

Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

DR. DENIS VOGEL

Letzte Aktualisierung: 23. April 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Moduln	2
1.1	Grundlagen über Moduln	2
1.2	Exakte Folgen	10

1 Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung “Ring“ stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei R ein Ring.

1.1 Grundlagen über Moduln

Definition 1.1.1. Ein “ R -Linksmodul“ ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \rightarrow M$, $(a, x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

$$a) \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$b) \quad (a + b)x = ax + bx$$

$$c) \quad a(bx) = (ab)x$$

$$d) \quad 1x = x$$

Ein “ R -Rechtsmodul“ ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \rightarrow M$, $(x, a) \mapsto xa$, sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

$$a') \quad (x + y)a = xa + ya$$

$$b') \quad x(a + b) = xa + xb$$

$$c') \quad x(ab) = (xa)b$$

$$d') \quad x1 = x$$

Anmerkung: Es bezeichne R^{op} den zu R entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge R mit derselben Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\text{op}} b := b \cdot a$. Ist M ein R -Rechtsmodul, dann wird M durch $ax := xa$ zu einem R^{op} -Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\text{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R, x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur R -Linksmoduln, und unter einem R -Modul verstehen wir einen R -Linksmodul

- Forderung a) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

$$l_a : M \rightarrow M, \quad x \mapsto ax$$

zum Ring $\text{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \rightarrow M$ gehört.

$$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x), (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

für $f, g \in \text{End}(M)$, $x \in M$). Nach b) – d) ist die Abbildung $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem R -Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

Beispiel 1.1.2: a) Ist K ein Körper, dann sind K -Moduln die K -Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe G ist ein \mathbb{Z} -Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \rightarrow G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \dots + x}_{(-n)\text{-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe G genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als \mathbb{Z} -Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf G überein einstimmt (nämlich obige).

Definition 1.1.3. Seien M, M' R -Moduln, $\varphi : M \rightarrow M'$. Dann heißt φ " R -Modulhomomorphismus" (R -linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:

$$a) \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$b) \quad \varphi(ax) = a\varphi(x)$$

$\text{Hom}_R(M, M')$ bezeichne die Menge der R -Modulhomomorphismen von M nach M' .

Anmerkung: $\text{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für $f, g \in \text{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

Beispiel 1.1.4: Sei M ein R -Modul, $\varphi \in \text{Hom}_R(M, M) =: \text{End}_R(M) \subseteq \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \text{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \rightarrow R, \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus (“ X vertauscht mit Elementen aus R , b im Allgemeinen nicht“). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \rightarrow \text{End}(M), \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da φ R -linear ist. Somit wird M zum $R[X]$ -Modul.

Definition 1.1.5. Seien M, M' R -Moduln, $\varphi : M \rightarrow M'$ R -linear. φ heißt

“Monomorphismus“ $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)

“Epimorphismus“ $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)

“Isomorphismus“ $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$ ist bijektiv (Notation: $M \xrightarrow{\sim} M'$)

Existiert ein Isomorphismus zwischen M, M' , so heißen M, M' “isomorph“ (Notation: $M \cong M'$)

Anmerkung: Ist φ ein Isomorphismus, dann ist φ^{-1} ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.1.6. Seien M, M' R -Moduln. Dann gilt:

- a) R kommutativ $\Rightarrow \text{Hom}_R(M, M')$ ist ein R -Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R, \varphi \in \text{Hom}_R(M, M'), x \in M$.
- b) $\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$ ist ein Unterring von $\text{End}(M) = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.
- c) Die Abbildung $\Phi : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist R auf natürliche Weise ein R -Linksmodul). Ist R kommutativ, so ist Φ ein Isomorphismus von R -Moduln.
- d) $\text{End}_R(R) \cong R^{\text{op}}$

Beweis. a) Beachte: Für $a \in R, \varphi \in \text{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder R -linear, denn für $a, b \in R, x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu Φ ist gegeben durch

$$\Psi : M \rightarrow \text{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \rightarrow M, a \mapsto am)$$

