

Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 13. Juni 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Moduln	3
1.1	Grundlagen über Moduln	3
1.2	Exakte Folgen	11
1.3	Noethersche und Artinsche Moduln	17
2	Homologische Algebra	24
2.4	Kategorien	24
2.5	Abelsche Kategorien	32
2.6	Projektive und Injektive Moduln	43
2.7	Komplexe	53
2.8	Abgeleitete Funktoren	62
2.9	δ -Funktoren	66
2.10	Ext und Erweiterungen	68
3	Kommutative Algebra	74
3.11	Grundlagen	74
	Stichwortverzeichnis	79

1 Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung “Ring“ stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei R ein Ring.

1.1 Grundlagen über Moduln

Definition 1.1.1. Ein R -Linksmodul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \rightarrow M$, $(a, x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

$$\text{a) } a(x + y) = ax + ay$$

$$\text{b) } (a + b)x = ax + bx$$

$$\text{c) } a(bx) = (ab)x$$

$$\text{d) } 1x = x$$

Ein R -Rechtsmodul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \rightarrow M$, $(x, a) \mapsto xa$, sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

$$\text{a') } (x + y)a = xa + ya$$

$$\text{b') } x(a + b) = xa + xb$$

$$\text{c') } x(ab) = (xa)b$$

$$\text{d') } x1 = x$$

Anmerkung. Es bezeichne R^{op} den zu R entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge R mit derselben Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\text{op}} b := b \cdot a$. Ist M ein R -Rechtsmodul, dann wird M durch $ax := xa$ zu einem R^{op} -Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\text{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R, x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur R -Linksmoduln, und unter einem R -Modul verstehen wir einen R -Linksmodul

- Forderung a) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

$$l_a : M \rightarrow M, \quad x \mapsto ax$$

zum Ring $\text{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \rightarrow M$ gehört.

$$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x), (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

für $f, g \in \text{End}(M)$, $x \in M$. Nach b) – d) ist die Abbildung $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem R -Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

Beispiel 1.1.2. a) Ist K ein Körper, dann sind K -Moduln die K -Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe G ist ein \mathbb{Z} -Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \rightarrow G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \dots + x}_{(-n)\text{-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe G genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als \mathbb{Z} -Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf G überein stimmt (nämlich obige).

Definition 1.1.3. Seien M, M' R -Moduln, $\varphi : M \rightarrow M'$. Dann heißt φ *R -Modulhomomorphismus* (R -linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

b) $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

$\text{Hom}_R(M, M')$ bezeichne die Menge der R -Modulhomomorphismen von M nach M' .

Anmerkung. $\text{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für $f, g \in \text{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

Beispiel 1.1.4. Sei M ein R -Modul, $\varphi \in \text{Hom}_R(M, M) =: \text{End}_R(M) \subseteq \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \text{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \rightarrow R, \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus (“ X vertauscht mit Elementen aus R , b im Allgemeinen nicht“). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \rightarrow \text{End}(M), \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da φ R -linear ist. Somit wird M zum $R[X]$ -Modul.

Definition 1.1.5. Seien M, M' R -Moduln, $\varphi : M \rightarrow M'$ R -linear. φ heißt

Monomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)

Epimorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)

Isomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$ ist bijektiv (Notation: $M \xrightarrow{\sim} M'$)

Existiert ein Isomorphismus zwischen M, M' , so heißen M, M' “isomorph“ (Notation: $M \cong M'$)

Anmerkung. Ist φ ein Isomorphismus, dann ist φ^{-1} ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.1.6. Seien M, M' R -Moduln. Dann gilt:

- a) R kommutativ $\Rightarrow \text{Hom}_R(M, M')$ ist ein R -Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R, \varphi \in \text{Hom}_R(M, M'), x \in M$.
- b) $\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$ ist ein Unterring von $\text{End}(M) = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.
- c) Die Abbildung $\Phi : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist R auf natürliche Weise ein R -Linksmodul). Ist R kommutativ, so ist Φ ein Isomorphismus von R -Moduln.
- d) $\text{End}_R(R) \cong R^{\text{op}}$

Beweis. a) Beachte: Für $a \in R, \varphi \in \text{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder R -linear, denn für $a, b \in R, x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu Φ ist gegeben durch

$$\Psi : M \rightarrow \text{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \rightarrow M, a \mapsto am)$$

- d) Nach Aussage c) haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \text{End}_R(R) \rightarrow R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1) \cdot 1) = \psi(1)\varphi(1) \\ &= \varphi(1) \cdot_{\text{op}} \psi(1) = \Phi(\varphi) \cdot_{\text{op}} \Phi(\psi)\end{aligned}$$

■

Definition 1.1.7. Sei M ein R -Modul, $N \subseteq M$. N heißt R -Unterm modul von M , wenn gilt:

- a) $0 \in N$
- b) $x + y \in N$ für alle $x, y \in N$
- c) $ax \in N$ für alle $a \in R, x \in N$

Beispiel 1.1.8. a) Betrachte R als R -Linksmodul. Dann sind die Untermodul von R genau die Linksideale in R (analog: Rechtsideale für R als R -Rechtsmodul).

- b) Ist M ein R -Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Untermoduln. Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M , dann ist $\bigcap_{i \in I} M_i \subseteq M$ ein Untermodul, sowie $\sum_{i \in I} M_i = \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_i, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$
- c) Sind M, M' R -Moduln, $\varphi \in \text{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $N' \subseteq M'$ ein Untermodul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Untermoduln.

$\text{im } \varphi := \varphi(M)$ heißt das *Bild* von φ

$\ker \varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der *Kern* von φ

Es gilt: φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker \varphi = 0$ und φ surjektiv $\Leftrightarrow \text{im } \varphi = M'$

Bemerkung + Definition 1.1.9. Sei M ein R -Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist die Faktorgruppe M/N via $a(x+N) = ax+N$, $a \in R$, $x \in M$ ein R -Modul, der *Faktormodul* von M nach N . Die kanonische Abbildung $\pi : M \rightarrow M/N$, $m \mapsto m + N$ ist ein Modulepimorphismus mit $\ker \pi = N$.

Beispiel 1.1.10. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, M ein R -Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von M . Ist I ein zweiseitiges Ideal, dann ist R/I ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von I geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$$R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \quad (a+I, b+I) \mapsto ab+I$$

M/IM ist ein R/I -Modul vermöge

$$(a + I)(x + M) := ax + IM, \quad a \in R, x \in M$$

Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)

Satz 1.1.11. Seien M, M' R -Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \rightarrow M/N$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \rightarrow M'$ R -Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

i) $N \subseteq \ker \varphi$

ii) Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\bar{\varphi} : M/N \rightarrow M'$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{\varphi} \\ & M/N & \end{array}$$

Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz). Seien M, M' R -Moduln, $\varphi : M \rightarrow M'$ ein R -Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R -Modulisomorphismus

$$\bar{\varphi} : M/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \varphi \quad \text{mit} \quad \bar{\varphi}(x + \ker \varphi) = \varphi(x)$$

für alle $x \in M$.

Satz 1.1.13 (Isomorphiesätze). Sei M ein R -Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:

a) Die Abbildung

$$N_1/N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\sim} (N_1 + N_2)/N_2 \quad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

ist ein Isomorphismus.

b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist

$$M/N_2/M/N_1 \xrightarrow{\sim} M/N_1 \quad (x + N_2) + N_1/N_2 \mapsto x + N_1$$

ein Isomorphismus.

Satz 1.1.14. Sei M ein R -Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \rightarrow M/N$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Untermoduln } M' \text{ von } M \text{ mit } N \subseteq M'\} &\longrightarrow \{\text{Untermoduln von } M/N\} \\ M' &\mapsto \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) &\longleftarrow L \end{aligned}$$

die inklusionserhaltend ist.

Bemerkung + Definition 1.1.15. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt: $\prod_{i \in I} M_i$ ist ein R -Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das *direkte Produkt* der M_i . Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ mit $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$ sind R -Modulhomomorphismen.

Satz 1.1.16 (Universelle Eigenschaft des Produkts). Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt: Für jeden R -Modul M ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(M, \prod_{i \in I} M_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M, M_i) \quad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i \in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \rightarrow M_i$ ex. genau ein R -Modulhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i \in I})$).

Definition 1.1.17. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Der Untermodul

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid \text{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i \in I} M_i$$

heißt die *direkte Summe* der M_i . Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i \in I} \quad \text{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sind R -Modulhomomorphismen.

Anmerkung. Ist I endlich, dann ist $\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$.

Satz 1.1.18 (Universelle Eigenschaft der Summe). Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt: Für jeden R -Modul M ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} M_i, M) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, M) \quad \text{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i \in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \rightarrow M$ ex. genau ein R -Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i \in I}) := \sum_{i \in I} \psi_i(m_i)$ definierte).

Anmerkung. Sei I eine Indexmenge, M ein R -Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i \in I} M, \quad M^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} M, \quad M^r := M^{\{1, \dots, r\}} = M^{(\{1, \dots, r\})}$$

Bemerkung 1.1.19. Sei M ein R -Modul, $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M . Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von \bigoplus mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R -Modulhomomorphismus

$$\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M, \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} m_i \quad \text{mit} \quad \text{im } \psi = \sum_{i \in I} M_i$$

Ist ψ injektiv, so heißt die Summe $\sum_{i \in I} M_i$ „direkt“, und wir schreiben auch $\bigoplus_{i \in I} M_i$ für $\sum_{i \in I} M_i$.

Anmerkung. In der Situation von 1.1.19 gilt:

- $\sum_{i \in I} M_i$ direkt $\iff \sum_{i \in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2 \iff M_1 \cap M_2 = 0$

Definition 1.1.20. Sei M ein R -Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \rightarrow M, a \mapsto ax$ ist ein R -Modulhomomorphismus, das Linksideal

$$\text{ann}_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der *Annulator* von x . Das Bild $\text{im } f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von x erzeugte Untermodul von M . Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$

$$RX := \langle X \rangle_R := \sum_{x \in X} Rx = \text{im}(R^{(X)} \rightarrow M) = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \subseteq M \\ N \text{ Untermodul mit } X \subseteq N}} N$$

Der von X erzeugte Untermodul von M .

Definition 1.1.21. Sei M ein R -Modul, $(x_i)_{i \in I}$ Familie von Elementen aus M , $\psi : R^{(I)} \rightarrow M, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i \in I}$ heißt

Erzeugendensystem von M mit $R \xrightarrow{\text{Def}} \psi$ surjektiv $\iff M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugten Untermodul überein

linear abhängig $\iff \psi$ injektiv

Basis von M über R $\iff \psi$ bijektiv

M heißt

endlich erzeugt $\iff M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem

frei $\iff M$ besitzt eine Basis

Anmerkung. • Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K -Moduln frei (LA1)

- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe (= \mathbb{Z} -Modul), die nicht frei als \mathbb{Z} -Modul ist.
- Jeder R -Modul M ist Faktormodul eines freien R -Moduls, denn:

$$R^{(M)} \rightarrow M, (a_x)_{x \in M} \mapsto \sum_{x \in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$

- Basen eines freien R -Moduls können unterschiedliche Länge haben.

Satz 1.1.22. Sei A ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \iff n_1 = n_2$$

Beweis. Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in A ein maximales Ideal J . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist A^n/JA^n ein A/J -Modul (vgl Beispiel 1.10) und A/J ist ein Körper. Die Abbildung $A^n/JA^n \rightarrow (A/J)^n, (x_1, \dots, x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, \dots, x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von A/J -Moduln, d.h. $A^n/JA^n \simeq (A/J)^n$ ist ein n -dimensionaler A/J -Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt $A^{n_1}/JA^{n_1} \simeq A^{n_2}/JA^{n_2}$, also $(A/J)^{n_1} \simeq (A/J)^{n_2}$ (als A/J -Vektorraum) ■

Definition 1.1.23. Sei A ein kommutativer Ring, M ein freier A -Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der *Rang* von M (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.1.22)

1.2 Exakte Folgen

Definition 1.2.1. Eine *exakte Folge* (*exakte Sequenz*) von R -Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \in \mathbb{Z}$, sodass:

$$\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } i+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise: $\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \dots$

Eine exakte Folge der Form:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

heißt eine *kurze exakte Folge* (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ bedeutet explizit:

- f injektiv
- g surjektiv
- $\operatorname{im} f = \ker g$.

Anmerkung. • Seien M, N R -Moduln und $f : M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus.

Falls f injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0$ exakt.

falls f surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.

- Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R -Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\bar{g} : M/N \xrightarrow{\sim} M''$, und f beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \sim \downarrow f & & \parallel & & \uparrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{e} & M & \xrightarrow{f} & M/N \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M'_i \longrightarrow M''_i \longrightarrow 0$, $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von R -Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i \in I} M'_i \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} M''_i$$

sowie

$$\bigoplus_{i \in I} M'_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M''_i$$

(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

Satz 1.2.2. Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i) Es gibt ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker g \oplus N'$
- ii) Es gibt einen R -Modulhomomorphismus $s : M'' \rightarrow M$ mit $g \circ s = \text{id}_{M''}$
- iii) Es existiert ein R -Modulhomomorphismus $t : M \rightarrow M'$ mit $t \circ f = \text{id}_{M'}$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, das die kurze exakte Sequenz “spaltet“. In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus s heißt ein “Schnitt“ von g .

Beweis. i) \Rightarrow ii) Sei $N' \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = \ker g \oplus N'$. Dann ist $N' \cap \ker g = 0$. Dann ist $g|_{N'} : N' \rightarrow M''$ injektiv. Außerdem gilt: $M'' = g(M) = g(N')$, also ist $g|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$ ein Isomorphismus. Setze $s : M'' \rightarrow N' \hookrightarrow M$. Dann ist s ein R -Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \text{id}_{M''}$. Außerdem ist

$$M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \text{im } s = \text{im } f \oplus \text{im } s = f(M') \oplus s(M'') \xrightarrow{f, s \text{ inj}} M' \oplus M''$$

ii) \Rightarrow iii) Sei $s : M'' \rightarrow M$ ein Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \text{id}_{M''}$. Sei $h : f(M') \rightarrow M'$ invers zu $f|_{f(M')} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$. Für $m \in M$ ist

$$g \circ (\text{id}_M - s \circ g)(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - (\underbrace{(g \circ s)}_{=\text{id}_{M''}} \circ g)(m) = 0$$

Also ist $(\text{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \text{im } f$. Wir setzen $t : M \xrightarrow{\text{id}_M - s \circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$, welcher ein R -Modulhomomorphismus ist mit

$$t \circ f = h \circ (\text{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \text{id}_M \circ f}_{=\text{id}_{M'}} - \underbrace{h \circ s \circ g \circ f}_{=0} = \text{id}_{M'}$$

iii) \Rightarrow i) Setze $t : M \rightarrow M'$ ein Modulhomomorphismus mit $t \circ f = \text{id}_{M'}$. Setze $N' := \ker t$. Für $m \in M$ ist $m = \text{id}_M(m) = \underbrace{(\text{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \text{im } f}$, also ist

$M = N' + \text{im } f$. Sei außerdem $m \in N' \cap \text{im } f$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \text{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch $m = 0$. Damit ist $M = N' \oplus \text{im } f$. ■

Satz 1.2.3. Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln, M'' ein freier R -Modul. Dann spaltet die obige Folge.

Beweis. Sei also $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von M'' . Wähle für alle $i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $g(m_i) = v_i$ (beachte: g ist surjektiv). Sei $s : M'' = \bigoplus_{i \in I} Rv_i \rightarrow M$ der durch die Vorgabe $s(v_i) = m_i$ induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von \bigoplus). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist $g \circ s = \text{id}_{M''}$ ■

Folgerung 1.2.4. Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln, M', M'' freie R -Moduln. Dann ist auch M frei.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M' \cong R^{(I)}$, $M'' \cong R^{(J)}$. Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot{\cup} J)}$$

und damit auch frei. ■

Anmerkung. Ist R kommutativ, und haben M, M' endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(M') + \text{rang}(M'')$$

Bemerkung 1.2.5. Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann gilt:

- a) Ist M endlich erzeugt, dann ist M'' endlich erzeugt.
- b) Sind M', M'' endlich erzeugt, dann ist M endlich erzeugt.

Beweis. a) Ist M endlich erzeugt, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $\varphi : R^n \rightarrow M$. Dann ist $g \circ \varphi : R^n \rightarrow M''$ ebenfalls ein Epimorphismus, also ist M'' endlich erzeugt.

- b) Sei (x_1, \dots, x_r) ein Erzeugendensystem von M' , (y_1, \dots, y_s) ein Erzeugendensystem von M'' . Da g surjektiv, existieren $z_1, \dots, z_s \in M$ mit $g(z_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, s$.

Behauptung: $f(x_1), \dots, f(x_r), z_1, \dots, z_s$ ist ein Erzeugendensystem von M , denn sei $m \in M$. Dann existieren $a_1, \dots, a_s \in R$ mit $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$. Damit ist $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \text{im } f$. Also existiert ein $v \in M'$, etwa $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$ mit $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$. Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^r b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

Anmerkung. Aus M endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass M' endlich erzeugt ist.

Beispiel 1.2.6. Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$. Dann ist R als R -Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setze

$$I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$$

Dann ist I ein Ideal in R , aber I ist nicht endlich erzeugt als R -Modul, denn angenommen es existieren $f_1, \dots, f_r \in I$ mit $I = \sum_{i=1}^r R f_i$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_n] \subseteq R$.

Problem: $X_{n+1} \notin I$, denn andernfalls wäre $X_{n+1} = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ mit $a_1, \dots, a_r \in R$ und setze $X_1 = \dots = X_n = 0$, $X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$ Widerspruch!

Bemerkung 1.2.7. Seien M_1, \dots, M_r R -Moduln. Dann sind äquivalent:

i) $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ ist endlich erzeugt.

ii) M_1, \dots, M_r sind endlich erzeugt.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $r = 2$ zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 1.2.5 ■

Anmerkung. Ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit $|I| = \infty$, $M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist M nicht endlich erzeugt, dann für $x_1, \dots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \dots, x_s \in \bigoplus_{j \in J} M_j$, also

$$\sum_{i=1}^s R_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i \in I} M_i$$

Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma). Ist ein kommutatives Diagramm von R -Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

gegeben und φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen, φ_5 injektiv. Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd (Übungen). ■

Anmerkung. Wir meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$ angewandt.

Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma). Sei folgendes kommutatives Diagramm von R Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:

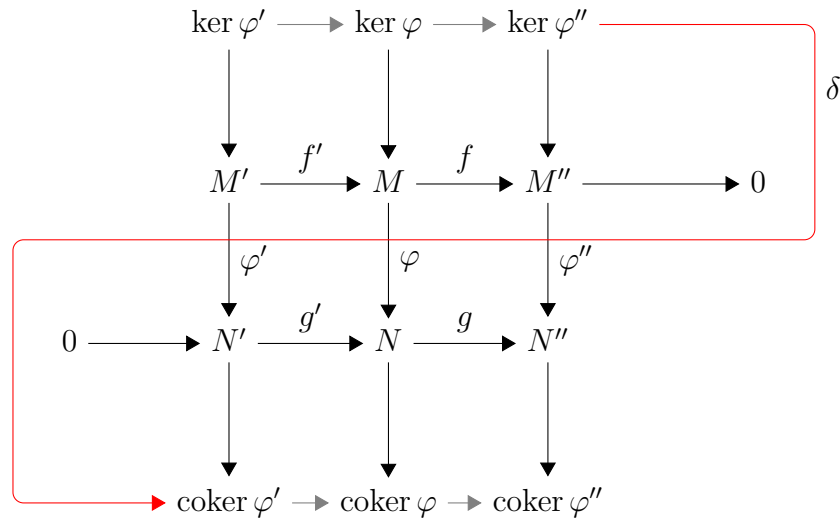
$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' \end{array}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz von R -Moduln

$$\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{f} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$$

wobei δ die sogenannte Übergangabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und f', f, g', g induziert sind. Ist f' injektiv, dann ist auch $\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi$ injektiv. Ist g surjektiv, dann auch $\operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$

Beweis. Betrachte



Konstruktion von δ : Sei $m'' \in \ker \varphi'' \subseteq M''$. Da f surjektiv, existiert ein $m \in M$ mit $m'' = f(m)$. Setze $n := \varphi(m)$. Dann ist $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$. Dann ist $n \in \ker g = \text{im } g'$. Also existiert ein $n' \in N'$ mit $g'(n') = n$ (n' ist eindeutig bestimmt wegen g' injektiv.) Setze $\delta(m'') := n' + \text{im } \varphi'$

Wohldefiniertheit von δ : Sei $\tilde{m} \in M$ mit $m'' = f(\tilde{m})$. Dann ist $f(\tilde{m}) = f(m)$, also $\tilde{m} - m \in \ker f = \text{im } f'$. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\tilde{m} - m = f'(m')$. Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m + f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist $\tilde{n}' + \text{im } \varphi' = n' + \text{im } \varphi'$, Rest ist Übungsaufgabe. ■

1.3 Noethersche und Artinsche Moduln

Definition 1.3.1. Sei M ein R -Modul. M heißt *noethersch* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

Anmerkung. M noethersch $\Rightarrow M$ ist endlich erzeugt.

Beispiel 1.3.2. Sei K ein Körper, V ein K -VR. Dann gilt: V noethersch $\Leftrightarrow V$ ist endlich dimensional

Satz 1.3.3. Sei M ein R -Modul. Dann sind äquivalent:

- i) M ist noethersch
- ii) Jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ von Untermoduln wird stationär, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$.
- iii) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M enthält ein maximales Element.

Man sagt in diesem Fall auch: die Untermoduln von M erfüllen die aufsteigende Kettenbedingung.

Beweis. i) \Rightarrow ii) Sei $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von M . Setze $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_i \subseteq M$. N ist Untermodul von M (beachte: $a, b \in N \Rightarrow$ Es existieren $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $a \in M_i, b \in M_j$, (Es gilt: $i \leq j \Rightarrow M_i \subseteq M_j, a, b \in M_j \Rightarrow a + b \in M_j \subseteq N$). Da M noethersch, ist N endlich erzeugt, d.h. es existiert ein endliches Erzeugendensystem x_1, \dots, x_r von N . Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ existieren $j_i \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in M_{j_i}$. Setze $n := \max\{j_i \mid i = 1, \dots, r\} \Rightarrow x_1, \dots, x_r \in M_n \Rightarrow N \subseteq M_n \subseteq N \Rightarrow N = M_n \Rightarrow$ für alle $i \geq n$ ist $M_i = M_n$.

ii) \Rightarrow iii) Sei \mathcal{X} eine nichtleere Menge von Untermoduln von M , die kein maximales Element hat. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M' \subsetneq M''$. \Rightarrow Es existiert eine Kette von Untermoduln $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$ von M , die nicht stationär wird.

iii) \Rightarrow i) Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Setze

$$\mathcal{X} := \{M' \subseteq M \text{ Untermodul} \mid M' \text{ endlich erzeugt, } M' \subseteq N\}$$

Wegen $0 \in \mathcal{X}$ ist $\mathcal{X} \neq \emptyset \stackrel{(iii)}{\Rightarrow}$ Es existiert ein maximales Element \tilde{M} in \mathcal{X} .

Behauptung: $\tilde{M} = N$, denn: Sei $x \in N \Rightarrow Rx + \tilde{M} \in \mathcal{X}$ und $\tilde{M} \subseteq Rx + \tilde{M}$. Aufgrund der Maximalität von \tilde{M} , folgt $Rx + \tilde{M} = \tilde{M}$, als $x \in \tilde{M}$. ■

Bemerkung 1.3.4. Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann sind äquivalent:

i) M ist noethersch

ii) M' und M'' sind noethersch

Beweis. Es genügt den Fall der Folge $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ für einen Untermodul $N \subseteq M$ zu betrachten. (Vgl. Anmerkung nach 1.2.1)

i) \Rightarrow ii) Sei $N' \subseteq N$ Untermodul $\Rightarrow N'$ Untermodul von $M \xrightarrow{M_{\text{noet.}}} N'$ endlich erzeugt. Sei $N'' \subseteq M/N$ Untermodul. Also ist $\pi^{-1}(N'') \rightarrow N''$ ein Epimorphismus und damit N'' endlich erzeugt nach 2.5 (a).

ii) \Rightarrow i) Seien $N, M/N$ noethersch, und sei $M' \subseteq M$ Untermodul. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln

$$0 \longrightarrow M' \cap N \longrightarrow M' \longrightarrow M'/M' \cap N \longrightarrow 0$$

wobei $M' \cap N$ endlich erzeugt, da N noethersch. Außerdem ist

$$M'/M' \cap N \simeq (M' + N)/N \subseteq M/N$$

endlich erzeugt, da M/N noethersch. $\Rightarrow M'$ ist endlich erzeugt nach 1.2.5 ■

Bemerkung 1.3.5. M_1, \dots, M_r R -Moduln. Dann sind äquivalent:

i) $\bigoplus_{i=1}^r M_i$ noethersch

ii) M_1, \dots, M_r noethersch.

Beweis. Analog zum Beweis von 1.2.7 unter Verwendung von 1.3.4 ■

Definition 1.3.6. R heißt *linksnoethersch* (bzw. *rechtsnoethersch*), wenn R als Links- (bzw. Rechts-) Modul über sich selbst noethersch ist. R heißt *noethersch*, wenn R links- und rechtsnoethersch ist.

Anmerkung. Es gibt Ringe, die rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch sind (und umgekehrt)

Beispiel 1.3.7. a) Ist R ein Schiefkörper (Divisionsring) (d.h. $R \setminus \{0\}$ ist eine Gruppe bzgl. \cdot), dann ist R noethersch, denn wegen $Ra = R = aR$ für alle $a \in R \setminus \{0\}$ sind die einzigen Links- (Rechts-)ideale in R durch $0, R$ gegeben, diese sind endlich erzeugt.

b) Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$ ist nicht noethersch nach Beispiel 1.2.6.

Bemerkung 1.3.8. Sei R ein linksnoetherscher Ring, M ein endlich erzeugtes R -Modul. Dann ist M noethersch.

Beweis. Wegen M endlich erzeugt, existiert ein Epimorphismus $R^n \twoheadrightarrow M$ für geeignetes n . Nach Voraussetzung ist R als R -Modul noethersch $\stackrel{1.3.5}{\Rightarrow} R^n$ noetherscher R -Modul $\stackrel{1.3.4}{\Rightarrow} M$ noethersch. ■

Bemerkung 1.3.9. Sei R linksnoetherscher Ring, $I \subseteq R$ zweiseitiges Ideal. Dann ist R/I linksnoethersch.

Beweis. Es ist zu zeigen: R/I ist noethersch als R/I -Modul.
Vorüberlegungen:

1. Für $N \subseteq R/I$ gilt:

$$\begin{aligned} N \text{ ist } R/I\text{-Modul von } R/I &\Leftrightarrow N \text{ ist } R\text{-Untermodul von } R/I \\ (\text{bezüglich } \bar{a} \cdot \bar{x} := \overline{ax}) &\quad (\text{bezüglich } a \cdot \bar{x} := \overline{ax}) \end{aligned}$$

2. Für jeden R/I -Untermodul N von R/I gilt:

$$N \text{ ist endlich erzeugt über } R/I \Leftrightarrow N \text{ ist endlich erzeugt über } R$$

Nach den Vorüberlegungen genügt es zu zeigen, dass R/I noethersch ist als R -Modul. Dies folgt aus 3.8, denn R/I ist endlich erzeugt als R -Modul (erzeugt von $\bar{1}$). ■

Anmerkung. Unterringe noetherscher Ringe sind im Allgemeinen nicht noethersch (siehe Übungsaufgaben)

Bemerkung 1.3.10. Seien M, N R -Moduln mit $M \cong M \oplus N, N \neq 0$. Dann ist M nicht noethersch.

Beweis. Setze

$$\mathcal{X} := \{N' \subseteq M \text{ Untermodul} \mid \exists M' \subseteq M, \text{ s.d. } M = M' \oplus N' \text{ und } M' \cong M\}$$

Offenbar ist $0 \in \mathcal{X}$, denn $M = M \oplus 0$, also $\mathcal{X} \neq \emptyset$.

Angenommen M ist noethersch. Dann enthält \mathcal{X} ein maximales Element N' , also existiert ein $M' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus N'$ und $M' \cong M$. Nach Voraussetzung existiert ein $\varphi : M \oplus N \xrightarrow{\sim} M \xrightarrow{\sim} M'$. Also ist

$$M' = \varphi(M) \oplus \varphi(N) \Rightarrow M = M' \oplus N' = \underbrace{\varphi(M)}_{=: M''} \oplus \underbrace{\varphi(N) \oplus N'}_{=: N''}$$

Es ist $M \cong \varphi(M) = M''$, somit $N'' \in \mathcal{X}$. Außerdem ist $\varphi(N) \neq 0$ wegen $N \neq 0$ und φ injektiv. Damit folgt $N' \subsetneq N''$ im Widerspruch zur Maximalität von N' . ■

Satz 1.3.11. *Sei R linksnoetherscher Ring, $R \neq 0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $R^{n_1} \simeq R^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$.*

Beweis. ohne Einschränkung gelte $n_1 \geq n_2 \Rightarrow R^{n_2} \simeq R^{n_1} \simeq R^{n_2} \simeq R^{n_1-n_2}$. Wegen R^{n_2} noethersch, folgt mit 1.3.10 : $R^{n_1-n_2} = 0$, also $n_1 = n_2$ ■

Anmerkung. • Obiger Satz zeigt, dass der Begriff des Ranges freier Moduln auch für endlich erzeugte, freie Moduln über linksnoetherschen Ringen wohldefiniert ist.

- Jeder Körper ist linksnoethersch \Rightarrow So erhält man einen neuen Beweis für Ergebnis aus LA1

Satz 1.3.12 (Hilbertscher Basissatz). *Sei R ein linksnoetherscher Ring. Dann ist $R[X]$ linksnoethersch.*

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal. Es ist zu zeigen, dass I als $R[X]$ -Modul endlich erzeugt ist.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $I_n := \{f \in I \mid \deg f \leq n\}$, was offenbar ein R -Modul ist. Wir betrachten die R -lineare Abbildung

$$b_n : I_n \longrightarrow R, \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto a_n$$

also ist $B_n := b_n(I_n) \subseteq R$ ein Linksideal. Für $f \in I_n$ ist $Xf \in I_{n+1}$, also $b_n(f) = b_{n+1}(Xf) \in B_{n+1} = b_{n+1}(I_{n+1})$, woraus wir eine Kette von Linksidealen $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ erhalten, welche, da R linksnoethersch ist, stationär ist, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B_m = B_n$ für alle $m \geq n$.

2. Behauptung: $I = R[X]I_n$, denn:

“ \supseteq “ klar, wegen $I_n \subseteq I$, wobei I ein Linksideal ist.

“ \subseteq “ Es ist $I = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$, d.h. es genügt zu zeigen, dass $I_m \subseteq R[X]I_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, was wir per Induktion nach m zeigen.

$m \leq n$: klar.

$m > n$: Sei $f \in I_m$. Dann ist $b_m(f) \in B_m = B_n = b_n(I_n)$, also existiert ein Polynom $f_1 \in I_n$ mit $b_m(f) = b_n(f_1) = b_m(X^{m-n}f_1)$. Also ist $f - X^{m-n}f_1 \in I_{m-1}$

$\stackrel{\text{IV}}{\subseteq} I_{m-1} \subseteq R[X]I_n$. Wegen $X^{m-n}f_1 \in R[X]I_n$, folgt $f \in R[X]I_n$

3. I_n ist endlich erzeugt als R -Modul, denn: $I_n \subseteq \sum_{i=0}^n RX^i$, und $\sum_{i=0}^n RX^i$ ist ein endlich erzeugter R -Modul, also insbesondere noethersch nach 1.3.8,

weshalb I_n als Untermodul endlich erzeugt ist, d.h. es existieren $g_1, \dots, g_r \in I_n$ mit $I_n = \sum_{i=1}^r Rg_i$, also

$$I \stackrel{2.}{=} R[X]I_n = \sum_{i=1}^r R[X]g_i$$

d.h. I ist endlich erzeugt als $R[X]$ -Modul. ■

Folgerung 1.3.13. a) Ist R ein linksnoetherscher Ring, dann ist $R[X_1, \dots, X_n]$ linksnoethersch

b) Sind A, B kommutative Ring, $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, sodass B von $\varphi(A)$ und einer endlichen Menge $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq B$ als Ring erzeugt wird. Dann gilt: A ist noethersch $\Rightarrow B$ noethersch.

Beweis. a) aus 1.3.12 per Induktion

b) Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Ringhomomorphismus

$$\psi : A[X_1, \dots, X_r] \twoheadrightarrow B, \quad X_i \mapsto x_i, \quad \text{und} \quad \psi|_A = \varphi$$

Ist A noethersch, dann ist $A[X_1, \dots, X_r]$ noethersch nach a) und nach 3.9 ist B noethersch. ■

Definition 1.3.14. Sei M ein R -Modul. M heißt *artinsch* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jede absteigende Kette $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ von Untermoduln von M gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$ ("absteigende Kettenbedingung").

Definition 1.3.15. R heißt *linksartinsch* (bzw. *rechtsartinsch*) $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ R ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selber artinsch. R heißt *artinsch* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ R ist links- und rechtsartinsch.

Beispiel 1.3.16. a) Jeder endliche Ring ist artinsch (und noethersch).

b) \mathbb{Z} ist kein artinscher Ring, denn $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \dots$

c) Sei M ein endliches Monoid, K ein Körper, $R = K[M]$ sei der Monoidring (vgl. Algebra 1-Übungen). Dann ist R linksartinsch, denn: $K[M]$ ist ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, jeder $K[M]$ -Untermodul von $K[M]$ ist ein K -Untervektorraum von $K[M]$, also ist jede absteigende Kette von Untermoduln eine absteigende Kette von Untervektorräumen, die stationär ist. Ebenso ist $K[M]$ rechtsartinsch, $K[M]$ also artinsch.

Bemerkung 1.3.17. Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i) M ist artinsch.
- ii) M', M'' ist artinsch.

Beweis. Es genügt, den Fall $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ zu betrachten.

i) \Rightarrow ii) Sei M artinsch. Sei $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von N . Dann ist N_i ein Untermodul von M für alle $i \in \mathbb{N}$ und, da M artinsch ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_n$ für alle $i \geq n$, weshalb N artinsch ist. Sei $N'_1 \supseteq N'_2 \supseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von M/N . Dann ist $\pi^{-1}(N'_1) \supseteq \pi^{-1}(N'_2) \supseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von M , welche, wegen M artinsch, stationär wird. Es ist $N'_n = \pi(\pi^{-1}(N'_n)) = \pi(\pi^{-1}(N'_n)) = N_i$ für alle $i \geq n$, also ist M/N artinsch.

ii) \Rightarrow i) Seien $N, M/N$ artinsch. Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M . Dann ist $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \dots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von N . Damit ist

$$(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette von Untermoduln von M/N , also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i \cap N = M_n \cap N$ und $M_i + N/N = M_n + N/N$ für alle $i \geq n$, also ist $M_i + N = M_n + N$ für alle $i \geq n$,

Behauptung: $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$, denn sei $i \geq n$ fest.

“ \subseteq “ klar

“ \supseteq “ Sei $x \in M_n$. Dann existieren $x' \in M, y \in N$ mit $x = x' + y$ (wegen $M_i + N = M_n + N$), also $y = \underbrace{x}_{\in M_n} - \underbrace{x'}_{\in M_i \subseteq M_n} \in M_n \cap N = M_i \cap N \Rightarrow x = \underbrace{x'}_{\in M_i} + \underbrace{y}_{\in M_i} \in M_i$

■

Folgerung 1.3.18. Seien M_1, \dots, M_n R -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i) $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ ist artinsch
- ii) M_1, \dots, M_n sind artinsch.

Folgerung 1.3.19. Sei R linksartinsch, M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M artinsch.

Definition 1.3.20. Sei M ein R -Modul. Dann heißt M *endlich koerzeugt* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jede Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j \in J} M_j = 0$

Anmerkung. • Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist M/N endlich koerzeugt \Leftrightarrow Für jede Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i \in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j \in J} M_j = N$.

- N ist endlich erzeugt \Leftrightarrow Für jede Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M mit $\sum_{i \in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sum_{j \in J} M_j = N$.

Satz 1.3.21. Sei M ein R -Modul. Dann sind äquivalent:

- M ist artinsch
- Jede nichtleere Menge von Untermoduln enthält ein minimales Element
- Jeder Faktormodul von M ist endlich koerzeugt.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei \mathcal{X} eine nichtleere Menge von Untermoduln von M , die kein minimales Element besitzt. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M'' \subsetneq M'$, also existiert eine Kette von Untermoduln $M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots$, die nicht stationär wird.

$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i \in I} M_i = N$. Setze $\mathcal{X} := \{\bigcap_{j \in J} M_j \mid J \subseteq I \text{ endlich}\} \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \mathcal{X}$ enthält ein minimales Element $N_1 = \bigcap_{j \in J} M_j$ für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$.

Behauptung: $N_1 = N$, denn

“ \supseteq “ klar

“ \subseteq “ Angenommen $N_1 \supsetneq N$. Dann existiert ein $x \in N_1$ mit $x \notin N$. Da $N = \bigcap_{i \in I} M_i$ existiert ein $i \in I$ mit $x \notin M_i \Rightarrow x \notin \bigcap_{j \in J \cup \{i\}} M_j =: N_2$. Somit ist $N_2 \in \mathcal{X}$,

$N_2 \subsetneq N_1$ im Widerspruch zur Minimalität von N_1 .

Somit $N_1 = N$, also ist M/N endlich koerzeugt.

$iii) \Rightarrow i)$ Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M . Setze $N := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i$. M/N ist endlich koerzeugt, weshalb eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert mit $N = \bigcap_{j \in J} M_j$. Setze $n := \max J$, dann ist $N = M_n$, also ist $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$. ■

2 Homologische Algebra

In diesem Kapitel sei R stets ein Ring

2.4 Kategorien

Definition 2.4.1. Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus

- einer Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$ von *Objekten* einer Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von *Morphismen* für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$
- einer Verknüpfung $\circ : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ für alle $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$

wobei folgende Axiome gelten:

(K1) $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$, falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$

(K2) Für alle $A, B, C, D \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (\text{Assoziativität})$$

(K3) für jedes $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ existiert ein Morphismus $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, sodass für alle $B \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ gilt:

$$f \circ \text{id}_A = f, \text{id}_A \circ g = g$$

Anmerkung. • Man sagt *Klasse* statt Menge, um Paradoxa, wie “die Menge aller Mengen“ zu vermeiden.

