = M_n \Rightarrow$ für alle $i \geq n$ ist $M_i = M_n$.
*ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Sei $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von $M$, die kein maximales Element hat. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M' \subsetneq M''$. $\Rightarrow$ Es existiert eine Kette von Untermoduln $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$ von $M$ , die nicht stationär wird.
*iii)* $\Rightarrow$ *i)* Sei $N \subseteq M$ ei Untermodul. Setze

$$\mathcal{X} := \{M' \subseteq M \text{Untermodul} \mid M' \text{endlich erzeugt}, M' \subseteq N\}$$

Wegen $0 \in \mathcal{X}$ ist $\mathcal{X} \neq \emptyset \overset{(iii)}{\Rightarrow}$ Es existiert ein maximales Element $\tilde{M}$ in $\mathcal{X}$.
Behauptung: $\tilde{M} = N$, denn: Sei $x \in N \Rightarrow Rx + \tilde{M} \in \mathcal{X}$ und $\tilde{M} \subseteq Rx + \tilde{M}$. Aufgrund der Maximalität von $\tilde{M}$, folgt $Rx + \tilde{M} = \tilde{M}$, als $x \in \tilde{M}$. ■

**Bemerkung 1.3.4.** *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i) $M$ ist noethersch*

*ii) $M'$ und $M''$ sind noethersch*

*Beweis.* Es genügt den Fall der Folge $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}\!/_{N} \longrightarrow 0$ für einen Untermodul $N \subseteq M$ zu betrachten. (Vgl. Anmerkung nach 1.2.1).
$i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq N$ Untermodul $\Rightarrow N'$ Untermodul von $M \overset{M \text{noet.}}{\Longrightarrow} N'$ endlich erzeugt. Sei $N'' \subseteq {}^{M}\!/_{N}$ Untermodul. Also ist $\pi^{-1}(N'') \twoheadrightarrow N''$ ein Epimorphismus und damit $N''$ endlich erzeugt nach 2.5 (a).
$ii) \Rightarrow i)$ Seien $N, {}^{M}\!/_{N}$ noethersch, und sei $M' \subseteq M$ Untermodul. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \cap N \longrightarrow M' \longrightarrow {}^{M'}\!/_{M' \cap N} \longrightarrow 0$$

wobei $M' \cap N$ endlich erzeugt, da $N$ noethersch. Außerdem ist

$${}^{M'}\!/_{M' \cap N} \simeq {}^{(M'+N)}\!/_{N} \subseteq {}^{M}\!/_{N}$$

endlich erzeugt, da ${}^{M}\!/_{N}$ noethersch. $\Rightarrow M'$ ist endlich erzeugt nach 1.2.5 ■

**Bemerkung 1.3.5.** *$M_1, ..., M_r$ $R$-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i) $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ noethersch*

*ii) $M_1, ..., M_r$ noethersch.*

*Beweis.* Analog zum Beweis von 1.2.7 unter Verwendung von 1.3.4 ■

**Definition 1.3.6.** $R$ heißt *linksnoethersch* (bzw. *rechtsnoethersch*), wenn $R$ als Links- (bzw. Rechts-) Modul über sich selbst noethersch ist. $R$ heißt *noethersch*, wenn $R$ links-und rechtsnoethersch ist.

**Anmerkung.** Es gibt Ringe, die rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch sind (und umgekehrt)

**Beispiel 1.3.7.** a) Ist $R$ ein Schiefkörper (Divisionsring) (d.h. $R\backslash\{0\}$ ist eine Gruppe bzgl. ”.”), dann ist $R$ noethersch, denn wegen $Ra = R = aR$ für alle $a \in R\backslash\{0\}$ sind die einzigen Linksideale (Rechtsideale) in $R$ durch $0, R$ gegeben, diese sind endlich erzeugt.

b) Sei $K$ ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$ ist nicht noethersch nach Beispiel 1.2.6.

**Bemerkung 1.3.8.** *Sei $R$ ein linksnoetherscher Ring, $M$ ein endlich erzeugtes $R$-Modul. Dann ist $M$ noethersch.*

*Beweis.* Wegen $M$ endlich erzeugt, existiert ein Epimorphismus $R^n \twoheadrightarrow M$ für geeignetes n. Nach Vorraussetzung ist $R$ als $R$-Modul noethersch $\overset{1.3.5}{\Rightarrow}$ $R^n$ noetherscher $R$-Modul $\overset{1.3.4}{\Rightarrow}$ $M$ noethersch. ■

**Bemerkung 1.3.9.** *Sei $R$ linksnoetherscher Ring, $I \subseteq R$ zweiseitiges Ideal. Dann ist ${}^{R}\!/_{I}$ linksnoethersch.*

*Beweis.* Es ist zu zeigen: ${}^{R}\!/_{I}$ ist noethersch als ${}^{R}\!/_{I}$-Modul.
Vorüberlegungen:

1. Für $N \subseteq {}^{R}\!/_{I}$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} N \text{ ist } {}^{R}\!/_{I}\text{-Modul von } {}^{R}\!/_{I} & \Leftrightarrow & N \text{ ist } R-\text{Untermodul von } {}^{R}\!/_{I} \\ (\text{bezüglich } \overline{a}\cdot\overline{x} := \overline{ax}) & & (\text{bezüglich } a\cdot\overline{x} := \overline{ax}) \end{array}$$

2. Für jeden ${}^{R}\!/_{I}$-Untermodul $N$ von ${}^{R}\!/_{I}$ gilt:

$$N \text{ ist endlich erzeugt über } {}^{R}\!/_{I} \Leftrightarrow N \text{ ist endlich erzeugt über} R$$

Nach den Vorüberlegungen genügt es zu zeigen, dass ${}^{R}\!/_{I}$ noethersch ist als $R$-Modul. Dies folgt aus 3.8, denn ${}^{R}\!/_{I}$ ist endlich erzeugt als $R$-Modul (erzeugt von $\overline{1}$). ■

**Anmerkung.** Unterringe noetherscher Ringe sind im Allgemeinen nicht noethersch (siehe Übungsaufgaben)

**Bemerkung 1.3.10.** *Seien $M, N$ $R$-Moduln mit $M \cong M \oplus N, N \neq 0$. Dann ist $M$ nicht noethersch.*

*Beweis.* Setze

$$\mathcal{X} := \{N' \subseteq M\text{Untermodul} \mid \exists M' \subseteq M, \text{ sd. } M = M' \oplus N' \text{ und } M' \cong M\}$$

Offenbar ist $0 \in \mathcal{X}$, denn $M = M \oplus 0$, also $\mathcal{X} \neq \emptyset$.
Angenommen $M$ ist noethersch. Dann enthält $\mathcal{X}$ ein maximales Element $N'$, also existiert ein $M' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus N'$ und $M' \cong M$. Nach Voraussetzung existiert ein $\varphi : M \bigoplus N \overset{\sim}{\longrightarrow} M \overset{\sim}{\longrightarrow} M'$. Also ist

$$M' = \varphi(M) \oplus \varphi(N) \Rightarrow M = M' \oplus N' = \underbrace{\varphi(M)}_{=:M''} \oplus \underbrace{\varphi(N) \oplus N'}_{=:N''}$$

Es ist $M \cong \varphi(M) = M''$, somit $N'' \in \mathcal{X}$. Außerdem ist $\varphi(N) \neq 0$ wegen $N \neq 0$ und $\varphi$ injektiv. Damit folgt $N' \subsetneq N''$ im Widerspruch zur Maximalität von $N'$. ■

**Satz 1.3.11.** *Sei $R$ linksnoetherscher Ring, $R \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt: $R^{n_1} \simeq R^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$.*

*Beweis.* ohne Einschränkung gelte $n_1 \geq n_2 \Rightarrow R^{n_2} \simeq R^{n_1} \simeq R^{n_2} \oplus R^{n_1-n_2}$. Wegen $R^{n_2}$ noethersch, folgt mit 1.3.10 : $R^{n_1-n_2} = 0$, also $n_1 = n_2$ ■

**Anmerkung.**
- Obiger Satz zeigt, dass der Bergiff des Ranges freier Moduln auch für endlich erzeugte, freie Modlun über linksnoetherschen Ringen wohldefiniert ist.
- Jeder Körper ist linksnoethersch $\Rightarrow$ So erhält man einen neuen Beweis für Ergebnis aus LA1

**Satz 1.3.12 (Hilbertscher Basissatz).** *Sei $R$ ein linksnoetherscher Ring. Dann ist $R[X]$ linksnoethersch.*

*Beweis.* Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal. Es ist zu zeigen, dass $I$ als $R[X]$-Modul endlich erzeugt ist.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $I_n := \{f \in I \mid \deg f \leq n\}$, was offenbar ein $R$-Modul ist. Wir betrachten die $R$-lineare Abbildung
$$b_n : I_n \longrightarrow R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto a_n$$
also ist $B_n := b_n(I_n) \subseteq R$ ein Linksideal. Für $f \in I_n$ ist $Xf \in I_{n+1}$, also $b_n(f) = b_{n+1}(Xf) \in B_{n+1} = b_{n+1}(I_{n+1})$, woraus wir eine Kette von Linksidealen $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ erhalten, welche, da $R$ linksnoethersch ist, stationär ist, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B_m = B_n$ für alle $m \geq n$.

2. Behauptung: $I = R[X]I_n$, denn:
"$\supseteq$" klar, wegen $I_n \subseteq I$, wobei $I$ ein Linksideal ist.
"$\subseteq$" Es ist $I = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m$, d.h. es genügt zu zeigen, dass $I_m \subseteq R[X]I_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, was wir per Induktion nach $m$ zeigen.
$m \leq n$: klar.
$m > n$ : Sei $f \in I_m$. Dann ist $b_m(f) \in B_m = B_n = b_n(I_n)$, also existiert ein Polynom $f_1 \in I_n$ mit $b_m(f) = b_n(f_1) = b_m(X^{m-n}f_1)$. Also ist $f - X^{m-n}f_1 \in I_{m-1} \overset{\text{IV}}{\subseteq} R[X]I_n$. Wegen $X^{m-n}f_1 \in R[X]I_n$, folgt $f \in R[X]I_n$

3. $I_n$ ist endlich erzeugt als $R$-Modul, denn: $I_n \subseteq \sum_{i=0}^{n} RX^i$, und $\sum_{i=0}^{n} RX^i$ ist ein endlich erzeugter $R$-Modul, also insbesondere noethersch nach 1.3.8,

weshalb $I_n$ als Untermodul endlich erzeugt ist, d.h. es existieren $g_1, \dots, g_r \in I_n$ mit $I_n = \sum_{i=1}^r Rg_i$, also

$$I \stackrel{2.}{=} R[X]I_n = \sum_{i=1}^{r} R[X]g_i$$

d.h. $I$ ist endlich erzeugt als $R[X]$-Modul. ■

**Folgerung 1.3.13.** *a) Ist $R$ ein linksnoetherscher Ring, dann ist $R[X_1, \dots, X_n]$ linksnoethersch*

*b) Sind $A$, $B$ kommutative Ring, $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, sodass $B$ von $\varphi(A)$ und einer endlichen Menge $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq B$ als Ring erzeugt wird. Dann gilt: $A$ ist nothersch $\Rightarrow$ $B$ noethersch.*

*Beweis.* a) aus 1.3.12 per Induktion

b) Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Ringhomomorphismus

$$\psi : A[X_1, \dots, X_r] \twoheadrightarrow B, \quad X_i \mapsto x_i, \quad \text{und} \quad \psi\big|_A = \varphi$$

Ist $A$ noethersch, dann ist $A[X_1, \dots, X_r]$ nothersch nach $a)$ und nach 3.9 ist $B$ noethersch. ■

**Definition 1.3.14.** Sei $M$ ein $R$-Modul. $M$ heißt *artinsch* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jede absteigende Kette $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ von Untermoduln von $M$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$ ("absteigende Kettenbedingung").

**Definition 1.3.15.** $R$ heißt *linksartinsch* (bzw. *rechtsartinsch*) $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $R$ ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selber artinsch. $R$ heißt *artinsch* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $R$ ist links- und rechtsartinsch.

**Beispiel 1.3.16.** a) Jeder endliche Ring ist artinsch (und noethersch).

b) $\mathbb{Z}$ ist kein artinscher Ring, denn $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \dots$

c) Sei $M$ ein endliches Monoid, $K$ ein Körper, $R = K[M]$ sei der Monoidring (vgl. Algebra 1-Übungen). Dann ist $R$ linksartinsch, denn: $K[M]$ ist ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum, jeder $K[M]$-Untermodul von $K[M]$ ist ein $K$-Untervektorraum von $K[M]$, also ist jede absteigende Kette von Untermoduln eine absteigende Kette von Untervektorräumen, die stationär ist. Ebenso ist $K[M]$ rechtsartinsch, $K[M]$ also artinsch.

**Bemerkung 1.3.17.** *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Folge vn R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i)* $M$ *ist artinsch.*

*ii)* $M'$, $M''$ *ist artinsch.*

*Beweis.* Es genügt, den Fall $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}/_{N} \longrightarrow 0$ zu betrachten.
*i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sei $M$ artinsch. Sei $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln von $N$. Dann ist $N_i$ ein Untermodul von $M$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und, da $M$ artinsch ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_n$ für alle $i \geq n$, weshalb $N$ artinsch ist. Sei $N_1' \supseteq N_2' \supseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln von ${}^{M}/_{N}$. Dann ist $\pi^{-1}(N_1') \supseteq \pi^{-1}(N_2') \supseteq \ldots$ eine Kettte von Untermoduln von $M$, welche, wegen $M$ artinsch, stationär wird. Es ist $N_n' = \pi(\pi^{-1}(N_n')) = \pi(\pi^{-1}(N_i')) = N_i$ für alle $i \geq n$, also ist ${}^{M}/_{N}$ artinsch.
*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Seien $N, {}^{M}/_{N}$ artinsch. Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von $M$. Dann ist $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von $N$. Damit ist

$$ {}^{(M_1+N)}/_{N} \supseteq {}^{(M_2+N)}/_{N} \supseteq \ldots $$

eine absteigende Kette von Untermoduln von ${}^{M}/_{N}$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i \cap N = M_n \cap N$ und ${}^{M_i+N}/_{N} = {}^{M_n+N}/_{N}$ für alle $i \geq n$, also ist $M_i + N = M_n + N$ für alle $i \geq n$,
Behauptung: $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$, denn sei $i \geq n$ fest.

"$\subseteq$" klar

"$\supseteq$" Sei $x \in M_n$. Dann existieen $x' \in M$, $y \in N$ mit $x = x' + y$ (wegen $M_i + N = M_n + N$), also $y = \underbrace{x}_{\in M_n} - \underbrace{x'}_{\in M_i \subseteq M_n} \in M_n \cap N = M_i \cap N \Rightarrow x = \underbrace{x'}_{\in M_i} + \underbrace{y}_{\in M_i} \in M_i$

■

**Folgerung 1.3.18.** *Seien* $M_1, \ldots, M_n$ *R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i)* $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *ist artinsch*

*ii)* $M_1, \ldots, M_n$ *sind artinsch.*

**Folgerung 1.3.19.** *Sei R linksartinsch, M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M artinsch.*

**Definition 1.3.20.** Sei $M$ ein $R$-Modul. Dann heißt $M$ *endlich koerzeugt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von $M$ mit $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = 0$

**Anmerkung.**

- Sei $N \subseteq N$ ein Untermodul. Dann ist ${}^{M}\!/_{N}$ endlich koerzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von $M$ mit $\bigcap_{\in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq U$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = N$.
- $N$ ist endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von $M$ mit $\sum_{i\in I} M_I = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sum_{j\in J} M_j = N$.

**Satz 1.3.21.** *Sei $M$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*a) $M$ ist artinsch*

*b) Jede nichtleere Menge von Untermoduln enthält ein minimales Element*

*c) Jeder Faktormodul von $M$ ist endlich koerzeugt.*

*Beweis.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sei $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von $M$, die kein minimales Element besitzt. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M'' \subsetneq M'$, also existiert eine Kette von Untermoduln $M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots$, die nicht stationär wird.
*ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Sei $N \subseteq M$ eine Untermodul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von $M$ mit $\bigcap_{i\in I} M_i = N$. Setze $\mathcal{X} := \{\bigcap_{j\in J} M_j \mid J \subseteq I \text{ endlich}\} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mathcal{X}$ enthält ein minimales Element $N_1 = \bigcap_{j\in J} M_j$ für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$.
Behauptung: $N_1 = N$, denn

"$\supseteq$" klar

"$\subseteq$" Angenommen $N_1 \supsetneq N$. Dann existiert ein $x \in N_1$ mit $x \notin N$. Da $N = \bigcap_{i\in I} M_i$ existiert ein $i \in I$ mit $x \notin M_i \Rightarrow x \notin \bigcap\limits_{j\in J\cup\{i\}} M_j =: N_2$. Somit ist $N_2 \in \mathcal{X}$, $N_2 \subsetneq N_1$ im Widerspruch zur Minimalität von $N_1$.

Somit $N_1 = N$, also ist ${}^{M}\!/_{N}$ endlich koerzeugt.
*iii)* $\Rightarrow$ *i)* Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von $M$. Setze $N := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i$. ${}^{M}\!/_{N}$ ist endlich koerzeugt, weshalb eine endliche Teilmenge $J \in I$ existiert mit $N = \bigcap_{j\in J} M_j$. Setze $n := \max J$, dann ist $N = M_n$, also ist $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$. ■

# 2 Homologische Algebra

In diesem Kapitel sei R stets ein Ring

## 2.4 Kategorien

**Definition 2.4.1.** Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ von *Objekten* einer Menge $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ von *Morphismen* für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- einer Verknüpfung $\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$ für alle $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

wobei folgende Axiome gelten:

$(K1)$ $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset$, falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$

$(K2)$ Für alle $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C), h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \textit{(Assoziativität)}$$

$(K3)$ für jedes $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ existiert ein Morphismus $id_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$, sodass für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$ gilt:

$$f \circ id_A = f,\ id_A \circ g = g$$

.

**Anmerkung.**

- Man sagt *Klasse* statt Menge, um Paradoxa, wie “die Menge aller Mengen“ zu vermeiden.
- Trotzdem schreiben wir $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ um zu sagen dass $A$ zu $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gehört (und werden $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ im Folgenden wie eine Menge behandeln).
- In den folgenden Abschnitten werden wir mengentheoretische Probleme ignorieren und häufig von Mengen sprechen auch wenn es sich nur um Klassen handelt.
- Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ schreiben wir auch $f : A \to B$. $A$ heißt *Quelle* und $B$ heißt *Ziel* von $f$; wegen $(K1)$ sind diese eindeutig bestimmt.
- für $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $\mathrm{id}_A$ eindeutig bestimmt (analoges Argument wie bei Monoiden: $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}'_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}'_A$)

**Beispiel 2.4.2.**
- Mengen: Kategorie der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen
- Ringe: Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen
- $R$-Mod: Kategorie der $R$-(Links)-Moduln mit $R$-Modulhomomorphismen als Morphismen
- Top: Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen
- $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \{*\}, Mor_{\mathcal{C}}(*,*) := M$, wobei $M$ Monoid, $\circ =$ Verknüpfung in $M$.

**Definition 2.4.3.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die zu $\mathcal{C}$ *duale Kategorie* ($\mathcal{C}^{op}$) ist die Kategorie mit:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$ für $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- $\circ_{op} : Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) \times Mor_{\mathcal{C}^{op}}(B,C) \to Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,C)$ mit $(f,g) \mapsto f \circ g$ für $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

**Anmerkung.**
- Anschaulich: Übergang von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}^{op}$ $\widehat{=}$ Pfeile umdrehen
- $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

**Definition 2.4.4.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FA, FB), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, sodass gilt:

(F1) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C),\ A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(F2) $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

**Beispiel 2.4.5.** a) Vergiss-Funktoren, zum Beispiel: $R$-Mod $\to$ Mengen, $R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, ...

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ induziert einen Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \text{Mengen}, \quad A \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(X, A)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist hierbei $f_*^X := Mor_{\mathcal{C}}(X, -)(f)$ gegeben durch

$$f_*^X : Mor_{\mathcal{C}}(X, A) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, B), \quad g \mapsto f \circ g \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_*^X(g)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

c) Sei $M \in R$-Mod $\Rightarrow Hom_R(M, -) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, $N \mapsto Hom_R(M, N)$ ist ein Funktor.

