Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 5. Juli 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.

Inhaltsverzeichnis

1 Moduln 3
- 1.1 Grundlagen über Moduln . . . 3
- 1.2 Exakte Folgen . . . 11
- 1.3 Noethersche und Artinsche Moduln . . . 17

2 Homologische Algebra 24
- 2.4 Kategorien . . . 24
- 2.5 Abelsche Kategorien . . . 32
- 2.6 Projektive und Injektive Moduln . . . 43
- 2.7 Komplexe . . . 53
- 2.8 Abgeleitete Funktoren . . . 62
- 2.9 δ-Funktoren . . . 66
- 2.10 Ext und Erweiterungen . . . 68

3 Kommutative Algebra 74
- 3.11 Grundlagen . . . 74
- 3.12 Lokalisierung . . . 80
- 3.13 Tensorprodukt und flache Moduln . . . 88
- 3.14 Tor . . . 100
- 3.15 Ganze Ringerweiterungen und Dimension . . . 104

Stichwortverzeichnis 107

1 Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung "Ring" stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei R ein Ring.

1.1 Grundlagen über Moduln

Definition 1.1.1. Ein *R-Linksmodul* ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

a) $a(x + y) = ax + ay$

b) $(a + b)x = ax + bx$

c) $a(bx) = (ab)x$

d) $1x = x$

Ein *R-Rechtsmodul* ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \to M$, $(x, a) \mapsto xa$, sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

a') $(x + y)a = xa + yb$

b') $x(a + b) = xa + xb$

c') $x(ab) = (xa)b$

d') $x1 = x$

Anmerkung. Es bezeichne R^{op} den zu R entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge R mit derselbern Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\text{op}} b := b \cdot a$. Ist M ein $R-$Rechtsmodul, dann wird M durch $ax := xa$ zu einem R^{op}-Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\text{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R,\ x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur R-Linksmoduln, und unter einem R-Modul verstehen wir einen R-Linksmodul

- Forderung a) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

  $$l_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

  zum Ring $\text{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$ gehört.

  $$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x)))$$

für $f, g \in \mathrm{End}(M)$, $x \in M$). Nach *b*) − *d*) ist die Abbildung $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem R-Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

Beispiel 1.1.2. a) Ist K ein Körper, dann sind K-Moduln die K-Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe G ist ein $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \ldots x}_{\text{n-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \ldots + x}_{\text{(-n)-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe G genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als $\mathbb{Z}-$Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf G überein einstimmt (nämlich obige).

Definition 1.1.3. Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$. Dann heißt φ *R-Modulhomomorphismus* (R-linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

b) $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

$\mathrm{Hom}_R(M, M')$ bezeichne die Menge der R-Modulhomomorphismen von M nach M'.

Anmerkung. $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f + g)(x) := f(X) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

Beispiel 1.1.4. Sei M ein R-Modul, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M) =: \mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathrm{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \to R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus („X vertauscht mit Elementen aus R, b im Allgemeinen nicht“). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \to \mathrm{End}(M), \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da φ R-linear ist. Somit wird M zum $R[X]$-Modul.

Definition 1.1.5. Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ R-linear. φ heißt

Monomorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ φ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)

Epimorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ φ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)

Isomorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ φ ist bijektiv (Notation: $M \xrightarrow{\sim} M'$)

Existiert ein Isomorphismus zwischen M, M', so heißen M, M' “isomorph“ (Notation: $M \cong M'$)

Anmerkung. Ist φ ein Isomorphismus, dann ist φ^{-1} ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.1.6. *Seien M, M' R-Moduln. Dann gilt:*

a) R kommutativ $\Rightarrow$ $Hom_R(M, M')$ ist ein R-Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R$, $\varphi \in Hom_R(M, M')$, $x \in M$.

b) $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ ist ein Unterring von $End(M) = End_{\mathbb{Z}}(M)$.

c) Die Abbildung $\Phi : Hom_R(R, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist R auf natürliche Weise ein R-Linksmodul). Ist R kommutativ, so ist Φ ein Isomorphismus von R-Moduln.

d) $End_R(R) \cong R^{op}$

Beweis. a) Beachte: Für $a \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder R-linear, denn für $a, b \in R$, $x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu Φ ist gegeben durch

$$\Psi : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \to M, \, a \mapsto am)$$

d) Nach Aussage $c)$ haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \mathrm{End}_R(R) \to R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1)\cdot 1) = \psi(1)\varphi(1)\\ &= \varphi(1)\cdot_{\mathrm{op}}\psi(1) = \Phi(\varphi)\cdot_{\mathrm{op}}\Phi(\psi)\end{aligned}$$ ■

Definition 1.1.7. Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$. N heißt *R-Untermodul* von M, wenn gilt:

a) $0 \in N$

b) $x + y \in N$ für alle $x, y \in N$

c) $ax \in N$ für alle $a \in R, x \in N$

Beispiel 1.1.8. a) Betrachte R als R-Linksmodul. Dann sind die Untermodul von R genau die Linksideale in R (analog: Rechtsideale für R als R-Rechtsmodul).

b) Ist M ein R-Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Untermoduln. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M, dann ist $\bigcap_{i\in I} M_I \subseteq M$ ein Untermodul, sowie $\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i |\, x_i \in M_i,\, x_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$

c) Sind M, M' R-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $N' \subseteq M'$ ein Untermodul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Untermoduln.

$\mathrm{im}\,\varphi := \varphi(M)$ heißt das *Bild* von φ

$\ker\varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der *Kern* von φ

Es gilt: φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$ und φ surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{im}\,\varphi = M'$

Bemerkung + Definition 1.1.9. Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist die Faktorgruppe ${}^{M}\!/_{N}$ via $a(x+N) = ax+N$, $a \in R$, $x \in M$ ein R-Modul, der *Faktormodul* von M nach N. Die kanonische Abbildung $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$, $m \mapsto m + N$ ist ein Modulepimorphismus mit $\ker\pi = N$.

Beispiel 1.1.10. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, M ein R-Modul. Dann ist

$$IM := \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i |\, n \in \mathbb{N},\, a_i \in I,\, x_i \in M\right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von M. Ist I ein zweiseitiges Ideal, dann ist ${}^{R}\!/_{I}$ ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von I geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$$ {}^{R}\!/_{I} \times {}^{R}\!/_{I} \longrightarrow {}^{R}\!/_{I}, \quad (a+I, b+I) \mapsto ab + I$$

${}^{M}\!/_{IM}$ ist ein ${}^{R}\!/_{I}$-Modul vermöge

$$(a + I)(x + M) := ax + IM, \quad a \in R, \, x \in M$$

Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)

Satz 1.1.11. *Seien M, M' R-Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}\!/_{N}$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \to M'$ R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

i) $N \subseteq ker\varphi$

ii) Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\overline{\varphi} : {}^{M}\!/_{N} \to M'$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \\
& {}^{M}\!/_{N} \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz). *Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R-Modulisomorphismus*

$$\overline{\varphi} : {}^{M}\!/_{ker\varphi} \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi \quad \textit{mit} \quad \overline{\varphi}(x + ker\varphi) = \varphi(x)$$

für alle $x \in M$.

Satz 1.1.13 (Isomorphiesaätze). *Sei M ein R-Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:*

a) Die Abbildung

$$^{N_1}\!/_{N_1 \cap N_2} \xrightarrow{\sim} {}^{(N_1 + N_2)}\!/_{N_2} \qquad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

ist ein Isomorphismus.

b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist

$$^{M/N_2}\!/_{N_1/N_2} \xrightarrow{\sim} {}^{M}\!/_{N_1} \qquad (x + N_2) + {}^{N_1}\!/_{N_2} \mapsto x + N_1$$

ein Isomorphismus.

Satz 1.1.14. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}/_{N}$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{\mathit{Untermoduln}\ M' \mathit{von}\ M \mathit{mit}\ N \subseteq M'\} & \longrightarrow & \{\mathit{Untermoduln}\ \ \mathit{von}\ {}^{M}/_{N}\} \\ M' & \mapsto & \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) & \leftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

die inklusionserhaltend ist.

Bemerkung + Definition 1.1.15. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: $\prod_{i\in I} M_i$ ist ein R-Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das *direkte Produkt* der M_i. Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ mit $(m_i)_{i\in I} \mapsto m_j$ sind R-Modulhomomorphismen.

Satz 1.1.16 (Universelle Eingenschaft des Produkts). *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung*

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i) \qquad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \to M_i$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i\in I})$

Definition 1.1.17. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Der Untermodul

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \text{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

heißt die *direkte Summe* der M_i. Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i\in I} \quad \text{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sind R-Modulhomomorphismen.

Anmerkung. Ist I endlich, dann ist $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

Satz 1.1.18 (Universelle Eingenschaft der Summe). *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) \quad \mathit{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to M$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \psi_i(m_i)$ definierte).

Anmerkung. Sei I eine Indexmenge, M ein R-Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i \in I} M, \qquad M^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} M, \qquad M^r := M^{\{1,..,r\}} = M^{(\{1,..,r\})}$$

Bemerkung 1.1.19. *Sei M ein R-Modul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von $\bigoplus$ mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R-Modulhomomorphismus*

$$\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i \in I} m_i \quad \textit{mit} \quad \operatorname{im} \psi = \sum_{i \in I} M_i$$

Ist ψ injekitv, so heißt die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ "direkt", und wir schreiben auch $\bigoplus_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$.

Anmerkung. In der Situation von 1.1.19 gilt:

- $\sum_{i\in I} M_i$ direkt $\iff \sum_{i\in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \bigoplus M_2 \iff M_1 \cap M_2 = 0$

Definition 1.1.20. Sei M ein R-Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \to M, a \mapsto ax$ ist ein R-Modulhomomorphismus, das Linksideal

$$ann_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der *Annulator* von x. Das Bild $\operatorname{im} f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von x erzeugte Untermodul von M. Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$

$$RX := \langle X \rangle_R := \sum_{x \in X} Rx = \operatorname{im}(R^{(X)} \to M) = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \subseteq M \\ N \text{Untermodul mit } X \subseteq N}} N$$

Der von X *erzeugte Untermodul* von M.

Definition 1.1.21. Sei M ein R-Modul, $(x_i)_{i\in I}$ Familie von Elementen aus M, $\psi : R^{(I)} \to M, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i\in I}$ heißt

Erzeugendensystem von M mit $R \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \psi$ surjektiv $\iff M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten Untermodul überein

linear abhängig $\iff \psi$ injektiv

Basis von M über $R \iff \psi$ bijektiv

M heißt

endlich erzeugt $\iff$ M besitzt ein endliches Erzeugendensystem

frei $\iff$ M besitzt eine Basis

Anmerkung.
- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K-Moduln frei (LA1)
- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Gruppe (=$\mathbb{Z}$ Modul), die nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.
- Jeder R-Modul M ist Faktormodul eines freien R-Moduls, denn:
$$R^{(M)} \to M, (a_x)_{x\in M} \mapsto \sum_{x\in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$
- Basen eines freien R-Moduls können unterschiedliche Länge haben.