- Trotzdem schreiben wir $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ um zu sagen dass A zu $\text{Ob } \mathcal{C}$ gehört (und werden $\text{Ob } \mathcal{C}$ im Folgenden wie eine Menge behandeln).
- In den folgenden Abschnitten werden wir mengentheoretische Probleme ignorieren und häufig von Mengen sprechen auch wenn es sich nur um Klassen handelt.
- Für $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir auch $f : A \rightarrow B$. A heißt *Quelle* und B heißt *Ziel* von f ; wegen (K1) sind diese eindeutig bestimmt.
- für $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist id_A eindeutig bestimmt (analoges Argument wie bei Monoiden: $\text{id}_A = \text{id}'_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$)

Beispiel 2.4.2. • Mengen: Kategorie der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen

- Ringe: Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen
- $R\text{-Mod}$: Kategorie der R -(Links)-Moduln mit R -Modulhomomorphismen als Morphismen
- Top: Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen
- $\text{Ob } \mathcal{C} = \{*\}$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(*, *) := M$, wobei M Monoid, \circ = Verknüpfung in M .

Definition 2.4.3. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Die zu \mathcal{C} *duale Kategorie* (\mathcal{C}^{op}) ist die Kategorie mit:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ für $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob } \mathcal{C}$
- $\circ_{op} : \text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$ mit $(f, g) \mapsto f \circ g$ für $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$

Anmerkung. • Anschaulich: Übergang von \mathcal{C} zu $\mathcal{C}^{op} \hat{=}$ Pfeile umdrehen

- $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

Definition 2.4.4. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, sodass gilt:

$$(F1) \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ für alle } f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$$

$$(F2) \quad F(id_A) = id_{FA} \text{ für alle } A \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

Beispiel 2.4.5. a) Vergiss-Funktoren, zum Beispiel: $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Mengen}$, $R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$, ...

b) Sei \mathcal{C} eine Kategorie \Rightarrow Jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ induziert einen Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}, \quad A \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A)$$

Für $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist hierbei $f_*^X := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -)(f)$ gegeben durch

$$f_*^X : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B), \quad g \mapsto f \circ g$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & A \\ & \searrow f_*^X(g) & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

c) Sei $M \in R\text{-Mod} \Rightarrow \text{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}, N \mapsto \text{Hom}_R(M, N)$ ist ein Funktor.

Definition 2.4.6. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Ein (kontavarianter) Funktor F von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$, das heißt besteht aus einer Abbildung

$$\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } (\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FB, FA), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, sodass gilt:

(F1') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für alle $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$

(F2') $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Beispiel 2.4.7. a) Sei \mathcal{C} eine Kategorie \Rightarrow Jedes Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ induziert einen kontravarianten Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}, \quad A \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y)$$

Für $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist hierbei $f_Y^* := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y)(f)$ gegeben durch

$$f_Y^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y), \quad g \mapsto g \circ f$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_Y^*(g)} & Y \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ B & & \end{array}$$

b) Sei $N \in R\text{-Mod} \Rightarrow \text{Hom}_R(-, N) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}, M \mapsto \text{Hom}_R(M, N)$ ist ein kontravarianter Funktor.

Anmerkung. • Sind $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Funktoren, so ist auf naheliegende Weise der Funktor $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ definiert.

- Unter Funktoren werden kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme abgebildet.

Definition 2.4.8. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Das *Produkt* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ist diejenige Kategorie mit $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$ und $Mor_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$ und "komponentenweisen \circ ".

Definition 2.4.9. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ Kategorien. Ein *Bifunktor* F "von \mathcal{C} kreuz \mathcal{D} nach \mathcal{E} " ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$

Beispiel 2.4.10. a) $\oplus : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}, (M, N) \rightarrow M \oplus N$ ist ein Bifunktor

- b) Sei \mathcal{C} eine Kategorie $\Rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}, (M, N) \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(M, N)$ ist ein Bifunktor.

Definition 2.4.11. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A, B \in Ob \mathcal{C}, f : A \rightarrow B$ f heißt

Monomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in Ob \mathcal{C}, g_1, g_2 : C \rightarrow A$ gilt: $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob \mathcal{C}$ ist $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(C, A) \rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(C, B)$ injektiv.

Epimorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in Ob \mathcal{C}, g_1, g_2 : B \rightarrow C$ gilt: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob \mathcal{C}$ ist $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ injektiv.

Isomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $g : B \rightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

Anmerkung. In der Situation von 2.4.11 gilt:

- f Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in \mathcal{C}^{op} .
- f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ ist Isomorphismus in \mathcal{C}^{op} .
- Ist f ein Isomorphismus und $g : B \rightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$, dann ist g eindeutig bestimmt (und wird mit f^{-1} bezeichnet), denn sind $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ mit dieser Eigenschaft $\Rightarrow g_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$.
- In Mengen ist f Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ injektiv, f Epimorphismus $\Leftrightarrow f$ surjektiv, f Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv. Im Allgemeinen ist dies für Kategorien, in denen die Morphismen Abbildungen sind, jedoch falsch (vgl. Bsp. 4.13)

Bemerkung 2.4.12. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $f : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus. Dann ist f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.

Beweis. Seien $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : C \rightarrow A$ mit $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2) \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow f$ Monomorphismus. Analog wird gezeigt dass f ein Epimorphismus. ■

Anmerkung. Die Umkehrung von 2.4.12 ist im Allgemeinen falsch, siehe nächstes Beispiel.

Beispiel 2.4.13. a) Sei $\mathcal{C} = \text{Top}$ die Kategorie der Topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Wir betrachten

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \text{diskrete Topologie}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$$

Diese ist eine stetige Abbildung, ein Monomorphismus sowie ein Epimorphismus, jedoch kein Isomorphismus (Nicht hömöomorph, da kein stetiges Inverses)

b) Sei $\mathcal{C} = \text{Ringe}$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ Inklusion. f ist ein Monomorphismus und ein Epimorphismus (Achtung, denn: Für $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \rightarrow R$ Ringhomomorphismus ist ein Ring R mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, das heißt $g_1|_{\mathbb{Z}} = g_2|_{\mathbb{Z}}$ folgt $g_1 = g_2$ wegen der Universellen Eigenschaft von \mathbb{Q} als Quotientenkörper von \mathbb{Z}), aber kein Isomorphismus. Insbesondere ist ein Epimorphismus in \mathcal{C} im obigen Sinne ("kategorieller Epimorphismus") nicht dasselbe wie ein surjektiver Ringhomomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ & & \downarrow g_1 \quad \downarrow g_2 \\ & & R \end{array}$$

Definition 2.4.14. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* t von F nach G ($t : F \Rightarrow G$) ist eine Familie $(t_A)_{A \in \text{Ob}\mathcal{C}}$ von Morphismen $t_A \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, GA)$, sodass

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{t_A} & GA \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ FB & \xrightarrow{t_B} & GB \end{array}$$

für alle $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $f : A \rightarrow B$ kommutiert. Man sagt häufig auch $t_A : FA \rightarrow GA$ ist natürlich in A .

Beispiel 2.4.15. a) Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $f : A \rightarrow B$. Dann ist

$$f^* = (f_Y^*)_{Y \in \text{Ob}\mathcal{C}} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}$, denn für $Y_1, Y_2 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_1) & \xrightarrow{f_{Y_1}^*} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y_1) \\ g_*^B \downarrow & & \downarrow g_*^A \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) & \xrightarrow{f_{Y_2}^*} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \end{array}$$

denn: Für $\varphi : B \rightarrow Y_1$ ist

$$(g_*^A \circ f_{Y_1}^*)(\varphi) = g_*^A(\varphi \circ f) = g \circ \varphi \circ f = f_{Y_2}^*(g \circ \varphi) = (f_{Y_2}^* \circ g_*^B)(\varphi)$$

- b) Sei $K\text{-VR}$ die Kategorie der K -Vektorräume über einem festen Körper K (mit linearen Abbildungen als Morphismen). Für $V \in K\text{-VR}$ sei $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum. Die kanonische Abbildung $\varphi_v : V \rightarrow V^{**}$, $w \mapsto \varphi_v(w) : V^* \rightarrow K$, $\psi \mapsto \psi(w)$ ist natürlich in V , denn für $V, W \in K\text{-VR}$, eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_v} & V^{**} \\ \downarrow f & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{\varphi_w} & W^{**} \end{array}$$

mit $f^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$, $(\varphi : V^* \rightarrow K) \mapsto f^{**}(\varphi) : W^* \rightarrow K$, $\psi \mapsto \varphi(\underbrace{\psi \circ f}_{\in V^*})$, d.h.

$\varphi : id_V \Rightarrow _^{**}$ ist eine natürliche Transformation von $id : K\text{-VR} \rightarrow K\text{-VR}$ nach $_^{**} : K\text{-VR} \rightarrow K\text{-VR}$.

Definition 2.4.16. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren, $t : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. t heißt *natürliche Äquivalenz* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $t_A : FA \rightarrow GA$ ein Isomorphismus. (Notation $t : F \xrightarrow{\sim} G$)

Anmerkung. Ist $t : F \rightarrow G$ eine natürliche Äquivalenz, dann existiert eine natürliche Äquivalenz $t^{-1} : G \xrightarrow{\sim} F$ via $t_A^{-1} = (t_A)^{-1} : GA \rightarrow FA$

Beispiel 2.4.17. Bezeichne $K\text{-VR}_{<\infty}$ die Kategorie der endlichdimensionalen K -VR. Dann ist die natürliche Transformation $\varphi : id \Rightarrow _^{**}$ aus Beispiel 4.15 eine natürliche Äquivalenz.

Definition 2.4.18. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. F heißt *Kategorienäquivalenz* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürliche Äquivalenzen $F \circ G \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{C}}$

Beispiel 2.4.19. Der Funktor $_{-}^* : K\text{-VR}_{<\infty} \rightarrow (K\text{-VR}_{<\infty})^{\text{op}}$, $v \mapsto V^*$ ist eine Kategorienäquivalenz, denn mit $_{-}^{\sim*} : (K\text{-VR}_{<\infty})^{\text{op}} \rightarrow K\text{-VR}_{<\infty}$, $W \mapsto W^*$ gilt offenbar $_{-}^{\sim*} \circ _{-}^* = _{-}^{**}$, und $\varphi : \text{id} \xrightarrow{\sim} _{-}^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz, analog andersherum (d.h. die Kategorie $K\text{-VR}_{<\infty}$ ist selbstdual).

Satz 2.4.20 (Yoneda-Lemma). Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}$ ein Funktor. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi : \{ \text{natürliche Transformationen } t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F \} &\rightarrow F(A) \\ t &\mapsto t_a(\text{id}_A) \end{aligned}$$

Beweis. 1. Sei $a \in F(A)$. Wir definieren $s^a : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F$ als $s^a = (s_B^a)_{B \in \text{Ob } \mathcal{C}}$ mit

$$s_B^a := F(\varphi)(a) \quad \text{für } \varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

s^a ist eine natürliche Transformation, denn für $B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $f : B \rightarrow C$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{s_B^a} & F(B) \\ f_*^A \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) & \xrightarrow{s_C^a} & F(C) \end{array}$$

denn:

$$\begin{aligned} (F(f) \circ s_B^a)(\varphi) &= F(f)(s_B^a(\varphi)) = F(f)(F(\varphi)(a)) = F(f \circ \varphi)(a) \\ &= F(f_*^A(\varphi))(a) = s_C^a(f_*^A(\varphi)) \end{aligned}$$

2. Setze

$$\begin{aligned} \Psi : F(A) &\rightarrow \{ \text{natürliche Transformationen } t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F \} \\ a &\mapsto s^a \end{aligned}$$

Dann sind Φ, Ψ invers zueinander, denn: Für $a \in F(A)$, $t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F$ gilt

$$(\Phi \circ \Psi)(a) = \Phi(s^a) = s_A^a(\text{id}_A) = F(\text{id}_A)(a) = \text{id}_{FA}(a) = a$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(t) = \Psi(t_A(\text{id}_A))$$

und für $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ \varphi_*^A \downarrow & & \downarrow F(\varphi) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}$$

$$(\Psi(t_A(\text{id}_A)))_B(\varphi) = s_B^{t_A(\text{id}_A)}(\varphi) = F(\varphi)(t_A(\text{id}_A)) = t_B(\varphi^A(\text{id}_A)) = t_B(\varphi)$$

d.h. $(\Psi \circ \Phi)(t) = t$ ■

Folgerung 2.4.21. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) &\longrightarrow \{\text{natürliche Transformationen } \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)\} \\ \psi : B \rightarrow A &\mapsto \psi^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Wende 2.4.20 auf $F = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)$ and. In der Notation des Beweises von 4.20 ist $\Psi(\psi) = s^\psi = (s_C^\psi)_{C \in \text{Ob}\mathcal{C}}$, wobei für $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ gilt:

$$(s_C^\psi)(\varphi) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)(\varphi)(\psi) = \varphi_*^B(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi_C^*(\varphi)$$

d.h. $\Psi(\psi) = \psi^*$. ■

Anmerkung. • Folgerung 2.4.21 liefert einen sogenannten volltreuen Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Funk}(\mathcal{C}, \text{Mengen})$, wobei $A \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$, wobei $\text{Funk}(\mathcal{C}, \text{Mengen})$ die Funktorkategorie von \mathcal{C} nach Mengen bezeichnet (Objekte sind Funktoren: $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}$, und Morphismen die natürlichen Transformationen) (*Yoneda-Einbettung*)

- Folgerung 2.4.21 liefert insbesondere eine Verallgemeinerung des Satzes von Cayley aus der Gruppentheorie: Für eine Gruppe G ist $G \hookrightarrow S(G)$, $g \mapsto \tau_g$ (Linkstranslation mit $g \in G$) ein injektiver Grupphomomorphismus. Wende 2.4.21 an auf:

- $\mathcal{C} = \text{Kategorie mit } \text{Ob}\mathcal{C} = \{\cdot\}, \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) = G$
- $A = B = \cdot$

und erhalte eine Bijektion

$$\begin{aligned} G = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) &\longrightarrow \{\text{natürliche Transformationen } \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -)\} \\ g &\mapsto g^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \hat{=} \tau_g \end{aligned}$$

2.5 Abelsche Kategorien

Definition 2.5.1. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$. A heißt

Anfangsobjekt $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M)$ einelementig

Endobjekt $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, A)$ einelementig

Anmerkung. Falls sie existieren, sind Anfangs- und Endobjekte eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (denn: Sind A_1, A_2 Anfangsobjekte, dann ist $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) = \{\alpha\}$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_1) = \{\beta\}$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_1) = \{\text{id}_{A_1}\}$ und analog $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_2) = \{\text{id}_{A_2}\}$, insbesondere ist $\beta \circ \alpha = \text{id}_{A_1}$, $\alpha \circ \beta = \text{id}_{A_2}$).

Definition 2.5.2. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ heißt *Nullobjekt* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ 0 ist sowohl Anfangs- als auch Endobjekt. Existiert in \mathcal{C} ein Nullobjekt 0 , so enthält $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein ausgezeichnetes Element, den “Nullmorphismus“ $A \rightarrow 0 \rightarrow B$

Anmerkung. Der Nullmorphismus in $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist unabhängig von der Wahl des Nullobjekts:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \tilde{0} & & \end{array}$$

Beispiel 2.5.3. a) In Mengen ist \emptyset ein Anfangsobjekt, jede einelementige Menge ist ein Endobjekt, insbesondere existiert in Mengen kein Nullobjekt

b) in Ringe ist \mathbb{Z} ein Anfangsobjekt, und der Nullring ist ein Endobjekt. In Ringe existiert ebenfalls ein Nullobjekt

c) In $R\text{-Mod}$ ist der Nullmodul ein Nullobjekt.

Definition 2.5.4. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus \mathcal{C} . Ein *Produkt* $(A, (p_i)_{i \in I})$ von $(A_i)_{i \in I}$ ist ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $p_i : A \rightarrow A_i$, sodass für alle $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A_i), \quad f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I}$$

bijektiv ist, das heißt für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Morphismen $f_i : B \rightarrow A_i$ existiert ein eindeutig bestimmtes $f : B \rightarrow A$ mit $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 2.5.5. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus \mathcal{C} , $(A, (p_i)_{i \in I})$, $(A', (p'_i)_{i \in I})$, Produkte von $(A_i)_{i \in I}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $f : A \rightarrow A'$, sodass für alle $i \in I$ gilt: $p'_i \circ f = p_i$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ & \searrow p_i & \swarrow p'_i \\ & A_i & \end{array}$$

(kurz: A, A' sind kanonisch isomorph. Wir sprechen daher oft von “dem Produkt” und schreiben $A = \prod_{i \in I} A_i$)

- Beweis.* 1. Wir wenden die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A', (p'_i)_{i \in I})$, $B = A$, $f_i = p_i \Rightarrow$ Wir erhalten einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : A \rightarrow A'$ mit $p'_i \circ f = p_i$ für alle $i \in I$. Analog: Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A, (p_i)_{i \in I})$, $B = A'$, $f_i = p'_i \Rightarrow$ Es existiert genau ein $g : A' \rightarrow A$ mit $p_i \circ g = p'_i$ für alle $i \in I$.
2. Es gilt $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_{A'}$ (d.h. f ist ein Isomorphismus), denn: Für alle $i \in I$ ist $p_i \circ (g \circ f) = (p_i \circ g) \circ f = p'_i \circ f = p_i$. Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A, (p_i)_{i \in I})$, $B = A$, $f_i = p_i$ an: Es existiert genau ein $h : A \rightarrow A$ mit $p_i \circ h = p_i$ für alle $i \in I$ (nämlich $h = id_A$). Somit ist $id_A = g \circ f$. Analog: $f \circ g = id_{A'}$. ■

Beispiel 2.5.6. a) In Mengen ist das Produkt das kartesische Produkt.

b) In $R\text{-Mod}$ ist das Produkt das direkte Produkt.

c) In der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen existiert kein Produkt der Familie $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (Übung)

Bemerkung + Definition 2.5.7. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus \mathcal{C} . Ein *Koprodukt* $(A, (q_i)_{i \in I})$ von $(A_i)_{i \in I}$ ist ein Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $q_i : A_i \rightarrow A$, sodass $(A, (q_i)_{i \in I})$ Ein Produkt von $(A_i)_{i \in I}$ in \mathcal{C}^{op} ist, das heißt für alle $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_i, B), \quad f \mapsto (f \circ q_i)_{i \in I}$$

bijektiv. Falls es existiert ist ein Koprodukt von $(A_i)_{i \in I}$ eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (analog zu 2.5.5). Wir sprechen dann von dem *Koprodukt* und schreiben $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($= \coprod_{i \in I} A_i$)

Beispiel 2.5.8. a) In Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.

b) in $R\text{-Mod}$ ist das Koprodukt die direkte Summe.

c) In der Kategorie der Gruppen existiert ein Koprodukt, das sogenannte freie Produkt (siehe Zettel Algebra 1)

Definition 2.5.9. Sei \mathcal{A} eine Kategorie. \mathcal{A} heißt *additiv*, wenn gilt:

(K1) \mathcal{A} hat ein Nullobjekt,

(K2) In \mathcal{A} existieren endliche Produkte

(K3) Für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{A}$ trägt $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ die Struktur einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphimus als neutrales Element, sodass für alle $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{A}$ die Verknüpfung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{\circ} \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

bilinear ist.

Anmerkung. In einer additiven Kategorie \mathcal{A} schreiben wir auch $\text{Hom}_{\mathcal{A}}$ für $\text{Mor}_{\mathcal{A}}$.

Beispiel 2.5.10. a) $R\text{-Mod}$ ist eine additive Kategorie

b) Ringe sind keine additive Kategorie (kein Nullobjekt, vgl 2.5.3(b)).

Satz 2.5.11. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie, $A_1, A_2 \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$ Produkt von $A_1 \times A_2$, $i_1 : A_1 \rightarrow A_1 \times A_2$ sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch $\text{id}_{A_1} : A_1 \rightarrow A_1, 0 : A_1 \rightarrow A_2$. Analog sei $i_2 : A_2 \rightarrow A_1 \times A_2$ sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch $0 : A_2 \rightarrow A_1, \text{id} : A_2 \rightarrow A_2$. Dann ist $(A_1 \times A_2, (i_1, i_2))$ ein Koprodukt von A_1, A_2 in \mathcal{A} .