**Definition 2.4.6.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein *(kontavarianter) Funktor* $F$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, das heißt besteht aus einer Abbildung

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FB, FA), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, sodass gilt:

(F1') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für alle $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C),\ A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(F2') $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

**Beispiel 2.4.7.** a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ induziert einen kontravarianten Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C} \to \text{Mengen}, \quad A \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(A, Y)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist hierbei $f_Y^* := Mor_{\mathcal{C}}(-, Y)(f)$ gegeben durch

$$f_Y^* : Mor_{\mathcal{C}}(B, Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, Y), \quad g \mapsto g \circ f \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_Y^*(g)"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

b) Sei $N \in R$-Mod $\Rightarrow Hom_R(-, N) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, $M \mapsto Hom_R(M, N)$ ist ein kontavarianter Funktor.

**Anmerkung.**
- Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, so ist auf naheliegende Weise der Funktor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definiert.
- Unter Funktoren werden kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme abgebildet.

**Definition 2.4.8.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Das *Produkt* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ist diejenige Kategorie mit $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ und $Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$ und "komponentenweisen $\circ$".

**Definition 2.4.9.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ Kategorien. Ein *Bifunktor* $F$ "von $\mathcal{C}$ kreuz $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{E}$ " ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$

**Beispiel 2.4.10.**
a) $\bigoplus$: $R$-Mod $\times R$-Mod $\to R$-Mod, $(M, N) \to M \bigoplus N$ ist ein Bifunktor

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to$ Mengen, $(M, N) \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(M, N)$ ist ein Bifunktor.

**Definition 2.4.11.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f : A \to B$ $f$ heißt

*Monomorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : C \to A$ gilt: $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(C, A) \to Mor_{\mathcal{C}}(C, B)$ injektiv.

*Epimorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : B \to C$ gilt: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $f_C^* : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ injektiv.

*Isomorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

**Anmerkung.** In der Situation von 2.4.11 gilt:

- $f$ Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in $\mathcal{C}^{op}$.
- $f$ Isomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ ist Isomorphismus in $\mathcal{C}^{op}$.
- Ist $f$ ein Isomorphismus und $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$, dann ist $g$ ein eindeutig bestimmt (und wird mit $f^{-1}$ bezeichnet), denn sind $g_1, g_2 : B \to A$ mit dieser Eigenschaft $\Rightarrow g_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$.
- In Mengen ist $f$ Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ injektv, $f$ Epimorphismus $Lraf$ surjektiv, $f$ Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv. Im Allgemeinen ist dies für Kategorien, in denen die Morphismen Abbildungen sind, jedoch falsch (vgl. Bsp. 4.13)

**Bemerkung 2.4.12.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob\mathcal{C}, f : A \to B$ ein Isomorphismus. Dann ist $f$ ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.*

*Beweis.* Seien $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, g_1, g_2 : C \to A$ mit $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2) \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow f$ Monomorphimus. Analog wird gezeigt dass $f$ ein Epimorphimus. ■

**Anmerkung.** Die Umkehrung von 2.4.12 ist im Allgemeinen falsch, siehe nächstes Beispiel.

**Beispiel 2.4.13.** a) Sei $\mathcal{C} = Top$ die Kategorie der Topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Wir betrachten

$$\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \text{diskrete Topologie}) \to (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$$

Diese ist eine stetige Abbildung, ein Monomorphismus sowie ein Epimorphismus, jedoch kein Isomorphismus (Nicht hömöomorph, da kein stetiges Inverses)

b) Sei $\mathcal{C} = Ringe, f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ Inklusion. $f$ ist ein Monomorphismus und ein Epimorphimus (Achtung, denn: Für $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \to R$ Ringhomomorphismus ist ein Ring $R$ mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, das heißt $g_1\big|_{\mathbb{Z}} = g_2\big|_{\mathbb{Z}}$ folgt $g_1 = g_2$ wegen der Universellen Eigenschaft von $\mathbb{Q}$ als Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$), aber kein Isomorphismus. Insbesondere ist ein Epimorphismus in $\mathcal{C}$ im obigen Sinne ("kategorieller Epimorphismus") nicht dasselbe wie ein surjektiver Ringhomomorphismus.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "f"] & \mathbb{Q} \arrow[d, shift right, "g_1"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] \\ & R \end{tikzcd}$$

**Definition 2.4.14.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $t$ von $F$ nach $G$ ($t : F \Rightarrow G$) ist eine Familie $(t_A)_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ von Morphismen $t_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, GA)$, sodass

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "t_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\ FB \arrow[r, "t_B"] & GB \end{tikzcd}$$

für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f : A \to B$ kommutiert. Man sagt häufig auch $t_A : FA \to GA$ ist natürlich in $A$.

**Beispiel 2.4.15.** a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f : A \to B$. Dann ist

$$f^* = (f_Y^*)_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{C} \to$ Mengen, denn für $Y_1, Y_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $g : Y_1 \to Y_2$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_1) \arrow[r, "f^*_{Y_1}"] \arrow[d, "g^B_*"'] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y_1) \arrow[d, "g^A_*"] \\ \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \arrow[r, "f^*_{Y_2}"] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \end{tikzcd}$$

denn: Für $\varphi : B \to Y_1$ ist

$$(g^A_* \circ f^*_{Y_1})(\varphi) = g^A_*(\varphi \circ f) = g \circ \varphi \circ f = f^*_{Y_2}(g \circ \varphi) = (f^*_{Y_2} \circ g^B_*)(\varphi)$$

b) Sei $K$-VR die Kategorie der $K$-Vektorräume über einem festen Körper $K$ (mit linearen Abbildungen als Morphismen). Für $V \in K$-VR sei $V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum. Die kanonische Abbildung $\varphi_v : V \to V^{**}$, $w \mapsto \varphi_v(w) : V^* \to K$, $\psi \mapsto \psi(w)$ ist natürlich in $V$, denn für $V, W \in K$-VR, eine lineare Abbildung $f : V \to W$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_v"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\varphi_w"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

mit $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$, $(\varphi : V^* \to K) \mapsto f^{**}(\varphi) : W^* \to K$, $\psi \mapsto \varphi(\underbrace{\psi \circ f}_{\in V^*})$, d.h. $\varphi : id_V \Rightarrow \_^{**}$ ist eine natürliche Transformation von $id : K$-VR$\to K$-VR nach $\_^{**} : K$-VR$\to K$-VR.

**Definition 2.4.16.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren, $t : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. $t$ heißt *natürliche Äquivalenz* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $t_A : FA \to GA$ ein Isomorphismus. (Notation $t : F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$)

**Anmerkung.** Ist $t : F \to G$ eine natürliche Äquivalenz, dann existiert eine natürliche Äquivalenz $t^{-1} : G \overset{\sim}{\Rightarrow} F$ via $t^{-1}_A = (t_A)^{-1} : GA \to FA$

**Beispiel 2.4.17.** Bezeichne $K$-VR$_{<\infty}$ die Kategorie der endlichdiimensionalen $K$-VR. Dann ist die natürliche Transformation $\varphi : \mathrm{id} \Rightarrow \_^{**}$ aus Beispiel 4.15 eine natürliche Äquivalenz.

**Definition 2.4.18.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. $F$ heißt *Kategorienäquivalenz* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Äquivalenzen $F \circ G \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

**Beispiel 2.4.19.** Der Funktor $\_^* : K\text{-VR}_{<\infty} \to (K\text{-VR}_{<\infty})^{\mathrm{op}}$, $v \mapsto V^*$ ist eine Kategorienäquivalenz, denn mit $\widetilde{\_^*} : (K\text{-VR}_{<\infty})^{\mathrm{op}} \to K\text{-VR}_{<\infty}$, $W \mapsto W^*$ gilt offenbar $\widetilde{\_^*} \circ \_^* = \_^{**}$, und $\varphi : \mathrm{id} \overset{\sim}{\Rightarrow} \_^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz, analog andersherum (d.h. die Kategorie $K\text{-VR}_{<\infty}$ ist selbstdual).

**Satz 2.4.20 (Yoneda-Lemma).** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in Ob\,\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to$ Mengen ein Funktor. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \{\textit{natürliche Transformationen } t : \mathit{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F\} & \to & F(A) \\ t & \mapsto & t_a(\mathrm{id}_A) \end{array}$$

*Beweis.*

1. Sei $a \in F(A)$. Wir definieren $S^a : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F$ als $s^a = (s^a_B)_{B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ mit

$$s^a_B := F(\varphi)(a) \quad \text{für } \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

$s^a$ ist eine natürliche Transformation, denn für $B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f : B \to C$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) & \xrightarrow{s^a_B} & F(B) \\ {\scriptstyle f^A_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) & \xrightarrow{s^a_C} & F(C) \end{array}$$

denn:

$$\begin{aligned} (F(f) \circ s^a_B)(\varphi) &= F(f)(s^a_B(\varphi)) = F(f)(F(\varphi)(a)) = F(f \circ \varphi)(a) \\ &= F(f^A_*(\varphi))(a) = s^a_C(f^A_*(\varphi)) \end{aligned}$$

2. Setze

$$\begin{array}{rcl} \Psi : F(A) & \to & \{\text{natürliche Transformationen } t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F\} \\ a & \mapsto & s^a \end{array}$$

Dann sind $\Phi, \Psi$ invers zueinander, denn: Für $a \in F(A)$, $t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F$ gilt

$$(\Phi \circ \Psi)(a) = \Phi(s^a) = s^a_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(a) = \mathrm{id}_{FA}(a) = a$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(t) = \Psi(t_A(\mathrm{id}_A))$$

und für $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ gilt wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ {\scriptstyle \varphi^A_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\varphi)} \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}$$

$$(\Psi(t_A(\mathrm{id}_A)))_B(\varphi) = s_B^{t_A(\mathrm{id}_A)}(\varphi) = F(\varphi)(t_A(\mathrm{id}_A)) = t_B(\varphi_*^A(\mathrm{id}_A)) = t_B(\varphi)$$

d.h. $(\Psi \circ \Phi)(t) = t$ ■

**Folgerung 2.4.21.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob\,\mathcal{C}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Psi : Mor_{\mathcal{C}}(B, A) &\longrightarrow \{\textit{natürliche Transformationen } Mor_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(B, -)\} \\ \psi : B \to A &\mapsto \psi^* : Mor_{\mathcal{C}}(A, -) \to Mor_{\mathcal{C}}(B, -) \end{aligned}$$

*bijektiv.*

*Beweis.* Wende 2.4.20 auf $F = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)$ and. In der Notation des Beweises von 4.20 ist $\Psi(\psi) = s^\psi = (s_C^\psi)_{C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$, wobei für $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ gilt:

$$(s_C^\psi)(\varphi) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)(\varphi)(\psi) = \varphi_*^B(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi_C^*(\varphi)$$

d.h. $\Psi(\psi) = \psi^*$. ■

**Anmerkung.**

- Folgerung 2.4.21 liefert einen sogenannten volltreuen Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Funk}(\mathcal{C}, \mathrm{Mengen})$, wobei $A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$, wobei $\mathrm{Funk}(\mathcal{C}, \mathrm{Mengen})$ die Funktorkategorie von $\mathcal{C}$ nach Mengen bezeichnet (Objekte sind Funktoren: $\mathcal{C} \to$ Mengen, und Morphismen die natürlichen Transformationen) (*Yoneda-Einbettung*)

- Folgerung 2.4.21 liefert insbesondere eine Verallgemeinerung des Satzes von Caley aus der Gruppentheorie: Für eine Gruppe $G$ ist $G \hookrightarrow S(G)$, $g \mapsto \tau_G$ (Linkstranslation mit $g \in G$) ein injektiver Gruppehomomorphismus. Wende 2.4.21 an auf:
  - $\mathcal{C}$ = Kategorie mit $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \{\cdot\}$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) = G$
  - $A = B = \cdot$

  und erhalte eine Bijektion

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) &\longrightarrow \{\text{natürliche Transformationen } \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -)\} \\ g &\mapsto g^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \mathrel{\widehat{=}} \tau_G \end{aligned}$$

## 2.5 Abelsche Kategorien

**Definition 2.5.1.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. $A$ heißt

*Anfangsobjekt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M)$ einelementig

*Endobjekt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(M, A)$ einelementig

**Anmerkung.** Falls sie existieren, sind Anfangs- und Endobjekte eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (denn: Sind $A_1, A_2$ Anfangsobjekte, dann ist $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) = \{\alpha\}$, $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_1) = \{\beta\}$, $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_1) = \{\mathrm{id}_{A_1}\}$ und analog $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_2) = \{\mathrm{id}_{A_2}\}$, insbesondere ist $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{A_1}$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{A_2}$).

**Definition 2.5.2.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißt *Nullobjekt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ 0 ist sowohl Anfangs- als auch Endobjekt. Existiert in $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0, so enthält $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für alle $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen ausgezeichnetes Element, den “Nullmorphismus“ $A \to 0 \to B$

**Anmerkung.** Der Nullmorphismus in $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist unabhängig von der Wahl des Nullobjekts:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & \tilde{0} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

**Beispiel 2.5.3.**

a) In Mengen ist $\emptyset$ ein Anfangsobjekt, jede einelementige Menge ist ein Endobjekt, insbesondere existiert in Mengen kein Nullobjekt

b) in Ringe ist $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt, und der Nullring ist ein Endobjekt. In Ringe existiert ebenfalls ein Nullobjekt

c) In $R$-Mod ist der Nullmodul ein Nullobjekt.

**Definition 2.5.4.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* $(A, (p_i)_{i\in I})$ von $(A_i)_{i\in I}$ ist ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $p_i : A \to A_i$, sodass für alle $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$die Abbildung

$$Mor_C(B, A) \to \prod_{i\in I} Mor_C(B, A_i), \quad f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I}$$

bijektiv ist, das heißt für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Morphismen $f_i : B \to A_i$ existiert ein eindeutig bestimmtes $f : B \to A$ mit $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$.

**Bemerkung 2.5.5.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$, $(A,(p_i)_{i\in I}),(A',(p_i')_{i\in I})$, Produkte von $(A_i)_{i\in I}$.Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $f : A \to A'$, sodass für alle $i \in I$ gilt: $p_i' \circ f = p_i$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_i"'] & & A' \arrow[dl, "p_i'"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

*(kurz: $A, A'$ sind kanonisch isomorph. Wir sprechen daher oft von "dem Produkt" und schreiben $A = \prod_{i\in I} A_i$*

*Beweis.* 1. Wir wenden die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A', (p_i')_{i\in I}), B = A, f_i = p_i \Rightarrow$ Wir erhalten einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : A \to A'$ mit $p_i' \circ f = p_i$ für alle $i \in I$. Analog: Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A, (p_i)_{i\in I}), B = A', f_i = p_i' \Rightarrow$ Es existiert genau ein $g : A' \to A$ mit $p_i \circ g = p_i'$ für alle $i \in I$.

2. Es gilt $g \circ f = id_A, f \circ g = id_{A'}$ (d.h $f$ ist ein Isomorphismus), denn: Für alle $i \in I$ ist $p_i \circ (g \circ f) = (p_i \circ g) \circ f = p_i' \circ f = p_i$. Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt$(A, (p_i)_{i\in I}), B = A, f_i = p_i$ an: Es existiert genau ein $h : A \to A$ mit $p_i \circ h = p_i$ für alle $i \in I$ ( nämlich $h = id_A$) Somit ist $id_A = g \circ f$. Analog: $f \circ g = id_{A'}$. ■

**Beispiel 2.5.6.** a) In Mengen ist das Produkt das kartesische Produkt.

b) In $R$-Mod ist das Produkt das direkte Produkt.

c) In der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen existiert kein Produkt der Familie $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Übung)

**Bemerkung + Definition 2.5.7.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein *Koprodukt* $(A, (q_i)_{i\in I})$ von $(A_i)_{i\in I}$ ist ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $q_i : A_i \to A$ , sodass $(A, (q_i)_{i\in I})$ Ein Produkt von $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}^{op}$ ist, das heißt für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$Mor_C(A, B) \to \prod_{i\in I} Mor_C(A_i, B), \quad f \mapsto (f \circ q_i)_{i\in I}$$

bijektiv. Falls es existiert ist ein Koprodukt von $(A_i)_{i\in I}$ eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (analog zu 2.5.5). Wir sprechen dan von dem *Koprodukt* und schreiben $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ $(= \coprod_{i\in I} A_i)$

**Beispiel 2.5.8.** a) In Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.

b) in $R$-Mod ist das Koprodukt die direkte Summe.

c) In der Kategorie der Gruppen existiert ein Koprodukt, das sogenannte freie Produkt ( siehe Zettel Algebra 1)

**Definition 2.5.9.** Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. $\mathcal{A}$ heißt *additiv*, wenn gilt:

$(K1)$ $\mathcal{A}$ hat ein Nullobjekt,

$(K2)$ In $\mathcal{A}$ existieren endliche Produkte

$(K3)$ Für alle $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ trägt $Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$ die Struktur einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphismus als neutrales Element, sodass für alle $A, B, C \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ die Verknüpfung:

$$Mor_{\mathcal{A}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{\circ} Mor_{\mathcal{A}}(A, C)$$

bilinear ist.

**Anmerkung.** In einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ schreiben wir auch $Hom_{\mathcal{A}}$ für $Mor_{\mathcal{A}}$.

**Beispiel 2.5.10.** a) $R$-Mod ist eine additive Kategorie

b) Ringe sind keine additive Kategorie (kein Nullobjekt, vgl 2.5.3(b)).

**Satz 2.5.11.** *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A_1, A_2 \in Ob\,\mathcal{A}$ ,$(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$ Produkt von $A_1 \times A_2$, $i_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch $id_{A_1} : A_1 \to A_1, 0 : A_1 \to A_2$. Analog sei $i_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch $0 : A_2 \to A_1, id : A_2 \to A_2$. Dann ist $(A_1 \times A_2, (i_1, i_2))$ ein Koprodukt von $A_1, A_2$ in $\mathcal{A}$.*

*Beweis.* 1. Behauptung: $\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$ stimmt mit $id_{A_1 \times A_2}$ überein. Denn: Es ist

$$p_1 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\mathrm{id}_{A_1}} \circ p_1 + \underbrace{p_1 \circ \iota_2}_{=0:A_2 \to A_1} \circ p_2 = p_1 = p_1 \circ id_{A_1 \times A_2}$$

Analog:

$$p_2 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = p_2 = p_2 \circ id_{A_1 \times A_2} \overset{UE}{\Rightarrow} \iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 = id_{A_1 \times A_2}$$

2. Universelle Eigenschaft des Koprodukts: Sei $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$
   Existenz: Wir setzen $f := f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \to B$. DAnn ist
   $$f \circ \iota_1 = f_1 \circ \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\mathrm{id}_{A_1}} + f_2 \circ \underbrace{p_2 \circ \iota_1}_{=0:A_1 \to A_2} = f_1.$$
   Analog: $f \circ i_2 = f_2$.
   Eindeutigkeit: Sei $f' : A_1 \times A_2 \to B$ mit $f' \circ \iota_1 = f_1, f' \circ \iota_1 = f_2$.. Dann folgt
   $$f' = f' \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{f' \circ \iota_1}_{=f_1} \circ p_1 + \underbrace{f' \circ \iota_2}_{=f_2} \circ p_2 = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 = f$$

**Folgerung 2.5.12.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Additive Kategorie. Dann existieren in $\mathcal{A}$ endliche Koprodukte.*

**Definition 2.5.13.** Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ additve Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor. $F$ heißt *additiv* “ $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für alle $A, A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ ist eine Abbildung:
$$Mor_{\mathcal{A}}(A, A') \to Mor_{\mathcal{B}}(FA, FA'), \quad f \mapsto F(f)$$
ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

**Anmerkung.** $F$ additiv $\Rightarrow F(A \oplus A') = F(A) \oplus F(A')$ (Übungen)

**Bemerkung + Definition 2.5.14.** Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}, f : A \to A'$. Ein *Kern* $(B, \iota)$ von $f$ ist ein Objekt $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\iota : B \to A$, sodass $f \circ \iota = 0$ ist und für alle $C \in$Ob$\mathcal{A}$ die Abbildung:
$$Hom_{\mathcal{A}}(C, B) \longrightarrow \{g \in Hom_{\mathcal{A}}(C, A) | f \circ g = 0\}, \quad h \mapsto \iota \circ h$$
bijektiv ist, das heißt für alle $g : C \to A$ mit $f \circ g = 0$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : C \to B$ mit $g = \iota \circ h$:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$
Ist $(B', \iota')$ ein weiterer Kern von f, dann existiert ein eindeutig bestimmte Isomorphismus $\alpha : B \to B'$ mit $\iota = \iota' \circ \alpha$:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\iota"'] & & B' \arrow[dl, "\iota'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$
Wir nennen $(B, \iota)$ daher auch “den Kern“ von$f$ und schreiben $\ker f = (B, \iota)$ beziehungsweise kürzer: $\ker f = B$ oder auch $\ker f = \iota$

**Anmerkung.** Die Existenz von Kernen ist im Allgemeinen nicht gegeben

**Beispiel 2.5.15.** In $R$-Mod ist der kategorielle Kern gegeben durch die Inklusion des gewöhnlichen Kerns:

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, hook, "\iota"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

$f \circ g = 0 \Rightarrow \operatorname{im} g \subseteq \ker f$ setze $h := g\big|^{\ker f} : C \in \ker f$, dann ist $\iota \circ h = g$ und $h$ ist eindeutig mit dieser Bedingung.