- d) Nach Aussage c) haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \text{End}_R(R) \rightarrow R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1) \cdot 1) = \psi(1)\varphi(1) \\ &= \varphi(1) \cdot_{\text{op}} \psi(1) = \Phi(\varphi) \cdot_{\text{op}} \Phi(\psi)\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.7. Sei M ein R -Modul, $N \subseteq M$. N heißt R -Unterm modul von M , wenn gilt:

- a) $0 \in N$
- b) $x + y \in N$ für alle $x, y \in N$
- c) $ax \in N$ für alle $a \in R, x \in N$

Beispiel 1.1.8: a) Betrachte R als R -Linksmodul. Dann sind die Unterm modul von R genau die Linksideale in R (analog: Rechtsideale für R als R -Rechtsmodul).

- b) Ist M ein R -Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Unterm moduln. Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterm moduln von M , dann ist $\bigcap_{i \in I} M_i \subseteq M$ ein Unterm modul, sowie $\sum_{i \in I} M_i = \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_i, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$
- c) Sind M, M' R -Moduln, $\varphi \in \text{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Unterm modul, $N' \subseteq M'$ ein Unterm modul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Unterm moduln.

$\text{im } \varphi := \varphi(M)$ heißt das “Bild“ von φ

$\ker \varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der “Kern“ von φ

Es gilt: φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker \varphi = 0$ und φ surjektiv $\Leftrightarrow \text{im } \varphi = M'$

Bemerkung + Definition 1.1.9. Sei M ein R -Modul, $N \subseteq M$ ein Unterm modul. Dann ist die Faktorgruppe M/N via $a(x + N) = ax + N$, $a \in R, x \in M$ ein R -Modul, der “Faktormodul“ von M nach N . Die kanonische Abbildung $\pi : M \rightarrow M/N$, $m \mapsto m + N$ ist ein Modulepimorphismus mit $\ker \pi = N$.

Beispiel 1.1.10: Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, M ein R -Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von M . Ist I ein zweiseitiges Ideal, dann ist R/I ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von I geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$$R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \quad (a + I, b + I) \mapsto ab + I$$

M/IM ist ein R/I -Modul vermöge

$$(a + I)(x + M) := ax + IM, \quad a \in R, x \in M$$

Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K -VR,...)

Satz 1.1.11. Seien M, M' R -Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \rightarrow M/N$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \rightarrow M'$ R -Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

i) $N \subseteq \ker \varphi$

ii) Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\bar{\varphi} : M/N \rightarrow M'$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ \pi \searrow & & \nearrow \bar{\varphi} \\ & M/N & \end{array}$$

Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz). Seien M, M' R -Moduln, $\varphi : M \rightarrow M'$ ein R -Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R -Modulisomorphismus $\bar{\varphi} : M/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi$ mit $\bar{\varphi}(x + \ker \varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in M$.

Satz 1.1.13. (Isomorphiesätze) Seien M ein R -Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:

a) Die Abbildung

$$N_1/N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\sim} (N_1 + N_2)/N_2 \quad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

ist ein Isomorphismus.

b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist

$$M/N_2/M/N_1 \xrightarrow{\sim} M/N_1 \quad (x + N_2) + N_1/N_2 \mapsto x + N_1$$

ein Isomorphismus.

Satz 1.1.14. Sei M ein R -Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \rightarrow M/N$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Untermoduln } M' \text{ von } M \text{ mit } N \subseteq M'\} &\longrightarrow \{\text{Untermoduln von } M/N\} \\ M' &\mapsto \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) &\longleftarrow L \end{aligned}$$

die inklusionserhaltend ist.

Bemerkung + Definition 1.1.15. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt: $\prod_{i \in I} M_i$ ist ein R -Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das “direkte Produkt” der M_i . Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ mit $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$ sind R -Modulhomomorphismen.

Satz 1.1.16 (Universelle Eigenschaft des Produkts). Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt: Für jeden R -Modul M ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(M, \prod_{i \in I} M_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M, M_i) \quad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i \in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \rightarrow M_i$ ex. genau ein R -Modulhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i \in I})$)

Definition 1.1.17. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Der Untermodul

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid \text{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i \in I} M_i$$

heißt die “direkte Summe” der M_i . Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i \in I} \quad \text{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sind R -Modulhomomorphismen.