Beweis. 1. Behauptung: $\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow A_1 \times A_2$ stimmt mit $\text{id}_{A_1 \times A_2}$ überein. Denn: Es ist

$$p_1 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\text{id}_{A_1}} \circ p_1 + \underbrace{p_1 \circ \iota_2}_{=0: A_2 \rightarrow A_1} \circ p_2 = p_1 = p_1 \circ \text{id}_{A_1 \times A_2}$$

Analog:

$$p_2 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = p_2 = p_2 \circ \text{id}_{A_1 \times A_2} \xrightarrow{UE} \iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 = \text{id}_{A_1 \times A_2}$$

2. Universelle Eigenschaft des Koprodukts: Sei $B \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $f_1 : A_1 \rightarrow B$, $f_2 : A_2 \rightarrow B$

Existenz: Wir setzen $f := f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow B$. Dann ist

$$f \circ \iota_1 = f_1 \circ \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\text{id}_{A_1}} + f_2 \circ \underbrace{p_2 \circ \iota_1}_{=0: A_1 \rightarrow A_2} = f_1.$$

Analog: $f \circ \iota_2 = f_2$.

Eindeutigkeit: Sei $f' : A_1 \times A_2 \rightarrow B$ mit $f' \circ \iota_1 = f_1$, $f' \circ \iota_2 = f_2$. Dann folgt

$$f' = f' \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{f' \circ \iota_1}_{=f_1} \circ p_1 + \underbrace{f' \circ \iota_2}_{=f_2} \circ p_2 = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 = f$$

Folgerung 2.5.12. Sei \mathcal{A} eine Additive Kategorie. Dann existieren in \mathcal{A} endliche Koprodukte.

Definition 2.5.13. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} additive Kategorien, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktor. F heißt *additiv* “ $\stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow}$ für alle $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ist eine Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(FA, FA'), \quad f \mapsto F(f)$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

Anmerkung. F additiv $\Rightarrow F(A \oplus A') = F(A) \oplus F(A')$ (Übungen)

Bemerkung + Definition 2.5.14. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie, $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $f : A \rightarrow A'$. Ein *Kern* (B, ι) von f ist ein Objekt $B \in \text{Ob } \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\iota : B \rightarrow A$, sodass $f \circ \iota = 0$ ist und für alle $C \in \text{Ob } \mathcal{A}$ die Abbildung:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, B) \longrightarrow \{g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A) \mid f \circ g = 0\}, \quad h \mapsto \iota \circ h$$

bijektiv ist, das heißt für alle $g : C \rightarrow A$ mit $f \circ g = 0$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : C \rightarrow B$ mit $g = \iota \circ h$:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & A' \\ \uparrow h & \nearrow g & & & \\ C & & & & \end{array}$$

Ist (B', ι') ein weiterer Kern von f , dann existiert ein eindeutig bestimmte Isomorphismus $\alpha : B \rightarrow B'$ mit $\iota = \iota' \circ \alpha$:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & B' \\ & \searrow \iota & \swarrow \iota' \\ & A & \end{array}$$

Wir nennen (B, ι) daher auch “den Kern“ von f und schreiben $\ker f = (B, \iota)$ beziehungsweise kürzer: $\ker f = B$ oder auch $\ker f = \iota$

Anmerkung. Die Existenz von Kernen ist im Allgemeinen nicht gegeben

Beispiel 2.5.15. In $R\text{-Mod}$ ist der kategorielle Kern gegeben durch die Inklusion des gewöhnlichen Kerns:

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \xrightarrow{\iota} & A \xrightarrow{f} A' \\ \uparrow h & \nearrow g & \\ C & & \end{array}$$

$f \circ g = 0 \Rightarrow \text{im } g \subseteq \ker f$ setze $h := g|_{\ker f} : C \in \ker f$, dann ist $\iota \circ h = g$ und h ist eindeutig mit dieser Bedingung.

Bemerkung 2.5.16. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie, $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $f : A \rightarrow A'$, $(\ker f, \iota)$ Kern von f . Dann ist ι ein Monomorphismus.

Beweis. Seien $h_1, h_2 : C \rightarrow \ker f$ mit $\iota \circ h_1 = \iota \circ h_2 =: g \Rightarrow f \circ g = f \circ \iota \circ h_1 = 0$ Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $h : C \rightarrow \ker f$ mit $g = \iota \circ h \Rightarrow h = h_1 = h_2$. ■

Bemerkung + Definition 2.5.17. Dual zum Kern definiert man den Kokern (Notation: $\text{coker } f$). Die Aussagen 2.5.14, 2.5.16 gelten dual.

Definition 2.5.18. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie, $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $f : A \rightarrow A'$

$\text{im } f := \ker(\text{coker } f)$ heißt das *Bild* von f

$\text{coim } f := \text{coker}(\ker f)$ heißt das *Kobild* von f .

Anmerkung. $\text{im } f$ kommt mit einem Monomorphismus $\iota' : \text{im } f \rightarrow A'$, $\text{coim } f$ mit einem Epimorphismus $q' : A \rightarrow \text{coim } f$.

Beispiel 2.5.19. Seien $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$, $f : A \rightarrow A'$ R -Modulhomomorphismus. Dann ist

$$\text{im } f = \ker \left(A' / \text{im } f, \quad A' \rightarrow A' / \text{im } f \right) = (\text{im } f, \text{im } f \hookrightarrow A')$$

$$\text{coim } f = \text{coker}(\ker f, \ker f \rightarrow A) = \left(A / \ker f, \quad A \rightarrow A / \ker f \right)$$

Bemerkung 2.5.20. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie, $A, B \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $f : A \rightarrow B$, sodass $\ker f, \text{coker } f, \text{im } f, \text{coim } f$ existieren $(\text{im } f, \iota')$ Bild von f , $(\text{coim } f, q')$ Kobild von f . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\bar{f} : \text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ mit $f = \iota' \circ \bar{f} \circ q'$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow q' & & \uparrow \iota' \\ \text{coim } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{im } f \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker f & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{q} & \operatorname{coker} f \\
 & & \downarrow q' & & \uparrow \iota' & & \\
 & & \operatorname{coim} f = \operatorname{coker} \iota & \xrightarrow{\bar{f}} & \ker q = \operatorname{im} f & &
 \end{array}$$

1. Existenz: Wegen $f \circ \iota = 0$ existiert nach der Universellen Eigenschaft von coker ein $f' : \operatorname{coim} f \rightarrow B$ mit $f = f' \circ q'$. Es ist $q \circ f = 0$, also $q \circ f' \circ q' = q \circ f = 0 = 0 \circ q'$. Da q' ein Epimorphismus ist, folgt $q \circ f' = 0$. Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns, existiert ein $\bar{f} : \operatorname{coim} f \rightarrow \operatorname{im} f$ mit $\iota' \circ \bar{f} = f'$, also $\iota' \circ \bar{f} \circ q' = f' \circ q' = f$.
2. Eindeutigkeit: Sei $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \rightarrow \operatorname{im} f$ mit $\iota' \circ \tilde{f} \circ q' = f = \iota' \circ \bar{f} \circ q'$, woraus, wegen ι' Monomorphismus zunächst $\tilde{f} \circ q' = \bar{f} \circ q'$ folgt und dann, wegen q' Epimorphismus, $\tilde{f} = \bar{f}$. ■

Definition 2.5.21. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie. \mathcal{A} heißt *abelsche Kategorie*, wenn gilt:

(Ab1) Jeder Morphismus in \mathcal{A} hat Kern und Kokern

(Ab2) (*Homomorphiesatz*). Für jeden Morphismus $f : A \rightarrow A'$ in \mathcal{A} ist der induzierte Morphismus

$$\bar{f} : \operatorname{coim} f \rightarrow \operatorname{im} f$$

ein Isomorphismus

Beispiel 2.5.22. a) $R\text{-Mod}$ ist eine abelsche Kategorie

- b) Die Kategorie der freien \mathbb{Z} -Moduln ist additiv, aber nicht abelsch: (Ab1) ist nicht erfüllt.
- c) Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen ist eine additive Kategorie, die (Ab1) erfüllt, aber nicht (Ab2): $\operatorname{id} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ (links mit der diskreten Topologie und rechts mit der Standardtopologie) $\bar{\operatorname{id}} = \operatorname{id}$ ist kein Isomorphismus.

Anmerkung. Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, dann ist auch $\mathcal{A}^{\operatorname{op}}$ abelsche Kategorie (einziger nichttrivialer Punkt: Existenz endlicher Produkte, was jedoch aus 2.5.11 folgt).

Satz 2.5.23. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $A, A' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, $f : A \rightarrow A'$ Mono- und Epimorphismus. Dann ist \bar{f} ein Isomorphismus.

Beweis. • Da f ein Monomorphismus ist, ist $(0, 0 \rightarrow A)$ ein Kern von f , denn:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} A' \\ \uparrow \text{red dashed} & \nearrow g & \\ C & \xrightarrow{\text{red } 0} & \end{array} \quad f \circ g = 0 = f \circ 0 \xrightarrow{f \text{ Mono}} g = 0$$

- $\text{coim } f = \text{coker}(0 \rightarrow A) = (A, \text{id}_A)$, denn

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{\text{id}_A} A \\ & & \searrow g \\ & & C \end{array} \quad \text{red dashed } g \downarrow$$

Analog ist $\text{im } f = (A', \text{id}_{A'})$, also ist $\bar{f} = f$ ein Isomorphismus nach (Ab2). ■

Bemerkung 2.5.24. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $f : A \rightarrow A'$. Dann gilt:

- a) f Monomorphismus $\Leftrightarrow \ker f = 0$
- b) f Epimorphismus $\Leftrightarrow \text{coker } f = 0$

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Definition 2.5.25. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $A, A', A'' \in \text{Ob } \mathcal{A}$.

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

heißt eine *exakte Folge* $\Leftrightarrow \text{im } f \cong \ker g$ in dem Sinne, dass es einen Isomorphismus $\text{im } f \xrightarrow{\alpha} \ker g$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \iota' \nearrow & & \nwarrow \iota \\ \text{im } f & \xrightarrow{\alpha} & \ker g \end{array}$$

kommutiert (wobei $(\ker g, \iota)$ Kern von g , $(\text{im } f, \iota')$ Bild von f)

Satz 2.5.26. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Dann gilt:

- a) In \mathcal{A} gilt das Fünferlemma
- b) In \mathcal{A} gilt das Schlangenlemma

- c) Eine Folge $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ in \mathcal{A} ist genau dann exakte, wenn für jedes Objekt $N \in \text{Ob } \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakte ist.

- d) Eine Folge $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ in \mathcal{A} ist genau dann exakte, wenn für jedes $M \in \text{Ob } \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

exakt ist.

Beweis. a) Stacks-Project: 12.5.17, b) 12.5.20

c), d) werden in 2.6 für $R\text{-Mod}$ bewiesen. ■

Definition 2.5.27. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. F heißt

exakt $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ F überführt kurze exakte Folgen in \mathcal{A} in kurze exakte Folgen in \mathcal{B}

links-exakt $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jede exakte Folge $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ in \mathcal{A} ist die Folge

$$0 \longrightarrow FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM''$$

exakt

rechts-exakt $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jede exakte Folge $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ in \mathcal{A} ist die Folge

$$FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM'' \longrightarrow 0$$

exakt.

Anmerkung. F ist exakt $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ F ist links- und rechts-exakt \Leftrightarrow Für alle exakten Folgen $A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ in \mathcal{A} ist $FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''$ exakt (Übung)

Definition 2.5.28. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $I, P \in \text{Ob } \mathcal{A}$. I heißt

injektiv $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jeden Monomorphismus $\iota : A \hookrightarrow B$ und jeden Morphismus $f : A \rightarrow I$ existiert ein Morphismus $g : B \rightarrow I$ mit $g \circ \iota = f$, d.h. $\iota_I^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I)$ ist surjektiv.

$$\begin{array}{ccc} A & \xhookrightarrow{\iota} & B \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ I & & \end{array}$$

P heißt

projektiv $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} P$ ist injektiv in \mathcal{A}^{op} , d.h. für jeden Epimorphismus $p : B \twoheadrightarrow A$ und jeden Morphismus $f : P \rightarrow A$ existiert ein Morphismus $g : P \rightarrow B$ mit $p \circ g = f$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ g \swarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{p} & A \end{array}$$

Bemerkung 2.5.29. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $I \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

- i) I ist injektiv
- ii) Der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt

Beweis. Nach 2.5.26 c) ist für alle exakten Folgen $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ in \mathcal{A} ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$$

exakt. Somit genügt es zu zeigen, dass I injektiv \Leftrightarrow Für alle exakten Folgen

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \quad \text{in } \mathcal{A} \text{ ist}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \xrightarrow{\iota_I^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $\mathbb{Z}\text{-Mod}$, d.h. $\iota_I^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$ ist surjektiv. Die Exaktheit von $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A$ ist äquivalent dazu, dass ι ein Monomorphismus ist. ■

Bemerkung 2.5.30. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $P \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

- i) P ist projektiv
- ii) Der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt.

Definition 2.5.31. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} (additive) Kategorien, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (additive) Funktoren. Dann heißt F *linksadjungiert* zu G (und G *rechtsadjungiert* zu F) $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Mengen}$ (bzw. $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ im additiven Fall).
Notation: $F \dashv G$

Beispiel 2.5.32. $F : \text{Mengen} \rightarrow K\text{-VR}$, $M \mapsto K^{(M)}$, $G : K\text{-VR} \rightarrow \text{Mengen}$ der Vergissfunktors. Es ist

$$\text{Mor}_{\text{Mengen}}(M, V) \xrightarrow[\text{Bij.}]{\sim} \text{Mor}_{K\text{-VR}}(K^{(M)}, V)$$

für alle Mengen M und $K\text{-VR}$, wobei die naheliegenden Diagramme kommutieren, d.h. wir haben eine natürliche Äquivalenz.

$$\text{Mor}_{\text{Mengen}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{K\text{-VR}}(F-, -)$$

also $F \dashv G$.

Satz 2.5.33. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ additive Funktoren mit $F \dashv G$. Dann gilt:

- a) F ist rechtsexakt
- b) Ist F exakt, dann überführt G injektive Objekte aus \mathcal{B} in injektive Objekte aus \mathcal{A} .
- c) G ist linksexakt
- d) Ist G exakt, dann überführt F projektive Objekte aus \mathcal{A} in projektive Objekte aus \mathcal{B} .

Beweis. a) Sei $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge in \mathcal{A} . Nach 2.5.26 c) ist

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', GB) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GB)$$

exakt für alle $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$ und, da $F \dashv G$ ist

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'', B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA', B)$$

exakt für alle $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$. Damit ist nach 2.5.26 c)

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

exakt.

- b) Sei $I \in \text{Ob } \mathcal{B}$ injektiv. Es ist zu zeigen, dass $GI \in \text{Ob } \mathcal{A}$ injektiv ist, d.h. der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt. Allerdings gilt $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, I)$ und letzterer ist exakt, da F exakt und I injektiv.

Definition 2.5.34. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. F heißt *volltreu*
 $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist die Abb $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB), f \mapsto F(f)$
 bijektiv.

Satz 2.5.35 (Einbettungssatz von Freyd-Mitchell). *Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie (dh. $\text{Ob } \mathcal{A}$ ist eine Menge) Dann existiert ein Ring R und ein volltreuer exakter Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-Mod}$*

Anmerkung. • F induziert eine Äquivalenz zwischen \mathcal{A} und einer vollen Unterkategorie von $R\text{-Mod}$ (das heißt \mathcal{C} ist eine Unterkategorie von $R\text{-Mod}$ mit $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(A, B)$ für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$)

• In \mathcal{A} berechnete Kerne und Kokerne entsprechen über diese Äquivalenz Kernen und Kokernen in $R\text{-Mod}$. (Achtung: injektive/projektive Objekte korrespondieren im Allgemeinen nicht zu injektiven/projektiven R -Moduln)

2.6 Projektive und Injektive Moduln

Satz 2.6.1. Sei $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ eine Folge von R -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i) $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ ist exakt
- ii) Für jeden R -Modul M ist die Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N'')$$

ist exakt.

insbesondere ist der kovariante Funktor $\operatorname{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ linksexakt

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Sei $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ exakt.

1. Injektivität von f_*^M : Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N')$ mit $f_*^M(\varphi) = 0 \Rightarrow f \circ \varphi = 0$
Wegen f injektiv, folgt $\varphi = 0$, also $\ker f_*^M = 0$
2. $\operatorname{im} f_*^M = \ker g_*^M$,
" \subseteq " Es ist $g_*^M \circ f_*^M = (g \circ f)_*^M = 0_*^M = 0$, also $\operatorname{im} f_*^M \subseteq \ker g_*^M$,
" \supseteq " Sei $\varphi : M \rightarrow N$ mit $\varphi \in g_*^M \Rightarrow g \circ \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{im} \varphi \subseteq \ker g = \operatorname{im} f$. Setze $\varphi' : M \rightarrow \operatorname{im} \varphi \rightarrow \operatorname{im} f \rightarrow N' \Rightarrow \varphi' \in \operatorname{Hom}_R(M, N')$ mit $f \circ \varphi' = \varphi \Rightarrow \varphi \in \operatorname{im} f_*^M$.

(ii) \Rightarrow (i) Sei $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N'') \longrightarrow 0$ exakt für alle R -Moduln M .

1. f injektiv: Setze $M := \ker f$, $\iota : \ker f \rightarrow N'$ Inklusion. Dann ist $f_*^M(\iota) = f \circ \iota = 0$. Und, da f_*^M injektiv, ist $\iota = 0 \Rightarrow \ker f = 0$
2. $\operatorname{im} f = \ker g$:
" \subseteq " Setze $M := N' \Rightarrow 0 = 0_*^M(\operatorname{id}_{N'}) = (g_*^M \circ f_*^M)(\operatorname{id}_{N'}) = ((g \circ f)_*^M)(\operatorname{id}_{N'}) = g \circ f \circ \operatorname{id}_{N'} = g \circ f$
" \supseteq " Setze $M := \ker g$, $\iota : \ker g \rightarrow N \Rightarrow g_*^M(\iota) = g \circ \iota = 0 \Rightarrow \iota \in \operatorname{im} f_*^M$ Dann existiert ein $\varphi : \ker g \rightarrow N'$ mit $f \circ \varphi = \iota$. Somit: $x \in \ker g \Rightarrow x = \iota(x) = f(\varphi(x)) \in \operatorname{im} f$. ■

Anmerkung. Der kovariante Funktor $\operatorname{Hom}_R(M, -)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

Beispiel 2.6.2. Sei $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von \mathbb{Z} -Moduln mit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x, \pi$ kanonische Projektion. Die Abbildung $\pi_*^M : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist nicht surjektiv, denn: Für $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ gilt:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(1 + 1) = \varphi(2 \cdot 1) = 2\varphi(1)$$

, also $\varphi(1) = 0$, das heißt $\varphi = 0$. Insbesondere ist $\pi_*^M(\varphi) = \pi_*^M(0) = 0 \neq \text{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.

Mit anderen Worten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist kein projektiver \mathbb{Z} -Modul.