**Bemerkung 2.5.16.** *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, A' \in Ob\,\mathcal{A}, f : A \to A', (\ker f, \iota)$ Kern von $f$. Dann ist $\iota$ ein Monomorphismus.*

*Beweis.* Seien $h_1, h_2 : C \to \ker f$ mit $\iota \circ h_1 = \iota \circ h_2 =: g \Rightarrow f \circ g = f \circ \iota \circ h_1 = 0$ Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $h : C \to \ker f$ mit $g = \iota \circ h \Rightarrow h = h_1 = h_2$. ∎

**Bemerkung + Definition 2.5.17.** Dual zum Kern definiert man den Kokern (Notation: $\operatorname{coker} f$). Die Aussagen 2.5.14, 2.5.16 gelten dual.

**Definition 2.5.18.** Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}, f : A \to A'$

$\operatorname{im} f := \ker(\operatorname{coker} f)$ heißt das *Bild* von $f$

$\operatorname{coim} f := \operatorname{coker}(\ker f)$ heißt das *Kobild* von $f$.

**Anmerkung.** $\operatorname{im} f$ kommt mit einem Monomorphisus $\iota' : \operatorname{im} f \to A'$, $\operatorname{coim} f$ mit einem Epimorphismus $q' : A \to \operatorname{coim} f$.

**Beispiel 2.5.19.** Sein $\mathcal{A} = R$-Mod ,$f : A \to A'$ $R$-Modulhomomorphismus. Dann ist

$$\operatorname{im} f = \ker\left({}^{A'}\!/_{\operatorname{im} f}, \quad A' \to {}^{A'}\!/_{\operatorname{im} f}\right) = (\operatorname{im} f,\ \operatorname{im} f \hookrightarrow A')$$
$$\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(\ker f,\ \ker f \to A) = \left({}^{A}\!/_{\ker f}, \quad A \to {}^{A}\!/_{\ker f}\right)$$

**Bemerkung 2.5.20.** *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, B \in Ob\,\mathcal{A}$, $f : A \to B$, sodass $\ker f, \operatorname{coker} f, \operatorname{im} f, \operatorname{coim} f$ existieren $(\operatorname{im} f, \iota')$ Bild von $f$, $(\operatorname{coim} f, q')$ Kobild von $f$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\overline{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $f = \iota' \circ \overline{f} \circ q'$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"] & B \\ \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "\iota'"'] \end{tikzcd}$$

*Beweis.*

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"] & B \arrow[r, "q"] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coim} f = \operatorname{coker} \iota \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & \ker q = \operatorname{im} f \arrow[u, "\iota'"] &
\end{tikzcd}$$

1. Existenz: Wegen $f \circ \iota = 0$ existiert nach der Universellen Eigenschaft von coker ein $f' : \operatorname{coim} f \to B$ mit $f = f' \circ q'$. Es ist $q \circ f = 0$, also $q \circ f' \circ q' = q \circ f = 0 = 0 \circ q'$. Da $q'$ ein Epimorphismus ist, folgt $q \circ f' = 0$. Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns, existiert ein $\overline{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $\iota' \circ \overline{f} = f'$, also $\iota' \circ \overline{f} \circ q' = f' \circ q' = f$.

2. Eindeutigkeit: Sei $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $\iota' \circ \overline{f} \circ q' = f = \iota' \circ \tilde{f} \circ q'$, woraus, wegen $\iota'$ Monomorphismus zunächst $\overline{f} \circ q' = \tilde{f} \circ q'$ folgt und dann, wegen $q'$ Epimorphismus, $\overline{f} = \tilde{f}$. ■

**Definition 2.5.21.** Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. $\mathcal{A}$ heißt *abelsche Kategorie*, wenn gilt:

(Ab1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat Kern und Kokern

(Ab2) (*Homomorphiesatz*). Für jeden Morphismus $f : A \to A'$ in $\mathcal{A}$ ist der induzierte Morphismus

$$\overline{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$$

ein Isomorphismus

**Beispiel 2.5.22.** a) $R$-Mod ist eine abelsche Kategorie

b) Die Kategorie der freien $\mathbb{Z}$-Moduln ist additiv, aber nicht abelsch: (Ab1) ist nicht erfüllt.

c) Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen ist eine additive Kategorie, die (Ab1) erfüllt, aber nicht (Ab2): $\operatorname{id} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ (links mit der diskreten Topologie und rechts mit der Standardtopologie) $\overline{\operatorname{id}} = \operatorname{id}$ ist kein Isomorphismus.

**Anmerkung.** Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, dann ist auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ abelsche Kategorie (einziger nichttrivialer Punkt: Existenz endlicher Produkte, was jedoch aus 2.5.11 folgt).

**Satz 2.5.23.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $A, A' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, $f : A \to A'$ Mono- und Epimorphsimus. Dann ist $f$ ein Isomorphismus.*

*Beweis.*

- Da $f$ ein Monomorphismus ist, ist $(0, 0 \to A)$ ein Kern von $f$, denn:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed, red] \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, red, shift right, "0"'] & & \end{tikzcd} \qquad f \circ g = 0 = f \circ 0 \overset{f \text{ Mono}}{\Longrightarrow} g = 0$$

- $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(0 \to A) = (A, \mathrm{id}_A)$, denn

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, dashed, red, "g"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Analog ist $\operatorname{im} f = (A', \mathrm{id}_{A'})$, also ist $\overline{f} = f$ ein Isomorphismus nach (Ab2). ■

**Bemerkung 2.5.24.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $A, A' \in Ob\,\mathcal{A}$, $f : A \to A'$. Dann gilt:*

*a)* *$f$ Monomorphismus* $\Leftrightarrow \ker f = 0$

*b)* *$f$ Epimorphismus* $\Leftrightarrow \operatorname{coker} f = 0$

*Beweis.* Übungsaufgabe. ■

**Definition 2.5.25.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $A, A', A'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$.

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

heißt eine *exakte Folge* $\Leftrightarrow \operatorname{im} f \cong \ker g$ in dem Sinne, dass es einen Isomorphismus $\operatorname{im} f \xrightarrow{\alpha} \ker g$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A & \\ \operatorname{im} f \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[rr, "\alpha"] & & \ker g \arrow[ul, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert (wobei $(\ker g, \iota)$ Kern von $g$, $(\operatorname{im} f, \iota')$ Bild von $f$)

**Satz 2.5.26.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann gilt:*

*a) In $\mathcal{A}$ gilt das Fünferlemma*

*b) In $\mathcal{A}$ gilt das Schlangenlemma*

c) *Eine Folge* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *in* $\mathcal{A}$ *ist genau dann exakte, wenn für jedes Objekt* $N \in Ob\,\mathcal{A}$ *die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

*exakte ist.*

d) *Eine Folge* $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ *in* $\mathcal{A}$ *ist genau dann exakte, wenn für jedes* $M \in Ob\,\mathcal{A}$ *die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

*exakt ist.*

*Beweis.* *a*) Stacks-Project: 12.5.17, *b*) 12.5.20
*c*), *d*) werden in 2.6 für $R$-Mod bewiesen. ■

**Definition 2.5.27.** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. $F$ heißt

*exakt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $F$ überführt kurze exakte Folgen in $\mathcal{A}$ in kurze exakte Folgen in $\mathcal{B}$

*liksexakt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jede exakte Folge $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ in $\mathcal{A}$ ist die Folge

$$0 \longrightarrow FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM''$$

exakt

*rechtsexakt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jede exakte Folge $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ ist die Folge

$$FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM'' \longrightarrow 0$$

exakt.

**Anmerkung.** $F$ ist exakt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $F$ ist links- und rechtsexakt $\Leftrightarrow$ Für alle exakten Folgen $A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ in $\mathcal{A}$ ist $FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''$ exakt (Übung)

**Definition 2.5.28.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $I, P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. $I$ heißt

*injektiv* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jeden Monomorphismus $\iota : A \hookrightarrow B$ und jeden Morphismus $f : A \to I$ existiert ein Morphismus $g : B \to I$ mit $g \circ \iota = f$, d.h. $\iota_I^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I)$ ist surjektiv.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ I & \end{tikzcd}$$

$P$ heißt

*projektiv* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $P$ ist injektiv in $\mathcal{A}^{\text{op}}$, d.h. für jeden Epimorphismus $p : B \twoheadrightarrow A$ und jeden Morphismus $f : P \to A$ existiert ein Morphismus $g : P \to B$ mit $p \circ g = f$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "p"'] & A \end{tikzcd}$$

**Bemerkung 2.5.29.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $I \in Ob\,\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:*

*i) $I$ ist injektiv*

*ii) Der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{op} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt*

*Beweis.* Nach 2.5.26 $c$) ist für alle exakten Folgen $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$$

exakt. Somit genügt es zu zeigen, dass $I$ injektiv $\Leftrightarrow$ Für alle exakten Folgen $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A$ in $\mathcal{A}$ ist

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \xrightarrow{\iota_I^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $\mathbb{Z}$-Mod, d.h. $\iota_I^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$ ist surjektiv. Die Exaktheit von $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A$ ist äquivalent dazu, dass $\iota$ ein Monomorphismus ist. ∎

**Bemerkung 2.5.30.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $P \in Ob\,\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:*

*i) $P$ ist projektiv*

*ii) Der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt.*

**Definition 2.5.31.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ (additive) Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (additive) Funktoren. Dann heißt $F$ *linksadjungiert* zu $G$ (und $G$ *rechtsadjungiert* zu $F$) $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \to$ Mengen (bzw. $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$-Mod im additiven Fall). Notation: $F \dashv G$

**Beispiel 2.5.32.** $F$ : Mengen $\to$ $K$-VR, $M \mapsto K^{(M)}$, $G : K$-VR $\to$ Mengen der Vergissfunktor. Es ist

$$\mathrm{Mor}_{\text{Mengen}}(M,V) \xrightarrow[\text{Bij.}]{\sim} \mathrm{Mor}_{K\text{-VR}}(K^{(M)},V)$$

für alle Mengen $M$ und $K$-VR, wobei die naheliegenden Diagramme kommutieren, d.h. wir haben eine natürliche Äquvalent.

$$\mathrm{Mor}_{\text{Mengen}}(-,G-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{K\text{-VR}}(F-,-)$$

also $F \dashv G$.

**Satz 2.5.33.** *Seien $\mathcal{A},\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ additive Funktoren mit $F \dashv G$. Dann gilt:*

*a) $F$ ist rechtsexakt*

*b) Ist $F$ exakt, dann überführt $G$ injektive Objekte aus $\mathcal{B}$ in injektive Objekte aus $\mathcal{A}$.*

*c) $G$ ist linksexakt*

*d) Ist $G$ exakt, dann überführt $F$ projektive Objekte aus $\mathcal{A}$ in projektive Objekte aus $\mathcal{B}$.*

*Beweis.* a) Sei $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge in $\mathcal{A}$. Nach 2.5.26 $c$) ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A'',GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A',GB)$$

exakt für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ und , da $F \dashv G$ ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'',B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA',B)$$

exakt für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. Damit ist nach 2.5.26 $c$)

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

exakt.

b) Sei $I \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ injektiv. Es ist zu zeigen, dass $GI \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ injektiv ist, d.h. der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,GJ) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt. Allerdings gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,GJ) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F-,J)$ und letzterer ist exakt, da $F$ exakt und $I$ injektiv.

**Definition 2.5.34.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. $F$ heißt *volltreu* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist die Abb $Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FA, FB), f \mapsto F(f)$ bijektiv.

**Satz 2.5.35 (Einbettungssatz von Freyd-Mitchell).** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie (dh. $Ob\,\mathcal{A}$ ist eine Menge) Dann existiert ein Ring $R$ und ein volltreuer exakter Funktor $F : \mathcal{A} \to R$-Mod*

**Anmerkung.**

- $F$ induziert eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{A}$ und einer vollen Unterkategorie von $R - Mod$ ( das heißt $\mathcal{C}$ ist eine Unterkategorie von $R - Mod$ mit $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{R-Mod}(A, B)$ für alle $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$)
- In $\mathcal{A}$ berechnete Kerne und Kokerne entsprechen über diese Äquivalenz Kernen und Kokernen in $R-Mod$. ( Achtung: injektive/projektive Objekte korrespondieren im Allgemeinen nicht zu injektiven/projektiven $R$-Moduln)

## 2.6 Projektive und Injektive Moduln

**Satz 2.6.1.** *Sei* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ *eine Folge von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i)* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ *ist exakt*

*ii) Für jeden R-Modul M ist die Sequenz abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} Hom_R(M, N'')$$

*ist exakt.*

*insbesondere ist der kovariante Funktor* $Hom_R(M, -) : R - Mod \to \mathbb{Z}$*-Mod linksexakt*

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ exakt.

1. Injektivität von $f_*^M$ : Sei $\varphi \in Hom_R(M, N')$ mit $f_*^M(\varphi) = 0 \Rightarrow f \circ \varphi = 0$ Wegen $f$ injektiv, folgt $\varphi = 0$, also $\ker f_*^M = 0$

2. $\operatorname{im} f_*^M = \ker g_*^M$,
   "$\subseteq$" Es ist $g_*^M \circ f_*^M = (g \circ f)_*^M = 0_*^M = 0$, also $\operatorname{im} f_*^M \subseteq \ker g_*^M$,
   "$\supseteq$ " Sei $\varphi : M \to N$ mit $\varphi \in g_*^M \Rightarrow g \circ \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{im} \varphi \subseteq \ker g = \operatorname{im} f$. Setze $\varphi^{'} : M \to \operatorname{im} \varphi \to \operatorname{im} f \to N' \Rightarrow \varphi^{'} \in Hom_R(M, N')$ mit $f \circ \varphi^{'} = \varphi \Rightarrow \varphi \in \operatorname{im} f_*^M$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} Hom_R(M, N'') \longrightarrow 0$ exakt für alle $R$-Moduln $M$.

1. $f$ injektiv: Setze $M := \ker f$, $\iota : \ker f \to N'$ Inklusion. Dann ist $f_*^M(\iota) = f \circ \iota = 0$. Und, da $f_*^M$ injektiv, ist $\iota = 0 \Rightarrow \ker f = 0$

2. $\operatorname{im} f = \ker g$ :
   "$\subseteq$" Setze $M := N' \Rightarrow 0 = 0_*^M(id_{N'}) = (g_*^M \circ f_*^M)(id_{N'}) = ((g \circ f)_*^M)(id_{N'}) = g \circ f \circ id_{N'} = g \circ f$
   "$\supseteq$ "Setze $M := \ker g$, $\iota : \ker g \to N \Rightarrow g_*^M(\iota) = g \circ \iota = 0 \Rightarrow i \in \operatorname{im} f_*^M$ Dann existiert ein $\varphi : \ker g \to N'$ mit $f \circ \varphi = \iota$. Somit: $x \in \ker g \Rightarrow x = \iota(x) = f(\varphi(x)) \in \operatorname{im} f$. ∎

**Anmerkung.** Der kovariante Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

**Beispiel 2.6.2.** Sei $R = \mathbb{Z}, M = {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x, \pi$ kanonische projektion. Die Abbildung $\pi_*^M : Hom_{\mathbb{Z}}\left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}\right) \to Hom_{\mathbb{Z}}\left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}, {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}\right)$ ist nicht surjektiv, denn: Für $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}({}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ gilt:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(1+1) = \varphi(2 \cdot 1) = 2\varphi(1)$$

, also $\varphi(1) = 0$, das heißt $\varphi = 0$. Insbesondere ist $\pi_*^M(\varphi) = \pi_*^M(0) = 0 \neq \mathrm{id}_{{}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}}$. Mit anderen Worten ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$ ist kein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

**Satz 2.6.3.** *Sei $P$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i)* *$P$ ist ein projektiver $R$-Modul*

*ii)* $\mathrm{Hom}_R(P, -) : R$*-Mod* $\to \mathbb{Z}$*-Mod ist exakt.*

*iii)* *Für jeden Epimorphisumus $\pi : M \to N$ von $R$-Moduln und jeden Hom $\varphi : P \to N$ existiert ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $\pi \circ \psi = \varphi$*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

*iv)* *Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ von $R$-Moduln spaltet.*

*v)* *Es gibt einen $R$-Modul $P'$, sodass $P \oplus P'$ ein freier $R$-Modul ist (das heißt $P$ ist direkter Summand eines freien $R$-Moduls )*

*Beweis.* $(i) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (ii) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (iii)$ folgt aus Definition 5.30.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sei $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln. Nach $(iii)$ existiert zu dem Epimorphismus $g : M \to P$ und dem Homomorphismus $\mathrm{id}_P : P \to P$ ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $g \circ \psi = \mathrm{id}_P$, das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

*(iv)* $\Rightarrow$ *(v)* Es existiert ein freier $R$-Modul $F$ und ein Epimorphismus $f : F \to P$. Wir erhalten eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$ , diese spaltet nach *(iv)* , das heißt $F \simeq P \oplus \ker f$

*(v)* $\Rightarrow$ *(iii)* Sei $\pi : M \to N$ ein Epimorphismus von $R$-Moduln, $\varphi : P \to N$ ein Homomorphimus. Wegen *(v)* existiert ein $R$-Modul $P'$ sodass $F := P \oplus P'$ frei ist, Setze

$$\begin{tikzcd} P \oplus P' = F \arrow[r] \arrow[d, "\psi'"] \arrow[dr, "\varphi'"] & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[l, dashed, bend right] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

$$\varphi' : F \to N, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x)$$

Sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von F, wähle für $i \in I$ jeweils ein $z_i \in \pi^{-1}(\varphi'(b_i))$. Durch $\psi' : F \to M, b_i \mapsto z_i$ wird ein Homomorphismus definiert mit $\pi \circ \psi' = \varphi'$. Setze

$$\psi : P \to M, \quad x \mapsto \psi'((x, 0))$$

dann gilt für $x \in P : \pi(\psi(x)) = \pi(\psi'((x, 0))) = \varphi'((x, 0)) = \varphi(x)$ das heißt $\pi \circ \psi = \varphi$. ■

**Folgerung 2.6.4.** *a) Jeder freie R-Modul ist ein projektiver R-Modul*

*b) Jeder R-Modul ist ein Faktormodul eines projektiven R-Moduls.*

*Beweis.* a) klar nach 2.6.3.

b) da jeder $R$-Modul Faktormodul eines freien $R$-Moduls ist. ■

**Satz 2.6.5.** *Sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i)* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *ist exakt.*

*ii) Für jeden R-Modul N ist die Sequenz abelscher Gruppen:*

$$0 \longrightarrow Hom_R(M'', N) \xrightarrow{g_N^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{f_N^*} Hom_R(M', N) \quad \text{exakt.}$$

*Insbesondere ist der kontravariante Funktor:* $Hom_R(-, N) : R - Mod^{op} \to \mathbb{Z}\text{-}Mod$ *linksexakt.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. ■

**Anmerkung.** Der kontravariante Funktor $Hom_R(-, N)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

**Beispiel 2.6.6.** Sei $R = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x$ und $\pi$ der kanonischen Projektion. Die Abbildung $f^*_{\mathbb{Z}} : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist nicht surjektiv, denn für alle $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist

$$(f^*_{\mathbb{Z}}(\varphi))(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = 2\varphi(x) \in 2\mathbb{Z}$$

insbesondere ist $f^*_{\mathbb{Z}}(\varphi) \neq id_{\mathbb{Z}}$. Mit anderen Worten: $\mathbb{Z}$ ist kein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

**Satz 2.6.7.** *Sei $Q$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i) $Q$ ist ein injektiver $R$-Modul*

*ii) $Hom_R(-, Q) : R{-}Mod \to \mathbb{Z}{-}Mod$ ist exakt.*

*iii) Für jeden Monomorphismus $\iota : L \to M$ von $R$-Moduln und jedem Homomorphismus $\varphi : L \to Q$ exsistiert ein Homomorphismus $\psi : M \to Q$ von $R$-Moduln mit $\psi \circ \iota = \varphi$*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q' & \end{tikzcd}$$

*iv) Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ von $R$-Moduln spaltet.*

*Beweis.* $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ folgt aus 2.5.29

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sei $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $R$-Moduln. Nach $(iii)$ existiert zum Monomorphismus $f : Q \to M$ von $R$-Moduln und zum Homomorphismus $id_Q : Q \to Q$ ein Homomorphismus $\psi : M \to Q$ mit $\psi \circ f = id_Q$. das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\psi"] & N \arrow[r] & 0 \\ & Q & & & \end{tikzcd}$$

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Sei $\iota : L \to M$ ein Monomorphismus, $\varphi : L \to Q$ ein Homomorphismus von $R$-Moduln. Setze

$$S := \{(\varphi(x), -\iota(x)) |\, x \in L\} \subseteq Q \oplus M \qquad M' := {(Q \oplus M)}/_{S}, \qquad N := {M}/_{\operatorname{im} \iota}$$

$\pi : M \to N$ kanonische Projektion.

1. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & y & \longmapsto & \overline{(y,0)} & & & & \\ & & & & \overline{(y,z)} & \longmapsto & \pi(z) & & \end{array}$$

   von $R$-Moduln. denn:
   - $g$ ist wohldefiniert, denn: $\pi \circ \iota = 0$
   - $f$ ist injektiv, denn $(y,0) = (0,0) \Rightarrow$ Es existiert ein $x \in L$ mit $y = \varphi(x), 0 = -\iota(x)$. Wegen $\iota$ injektiv, folgt $x = 0 \Rightarrow y = \varphi(0) = 0$
   - $g$ surjektiv, klar
   - $\operatorname{im} f = \ker g$ :
     "$\subseteq$" klar, wegen $g \circ f = 0$
     "$\subseteq$" Sei $\overline{(y,z)} \in \ker g \Rightarrow \pi(z) = 0 \Rightarrow z \in \operatorname{im} \iota$, das heißt es existiert ein $x \in L$ mit $z = \iota(x) = -\iota(-x)$Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{(y,z)} &= \overline{(y, -\iota(-x))} = \overline{(y + \varphi(x), 0)} + \overline{(\varphi(-x), -\iota(-x))} \\ &= \overline{(y + \varphi(x), 0)} = f(y + \varphi(x)) \in \operatorname{im} f. \end{aligned}$$

2. Wegen (iv) spaltet die Sequenz, das heißt es existiert ein R-Modulhomomorphisumus $h : M' \to Q$ mit $h \circ f = id_Q$. Setze

$$\psi : M \to Q, z \mapsto h((0,z))$$

   $\psi$ ist ein $R$-Modulhomomorphismus. Für $x \in L$ ist

$$\begin{aligned} (\psi \circ \iota)(x) &= h((0, \iota(x))) = h((0, \iota(x))) + h(\varphi(x), -\iota(x)) \\ &= h((\varphi(x), 0)) = h(f(\varphi(x))) = \varphi(x) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

   Also ist $\psi \circ \iota = \varphi$

**Beispiel 2.6.8.** Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum. Dann ist $V$ ein injektiver $K$-Modul, denn für jede exakte Folge $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ von $K$-Moduln, ist $N$ ein freier $K$-Modul, d.h. die Folge spaltet.

**Satz 2.6.9 (Baer-Kriterium).** *Sei $Q$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i) $Q$ ist ein injektiver $R$-Modul*

*ii) Für jedes Linksideal $I \subseteq R$ und jede $R$-lineare Abbildung $\varphi : I \to Q$ existiert eine $R$-lineare Abbildung $\psi : R \to Q$ mit $\psi\big|_I = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Betrachte Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Da $Q$ injektiv, Exsistert ein $R$-Modulhomomorphismus $\psi : R \to Q$ mit $\varphi = \psi \circ \iota = \psi$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $\iota : L \to M$ ein Monomorphismus von $R$-Moduln, $\varphi : L \to Q$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[dl, dashed, "?"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Ohne Einschränkung sei $L \subseteq M$ ein Untermodul, $\iota$ Inklusionsabbildung.

1. Setze $\mathcal{X} := \{(L', \varphi') |\, L' \subseteq M$ Untermodul mit $L \subseteq L', \varphi' : L' \to Q$ $R$-linear mit $\varphi'\big|_L = \varphi\}$. Dann ist $\mathcal{X} \neq \emptyset$, denn: $(L, \varphi) \in \mathcal{X}$. Auf $\mathcal{X}$ ist die Halbordung "$\leq$" durch
$$(L', \varphi') \leq (L'', \varphi'') \Leftrightarrow L' \subseteq L'',\ \varphi''\big|_{L'} = \varphi'$$
erklärt. $\mathcal{X}$ ist induktiv geordnet bzgl "$\leq$", denn: Sei $(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$ eine totalgeordnete Familie von Elementen aus $\mathcal{X}$. Setze $L' := \bigcup_{i \in I} L_i$. $L'$ ist Untermodul von $M$ ( beachte: $a, b \in L' \Rightarrow$ Es existieren $i, j$ mit $a \in L_i, b \in L_j$,ohne Einschränkung: $L_i \subseteq L_j \Rightarrow a + b \in L_j \subseteq L'$) und es ist $L \subseteq L'$. Außerdem kann die $R$-lineare Abbildung $\varphi' : L' \to Q$ mit $\varphi'|_{L_i} := \varphi_i$ für alle $i \in I$ definieren. (wohldefiniert, denn: Für $i, j \in I$, ohne Einschränkung: $(L_i, \varphi_i) \subseteq (L_j, \varphi_j)$ ist $\varphi_j|_{L_i} = \varphi_i) \Rightarrow (L', \varphi')$ ist obere Schranke für die Familie$(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Mit dem Zornshen Lemma folgt, dass ein maximales Element $(L', \varphi')$ in $\mathcal{X}$ exsitiert.

2. Behauptung: $L' = M$, denn:
Sei $x \in M$. Setze $I := \{a \in R |\, ax \in L'\} \subseteq R \cdot I$ ist Linksideal in $R$, und die Abbildung $f : I \to Q, a \mapsto \varphi'(ax)$ ist $R$-linear. Mit (ii) folgt, dass eine $R$-lineare Abbildung $g : R \to Q$ mit $g|_I = f$. Setze:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

$$\psi' : L' \oplus R \to Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

und

$$\pi : L' \oplus R \to M, \quad (y,a) \mapsto y + ax$$

welche beide $r$-Modulhomomorphismen sind. Es ist $\psi'(\ker \pi) = 0$, denn für $(y,a) \in \ker \pi$ ist $y + ax = 0$, also $ax = -y \in L'$, das heißt $a \in I$, also $g(a) = f(a) = \varphi'(ax) = \varphi'(-y) = -\varphi'(y)$und somit $\psi'(y,a) = \varphi'(y) + g(a) = 0 \Rightarrow \psi'$ induziert $R$-Modulhomomorphismus

$$L' \oplus R/_{\ker \pi} \to Q, \quad (y,a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

Außerdem ist

$$L' + Rx = \operatorname{im} \pi \simeq L' \oplus R/_{\ker \pi} \quad \text{via} \quad y + ax \mapsto (y,a)$$

Wir erhalten den Homomorphismus

$$\psi : L' + Rx \to Q \quad \text{mit} \quad \psi(y + ax) = \varphi'(y) + g(a)$$

für alle $a \in R, y \in L'$, das heißt $\psi|_{L'} = \varphi' \Rightarrow (L', \varphi') \leq (L' + Rx, \psi)$ Wegen $(L', \varphi')$ maximal folgt dass $L' = L' + Rx \Rightarrow x \in L'$. Somit $M \subseteq L' \subseteq M$, also $M = L'$. ■

**Definition 2.6.10.** Sei $A$ ein Integritätsbereich (kommutativer nullteilerfreier Ring), $M$ ein $A$-Modul. $M$ heißt *teilbar* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in A \backslash \{0\}$ ist $aM = M$. $\Leftrightarrow$ Für alle $x \in M, a \in A \backslash \{0\}$ existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$.

**Bemerkung 2.6.11.** *Sei $A$ ein Integritätsbereich, $M$ ein injektiver $A$-Modul. Dann ist $M$ teilbar.*

*Beweis.* Sei $x \in M, a \in A \backslash \{0\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : Aa \to M, \quad ra \mapsto rx$$

$\varphi$ ist wohldefiniert, denn: $r_1 a = r_2 a \Rightarrow (r_1 - r_2)a = 0$ Da $A$ nullterilerfrei ist folgt $r_1 = r_2$. $\varphi$ ist $A$-linear, so folgt mit Satz 2.6.9, dass eine $A$-lineare Abbildung $\psi : A \to M$ mit $\psi|_{Aa} = \varphi$. Setze $y := \psi(1)$, dann ist $x = \varphi(a) = \psi(a) = \psi(a1) = a\psi(1) = ay$. ■

**Bemerkung 2.6.12.** *Sei $A$ ein Hauptidealring, $M$ ein $A$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i)* *$M$ injektiv*

*ii)* *$M$ teilbar*

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$ aus 2.6.11
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $I \subseteq A$ ein Ideal, $\varphi : I \to M$ $A$ linear. Falls $I = 0$, dann wird $\varphi$ durch die Nullabbildung nach $A$ fortgesetzt. Im Folgendem sein $I \neq 0$. Da $A$ ein Hauptidealring ist, existieren $a \in A, a \neq 0$ mit $I = Aa$. Setze $x := \varphi(a) \Rightarrow \varphi(ra) = r\varphi(a) = rx$ für alle $r \in A$. Wegen (ii) existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$. Setze

$$\psi : A \to M, \quad r \mapsto ry$$

Dann ist $\psi$ $A$-linear und $\psi(ra) = ray = rx = \varphi(ra)$ für alle $r \in A$ das heißt $\psi|_{Aa} = \varphi$. Dann folgt aus 6.9 $M$ ist injektiv. ■

**Beispiel 2.6.13.**

a) Sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-VR $\Rightarrow V$ ist teilbarer $K$-Modul, also injektiver $K$-Modul. Ist $\operatorname{char} K = 0$ dann ist $V$ teilbarer $\mathbb{Z}$-Modul, also injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

b) Faktormoduln teilbarer $\mathbb{Z}$-Moduln sind teilbar, somit sind Faktormoduln inketiver $\mathbb{Z}$-Moduln wieder injektive $\mathbb{Z}$-Moduln.

c) Nach (a) sind $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ injektive $\mathbb{Z}$-Moduln, nach (b) also auch $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

**Ziel** injektive $R$-Moduln sind dierekte Faktoren von kofreien $R$-Moduln

**Anmerkung.** $M$ ein $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ via $(a\varphi)(r) = \varphi(ra)$ ein $R$-Modul. (beachte: $b(a\varphi)(r) = (a\varphi)(rb) = \varphi(rba) = ((ba)\varphi)(r))$

**Bemerkung 2.6.14.** *Sei $M$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ ein injektiver $R$-Modul. Insbesondere ist $R^v := Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein injektiver $R$-Modul.*

*Beweis.* Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, $\varphi : I \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ $R$-linear. Nach 2.6.9, genügt es zu zeigen: $\varphi$ lässt sich auf $R$ fortsetzen. Setze

$$f : I \to M, \quad a \mapsto \varphi(a)(1)$$

Dann ist $f$ ist $\mathbb{Z}$-linear und für $r \in R, a \in I$ gilt: $f(ra) = \varphi(ra)(1) = (r\varphi(a))(1) = \varphi(a)(1r) = \varphi(a)(r)$. Da $M$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul, existiert eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $g : R \to M$ mit $g\big|_I = f$. Wir setzen $\psi : R \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M), a \mapsto ag$. $\psi$ ist $R$-linear, und für $a \in I, r \in R$ ist $\psi(a)(r) = (ag)(r) = g(ra) = f(ra) = \varphi(a)(r)$, das heißt $\psi\big|_I = \varphi$. ■

**Definition 2.6.15.** Sei $M$ ein $R$-Modul. $M$ heißt *kofrei* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert eine Menge $I$ mit $M \simeq (R^v)^I = \prod_{i \in I} R^v$.

**Bemerkung 2.6.16.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt:*

*a)* $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *ist ein projektiver R-Modul* $\Leftrightarrow$ $M_i$ *projektive R-Moduln für alle* $i \in I$.

*b)* $\prod_{i\in I} M_i$ *ist ein injektiver R-Modul* $\Leftrightarrow$ $M_i$ *ist injektiver R-Modul für alle* $i \in I$.

*Beweis.* Übungsaufgaben. ■

**Satz 2.6.17.** *Sei $M$ ein kofreier R-Modul. dann ist $M$ ein injektiver R-Modul.*

*Beweis.* folgt direkt aus 2.6.16 und 2.6.14 ■

**Bemerkung 2.6.18.** *Sei $M$ ein R-Modul, $m \in M, m \neq 0$. Dann existiert ein R-Modulhomomorphimus $\varphi : M \to R^v$ mit $\varphi(m) \neq 0$.*

*Beweis.*

1. Die Abbildung

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_R(M, R^v), \psi \mapsto (m \mapsto \varphi_m : R \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, r \mapsto \psi(rm))$$

ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln (tatsächlich sogar ein Isomorphismus).

2. Ist $\psi : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus mit $\psi(m) \neq 0$ dann ist $\theta(\psi)(m) = \varphi_m \neq 0$ wegen $\varphi_m(1) = \psi(m) \neq 0$, das heißt: $\theta(\psi) : M \to R^v$ ist ein $R$-Modulhomomorphismus mit $\theta(\psi)(m) \neq 0$

3. Nach 2 genügt es zu zeigen: Es existiert ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphimus $\psi : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$. Setze $N := \langle m \rangle_{\mathbb{Z}}$.
1.Fall: $N \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in N$. Setze

$$\tilde{\psi} : N \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$1 \longmapsto \tfrac{1}{n} + \mathbb{Z}$$

Dann ist $\psi\ (m) \neq 0$ und, da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, setzt sich $\tilde{\psi}$ auf $M$ fort.
2. Fall: $N \cong \mathbb{Z}$. Setze dann

$$\tilde{\psi} : N \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$1 \longmapsto \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}$$

Dann ist $\tilde{\psi}(m) \neq 0$, also weiter wie in Fall 1.

, ■

**Satz 2.6.19.** *Jeder $R$-Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven, $R$-Moduls.*

*Beweis.* Sei $0 \neq M$ ein $R$-Modul. Nach 6.18 existiert zu jedem $m \in M$ ein $R$-Modulhomomorphismus $\varphi_m : M \to R^v$ mit $\varphi_m(m) \neq 0$. Wir setzen

$$f : M \longrightarrow \prod_{m \in M \setminus \{0\}} R^v, \quad x \mapsto ((\varphi_m(x))_{m \in M \setminus \{0\}}$$

Dann gilt

- $f$ ist ein $R$-Modulhomomorphismus
- $f$ ist injekitv, denn: Sei $x \in M$ mit $f(x) = 0$. Dann ist $\varphi_m(x) = 0$ für alle $m \in M \setminus \{0\}$. Wäre $x \neq 0$, dann wäre $\varphi_x(x) = 0$, Widerspruch! ■

**Folgerung 2.6.20.** *Sei $Q$ ein $R$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i) $Q$ ist injektiv*

*ii) Es gibt einen $R$-Modul $Q'$, sodass $Q \times Q'$ ein kofreier $R$-Modul ist (d.h. $Q$ ist direkter Faktor eines kofreien $R$-Moduls)*

*Beweis.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Nach 2.6.19 existiert ein kofreier $R$-Modul $N$, sodass $Q$ Untermodul von $N$ ist. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow {}^{N}\!/_{Q} \longrightarrow 0$$

spaltet nach 2.6.7, da $Q$ injektiv ist, d.h. $N \cong Q \oplus {}^{N}\!/_{Q} = Q \times {}^{N}\!/_{Q}$
*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Ist $Q \times Q'$ kofrei, dann ist nach 6.17 $Q \times Q'$ injektiv und nach 6.16 $Q$ injektiv. ■

## 2.7 Komplexe

**In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ stets eine abelsche Kategorie**

**Definition 2.7.1.** Ein *Komplex* $A^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $(A^i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Objekten $A^i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und Morphismen $d_i : A^i \to A^{i+1}$ (*Differentiale*)

$$\ldots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \longrightarrow \ldots$$

sodass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Ein *Komplexhomomorphismus* $f : A^\bullet \to B^\bullet$ in einem Komplexe $B^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \to B^i$, sodass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & A^{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & B^i \arrow[r, "d_i"'] & B^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

**Anmerkung.** Komplexe in $\mathcal{A}$ zusammen mit Komplexhomomorphismenbilden bilden eine abelsche Kategorie (Kerne, Kokerne, endliche Produkte separat an jeder Stelle bilden).

**Bemerkung 2.7.2.** *Sei $A^\bullet$ ein Komplex in $\mathcal{A}$. Dann induzieren die Differentiale in natürlicher Weise Monomorphismen* $\operatorname{im} d_{i-1} \longrightarrow \ker d_i$ *für $i \in \mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A^{i-1} \arrow[rr, "d_{i-1}"] \arrow[d, "q_{i-1}"'] & & A^i \arrow[rr, "d_i"] & & A^{i+1} \\
\operatorname{coim} d_{i-1} \arrow[rr, "\overline{d}_{i-1}"'] & & \operatorname{im} d_{i-1} \arrow[u, "k_{i-1}"] \arrow[rr, dashed, "l_i"] & & \ker d_i \arrow[ull, "j_i"']
\end{tikzcd}$$

(Es ist $k_{i-1}$ ein Mono-, $q_{i-1}$ ein Epi- und der durch den Homomorphiesatz induzierte Pfeil $\overline{d}_{i-1}$ ein Isomorphismus). Damit ist $0 = d_i \circ d_{i-1} = d_i \circ k_{i-1} \circ \overline{d}_{i-1} \circ q_{i-1}$ und, da $q_{i-1}$ Epi, $d_{i-1}$ Iso, folgt $d_i \circ k_{i-1} = 0$. Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns existiert ein $l_i : \operatorname{im} d_{i-1} \to \ker d_i$ mit $k_{i-1} = j_i \circ l_i$. Nun ist $l_i$ ein Monomorphismus, da $k_{i-1} = j_i \circ l_i$ Monomorphismus. ■

**Definition 2.7.3.** Sei $A^\bullet$ ein Komplex in $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{Z}^i(A^\bullet) := \ker d_i \qquad (i\text{-}Kozykel)$$

$$\mathcal{B}^i(A^\bullet) := \operatorname{im} d_{i-1} \qquad (i\text{-}Koränder)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^i(A^\bullet) &:= \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \to \ker d_i) \\ &= \operatorname{coker}(\mathcal{B}^i(A^\bullet) \to \mathcal{Z}^i(A^\bullet))\end{aligned} \qquad (i\text{-}te\ Kohomologie)$$

**Anmerkung.** Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ induziert Homomorphismen

$$\mathcal{Z}^i(f) : Z^i(A^\bullet) \to \mathcal{Z}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{B}^i(f) : \mathcal{B}^i A^\bullet \to \mathcal{B}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{H}^i(f) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet)$$

**Satz 2.7.4 (Lange exakte Kohomologiefolge).** *Sei*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

*eine kurze exakte Folge von Komplexen in $\mathcal{A}$ (d.h. die Morphisemen sind Komplexhomomorphismen und für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist*

$$0 \longrightarrow A^i \longrightarrow B^i \longrightarrow C^i \longrightarrow 0$$

*exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge*

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{H}^i(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet) \longrightarrow \ldots$$

*Beweis (Beweisskizze).*

1. $M^\bullet$ ein Komplex in $\mathcal{A}$. Setze

   $$Q^i(M^\bullet) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \to M^i) \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

   Dann induzieren die Differentiale natürliche Morphismen

   $$\overline{d}_i : Q^i(M^\bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^{i+1}(M^\bullet)$$

   mit $\ker \overline{d}_i = \mathcal{H}^i(M^\bullet)$ und $\operatorname{coker}(\overline{d}_i) = \mathcal{H}^{i+1}(M^\bullet)$

2. Wir erhalten für $i \in \mathbb{Z}$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & Q^i(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_i"] & Q^i(B^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_i"] & Q^i(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Z}^{i+1}(A^\bullet) \arrow[r] & \mathcal{Z}^{i+1}(B^\bullet) \arrow[r] & \mathcal{Z}^{i+1}(C^\bullet) &
\end{tikzcd}$$

3. Das Schlangenlemma liefert nach 1. für jedes $i \in \mathbb{Z}$ eine exakte Folge

$$\mathcal{H}^i(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet)$$

Diese setzen sich zu einer langen exakten Folge aus der Behauptung zusammen. ■

**Definition 2.7.5.** Sei $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Eine *injektive Auflösung* von $A$ ist ein Komplex

$$I^\bullet : \ I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

bestehend aus injektiven Objekten $I^i$ aus $\mathcal{A}$ mit $I^i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einem Morphismus $\varepsilon : A \longrightarrow I^0$, so dass der *augmentierte Komplex*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist (Notation: $A \longrightarrow I^\bullet$ injektive Auflösung von $A$).
Eine *projektive Auflösung* von $A$ ist eine injektive Auflösung von $A$ in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, d.h. ein Komplex

$$P^\bullet : \ \dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0$$

aus projektiven Objekten $P^i$ aus $\mathcal{A}$ mit $P^i = 0$ für $i > 0$ zusammen mit einem Morphismus $\varepsilon : P^0 \to A$, sodass der augmentierte Komplex

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

exakt ist (Notation: $P^\bullet \longrightarrow A$ projektive Auflösung).