Satz 1.1.22. *Sei A ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt:*
$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \iff n_1 = n_2$$

Beweis. Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in A ein maximales Ideal J . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A^n/_{JA^n}$ ein $A/_J$-Modul (vgl Beispiel 1.10) und $A/_J$ ist ein Körper. Die Abbildung $A^n/_{JA^n} \to (A/_J)^n, (x_1, .., x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, ..., x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von $A/_J$-Moduln, d.h. $A^n/_{JA^n} \simeq (A/_J)^n$ ist ein n-dimensionaler $A/_J$-Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt $A^{n_1}/_{JA^{n_1}} \simeq A^{n_2}/_{JA^{n_2}}$, also $(A/_J)^{n_1} \simeq (A/_J)^{n_2}$ (als $A/_J$-Vektorraum) ■

Definition 1.1.23. Sei A ein kommutativer Ring, M ein freier A-Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der *Rang* von M (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.1.22)

1.2 Exakte Folgen

Definition 1.2.1. Eine *exakte Folge* (*exakte Sequenz*) von R-Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \to M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \in \mathbb{Z}$, sodass:

$$\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I \text{mit} \quad i+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise: $\quad \ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots .$

Eine exakte Folge der Form:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

heißt eine *kurze exakte Folge* (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ bedeutet explizit:

- f injektiv
- g surjektiv
- $\operatorname{im} f = \ker g$.

Anmerkung.

- Seien M, N R-Moduln und $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Falls f injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/_{\operatorname{im} f} \longrightarrow 0$ exakt.

  falls f surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.

- Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R-Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\overline{g} : M/_N \xrightarrow{\sim} M''$, und f beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sim"', "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "e"] & M \arrow[r, "f"] & M/_N \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & 0
\end{tikzcd}$$

  ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $M_i \longrightarrow M_i' \longrightarrow M_i''$, $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von R-Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i\in I} M_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i''$$

sowie

$$\bigoplus_{i\in I} M_i' \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i''$$

(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

Satz 1.2.2. *Sei*
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[l, bend right, dashed, "t"'] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:

i) Es gibt ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker g \oplus N'$

ii) Es gibt einen R-Moduolhomomorphismus $s : M'' \to M$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$

iii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $t : M \to M'$ mit $t \circ f = \mathrm{id}_{M'}$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, das die kurze exakte Sequenz “spaltet“. In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus s heißt ein “Schnitt“ von g.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = \ker g \oplus N'$. Dann ist $N' \cap \ker g = 0$. Dann ist $g\big|_{N'} : N' \to M''$ injektiv. Außerdem gilt: $M'' = g(M) = g(N')$, also ist $G\big|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$ ein Isomorphismus. Setze $s : M'' \to N' \hookrightarrow M$. Dann ist s ein R-Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Außerdem ist

$$M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \operatorname{im} s = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} s = f(M') \oplus s(M'') \underset{f,s \text{ inj}}{\cong} M' \oplus M''$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $s : M'' \to M$ ein Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Sei $h : f(M') \to M'$ invers zu $f\big|^{f(M)} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$. Für $m \in M$ ist

$$g \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g))(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - ((\underbrace{g \circ s}_{=\mathrm{id}_{M''}}) \circ g)(m) = 0$$

Also ist $(\mathrm{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \operatorname{im} f$. Wir setzen $t : M \xrightarrow{\mathrm{id}_M - s\circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$, welcher ein R-Modulhomomorphisus ist mit

$$t \circ f = h \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \mathrm{id}_M \circ f}_{=\mathrm{id}_{M'}} - h \circ s \circ \underbrace{g \circ f}_{=0} = \mathrm{id}_{M'}$$

$iii) \Rightarrow i)$ Setze $t : M \to M'$ ein Modulhomomorphismus mit $t \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Setze $N' := \ker t$. Für $m \in M$ ist $m = \mathrm{id}_M(m) = \underbrace{(\mathrm{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \operatorname{im} f}$, also ist

$M = N' + \operatorname{im} f$. Sei außerdem $m \in N' \cap \operatorname{im} f$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \mathrm{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch $m = 0$. Damit ist $M = N' \oplus \operatorname{im} f$. ■

Satz 1.2.3. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von R-Moduln, M'' ein freier R-Modul. Dan spaltet die obige Folge.*

Beweis. Sei also $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von M''. Wähle für alle $i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $g(m_i) = v_i$ (beachte: g ist surjektiv). Sei $s : M'' = \bigoplus_{i\in I} Rv_i \to M$ der durch die Vorgabe $s(v_i) = m_i$ induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von $\bigoplus$). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$ ■

Folgerung 1.2.4. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, M', M'' freie R-Moduln. Dann ist auch M frei.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M' \cong R^{(I)}$, $M'' \cong R^{(J)}$. Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot\cup J)}$$

und damit auch frei. ■

Anmerkung. Ist R kommutativ, und haben M, M' endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M') + \operatorname{rang}(M'')$$

Bemerkung 1.2.5. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt:*

a) Ist M endlich erzeugt, dann ist M'' endlich erzeugt.

b) Sind M', M'' endlich erzeugt, dann ist M endlich erzeugt.

Beweis. a) Ist M endlich erzeugt, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $\varphi : R^n \to M$. Dann ist $g \circ \varphi : R^n \to M''$ ebenfalls ein Epimorphismus, also ist M'' endlich erzeugt.

b) Sei $(x_1, \ldots, x_r)$ ein Erzeugendensystem von M', $(y_1, \ldots, y_s)$ ein Erzeugendensystem von M''. Da g surjektiv, exitieren $z_1, \ldots, z_s \in M$ mit $g(z_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, s$.
Behauptung: $f(x_1), \ldots, f(x_r), z_1, \ldots, z_s$ ist ein Erzeugendensystem von M, denn sei $m \in M$. Dann exsitieren $a_1, \ldots, a_s \in R$ mit $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$. Damit ist $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \operatorname{im} f$. Also existiert ein $v \in M'$, etwa $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$ mit $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$. Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^r b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

Anmerkung. Aus M endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass M' endlich erzeugt ist.

Beispiel 1.2.6. Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \ldots]$. Dann ist R als R-Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setze

$$I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$$

Dann ist I ein Ideal in R, aber I ist nicht endlich erzeugt als R-Modul, denn angenommen ex existieren $f_1, \ldots, f_r \in I$ mit $I = \sum_{i=1}^r Rf_i$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_n] \subseteq R$.
Problem: $X_{n+1} \notin I$, denn andernfalls wäre $X^{n+1} = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$ mit $a_1, \ldots, a_r \in R$ und setze $X_1 = \ldots = X_n = 0,\ X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$ Widerspruch!

Bemerkung 1.2.7. *Seien $M_1, \ldots, M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ ist endlich erzeugt.

ii) $M_1, \ldots, M_r$ sind endlich erzeugt.

Beweis. Es genügt, die Behaptung für $r = 2$ zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 1.2.5 ■

Anmerkung. Ist $M = \bigoplus_{i\in I} M_I$ mit $|I| = \infty$, $M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist M nicht endlich erzeugt, dann für $x_1, \ldots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \ldots, x_s \in \bigoplus_{j\in J} M_j$, also

$$\sum_{i=1}^{s} R_i \subseteq \bigoplus_{j\in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i\in I} M_i$$

Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma). *Ist ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

gegeben und φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen, φ_5 injektiv. Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd (Übungen). ∎

Anmerkung. Wir meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$ angewandt.

Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma). *Sei folgendes kommutatives Diagramm von R Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$\ker\varphi' \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{f} \ker\varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\varphi' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi''$$

wobei δ die sogenannte Übergangabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und f', f, g', g induziert sind. Ist f' injektiv, dann ist auch $\ker\varphi' \longrightarrow \ker\varphi$ *injektiv. Ist g surjektiv, dann auch* $\operatorname{coker}\varphi \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi''$

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \varphi' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varphi \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varphi'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, red, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} \varphi' \arrow[r] & \operatorname{coker} \varphi \arrow[r] & \operatorname{coker} \varphi'' &
\end{tikzcd}$$

Konstruktion von δ : Sei $m'' \in \ker \varphi'' \subseteq M''$. Da f surjektiv, existiert ein $m \in M$ mit $m'' = f(m)$. Setze $n := \varphi(m)$. Dann ist $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$. Dann ist $n \in \ker g = \operatorname{im} g'$. Also existiert ein $n' \in N'$ mit $g'(n') = n$ (n' ist eindeutig bestimmt wegen g' injektiv.) Setze $\delta(m'') := n' + \operatorname{im} \varphi'$
Wohldefiniertheit von δ: Sei $\tilde{m} \in M$ mit $m'' = f(\tilde{m})$. Dann ist $(\tilde{m}) = f(m)$, also $\tilde{m} - m \in \ker f = \operatorname{im} f'$. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\tilde{m} - m = f'(m')$. Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m+f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist $\tilde{n}' + \operatorname{im} \varphi' = n' + \operatorname{im} \varphi'$, Rest ist Übungsaufgabe. ■

1.3 Noethersche und Artinsche Moduln

Definition 1.3.1. Sei M ein R-Modul. M heißt *noethersch* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

Anmerkung. M noethersch $\Rightarrow M$ ist endlich erzeugt.

Beispiel 1.3.2. Sei K ein Körper, V ein K-VR. Dann gilt: V noethersch $\Leftrightarrow V$ ist endlich dimensional

Satz 1.3.3. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch

ii) Jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ von Untermoduln wird stationär, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$.

iii) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M enthält ein maximales Element.