Satz 2.6.3. Sei P ein R -Modul. Dann sind äquivalent:

- i) P ist ein projektiver R -Modul
- ii) $\text{Hom}_R(P, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt.
- iii) Für jeden Epimorphismus $\pi : M \rightarrow N$ von R -Moduln und jeden Hom $\varphi : P \rightarrow N$ existiert ein Homomorphismus $\psi : P \rightarrow M$ mit $\pi \circ \psi = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \psi \swarrow & & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{\pi} & N \end{array}$$

- iv) Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ von R -Moduln spaltet.
- v) Es gibt einen R -Modul P' , sodass $P \oplus P'$ ein freier R -Modul ist (das heißt P ist direkter Summand eines freien R -Moduls)

Beweis. (i) $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ (ii) $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ (iii) folgt aus Definition 5.30.

(iii) \Rightarrow (iv) Sei $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Nach (iii) existiert zu dem Epimorphismus $g : M \rightarrow P$ und dem Homomorphismus $\text{id}_P : P \rightarrow P$ ein Homomorphismus $\psi : P \rightarrow M$ mit $g \circ \psi = \text{id}_P$, das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & P \longrightarrow 0 \\ & & & & & \nwarrow \psi & \uparrow \text{id} \\ & & & & & & P \end{array}$$

(iv) \Rightarrow (v) Es existiert ein freier R -Modul F und ein Epimorphismus $f : F \rightarrow P$. Wir erhalten eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$, diese spaltet nach (iv), das heißt $F \simeq P \oplus \ker f$

(v) \Rightarrow (iii) Sei $\pi : M \rightarrow N$ ein Epimorphismus von R -Moduln, $\varphi : P \rightarrow N$ ein Homomorphismus. Wegen (v) existiert ein R -Modul P' sodass $F := P \oplus P'$ frei ist, Setze

$$\varphi' : F \rightarrow N, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x)$$

Sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von F , wähle für $i \in I$ jeweils ein $z_i \in \pi^{-1}(\varphi'(b_i))$. Durch $\psi' : F \rightarrow M, b_i \mapsto z_i$ wird ein Homomorphismus definiert mit $\pi \circ \psi' = \varphi'$. Setze

$$\psi : P \rightarrow M, \quad x \mapsto \psi'((x, 0))$$

dann gilt für $x \in P : \pi(\psi(x)) = \pi(\psi'((x, 0))) = \varphi'((x, 0)) = \varphi(x)$ das heißt $\pi \circ \psi = \varphi$. ■

Folgerung 2.6.4. a) Jeder freie R -Modul ist ein projektiver R -Modul

b) Jeder R -Modul ist ein Faktormodul eines projektiven R -Moduls.

Beweis. a) klar nach 2.6.3.

b) da jeder R -Modul Faktormodul eines freien R -Moduls ist. ■

Satz 2.6.5. Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine Sequenz von R -Moduln. Dann sind äquivalent:

i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ ist exakt.

ii) Für jeden R -Modul N ist die Sequenz abelscher Gruppen:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{g_N^*} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f_N^*} \operatorname{Hom}_R(M', N) \text{ exakt.}$$

Insbesondere ist der kontravariante Funktor: $\operatorname{Hom}_R(-, N) : R\text{-Mod}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ linksexakt.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Anmerkung. Der kontravariante Funktor $\operatorname{Hom}_R(-, N)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

Beispiel 2.6.6. Sei $R = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von \mathbb{Z} -Moduln mit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$ und π der kanonischen Projektion. Die Abbildung $f_{\mathbb{Z}}^* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist nicht surjektiv, denn für alle $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist

$$(f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi))(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = 2\varphi(x) \in 2\mathbb{Z}$$

insbesondere ist $f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi) \neq \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Mit anderen Worten: \mathbb{Z} ist kein injektiver \mathbb{Z} -Modul.

Satz 2.6.7. Sei Q ein R -Modul. Dann sind äquivalent:

- i) Q ist ein injektiver R -Modul
- ii) $\text{Hom}_R(-, Q) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt.
- iii) Für jeden Monomorphismus $\iota : L \rightarrow M$ von R -Moduln und jedem Homomorphismus $\varphi : L \rightarrow Q$ existiert ein Homomorphismus $\psi : M \rightarrow Q$ von R -Moduln mit $\psi \circ \iota = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\iota} & M \\ \downarrow & \swarrow \psi & \\ Q' & & \end{array}$$

- iv) Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ von R -Moduln spaltet.

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) folgt aus 2.5.29

(iii) \Rightarrow (iv) Sei $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln. Nach (iii) existiert zum Monomorphismus $f : L \rightarrow M$ von R -Moduln und zum Homomorphismus $\text{id}_L : L \rightarrow L$ ein Homomorphismus $\psi : M \rightarrow L$ mit $\psi \circ f = \text{id}_L$. das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_Q & \swarrow \psi & & & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

(iv) \Rightarrow (iii) Sei $\iota : L \rightarrow M$ ein Monomorphismus, $\varphi : L \rightarrow Q$ ein Homomorphismus von R -Moduln. Setze

$$S := \{(\varphi(x), -\iota(x)) \mid x \in L\} \subseteq Q \oplus M \quad M' := (Q \oplus M)/S, \quad N := M/\text{im } \iota$$

$\pi : M \rightarrow N$ kanonische Projektion.

1. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & y & \longmapsto & \overline{(y, 0)} & & \\ & & & & \overline{(y, z)} & \longmapsto & \pi(z) \end{array}$$

von R -Moduln. denn:

- g ist wohldefiniert, denn: $\pi \circ \iota = 0$
- f ist injektiv, denn $(y, 0) = (0, 0) \Rightarrow$ Es existiert ein $x \in L$ mit $y = \varphi(x), 0 = -\iota(x)$. Wegen ι injektiv, folgt $x = 0 \Rightarrow y = \varphi(0) = 0$
- g surjektiv, klar
- $\text{im } f = \ker g$:
 “ \subseteq “ klar, wegen $g \circ f = 0$
 “ \supseteq “ Sei $(y, z) \in \ker g \Rightarrow \pi(z) = 0 \Rightarrow z \in \text{im } \iota$, das heißt es existiert ein $x \in L$ mit $z = \iota(x) = -\iota(-x)$ Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{(y, z)} &= \overline{(y, -\iota(-x))} = \overline{(y + \varphi(x), 0)} + \overline{(\varphi(-x), -\iota(-x))} \\ &= \overline{(y + \varphi(x), 0)} = f(y + \varphi(x)) \in \text{im } f. \end{aligned}$$

2. Wegen (iv) spaltet die Sequenz, das heißt es existiert ein R -Modulhomomorphismus $h : M' \rightarrow Q$ mit $h \circ f = \text{id}_Q$. Setze

$$\psi : M \rightarrow Q, z \mapsto h((0, z))$$

ψ ist ein R -Modulhomomorphismus. Für $x \in L$ ist

$$\begin{aligned} (\psi \circ \iota)(x) &= h((0, \iota(x))) = h((0, \iota(x))) + h(\varphi(x), -\iota(x)) \\ &= h((\varphi(x), 0)) = h(f(\varphi(x))) = \varphi(x) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Also ist $\psi \circ \iota = \varphi$

Beispiel 2.6.8. Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann ist V ein injektiver K -Modul, denn für jede exakte Folge $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ von K -Moduln, ist N ein freier K -Modul, d.h. die Folge spaltet.

Satz 2.6.9 (Baer-Kriterium). Sei Q ein R -Modul. Dann sind äquivalent:

i) Q ist ein injektiver R -Modul

- ii) Für jedes Linksideal $I \subseteq R$ und jede R -lineare Abbildung $\varphi : I \rightarrow Q$ existiert eine R -lineare Abbildung $\psi : R \rightarrow Q$ mit $\psi|_I = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ Q & & \end{array}$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Betrachte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\iota} & R \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ Q & & \end{array}$$

Da Q injektiv, existiert ein R -Modulhomomorphismus $\psi : R \rightarrow Q$ mit $\varphi = \psi \circ \iota = \psi$.

(ii) \Rightarrow (i) Sei $\iota : L \rightarrow M$ ein Monomorphismus von R -Moduln, $\varphi : L \rightarrow Q$.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\iota} & M \\ \varphi \downarrow & \swarrow ? & \\ Q & & \end{array}$$

Ohne Einschränkung sei $L \subseteq M$ ein Untermodul, ι Inklusionsabbildung.

1. Setze $\mathcal{X} := \{(L', \varphi') \mid L' \subseteq M \text{ Untermodul mit } L \subseteq L', \varphi' : L' \rightarrow Q \text{ } R\text{-linear mit } \varphi'|_L = \varphi\}$. Dann ist $\mathcal{X} \neq \emptyset$, denn: $(L, \varphi) \in \mathcal{X}$. Auf \mathcal{X} ist die Halbordnung " \leq " durch

$$(L', \varphi') \leq (L'', \varphi'') \Leftrightarrow L' \subseteq L'', \varphi'|_{L'} = \varphi''|_{L'}$$

erklärt. \mathcal{X} ist induktiv geordnet bzgl. " \leq ", denn: Sei $(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$ eine totalgeordnete Familie von Elementen aus \mathcal{X} . Setze $L' := \bigcup_{i \in I} L_i$. L' ist Untermodul von M (beachte: $a, b \in L' \Rightarrow$ Es existieren i, j mit $a \in L_i, b \in L_j$, ohne Einschränkung: $L_i \subseteq L_j \Rightarrow a + b \in L_j \subseteq L'$) und es ist $L \subseteq L'$. Außerdem kann die R -lineare Abbildung $\varphi' : L' \rightarrow Q$ mit $\varphi'|_{L_i} := \varphi_i$ für alle $i \in I$ definieren. (wohldefiniert, denn: Für $i, j \in I$, ohne Einschränkung: $(L_i, \varphi_i) \subseteq (L_j, \varphi_j)$ ist $\varphi_j|_{L_i} = \varphi_i \Rightarrow (L', \varphi')$ ist obere Schranke für die Familie $(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Mit dem Zornschen Lemma folgt, dass ein maximales Element (L', φ') in \mathcal{X} existiert.

2. Behauptung: $L' = M$, denn:

Sei $x \in M$. Setze $I := \{a \in R \mid ax \in L'\} \subseteq R \cdot I$ ist Linksideal in R , und die Abbildung $f : I \rightarrow Q, a \mapsto \varphi'(ax)$ ist R -linear. Mit (ii) folgt, dass eine R -lineare Abbildung $g : R \rightarrow Q$ mit $g|_I = f$. Setze:

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ Q & & \end{array}$$

$$\psi' : L' \oplus R \rightarrow Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

und

$$\pi : L' \oplus R \rightarrow M, \quad (y, a) \mapsto y + ax$$

welche beide r -Modulhomomorphismen sind. Es ist $\psi'(\ker \pi) = 0$, denn für $(y, a) \in \ker \pi$ ist $y + ax = 0$, also $ax = -y \in L'$, das heißt $a \in I$, also $g(a) = f(a) = \varphi'(ax) = \varphi'(-y) = -\varphi'(y)$ und somit $\psi'(y, a) = \varphi'(y) + g(a) = 0 \Rightarrow \psi'$ induziert R -Modulhomomorphismus

$$L' \oplus R /_{\ker \pi} \rightarrow Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

Außerdem ist

$$L' + Rx = \operatorname{im} \pi \simeq L' \oplus R /_{\ker \pi} \quad \text{via} \quad y + ax \mapsto (y, a)$$

Wir erhalten den Homomorphismus

$$\psi : L' + Rx \rightarrow Q \quad \text{mit} \quad \psi(y + ax) = \varphi'(y) + g(a)$$

für alle $a \in R, y \in L'$, das heißt $\psi|_{L'} = \varphi' \Rightarrow (L', \varphi') \leq (L' + Rx, \psi)$ Wegen (L', φ') maximal folgt dass $L' = L' + Rx \Rightarrow x \in L'$. Somit $M \subseteq L' \subseteq M$, also $M = L'$. ■

Definition 2.6.10. Sei A ein Integritätsbereich (kommutativer nullteilerfreier Ring), M ein A -Modul. M heißt *teilbar* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in A \setminus \{0\}$ ist $aM = M$. \Leftrightarrow Für alle $x \in M, a \in A \setminus \{0\}$ existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$.

Bemerkung 2.6.11. Sei A ein Integritätsbereich, M ein injektiver A -Modul. Dann ist M teilbar.

Beweis. Sei $x \in M, a \in A \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : Aa \rightarrow M, \quad ra \mapsto rx$$

φ ist wohldefiniert, denn: $r_1a = r_2a \Rightarrow (r_1 - r_2)a = 0$ Da A nullteilerfrei ist folgt $r_1 = r_2$. φ ist A -linear, so folgt mit Satz 2.6.9, dass eine A -lineare Abbildung $\psi : A \rightarrow M$ mit $\psi|_{Aa} = \varphi$. Setze $y := \psi(1)$, dann ist $x = \varphi(a) = \psi(a) = \psi(a1) = a\psi(1) = ay$. ■

Bemerkung 2.6.12. Sei A ein Hauptidealring, M ein A -Modul. Dann sind äquivalent:

- i) M injektiv
- ii) M teilbar

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) aus 2.6.11

(ii) \Rightarrow (i) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal, $\varphi : I \rightarrow M$ A -linear. Falls $I = 0$, dann wird φ durch die Nullabbildung nach A fortgesetzt. Im Folgenden sein $I \neq 0$. Da A ein Hauptidealring ist, existieren $a \in A, a \neq 0$ mit $I = Aa$. Setze $x := \varphi(a) \Rightarrow \varphi(ra) = r\varphi(a) = rx$ für alle $r \in A$. Wegen (ii) existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$. Setze

$$\psi : A \rightarrow M, \quad r \mapsto ry$$

Dann ist ψ A -linear und $\psi(ra) = ray = rx = \varphi(ra)$ für alle $r \in A$ das heißt $\psi|_{Aa} = \varphi$. Dann folgt aus 6.9 M ist injektiv. ■

Beispiel 2.6.13. a) Sei K ein Körper, V ein K -VR $\Rightarrow V$ ist teilbarer K -Modul, also injektiver K -Modul. Ist $\text{char } K = 0$ dann ist V teilbarer \mathbb{Z} -Modul, also injektiver \mathbb{Z} -Modul.

b) Faktormoduln teilbarer \mathbb{Z} -Moduln sind teilbar, somit sind Faktormoduln injektiver \mathbb{Z} -Moduln wieder injektive \mathbb{Z} -Moduln.

c) Nach (a) sind \mathbb{Q}, \mathbb{R} injektive \mathbb{Z} -Moduln, nach (b) also auch $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Ziel injektive R -Moduln sind direkte Faktoren von kofreien R -Moduln

Anmerkung. M ein \mathbb{Z} -Modul. Dann ist $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ via $(a\varphi)(r) = \varphi(ra)$ ein R -Modul. (beachte: $b(a\varphi)(r) = (a\varphi)(rb) = \varphi(rba) = ((ba)\varphi)(r)$)

Bemerkung 2.6.14. Sei M ein injektiver \mathbb{Z} -Modul. Dann ist $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ ein injektiver R -Modul. Insbesondere ist $R^v := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein injektiver R -Modul.

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, $\varphi : I \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ R -linear. Nach 2.6.9, genügt es zu zeigen: φ lässt sich auf R fortsetzen. Setze

$$f : I \rightarrow M, \quad a \mapsto \varphi(a)(1)$$

Dann ist f ist \mathbb{Z} -linear und für $r \in R, a \in I$ gilt: $f(ra) = \varphi(ra)(1) = (r\varphi(a))(1) = \varphi(a)(1r) = \varphi(a)(r)$. Da M ein injektiver \mathbb{Z} -Modul, existiert eine \mathbb{Z} -lineare Abbildung $g : R \rightarrow M$ mit $g|_I = f$. Wir setzen $\psi : R \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M), a \mapsto ag$. ψ ist R -linear, und für $a \in I, r \in R$ ist $\psi(a)(r) = (ag)(r) = g(ra) = f(ra) = \varphi(a)(r)$, das heißt $\psi|_I = \varphi$. ■

Definition 2.6.15. Sei M ein R -Modul. M heißt *kofrei* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert eine Menge I mit $M \simeq (R^v)^I = \prod_{i \in I} R^v$.

Bemerkung 2.6.16. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt:

- a) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist ein projektiver R -Modul $\Leftrightarrow M_i$ projektive R -Moduln für alle $i \in I$.
- b) $\prod_{i \in I} M_i$ ist ein injektiver R -Modul $\Leftrightarrow M_i$ ist injektiver R -Modul für alle $i \in I$.

Beweis. Übungsaufgaben. ■

Satz 2.6.17. Sei M ein kofreier R -Modul. dann ist M ein injektiver R -Modul.

Beweis. folgt direkt aus 2.6.16 und 2.6.14 ■

Bemerkung 2.6.18. Sei M ein R -Modul, $m \in M, m \neq 0$. Dann existiert ein R -Modulhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow R^v$ mit $\varphi(m) \neq 0$.

Beweis. 1. Die Abbildung

$$\theta : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R^v), \psi \mapsto (m \mapsto \varphi_m : R \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, r \mapsto \psi(rm))$$

ist ein Homomorphismus von \mathbb{Z} -Moduln (tatsächlich sogar ein Isomorphismus).

- 2. Ist $\psi : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein \mathbb{Z} -Modulhomomorphismus mit $\psi(m) \neq 0$ dann ist $\theta(\psi)(m) = \varphi_m \neq 0$ wegen $\varphi_m(1) = \psi(m) \neq 0$, das heißt: $\theta(\psi) : M \rightarrow R^v$ ist ein R -Modulhomomorphismus mit $\theta(\psi)(m) \neq 0$
- 3. Nach 2 genügt es zu zeigen: Es existiert ein \mathbb{Z} -Modulhomomorphismus $\psi : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$. Setze $N := \langle m \rangle_{\mathbb{Z}}$.
1. Fall: $N \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : N &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\psi}(m) \neq 0$ und, da \mathbb{Q}/\mathbb{Z} injektiver \mathbb{Z} -Modul ist, setzt sich $\tilde{\psi}$ auf M fort.

2. Fall: $N \cong \mathbb{Z}$. Setze dann

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : N &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\psi}(m) \neq 0$, also weiter wie in Fall 1. ■

Satz 2.6.19. *Jeder R -Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven, R -Moduls.*

Beweis. Sei $0 \neq M$ ein R -Modul. Nach 6.18 existiert zu jedem $m \in M$ ein R -Modulhomomorphismus $\varphi_m : M \rightarrow R^v$ mit $\varphi_m(m) \neq 0$. Wir setzen

$$f : M \longrightarrow \prod_{m \in M \setminus \{0\}} R^v, \quad x \mapsto ((\varphi_m(x))_{m \in M \setminus \{0\}})$$

Dann gilt

- f ist ein R -Modulhomomorphismus
- f ist injektiv, denn: Sei $x \in M$ mit $f(x) = 0$. Dann ist $\varphi_m(x) = 0$ für alle $m \in M \setminus \{0\}$. Wäre $x \neq 0$, dann wäre $\varphi_x(x) = 0$, Widerspruch! ■

Folgerung 2.6.20. *Sei Q ein R -Modul. Dann sind äquivalent:*

- Q ist injektiv
- Es gibt einen R -Modul Q' , sodass $Q \times Q'$ ein kofreier R -Modul ist (d.h. Q ist direkter Faktor eines kofreien R -Moduls)

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Nach 2.6.19 existiert ein kofreier R -Modul N , sodass Q Untermodul von N ist. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow N/Q \longrightarrow 0$$

spaltet nach 2.6.7, da Q injektiv ist, d.h. $N \cong Q \oplus N/Q = Q \times N/Q$

$ii) \Rightarrow i)$ Ist $Q \times Q'$ kofrei, dann ist nach 6.17 $Q \times Q'$ injektiv und nach 6.16 Q injektiv. ■

2.7 Komplexe

In diesem Abschnitt sei \mathcal{A} stets eine abelsche Kategorie

Definition 2.7.1. Ein *Komplex* A^\bullet in \mathcal{A} ist eine Familie $(A^i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Objekten $A^i \in \text{Ob } \mathcal{A}$ und Morphismen $d_i : A^i \rightarrow A^{i+1}$ (*Differentiale*)

$$\dots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \longrightarrow \dots$$

sodass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Ein *Komplexhomomorphismus* $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ in einem Komplex B^\bullet in \mathcal{A} ist eine Familie $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \rightarrow B^i$, sodass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots \\ & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} \\ \dots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & B^i & \xrightarrow{d_i} & B^{i+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

kommutiert.