**Anmerkung.** Man schreibt in obiger Situation auch $P_i = P^{-i}$ und $\mathcal{H}_i(-) = \mathcal{H}^{-i}(-)$.

**Definition 2.7.6.** $\mathcal{A}$ hat

*genügend viele Injektive*“ $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jedes $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ existiert ein injektives Objekt $I \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $\iota : A \to I$.

*genügend viele Projektive* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ hat genügend viele Injektive

**Beispiel 2.7.7.** $R$-Mod hat nach 6.19 genügend viele Injektive und nach 6.4 genügend viele Projektive.

**Bemerkung 2.7.8.** *Sei $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Dann gilt:*

*a) Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, dann hat $A$ eine injektive Auflösung*

b) *Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Projektive, dann hat $A$ eine projektive Auflösung*

*Beweis.* Es genüge $a)$ zu zeigen, $b)$ folgt dual.

1. Die Situation ist:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & I^0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "\pi_0"] & & I^1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\pi_1"] & & I^2 \\ & & & M^0 \arrow[ur, hook, "\iota_0"] & & M^1 \arrow[ur, "\iota_1"] & \end{tikzcd}$$

   Nach Voraussetzung existiert ein injektives Objekt $I^0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $\varepsilon : A \to I^0$. Sei $\operatorname{coker} \varepsilon = (M^0, \pi_0)$. Es existiert ein injektives Objekt $I^1$ und ein Monomorphismus $\iota_0 : M^0 \hookrightarrow I_1$. Iteriere dieses Verfahren: $\operatorname{coker}(d_0) = (M^1, \pi_1)$, es existiert ein injektives Objekt $I^2$ und ein Monomorphismus $\iota_1 : M^1 \hookrightarrow I^2$, setze $d_1 := \iota_1 \circ \pi_1$.

2. Exaktheit: bei $I^0$ gilt:

$$\operatorname{im} \varepsilon = \ker(\operatorname{coker} \varepsilon) = \ker \pi_0 \underset{\text{Mono}}{\overset{\iota}{=}} \ker(\iota_0 \circ \pi_0) = \ker d_0$$

   analog bei den anderen Stellen ∎

**Satz 2.7.9 (Hufeisenlemma).** *$\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive. Gegeben sei ein Diagramm (Schwarz)*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & I'^0 \arrow[r] \arrow[d] & I'^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ 0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & I''^0 \arrow[r] \arrow[d] & I''^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

*in $\mathcal{A}$, wobei die linke Spalte exakt sei, $A' \to I'^\bullet$ eine injektive Auflösung von $A'$, $A'' \to I''^\bullet$ eine injektive Auflösung von $A''$. Dann lässt sich das Daigramm so zu einem kommutativen Diagramm ergänzen (rot), dass $A \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung von $A$ ist und die Spalten alle exakt sind.*

*Beweis.* in den Standardwerken über homologische Algebra (zumindest für $R$-Mod). Für den Beweis einer Verallgemeinerung in Kontext abelsche Kategorien siehe Stacks-Project 013P. ∎

**Frage:** in welchem Verhältnis stehen zwei injektive Auflösungen eines Objekts?

**Definition 2.7.10.** Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen. $f, g$ heißen *homotop* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ es existieren Homomorphismen $s^i : A^{i+1} \to B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s^i \circ d_i$$

(Notation: $f \sim g$)

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & A^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] \arrow[dl, "s^{i-1}"] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "s^i"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & B^i \arrow[r] & B^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

**Anmerkung.**

- Homotopie von Komplexhomomorphismen ist eine Äquivalenzrelation.
- Sind $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von $\mathcal{A}$ in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$, dann erhalten wir einen Komplexhomomorphismus $Ff, Fg : FA^\bullet \to FB^\bullet$ mit$Ff \sim Fg$.

**Bemerkung 2.7.11.** *Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$. Dann gilt: $\mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet)$*

*Beweis.* Wir setzen $h := f - g : A^\bullet \to B^\bullet$. Offenbar genügt es zu zeigen: $\mathcal{H}^i(h) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

1. Der Morphismus $\mathcal{Z}^i(h) : \mathcal{Z}^i A^\bullet \to \mathcal{Z}^i B^\bullet$ faktorisiert über $\mathcal{B}^i B^\bullet$, denn:

$$\begin{tikzcd}
\ker d_i = Z^i A^\bullet \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[d, dashed, "\mathcal{Z}^i h"] \arrow[dd, dashed, bend right, "\lambda_i"'] & A^i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[d, "h_i"] & & A^{i+1} \arrow[d, "h_{i+1}"] \\
\ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet \arrow[r, hook, "\beta_i"] & B^i \arrow[rr, "d_i"'] \arrow[dr, "\gamma_i"] & & B^{i+1} \\
\operatorname{im} d_{i-1} = \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i \arrow[u, "\theta_i"] \arrow[ur, hook, "\delta_i"'] & & \operatorname{coker} d_{i-1} &
\end{tikzcd}$$

$Z^i(h)$ ist der eindutig bestimmte Morphismus $\mathcal{Z}^i A^\bullet \to \mathcal{Z}^i B^\bullet$ mit $h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$ (beachte: $d_i \circ h_i \circ \alpha_i = h_{i+1} \circ d_i \circ \alpha_i = 0$). Wegen $f \sim g$ existiert eine Famillie $(si)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $s_i : A^{i+1} \to B^i$ mit $h_i = f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s_i \circ d_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$h_i \circ \alpha_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i + s_i \circ \underbrace{d_i \circ \alpha_i}_{=0} = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i$$

Wegen $\gamma_i \circ d_{i-1} = 0$ ist $\overbrace{\gamma_i \circ d_{i-1}}^{=0} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i = 0$, also $\gamma_i \circ h_i\alpha_i = 0$ Aus der Univesellen Eigenschaft des Kerns von $\gamma_i$, existiert ein eindeutig bestimmtes $\lambda_i : \mathcal{Z}^iA^\bullet \to \mathcal{B}^iB^\bullet = \ker\gamma_i$ mit $h_i \circ \alpha_i = \delta_i \circ \lambda_i$ und mit $\delta_i = \beta_i \circ \theta_i \Rightarrow \beta_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^ih$ da $\beta_i$ ein Monomorphismus folgt: $\theta_i \circ \lambda_i = \mathcal{Z}^ih$.

2. $\mathcal{H}^ih = 0$, denn betrachte die Situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^iA^\bullet \arrow[r, "\theta_i'"] \arrow[d, "\mathcal{B}^ih"] & \mathcal{Z}^iA^\bullet \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i'"] \arrow[d, "\mathcal{Z}^ih"] \arrow[dl, "\lambda_i"] & \mathcal{H}^iA^\bullet = \operatorname{coker}\theta_i' \arrow[d, "\mathcal{H}^ih"] \\
B^iB^\bullet \arrow[r, "\theta_i"] & Z^iB^\bullet \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i"'] & \mathcal{H}^iB^\bullet = \operatorname{coker}\theta_i
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{H}^ih$ ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\mathcal{H}^iA^\bullet \to \mathcal{H}^iB^\bullet$ mit $\mathcal{H}^ih \circ \varepsilon_i' = \varepsilon_i \circ \mathcal{Z}^ih = \varepsilon_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = 0$, denn $\varepsilon_i \circ \theta_i = 0$,somit $\mathcal{H}^ih = 0$. ■

**Definition 2.7.12.** Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}, f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen. $f$ heißt

*Homotopieäquivalenz* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ es existiert ein $g : B^\bullet \to A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$

*Quasiisomorphismus* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{H}^if : \mathcal{H}^iA^\bullet \to \mathcal{H}^iB^\bullet$ ein Isomorphismus.

**Bemerkung 2.7.13.** *Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}, f : A^\bullet \to B^\bullet$ Homotopieäquivalenz. Dann ist $f$ ein Quasiisomorphismus.*

*Beweis.* Nach Vorraussetzung existiert ein $g : B^\bullet \to A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$. Dann ist

$$\mathcal{H}^i(g) \circ \mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g \circ f) = \mathcal{H}^i(id_{A^\bullet}) = id_{\mathcal{H}^iA^\bullet}$$

analog: $\mathcal{H}^i(f) \circ \mathcal{H}^i(g) = id_{\mathcal{H}^iB^\bullet}$. Also ist $\mathcal{H}^i(f)$ ein Isomorphismus. ■

**Anmerkung.** Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz.

**Satz 2.7.14.** *Gegeben sei folgendes Diagramm von Komplexen in $\mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & E^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_0"] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta"'] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

*sodass gilt:*

- *die obere Zeile ist exakt*
- *Alle $I^i, i \geq 0$, sind injektiv.*

*Dann existiert ein Komplexhomomorphismus $f : E^\bullet \to I^\bullet$, der $\varphi$ fortsetzt, in dem Sinne, dass $f_0 \circ \varepsilon = \eta \circ \varphi$ ist. Ist $g : E^\bullet \to I^\bullet$ ein weiterer solcher Komplexhomomorphismus, dann ist $g \sim f$.*

*Beweis (Beweisskizze für die Existenz von f:).*

1. Wir konstruieren zunächst $f_0$. Situation:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & E^0 \arrow[d, dashed, "f_0"] \\
B \arrow[r, "\eta"'] & I^0
\end{tikzcd}$$

Da $I^0$ injektiv und $\varepsilon$ ein Monomorphismus, existiert ein $f_0 : E^0 \to I^0$, sodass $\eta \circ \varphi = f_0 \circ \varepsilon$.

2. Konstruktion von $f_1$: Situation:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[ddd, "\varphi"] & E^0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, two heads, "\pi_0"] \arrow[ddd, "f_0"] & & E^1 \arrow[ddd, dashed, "f_1"] \\
& & \operatorname{coker}\varepsilon \arrow[ur, hook, dashed, "\iota_0"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_0"] & \\
& & \operatorname{coker}\eta \arrow[dr, hook, dashed, "\iota_0'"] & \\
B \arrow[r, "\eta"] & I^0 \arrow[ur, two heads, "\pi_0'"] \arrow[rr, "d_0'"'] & & I^1
\end{tikzcd}$$

Wegen der Kommutativität vom linken Rechteck, also

$$\pi_0' \circ f_0 \circ \varepsilon = \pi_0' \circ \eta \circ \varphi = 0$$

existiert ein eindeutig bestimmtes $\tilde{f}_0 : \operatorname{coker} \varepsilon \to \operatorname{coker} \eta$, sodass das linke Trapez kommutiert. Da $d_0 \circ \varepsilon = 0$ und $d_0^{'} \circ \eta = 0$, existieren nach der Universellen Eigenschaft des Kokerns eindeutig bestimmte $\iota_0 : \operatorname{coker} \varepsilon \to E^1$, $\iota_0^{'} : \operatorname{coker} \eta \to I^1$, sodass das obere und untere Dreieck kommutieren.
*Behauptung:* $\iota_0$ ist ein Monomorphismus, denn:

$$\begin{aligned} \operatorname{coker} \varepsilon &= \operatorname{im} \pi_0 \simeq \operatorname{coim} \pi_0 = \operatorname{coker}(\underbrace{\ker \pi_0}_{=\operatorname{im} \varepsilon}) = \operatorname{coker}(\operatorname{im} \varepsilon) \\ &\simeq \operatorname{coker}(\ker d_0) = \operatorname{coim}(d_0) \simeq \operatorname{im} d_0 \end{aligned}$$

was aus dem Homomorphiesatz und der Exaktheit bei $E^0$ folgt. Nun verifiziert man, dass

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker} \varepsilon \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\iota_0"'] & & \operatorname{im} d_0 \arrow[dl, hook'] \\ & E^1 & \end{tikzcd}$$

kommutiert, das heißt, dass $\iota_0$ ein Monomorphismus ist. Da $I^1$ injektiv und $\iota_0$ ein Monomorphismus, existiert ein $f_1 : E^1 \to I^1$, sodass auch das rechte Trapez kommutiert. Also ist $f_1 \circ d_0 = d_0^{'} \circ f_0$.

3. Iteriere das Verfahren. ■

**Folgerung 2.7.15.** *Sei $A \in Ob\,\mathcal{A}$, $\varepsilon : A \to I^\bullet$, $\eta : A \to J^\bullet$ injektive Auflösungen von $A$. Dann existiert eine Homotopieäquivalenz $f : I^\bullet \to J^\bullet$ mit $f_0 \circ \varepsilon = \eta$. Diese ist eindeutig bestimmt bis auf Homotopie.*

*Beweis.* Wir betrachten das Diagramm von Komplexen:

$$\begin{tikzcd} \tilde{I}^\bullet : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}_A"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift right, "f_0"'] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift right, "f_1"'] & \dots \\ \tilde{J}^\bullet : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta"'] \arrow[u, shift right] & J^0 \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift right, "g_0"'] & J^1 \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift right, "g_1"'] & \dots \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Nach 2.7.14 existiert ein Komplexhomomorphismus $f : I^\bullet \to J^\bullet$, der $\mathrm{id}_A$ fortsetzt und es existiert ein Komplexhomomorphismus $g : J^\bullet \to I^\bullet$, der $\mathrm{id}_A$ fortsetzt. Dann ist aber auch $g \circ f : I^\bullet \to I^\bullet$ eine Fortsetzung von $id_A$, ebenso wie $id_{J^\bullet}$. Aus der Eindeutigkeit in 2.7.14 ist $g \circ f \sim id_{I^\bullet}$. Analog ist $f \circ g \sim id_{J^\bullet}$. Somit folgt, dass $f$ eine Homotopieäquivalenz ist. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 2.7.14. ■

**Folgerung 2.7.16.** *Sei $I^\bullet$ ein exakter Komplex von injektiven Objekten in $\mathcal{A}$ mit $I^i = 0$ für $i \ll 0$. Dann ist $0^\bullet \to I^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung ist $I^i = 0$ für $i < 0$ (durch Verschiebung des Komplexes) Dann sind $0^\bullet, I^\bullet$ injektive Auflösungen von 0. Aus 2.7.15 folgt: $0^\bullet \to I^\bullet$ist eine Homotopieäquivalenz. ■

## 2.8 Abgeleitete Funktoren

**In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektive, $\mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor**

**Bemerkung + Definition 2.8.1.** Für $i \in \mathbb{N}_0$ und jedes Objekt $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ fixieren wir eine injektive Auflösung $A \to I^\bullet$ von $A$ und setzen

$$R^i F(A) := \mathcal{H}^i(F I^\bullet)$$

Ist $\varphi : A \to A'$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ und sind $A \to I^\bullet$, $A' \to I'^\bullet$ injektive Auflösungen von $A, A'$, dann existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Komplexhomomorphismus $f : I^\bullet \to I'^\bullet$, der $\varphi$ fortsetzt. Wir setzen

$$R^i F(\varphi) := \mathcal{H}^i(F f).$$

Auf diese Weise wird $R^i F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zu einem additiven Funktor. Wird auf dieselbe Art und Weise mit einer anderen Wahl von injektiven Auflösungen ein Funktor $\widehat{R^i} F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ konstruiert, dann sind $R^i F(A)$ und $\hat{R}^i F(A)$ kanonisch isomroph für alle $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, und es gibt eine natürliche Äquivalenz $R^i F \overset{\sim}{\Rrightarrow} \hat{R}^i F$. $R^i F$ heißt der *i-te rechtsabgeleitete Funktor*

*Beweis.*

- Wohldefiniertheit von $R^i F(\varphi)$: Ist $g : I^\bullet \to I'^\bullet$ eine weitere Fortsetzung von $\varphi$, dann ist $f \sim g$ nach 2.7.14 und somit $Ff \sim Fg$. Mit 2.7.11 folgt $\mathcal{H}^i(Ff) = \mathcal{H}^i(Fg)$ für alle $i \geq 0$.

- $R^i F$ ist ein Funktor, denn für $\varphi : A \to A'$, $\psi : A' \to A''$ mit Fortsetzungen $f : I^\bullet \to I'^\bullet$, $g : I'^\bullet \to I''^\bullet$ auf injektiven Auflösungen $A \to I^\bullet$, $A' \to I^\bullet$, $A'' \to I''^\bullet$ von $A, A', A'''$ ist $g \circ f : I^\bullet \to I''^\bullet$ ein Fortsetzung von $\psi \circ \varphi : A \to A''$, also
$$\begin{aligned}(R^i F)(\psi \circ \varphi) &= \mathcal{H}^i(F(g \circ f)) = \mathcal{H}^i(Fg \circ Ff) = \mathcal{H}^i Fg \circ \mathcal{H}^i Ff \\ &= R^i F(\psi) \circ R^i F(\varphi)\end{aligned}$$

- $R^i F$ ist additiv, denn sind $\varphi : A \to A'$, $\psi : A \to A'$ mit Fortsetzungen $f : I \to I'^\bullet$, $g : I^\bullet \to I'^\bullet$ auf injektiven Auflösungen $A \to I^\bullet$, $A' \to I'^\bullet$ von $A, A'$, so ist $f + g : I^\bullet \to I'^\bullet$ eine Fortsetzung von $\varphi + \psi : A \to A'$. Der Rest ist klar, da $F$, $\mathcal{H}^i$ additiv.

- Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösungen im obigen Sinne: Für $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ sei $A \xrightarrow{\varepsilon} I_A^\bullet$ die injektive Auflösung, mit der $R^i F$ berechnet wird und $A \xrightarrow{\eta} J_A^\bullet$ die injektive Auflösung von $A$, mit der $\hat{R}^i F$ berechnet wird. Nach 2.7.15

existiert eine Homotopieäquivalenz $h_A : I_A^\bullet \to J_A^\bullet$ existiert mit $h_A^0 \circ \varepsilon = \eta$. Wir definieren

$$t_A^i : R^iF(A) = \mathcal{H}^i(FI_A^\bullet) \longrightarrow \hat{R}^iF(A) = \mathcal{H}^i(FJ_A^\bullet) \quad \text{mit} \quad t_A^i := \mathcal{H}^iFh_A$$

Dann ist $t_A^i$ nach 2.7.13 ein Isomorphismus, da $Fh_A$ eine Homotopieäquivalenz ist. Durch $t^i = (t_A^i)_{A\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}} : R^iF \Rightarrow \hat{R}^iF$ ist eine natürliche Äquivalenz gegeben, denn für alle $A, A' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $\varphi : A \to A'$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R^iF(A) \arrow[r, "t_A^i"] \arrow[d, "\mathcal{H}^iFf_I"'] & \hat{R}^iF(A) \arrow[d, "\mathcal{H}^iFf_J"] \\ R^iF(A') \arrow[r, "t_{A'}^i"'] & \hat{R}^iF(A') \end{tikzcd}$$

(wobei $f_I : I_A^\bullet \to J_A^\bullet$, $f_J : J_A^\bullet \to J_A'^\bullet$ Fortsetzungen von $\varphi$ sind), denn $f_J \circ h_A$, $h_{A'} \circ f_I : I_A^\bullet \to J_A'^\bullet$ sind beides Fortsetzungen von $\varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{A'} \circ \varphi$, somit $f_J \circ h_A \sim h_A' \circ f_I$, also $Ff_J \circ Fh_A \sim Fh_{A'} \circ Ff_I$ und damit $\mathcal{H}^iFf_J \circ t_A^i = t_{A'}^i \circ \mathcal{H}^iFf_I$. ■

**Bemerkung 2.8.2.** *Es gilt:*

*a)* $R^0F = F$

*b) Ist $F$ exakt, dann ist $R^iF = 0$ für alle $i > 0$.*

*Beweis.* Für $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ ist $R^iF(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet)$, wobei $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ eine injektive Auflösung von $A$ ist. Wir wissen: Ist $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1$ exakt, dann ist ohnehin $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1$ exakt.

$$FI^\bullet : \qquad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} FI^2 \longrightarrow \dots$$

mit

$$\begin{aligned} R^0F(A) &= \mathcal{H}^0(FI^\bullet) = \mathrm{coker}(0 \to \ker Fd_0) = \ker Fd_0 = \mathrm{im}\, F\varepsilon \\ &= \mathrm{coim}\, F\varepsilon = FA \end{aligned}$$

Falls $F$ exakt, dann ist

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} \dots$$

exakt, also $R^iF(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet) = 0$ für $i > 0$. ■

**Satz 2.8.3.** *Sei* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Folge in* $\mathcal{A}$. *Dann existieren natürliche Morphismen*

$$\delta^i : R^iF(A'') \longrightarrow R^{i+1}F(A') \quad \text{für alle } i \geq 0$$

*sodass die Folge*

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & FA' & \longrightarrow & FA & \longrightarrow & FA'' & \\
 & \longrightarrow & R^1FA' & \longrightarrow & R^1FA & \longrightarrow & R^1FA'' & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \longrightarrow & R^iFA' & \longrightarrow & R^iFA & \longrightarrow & R^iFA'' & \\
 & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}FA' & \longrightarrow & R^{i+1}FA & \longrightarrow & R^{i+1}FA'' & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

*exakt ist. Ist*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*ein kommutatives Diagramm, wobei die untere Zeile exakt ist, so kommutiert für alle* $i \geq 0$ *das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
R^iF(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1}F(A') \arrow[d] \\
R^iF(B'') \arrow[r, "\delta^i"'] & R^{i+1}F(B')
\end{tikzcd}$$

*Beweis (Beweisskizze).* Nach dem Hufeisenlemma existieren kompatible injektive Auflösungen $A' \to I'^{\bullet}$, $A \to I^{\bullet}$, $A'' \to I''^{\bullet}$ in dem Sinne, dass

$$0 \longrightarrow I'^{\bullet} \longrightarrow I^{\bullet} \longrightarrow I''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Komplexen ist. $I'^i$ ist injektiv für alle $i \geq 0$, also spaltet die Folge

$$0 \longrightarrow I'^i \longrightarrow I^i \longrightarrow I''^i \longrightarrow 0$$

(wobei Spaltung in abelschen Kategorien analog zu $R$-Mod definiert ist und analoge Resultate gelten). Dann ist $I^i = I'^i \oplus I''^i$ und, da $F$ additiv, $F(I^i) = F(I'^i) \oplus F(I''^i)$, womit

$$0 \longrightarrow FI'^i \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI''^i \longrightarrow 0$$

exakt ist. Insbesondere existiert ein exakte Folge von Komplexen

$$0 \longrightarrow FI'^\bullet \longrightarrow FI^\bullet \longrightarrow FI''^\bullet \longrightarrow 0$$

woraus wir eine lange exakte Kohomologiefolge erhalten, was die Behauptung liefert. ∎

**Definition 2.8.4.** Sei $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Dann heißt $A$ *$F$-azylisch* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $R^iF(A) = 0$ für alle $i \geq 1$.

**Bemerkung 2.8.5.** *Ist $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ injektiv, dann ist $A$ $F$-azyklisch.*

*Beweis.* Offenbar ist $A \xrightarrow{\text{id}} (A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots)$ eine injektive Auflösung von $A$. Damit ist

$$R^iF(A) = \mathcal{H}^i(\ FA \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots) \ = 0 \quad \text{für } i \geq 1$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

**Satz 2.8.6.** *Sei $A \to J^\bullet$ eine Auflösung von $A$ durch $F$-azyklische Objekte, d.h. $J^\bullet$ ist ein Komplex mit $J^i = 0$ für $i < 0$ und $J^i$ $F$-azyklisch für $i \geq 0$, sodass der augmentierte Komplex*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^1 \longrightarrow J^2 \longrightarrow \ldots$$

*exakt ist. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $R^iF(A) \cong \mathcal{H}^i(FJ^\bullet)$ für alle $i \geq 0$.*

*Beweis.* (für $R$-Mod in S.Lang “Algebra“) ∎

**Anmerkung.** Die Theorie der Linksableitung rechtsexakter Funktoren lässt sich analog entwickeln: Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven, $\mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor. Wir wählen für jedes $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $P_\bullet \to A$ und setzen

$$L_iF(A) := \mathcal{H}_i(FP_\bullet)$$

Rest analog.

## 2.9 $\delta$-Funktoren

**In Folgenden seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien**

**Definition 2.9.1.** Ein *$\delta$-Funktor* $H = (H^n)_{n\geq 0}$ ist eine Familie additiver Funktoren $H^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ für alle $n \geq 0$ und jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ , sodass gilt:

(D1) $\delta$ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{A}$ mit exakten Zeilen, dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A') \end{array}$$

in $\mathcal{B}$ für alle $n \geq 0$

(D2) Für jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ in $\mathring{A}$ ist die lange exakte Folge

$$\ldots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \ldots$$

exakt in $\mathcal{B}$.

**Beispiel 2.9.2.** $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt. Dann ist $H := (R^n F)_{n\geq 0}$ ein $\delta$-Funktor nach 2.8.3

**Definition 2.9.3.** Sei $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $\delta$-Funktor. H heißt *universell* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jeden $\delta$-Funktor $H' = (H'^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ setzt sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \Rightarrow H^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus von $\delta$-Funktoren fort, d.h. zu einer Familie $f = (f^n)_{n\geq 0}$ von natürlichen Transformationen $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$ die auf naheliegende Weise mit den $\delta'$ verträglich sind.

**Bemerkung 2.9.4.** *Sind $F, G$ universelle $\delta$-Funktoren mit $F^0 = G^0$, dann gibt es eine kanonische natürliche Äquivalenz von $\delta$-Funktoren $F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$.*

*Beweis.* $id : F^0 \Rightarrow G^0$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\Phi : (\Phi_n)_{n\geq 0}, \Phi_n : F_n \Rightarrow G_n$ von $\delta$-Funktoren. $id : G^0 \Rightarrow F^0$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\Psi = (\Psi_n)_{n\geq 0}, \Psi_n : G_n \Rightarrow F_n$von $\delta$-Funktoren. $\Psi \circ \Phi := (\Psi_n \circ \Phi_n)_{n\geq 0}$ ist eine Fortsetzung von $id : F^0 \Rightarrow F^0$. Aus der Eindeutigkeit in der Universellen Eigenschaft folgt $\Psi \circ \Phi = id_F$. Analog $\Phi \circ \Psi = id_G$ ■

**Definition 2.9.5.** Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. F heißt *auslöschbar* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jedes $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ existiert ein $A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow A'$ mit $F(u) = 0$.

**Satz 2.9.6.** *Sei $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $\delta$-Funktor, sodass $H^n$ auslöschbar für alle $n \geq 1$. Dann ist $H$ universell.*

*Beweis (Beweisskizze).* Sei $H' = (H'^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $\delta$-Funktor, $f^0 : H^0 \Rightarrow H'^n$ eine natürliche Transformation. Wir konstruieren die natürliche Transformation $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$ die mit $\delta$ kommutieren, per Induktion nach n. Seien $f^0, \dots f^n$ bereits konstruiert. Sei $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Da $H^{n+1}$ auslöschbar, gibt es eine exakte Folge: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} A' \longrightarrow B \longrightarrow 0$ mit $H^{n+1}(u) = 0$. So erhalten wir Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H^nA' \arrow[r] \arrow[d] & H^nB \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^{n+1}A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
H'^nA' \arrow[r] & H'^nB \arrow[r, "\delta'"] & H'^{n+1}A &
\end{tikzcd}$$

konstruiere mit den üblichen Argumenten einen Morphismus $f_A^{n+1} : H^{n+1}A \to H'^{n+1}A$, der mit den $\delta$'s vertauscht, und so dass $f^{n+1} = (f_A^{n+1})_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} : H^{n+1} \Rightarrow H'^{n+1}$ eine natürliche Transformation ist. ■

**Folgerung 2.9.7.** *Habe $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakter Funktor. Dann ist $(R^nF)_{n\geq 0}$ ein universeller $\delta$-Funktor.*

*Beweis.* Nach 2.9.6 genügt es zu zeigen: $R^nF$ ist auslöschbar für alle $n \geq 1$. Sei $n \geq 1, A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Dann esistiert ein injektives Objekt $I \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow I$. Dann ist

$$R^nF(u) : R^nF(A) \to R^nF(I) = 0$$

nach 2.8.5 der Nullmorphismus für $n \geq 1$. ■

## 2.10 Ext und Erweiterungen

**Definition 2.10.1.** Seien $M, N$ $R$-Moduln. Wir setzen:

$$Ext_R^n(M,N) := R^n Hom_R(M,-)(N), \quad \text{für } n \geq 0$$

Explizit: wähle eine injektive Auflösung $N \to I^\bullet$ von $N$, dann ist

$$Ext_R^n(M,N) = H^n(Hom_R(M, I^\bullet))$$

**Satz 2.10.2.** *Seien $M, N$ $R$-Moduln. Dann gibt es kanonische Isomorphismen*

$$Ext_R^n(M,N) \simeq R^n Hom_R(-,N)(M)$$

*für alle $n \geq 0$, insbesondere kann $Ext_R^n(M,N)$ auch über eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$ von $M$ betrachtet werden via $Ext_R^n(M,N) = H^n(Hom_R(P_\bullet, N))$.*

*Beweis.* Sei $N$ fixiert.

1. Die Familie kontravarianter Funktoren $(R^n Hom_R(-,N))_{n\geq 0}$ ist ein kontravarianter universeller $\delta$-Funktor mit $R^0 Hom_R(-,N) = Hom_R(-,N)$ (analoge Aussage zu 2.9.7). Denn: $(R^n Hom_R(-,N))_{n\geq 0}$ ist ein kontravarianter $\delta$-Funktor nach der kontravarianten Version von 2.8.3. Es bleibt noch zu zeigen: $(R^n Hom_R(N,-))_{n\geq 0}$ ist universell. Dafür genügt es nach 2.9.6 zu zeigen, dass $R^n Hom_R(-,N)$ koauslöschbar ist für alle $n \geq 1$. Sei $M$ ein $R$-Modul. Dann existiert ein projektiver $R$-Modul $P$ und ein Epimorphismus $u : P \to M$ So erhält man:

   $$R^n Hom_R(-,N)(u) : R^n Hom_R(-,N)(M) \to R^n Hom_R(-,N)(P)$$

   $P$ ist $Hom_R(-,N)$-azyklisch, da $(\dots 0 \to 0 \to P) \xrightarrow{id_P} P$ eine projektive Auflösung von $P$ ist und

   $$R^n Hom_R(-,N)(P) = H^n(Hom_R(P,N) \to 0 \to 0 \to \dots) = 0$$

   für $n \geq 1$ ist. Daraus folgt: $R^n Hom_R(-,N)(u) = 0$, das heißt $R^n Hom_R(-,N)$ ist koauslöschbar für $n \geq 1$.

2. Wir setzen:

   $$\begin{aligned} F^n : R\text{-Mod} &\longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}, \\ M &\longmapsto R^n Hom_R(M,-)(N) \\ &\qquad = H^n(Hom_R(M, I^\bullet)) \end{aligned}$$

   wobei $N \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung von $N$ ist. Dann ist $(F^n)_{n\geq 0}$ ebenfalls ein kontravarianter universeller $\delta$-Funktor mit $F^0 = Hom_R(-,N)$, da:

- $(F_n)_{n\geq 0}$ ist ein kontravarianter $\delta$-Funktor, denn:
  - $F^n$ ist kontravarianter additver Funktor: klar
  - Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $R$-Moduln, so erhält man eine Sequenz von Komplexen:

$$0 \longrightarrow Hom_R(M'', I^\bullet) \longrightarrow Hom_R(M, I^\bullet) \longrightarrow Hom_R(M', I^\bullet) \longrightarrow 0$$

    (beachte: $Hom_R(-, I)$ exakt für injektive $R$-Moduln I). Die lange exakte Kohomologiefolge liefert die Behauptung.

- $(F_n)_{n\geq 0}$ ist ein universell: nach 2.9.6 genügt zu zeigen, dass $F_n$ koauslöschbar für alle $n \geq 1$. sei $M$ ein $R$-Modul. Dann existiert ein projektiver $R$-Modul $P$ und ein Epimorphismus $u : P \to M$. Damit erhält man

$$F^n(u) : F^n(M) = R^n Hom_R(M, -)(N) \to R^n Hom_R(P, -)(N) = F^n(P).$$

  Wegen der Projektivität von $P$ ist $Hom_R(P, -)$ exakt und deshalb ist $R^n Hom_R(P, -) = 0$ für $n \geq 1$ Daraus folgt $F^n(u) = 0$, das heißt $F_n$ ist koauslöschbar für $n \geq 1$. ∎

3. nach 1. und 2. sind $(R^n Hom_R(-, N))_{n\geq 0}$ und $(F^n)_{n\geq 0}$ beides kontravariante $\delta$-Funktoren, mit $R^0 Hom_R(-, N) = Hom_R(-, N) = F^0$. Mit 2.9.4 folgt, dass es für alle $R$-Moduln M eine kanonische Isomorphie:

$$R^n Hom_R(-, N)(M) \simeq F(M) = R^n Hom_R(M, -)(N) = Ext^n_R(M, N)$$

**Satz 2.10.3.** *Sei A ein Hauptidealring, $M, N$, seinen R-Moduln. Dann gilt: $Ext^n_A(M, N) = 0$ für alle $n \geq 2$.*

*Beweis.* 1. Wir konstruieren eine injektive Auflösung von $N$. Es existiert ein injektiver $A$-Modul $I^0$, und ein Monomorphismus $\varepsilon : N \hookrightarrow I^0$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varepsilon"] & I^0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & I^1 \arrow[r] & 0 \\ & & & \operatorname{coker} \varepsilon \arrow[ur, equal] & & \end{tikzcd}$$

$I^0$ injektiv, dann folgt mit 2.6.11 $I^0$ ist teilbar $\Rightarrow$ $\operatorname{coker} \varepsilon = I^0/_{\operatorname{im} \varepsilon}$ teilbar, damit folgt aus 2.6.12 und da A ein Hauptidealring ist, dass der $\operatorname{coker} \varepsilon$ injektiv ist. Setze $I^1 := \operatorname{coker} \varepsilon$, dann ist $N \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots$ eine injektive Auflösung von $N$.

2. Für $n \geq 2$ ist $Ext_A^n(M,N) = H^n(Hom_R(M,J^\bullet)) = 0$.

**Bemerkung + Definition 2.10.4.** Seien $M, N$ $R$-Moduln.

$$\mathcal{E}(M,N) := \{\text{exakte Sequenzen } \; 0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0 \text{ von } R\text{-Moduln}\}$$

Wir definieren auf $\mathcal{E}(M,N)$ eine Relation "$\sim$"wie folgt:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad \sim \qquad 0 \longrightarrow N \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Homomorphismus $\alpha : E \to E'$, sodass:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutiert (nach dem Fünferlemma ist $\alpha$ bereits ein Isomorphismus). " $\sim$ " ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}(M,N)$ und wir setzen:

$$E(M,N) := {}^{\mathcal{E}(M,N)}/_{\sim}$$

$E(M,N)$ enthält ein ausgezeichnetes Element, die Äquivalenzklasse der spaltenden exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

**Satz 2.10.5.** *Seien $M, N$ $R$-Moduln. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\Psi : E(M,N) \to Ext_R^1(M,N).$$

*Beweis.* Wir fixieren einen projektiven $R$-Modul $P$ und einen Epimorphismus $\varepsilon : P \twoheadrightarrow M$.

1. Konstruktion von $\Psi$:
   Setze $K := \ker \varepsilon$. Damit erhalten wir eine exakte Folge

   $$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0, \quad \mu \text{ Inklusion}$$

   Durch Anwendung des Hom-Funktors erhalten wir insbesondere eine exakte Folge

   $$\mathrm{Hom}_R(P,N) \xrightarrow{\mu_N^*} \mathrm{Hom}_R(K,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}_R^1(P,N)}_{\substack{=0, \text{ da } P \\ \text{projektiv}}}$$

(hierbei ist $\mu_N^* =$ "$\big|_K$"). Also ist

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(K,N) / \underbrace{\ker(\mathrm{Hom}_R(K,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N))}_{=\mathrm{im}\,\mu_N^*} = \mathrm{coker}\,\mu_N^*$$

Sei nun $x \in E(M,N)$ die Äquivalenzklasse von

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[u, two heads, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Da $P$ projektiv existiert ein Homomorphismus $\varphi : P \to E$ mit $\psi \circ \varphi = \varepsilon$. Es ist $0 = \varepsilon(K) = \psi(\varphi(K))$, also $\varphi(K) =\subsetneq \ker\psi = \mathrm{im}\,\iota$. Setze

$$\delta : K \xrightarrow{\varphi|_K^{\mathrm{im}\,\iota}} \mathrm{im}\,\iota \xrightarrow[\sim]{(\iota|^{\mathrm{im}\,\iota})^{-1}} N, \quad \text{insbesondere } \iota \circ \delta = \varphi \circ \mu$$

Wir setzen

$$\Psi(x) := \text{ Bild von } \delta \text{ in } \mathrm{coker}(\mu_N^*) \cong \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$$

2. $\Psi$ ist wohldefiniert, d.h. $\Psi$ ist unabhängig von der Wahl eines Vertreters (und von der Wahl von $\varphi$). Sei dazu

$$0 \to N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\psi} M \to 0 \quad \sim \quad 0 \to N \xrightarrow{\iota'} E' \xrightarrow{\psi'} M \to 0$$

Daraus erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\delta'"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"'] \arrow[u, "\delta"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[u, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \end{tikzcd}$$

Mittels $\tilde{\delta} := \delta'$ und $\tilde{\varphi} := a \circ \varphi'$ liefert dies ein weiteres Diagramm:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tilde{\delta}"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"] \arrow[u, "\delta"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[u, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \end{tikzcd}$$

Wegen $\psi \circ \tilde{\varphi} = \varepsilon$, $\psi \circ \varphi = \varepsilon$, folgt $\psi \circ (\tilde{\varphi} - \varphi) = 0$, d.h. $\operatorname{im}(\tilde{\varphi} - \varphi) \subseteq \ker \psi = \operatorname{im} \iota$. Setze

$$\gamma : P \xrightarrow{(\tilde{\varphi}-\varphi)|^{\operatorname{im}\iota}} \operatorname{im}\iota \xrightarrow{(\psi|^{\operatorname{im}\iota})^{-1}} N$$

dann ist $\mu_N^*(\gamma) = \gamma\big|_K = \tilde{\delta} - \delta = \delta' - \delta$, also $\delta' = \delta - \mu_N^*(\gamma)$, d.h die Bilder von $\delta, \delta'$ in $\operatorname{coker} \mu_N^*$ stimmen überein.