Man sagt in diesem Fall auch: die Untermoduln von M erfüllen die aufsteigende Kettenbedingung.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von M. Setze $N := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} M_i \subseteq M$. N ist Untermodul von M (beachte: $a, b \in N \Rightarrow$ Es existieren $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $a \in M_i$, $b \in M_j$, Œgilt: $i \leq j \Rightarrow M_i \subseteq M_j$, $a, b \in M_j \Rightarrow a + b \in M_j \subseteq N$). Da M noethersch, ist N endlich erzeugt, d.h. es existiert ein endliches Erzeugendensystem $x_1, \dots x_r$ von N. Für jedes $i \in \{1, \dots r\}$ exsistieren $j_i \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in M_{j_i}$. Setze $n := max\{j_i \mid i = 1, \dots r\} \Rightarrow x_1, \dots, x_r \in M_n$ $\Rightarrow N \subseteq M_n \subseteq N \Rightarrow N = M_n \Rightarrow$ für alle $i \geq n$ ist $M_i = M_n$.
$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von M, die kein maximales Element hat. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M' \subsetneq M''$. $\Rightarrow$ Es existiert eine Kette von Untermoduln $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$ von M , die nicht stationär wird.
$iii) \Rightarrow i)$ Sei $N \subseteq M$ ei Untermodul. Setze

$$\mathcal{X} := \{M' \subseteq M \text{Untermodul} \mid M' \text{endlich erzeugt}, M' \subseteq N\}$$

Wegen $0 \in \mathcal{X}$ ist $\mathcal{X} \neq \emptyset \overset{(iii)}{\Rightarrow}$ Es existiert ein maximales Element $\tilde{M}$ in $\mathcal{X}$.
Behauptung: $\tilde{M} = N$, denn: Sei $x \in N \Rightarrow Rx + \tilde{M} \in \mathcal{X}$ und $\tilde{M} \subseteq Rx + \tilde{M}$. Aufgrund der Maximalität von $\tilde{M}$, folgt $Rx + \tilde{M} = \tilde{M}$, als $x \in \tilde{M}$. ■

Bemerkung 1.3.4. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch

ii) M' und M'' sind noethersch

Beweis. Es genügt den Fall der Folge $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}/_{N} \longrightarrow 0$ für einen Untermodul $N \subseteq M$ zu betrachten. (Vgl. Anmerkung nach 1.2.1).
$i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq N$ Untermodul $\Rightarrow N'$ Untermodul von $M \overset{M \text{noet.}}{\Longrightarrow} N'$ endlich erzeugt. Sei $N'' \subseteq {}^{M}/_{N}$ Untermodul. Also ist $\pi^{-1}(N'') \twoheadrightarrow N''$ ein Epimorphismus und damit N'' endlich erzeugt nach 2.5 (a).
$ii) \Rightarrow i)$ Seien $N, {}^{M}/_{N}$ noethersch, und sei $M' \subseteq M$ Untermodul. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \cap N \longrightarrow M' \longrightarrow {}^{M'}/_{M' \cap N} \longrightarrow 0$$

wobei $M' \cap N$ endlich erzeugt, da N noethersch. Außerdem ist

$${}^{M'}/_{M' \cap N} \simeq {}^{(M'+N)}/_{N} \subseteq {}^{M}/_{N}$$

endlich erzeugt, da ${}^{M}/_{N}$ noethersch. $\Rightarrow M'$ ist endlich erzeugt nach 1.2.5 ∎

Bemerkung 1.3.5. *$M_1, ..., M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ noethersch

ii) $M_1, ..., M_r$ noethersch.

Beweis. Analog zum Beweis von 1.2.7 unter Verwendung von 1.3.4 ∎

Definition 1.3.6. R heißt *linksnoethersch* (bzw. *rechtsnoethersch*), wenn R als Links- (bzw. Rechts-) Modul über sich selbst noethersch ist. R heißt *noethersch*, wenn R links-und rechtsnoethersch ist.

Anmerkung. Es gibt Ringe, die rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch sind (und umgekehrt)

Beispiel 1.3.7. a) Ist R ein Schiefkörper (Divisionsring) (d.h. $R\backslash\{0\}$ ist eine Gruppe bzgl. ”.”), dann ist R noethersch, denn wegen $Ra = R = aR$ für alle $a \in R\backslash\{0\}$ sind die einzigen Linksideale (Rechtsideale) in R durch $0, R$ gegeben, diese sind endlich erzeugt.

b) Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$ ist nicht noethersch nach Beispiel 1.2.6.

Bemerkung 1.3.8. *Sei R ein linksnoetherscher Ring, M ein endlich erzeugtes R-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. Wegen M endlich erzeugt, existiert ein Epimorphismus $R^n \twoheadrightarrow M$ für geeignetes n. Nach Vorraussetzung ist R als R-Modul noethersch $\overset{1.3.5}{\Rightarrow}$ R^n noetherscher R-Modul $\overset{1.3.4}{\Rightarrow}$ M noethersch. ∎

Bemerkung 1.3.9. *Sei R linksnoetherscher Ring, $I \subseteq R$ zweiseitiges Ideal. Dann ist ${}^{R}\!/_{I}$ linksnoethersch.*

Beweis. Es ist zu zeigen: ${}^{R}\!/_{I}$ ist noethersch als ${}^{R}\!/_{I}$-Modul.
Vorüberlegungen:

1. Für $N \subseteq {}^{R}\!/_{I}$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} N \text{ ist } {}^{R}\!/_{I}\text{-Modul von } {}^{R}\!/_{I} & \Leftrightarrow & N \text{ ist } R-\text{Untermodul von } {}^{R}\!/_{I} \\ (\text{bezüglich } \overline{a}\cdot\overline{x} := \overline{ax}) & & (\text{bezüglich } a\cdot\overline{x} := \overline{ax}) \end{array}$$

2. Für jeden ${}^{R}\!/_{I}$-Untermodul N von ${}^{R}\!/_{I}$ gilt:

$$N \text{ ist endlich erzeugt über } {}^{R}\!/_{I} \Leftrightarrow N \text{ ist endlich erzeugt über} R$$

Nach den Vorüberlegungen genügt es zu zeigen, dass ${}^{R}\!/_{I}$ noethersch ist als R-Modul. Dies folgt aus 3.8, denn ${}^{R}\!/_{I}$ ist endlich erzeugt als R-Modul (erzeugt von $\overline{1}$). ∎

Anmerkung. Unterringe noetherscher Ringe sind im Allgemeinen nicht noethersch (siehe Übungsaufgaben)

Bemerkung 1.3.10. *Seien M, N R-Moduln mit $M \cong M \oplus N, N \neq 0$. Dann ist M nicht noethersch.*

Beweis. Setze

$$\mathcal{X} := \{N' \subseteq M \text{Untermodul} \mid \exists M' \subseteq M, \text{ sd. } M = M' \oplus N' \text{ und } M' \cong M\}$$

Offenbar ist $0 \in \mathcal{X}$, denn $M = M \oplus 0$, also $\mathcal{X} \neq \emptyset$.
Angenommen M ist noethersch. Dann enthält $\mathcal{X}$ ein maximales Element N', also existiert ein $M' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus N'$ und $M' \cong M$. Nach Voraussetzung existiert ein $\varphi : M \bigoplus N \xrightarrow{\sim} M \xrightarrow{\sim} M'$. Also ist

$$M' = \varphi(M) \oplus \varphi(N) \Rightarrow M = M' \oplus N' = \underbrace{\varphi(M)}_{=:M''} \oplus \underbrace{\varphi(N) \oplus N'}_{=:N''}$$

Es ist $M \cong \varphi(M) = M''$, somit $N'' \in \mathcal{X}$. Außerdem ist $\varphi(N) \neq 0$ wegen $N \neq 0$ und φ injektiv. Damit folgt $N' \subsetneq N''$ im Widerspruch zur Maximalität von N'. ∎

Satz 1.3.11. *Sei R linksnoetherscher Ring, $R \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt: $R^{n_1} \simeq R^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$.*

Beweis. ohne Einschränkung gelte $n_1 \geq n_2 \Rightarrow R^{n_2} \simeq R^{n_1} \simeq R^{n_2} \oplus R^{n_1-n_2}$. Wegen R^{n_2} noethersch, folgt mit 1.3.10 : $R^{n_1-n_2} = 0$, also $n_1 = n_2$ ■

Anmerkung.
- Obiger Satz zeigt, dass der Bergiff des Ranges freier Moduln auch für endlich erzeugte, freie Modlun über linksnoetherschen Ringen wohldefiniert ist.
- Jeder Körper ist linksnoethersch $\Rightarrow$ So erhält man einen neuen Beweis für Ergebnis aus LA1

Satz 1.3.12 (Hilbertscher Basissatz). *Sei R ein linksnoetherscher Ring. Dann ist $R[X]$ linksnoethersch.*

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal. Es ist zu zeigen, dass I als $R[X]$-Modul endlich erzeugt ist.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $I_n := \{f \in I \mid \deg f \leq n\}$, was offenbar ein R-Modul ist. Wir betrachten die R-lineare Abbildung

$$b_n : I_n \longrightarrow R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto a_n$$

   also ist $B_n := b_n(I_n) \subseteq R$ ein Linksideal. Für $f \in I_n$ ist $Xf \in I_{n+1}$, also $b_n(f) = b_{n+1}(Xf) \in B_{n+1} = b_{n+1}(I_{n+1})$, woraus wir eine Kette von Linksidealen $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ erhalten, welche, da R linksnoethersch ist, stationär ist, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B_m = B_n$ für alle $m \geq n$.

2. Behauptung: $I = R[X]I_n$, denn:

   "$\supseteq$" klar, wegen $I_n \subseteq I$, wobei I ein Linksideal ist.

   "$\subseteq$" Es ist $I = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$, d.h. es genügt zu zeigen, dass $I_m \subseteq R[X]I_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, was wir per Induktion nach m zeigen.
   $m \leq n$: klar.
   $m > n$: Sei $f \in I_m$. Dann ist $b_m(f) \in B_m = B_n = b_n(I_n)$, also existiert ein Polynom $f_1 \in I_n$ mit $b_m(f) = b_n(f_1) = b_m(X^{m-n}f_1)$. Also ist $f - X^{m-n}f_1 \in I_{m-1} \overset{\mathrm{IV}}{\subseteq} R[X]I_n$. Wegen $X^{m-n}f_1 \in R[X]I_n$, folgt $f \in R[X]I_n$

3. I_n ist endlich erzeugt als R-Modul, denn: $I_n \subseteq \sum_{i=0}^{n} RX^i$, und $\sum_{i=0}^{n} RX^i$ ist ein endlich erzeugter R-Modul, also insbesondere noethersch nach 1.3.8,

weshalb I_n als Untermodul endlich erzeugt ist, d.h. es existieren $g_1, \ldots, g_r \in I_n$ mit $I_n = \sum_{i=1}^r Rg_i$, also

$$I \overset{2.}{=} R[X]I_n = \sum_{i=1}^r R[X]g_i$$

d.h. I ist endlich erzeugt als $R[X]$-Modul. ■

Folgerung 1.3.13. *a) Ist R ein linksnoetherscher Ring, dann ist $R[X_1, \ldots, X_n]$ linksnoethersch*

b) Sind A, B kommutative Ring, $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, sodass B von $\varphi(A)$ und einer endlichen Menge $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq B$ als Ring erzeugt wird. Dann gilt: A ist nothersch $\Rightarrow$ B noethersch.