Anmerkung. Komplexe in \mathcal{A} zusammen mit Komplexhomomorphismen bilden eine abelsche Kategorie (Kerne, Kokerne, endliche Produkte separat an jeder Stelle bilden).

Bemerkung 2.7.2. Sei A^\bullet ein Komplex in \mathcal{A} . Dann induzieren die Differentiale in natürlicher Weise Monomorphismen $\text{im } d_{i-1} \longrightarrow \ker d_i$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} \\ q_{i-1} \downarrow & & k_{i-1} \uparrow & \swarrow j_i & \\ \text{coim } d_{i-1} & \xrightarrow{\bar{d}_{i-1}} & \text{im } d_{i-1} & \xrightarrow{l_i} & \ker d_i \end{array}$$

(Es ist k_{i-1} ein Mono-, q_{i-1} ein Epi- und der durch den Homomorphiesatz induzierte Pfeil \bar{d}_{i-1} ein Isomorphismus). Damit ist $0 = d_i \circ d_{i-1} = d_i \circ k_{i-1} \circ \bar{d}_{i-1} \circ q_{i-1}$ und, da q_{i-1} Epi, d_{i-1} Iso, folgt $d_i \circ k_{i-1} = 0$. Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns existiert ein $l_i : \text{im } d_{i-1} \rightarrow \ker d_i$ mit $k_{i-1} = j_i \circ l_i$. Nun ist l_i ein Monomorphismus, da $k_{i-1} = j_i \circ l_i$ Monomorphismus. ■

Definition 2.7.3. Sei A^\bullet ein Komplex in \mathcal{A} .

$$\mathcal{Z}^i(A^\bullet) := \ker d_i \quad (i\text{-Kozykel})$$

$$\mathcal{B}^i(A^\bullet) := \operatorname{im} d_{i-1} \quad (i\text{-Koränder})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^i(A^\bullet) &:= \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \rightarrow \ker d_i) \\ &= \operatorname{coker}(\mathcal{B}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{Z}^i(A^\bullet)) \end{aligned} \quad (i\text{-te Kohomologie})$$

Anmerkung. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ induziert Homomorphismen

$$\mathcal{Z}^i(f) : \mathcal{Z}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{Z}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{B}^i(f) : \mathcal{B}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{B}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{H}^i(f) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet)$$

Satz 2.7.4 (Lange exakte Kohomologiefolge). Sei

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Komplexen in \mathcal{A} (d.h. die Morphismen sind Komplexhomomorphismen und für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist

$$0 \longrightarrow A^i \longrightarrow B^i \longrightarrow C^i \longrightarrow 0$$

exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet) \rightarrow \dots$$

Beweis (Beweisskizze). 1. M^\bullet ein Komplex in \mathcal{A} . Setze

$$Q^i(M^\bullet) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \rightarrow M^i) \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

Dann induzieren die Differentiale natürliche Morphismen

$$\bar{d}_i : Q^i(M^\bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^{i+1}(M^\bullet)$$

mit $\ker \bar{d}_i = \mathcal{H}^i(M^\bullet)$ und $\operatorname{coker}(\bar{d}_i) = \mathcal{H}^{i+1}(M^\bullet)$

2. Wir erhalten für $i \in \mathbb{Z}$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} Q^i(A^\bullet) & \longrightarrow & Q^i(B^\bullet) & \longrightarrow & Q^i(C^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \bar{d}_i & & \downarrow \bar{d}_i & & \downarrow \bar{d}_i & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{i+1}(A^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{i+1}(B^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{i+1}(C^\bullet) \end{array}$$

3. Das Schlangenlemma liefert nach 1. für jedes $i \in \mathbb{Z}$ eine exakte Folge

$$\mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet)$$

Diese setzen sich zu einer langen exakten Folge aus der Behauptung zusammen.

■

Definition 2.7.5. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Eine *injektive Auflöser* von A ist ein Komplex

$$I^\bullet : I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

bestehend aus injektiven Objekten I^i aus \mathcal{A} mit $I^i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einem Morphismus $\varepsilon : A \rightarrow I^0$, so dass der *augmentierte Komplex*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist (Notation: $A \rightarrow I^\bullet$ injektive Auflöser von A).

Eine *projektive Auflöser* von A ist eine injektive Auflöser von A in \mathcal{A}^{op} , d.h. ein Komplex

$$P^\bullet : \dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0$$

aus projektiven Objekten P^i aus \mathcal{A} mit $P^i = 0$ für $i > 0$ zusammen mit einem Morphismus $\varepsilon : P^0 \rightarrow A$, sodass der augmentierte Komplex

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

exakt ist (Notation: $P^\bullet \rightarrow A$ projektive Auflöser).

Anmerkung. Man schreibt in obiger Situation auch $P_i = P^{-i}$ und $\mathcal{H}_i(-) = \mathcal{H}^{-i}(-)$.

Definition 2.7.6. \mathcal{A} hat

genügend viele Injektive $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jedes $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ existiert ein injektives Objekt $I \in \text{Ob } \mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $\iota : A \rightarrow I$.

genügend viele Projektive $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ \mathcal{A}^{op} hat genügend viele Injektive

Beispiel 2.7.7. $R\text{-Mod}$ hat nach 6.19 genügend viele Injektive und nach 6.4 genügend viele Projektive.

Bemerkung 2.7.8. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Dann gilt:

a) Hat \mathcal{A} genügend viele Injektive, dann hat A eine injektive Auflöser

b) Hat \mathcal{A} genügend viele Projektive, dann hat A eine projektive Auflösung

Beweis. Es genüge a) zu zeigen, b) folgt dual.

1. Die Situation ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{d_0} & I^1 & \xrightarrow{d_1} & I^2 \\
 & & & & \searrow \pi_0 & & \swarrow \iota_0 & & \searrow \pi_1 & & \swarrow \iota_1 \\
 & & & & & & M^0 & & & & M^1
 \end{array}$$

Nach Voraussetzung existiert ein injektives Objekt $I^0 \in \text{Ob } \mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $\varepsilon : A \rightarrow I^0$. Sei $\text{coker } \varepsilon = (M^0, \pi_0)$. Es existiert ein injektives Objekt I^1 und ein Monomorphismus $\iota_0 : M^0 \hookrightarrow I^1$. Iteriere dieses Verfahren: $\text{coker}(d_0) = (M^1, \pi_1)$, es existiert ein injektives Objekt I^2 und ein Monomorphismus $\iota_1 : M^1 \hookrightarrow I^2$, setze $d_1 := \iota_1 \circ \pi_1$.

2. Exaktheit: bei I^0 gilt:

$$\text{im } \varepsilon = \ker(\text{coker } \varepsilon) = \ker \pi_0 \stackrel{\iota_0}{\underset{\text{Mono}}{=}} \ker(\iota_0 \circ \pi_0) = \ker d_0$$

analog bei den anderen Stellen ■

Satz 2.7.9 (Hufeisenlemma). \mathcal{A} habe genügend viele Injektive. Gegeben sei ein Diagramm (Schwarz)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & I''^0 & \longrightarrow & I''^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

in \mathcal{A} , wobei die linke Spalte exakt sei, $A' \rightarrow I'^{\bullet}$ eine injektive Auflösung von A' , $A'' \rightarrow I''^{\bullet}$ eine injektive Auflösung von A'' . Dann lässt sich das Diagramm so zu einem kommutativen Diagramm ergänzen (rot), dass $A \rightarrow I^{\bullet}$ eine injektive Auflösung von A ist und die Spalten alle exakt sind.

Beweis. in den Standardwerken über homologische Algebra (zumindest für $R\text{-Mod}$). Für den Beweis einer Verallgemeinerung in Kontext abelsche Kategorien siehe Stacks-Project 013P. ■

Frage: in welchem Verhältnis stehen zwei injektive Auflösungen eines Objekts?

Definition 2.7.10. Seien A^\bullet, B^\bullet Komplexe in \mathcal{A} , $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ Komplexhomomorphismen. f, g heißen *homotop* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ es existieren Homomorphismen $s^i : A^{i+1} \rightarrow B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s^i \circ d_i$$

(Notation: $f \sim g$)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1} & \longrightarrow & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & B^i & \longrightarrow & B^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

(Red arrows in the original image represent $s^{i-1} : A^i \rightarrow B^{i-1}$ and $s^i : A^{i+1} \rightarrow B^i$.)

Anmerkung. • Homotopie von Komplexhomomorphismen ist eine Äquivalenzrelation.

- Sind $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$ und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von \mathcal{A} in eine abelsche Kategorie \mathcal{B} , dann erhalten wir einen Komplexhomomorphismus $Ff, Fg : FA^\bullet \rightarrow FB^\bullet$ mit $Ff \sim Fg$.

Bemerkung 2.7.11. Seien A^\bullet, B^\bullet Komplexe in \mathcal{A} , $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$. Dann gilt: $\mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet)$

Beweis. Wir setzen $h := f - g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$. Offenbar genügt es zu zeigen: $\mathcal{H}^i(h) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

1. Der Morphismus $\mathcal{Z}^i(h) : \mathcal{Z}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{Z}^i B^\bullet$ faktorisiert über $\mathcal{B}^i B^\bullet$, denn:

$$\begin{array}{ccccc} \ker d_i = \mathcal{Z}^i A^\bullet & \xrightarrow{\alpha_i} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} \\ & & \downarrow h_i & & \downarrow h_{i+1} \\ \ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet & \xrightarrow{\beta_i} & B^i & \xrightarrow{d_i} & B^{i+1} \\ & \nearrow \delta_i & \searrow \gamma_i & & \\ \text{im } d_{i-1} = \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i & & & & \text{coker } d_{i-1} \end{array}$$

(Blue dashed arrow $\mathcal{Z}^i h$ from $\ker d_i = \mathcal{Z}^i A^\bullet$ to $\ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet$. Red dashed arrow λ_i from $\ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet$ to $\text{im } d_{i-1} = \mathcal{B}^i B^\bullet$.)

$\mathcal{Z}^i(h)$ ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\mathcal{Z}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{Z}^i B^\bullet$ mit $h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$ (beachte: $d_i \circ h_i \circ \alpha_i = h_{i+1} \circ d_i \circ \alpha_i = 0$). Wegen $f \sim g$ existiert

eine Familie $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $s_i : A^{i+1} \rightarrow B^i$ mit $h_i = f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s_i \circ d_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$h_i \circ \alpha_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i + s_i \circ \underbrace{d_i \circ \alpha_i}_{=0} = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i$$

Wegen $\gamma_i \circ d_{i-1} = 0$ ist $\overbrace{\gamma_i \circ d_{i-1} \circ s^{i-1}}^{=0} \circ \alpha_i = 0$, also $\gamma_i \circ h_i \alpha_i = 0$. Aus der Univesellen Eigenschaft des Kerns von γ_i , existiert ein eindeutig bestimmtes $\lambda_i : \mathcal{Z}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i$ mit $h_i \circ \alpha_i = \delta_i \circ \lambda_i$ und mit $\delta_i = \beta_i \circ \theta_i \Rightarrow \beta_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$ da β_i ein Monomorphismus folgt: $\theta_i \circ \lambda_i = \mathcal{Z}^i h$.

2. $\mathcal{H}^i h = 0$, denn betrachte die Situation:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}^i A^\bullet & \xrightarrow{\theta'_i} & \mathcal{Z}^i A^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'_i} & \mathcal{H}^i A^\bullet = \text{coker } \theta'_i \\ \downarrow \mathcal{B}^i h & \swarrow \lambda_i & \downarrow \mathcal{Z}^i h & & \downarrow \mathcal{H}^i h \\ \mathcal{B}^i B^\bullet & \xrightarrow{\theta_i} & \mathcal{Z}^i B^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_i} & \mathcal{H}^i B^\bullet = \text{coker } \theta_i \end{array}$$

$\mathcal{H}^i h$ ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\mathcal{H}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^i B^\bullet$ mit $\mathcal{H}^i h \circ \varepsilon'_i = \varepsilon_i \circ \mathcal{Z}^i h = \varepsilon_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = 0$, denn $\varepsilon_i \circ \theta_i = 0$, somit $\mathcal{H}^i h = 0$. ■

Definition 2.7.12. Seien A^\bullet, B^\bullet Komplexe in \mathcal{A} , $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ Komplexhomomorphismen. f heißt

Homotopieäquivalenz $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ es existiert ein $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$.

Quasiisomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{H}^i f : \mathcal{H}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^i B^\bullet$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 2.7.13. Seien A^\bullet, B^\bullet Komplexe in \mathcal{A} , $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ Homotopieäquivalenz. Dann ist f ein Quasiisomorphismus.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$. Dann ist

$$\mathcal{H}^i(g) \circ \mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g \circ f) = \mathcal{H}^i(id_{A^\bullet}) = id_{\mathcal{H}^i A^\bullet}$$

analog: $\mathcal{H}^i(f) \circ \mathcal{H}^i(g) = id_{\mathcal{H}^i B^\bullet}$. Also ist $\mathcal{H}^i(f)$ ein Isomorphismus. ■

Anmerkung. Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz.

Satz 2.7.14. Gegeben sei folgendes Diagramm von Komplexen in \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \longrightarrow & E^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

sodass gilt:

- die obere Zeile ist exakt
- Alle $I^i, i \geq 0$, sind injektiv.

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus $f : E^\bullet \rightarrow I^\bullet$, der φ fortsetzt, in dem Sinne, dass $f_0 \circ \varepsilon = \eta \circ \varphi$ ist. Ist $g : E^\bullet \rightarrow I^\bullet$ ein weiterer solcher Komplexhomomorphismus, dann ist $g \sim f$.

Beweis (Beweisskizze für die Existenz von f): 1. Wir konstruieren zunächst f_0 .
Situation:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 \\ B & \xrightarrow{\eta} & I^0 \end{array}$$

Da I^0 injektiv und ε ein Monomorphismus, existiert ein $f_0 : E^0 \rightarrow I^0$, sodass $\eta \circ \varphi = f_0 \circ \varepsilon$.

2. Konstruktion von f_1 : Situation:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d_0} & E^1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 & \searrow \pi_0 & \downarrow f_1 \\ & & & \text{coker } \varepsilon & \\ & & & \downarrow \tilde{f}_0 & \\ & & & \text{coker } \eta & \\ & \nearrow \pi_0' & & \downarrow \iota_0' & \\ B & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \xrightarrow{d_0'} & I^1 \end{array}$$

Additional dashed arrows in the original diagram: $\iota_0 : \text{coker } \varepsilon \rightarrow E^1$ (blue), $\iota_0' : \text{coker } \eta \rightarrow I^1$ (blue).

Wegen der Kommutativität vom linken Rechteck, also

$$\pi_0' \circ f_0 \circ \varepsilon = \pi_0' \circ \eta \circ \varphi = 0$$

existiert ein eindeutig bestimmtes $\tilde{f}_0 : \text{coker } \varepsilon \rightarrow \text{coker } \eta$, sodass das linke Trapez kommutiert. Da $d_0 \circ \varepsilon = 0$ und $d'_0 \circ \eta = 0$, existieren nach der Universellen Eigenschaft des Kokerns eindeutig bestimmte $\iota_0 : \text{coker } \varepsilon \rightarrow E^1$, $\iota'_0 : \text{coker } \eta \rightarrow I^1$, sodass das obere und untere Dreieck kommutieren.

Behauptung: ι_0 ist ein Monomorphismus, denn:

$$\begin{aligned} \text{coker } \varepsilon &= \text{im } \pi_0 \simeq \text{coim } \pi_0 = \text{coker}(\underbrace{\ker \pi_0}_{=\text{im } \varepsilon}) = \text{coker}(\text{im } \varepsilon) \\ &\simeq \text{coker}(\ker d_0) = \text{coim}(d_0) \simeq \text{im } d_0 \end{aligned}$$

was aus dem Homomorphiesatz und der Exaktheit bei E^0 folgt. Nun verifiziert man, dass

$$\begin{array}{ccc} \text{coker } \varepsilon & \xrightarrow{\sim} & \text{im } d_0 \\ & \searrow \iota_0 & \swarrow \\ & E^1 & \end{array}$$

kommutiert, das heißt, dass ι_0 ein Monomorphismus ist. Da I^1 injektiv und ι_0 ein Monomorphismus, existiert ein $f_1 : E^1 \rightarrow I^1$, sodass auch das rechte Trapez kommutiert. Also ist $f_1 \circ d_0 = d'_0 \circ f_0$.

3. Iteriere das Verfahren. ■

Folgerung 2.7.15. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $\varepsilon : A \rightarrow I^\bullet$, $\eta : A \rightarrow J^\bullet$ injektive Auflösungen von A . Dann existiert eine Homotopieäquivalenz $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ mit $f_0 \circ \varepsilon = \eta$. Diese ist eindeutig bestimmt bis auf Homotopie.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm von Komplexen:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{I}^\bullet : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & & \uparrow \text{id}_A & & \uparrow f_0 & & \uparrow g_0 & & \\ \tilde{J}^\bullet : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\eta} & J^0 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

(Vertical arrows from I^0 to J^0 are labeled f_0 (red dashed) and g_0 (blue dashed). Vertical arrows from I^1 to J^1 are labeled f_1 (red dashed) and g_1 (blue dashed).)

mit exakten Zeilen. Nach 2.7.14 existiert ein Komplexhomomorphismus $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$, der id_A fortsetzt und es existiert ein Komplexhomomorphismus $g : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$, der id_A fortsetzt. Dann ist aber auch $g \circ f : I^\bullet \rightarrow I^\bullet$ eine Fortsetzung von id_A , ebenso wie id_{J^\bullet} . Aus der Eindeutigkeit in 2.7.14 ist $g \circ f \sim \text{id}_{I^\bullet}$. Analog ist $f \circ g \sim \text{id}_{J^\bullet}$. Somit folgt, dass f eine Homotopieäquivalenz ist. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 2.7.14. ■

Folgerung 2.7.16. Sei I^\bullet ein exakter Komplex von injektiven Objekten in \mathcal{A} mit $I^i = 0$ für $i \ll 0$. Dann ist $0^\bullet \rightarrow I^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $I^i = 0$ für $i < 0$ (durch Verschiebung des Komplexes) Dann sind $0^\bullet, I^\bullet$ injektive Auflösungen von 0. Aus 2.7.15 folgt: $0^\bullet \rightarrow I^\bullet$ ist eine Homotopieäquivalenz. ■

2.8 Abgeleitete Funktoren

In diesem Abschnitt sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven, \mathcal{B} eine abelsche Kategorie und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor

Bemerkung + Definition 2.8.1. Für $i \in \mathbb{N}_0$ und jedes Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ fixieren wir eine injektive Auflösung $A \rightarrow I^\bullet$ von A und setzen

$$R^i F(A) := \mathcal{H}^i(FI^\bullet)$$

Ist $\varphi : A \rightarrow A'$ ein Morphismus in \mathcal{A} und sind $A \rightarrow I^\bullet$, $A' \rightarrow I'^\bullet$ injektive Auflösungen von A, A' , dann existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Komplexhomomorphismus $f : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$, der φ fortsetzt. Wir setzen

$$R^i F(\varphi) := \mathcal{H}^i(Ff).$$

Auf diese Weise wird $R^i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zu einem additiven Funktor. Wird auf dieselbe Art und Weise mit einer anderen Wahl von injektiven Auflösungen ein Funktor $\hat{R}^i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ konstruiert, dann sind $R^i F(A)$ und $\hat{R}^i F(A)$ kanonisch isomorph für alle $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$, und es gibt eine natürliche Äquivalenz $R^i F \xrightarrow{\sim} \hat{R}^i F$. $R^i F$ heißt der i -te rechtsabgeleitete Funktor

Beweis. • Wohldefiniertheit von $R^i F(\varphi)$: Ist $g : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ eine weitere Fortsetzung von φ , dann ist $f \sim g$ nach 2.7.14 und somit $Ff \sim Fg$. Mit 2.7.11 folgt $\mathcal{H}^i(Ff) = \mathcal{H}^i(Fg)$ für alle $i \geq 0$.