Anmerkung: Ist I endlich, dann ist $\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$.

Satz 1.1.18 (Universelle Eigenschaft der Summe). Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt: Für jeden R -Modul M ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} M_i, M) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, M) \quad \text{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i \in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \rightarrow M$ ex. genau ein R -Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i \in I}) := \sum_{i \in I} \psi_i(m_i)$ definierte).

Anmerkung: Sei I eine Indexmenge, M ein R -Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i \in I} M, \quad M^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} M, \quad M^r := M^{\{1, \dots, r\}} = M^{(\{1, \dots, r\})}$$

Bemerkung 1.1.19. Sei M ein R -Modul, $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M . Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von \bigoplus mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R -Modulhomomorphismus

$$\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M, \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} m_i \quad \text{mit} \quad \text{im } \psi = \sum_{i \in I} M_i$$

Ist ψ injektiv, so heißt die Summe $\sum_{i \in I} M_i$ “direkt“, und wir schreiben auch $\bigoplus_{i \in I} M_i$ für $\sum_{i \in I} M_i$.

Anmerkung: In der Situation von 1.19 gilt:

- $\sum_{i \in I} M_i$ direkt $\iff \sum_{i \in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2 \iff M_1 \cap M_2 = 0$

Definition 1.1.20. Sei M ein R -Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \rightarrow M, a \mapsto ax$ ist ein R -Modulhomomorphismus, das Linksideal

$$\text{ann}_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der “Annulator” von x . Das Bild $\text{im } f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von x erzeugte Untermodul von M . Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$

$$RX := \langle X \rangle_R := \sum_{x \in X} Rx = \text{im}(R^{(X)} \rightarrow M) = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \subseteq M \\ N \text{ Untermodul mit } X \subseteq N}} N$$

Der von X erzeugte Untermodul von M .

Definition 1.1.21. Sei M ein R -Modul, $(x_i)_{i \in I}$ Familie von Elementen aus M , $\psi : R^{(I)} \rightarrow M, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i \in I}$ heißt

“Erzeugendensystem“ von M mit $R \xrightarrow{\text{Def}} \psi$ surjektiv $\iff M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugten Untermodul überein

“linear abhängig“ $\iff \psi$ injektiv

“Basis“ von M über $R \iff \psi$ bijektiv

M heißt

“endlich erzeugt“ $\iff M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem

“frei“ $\iff M$ besitzt eine Basis

Anmerkung:

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K -Moduln frei (LA1)
- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe ($=\mathbb{Z}$ Modul), die nicht frei als \mathbb{Z} -Modul ist.
- Jeder R -Modul M ist Faktormodul eines freien R -Moduls, denn:

$$R^{(M)} \rightarrow M, (a_x)_{x \in M} \mapsto \sum_{x \in M} a_x x \text{ ist surjektiv.}$$

- Basen eines freien R -Moduls können unterschiedliche Länge haben.

Satz 1.1.22. Sei A ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \iff n_1 = n_2$$

Beweis. Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in A ein maximales Ideal J . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist A^n/JA^n ein A/J -Modul (vgl Beispiel 1.10) und A/J ist ein Körper. Die Abbildung $A^n/JA^n \rightarrow (A/J)^n, (x_1, \dots, x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, \dots, x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von A/J -Moduln, d.h. $A^n/JA^n \simeq (A/J)^n$ ist ein n -dimensionaler A/J -Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt $A^{n_1}/JA^{n_1} \simeq A^{n_2}/JA^{n_2}$, also $(A/J)^{n_1} \simeq (A/J)^{n_2}$ (als A/J -Vektorraum) \square

Definition 1.1.23. Sei A ein kommutativer Ring, M ein freier A -Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der “Rang” von M (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.22)

1.2 Exakte Folgen

Definition 1.2.1. Eine "exakte Folge (exakte Sequenz)" von R -Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \in \mathbb{Z}$, sodass:

$$\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } i+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise: $\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \dots$. Eine exakte Folge der Form:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

heißt eine "kurze exakte Folge" (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ bedeutet explizit:

- f injektiv
- g surjektiv
- $\operatorname{im} f = \ker g$.