Beweis. a) aus 1.3.12 per Induktion

b) Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Ringhomomorphismus

$$\psi : A[X_1, \ldots, X_r] \twoheadrightarrow B, \quad X_i \mapsto x_i, \quad \text{und} \quad \psi\big|_A = \varphi$$

Ist A noethersch, dann ist $A[X_1, \ldots, X_r]$ nothersch nach $a)$ und nach 3.9 ist B noethersch. ■

Definition 1.3.14. Sei M ein R-Modul. M heißt *artinsch* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jede absteigende Kette $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ von Untermoduln von M gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$ (“absteigende Kettenbedingung“).

Definition 1.3.15. R heißt *linksartinsch* (bzw. *rechtsartinsch*) $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ R ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selber artinsch. R heißt *artinsch* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ R ist links- und rechtsartinsch.

Beispiel 1.3.16. a) Jeder endliche Ring ist artinsch (und noethersch).

b) $\mathbb{Z}$ ist kein artinscher Ring, denn $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \ldots$

c) Sei M ein endliches Monoid, K ein Körper, $R = K[M]$ sei der Monoidring (vgl. Algebra 1-Übungen). Dann ist R linksartinsch, denn: $K[M]$ ist ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, jeder $K[M]$-Untermodul von $K[M]$ ist ein K-Untervektorraum von $K[M]$, also ist jede absteigende Kette von Untermoduln eine absteigende Kette von Untervektorräumen, die stationär ist. Ebenso ist $K[M]$ rechtsartinsch, $K[M]$ also artinsch.

Bemerkung 1.3.17. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Folge vn R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) M ist artinsch.

ii) M', M'' ist artinsch.

Beweis. Es genügt, den Fall $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}\!/_{N} \longrightarrow 0$ zu betrachten.
i) $\Rightarrow$ *ii)* Sei M artinsch. Sei $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln von N. Dann ist N_i ein Untermodul von M für alle $i \in \mathbb{N}$ und, da M artinsch ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_n$ für alle $i \geq n$, weshalb N artinsch ist. Sei $N_1' \supseteq N_2' \supseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln von ${}^{M}\!/_{N}$. Dann ist $\pi^{-1}(N_1') \supseteq \pi^{-1}(N_2') \supseteq \ldots$ eine Kettte von Untermoduln von M, welche, wegen M artinsch, stationär wird. Es ist $N_n' = \pi(\pi^{-1}(N_n')) = \pi(\pi^{-1}(N_i')) = N_i$ für alle $i \geq n$, also ist ${}^{M}\!/_{N}$ artinsch.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Seien $N, {}^{M}\!/_{N}$ artinsch. Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M. Dann ist $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von N. Damit ist

$$^{(M_1+N)}\!/_{N} \supseteq {}^{(M_2+N)}\!/_{N} \supseteq \ldots$$

eine absteigende Kette von Untermoduln von ${}^{M}\!/_{N}$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i \cap N = M_n \cap N$ und ${}^{M_i+N}\!/_{N} = {}^{M_n+N}\!/_{N}$ für alle $i \geq n$, also ist $M_i + N = M_n + N$ für alle $i \geq n$,
Behauptung: $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$, denn sei $i \geq n$ fest.

"$\subseteq$" klar

"$\supseteq$" Sei $x \in M_n$. Dann existieen $x' \in M$, $y \in N$ mit $x = x' + y$ (wegen $M_i + N = M_n + N$), also $y = \underbrace{x}_{\in M_n} - \underbrace{x'}_{\in M_i \subseteq M_n} \in M_n \cap N = M_i \cap N \Rightarrow x = \underbrace{x'}_{\in M_i} + \underbrace{y}_{\in M_i} \in M_i$

■

Folgerung 1.3.18. *Seien $M_1, \ldots, M_n$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ ist artinsch

ii) $M_1, \ldots, M_n$ sind artinsch.

Folgerung 1.3.19. *Sei R linksartinsch, M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M artinsch.*

Definition 1.3.20. Sei M ein R-Modul. Dann heißt M *endlich koerzeugt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = 0$

Anmerkung.

- Sei $N \subseteq N$ ein Untermodul. Dann ist ${M}/{N}$ endlich koerzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{\in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq U$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = N$.
- N ist endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\sum_{i\in I} M_I = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sum_{j\in J} M_j = N$.

Satz 1.3.21. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

a) M ist artinsch

b) Jede nichtleere Menge von Untermoduln enthält ein minimales Element

c) Jeder Faktormodul von M ist endlich koerzeugt.

Beweis. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sei $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von M, die kein minimales Element besitzt. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M'' \subsetneq M'$, also existiert eine Kette von Untermoduln $M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \ldots$, die nicht stationär wird.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sei $N \subseteq M$ eine Untermodul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i\in I} M_i = N$. Setze $\mathcal{X} := \{\bigcap_{j\in J} M_j \mid J \subseteq I \text{ endlich}\} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mathcal{X}$ enthält ein minimales Element $N_1 = \bigcap_{j\in J} M_j$ für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$.
Behauptung: $N_1 = N$, denn

"$\supseteq$" klar

"$\subseteq$" Angenommen $N_1 \supsetneq N$. Dann existiert ein $x \in N_1$ mit $x \notin N$. Da $N = \bigcap_{i\in I} M_i$ existiert ein $i \in I$ mit $x \notin M_i \Rightarrow x \notin \bigcap\limits_{j\in J\cup\{i\}} M_j =: N_2$. Somit ist $N_2 \in \mathcal{X}$, $N_2 \subsetneq N_1$ im Widerspruch zur Minimalität von N_1.

Somit $N_1 = N$, also ist ${M}/{N}$ endlich koerzeugt.
iii) $\Rightarrow$ *i)* Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M. Setze $N := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i$. ${M}/{N}$ ist endlich koerzeugt, weshalb eine endliche Teilmenge $J \in I$ existiert mit $N = \bigcap_{j\in J} M_j$. Setze $n := \max J$, dann ist $N = M_n$, also ist $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$. ∎

2 Homologische Algebra

In diesem Kapitel sei R stets ein Ring

2.4 Kategorien

Definition 2.4.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ von *Objekten* einer Menge $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ von *Morphismen* für alle $A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- einer Verknüpfung $\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$ für alle $A,B,C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

wobei folgende Axiome gelten:

($K1$) $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset$, falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$

($K2$) Für alle $A,B,C,D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C), h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \textit{(Assoziativität)}$$

($K3$) für jedes $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ existiert ein Morphismus $id_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$, sodass für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$ gilt:

$$f \circ id_A = f,\ id_A \circ g = g$$

.

Anmerkung.

- Man sagt *Klasse* statt Menge, um Paradoxa, wie "die Menge aller Mengen" zu vermeiden.
- Trotzdem schreiben wir $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ um zu sagen dass A zu $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gehört (und werden $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ im Folgenden wie eine Menge behandeln).
- In den folgenden Abschnitten werden wir mengentheoretische Probleme ignorieren und häufig von Mengen sprechen auch wenn es sich nur um Klassen handelt.
- Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ schreiben wir auch $f : A \to B$. A heißt *Quelle* und B heißt *Ziel* von f; wegen ($K1$) sind diese eindeutig bestimmt.
- für $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist id_A eindeutig bestimmt (analoges Argument wie bei Monoiden: $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}'_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}'_A$)

Beispiel 2.4.2.

- Mengen: Kategorie der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen
- Ringe: Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen
- R-Mod: Kategorie der R-(Links)-Moduln mit R-Modulhomomorphismen als Morphismen
- Top: Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen
- $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \{*\}, Mor_{\mathcal{C}}(*, *) := M$, wobei M Monoid, $\circ =$ Verknüpfung in M.

Definition 2.4.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die zu $\mathcal{C}$ *duale Kategorie* ($\mathcal{C}^{op}$) ist die Kategorie mit:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ für $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- $\circ_{op} : Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \times Mor_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) \to Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$ mit $(f, g) \mapsto f \circ g$ für $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

Anmerkung.

- Anschaulich: Übergang von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}^{op}$ $\widehat{=}$ Pfeile umdrehen
- $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

Definition 2.4.4. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FA, FB), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, sodass gilt:

(F1) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C),\ A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(F2) $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Beispiel 2.4.5.

a) Vergiss-Funktoren, zum Beispiel: R-Mod $\to$ Mengen, R-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, ...

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ induziert einen Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(X,-) : \mathcal{C} \to \text{Mengen}, \quad A \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(X,A)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ ist hierbei $f_*^X := Mor_{\mathcal{C}}(X,-)(f)$ gegeben durch

$$f_*^X : Mor_{\mathcal{C}}(X,A) \to Mor_{\mathcal{C}}(X,B), \quad g \mapsto f \circ g \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_*^X(g)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

c) Sei $M \in R$-Mod $\Rightarrow Hom_R(M,-) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, $N \mapsto Hom_R(M,N)$ ist ein Funktor.

Definition 2.4.6. Seien $\mathcal{C},\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *(kontavarianter) Funktor* F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, das heißt besteht aus einer Abbildung

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FB,FA), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, sodass gilt:

(F1') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für alle $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C),\ A,B,C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(F2') $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Beispiel 2.4.7. a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ induziert einen kontravarianten Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(-,Y) : \mathcal{C} \to \text{Mengen}, \quad A \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(A,Y)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ ist hierbei $f_Y^* := Mor_{\mathcal{C}}(-,Y)(f)$ gegeben durch

$$f_Y^* : Mor_{\mathcal{C}}(B,Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(A,Y), \quad g \mapsto g \circ f \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_Y^*(g)"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

b) Sei $N \in R$-Mod $\Rightarrow Hom_R(-,N) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, $M \mapsto Hom_R(M,N)$ ist ein kontavarianter Funktor.

Anmerkung.

- Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, so ist auf naheliegende Weise der Funktor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definiert.
- Unter Funktoren werden kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme abgebildet.

Definition 2.4.8. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Das *Produkt* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ist diejenige Kategorie mit $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ und $Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$ und "komponentenweisen $\circ$".

Definition 2.4.9. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ Kategorien. Ein *Bifunktor* F "von $\mathcal{C}$ kreuz $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{E}$ " ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$

Beispiel 2.4.10.

a) $\bigoplus$: R-Mod $\times R$-Mod $\to R$-Mod, $(M, N) \to M \bigoplus N$ ist ein Bifunktor

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to$ Mengen, $(M, N) \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(M, N)$ ist ein Bifunktor.