- $R^i F$ ist ein Funktor, denn für $\varphi : A \rightarrow A'$, $\psi : A' \rightarrow A''$ mit Fortsetzungen $f : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$, $g : I'^\bullet \rightarrow I''^\bullet$ auf injektiven Auflösungen $A \rightarrow I^\bullet$, $A' \rightarrow I'^\bullet$, $A'' \rightarrow I''^\bullet$ von A, A', A'' ist $g \circ f : I^\bullet \rightarrow I''^\bullet$ ein Fortsetzung von $\psi \circ \varphi : A \rightarrow A''$, also

$$\begin{aligned} (R^i F)(\psi \circ \varphi) &= \mathcal{H}^i(F(g \circ f)) = \mathcal{H}^i(Fg \circ Ff) = \mathcal{H}^i Fg \circ \mathcal{H}^i Ff \\ &= R^i F(\psi) \circ R^i F(\varphi) \end{aligned}$$

- $R^i F$ ist additiv, denn sind $\varphi : A \rightarrow A'$, $\psi : A \rightarrow A'$ mit Fortsetzungen $f : I \rightarrow I'^\bullet$, $g : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ auf injektiven Auflösungen $A \rightarrow I^\bullet$, $A' \rightarrow I'^\bullet$ von A, A' , so ist $f + g : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ eine Fortsetzung von $\varphi + \psi : A \rightarrow A'$. Der Rest ist klar, da F, \mathcal{H}^i additiv.
- Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösungen im obigen Sinne: Für $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ sei $A \xrightarrow{\varepsilon} I_A^\bullet$ die injektive Auflösung, mit der $R^i F$ berechnet wird und $A \xrightarrow{\eta} J_A^\bullet$ die injektive Auflösung von A , mit der $\hat{R}^i F$ berechnet wird. Nach 2.7.15

existiert eine Homotopieäquivalenz $h_A : I_A^\bullet \rightarrow J_A^\bullet$ existiert mit $h_A^0 \circ \varepsilon = \eta$. Wir definieren

$$t_A^i : R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FI_A^\bullet) \longrightarrow \hat{R}^i F(A) = \mathcal{H}^i(FJ_A^\bullet) \quad \text{mit} \quad t_A^i := \mathcal{H}^i F h_A$$

Dann ist t_A^i nach 2.7.13 ein Isomorphismus, da Fh_A eine Homotopieäquivalenz ist. Durch $t^i = (t_A^i)_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} : R^i F \Rightarrow \hat{R}^i F$ ist eine natürliche Äquivalenz gegeben, denn für alle $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $\varphi : A \rightarrow A'$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A) & \xrightarrow{t_A^i} & \hat{R}^i F(A) \\ \mathcal{H}^i F f_I \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}^i F f_J \\ R^i F(A') & \xrightarrow{t_{A'}^i} & \hat{R}^i F(A') \end{array}$$

(wobei $f_I : I_A^\bullet \rightarrow J_A^\bullet$, $f_J : J_A^\bullet \rightarrow J_{A'}^\bullet$ Fortsetzungen von φ sind), denn $f_J \circ h_A$, $h_{A'} \circ f_I : I_A^\bullet \rightarrow J_{A'}^\bullet$ sind beides Fortsetzungen von $\varphi = \varphi \circ \text{id}_A = \text{id}_{A'} \circ \varphi$, somit $f_J \circ h_A \sim h_{A'} \circ f_I$, also $Ff_J \circ Fh_A \sim Fh_{A'} \circ Ff_I$ und damit $\mathcal{H}^i F f_J \circ t_A^i = t_{A'}^i \circ \mathcal{H}^i F f_I$. ■

Bemerkung 2.8.2. *Es gilt:*

a) $R^0 F = F$

b) *Ist F exakt, dann ist $R^i F = 0$ für alle $i > 0$.*

Beweis. Für $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ist $R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet)$, wobei $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ eine injektive Auflösung von A ist. Wir wissen: Ist $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1$ exakt, dann ist ohnehin $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1$ exakt.

$$FI^\bullet : \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} FI^2 \longrightarrow \dots$$

mit

$$\begin{aligned} R^0 F(A) &= \mathcal{H}^0(FI^\bullet) = \text{coker}(0 \rightarrow \ker Fd_0) = \ker Fd_0 = \text{im } F\varepsilon \\ &= \text{coim } F\varepsilon = FA \end{aligned}$$

Falls F exakt, dann ist

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} \dots$$

exakt, also $R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet) = 0$ für $i > 0$. ■

Satz 2.8.3. Sei $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge in \mathcal{A} . Dann existieren natürliche Morphismen

$$\delta^i : R^i F(A'') \longrightarrow R^{i+1} F(A') \quad \text{für alle } i \geq 0$$

sodass die Folge

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & FA' & \longrightarrow & FA & \longrightarrow & FA'' \\ & & & & & & \\ & & \longrightarrow & R^1 FA' & \longrightarrow & R^1 FA & \longrightarrow R^1 FA'' \\ & & & & & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & \longrightarrow & R^i FA' & \longrightarrow & R^i FA & \longrightarrow R^i FA'' \\ & & & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} FA' & \longrightarrow & R^{i+1} FA & \longrightarrow R^{i+1} FA'' \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

exakt ist. Ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei die untere Zeile exakt ist, so kommutiert für alle $i \geq 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i F(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(B') \end{array}$$

Beweis (Beweisskizze). Nach dem Hufeisenlemma existieren kompatible injektive Auflösungen $A' \rightarrow I'^\bullet$, $A \rightarrow I^\bullet$, $A'' \rightarrow I''^\bullet$ in dem Sinne, dass

$$0 \longrightarrow I'^\bullet \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow I''^\bullet \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Komplexen ist. I^i ist injektiv für alle $i \geq 0$, also spaltet die Folge

$$0 \longrightarrow I^i \longrightarrow I^i \longrightarrow I''^i \longrightarrow 0$$

(wobei Spaltung in abelschen Kategorien analog zu $R\text{-Mod}$ definiert ist und analoge Resultate gelten). Dann ist $I^i = I^i \oplus I''^i$ und, da F additiv, $F(I^i) = F(I^i) \oplus F(I''^i)$, womit

$$0 \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI''^i \longrightarrow 0$$

exakt ist. Insbesondere existiert eine exakte Folge von Komplexen

$$0 \longrightarrow FI'^\bullet \longrightarrow FI^\bullet \longrightarrow FI''^\bullet \longrightarrow 0$$

woraus wir eine lange exakte Kohomologiefolge erhalten, was die Behauptung liefert. ■

Definition 2.8.4. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Dann heißt A *F-azyklisch* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} R^i F(A) = 0$ für alle $i \geq 1$.

Bemerkung 2.8.5. Ist $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ injektiv, dann ist A *F-azyklisch*.

Beweis. Offenbar ist $A \xrightarrow{\text{id}} (A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots)$ eine injektive Auflösung von A . Damit ist

$$R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FA \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots) = 0 \quad \text{für } i \geq 1$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Satz 2.8.6. Sei $A \rightarrow J^\bullet$ eine Auflösung von A durch *F-azyklische* Objekte, d.h. J^\bullet ist ein Komplex mit $J^i = 0$ für $i < 0$ und J^i *F-azyklisch* für $i \geq 0$, sodass der augmentierte Komplex

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^1 \longrightarrow J^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $R^i F(A) \cong \mathcal{H}^i(FJ^\bullet)$ für alle $i \geq 0$.

Beweis. (für $R\text{-Mod}$ in S.Lang “Algebra“) ■

Anmerkung. Die Theorie der Linksableitung rechtsexakter Funktoren lässt sich analog entwickeln: Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven, \mathcal{B} eine abelsche Kategorie, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor. Wir wählen für jedes $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow A$ und setzen

$$L_i F(A) := \mathcal{H}_i(FP_\bullet)$$

Rest analog.

2.9 δ -Funktoren

In Folgenden seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien

Definition 2.9.1. Ein δ -Funktork $H = (H^n)_{n \geq 0}$ ist eine Familie additiver Funktoren $H^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(A)$ für alle $n \geq 0$ und jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, sodass gilt:

(D1) δ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in \mathcal{A} mit exakten Zeilen, dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A') \end{array}$$

in \mathcal{B} für alle $n \geq 0$

(D2) Für jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ in \mathcal{A} ist die lange exakte Folge

$$\dots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \dots$$

exakt in \mathcal{B} .

Beispiel 2.9.2. \mathcal{A} habe genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ linksexakt. Dann ist $H := (R^n F)_{n \geq 0}$ ein δ -Funktork nach 2.8.3

Definition 2.9.3. Sei $H = (H^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein δ -Funktork. H heißt *universell* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jeden δ -Funktork $H' = (H'^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ setzt sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \Rightarrow H'^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus von δ -Funktoren fort, d.h. zu einer Familie $f = (f^n)_{n \geq 0}$ von natürlichen Transformationen $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$ die auf naheliegende Weise mit den δ' verträglich sind.

Bemerkung 2.9.4. Sind F, G universelle δ -Funktoren mit $F^0 = G^0$, dann gibt es eine kanonische natürliche Äquivalenz von δ -Funktoren $F \xrightarrow{\sim} G$.

Beweis. $id : F^0 \Rightarrow G^0$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\Phi : (\Phi_n)_{n \geq 0}, \Phi_n : F_n \Rightarrow G_n$ von δ -Funkoren. $id : G^0 \Rightarrow F^0$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\Psi = (\Psi_n)_{n \geq 0}, \Psi_n : G_n \Rightarrow F_n$ von δ -Funkoren. $\Psi \circ \Phi := (\Psi_n \circ \Phi_n)_{n \geq 0}$ ist eine Fortsetzung von $id : F^0 \Rightarrow F^0$. Aus der Eindeutigkeit in der Universellen Eigenschaft folgt $\Psi \circ \Phi = id_F$. Analog $\Phi \circ \Psi = id_G$ ■

Definition 2.9.5. Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. F heißt *auslöschar* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jedes $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ existiert ein $A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow A'$ mit $F(u) = 0$.

Satz 2.9.6. Sei $H = (H^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein δ -Funktor, sodass H^n auslöschar für alle $n \geq 1$. Dann ist H universell.

Beweis (Beweisskizze). Sei $H' = (H'^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein δ -Funktor, $f^0 : H^0 \Rightarrow H'^0$ eine natürliche Transformation. Wir konstruieren die natürliche Transformation $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$ die mit δ kommutieren, per Induktion nach n . Seien f^0, \dots, f^n bereits konstruiert. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Da H^{n+1} auslöschar, gibt es eine exakte Folge:

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} A' \longrightarrow B \longrightarrow 0$ mit $H^{n+1}(u) = 0$. So erhalten wir Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n A' & \longrightarrow & H^n B & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1} A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H'^n A' & \longrightarrow & H'^n B & \xrightarrow{\delta'} & H'^{n+1} A & & \end{array}$$

konstruiere mit den üblichen Argumenten einen Morphismus $f_A^{n+1} : H^{n+1} A \rightarrow H'^{n+1} A$, der mit den δ 's vertauscht, und so dass $f^{n+1} = (f_A^{n+1})_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} : H^{n+1} \Rightarrow H'^{n+1}$ eine natürliche Transformation ist. ■

Folgerung 2.9.7. Habe \mathcal{A} genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ linksexakter Funktor. Dann ist $(R^n F)_{n \geq 0}$ ein universeller δ -Funktor.

Beweis. Nach 2.9.6 genügt es zu zeigen: $R^n F$ ist auslöschar für alle $n \geq 1$. Sei $n \geq 1, A \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Dann existiert ein injektives Objekt $I \in \text{Ob } \mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow I$. Dann ist

$$R^n F(u) : R^n F(A) \rightarrow R^n F(I) = 0$$

nach 2.8.5 der Nullmorphismus für $n \geq 1$. ■

2.10 Ext und Erweiterungen

Definition 2.10.1. Seien M, N R -Moduln. Wir setzen:

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) := R^n \operatorname{Hom}_R(M, -)(N), \quad \text{für } n \geq 0$$

Explizit: wähle eine injektive Auflösung $N \rightarrow I^\bullet$ von N , dann ist

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) = H^n(\operatorname{Hom}_R(M, I^\bullet))$$

Satz 2.10.2. Seien M, N R -Moduln. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) \simeq R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)(M)$$

für alle $n \geq 0$, insbesondere kann $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ auch über eine projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow M$ von M betrachtet werden via $\operatorname{Ext}_R^n(M, N) = H^n(\operatorname{Hom}_R(P_\bullet, N))$.

Beweis. Sei N fixiert.

1. Die Familie kontravarianter Funktoren $(R^n \operatorname{Hom}_R(-, N))_{n \geq 0}$ ist ein kontravarianter universeller δ -Funktorkomplex mit $R^0 \operatorname{Hom}_R(-, N) = \operatorname{Hom}_R(-, N)$ (analoge Aussage zu 2.9.7). Denn: $(R^n \operatorname{Hom}_R(-, N))_{n \geq 0}$ ist ein kontravarianter δ -Funktorkomplex nach der kontravarianten Version von 2.8.3. Es bleibt noch zu zeigen: $(R^n \operatorname{Hom}_R(N, -))_{n \geq 0}$ ist universell. Dafür genügt es nach 2.9.6 zu zeigen, dass $R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)$ koauflösbar ist für alle $n \geq 1$. Sei M ein R -Modul. Dann existiert ein projektiver R -Modul P und ein Epimorphismus $u : P \rightarrow M$. So erhält man:

$$R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)(u) : R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)(M) \rightarrow R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)(P)$$

P ist $\operatorname{Hom}_R(-, N)$ -acyklisch, da $(\dots 0 \rightarrow 0 \rightarrow P) \xrightarrow{id_P} P$ eine projektive Auflösung von P ist und

$$R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)(P) = H^n(\operatorname{Hom}_R(P, N) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots) = 0$$

für $n \geq 1$ ist. Daraus folgt: $R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)(u) = 0$, das heißt $R^n \operatorname{Hom}_R(-, N)$ ist koauflösbar für $n \geq 1$.

2. Wir setzen:

$$F^n : R\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod},$$

$$M \longmapsto R^n \operatorname{Hom}_R(M, -)(N)$$

$$= H^n(\operatorname{Hom}_R(M, I^\bullet))$$

wobei $N \rightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung von N ist. Dann ist $(F^n)_{n \geq 0}$ ebenfalls ein kontravarianter universeller δ -Funktorkomplex mit $F^0 = \operatorname{Hom}_R(-, N)$, da:

- $(F_n)_{n \geq 0}$ ist ein kontravarianter δ -Funktorkomplex, denn:
 - F^n ist kontravarianter additiver Funktor: klar
 - Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln, so erhält man eine Sequenz von Komplexen:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', I^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, I^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}_R(M', I^\bullet) \longrightarrow 0$$

(beachte: $\text{Hom}_R(-, I)$ exakt für injektive R -Moduln I). Die lange exakte Kohomologiefolge liefert die Behauptung.

- $(F_n)_{n \geq 0}$ ist universell: nach 2.9.6 genügt zu zeigen, dass F_n koauflösbar für alle $n \geq 1$. Sei M ein R -Modul. Dann existiert ein projektiver R -Modul P und ein Epimorphismus $u : P \rightarrow M$. Damit erhält man

$$F^n(u) : F^n(M) = R^n \text{Hom}_R(M, -)(N) \rightarrow R^n \text{Hom}_R(P, -)(N) = F^n(P).$$

Wegen der Projektivität von P ist $\text{Hom}_R(P, -)$ exakt und deshalb ist $R^n \text{Hom}_R(P, -) = 0$ für $n \geq 1$. Daraus folgt $F^n(u) = 0$, das heißt F_n ist koauflösbar für $n \geq 1$. ■

- nach 1. und 2. sind $(R^n \text{Hom}_R(-, N))_{n \geq 0}$ und $(F^n)_{n \geq 0}$ beides kontravariante δ -Funktoren, mit $R^0 \text{Hom}_R(-, N) = \text{Hom}_R(-, N) = F^0$. Mit 2.9.4 folgt, dass es für alle R -Moduln M eine kanonische Isomorphie:

$$R^n \text{Hom}_R(-, N)(M) \simeq F^n(M) = R^n \text{Hom}_R(M, -)(N) = \text{Ext}_R^n(M, N)$$

Satz 2.10.3. Sei A ein Hauptidealring, M, N , seine R -Moduln. Dann gilt: $\text{Ext}_A^n(M, N) = 0$ für alle $n \geq 2$.

Beweis. 1. Wir konstruieren eine injektive Auflösung von N . Es existiert ein injektiver A -Modul I^0 , und ein Monomorphismus $\varepsilon : N \hookrightarrow I^0$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{\quad} & I^1 \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow & \swarrow & \\ & & & & & \text{coker } \varepsilon & \end{array}$$

I^0 injektiv, dann folgt mit 2.6.11 I^0 ist teilbar $\Rightarrow \text{coker } \varepsilon = I^0 / \text{im } \varepsilon$ teilbar, damit folgt aus 2.6.12 und da A ein Hauptidealring ist, dass der $\text{coker } \varepsilon$ injektiv ist. Setze $I^1 := \text{coker } \varepsilon$, dann ist $N \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots$ eine injektive Auflösung von N .

2. Für $n \geq 2$ ist $\text{Ext}_A^n(M, N) = H^n(\text{Hom}_R(M, J^\bullet)) = 0$.

Bemerkung + Definition 2.10.4. Seien M, N R -Moduln.

$\mathcal{E}(M, N) := \{\text{exakte Sequenzen } 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ von } R\text{-Moduln}\}$

Wir definieren auf $\mathcal{E}(M, N)$ eine Relation " \sim " wie folgt:

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0 \quad \sim \quad 0 \rightarrow N \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$$

$\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Homomorphismus $\alpha : E \rightarrow E'$, sodass:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \alpha & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert (nach dem Fünferlemma ist α bereits ein Isomorphismus). " \sim " ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}(M, N)$ und wir setzen:

$$E(M, N) := \mathcal{E}(M, N) / \sim$$

$E(M, N)$ enthält ein ausgezeichnetes Element, die Äquivalenzklasse der spaltenden exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Satz 2.10.5. Seien M, N R -Moduln. Dann gibt es eine Bijektion

$$\Psi : E(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, N).$$

Beweis. Wir fixieren einen projektiven R -Modul P und einen Epimorphismus $\varepsilon : P \twoheadrightarrow M$.

