# Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 19. April 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

**Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.**

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Moduln

**In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung “Ring“ stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei $R$ ein Ring.**

## 1.1 Grundlagen über Moduln

**Definition 1.1.1.** *Ein “R-Linksmodul“ ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \to M$, $(a,x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a,b \in R$, $x,y \in M$ gilt:*

a) $a(x+y) = ax + ay$

b) $(a+b)x = ax + bx$

c) $a(bx) = (ab)x$

d) $1x = x$

*Ein “R-Rechtsmodul“ ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \to M$, $(x,a) \mapsto xa$, sodass für alle $a,b \in R$, $x,y \in M$ gilt:*

a′) $(x+y)a = xa + yb$

b′) $x(a+b) = xa + xb$

c′) $x(ab) = (xa)b$

d′) $x1 = x$

**Anmerkung:** Es bezeichne $R^{\mathrm{op}}$ den zu $R$ entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge $R$ mit derselbern Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\mathrm{op}} b := b \cdot a$. Ist $M$ ein $R$–Rechtsmodul, dann wird $M$ durch $ax := xa$ zu einem $R^{\mathrm{op}}$-Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\mathrm{op}} b)x \quad \text{für alle } a,b \in R,\ x,a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur $R$-Linksmoduln, und unter einem $R$-Modul verstehen wir einen $R$-Linksmodul

- Forderung $a)$ impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

  $$l_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

  zum Ring $\mathrm{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$ gehört.

  $$(\text{mit } (f+g)(x) := f(x) + g(x),\ (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

für $f, g \in \mathrm{End}(M)$, $x \in M$). Nach $b)$–$d)$ ist die Abbildung $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem $R$-Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

**Beispiel 1.1.2:** a) Ist $K$ ein Körper, dann sind $K$-Moduln die $K$-Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe $G$ ist ein $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \ldots x}_{\text{n-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \ldots + x}_{\text{(-n)-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring $R$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe $G$ genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als $\mathbb{Z}$–Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf $G$ überein einstimmt (nämlich obige).

**Definition 1.1.3.** *Seien $M, M'$ $R$-Moduln, $\varphi : M \to M'$. Dann heißt $\varphi$ "R-Modul-homomorphismus"(R-linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:*

*a)* $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

*b)* $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

*$Hom_R(M, M')$ bezeichne die Menge der $R$-Modulhomomorphismen von $M$ nach $M'$.*

**Anmerkung:** $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f+g)(x) := f(X)+g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

**Beispiel 1.1.4:** Sei $M$ ein $R$-Modul, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M) =: \mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathrm{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \to R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus („$X$ vertauscht mit Elementen aus $R$, $b$ im Allgemeinen nicht"). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \to \mathrm{End}(M), \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da $\varphi$ $R$-linear ist. Somit wird $M$ zum $R[X]$-Modul.

**Definition 1.1.5.** *Seien $M, M'$ R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ R-linear. $\varphi$ heißt*

*“Monomorphismus“ $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\varphi$ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)*

*“Epimorphismus“ $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\varphi$ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)*

*“Isomorphismus“ $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\varphi$ ist bijektiv (Notation: $M \tilde{\to} M'$)*

*Existiert ein Isomorphismus zwischen $M, M'$, so heißen $M, M'$ “isomorph“ (Notation: $M \cong M'$)*

**Anmerkung:** Ist $\varphi$ ein Isomorphismus, dann ist $\varphi^{-1}$ ein Isomorphismus.

**Bemerkung 1.1.6.** *Seien $M, M'$ R-Moduln. Dann gilt:*

*a) $R$ kommutativ $\Rightarrow$ $Hom_R(M, M')$ ist ein R-Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R$, $\varphi \in Hom_R(M, M')$, $x \in M$.*

*b) $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ ist ein Unterring von $End(M) = End_{\mathbb{Z}}(M)$.*

*c) Die Abbildung $\Phi : Hom_R(R, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist $R$ auf natürliche Weise ein R-Linksmodul). Ist $R$ kommutativ, so ist $\Phi$ ein Isomorphismus von R-Moduln.*

*d) $End_R(R) \cong R^{op}$*

*Beweis.* a) Beachte: Für $a \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder $R$-linear, denn für $a, b \in R$, $x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu $\Phi$ ist gegeben durch

$$\Psi : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \to M, a \mapsto am)$$

d) Nach Aussage $c$) haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \mathrm{End}_R(R) \to R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1) \cdot 1) = \psi(1)\varphi(1) \\ &= \varphi(1) \cdot_{\mathrm{op}} \psi(1) = \Phi(\varphi) \cdot_{\mathrm{op}} \Phi(\psi) \end{aligned}$$

□

**Definition 1.1.7.** *Sei $M$ ein R-Modul, $N \subseteq M$. $N$ heißt R-Untermodul von $M$, wenn gilt:*

*a)* $0 \in N$

*b)* $x + y \in N$ *für alle* $x, y \in N$

*c)* $ax \in N$ *für alle* $a \in R, x \in N$

**Beispiel 1.1.8:** a) Betrachte $R$ als $R$-Linksmodul. Dann sind die Untermodul von $R$ genau die Linksideale in $R$ (analog: Rechtsideale für $R$ als $R$-Rechtsmodul).