Definition 2.4.11. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f : A \to B$ f heißt

Monomorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : C \to A$ gilt: $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(C, A) \to Mor_{\mathcal{C}}(C, B)$ injektiv.

Epimorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : B \to C$ gilt: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $f_C^* : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ injektiv.

Isomorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

Anmerkung. In der Situation von 2.4.11 gilt:

- f Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in $\mathcal{C}^{op}$.
- f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ ist Isomorphismus in $\mathcal{C}^{op}$.
- Ist f ein Isomorphismus und $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$, dann ist g ein eindeutig bestimmt (und wird mit f^{-1} bezeichnet), denn sind $g_1, g_2 : B \to A$ mit dieser Eigenschaft $\Rightarrow g_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$.
- In Mengen ist f Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ injektv, f Epimorphismus $Lraf$ surjektiv, f Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv. Im Allgemeinen ist dies für Kategorien, in denen die Morphismen Abbildungen sind, jedoch falsch (vgl. Bsp. 4.13)

Bemerkung 2.4.12. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob\mathcal{C}, f : A \to B$ ein Isomorphismus. Dann ist f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.*

Beweis. Seien $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, g_1, g_2 : C \to A$ mit $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2) \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow f$ Monomorphimus. Analog wird gezeigt dass f ein Epimorphimus. ■

Anmerkung. Die Umkehrung von 2.4.12 ist im Allgemeinen falsch, siehe nächstes Beispiel.

Beispiel 2.4.13.
a) Sei $\mathcal{C} = Top$ die Kategorie der Topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Wir betrachten

$$\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \text{diskrete Topologie}) \to (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$$

Diese ist eine stetige Abbildung, ein Monomorphismus sowie ein Epimorphismus, jedoch kein Isomorphismus (Nicht hömöomorph, da kein stetiges Inverses)

b) Sei $\mathcal{C} = Ringe, f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ Inklusion. f ist ein Monomorphismus und ein Epimorphimus (Achtung, denn: Für $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \to R$ Ringhomomorphismus ist ein Ring R mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, das heißt $g_1\big|_{\mathbb{Z}} = g_2\big|_{\mathbb{Z}}$ folgt $g_1 = g_2$ wegen der Universellen Eigenschaft von $\mathbb{Q}$ als Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$), aber kein Isomorphismus. Insbesondere ist ein Epimorphismus in $\mathcal{C}$ im obigen Sinne ("kategorieller Epimorphismus") nicht dasselbe wie ein surjektiver Ringhomomorphismus.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "f"] & \mathbb{Q} \arrow[d, shift right, "g_1"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Definition 2.4.14. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* t von F nach G ($t : F \Rightarrow G$) ist eine Familie $(t_A)_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ von Morphismen $t_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, GA)$, sodass

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "t_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\ FB \arrow[r, "t_B"] & GB \end{tikzcd}$$

für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ f : A \to B$ kommutiert. Man sagt häufig auch $t_A : FA \to GA$ ist natürlich in A.

Beispiel 2.4.15.
a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ f : A \to B$. Dann ist

$$f^* = (f_Y^*)_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{C} \to$ Mengen, denn für $Y_1, Y_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $g : Y_1 \to Y_2$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_1) & \xrightarrow{f_{Y_1}^*} & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y_1) \\ {\scriptstyle g_*^B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*^A} \\ \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) & \xrightarrow{f_{Y_2}^*} & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \end{array}$$

denn: Für $\varphi : B \to Y_1$ ist

$$(g_*^A \circ f_{Y_1}^*)(\varphi) = g_*^A(\varphi \circ f) = g \circ \varphi \circ f = f_{Y_2}^*(g \circ \varphi) = (f_{Y_2}^* \circ g_*^B)(\varphi)$$

b) Sei K-VR die Kategorie der K-Vektorräume über einem festen Körper K (mit linearen Abbildungen als Morphismen). Für $V \in K$-VR sei $V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum. Die kanonische Abbildung $\varphi_v : V \to V^{**},\ w \mapsto \varphi_v(w) : V^* \to K$, $\psi \mapsto \psi(w)$ ist natürlich in V, denn für $V, W \in K$-VR, eine lineare Abbildung $f : V \to W$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_v} & V^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ W & \xrightarrow{\varphi_w} & W^{**} \end{array}$$

mit $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$, $(\varphi : V^* \to K) \mapsto f^{**}(\varphi) : W^* \to K$, $\psi \mapsto \varphi(\underbrace{\psi \circ f}_{\in V^*})$, d.h.

$\varphi : id_V \Rightarrow \_^{**}$ ist eine natürliche Transformation von $id : K$-VR$\to K$-VR nach $\_^{**} : K$-VR$\to K$-VR.

Definition 2.4.16. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren, $t : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. t heißt *natürliche Äquivalenz* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $t_A : FA \to GA$ ein Isomorphismus. (Notation $t : F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$)

Anmerkung. Ist $t : F \to G$ eine natürliche Äquivalenz, dann existiert eine natürliche Äquivalenz $t^{-1} : G \overset{\sim}{\Rightarrow} F$ via $t_A^{-1} = (t_A)^{-1} : GA \to FA$

Beispiel 2.4.17. Bezeichne K-VR$_{<\infty}$ die Kategorie der endlichdiimensionalen K-VR. Dann ist die natürliche Transformation $\varphi : \text{id} \Rightarrow \_^{**}$ aus Beispiel 4.15 eine natürliche Äquivalenz.

Definition 2.4.18. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. F heißt *Kategorienäquivalenz* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Äquivalenzen $F \circ G \overset{\sim}{\Rightarrow} \text{id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \overset{\sim}{\Rightarrow} \text{id}_{\mathcal{C}}$

Beispiel 2.4.19. Der Funktor $\_^* : K\text{-VR}_{<\infty} \to (K\text{-VR}_{<\infty})^{\mathrm{op}},\ v \mapsto V^*$ ist eine Kategorienäquivalenz, denn mit $\widetilde{\_^*} : (K\text{-VR}_{<\infty})^{\mathrm{op}} \to K\text{-VR}_{<\infty},\ W \mapsto W^*$ gilt offenbar $\widetilde{\_^*} \circ \_^* = \_^{**}$, und $\varphi : \mathrm{id} \overset{\sim}{\Rightarrow} \_^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz, analog andersherum (d.h. die Kategorie $K\text{-VR}_{<\infty}$ ist selbstdual).

Satz 2.4.20 (Yoneda-Lemma). *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in Ob\,\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to$ Mengen ein Funktor. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \{\textit{natürliche Transformationen } t : Mor_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F\} & \to & F(A) \\ t & \mapsto & t_a(\mathrm{id}_A) \end{array}$$

Beweis. 1. Sei $a \in F(A)$. Wir definieren $S^a : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F$ als $s^a = (s^a_B)_{B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ mit

$$s^a_B := F(\varphi)(a) \quad \text{für } \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

s^a ist eine natürliche Transformation, denn für $B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f : B \to C$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "s^a_B"] \arrow[d, "f^A_*"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "s^a_C"] & F(C) \end{tikzcd}$$

denn:

$$\begin{array}{rcl} (F(f) \circ s^a_B)(\varphi) & = & F(f)(s^a_B(\varphi)) = F(f)(F(\varphi)(a)) = F(f \circ \varphi)(a) \\ & = & F(f^A_*(\varphi))(a) = s^a_C(f^A_*(\varphi)) \end{array}$$

2. Setze

$$\begin{array}{rcl} \Psi : F(A) & \to & \{\text{natürliche Transformationen } t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F\} \\ a & \mapsto & s^a \end{array}$$

Dann sind Φ, Ψ invers zueinander, denn: Für $a \in F(A)$, $t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow F$ gilt

$$(\Phi \circ \Psi)(a) = \Phi(s^a) = s^a_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(a) = \mathrm{id}_{FA}(a) = a$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(t) = \Psi(t_A(\mathrm{id}_A))$$

und für $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ gilt wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\varphi^A_*"'] & F(A) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "t_B"] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$(\Psi(t_A(\mathrm{id}_A)))_B(\varphi) = s_B^{t_A(\mathrm{id}_A)}(\varphi) = F(\varphi)(t_A(\mathrm{id}_A)) = t_B(\varphi_*^A(\mathrm{id}_A)) = t_B(\varphi)$$

d.h. $(\Psi \circ \Phi)(t) = t$ ■

Folgerung 2.4.21. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob\,\mathcal{C}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Mor_{\mathcal{C}}(B,A) & \longrightarrow & \{\textit{natürliche Transformationen } Mor_{\mathcal{C}}(A,-) \Rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(B,-)\} \\ \psi : B \to A & \mapsto & \psi^* : Mor_{\mathcal{C}}(A,-) \to Mor_{\mathcal{C}}(B,-) \end{array}$$

bijektiv.

Beweis. Wende 2.4.20 auf $F = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,-)$ and. In der Notation des Beweises von 4.20 ist $\Psi(\psi) = s^\psi = (s_C^\psi)_{C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$, wobei für $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)$ gilt:

$$(s_C^\psi)(\varphi) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,-)(\varphi)(\psi) = \varphi_*^B(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi_C^*(\varphi)$$

d.h. $\Psi(\psi) = \psi^*$. ■

Anmerkung.

- Folgerung 2.4.21 liefert einen sogenannten volltreuen Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Funk}(\mathcal{C}, \mathrm{Mengen})$, wobei $A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-)$, wobei $\mathrm{Funk}(\mathcal{C}, \mathrm{Mengen})$ die Funktorkategorie von $\mathcal{C}$ nach Mengen bezeichnet (Objekte sind Funktoren: $\mathcal{C} \to$ Mengen, und Morphismen die natürlichen Transformationen) (*Yoneda-Einbettung*)

- Folgerung 2.4.21 liefert insbesondere eine Verallgemeinerung des Satzes von Caley aus der Gruppentheorie: Für eine Gruppe G ist $G \hookrightarrow S(G)$, $g \mapsto \tau_G$ (Linkstranslation mit $g \in G$) ein injektiver Gruppehomomorphismus. Wende 2.4.21 an auf:
  - $\mathcal{C}$ = Kategorie mit $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \{\cdot\}$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot,\cdot) = G$
  - $A = B = \cdot$

  und erhalte eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} G = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot,\cdot) & \longrightarrow & \{\text{natürliche Transformationen } \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot,-) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot,-)\} \\ g & \mapsto & g^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot,-) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot,-) \mathrel{\widehat{=}} \tau_G \end{array}$$

2.5 Abelsche Kategorien

Definition 2.5.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. A heißt

Anfangsobjekt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M)$ einelementig

Endobjekt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(M, A)$ einelementig

Anmerkung. Falls sie existieren, sind Anfangs- und Endobjekte eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (denn: Sind A_1, A_2 Anfangsobjekte, dann ist $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) = \{\alpha\}$, $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_1) = \{\beta\}$, $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_1) = \{\mathrm{id}_{A_1}\}$ und analog $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_2) = \{\mathrm{id}_{A_2}\}$, insbesondere ist $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{A_1}$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{A_2}$).