Anmerkung:

- Seien M, N R -Moduln und $f : M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus. Falls f injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0$ exakt. falls f surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.
- Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R -Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\bar{g} : M/N \xrightarrow{\sim} M''$, und f beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \sim f & & \parallel & & \uparrow \sim & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xhookrightarrow{e} & M & \xrightarrow{f} & M/N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M'_i \longrightarrow M''_i \longrightarrow 0$, $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von R -Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i \in I} M'_i \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} M''_i$$

sowie

$$\bigoplus_{i \in I} M'_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M''_i$$

(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

Satz 1.2.2. Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i) Es gibt ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker g \oplus N'$
- ii) Es gibt einen R -Modulhomomorphismus $s : M'' \rightarrow M$ mit $g \circ s = \text{id}_{M''}$
- iii) Es existiert ein R -Modulhomomorphismus $t : M \rightarrow M'$ mit $t \circ f = \text{id}_{M'}$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, dass die kurze exakte Sequenz "spaltet". In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus s heißt ein "Schnitt" von g .

Beweis. i) \Rightarrow ii) Sei $N' \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = \ker g \oplus N'$. Dann ist $N' \cap \ker g = 0$. Dann ist $g|_{N'} : N' \rightarrow M''$ injektiv. Außerdem gilt: $M'' = g(M) = g(N')$, also ist $g|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$ ein Isomorphismus. Setze $s : M'' \rightarrow N' \hookrightarrow M$. Dann ist s ein R -Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \text{id}_{M''}$. Außerdem ist $M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \text{im } s = \text{im } f \oplus \text{im } s = f(M') \oplus s(M'') \xrightarrow{f, s \text{ inj}} M' \oplus M''$

ii) \Rightarrow iii) Sei $s : M'' \rightarrow M$ ein Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \text{id}_{M''}$. Sei $h : f(M') \rightarrow M'$ invers zu $f|_{f(M')} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$. Für $m \in M$ ist

$$g \circ (\text{id}_M - s \circ g)(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - (\underbrace{(g \circ s)}_{=\text{id}_{M''}} \circ g)(m) = 0$$

Also ist $(\text{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \text{im } f$. Wir setzen $t : M \xrightarrow{\text{id}_M - s \circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$, welcher ein R -Modulhomomorphismus ist mit

$$t \circ f = h \circ (\text{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \text{id}_M \circ f}_{=\text{id}_{M'}} - \underbrace{h \circ s \circ g \circ f}_{=0} = \text{id}_{M'}$$

iii) \Rightarrow i) Setze $t : M \rightarrow M'$ ein Modulhomomorphismus mit $t \circ f = \text{id}_{M'}$. Setze $N' := \ker t$. Für $m \in M$ ist $m = \text{id}_M(m) = \underbrace{(\text{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \text{im } f}$, also ist $M = N' + \text{im } f$. Sei außerdem $m \in N' \cap \text{im } f$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \text{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch $m = 0$. Damit ist $M = N' \oplus \text{im } f$. \square

Satz 1.2.3. Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln, M'' ein freier R -Modul. Dann spaltet die obige Folge.

Beweis. Sei also $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von M'' . Wähle für alle $i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $g(m_i) = v_i$ (beachte: g ist surjektiv). Sei $s : M'' = \bigoplus_{i \in I} Rv_i \rightarrow M$ der durch die Vorgabe $s(v_i) = m_i$ induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von \bigoplus). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist $g \circ s = \text{id}_{M''}$ \square

Folgerung 1.2.4. Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln, M', M'' freie R -Moduln. Dann ist auch M frei.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M' \cong R^{(I)}$, $M'' \cong R^{(J)}$. Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot{\cup} J)}$$

und damit auch frei. \square

Anmerkung: Ist R kommutativ, und haben M, M' endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(M') + \text{rang}(M'')$$

Bemerkung 1.2.5. Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann gilt:

- a) Ist M endlich erzeugt, dann ist M'' endlich erzeugt.
- b) Sind M', M'' endlich erzeugt, dann ist M endlich erzeugt.