b) Ist $M$ ein $R$-Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Untermoduln. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von $M$, dann ist $\bigcap_{i\in I} M_I \subseteq M$ ein Untermodul, sowie $\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i | x_i \in M_i,\ x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$

c) Sind $M, M'$ $R$-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $N' \subseteq M'$ ein Untermodul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Untermoduln.

$$\mathrm{im}\,\varphi := \varphi(M) \text{ heißt das “Bild“ von } \varphi$$
$$\ker\varphi := \varphi^{-1}(\{0\}) \text{ heißt der “Kern“ von } \varphi$$

Es gilt: $\varphi$ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$ und $\varphi$ surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{im}\,\varphi = M'$

**Bemerkung + Definition 1.1.9.** *Sei $M$ ein $R$-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist die Faktorgruppe ${}^{M}\!/\!{}_{N}$ via $a(x+N) = ax+N$, $a \in R$, $x \in M$ ein $R$-Modul,der “Faktormodul“ von $M$ nach $N$. Die kanonische Abbildung $\pi : M \to {}^{M}\!/\!{}_{N}$, $m \mapsto m+N$ ist ein Modulepimorphismus mit $\ker\pi = N$.*

**Beispiel 1.1.10:** Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, $M$ ein $R$-Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i | n \in \mathbb{N},\ a_i \in I,\ x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von $M$. Ist $I$ ein zweiseitiges Ideal, dann ist ${}^{R}\!/\!{}_{I}$ ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von $I$ geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$${}^{R}\!/\!{}_{I} \times {}^{R}\!/\!{}_{I} \longrightarrow {}^{R}\!/\!{}_{I}, \quad (a + I, b + I) \mapsto ab + I$$

${}^{M}\!/\!{}_{IM}$ ist ein ${}^{R}\!/\!{}_{I}$-Modul vermöge

$$(a + I)(x + M) := ax + IM, \quad a \in R,\ x \in M$$

*Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)*

**Satz 1.1.11.** *Seien $M, M'$ R-Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \to M'$ R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

*i)* $N \subseteq ker\varphi$

*ii)* *Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\overline{\varphi} : {}^{M}\!/_{N} \to M'$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$ :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\ & {}^{M}\!/_{N} \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

**Satz 1.1.12** (Homomorphiesatz)**.** *Seien $M, M'$ R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R-Modulisomorphismus $\overline{\varphi} : {}^{M}\!/_{ker\varphi} \xrightarrow{\sim} im\,\varphi$ mit $\overline{\varphi}(x + ker\varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in M$.*

**Satz 1.1.13.** *(Isomorphiesätze) Sein $M$ ein R-Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:*

*a)* *Die Abbildung*

$$ {}^{N_1}\!/_{N_1 \cap N_2} \xrightarrow{\sim} {}^{(N_1 + N_2)}\!/_{N_2} \qquad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

*ist ein Isomorphismus.*

*b)* *Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist*

$$ {}^{M/N_2}\!/_{M/N_1} \xrightarrow{\sim} {}^{M}\!/_{N_1} \qquad (x + N_2) + {}^{N_1}\!/_{N_2} \mapsto x + N_1$$

*ein Isomorphismus.*

**Satz 1.1.14.** *Sei $M$ ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{Untermoduln\ M' von\ M mit\ N \subseteq M'\} & \longrightarrow & \{Untermoduln\ \ von\ {}^{M}\!/_{N}\} \\ M' & \mapsto & \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) & \leftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

*die inklusionserhaltend ist.*

**Bemerkung + Definition 1.1.15.** *Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: $\prod_{i \in I} M_i$ ist ein R-Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das "direkte Produkt" der $M_i$. Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j$ mit $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$ sind R-Modulhomomorphismen.*

**Satz 1.1.16** (Universelle Eingenschaft des Produkts)**.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul $M$ ist die Abbildung*

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i) \qquad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i\in I}$$

*eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \to M_i$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i\in I})$*

**Definition 1.1.17.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Der Untermodul*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \textit{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

*heißt die "direkte Summe" der $M_i$. Die Inklusionsabbildungen*

$$q_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i\in I} \quad \textit{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

*sind R-Modulhomomorphismen.*

**Anmerkung:** Ist $I$ endlich, dann ist $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

**Satz 1.1.18** (Universelle Eingenschaft der Summe)**.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul $M$ ist die Abbildung*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) \quad \textit{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i\in I}$$

*eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to M$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \psi_i(m_i)$ definierte).*

**Anmerkung:** Sei $I$ eine Indexmenge, $M$ ein $R$-Modul. Dann ist:

$$M^j := \prod_{i\in I} M, \qquad M^{(j)} := \bigoplus_{i\in I} M, \qquad M^r := M^{\{1,..,r\}} = M^{(\{1,..,r\})}$$