Definition 2.5.2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißt *Nullobjekt* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ 0 ist sowohl Anfangs- als auch Endobjekt. Existiert in $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0, so enthält $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für alle $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen ausgezeichnetes Element, den “Nullmorphismus“ $A \to 0 \to B$

Anmerkung. Der Nullmorphismus in $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist unabhängig von der Wahl des Nullobjekts:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & \tilde{0} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.5.3. a) In Mengen ist $\emptyset$ ein Anfangsobjekt, jede einelementige Menge ist ein Endobjekt, insbesondere existiert in Mengen kein Nullobjekt

b) in Ringe ist $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt, und der Nullring ist ein Endobjekt. In Ringe existiert ebenfalls ein Nullobjekt

c) In R-Mod ist der Nullmodul ein Nullobjekt.

Definition 2.5.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* $(A, (p_i)_{i\in I})$ von $(A_i)_{i\in I}$ ist ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $p_i : A \to A_i$, sodass für alle $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$die Abbildung

$$Mor_C(B, A) \to \prod_{i\in I} Mor_C(B, A_i), \quad f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I}$$

bijektiv ist, das heißt für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Morphismen $f_i : B \to A_i$ existiert ein eindeutig bestimmtes $f : B \to A$ mit $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 2.5.5. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$, $(A,(p_i)_{i\in I}),(A',(p'_i)_{i\in I})$, Produkte von $(A_i)_{i\in I}$.Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $f : A \to A'$, sodass für alle $i \in I$ gilt: $p'_i \circ f = p_i$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_i"'] & & A' \arrow[dl, "p'_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

(kurz: A, A' sind kanonisch isomorph. Wir sprechen daher oft von "dem Produkt" und schreiben $A = \prod_{i\in I} A_i$

Beweis.

1. Wir wenden die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A',(p'_i)_{i\in I}), B = A, f_i = p_i \Rightarrow$ Wir erhalten einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : A \to A'$ mit $p'_i \circ f = p_i$ für alle $i \in I$. Analog: Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt $(A,(p_i)_{i\in I}), B = A', f_i = p'_i \Rightarrow$ Es existiert genau ein $g : A' \to A$ mit $p_i \circ g = p'_i$ für alle $i \in I$.
2. Es gilt $g \circ f = id_A, f \circ g = id_{A'}$ (d.h f ist ein Isomorphismus), denn: Für alle $i \in I$ ist $p_i \circ (g \circ f) = (p_i \circ g) \circ f = p'_i \circ f = p_i$. Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt$(A,(p_i)_{i\in I}), B = A, f_i = p_i$ an: Es existiert genau ein $h : A \to A$ mit $p_i \circ h = p_i$ für alle $i \in I$ (nämlich $h = id_A$) Somit ist $id_A = g \circ f$. Analog: $f \circ g = id_{A'}$. ∎

Beispiel 2.5.6.

a) In Mengen ist das Produkt das kartesische Produkt.

b) In R-Mod ist das Produkt das direkte Produkt.

c) In der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen existiert kein Produkt der Familie $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Übung)

Bemerkung + Definition 2.5.7. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein *Koprodukt* $(A,(q_i)_{i\in I})$ von $(A_i)_{i\in I}$ ist ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $q_i : A_i \to A$, sodass $(A,(q_i)_{i\in I})$ Ein Produkt von $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}^{op}$ ist, das heißt für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$Mor_C(A,B) \to \prod_{i\in I} Mor_C(A_i,B), \quad f \mapsto (f \circ q_i)_{i\in I}$$

bijektiv. Falls es existiert ist ein Koprodukt von $(A_i)_{i\in I}$ eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (analog zu 2.5.5). Wir sprechen dan von dem *Koprodukt* und schreiben $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ $(= \coprod_{i\in I} A_i)$

Beispiel 2.5.8. a) In Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.

b) in R-Mod ist das Koprodukt die direkte Summe.

c) In der Kategorie der Gruppen existiert ein Koprodukt, das sogenannte freie Produkt (siehe Zettel Algebra 1)

Definition 2.5.9. Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. $\mathcal{A}$ heißt *additiv*, wenn gilt:

($K1$) $\mathcal{A}$ hat ein Nullobjekt,

($K2$) In $\mathcal{A}$ existieren endliche Produkte

($K3$) Für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ trägt $Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$ die Struktur einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphismus als neutrales Element, sodass für alle $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ die Verknüpfung:

$$Mor_{\mathcal{A}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{\circ} Mor_{\mathcal{A}}(A, C)$$

bilinear ist.

Anmerkung. In einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ schreiben wir auch $Hom_{\mathcal{A}}$ für $Mor_{\mathcal{A}}$.

Beispiel 2.5.10. a) R-Mod ist eine additive Kategorie

b) Ringe sind keine additive Kategorie (kein Nullobjekt, vgl 2.5.3(b)).

Satz 2.5.11. *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A_1, A_2 \in Ob\,\mathcal{A}$,$(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$ Produkt von $A_1 \times A_2$, $i_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch $id_{A_1} : A_1 \to A_1, 0 : A_1 \to A_2$. Analog sei $i_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch $0 : A_2 \to A_1, id : A_2 \to A_2$. Dann ist $(A_1 \times A_2, (i_1, i_2))$ ein Koprodukt von A_1, A_2 in $\mathcal{A}$.*

Beweis. 1. Behauptung: $\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$ stimmt mit $id_{A_1 \times A_2}$ überein. Denn: Es ist

$$p_1 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\mathrm{id}_{A_1}} \circ p_1 + \underbrace{p_1 \circ \iota_2}_{=0:A_2 \to A_1} \circ p_2 = p_1 = p_1 \circ id_{A_1 \times A_2}$$

Analog:

$$p_2 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = p_2 = p_2 \circ id_{A_1 \times A_2} \overset{UE}{\Rightarrow} \iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 = id_{A_1 \times A_2}$$

2. Universelle Eigenschaft des Koprodukts: Sei $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$
   Existenz: Wir setzen $f := f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \to B$. DAnn ist
   $$f \circ \iota_1 = f_1 \circ \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\mathrm{id}_{A_1}} + f_2 \circ \underbrace{p_2 \circ \iota_1}_{=0:A_1 \to A_2} = f_1.$$
   Analog: $f \circ i_2 = f_2$.
   Eindeutigkeit: Sei $f' : A_1 \times A_2 \to B$ mit $f' \circ \iota_1 = f_1, f' \circ \iota_1 = f_2$.. Dann folgt
   $$f' = f' \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{f' \circ \iota_1}_{=f_1} \circ p_1 + \underbrace{f' \circ \iota_2}_{=f_2} \circ p_2 = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 = f$$

Folgerung 2.5.12. *Sei $\mathcal{A}$ eine Additive Kategorie. Dann existieren in $\mathcal{A}$ endliche Koprodukte.*

Definition 2.5.13. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ additve Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor. F heißt *additiv* “ $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für alle $A, A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ ist eine Abbildung:
$$Mor_{\mathcal{A}}(A, A') \to Mor_{\mathcal{B}}(FA, FA'), \quad f \mapsto F(f)$$
ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

Anmerkung. F additiv $\Rightarrow F(A \oplus A') = F(A) \oplus F(A')$ (Übungen)

Bemerkung + Definition 2.5.14. Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}, f : A \to A'$. Ein *Kern* (B, ι) von f ist ein Objekt $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\iota : B \to A$, sodass $f \circ \iota = 0$ ist und für alle $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ die Abbildung:
$$Hom_{\mathcal{A}}(C, B) \longrightarrow \{g \in Hom_{\mathcal{A}}(C, A) | f \circ g = 0\}, \quad h \mapsto \iota \circ h$$
bijektiv ist, das heißt für alle $g : C \to A$ mit $f \circ g = 0$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : C \to B$ mit $g = \iota \circ h$:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$
Ist (B', ι') ein weiterer Kern von f, dann existiert ein eindeutig bestimmte Isomorphismus $\alpha : B \to B'$ mit $\iota = \iota' \circ \alpha$:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\iota"'] & & B' \arrow[dl, "\iota'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$
Wir nennen (B, ι) daher auch “den Kern“ von$f$ und schreiben $\ker f = (B, \iota)$ beziehungsweise kürzer: $\ker f = B$ oder auch $\ker f = \iota$

Anmerkung. Die Existenz von Kernen ist im Allgemeinen nicht gegeben

Beispiel 2.5.15. In R-Mod ist der kategorielle Kern gegeben durch die Inklusion des gewöhnlichen Kerns:

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, hook, "\iota"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

$f \circ g = 0 \Rightarrow \operatorname{im} g \subseteq \ker f$ setze $h := g\big|^{\ker f} : C \in \ker f$, dann ist $\iota \circ h = g$ und h ist eindeutig mit dieser Bedingung.

Bemerkung 2.5.16. *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, A' \in Ob\,\mathcal{A}, f : A \to A', (\ker f, \iota)$ Kern von f. Dann ist ι ein Monomorphismus.*

Beweis. Seien $h_1, h_2 : C \to \ker f$ mit $\iota \circ h_1 = \iota \circ h_2 =: g \Rightarrow f \circ g = f \circ \iota \circ h_1 = 0$ Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $h : C \to \ker f$ mit $g = \iota \circ h \Rightarrow h = h_1 = h_2$. ∎

Bemerkung + Definition 2.5.17. Dual zum Kern definiert man den Kokern (Notation: coker f). Die Aussagen 2.5.14, 2.5.16 gelten dual.

Definition 2.5.18. Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, A' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}, f : A \to A'$

$\operatorname{im} f := \ker(\operatorname{coker} f)$ heißt das *Bild* von f

$\operatorname{coim} f := \operatorname{coker}(\ker f)$ heißt das *Kobild* von f.

Anmerkung. $\operatorname{im} f$ kommt mit einem Monomorphisus $\iota' : \operatorname{im} f \to A'$, $\operatorname{coim} f$ mit einem Epimorphismus $q' : A \to \operatorname{coim} f$.