Beweis. a) Ist M endlich erzeugt, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $\varphi : R^n \rightarrow M$. Dann ist $g \circ \varphi : R^n \rightarrow M''$ ebenfalls ein Epimorphismus, also ist M'' endlich erzeugt.

- b) Sei (x_1, \dots, x_r) ein Erzeugendensystem von M' , (y_1, \dots, y_s) ein Erzeugendensystem von M'' . Da g surjektiv, existieren $z_1, \dots, z_s \in M$ mit $g(z_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, s$.

Behauptung: $f(x_1), \dots, f(x_r), z_1, \dots, z_s$ ist ein Erzeugendensystem von M , denn sei $m \in M$. Dann existieren $a_1, \dots, a_s \in R$ mit $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$. Damit ist $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \operatorname{im} f$. Also existiert ein $v \in M'$, etwa $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$ mit $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$. Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^r b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

□

Anmerkung: Aus M endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass M' endlich erzeugt ist.

Beispiel 1.2.6: Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$. Dann ist R als R -Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setze $I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$. Dann ist I ein Ideal in R , aber I ist nicht endlich erzeugt als R -Modul, denn angenommen es existieren $f_1, \dots, f_r \in I$ mit $I = \sum_{i=1}^r R f_i$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_n] \subseteq R$.

Problem: $X_{n+1} \notin I$, denn andernfalls wäre $X_{n+1} = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ mit $a_1, \dots, a_r \in R$ und setze $X_1 = \dots = X_n = 0$, $X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$ Widerspruch!

Bemerkung 1.2.7. Seien M_1, \dots, M_r R -Moduln. Dann sind äquivalent:

i) $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ ist endlich erzeugt.

ii) M_1, \dots, M_r sind endlich erzeugt.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $r = 2$ zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 2.5

□

Anmerkung: Ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit $|I| = \infty$, $M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist M nicht endlich erzeugt, dann für $x_1, \dots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \dots, x_s \in \bigoplus_{j \in J} M_j$, also $\sum_{i=1}^s R x_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i \in I} M_i$

Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma). *Ist ein kommutatives Diagramm von R -Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

gegeben und φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen, φ_5 injektiv. Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd (Übungen). □

Anmerkung: Wir meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$ angewandt.

Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma). *Sei folgendes Diagramm von R Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:*

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \updownarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' \end{array}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz von R -Moduln

$$\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{f} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$$

wobei δ die sogenannte Übergangabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und f', f, g', g induziert sind. Ist f' injektiv, dann ist auch $\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi$ injektiv. Ist g surjektiv, dann auch $\operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$

Beweis. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} \ker \varphi' & \longrightarrow & \ker \varphi & \longrightarrow & \ker \varphi'' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \operatorname{coker} \varphi' & \longrightarrow & \operatorname{coker} \varphi & \longrightarrow & \operatorname{coker} \varphi'' & & \end{array}$$

δ

Konstruktion von δ : Sei $m'' \in \ker \varphi'' \subseteq M''$. Da f surjektiv, existiert ein $m \in M$ mit $m'' = f(m)$. Setze $n := \varphi(m)$. Dann ist $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$. Dann ist $n \in \ker g = \operatorname{im} g'$. Also existiert ein $n' \in N'$ mit $g'(n') = n$ (n' ist eindeutig bestimmt wegen g' injektiv.) Setze $\delta(m'') := n' + \operatorname{im} \varphi'$

Wohldefiniertheit von δ : Sei $\tilde{m} \in M$ mit $m'' = f(\tilde{m})$. Dann ist $(\tilde{m}) = f(m)$, also $\tilde{m} - m \in \ker f = \operatorname{im} f'$. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\tilde{m} - m = f'(m')$. Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m + f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist $\tilde{n}' + \operatorname{im} \varphi' = n' + \operatorname{im} \varphi'$, Rest ist Übungsaufgabe. \square