3. Wir konstruieren eine zu $\Psi$ inverse Abbildung $\Phi : \operatorname{Ext}_R^1(M, N) \to E(M, N)$. Sei $y \in \operatorname{Ext}_R^1(M, N) \cong \operatorname{coker} \mu_N^*$, $\varphi : K \to N$ ein Vertreter von $y$. Setze

$$L_\varphi := \{(-\varphi(k), \mu(k)) |\, k \subseteq K\}, \qquad E := {N \times P}\big/{L_\varphi}$$

und

$$\iota : N \longrightarrow E, \quad n \mapsto (n, 0) + L_\varphi$$
$$\psi : E \longrightarrow M, \quad (n, p) + L_\varphi \mapsto \varepsilon(p)$$
$$\sigma : P \longrightarrow E, \quad p \mapsto (0, p) + L_\varphi$$

Erhalte damit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\sigma"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

denn:

- $\psi$ ist wohldefiniert wegen $\varepsilon \circ \mu = 0$
- Für $k \in K$ ist

$$(\iota \circ \varphi)(k) = (\varphi(k), 0) + L_\varphi = (0, \mu(k)) + L_\varphi = \sigma(\mu(k))$$

  und für $p \in P$ ist

$$(\psi \circ \sigma)(p) = \psi((0, p) + L_\varphi) = \varepsilon(p)$$

- $\iota$ ist injektiv, denn sei $n \in N$ mit $(n, 0) + L_\varphi = L_\varphi$, d.h. es existiert ein $k \in K$ mit $(n, 0) = (-\varphi(k), \mu(k))$, also $\mu(k) = 0$, woraus $k = 0$ und damit $n = -\varphi(k) = 0$ folgt.
- $\psi$ ist surjektiv, da $\varepsilon$ surjektiv
- $\operatorname{im} \iota = \ker \psi$:
  "$\subseteq$" $(\psi \circ \iota)(u) = \psi((n, 0) + L_\varphi) = \varepsilon(0) = 0$

"$\supseteq$" Sei $z = (n, p) + L_\varphi \subseteq \ker \psi$, also $\varepsilon(p) = 0$. Damit existiert ein $k \in K$ mit $p = \mu(k)$, das heißt

$$\begin{aligned} (n, p) + L_\varphi &= ((n, p) + L_\varphi) + (-\varphi(-k), \mu(-k)) + L_\varphi) \\ &= (n + \varphi(k), 0) + L_\varphi = \iota(n + p(k)) \end{aligned}$$

Setze

$$\Phi := \text{Restklasse von } \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0 \quad \text{ in } E$$

4. Nachrechnen. dass $\Phi$ wohldefiniert und $\Phi, \Psi$ invers zu einander sind (Übung)

Fertig. ■

**Anmerkung.** Das im Beweis konstruierte $\Psi$ ist unabhängig von der Wahl $\varepsilon : P \twoheadrightarrow M$ und bildet die Klasse der spaltenden Erweiterungen auf das Nullelement in $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ ab.

# 3 Kommutative Algebra

**In diesem Kapitel sei $A$ stets ein kommutativer Ring (mit Eins)**

## 3.11 Grundlagen

**Definition 3.11.1.** $A$ heißt *lokal* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $A$ besitzt genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. In diesem Fall heißt $k = {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$ der *Restklassenkörper* von $A$.

**Bemerkung 3.11.2.** *Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dann sind äquivalent:*

*i)* *$A$ ist lokal mit einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$*

*ii)* $A \backslash \mathfrak{m} \subseteq A^*$

*iii)* $A \backslash \mathfrak{m} = A^*$

*iv)* $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$

*Beweis.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sei $x \in A\backslash\mathfrak{m}$. Falls $x \notin A^*$, dann existiert nach Algebra 1 ein maximales Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} \subseteq A$ mit $x \in \mathfrak{m}$. Insbesondere ist $\tilde{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{m}$, d.h. $A$ ist nicht lokal.
*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Es gelte $A\backslash\mathfrak{m} \subseteq A^*$. Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{a} \cap A^* = \emptyset$, also $\mathfrak{a} \cap (A\backslash\mathfrak{m}) = \emptyset$. Damit ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Somit ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal in $A$.
*ii)* $\Rightarrow$ *iii)* klar: $x \in A^* \Rightarrow x \in A\backslash\mathfrak{m}$.
*iii)* $\Rightarrow$ *iv)* Sei $x \in 1 + \mathfrak{m}$. Falls $x \in \mathfrak{m}$, dann ist $1 \in \mathfrak{m}$, Widerspruch! Also $x \in A\backslash\mathfrak{m} \overset{iii)}{=} A^*$.
*iv)* $\Rightarrow$ *ii)* Es gelte $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$. Sei $x \in A\backslash m$. Dann ist $Ax + \mathfrak{m}$ ein Ideal mit $Ax + \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}$, also $Ax + \mathfrak{m} = (1)$. Damit existiert ein $a \in A$, $y \in \mathfrak{m}$ mit $ax + y = 1$, also $ax = 1 - y \in 1 + \mathfrak{m} \subseteq A^* \Rightarrow x \in A^*$. ■

**Definition 3.11.3.** Sei $x \in A$. $x$ heißt *nilpotent* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$.

**Anmerkung.** Ist $A \neq 0$, dann ist jedes nilpotentes Element ein Nullteiler, die Umkehrung ist im Allgemeinen jedoch falsch.

**Bemerkung + Definition 3.11.4.**

$$\mathfrak{N}(A) := \{x \in A |\, x \text{ ist nilpotent}\}$$

ist ein Ideal in $A$, das *Nilradikal* in $A$. Der Ring ${}^{A}\!/_{\mathfrak{N}(A)}$ hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.

*Beweis.* 1. $\mathfrak{N}(A)$ ist ein Ideal:

- $0 \in \mathfrak{N}(A)$
- Seien $x, y \in \mathfrak{N}(A)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ und $y^n = 0$, womit $(x+y)^{2n-1} = 0$ (aus der binomischen Formel) folgt. Damit ist $x + y \in \mathfrak{N}(A)$.
- Sei $x \in \mathfrak{N}(A)\, a \in A$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$, also $a^n x^n = (ax)^n = 0$, womit $ax \in \mathfrak{N}(A)$ gilt.

2. Sei $\overline{x} \in {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{N}(A)}$ nilpotent. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{x}^n = 0$, also $x^n \in \mathfrak{N}(A)$, also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(x^n)^m = 0$, also $x^{nm} = 0$, woraus $x \in \mathfrak{N}(A)$, also $\overline{x} = 0$ folgt.

Damit folgt die Aussage ■

**Satz 3.11.5.** *Es gilt*

$$\mathfrak{N}(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \textit{Primideal}}} \mathfrak{p}$$

*Beweis.* Wir setzen $\mathfrak{N}'(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}'(A)$.
"$\subseteq$" Sei $x \in \mathfrak{N}(A)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist dann $x^n \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$. Damit ist auch $x \in \mathfrak{N}'(A)$.
"$\supseteq$" Angenommen es existiert ein $x \in \mathfrak{N}'(A) \backslash \mathfrak{N}(A)$. Dann gilt $x^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\Sigma := \{\mathfrak{a} \in A \text{ Ideal} |\, x^n \notin \mathfrak{a} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Dann ist $\Sigma$ eine bezüglich Inklusion induktiv geordnete Menge $\neq \emptyset$ (Standardargument mit $\cup$). Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\mathfrak{p}$ in $\Sigma$. Diese $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal, denn: Seien $s, t \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p} \subsetneq As+\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subsetneq At+\mathfrak{p}$. Also ist $as+\mathfrak{p}$, $At+\mathfrak{p} \notin \Sigma$. Damit existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in As+\mathfrak{p}$, $x^m \in At+\mathfrak{p}$. Also liegt $x^{n+m} \in Ast+\mathfrak{p}$, weshalb $Ast+\mathfrak{p} \notin \Sigma$. Falls $st \in \mathfrak{p}$, dann wäre $Ast+\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \in \Sigma$, Widersprch! Also ist $st \notin \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ folgt $x \notin \mathfrak{p}$, also $x \notin \mathfrak{N}'(A)$. Widerpsruch! ■

**Bemerkung 3.11.6.** *Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_n$ Primideale in $A$, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$. Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.*

*Beweis.* per Induktion nach n: $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, ..., n \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$.
n=1: trivial
$n > 1$: Sei $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, ..., n$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt: $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup ... \cup \mathfrak{p}_n$ für alle $i = 1, ..., n \Rightarrow$ Für alle $i = 1, ..., n$ existiert ein $x_i \in \mathfrak{a}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ für $j \neq i$

1.Fall: Es existiert ein $i \in \{1, ...n\}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_i$. Dann $x \notin \bigcup_{j=0}^n \mathfrak{p}_j$, fertig.
2.Fall: $x_i \in \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, ...n\}$. Setze $y := \sum_{j=1}^n x_1 \cdot ... \cdot x_{j-1} \cdot x_{j+1} \cdot ... \cdot x_n$. Dann ist $y \in \mathfrak{a}$, $y \notin \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, ...n\}$ ( "Alle Summanden bis auf einen in $\mathfrak{p}_i$"). Also $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$. ∎

**Bemerkung 3.11.7.** *Seinen $\mathfrak{a}_1, \dots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$. Dann existiert ein $j \in \{1, ...n\}$ mit $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$, dann existiert ein $j \in \{1, ...n\}$ mit $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{p}$.*

*Beweis.* Angenommen für alle $i \in \{1, ...n\}$ gilt $\mathfrak{a}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$. $\Rightarrow$ Für alle $i \in \{1, ...n\}$ existiert ein $x_i \in \mathfrak{a}_i, x_i \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $x_1 \cdots x_n \notin \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Andererseits ist jedoch $x_1 \cdots x_n \in \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$., Widerspruch! Sei nun $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$ Dann existiert ein $j \in \{1, ...n\}$ mit $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$.
$\Rightarrow \mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_j$. ∎

**Bemerkung + Definition 3.11.8.** Seinen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale, $a \in A$.

$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} := \{x \in A |\ x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ heißt *Idealquotient* $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist ein Ideal in $A$.

$\mathrm{ann}(\mathfrak{a}) := (0) : \mathfrak{a} = \{x \in A |\ x\mathfrak{a} = 0\}$ heißt der *Annulator* von $\mathfrak{a}$.

$\mathrm{ann}(a) := \mathrm{ann}((a)) = \{x \in A |\ xa = 0\}$.

**Anmerkung.**

- $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$
- Die Menge der Nullteiler von $A$ ist gegeben durch $\bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} ann(x)$

**Beispiel 3.11.9.** $A = \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0) \Rightarrow (m) : (n) = \left(\frac{m}{ggt(m,n)}\right)$.

**Definition 3.11.10.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A |$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \mathfrak{a}\}$ heißt das *Radikal* von $\mathfrak{a}$.

**Anmerkung.**

- $\sqrt{(0)} = \mathfrak{N}(A)$
- Ist $\pi : A \to A/_{\mathfrak{a}}$ die kanonische Projektion, dann ist:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathfrak{a}} &= \{x \in A |\ \text{Es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\} = \{x \in A | \pi(x) \in \mathfrak{N}\left(A/_{\mathfrak{a}}\right)\} \\
&= \pi^{-1}(\mathfrak{N}(A/_{\mathfrak{a}})) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{a} \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}\right) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ PI} \\ \text{mit} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal.

**Definition 3.11.11.** Sei $B$ ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphimsus, $\mathfrak{a} \subseteq A, \mathfrak{b} \subseteq B$ Ideale.

$\mathfrak{a}^e := Bf(\mathfrak{a}) = \{\sum_{endl.} b_i f(a_i) | b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a}\}$ heißt die *Erweiterung* von $\mathfrak{a}$ auf $B$.

$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$ heißt die *Kontraktion* von $\mathfrak{b}$ auf A.

**Anmerkung.**

- $\mathfrak{a}^e, f^c$ sind Ideale in $B$ bzw. in $A$.
- Wir können $f$ faktorisieren in $A \xrightarrow{p} \operatorname{im} f \xhookrightarrow{\iota} B$. Die Situation für $p$ ist einfach die für $\iota$ ist kompliziert.
- $\mathfrak{q} \in B$ Primideal $\Rightarrow \mathfrak{q}^c \subseteq A$ Primideal wegen ${}^{A}/_{f^{-1}(\mathfrak{q})} \hookrightarrow \underbrace{{}^{B}/_{\mathfrak{q}}}_{\text{nullteilerfrei}}$
  (beachte $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^c$)
- Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, dann ist $\mathfrak{p}^e \subseteq B$ im Allgemeinen kein Primideal. (Übung: $p$ Primzahl mit $p \equiv 1 \mod 4$. Unter $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ ist $(p)^e$ ein Produkt zweier verschiedener Primideale.)

**Bemerkung 3.11.12.** *Sei $B$ ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal. Dann gilt:*

*a)* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$

*b)* $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$

*c)* $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$

*d)* $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$

*Beweis.* (a),(c) klar.
(b) $\mathfrak{a}^e \subseteq (\mathfrak{a}^{ec})^e, (\mathfrak{a}^e)^{ce} \subseteq \mathfrak{a}^e$
(d) analog. ∎

**Satz 3.11.13.** *Sei $B$ ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Setze*

$$C := \{\mathfrak{a} \subseteq A \textit{ Ideal} \mid \mathfrak{a} \textit{ ist Kontraktion eines Ideals aus } B\}$$

$$E := \{\mathfrak{b} \subseteq B \textit{ Ideal} \mid \mathfrak{b} \textit{ ist Erweiterung eines Ideals aus } A\}$$

*. Dann gilt:*

*a)* $C = \{\mathfrak{a} \subseteq A \textit{ Ideal} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$

*b)* $E = \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ Ideal} \mid \mathfrak{b}^{ce} = b\}$

*c) Die Abbildungen*

$$\Phi : C \to E, \quad \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e, \qquad \Psi : E \to C, \quad \mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$$

*Sind zueinander inverserse, inklusionserhaltende Bijektionen.*

*Beweis.* a) "$\supseteq$"klar. "$\subseteq$"$\mathfrak{a} \in C \Rightarrow$ es existiert ein $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c \Rightarrow \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{a}$ (letztes "="per 3.11.12(d))

b) analog

c) klar nach (a), (b). ■

**Anmerkung.** Erinnerung an LA1: $T \in M(n \times n, A)$, dann existiert eine komplementäre Matrix $T^{\#} \in M(n \times n, A)$ zu $T$. Es ist $T^{\#}T = TT^{\#} = det(T)E_n$. (LA1: Satz 17.20)

**Satz 3.11.14.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, $\varphi \in End_A(M)$ mit $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann existiert ein $n \in N, a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit:*

$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + ... + a_1\varphi + a_0 id_M = 0$$

*Beweis.* Sei $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensystem von $M$. Dann ist $\varphi(x_i) \in \mathfrak{a}M = \{\sum_{endl.} \alpha_i y_i | \alpha_i \in \mathfrak{a}, y_i \in M\}$, insbesondere existieren $a_{i1}, ..., a_{in} \in \mathfrak{a}$ mit $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ (stelle $y_i$ als Linearkombination von $x_1, ..., x_n$ dar). Damit ist

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}\varphi - a_{ij} id_M)(x_j) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Betrachte $A[\varphi] = \{b_n\varphi^n + b_{n-1}\varphi^{n-1} + ... + b_1\varphi + b_0 id_M \mid n \in \mathbb{N}_0, b_i \in A\}$, ( was ein kommutativer Unterring von $End_A(M)$; ist mit der Konvention: $\varphi^0 = id_M$). Setze nun

$$T := (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, A[\varphi])$$

$M$ wird via $(\sum b_i\varphi^i)x = \sum b_i\varphi^i(x)$ zum $A[\varphi]$-Modul.

$$T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 = T^{\#}T \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \det(T) \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$$

Da $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensytem von $M$ ist folgt: $det(T)x = 0$ für alle $x \in M$, also $det(T) = 0$. Andererseits gilt aber auch:

$$det(T) = det(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{ij}) = \varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + ... + a_1\varphi + a_0 id_M$$

mit $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ nach Leibniz-Formel. ■

**Folgerung 3.11.15.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $a = 1 \mod \mathfrak{a}$ mit $aM = 0$.*

*Beweis.* Mit $\varphi = id_M$ ist $\varphi(M) = M = \mathfrak{a}M$ Dann existieren $a_0, .., a_{n-1} \in \mathfrak{a}$, sodass $0 = id_M^n + a_{n-1}id_M^{n-1} + ... + a_1\varphi + a_0 id_M$, das heißt: $0 = x + a_{n-1}x + ... + a_1 x + a_0 x = \underbrace{(1 + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)}_{:=a} x \Rightarrow a \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$, $ax = 0$ ∎

**Satz 3.11.16 (Nakayama-Lemma).** *Sei $A$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M} = 0$. Dann ist $M = 0$.*

*Beweis.* Aus ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M} = 0$ folgt $M = \mathfrak{m}M$. Nach 3.11.15 folgt, dassein $a \in A, a \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$ existiert mit $aM = 0$. Wegen $a \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ ist $a \in A^*$. Mit 3.11.2 folgt $M = 0$. ∎

**Folgerung 3.11.17.** *Sei $A$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul mit $M = \mathfrak{m}M + N$. Dann ist $M = N$.*

*Beweis.* Es ist
$$\mathfrak{m}({}^{M}/_{N}) = {}^{(\mathfrak{m}M + N)}/_{N} = {}^{M}/_{N}$$
Mit dem Nakayama-Lemma folgt unmittelbar: ${}^{M}/_{N} = 0$, also $M = N$. ∎

**Folgerung 3.11.18.** *Sei $A$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, $M$ ein endlcih erzeugter $A$-Modul, $x_1, ..., x_n \in M$. Dann sind äquivalent:*

*i)* $x_1, \ldots, x_n$ *ist ein Erzeugendensystem von* $M$

*ii) Die Bilder* $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ *von* $x_1, \ldots, x_n$ *in* ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M}$ *erzeugen den* ${}^{A}/_{\mathfrak{m}}$*-VR* ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M}$

*Beweis.* (i)⇒(ii) klar.
(ii)⇒(i) Setze $N := \sum_{i=1}^{n} Ax_i$. Nach Voraussetzung ist

$${}^{(N + \mathfrak{m}M)}/_{\mathfrak{m}M} = {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} \Longrightarrow N + \mathfrak{m}M = M$$

Mit 3.11.17 folgt: $N = M$. ∎

**Anmerkung.** Wichtig: $M$ endlich erzeugt ist eine Voraussetzung in 3.11.18.

## 3.12 Lokalisierung

**Erinnerung** (an Algebra 1): Sei $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich "$\cdot$" (d.h. $1 \in S$ und $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$). Definiere eine Relation "$\sim$" auf $A \times S$ wie folgt:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \text{Es existiert ein } t \in S \text{ mit } ta_2s_1 = ta_1s_2$$

"$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation, setze $S^{-1}A := {}^{A \times S}/_{\sim}$, wobei $\frac{a}{s}$ die Äquivalenzklasse von $(a, s) \in A \times S$ ist. Dann ist $S^{-1}A$ ein kommutativer Ring via

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1s_2 + a_2s_1}{s_1s_2}, \qquad \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1a_2}{s_1s_2}$$

Ferner gibt es einen Ringhomomorphismus $\tau : A \to S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{a}{1}$. Diese ist genau dann injektiv, wenn $S$ nur aus Nichtnullteilern besteht.

**Im Folgenden sei $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich "$\cdot$", Erweiterung und Kontraktion von Idealen sind bezüglich $\tau$ zu verstehen.**

**Bemerkung + Definition 3.12.1.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal

$$S^{-1}\mathfrak{a} := a^e = \{\tfrac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{a},\ s \in S\} \subseteq S^{-1}A \text{ ist ein Ideal.}$$

Ferner gilt: $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S = \emptyset$.

*Beweis.* "$\Rightarrow$" $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A \Rightarrow 1 = \frac{1}{1} \in S^{-1}\mathfrak{a} \Rightarrow$ Es existiert ein $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ mit $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. Damit exitstiert ein $t \in S$ mit $ta = ts$, also ist $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Sei $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$. Dann existiert ein $s \in \mathfrak{a} \cap S$ mit $\frac{s}{s} = \frac{1}{1} \in S^{-1}A$, also ist $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A$ ∎

**Bemerkung 3.12.2.** *Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Dann ist $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S^{-1}A$.*

*Beweis.* Seien $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ mit $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Dann existieren $b \in \mathfrak{p}$, $s \in S$ mit $\frac{a_1a_2}{s_1s_2} = \frac{b}{s}$. Dann existiert ein $t \in S$ mit $tsa_1a_2 = tbs_1s_2 \in \mathfrak{p}$, woebi $t, s \notin \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ Primideal, muss also $a_1a_2 \in \mathfrak{p}$ gelten und damit $a_1 \in \mathfrak{p}$ oder $a_2 \in \mathfrak{p}$. Damit folgt schließlich $\frac{a_1}{s_1} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ oder $\frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. ∎

**Bemerkung 3.12.3.** *Es gilt:*

a) *Für die Abbildungen*

$$
\begin{array}{rcl}
\{\textit{Ideale in } A\} & \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} & \{\textit{Ideale in } S^{-1}A\} \\
\mathfrak{a} & \longmapsto & a^e = S^{-1}\mathfrak{a} \\
\mathfrak{b}^c = \tau^{-1}(\mathfrak{b}) & \longleftarrow\!\!\shortmid & b
\end{array}
$$

*gilt:* $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{\textit{Ideale in } S^{-1}A\}}$, *insbesondere ist* $\Phi$ *surjektiv und* $\Psi$ *injektiv. Beide Abbildungen sind inklusionserhaltend.*

b) *Die Abbildungen*

$$
\begin{array}{rcl}
\{\textit{Primideale in Amit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} & \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} & \{\textit{Primideale in } S^{-1}A\} \\
\mathfrak{p} & \longmapsto & p^e = S^{-1}\mathfrak{p} \\
q^c = \tau^{-1}(q) & \longleftarrow\!\!\shortmid & q
\end{array}
$$

*sind bijektiv und invers zueinander, beide sind inklusionserhaltend.*

*Beweis.* a) Es ist zu zeigen, dass $b^{ce} = b$ für alle Ideale $b$ in $S^{-1}A$.
"$\subseteq$" gilt nach 3.11.12.
"$\supseteq$" Sei $\frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$ mit $a \in A$, $s \in S$. Dann ist $\frac{a}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann ist $a \in c^c$, also $\frac{a}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$.

b)
- $\Psi$ ist wohldefiniert: Für ein Primideal $\mathfrak{q} \in S^{-1}A$ ist $\mathfrak{q}^c$ ein Primideal (vgl. Übungen). Es ist $\mathfrak{q}^c \cap S = \emptyset$, denn andernfalls würde ein $s \in S$ existieren mit $\frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, also $1 = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, Widerpsruch!
- $\Phi$ ist wohldefiniert nach 3.12.2.