Beispiel 2.5.19. Sein $\mathcal{A} = R$-Mod ,$f : A \to A'$ R-Modulhomomorphismus. Dann ist

$$\operatorname{im} f = \ker\left({}^{A'}\!/_{\operatorname{im} f},\quad A' \to {}^{A'}\!/_{\operatorname{im} f}\right) = (\operatorname{im} f,\ \operatorname{im} f \hookrightarrow A')$$

$$\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(\ker f,\ \ker f \to A) = \left({}^{A}\!/_{\ker f},\quad A \to {}^{A}\!/_{\ker f}\right)$$

Bemerkung 2.5.20. *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, $A, B \in Ob\,\mathcal{A}$, $f : A \to B$, sodass $\ker f, \operatorname{coker} f, \operatorname{im} f, \operatorname{coim} f$ existieren $(\operatorname{im} f, \iota')$ Bild von f, $(\operatorname{coim} f, q')$ Kobild von f. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\overline{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $f = \iota' \circ \overline{f} \circ q'$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"] & B \\ \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "\iota'"'] \end{tikzcd}$$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"] & B \arrow[r, "q"] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coim} f = \operatorname{coker}\iota \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & \ker q = \operatorname{im} f \arrow[u, "\iota'"] &
\end{tikzcd}$$

1. Existenz: Wegen $f \circ \iota = 0$ existiert nach der Universellen Eigenschaft von coker ein $f' : \operatorname{coim} f \to B$ mit $f = f' \circ q'$. Es ist $q \circ f = 0$, also $q \circ f' \circ q' = q \circ f = 0 = 0 \circ q'$. Da q' ein Epimorphismus ist, folgt $q \circ f' = 0$. Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns, existiert ein $\overline{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $\iota' \circ \overline{f} = f'$, also $\iota' \circ \overline{f} \circ q' = f' \circ q' = f$.

2. Eindeutigkeit: Sei $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $\iota' \circ \overline{f} \circ q' = f = \iota' \circ \tilde{f} \circ q'$, woraus, wegen ι' Monomorphismus zunächst $\overline{f} \circ q' = \tilde{f} \circ q'$ folgt und dann, wegen q' Epimorphismus, $\overline{f} = \tilde{f}$. ■

Definition 2.5.21. Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. $\mathcal{A}$ heißt *abelsche Kategorie*, wenn gilt:

(Ab1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat Kern und Kokern

(Ab2) (*Homomorphiesatz*). Für jeden Morphismus $f : A \to A'$ in $\mathcal{A}$ ist der induzierte Morphismus

$$\overline{f} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$$

ein Isomorphismus

Beispiel 2.5.22. a) R-Mod ist eine abelsche Kategorie

b) Die Kategorie der freien $\mathbb{Z}$-Moduln ist additiv, aber nicht abelsch: (Ab1) ist nicht erfüllt.

c) Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen ist eine additive Kategorie, die (Ab1) erfüllt, aber nicht (Ab2): $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ (links mit der diskreten Topologie und rechts mit der Standardtopologie) $\overline{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ ist kein Isomorphismus.

Anmerkung. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, dann ist auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ abelsche Kategorie (einziger nichttrivialer Punkt: Existenz endlicher Produkte, was jedoch aus 2.5.11 folgt).

Satz 2.5.23. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $A, A' \in Ob\,\mathcal{A}$, $f : A \to A'$ Mono- und Epimorphsimus. Dann ist f ein Isomorphismus.*

Beweis. • Da f ein Monomorphismus ist, ist $(0, 0 \to A)$ ein Kern von f, denn:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} \qquad f \circ g = 0 = f \circ 0 \overset{f \text{ Mono}}{\Longrightarrow} g = 0$$

• $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(0 \to A) = (A, \mathrm{id}_A)$, denn

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, dashed, "g"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Analog ist $\operatorname{im} f = (A', \mathrm{id}_{A'})$, also ist $\overline{f} = f$ ein Isomorphismus nach (Ab2). ■

Bemerkung 2.5.24. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $A, A' \in Ob\,\mathcal{A}$, $f : A \to A'$. Dann gilt:*

a) *f Monomorphismus* $\Leftrightarrow \ker f = 0$

b) *f Epimorphismus* $\Leftrightarrow \operatorname{coker} f = 0$

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Definition 2.5.25. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $A, A', A'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$.

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

heißt eine *exakte Folge* $\Leftrightarrow \operatorname{im} f \cong \ker g$ in dem Sinne, dass es einen Isomorphismus $\operatorname{im} f \xrightarrow{\alpha} \ker g$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A & \\ \operatorname{im} f \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[rr, "\alpha"] & & \ker g \arrow[ul, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert (wobei $(\ker g, \iota)$ Kern von g, $(\operatorname{im} f, \iota')$ Bild von f)

Satz 2.5.26. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann gilt:*

a) *In $\mathcal{A}$ gilt das Fünferlemma*

b) *In $\mathcal{A}$ gilt das Schlangenlemma* *c) Eine Folge* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *in* $\mathcal{A}$ *ist genau dann exakte, wenn für jedes Objekt* $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ *die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakte ist.

d) Eine Folge $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ *in* $\mathcal{A}$ *ist genau dann exakte, wenn für jedes* $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ *die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

exakt ist.

Beweis. *a*) Stacks-Project: 12.5.17, *b*) 12.5.20
c), *d*) werden in 2.6 für R-Mod bewiesen. ∎

Definition 2.5.27. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. F heißt

exakt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ F überführt kurze exakte Folgen in $\mathcal{A}$ in kurze exakte Folgen in $\mathcal{B}$

liksexakt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jede exakte Folge $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ in $\mathcal{A}$ ist die Folge

$$0 \longrightarrow FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM''$$

exakt

rechtsexakt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jede exakte Folge $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ ist die Folge

$$FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM'' \longrightarrow 0$$

exakt.

Anmerkung. F ist exakt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ F ist links- und rechtsexakt $\Leftrightarrow$ Für alle exakten Folgen $A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ in $\mathcal{A}$ ist $FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''$ exakt (Übung)

Definition 2.5.28. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $I, P \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. I heißt

injektiv $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jeden Monomorphismus $\iota : A \hookrightarrow B$ und jeden Morphismus $f : A \to I$ existiert ein Morphismus $g : B \to I$ mit $g \circ \iota = f$, d.h. $\iota_I^* : \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, I) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I)$ ist surjektiv.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ I \end{tikzcd}$$

P heißt

projektiv $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ P ist injektiv in $\mathcal{A}^{\text{op}}$, d.h. für jeden Epimorphismus $p : B \twoheadrightarrow A$ und jeden Morphismus $f : P \to A$ existiert ein Morphismus $g : P \to B$ mit $p \circ g = f$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ B \arrow[r, "p"'] & A \end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.5.29. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $I \in Ob\,\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:*

i) I ist injektiv

ii) Der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{op} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt

Beweis. Nach 2.5.26 c) ist für alle exakten Folgen $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$$

exakt. Somit genügt es zu zeigen, dass I injektiv $\Leftrightarrow$ Für alle exakten Folgen $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A$ in $\mathcal{A}$ ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \xrightarrow{\iota_I^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $\mathbb{Z}$-Mod, d.h. $\iota_I^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$ ist surjektiv. Die Exaktheit von $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A$ ist äquivalent dazu, dass ι ein Monomorphismus ist. ∎

Bemerkung 2.5.30. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $P \in Ob\,\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:*

i) P ist projektiv

ii) Der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt.

Definition 2.5.31. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ (additive) Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (additive) Funktoren. Dann heißt F *linksadjungiert* zu G (und G *rechtsadjungiert* zu F) $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \to$ Mengen (bzw. $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$-Mod im additiven Fall).
Notation: $F \dashv G$

Beispiel 2.5.32. F : Mengen $\to$ K-VR, $M \mapsto K^{(M)}$, $G : K$-VR $\to$ Mengen der Vergissfunktor. Es ist

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Mengen}}(M, V) \xrightarrow[\text{Bij.}]{\sim} \mathrm{Mor}_{K\text{-VR}}(K^{(M)}, V)$$

für alle Mengen M und K-VR, wobei die naheliegenden Diagramme kommutieren, d.h. wir haben eine natürliche Äquvalent.

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Mengen}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_{K\text{-VR}}(F-, -)$$

also $F \dashv G$.

Satz 2.5.33. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ additive Funktoren mit $F \dashv G$. Dann gilt:*

a) F ist rechtsexakt

b) Ist F exakt, dann überführt G injektive Objekte aus $\mathcal{B}$ in injektive Objekte aus $\mathcal{A}$.

c) G ist linksexakt

d) Ist G exakt, dann überführt F projektive Objekte aus $\mathcal{A}$ in projektive Objekte aus $\mathcal{B}$.

Beweis. a) Sei $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge in $\mathcal{A}$. Nach 2.5.26 c) ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GB)$$

exakt für alle $B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{B}$ und , da $F \dashv G$ ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA', B)$$

exakt für alle $B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{B}$. Damit ist nach 2.5.26 c)

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

exakt.

b) Sei $I \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{B}$ injektiv. Es ist zu zeigen, dass $GI \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ injektiv ist, d.h. der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GJ) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt. Allerdings gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GJ) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, J)$ und letzterer ist exakt, da F exakt und I injektiv.

Definition 2.5.34. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. F heißt *volltreu* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A, B \in \text{Ob}\,\mathcal{C}$ ist die Abb $Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FA, FB), f \mapsto F(f)$ bijektiv.

Satz 2.5.35 (Einbettungssatz von Freyd-Mitchell). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie (dh. Ob $\mathcal{A}$ ist eine Menge) Dann existiert ein Ring R und ein volltreuer exakter Funktor $F : \mathcal{A} \to R$-Mod*

Anmerkung.

- F induziert eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{A}$ und einer vollen Unterkategorie von $R - Mod$ (das heißt $\mathcal{C}$ ist eine Unterkategorie von $R - Mod$ mit $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{R-Mod}(A, B)$ für alle $A, B \in \text{Ob}\,\mathcal{C}$)
- In $\mathcal{A}$ berechnete Kerne und Kokerne entsprechen über diese Äquivalenz Kernen und Kokernen in $R - Mod$. (Achtung: injektive/projektive Objekte korrespondieren im Allgemeinen nicht zu injektiven/projektiven R-Moduln)

2.6 Projektive und Injektive Moduln

Satz 2.6.1. *Sei* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ *eine Folge von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ *ist exakt*

ii) Für jeden R-Modul M ist die Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} Hom_R(M, N'')$$

ist exakt.

insbesondere ist der kovariante Funktor $Hom_R(M, -) : R - Mod \to \mathbb{Z}\text{-}Mod$ *linksexakt*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ exakt.