1. Konstruktion von Ψ :

Setze $K := \ker \varepsilon$. Damit erhalten wir eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0, \quad \mu \text{ Inklusion}$$

Durch Anwendung des Hom-Funktors erhalten wir insbesondere eine exakte Folge

$$\text{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{\mu_N^*} \text{Hom}_R(K, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M, N) \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}_R^1(P, N)}_{=0, \text{ da } P \text{ projektiv}}$$

(hierbei ist $\mu_N^* = “|_K”$). Also ist

$$\mathrm{Ext}_R^1(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(K, N) / \underbrace{\ker(\mathrm{Hom}_R(K, N) \rightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, N))}_{=\mathrm{im} \mu_N^*} = \mathrm{coker} \mu_N^*$$

Sei nun $x \in E(M, N)$ die Äquivalenzklasse von

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\psi} & M \longrightarrow 0 \\ & & & & & \nwarrow \varphi & \uparrow \varepsilon \\ & & & & & & P \end{array}$$

Da P projektiv existiert ein Homomorphismus $\varphi : P \rightarrow E$ mit $\psi \circ \varphi = \varepsilon$. Es ist $0 = \varepsilon(K) = \psi(\varphi(K))$, also $\varphi(K) \subseteq \ker \psi = \mathrm{im} \iota$. Setze

$$\delta : K \xrightarrow{\varphi|_K^{\mathrm{im} \iota}} \mathrm{im} \iota \xrightarrow[\sim]{(\iota|_{\mathrm{im} \iota})^{-1}} N, \quad \text{insbesondere } \iota \circ \delta = \varphi \circ \mu$$

Wir setzen

$$\Psi(x) := \text{Bild von } \delta \text{ in } \mathrm{coker}(\mu_N^*) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, N)$$

2. Ψ ist wohldefiniert, d.h. Ψ ist unabhängig von der Wahl eines Vertreters (und von der Wahl von φ). Sei dazu

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0 \quad \sim \quad 0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota'} E' \xrightarrow{\psi'} M \rightarrow 0$$

Daraus erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta' & & \downarrow \varphi' & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota'} & E' & \xrightarrow{\psi'} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\psi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \delta & & \uparrow \varphi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mittels $\tilde{\delta} := \delta'$ und $\tilde{\varphi} := \alpha \circ \varphi'$ liefert dies ein weiteres Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{\delta} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\psi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \delta & & \uparrow \varphi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wegen $\psi \circ \tilde{\varphi} = \varepsilon$, $\psi \circ \varphi = \varepsilon$, folgt $\psi \circ (\tilde{\varphi} - \varphi) = 0$, d.h. $\text{im}(\tilde{\varphi} - \varphi) \subseteq \ker \psi = \text{im } \iota$.
Setze

$$\gamma : P \xrightarrow{(\tilde{\varphi} - \varphi)|^{\text{im } \iota}} \text{im } \iota \xrightarrow{(\psi|_{\text{im } \iota})^{-1}} N$$

dann ist $\mu_N^*(\gamma) = \gamma|_K = \tilde{\delta} - \delta = \delta' - \delta$, also $\delta' = \delta - \mu_N^*(\gamma)$, d.h. die Bilder von δ, δ' in $\text{coker } \mu_N^*$ stimmen überein.

3. Wir konstruieren eine zu Ψ inverse Abbildung $\Phi : \text{Ext}_R^1(M, N) \rightarrow E(M, N)$.
Sei $y \in \text{Ext}_R^1(M, N) \cong \text{coker } \mu_N^*$, $\varphi : K \rightarrow N$ ein Vertreter von y . Setze

$$L_\varphi := \{(-\varphi(k), \mu(k)) \mid k \in K\}, \quad E := N \times P / L_\varphi$$

und

$$\begin{aligned} \iota : N &\longrightarrow E, & n &\mapsto (n, 0) + L_\varphi \\ \psi : E &\longrightarrow M, & (n, p) + L_\varphi &\mapsto \varepsilon(p) \\ \sigma : P &\longrightarrow E, & p &\mapsto (0, p) + L_\varphi \end{aligned}$$

Erhalte damit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\psi} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

denn:

- ψ ist wohldefiniert wegen $\varepsilon \circ \mu = 0$
- Für $k \in K$ ist

$$(\iota \circ \varphi)(k) = (\varphi(k), 0) + L_\varphi = (0, \mu(k)) + L_\varphi = \sigma(\mu(k))$$

und für $p \in P$ ist

$$(\psi \circ \sigma)(p) = \psi((0, p) + L_\varphi) = \varepsilon(p)$$

- ι ist injektiv, denn sei $n \in N$ mit $(n, 0) + L_\varphi = L_\varphi$, d.h. es existiert ein $k \in K$ mit $(n, 0) = (-\varphi(k), \mu(k))$, also $\mu(k) = 0$, woraus $k = 0$ und damit $n = -\varphi(k) = 0$ folgt.
- ψ ist surjektiv, da ε surjektiv
- $\text{im } \iota = \ker \psi$:
“ \subseteq “ $(\psi \circ \iota)(u) = \psi((n, 0) + L_\varphi) = \varepsilon(0) = 0$

“ \supseteq “ Sei $z = (n, p) + L_\varphi \subseteq \ker \psi$, also $\varepsilon(p) = 0$. Damit existiert ein $k \in K$ mit $p = \mu(k)$, das heißt

$$\begin{aligned} (n, p) + L_\varphi &= ((n, p) + L_\varphi) + (-\varphi(-k), \mu(-k)) + L_\varphi \\ &= (n + \varphi(k), 0) + L_\varphi = \iota(n + p(k)) \end{aligned}$$

Setze

$$\Phi := \text{Restklasse von } 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0 \quad \text{in } E$$

4. Nachrechnen, dass Φ wohldefiniert und Φ, Ψ invers zu einander sind (Übung)

Fertig. ■

Anmerkung. Das im Beweis konstruierte Ψ ist unabhängig von der Wahl $\varepsilon : P \twoheadrightarrow M$ und bildet die Klasse der spaltenden Erweiterungen auf das Nullelement in $\text{Ext}_R^1(M, N)$ ab.

3 Kommutative Algebra

In diesem Kapitel sei A stets ein kommutativer Ring (mit Eins)

3.11 Grundlagen

Definition 3.11.1. A heißt *lokal* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ A besitzt genau ein maximales Ideal \mathfrak{m} . In diesem Fall heißt $k = A/\mathfrak{m}$ der *Restklassenkörper* von A .

Bemerkung 3.11.2. Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dann sind äquivalent:

- i) A ist lokal mit einem maximalen Ideal \mathfrak{m}
- ii) $A \setminus \mathfrak{m} \subseteq A^*$
- iii) $A \setminus \mathfrak{m} = A^*$
- iv) $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$

Beweis. i) \Rightarrow ii) Sei $x \in A \setminus \mathfrak{m}$. Falls $x \notin A^*$, dann existiert nach Algebra 1 ein maximales Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} \subseteq A$ mit $x \in \tilde{\mathfrak{m}}$. Insbesondere ist $\tilde{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{m}$, d.h. A ist nicht lokal.

ii) \Rightarrow i) Es gelte $A \setminus \mathfrak{m} \subseteq A^*$. Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{a} \cap A^* = \emptyset$, also $\mathfrak{a} \cap (A \setminus \mathfrak{m}) = \emptyset$. Damit ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Somit ist \mathfrak{m} das einzige maximale Ideal in A .

ii) \Rightarrow iii) klar: $x \in A^* \Rightarrow x \in A \setminus \mathfrak{m}$.

iii) \Rightarrow iv) Sei $x \in 1 + \mathfrak{m}$. Falls $x \in \mathfrak{m}$, dann ist $1 \in \mathfrak{m}$, Widerspruch! Also $x \in A \setminus \mathfrak{m} \stackrel{\text{iii)}}{=} A^*$.

iv) \Rightarrow ii) Es gelte $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$. Sei $x \in A \setminus \mathfrak{m}$. Dann ist $Ax + \mathfrak{m}$ ein Ideal mit $Ax + \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}$, also $Ax + \mathfrak{m} = (1)$. Damit existiert ein $a \in A$, $y \in \mathfrak{m}$ mit $ax + y = 1$, also $ax = 1 - y \in 1 + \mathfrak{m} \subseteq A^* \Rightarrow x \in A^*$. ■

Definition 3.11.3. Sei $x \in A$. x heißt *nilpotent* $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$.

Anmerkung. Ist $A \neq 0$, dann ist jedes nilpotentes Element ein Nullteiler, die Umkehrung ist im Allgemeinen jedoch falsch.

Bemerkung + Definition 3.11.4.

$$\mathfrak{N}(A) := \{x \in A \mid x \text{ ist nilpotent}\}$$

ist ein Ideal in A , das *Nilradikal* in A . Der Ring $A/\mathfrak{N}(A)$ hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.

Beweis. 1. $\mathfrak{N}(A)$ ist ein Ideal:

- $0 \in \mathfrak{N}(A)$
- Seien $x, y \in \mathfrak{N}(A)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ und $y^n = 0$, womit $(x + y)^{2n-1} = 0$ (aus der binomischen Formel) folgt. Damit ist $x + y \in \mathfrak{N}(A)$.
- Sei $x \in \mathfrak{N}(A)$ $a \in A$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$, also $a^n x^n = (ax)^n = 0$, womit $ax \in \mathfrak{N}(A)$ gilt.

2. Sei $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}(A)$ nilpotent. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\bar{x}^n = 0$, also $x^n \in \mathfrak{N}(A)$, also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(x^n)^m = 0$, also $x^{nm} = 0$, woraus $x \in \mathfrak{N}(A)$, also $\bar{x} = 0$ folgt.

Damit folgt die Aussage ■

Satz 3.11.5. *Es gilt*

$$\mathfrak{N}(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{N}'(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}'(A)$.

“ \subseteq “ Sei $x \in \mathfrak{N}(A)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist dann $x^n \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$. Damit ist auch $x \in \mathfrak{N}'(A)$.

“ \supseteq “ Angenommen es existiert ein $x \in \mathfrak{N}'(A) \setminus \mathfrak{N}(A)$. Dann gilt $x^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\Sigma := \{\mathfrak{a} \in A \text{ Ideal} \mid x^n \notin \mathfrak{a} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Dann ist Σ eine bezüglich Inklusion induktiv geordnete Menge $\neq \emptyset$ (Standardargument mit \cup). Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element \mathfrak{p} in Σ . Diese \mathfrak{p} ist ein Primideal, denn: Seien $s, t \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p} \subsetneq As + \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subsetneq At + \mathfrak{p}$. Also ist $as + \mathfrak{p}, At + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Damit existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x^m \in As + \mathfrak{p}, x^n \in At + \mathfrak{p}$. Also liegt $x^{n+m} \in Ast + \mathfrak{p}$, weshalb $Ast + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Falls $st \in \mathfrak{p}$, dann wäre $Ast + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \in \Sigma$, Widerspruch! Also ist $st \notin \mathfrak{p}$, also ist \mathfrak{p} ein Primideal. Wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ folgt $x \notin \mathfrak{p}$, also $x \notin \mathfrak{N}'(A)$. Widerspruch! ■

Bemerkung 3.11.6. *Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale in A , $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.*

Beweis. Zeigen per Induktion nach n : $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.

$n=1$: trivial

$n > 1$: Sei $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$ mit Induktionsvoraussetzung folgt: $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$ für alle $i = 1, \dots, n \Rightarrow$ Für alle $i = 1, \dots, n$ existiert ein $x_i \in \mathfrak{a}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ für $j \neq i$

1. Fall: Es existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_i$. Dann $x \notin \bigcup_{j=0}^n \mathfrak{p}_j$, fertig.
 2. Fall: $x_i \in \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Setze $y := \sum_{j=1}^n x_1 \cdot \dots \cdot x_{j-1} \cdot x_{j+1} \cdot \dots \cdot x_n$ dann ist $y \in \mathfrak{a}, y \notin \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ("Alle Summanden bis auf einen in \mathfrak{p}_i "). Also $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$. ■

Bemerkung 3.11.7. Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale, \mathfrak{p} ein Primideal in A mit $\bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$, dann existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{p}$.

Beweis. Annahme: für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\mathfrak{a}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$. \Rightarrow Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert ein $x_i \in \mathfrak{a}_i, x_i \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \underbrace{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}_{\notin \mathfrak{p}, \text{ da } \mathfrak{p} \text{ Primideal}} \in \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$. (Widerspruch)

Sei nun $y = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \Rightarrow$ Es existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$.
 $\Rightarrow \mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow y = \mathfrak{a}_j$. ■

Bemerkung + Definition 3.11.8. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale, $a \in A$.

$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} := \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ heißt *Idealquotient* \mathfrak{a} durch \mathfrak{b} . $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist ein Ideal in A .

$\text{ann}(\mathfrak{a}) := (0) : \mathfrak{a} = \{x \in A \mid x\mathfrak{a} = 0\}$ heißt der *Annulator* von \mathfrak{a} .

$\text{ann}(a) := \text{ann}((a)) = \{x \in A \mid xa = 0\}$.

Anmerkung. • $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c} \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$

• Die Menge der Nullteiler von A ist gegeben durch $\bigcup_{x \in A \setminus 0} \text{ann}(x)$

Beispiel 3.11.9. $A = \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0) \Rightarrow (m) : (n) = (\frac{m}{\text{ggT}(m, n)})$.

Definition 3.11.10. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \mid \text{Es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\}$ heißt das *Radikal* von \mathfrak{a} .

Anmerkung. • $\sqrt{(0)} = \mathfrak{N}(A)$

• Ist $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion, dann ist:

$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in A \mid \text{Es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\} = \{x \in A \mid \pi(x) \in \mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})\}$

$$= \pi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{a} \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}\right) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}$$

Insbesondere ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal.

Definition 3.11.11. Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideale.

$\mathfrak{a}^e := Bf(\mathfrak{a}) = \{\sum_{endl.} b_i f(a_i) | b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a}\}$ heißt die *Erweiterung* von \mathfrak{a} auf B .

$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$ heißt die *Kontraktion* von \mathfrak{b} auf A .

Anmerkung. • \mathfrak{a}^e, f^c sind Ideale in B bzw. in A .

- Wir können f faktorisieren in $A \xrightarrow{p} \text{im } f \xhookrightarrow{\iota} B$. Die Situation für p ist einfach die für ι ist kompliziert.
- $\mathfrak{q} \in B$ Primideal $\Rightarrow \mathfrak{q}^c \subseteq A$ Primideal wegen $A/f^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow \underbrace{B/\mathfrak{q}}_{\text{nullteilerfrei}}$
(beachte $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^c$)
- Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, dann ist $\mathfrak{p}^e \subseteq B$ im Allgemeinen kein Primideal. (Übung: p Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod{4}$. Unter $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ ist $(p)^e$ ein Produkt zweier verschiedener Primideale.)

Bemerkung 3.11.12. Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal. Dann gilt:

- $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$
- $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$
- $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$
- $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$

Beweis. (a),(c) klar.

(b) $\mathfrak{a}^e \subseteq (\mathfrak{a}^{ec})^e, (\mathfrak{a}^e)^{ce} \subseteq \mathfrak{a}^e$

(d) analog. ■

Satz 3.11.13. Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus.

$$C := \{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} \mid \mathfrak{a} \text{ ist Kontraktion eines Ideals aus } B\}$$

$$E := \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ Ideal} \mid \mathfrak{b} \text{ ist Erweiterung eines Ideals aus } A\}$$

. Dann gilt:

- $C = \{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$

b) $E = \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ Ideal} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$

c) Die Abbildungen

$$\Phi : C \rightarrow E, \quad \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e, \quad \Psi : E \rightarrow C, \quad \mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$$

Sind zueinander inverser, inklusionserhaltende Bijektionen.

Beweis. a) " \supseteq " klar. " \subseteq " $\mathfrak{a} \in C \Rightarrow$ es existiert ein $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c \Rightarrow \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{a}$ (letztes " $=$ " per 3.11.12(d))

b) analog

c) klar nach (a), (b). ■

Anmerkung. Erinnerung an LA1: $T \in M(n \times n, A)$, dann existiert Komplementäre Matrix $T^\# \in M(n \times n, A)$ zu T . Es ist $T^\# T = T T^\# = \det(T) E_n$. (LA1: Satz 17.20)

Satz 3.11.14. Sei M ein endlich erzeugter A -Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, $\varphi \in \text{End}_A(M)$ mit $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit:

$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0\text{id}_M = 0$$

Beweis. Sei x_1, \dots, x_n ein Erzeugendensystem von M .

$\Rightarrow \varphi(x_i) \in \mathfrak{a}M = \{\sum_{\text{endl.}} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}, y_i \in M\}$, insbesondere existieren $a_{i1}, \dots, a_{in} \in \mathfrak{a}$ mit $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ (stelle y_i als Linearkombination von x_1, \dots, x_n dar).

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n (\delta_{ij}\varphi - a_{ij}\text{id}_M)(x_j) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Wir betrachten $A[\varphi] = \{b_n\varphi^n + b_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + b_1\varphi + b_0\text{id}_M \mid n \in \mathbb{N}_0, b_i \in A\}$. (kommutativer Unterring von $\text{End}_A(M)$; Konvention: $\varphi^0 = \text{id}_M$).

Setze $T := (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, A[\varphi])$. M wird via $(\sum b_i \varphi^i)x = \sum b_i \varphi^i(x)$ zum $A[\varphi]$ -Modul.

$$T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 = T^\# T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \det(T) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

da x_1, \dots, x_n ein Erzeugendensystem von M ist folgt: $\det(T)x = 0$ für alle $x \in M$.

$\Rightarrow \det(T) = 0$.

Andererseits: $\det(T) = \det(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{ij} = \varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0\text{id}_M$ mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ nach Leibniz-Formel. ■

Folgerung 3.11.15. Sei M ein endlich erzeugter A -Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $a = 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ mit $aM = 0$.

Beweis. Mit $\varphi = id_M$ ist $\varphi(M) = M = \mathfrak{a}M \Rightarrow$ es existieren $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$, sodass $0 = id_M^n + a_{n-1}id_M^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0id_M$, das heißt: $0 = x + a_{n-1}x + \dots + a_1x + a_0x = \underbrace{(1 + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)}_{:=a}x \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}, ax = 0$ ■

Satz 3.11.16. (Nakayama-Lemma)

Sei A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal \mathfrak{m} , M ein endlich erzeugter A -Modul, $M/\mathfrak{m}M = 0$. Dann ist $M = 0$.

Beweis. $M/\mathfrak{m}M = 0 \Rightarrow M = \mathfrak{m}M$ mit 3.11.15 folgt: es existiert ein $a \in A, a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ mit $aM = 0$. Wegen $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ ist $a \in A^*$ wegen 3.11.2 $\Rightarrow M = 0$. ■

Folgerung 3.11.17. Sei A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal \mathfrak{m} , M ein endlich erzeugter A -Modul, $N \subseteq M$ Untermodul mit $M = \mathfrak{m}M + N$. Dann ist $M = N$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{m}(M/N) = (\mathfrak{m}M + N)/N = M/N$ mit dem Nakayama-Lemma folgt: $M/N = 0 \Rightarrow M = N$. ■

Folgerung 3.11.18. Sei A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal \mathfrak{m} , M ein endlich erzeugter A -Modul, $x_1, \dots, x_n \in M$. Dann sind äquivalent:

- i) x_1, \dots, x_n ist ein Erzeugendensystem von M
- ii) Die Bilder $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ von x_1, \dots, x_n in $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen den A/\mathfrak{m} -VR $M/\mathfrak{m}M$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) klar.

(ii) \Rightarrow (i) Setze $N := \sum_{i=1}^n Ax_i$. Nach Voraussetzung ist $(N + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M = M/\mathfrak{m}M \Rightarrow N + \mathfrak{m}M = M$. Mit 3.11.17 folgt: $N = M$. ■

Anmerkung. Wichtig: M endlich erzeugt ist eine Voraussetzung in 3.11.18.