**Bemerkung 1.1.19.** *Sei $M$ ein R-Modul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von $\oplus$ mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R-Modulhomomorphismus*

$$\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i \quad \textit{mit} \quad \textit{im}\, \psi = \sum_{i\in I} M_i$$

*Ist $\psi$ injekitv, so heißt die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ "direkt", und wir schreiben auch $\bigoplus_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$.*

**Anmerkung:** In der Situation von 1.19 gilt:

- $\sum_{i\in I} M_i$ direkt $\iff \sum_{i\in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \bigoplus M_2 \iff M_1 \cap M_2 = 0$

**Definition 1.1.20.** *Sei $M$ ein $R$-Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \to M, a \mapsto ax$ ist ein $R$-Modulhomomorphismus, das Linksideal*

$$ann_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

*heißt der "Annulator"von $x$. Das Bild im $f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von $x$ erzeugte Untermodul von M. Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$*

$$RX := \langle X \rangle_R := \sum_{x\in X} Rx = im(R^{(X)} \to M) = \bigcap_{\substack{X\subseteq N\subseteq M \\ N \text{ Untermodul mit } X\subseteq N}} N$$

*Der von $X$ erzeugte Untermodul von M.*

**Definition 1.1.21.** *Sei $M$ ein $R$-Modul, $(x_i)_{i\in I}$ Familie von Elementen aus $M$, $\psi : R^{(I)} \to M, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i\in I}$ heißt*

*"Erzeugendensystem" von $M$ mit $R \overset{Def}{\Leftrightarrow} \psi$ surjektiv $\iff M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten Untermodul überein*

*"linear abhängig" $\iff \psi$ injektiv*

*"Basis" von $M$ über $R \iff \psi$ bijektiv*

*$M$ heißt*

*"endlich erzeugt" $\iff M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem*

*"frei" $\iff M$ besitzt eine Basis*

**Anmerkung:**

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle $K$-Moduln frei (LA1)
- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Gruppe (=$\mathbb{Z}$ Modul), die nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.
- Jeder $R$-Modul $M$ ist Faktormodul eines freien $R$-Moduls, denn:

$$R^{(M)} \to M, (a_x)_{x\in M} \mapsto \sum_{x\in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$

- Basen eines freien $R$-Moduls können unterschiedliche Länge haben.

**Satz 1.1.22.** *Sei $A$ ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt:*

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \Longleftrightarrow n_1 = n_2$$

*Beweis.* Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in $A$ ein maximales Ideal $J$ . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ${}^{A^n}\!/_{JA^n}$ ein ${}^{A}\!/_{J}$-Modul (vgl Beispiel 1.10) und ${}^{A}\!/_{J}$ ist ein Körper. Die Abbildung ${}^{A^n}\!/_{JA^n} \to ({}^{A}\!/_{J})^n, (x_1, .., x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, ..., x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von ${}^{A}\!/_{J}$-Moduln, d.h. ${}^{A^n}\!/_{JA^n} \simeq ({}^{A}\!/_{J})^n$ ist ein n-dimensionaler ${}^{A}\!/_{J}$-Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt ${}^{A^{n_1}}\!/_{JA^{n_1}} \simeq {}^{A^{n_2}}\!/_{JA^{n_2}}$, also $({}^{A}\!/_{J})^{n_1} \simeq ({}^{A}\!/_{J})^{n_2}$ (als ${}^{A}\!/_{J}$-Vektorraum) □

**Definition 1.1.23.** *Sei $A$ ein kommutativer Ring, $M$ ein freier $A$-Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der "Rang"von $M$ (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.22)*

## 1.2 Exakte Folgen

**Definition 1.2.1.** *Eine "'exakte Folge (exakte Sequenz) "' von $R$-Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von $R$-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \to M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \in \mathbb{Z}$, sodass:*

$$\textit{im } f_i = \ker f_{i+1} \quad \textit{für alle } i \in I \textit{ mit } i+1 \in I$$

*gilt.*

*Schreibweise:* $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ *. Eine exakte Folge der Form:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

*heißt eine "kurze exakte Folge" (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ bedeutet explizit:*

- *$f$ injektiv*
- *$g$ surjektiv*
- *im $f = \ker g$.*

**Anmerkung:**

- Seien $M, N$ $R$-Moduln und $f : M \to N$ ein $R$-Modulhomomorphismus. Falls $f$ injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/\mathrm{im}\, f \longrightarrow 0$ exakt.

  falls $f$ surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.

- Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von $R$-Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\overline{g} : M/N \xrightarrow{\sim} M''$, und $f$ beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f", "\sim"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "e"] & M \arrow[r, "f"] & M/N \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & 0
\end{tikzcd}$$

  ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i' \longrightarrow M_i'' \longrightarrow 0$ , $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von $R$-Moduln, dann sind auch die Folgen

  $$\prod_{i\in I} M_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i''$$

  sowie

  $$\bigoplus_{i\in I} M_i' \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i''$$

  (mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.