Nach $a$) ist $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{\text{Primideale in } S^{-1}A\}}$, also genügt es zu zeigen, dass für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.
"$\supseteq$" aus 3.11.12 $a$)
"$\supseteq$" Sei $a \in \mathfrak{p}^{ec}$. Dann existiert ein $b \in \mathfrak{p}$, $s \in S$ mit $\frac{a}{1} = \frac{b}{s}$, also existiert ein $t \in S$ mit $tas = tb$, d.h. $sta = tb$. Da $st \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ Primideal, folgt $a \in \mathfrak{p}$. ■

**Bemerkung + Definition 3.12.4.** Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, setze $S := A \backslash \mathfrak{p}$ (ist ein Untermonoid).

$A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ heißt die *Lokalisierung von* $A$ *bei* $\mathfrak{p}$.

$A_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$. Erweiterung und Kontraktion liefern inklusionserhaltende Bijektionen zwischen der Menge der Primideale in $A$, die $\mathfrak{p}$ enthalten und der Menge der Primideale in $A_{\mathfrak{p}}$.

*Beweis.* folgt aus 3.12.3 *b*) (beachte: $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$). ■

**Beispiel 3.12.5.** Betrachte $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$ für eine Primzahl $p$. Dann ist

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | \, m, n \in \mathbb{Z}, \, \mathrm{ggT}(m,n) = 1, \, p \nmid n \right\}$$

lokal mit dem maximalen Ideal

$$p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | \, m, n \in \mathbb{Z}, \, \mathrm{ggT}(m,n) = 1, \, p|m, \, , p \nmid n \right\}$$

**Bemerkung + Definition 3.12.6.** Sei $M$ ein $A$-Modul. Wir definieren eine Relation "$\sim$" auf $S \times M$ wie folgt:

$$(s_1, m_1) \sim (s_2, m_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \text{Es existiert ein } t \in S \text{ mit } ts_2m_1 = ts_1m_2$$

"$\sim$" ist ein Äquivalenzrelation und wir setzen $S^{-1}M := {}^{(S \times M)}\!/_{\sim}$; $\frac{m}{s}$ bezeichne die Äquivalenzklasse on $(s, m) \in S \times M$. Dann ist $S^{-1}M$ ein $S^{-1}A$-Modul vermöge

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} := \frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

für $m_1, m_2, m \in M$, $s_1, s_2, s, t \in S$. $S^{-1}M$ heißt der *Quotientenmodul* von $M$ nach $S$. Es gibt eine natürliche Abbildung $\tau : M \to S^{-1}M$, $m \mapsto \frac{m}{1}$.

*Beweis.* nachrechnen. ■

**Anmerkung.** $S^{-1}M$ ist auch ein $A$-Modul vermöge $a \cdot \frac{m}{s} := \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{s}$. $\tau$ ist dann ein Homomorphismus von $A$-Moduln.

**Satz 3.12.7.** *Seien $M, N$ $A$-Moduln, $\varphi : M \to N$ $A$-linear, $\tau_M : M \to S^{-1}M$, $\tau_N : N \to S^{-1}N$ die kanonischen Abbildungen.*
*Dann gibt es genau eine $S^{-1}A$-lineare Abbildung*

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_M"'] & N \arrow[d, "\tau_N"] \\ S^{-1}M \arrow[r, dashed, "S^{-1}\varphi"] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

*mit $S^{-1}\varphi \circ \tau_M = \tau_N \circ \varphi$*
*Auf diese Weise wird $S^{-1}\_ : A\text{-Mod} \longrightarrow S^{-1}A\text{-Mod}$ zu einem additiven Funktor.*

*Beweis.* 1. Existenz: Setze $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$, $\frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$.

- $S^{-1}\varphi$ ist wohldefiniert: Sei $(s_1, m_1) \sim (s_2, m_2)$. Dann existiert ein $t \in S$ mit $ts_2m_1 = ts_1m_2$, also $ts_2\varphi(m_1) = ts_1\varphi(m_2) \Rightarrow (s_1, \varphi(m_1)) \sim (s_2\varphi(m_2)) \Rightarrow \frac{\varphi(m_1)}{s_1} = \frac{\varphi(m_2)}{s_2}$.
- $S^{-1}\varphi$ ist $S^{-1}A$-linear.

- Das Diagramm kommutiert, denn

$$(S^{-1}\varphi)(\tau_M(m)) = (S^{-1}\varphi)\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{\varphi(m)}{1} = \tau_N(\varphi(m))$$

2. Eindeutigkeit: Aus der Kommutativität des Diagramms und der $S^{-1}A$-Linearität vo $S^{-1}\varphi$ folgt:

$$\begin{aligned}(S^{-1}\varphi)\left(\frac{m}{s}\right) &= S^{-1}\varphi\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{m}{1}\right) = \frac{1}{s}S^{-1}\varphi\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{1}{s}S^{-1}\varphi(\tau_M(m)) = \frac{1}{s}(\tau_N(\varphi(m))) \\ &= \frac{1}{s}\cdot\frac{\varphi(m)}{1} = \frac{\varphi(m)}{2}\end{aligned}$$

3. Die Funktorialität und Additivität von $S^{-1}\_$ ist leicht nachzurechnen. ■

**Satz 3.12.8.** *$S^{-1}\_ : A$-Mod $\longrightarrow S^{-1}A$-Mod ist ein exakter Funktor.*

*Beweis.* Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M''$ eine exakte Folge von $A$-Moduln. Nach den Übungen genügt es zu zeigen, dass

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

exakt ist, d.h. $\operatorname{im}(S^{-1}f) = \ker(S^{-1}g)$.
“$\subseteq$“ Es ist $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(\underbrace{g \circ f}_{=0}) = 0$
“$\supseteq$“ Sei $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}g)$. Dann ist $\frac{g(m)}{s} = 0 = \frac{0}{1}$, also existiert ein $t \in S$ mit $tg(m) = 0$, d.h. $g(tm) = 0 \Rightarrow tm \in \ker g = \operatorname{im} f$, also existiert ein $m' \in M$ mit $f(m') = tm$. Damit folgt schließlich

$$S^{-1}f\left(\frac{f(m')}{st}\right) = \frac{f(m')}{st} = \frac{tm}{st} = \frac{m}{s}$$

also $\frac{m}{s} \in \operatorname{im}(S^{-1}f)$. ■

**Folgerung 3.12.9.** *Sei $M$ ein $A$-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist $S^{-1}N$ auf natürliche Weise ein Untermodul von $S^{-1}M$ und es gilt:*

$$S^{-1}\left({}^{M}/_{N}\right) \cong {}^{S^{-1}M}/_{S^{-1}N}$$

*(wir identifizieren diese Moduln im Folgenden mit einander.)*

*Beweis.* Wende $S^{-1}\_$ auf die exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}\!/_{N} \longrightarrow 0$$

an. Dann olgt die Behauptung aus 3.12.8 ■

**Bemerkung 3.12.10.** *Seien $M, N$ A-Moduln, $\varphi : M \to N$ A-linear. Dann gilt:*

*a)* $\ker(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\ker \varphi)$

*b)* $\operatorname{coker}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\operatorname{coker} \varphi)$

*c)* $\operatorname{im}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\operatorname{im} \varphi)$

*Beweis.* a Wende $S^{-1}$ auf die exakte Folge $0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ an.

b Wende $S^{-1}$ auf die exakte Folge $M \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow 0$ an.

c Wende $S^{-1}$ auf die exakte Folge $0 \longrightarrow \operatorname{im} \varphi \longrightarrow N \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow 0$ an. ■

**Bemerkung 3.12.11.** *Für die Abbildungen:*

$$\begin{array}{ccc} \{A\text{-}Untermoduln\ von\ M\} & \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} & \{S^{-1}A\text{-}Untermoduln\ von\ S^{-1}M\} \\ N & \longmapsto & S^{-1}N \\ \tau^{-1}(P) & \longleftarrow\!\shortmid & P \end{array}$$

*gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{S^{-1}A\text{-}Untermoduln\ von\ S^{-1}M\}}$, insbesondere ist $\Phi$ surjektiv und $\Psi$ injektiv. Beide Abbildungen sind inklusionserhaltend.*

*Beweis.* nachrechnen. ■

**Folgerung 3.12.12.** *Es gilt:*

*a) $M$ endlich erzeugter A-Modul, dann folgt: $S^{-1}M$ ist ein endlich erzeugter $S^{-1}A$-Modul*

*b) $M$ noetherscher A-Modul, dann ist auch $S^{-1}M$ ein noetherscher $S^{-1}A$-Modul.*

*Beweis.* 1. Sei $x_1, \ldots, x_r$ ein Erzeugendensystem von $M$ über $A$, dann folgt $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1}$ ist ein Erzeugendensystem von $S^{-1}M$ über $S^{-1}A$.

2. Sei $M$ ein noetherscher $A$-Modul, $L \subseteq S^{-1}M$ ein $S^{-1}A$-Untermodul. Mit 3.12.11 folgt: es existiert ein Untermodul $N$ in $M$ mit $L = S^{-1}N$, da $M$ noethersch ist $N$ endlich erzeugt. Mit (a) folgt $L = S^{-1}N$ ist eindelich erezugt über $S^{-1}A$. ■

**Definition 3.12.13.** Sei $M$ ein $A$-Modul, $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal. Wir setzen $S := A \backslash \mathfrak{p}$. $M_\mathfrak{p} := S^{-1}M$ heißt die *Lokalisierung* von $M$ bei $\mathfrak{p}$. Für einen Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von $A$-Moduln ist entsprechend $\varphi_\mathfrak{p} = S^{-1}\varphi : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ definiert.

**Anmerkung.** Eine Eigenschaft $(E)$ eines $A$-Moduls $M$ nennt man eine *lokale Eigenschft*, wenn gilt: $M$ erfüllt $(E) \Leftrightarrow M_\mathfrak{p}$ erfüllt $(E)$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$.

**Satz 3.12.14.** *Sei $M$ ein $A$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*i)* $M = 0$

*ii)* $M_\mathfrak{p} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subseteq A$

*iii)* $M_\mathfrak{m} = 0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m} \subseteq A$

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ trivial
$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $M \neq 0$. Dann existiert ein $x \in M, x \neq 0$. Es ist $ann_A(x) \subseteq A$ ein Ideal mit $ann_A(x) \neq A$. Wegen $1 \notin ann_A(x)$, folgt dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ mit $ann_A(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Für alle $s \in A \backslash \mathfrak{m} \subseteq A \backslash ann_A(x)$ ist $sx \neq 0$ ist $\frac{x}{1} \neq \frac{0}{1}$ in $M_\mathfrak{m}$. Darus folgt $M_\mathfrak{m} \neq 0$. ■

**Folgerung 3.12.15.** *Sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *eine Sequenz vn $A$-Moduln. Dann sind äquivalent:*

*i)* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *ist exakt*

*ii)* $M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p}$ *ist exakt für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subseteq A$.

*iii)* $M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m}$ *ist exakt für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m} \subseteq A$.

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$ aus 3.12.8, $(ii) \Rightarrow (iii)$ trivial.
$(iii) \Rightarrow (i)$ zu zeigen ist: $\operatorname{im} f = \ker g$:
"$\subseteq$" Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ ist

$$(\operatorname{im}(g \circ f))_\mathfrak{m} = \operatorname{im}((g \circ f)_\mathfrak{m}) = \operatorname{im}(g_\mathfrak{m} \circ f_\mathfrak{m}) = 0$$

Mit 3.12.14 folgt $\mathrm{im}(g \circ f) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$.
"$\supseteq$" Setze $N := {}^{\ker g}\!/_{\mathrm{im}\, f}$ mit 3.12.9 folgt:

$$N_{\mathfrak{m}} = {}^{(\ker g)_{\mathfrak{m}}}\!/_{(\mathrm{im}\, f)_{\mathfrak{m}}} = {}^{\ker g_{\mathfrak{m}}}\!/_{\mathrm{im}\, f_{\mathfrak{m}}} = 0$$

für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$. Mit 3.12.14 folgt $\ker g = \mathrm{im}\, f$. ■

**Folgerung 3.12.16.** *Seien $M, N$ $A$-Moduln, $f : M \to N$ $A$-Modulhomomorphismen. Dann gilt:*

*a) $f$ injektiv $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{m}}$ injektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{p}}$ injektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.*

*b) $f$ surjektiv $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{m}}$ surjektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{p}}$ surjektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.*

*c) $f = 0 \Leftrightarrow f_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.*

*Beweis.* a) Wende 3.12.15 an auf $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ an.

b) Wende 3.12.15 an auf $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ an.

c) Wende 3.12.14 auf $\mathrm{im}\, f$ an. ■

**Bemerkung 3.12.17.** *Sei $A$ nullteilerfrei, $K = \mathrm{Quot}(A)$. Die natürliche Abbildung $A \to K$ beziehungsweise $A_{\mathfrak{p}} \to K$, $\mathfrak{p}$ Primideal in $A$, sind alle injektiv, fasse also $A$ bzw $A_{\mathfrak{p}}$ als Unterringe von $K$ auf. Dann gilt:*

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq A \\ \text{max. Ideal}}} A_{\mathfrak{m}}$$

.

*Beweis.* (Für Primideale)
"$\subseteq$ "klar.
"$\supseteq$ " Sei $x \in K$ mit $x \in A_{\mathfrak{p}}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$. Setze $\varphi : A \to {}^{K}\!/_{A}, a \mapsto ax + A$. (Homomorphismus von $A$-Moduln) dann folgt $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to ({}^{K}\!/_{A})_{\mathfrak{p}} = {}^{k_{\mathfrak{p}}}\!/_{A_{\mathfrak{p}}}$ ■

## 3.13 Tensorprodukt und flache Moduln

**Definition 3.13.1.** Seinen $L, M, N$ $A$-Moduln, $\varphi : M \times N \to L$.
$\varphi$ heißt *$A$-bilinear* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $M \to L \quad m \mapsto \varphi(m, n)$ $A$-linear und für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $N \to L \quad n \mapsto \varphi(m, n)$ $A$-linear.

**Definition 3.13.2.** Seien $M, N$ $A$-Moduln, Ein *Tensorprodukt* von $M$ und $N$ über $A$ ist ein $A$-Modul $T$ zusammen mit einer $A$-bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$ sodass folgende Universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jeden $A$-Modul $L$ und jede $A$-lineare Abbildung $\varphi : M \times N \to L$ gibt es genau einen $A$-Modulhomomorphismus $\alpha : T \to L$, sodass $\alpha \circ \tau = \varphi$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr] \arrow[dr, "\tau"'] & & L \\
& T \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

**Satz 3.13.3.** *Seinen $M, N$ $A$-Moduln. Dann gilt:*

*a) Es gibt ein Tensorprodukt von $M, N$ über $A$.*

*b) Sind $T, T'$ Tensorprodukte von $M, N$ über $A$ mit $A$-bilinearen Abbildungen $\tau : M \times N \to T$, $\tau' : M \times N \to T'$, dann existiert genau ein $A$-Modulhomomorphismus $\alpha : T \to T'$ mit $\alpha \circ \tau = \tau'$. $\alpha$ ist ein Isomorphismus. Mit anderen Worten: Das Tensorprodukt von $M, N$ ist eindeutig bestimmt bis auf einen einduteigen Isomorphismus.*

*c) Ist $T$ ein Tensorprodukt von $M, N$ über $A$ mit $A$-bilinearer Abbildung $\tau : M \times N \to T$ und setzen wir für $m \in M, n \in N$:*

$$m \otimes n := \tau(m, n)$$

*Dann wird $T$ erzeugt von den Elementen $m \otimes n$, $m \in M, n \in N$ das heißt jedes Element von $T$ ist von der Form $\sum_{i=1}^{r} a_i(m_i \otimes n_i)$ mit $a_i \in A, m_i \in M, n_i \in N$. Hierbei gilt:*
$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$,
$m \otimes (n + n') = M \otimes n + m \otimes n'$,
$(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$
*für alle $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$. Notation für Tensorprodukt von $M$ und $N$ über $A$: $M \otimes_A N$*

*Beweis.* a) 1. Es gibt eine kanonische Inklusion: Die Elemente $[m, n]$ bilden offenbar eine $A$-Basis von $A^{M \times N}$. Sei $U$ ein Untermodul von $A^{M \times N}$, dr von allen Elementen der folgenden Gestalt erzeugt wird: $[m + m', n] - [m, n] -$

$[m', n], [m, n + n'] - [m, n] - [m, n'], [am, n] - a[m, n], [m, an] - a[m, n]$ mit $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$. Setze

$$T := {}^{A^{M\times N}}\!/_{U}, \tau : M \times N \hookrightarrow A^{M\times N} \to T, (m, n) \mapsto \overline{[m, n]}$$

2. T ist zusammen mit $\tau$ ein Tensorprodukt von $M, N$ über $A$:
   - T ist $A$- bilinear nach Konstruktion von U. ( zum Beispiel: $\tau(m+m', n) = \overline{[m + m', n]} = \overline{[m, n]} + \overline{[m', n]} = \tau(m, n) + \tau(m', n))$
   - $T$ erfüllt die Universelle Eigenschaft: Sei $L$ ein $A$-Modul $\varphi : M \times N \to L$ $A$-bilinear. Wir erhalten eine $A$-lineare Abbildung

     $$\psi : A^{M\times N} \to L, \quad \psi([m, n]) := \varphi(m, n)$$

     Wegen $\varphi$ bilinear ist $\psi(U) = 0 : \psi([m+m', n]-[m, n]-[m', n]) = \psi([m+m', n]) - \psi([m, n]) - \psi([m', n]) = \varphi(m + m', n) - \varphi(m, n) - \varphi(m', n) = 0$. Daraus erhalten wir eine $A$-lineare Abbildung

     $$\alpha : T = {}^{A^{M\times N}}\!/_{U} \to L$$

     mit $\alpha([m, n]) = \psi([m, n]) = \varphi(m, n)$ also $\alpha(\tau(m, n)) = \varphi(m, n)$, das heißt $\alpha \circ \tau = \varphi$. $\alpha$ ist durch die Vorgabe $\alpha \circ \tau = \varphi$ eindeutig bestimmt, da die Elemente $\overline{[m, n]} = \tau(m, n)$ den $A$-Modul $T$ erzeugen.

b) mit Standardargumenten

c) aus der Konstruktion im Beweis von (a) ■

**Anmerkung.** Für $m \in M$ ist stehts $m \otimes 0 = 0$ denn $m \otimes 0 = m \otimes (0 + 0) = m \otimes 0 + m \otimes 0$ anlalog $0 \otimes n = 0$ für $n \in N$.

**Beispiel 3.13.4.** 1. ${}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}} = 0$ Denn: Seien $a, b \in {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ so existiert ein $n \in N$ mit $na = 0$, es existiert ein $b' \in {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ mit $nb' = b \Rightarrow a \otimes b = a \otimes (nb') = (na) \otimes b' = 0 \otimes b'$

2. ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{3\mathbb{Z}} = 0$. Denn: Für $a \in {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}, b \in {}^{\mathbb{Z}}\!/_{3\mathbb{Z}}$ ist $a \otimes b = (3a) \otimes b = a \otimes (3b) = a \otimes 0 = 0$

# Index