1. Injektivität von f_*^M : Sei $\varphi \in Hom_R(M, N')$ mit $f_*^M(\varphi) = 0 \Rightarrow f \circ \varphi = 0$ Wegen f injektiv, folgt $\varphi = 0$, also $\ker f_*^M = 0$
2. $\operatorname{im} f_*^M = \ker g_*^M$,
   "$\subseteq$" Es ist $g_*^M \circ f_*^M = (g \circ f)_*^M = 0_*^M = 0$, also $\operatorname{im} f_*^M \subseteq \ker g_*^M$,
   "$\supseteq$ " Sei $\varphi : M \to N$ mit $\varphi \in g_*^M \Rightarrow g \circ \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{im} \varphi \subseteq \ker g = \operatorname{im} f$. Setze $\varphi^{'} : M \to \operatorname{im} \varphi \to \operatorname{im} f \to N' \Rightarrow \varphi^{'} \in Hom_R(M, N')$ mit $f \circ \varphi^{'} = \varphi \Rightarrow \varphi \in \operatorname{im} f_*^M$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} Hom_R(M, N'') \longrightarrow 0$ exakt für alle R-Moduln M.

1. f injektiv: Setze $M := \ker f$, $\iota : \ker f \to N'$ Inklusion. Dann ist $f_*^M(\iota) = f \circ \iota = 0$. Und, da f_*^M injektiv, ist $\iota = 0 \Rightarrow \ker f = 0$
2. $\operatorname{im} f = \ker g$:
   "$\subseteq$" Setze $M := N' \Rightarrow 0 = 0_*^M(id_{N'}) = (g_*^M \circ f_*^M)(id_{N'}) = ((g \circ f)_*^M)(id_{N'}) = g \circ f \circ id_{N'} = g \circ f$
   "$\supseteq$ "Setze $M := \ker g$, $\iota : \ker g \to N \Rightarrow g_*^M(\iota) = g \circ \iota = 0 \Rightarrow i \in \operatorname{im} f_*^M$ Dann existiert ein $\varphi : \ker g \to N'$ mit $f \circ \varphi = \iota$. Somit: $x \in \ker g \Rightarrow x = \iota(x) = f(\varphi(x)) \in \operatorname{im} f$. ■

Anmerkung. Der kovariante Funktor $\operatorname{Hom}_R(M, -)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

Beispiel 2.6.2. Sei $R = \mathbb{Z}, M = {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x, \pi$ kanonische projektion. Die Abbildung $\pi_*^M : Hom_{\mathbb{Z}}\left({}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}\right) \to Hom_{\mathbb{Z}}\left({}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}, {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}\right)$ ist nicht surjektiv, denn: Für $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}({}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ gilt:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(1+1) = \varphi(2 \cdot 1) = 2\varphi(1)$$

, also $\varphi(1) = 0$, das heißt $\varphi = 0$. Insbesondere ist $\pi_*^M(\varphi) = \pi_*^M(0) = 0 \neq \mathrm{id}_{{}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}}$. Mit anderen Worten ${}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ ist kein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

Satz 2.6.3. *Sei P ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *P ist ein projektiver R-Modul*

ii) $\mathrm{Hom}_R(P, -) : R\text{-}Mod \to \mathbb{Z}\text{-}Mod$ *ist exakt.*

iii) *Für jeden Epimorphisumus $\pi : M \to N$ von R-Moduln und jeden Hom $\varphi : P \to N$ existiert ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $\pi \circ \psi = \varphi$*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

iv) *Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ von R-Moduln spaltet.*

v) *Es gibt einen R-Modul P', sodass $P \oplus P'$ ein freier R-Modul ist (das heißt P ist direkter Summand eines freien R-Moduls)*

Beweis. $(i) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (ii) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (iii)$ folgt aus Definition 5.30.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sei $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Nach (iii) existiert zu dem Epimorphismus $g : M \to P$ und dem Homomorphismus $\mathrm{id}_P : P \to P$ ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $g \circ \psi = \mathrm{id}_P$, das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, dashed, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

(iv) $\Rightarrow$ *(v)* Es existiert ein freier R-Modul F und ein Epimorphismus $f : F \to P$. Wir erhalten eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$, diese spaltet nach *(iv)* , das heißt $F \simeq P \oplus \ker f$

(v) $\Rightarrow$ *(iii)* Sei $\pi : M \to N$ ein Epimorphismus von R-Moduln, $\varphi : P \to N$ ein Homomorphimus. Wegen *(v)* existiert ein R-Modul P' sodass $F := P \oplus P'$ frei ist, Setze

$$\varphi' : F \to N, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x)$$

Sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von F, wähle für $i \in I$ jeweils ein $z_i \in \pi^{-1}(\varphi'(b_i))$. Durch $\psi' : F \to M, b_i \mapsto z_i$ wird ein Homomorphismus definiert mit $\pi \circ \psi' = \varphi'$. Setze

$$\begin{tikzcd}
P \oplus P' = F \arrow[r] \arrow[d, "\psi'"] \arrow[dr, "\varphi'"] & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[l, dashed, bend right] \\
M \arrow[r, "\pi"] & N
\end{tikzcd}$$

$$\psi : P \to M, \quad x \mapsto \psi'((x, 0))$$

dann gilt für $x \in P : \pi(\psi(x)) = \pi(\psi'((x, 0))) = \varphi'((x, 0)) = \varphi(x)$ das heißt $\pi \circ \psi = \varphi$. ■

Folgerung 2.6.4. *a) Jeder freie R-Modul ist ein projektiver R-Modul*

b) Jeder R-Modul ist ein Faktormodul eines projektiven R-Moduls.

Beweis. a) klar nach 2.6.3.

b) da jeder R-Modul Faktormodul eines freien R-Moduls ist. ■

Satz 2.6.5. *Sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *ist exakt.*

ii) Für jeden R-Modul N ist die Sequenz abelscher Gruppen:

$$0 \longrightarrow Hom_R(M'', N) \xrightarrow{g_N^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{f_N^*} Hom_R(M', N) \quad \textit{exakt.}$$

Insbesondere ist der kontravariante Funktor: $Hom_R(-, N) : R - Mod^{op} \to \mathbb{Z}$*-Mod linksexakt.*

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Anmerkung. Der kontravariante Funktor $Hom_R(-, N)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

Beispiel 2.6.6. Sei $R = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x$ und π der kanonischen Projektion. Die Abbildung $f^*_{\mathbb{Z}} : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist nicht surjektiv, denn für alle $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist

$$(f^*_{\mathbb{Z}}(\varphi))(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = 2\varphi(x) \in 2\mathbb{Z}$$

insbesondere ist $f^*_{\mathbb{Z}}(\varphi) \neq id_{\mathbb{Z}}$. Mit anderen Worten: $\mathbb{Z}$ ist kein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

Satz 2.6.7. *Sei Q ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) Q ist ein injektiver R-Modul

ii) $Hom_R(-, Q) : R{-}Mod \to \mathbb{Z}{-}Mod$ ist exakt.

iii) Für jeden Monomorphismus $\iota : L \to M$ von R-Moduln und jedem Homomorphismus $\varphi : L \to Q$ exsistiert ein Homomorphismus $\psi : M \to Q$ von R-Moduln mit $\psi \circ \iota = \varphi$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q' & \end{tikzcd}$$

iv) Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ von R-Moduln spaltet.

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ folgt aus 2.5.29

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sei $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln. Nach (iii) existiert zum Monomorphismus $f : Q \to M$ von R-Moduln und zum Homomorphismus $id_Q : Q \to Q$ ein Homomorphismus $\psi : M \to Q$ mit $\psi \circ f = id_Q$. das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\psi"] & N \arrow[r] & 0 \\ & Q & & & \end{tikzcd}$$

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Sei $\iota : L \to M$ ein Monomorphismus, $\varphi : L \to Q$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Setze

$$S := \{(\varphi(x), -\iota(x)) |\, x \in L\} \subseteq Q \oplus M \qquad M' := (Q \oplus M)/S, \qquad N := M/\operatorname{im} \iota$$

$\pi : M \to N$ kanonische Projektion.

1. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & y & \longmapsto & \overline{(y,0)} & & & & \\ & & & & \overline{(y,z)} & \longmapsto & \pi(z) & & \end{array}$$

   von R-Moduln. denn:

   - g ist wohldefiniert, denn: $\pi \circ \iota = 0$
   - f ist injektiv, denn $(y, 0) = (0, 0) \Rightarrow$ Es existiert ein $x \in L$ mit $y = \varphi(x), 0 = -\iota(x)$. Wegen ι injektiv, folgt $x = 0 \Rightarrow y = \varphi(0) = 0$
   - g surjektiv, klar
   - $\operatorname{im} f = \ker g$:
     "⊆" klar, wegen $g \circ f = 0$
     "⊆" Sei $\overline{(y,z)} \in \ker g \Rightarrow \pi(z) = 0 \Rightarrow z \in \operatorname{im} \iota$, das heißt es existiert ein $x \in L$ mit $z = \iota(x) = -\iota(-x)$Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{(y,z)} &= \overline{(y, -\iota(-x))} = \overline{(y + \varphi(x), 0)} + \overline{(\varphi(-x), -\iota(-x))} \\ &= \overline{(y + \varphi(x), 0)} = f(y + \varphi(x)) \in \operatorname{im} f. \end{aligned}$$

2. Wegen (iv) spaltet die Sequenz, das heißt es existiert ein R-Modulhomomorphisumus $h : M' \to Q$ mit $h \circ f = id_Q$. Setze

$$\psi : M \to Q, z \mapsto h((0, z))$$

   ψ ist ein R-Modulhomomorphismus. Für $x \in L$ ist

$$\begin{aligned} (\psi \circ \iota)(x) &= h((0, \iota(x))) = h((0, \iota(x))) + h(\varphi(x), -\iota(x)) \\ &= h((\varphi(x), 0)) = h(f(\varphi(x))) = \varphi(x) \end{aligned}$$ ■

   Also ist $\psi \circ \iota = \varphi$

Beispiel 2.6.8. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist V ein injektiver K-Modul, denn für jede exakte Folge $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ von K-Moduln, ist N ein freier K-Modul, d.h. die Folge spaltet.

Satz 2.6.9 (Baer-Kriterium). *Sei Q ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) Q ist ein injektiver R-Modul

ii) Für jedes Linksideal $I \subseteq R$ und jede R-lineare Abbildung $\varphi : I \to Q$ existiert eine R-lineare Abbildung $\psi : R \to Q$ mit $\psi\big|_I = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Betrachte Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Da Q injektiv, Exsistert ein R-Modulhomomorphismus $\psi : R \to Q$ mit $\varphi = \psi \circ \iota = \psi$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $\iota : L \to M$ ein Monomorphismus von R-Moduln, $\varphi : L \to Q$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[dl, dashed, "?"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Ohne Einschränkung sei $L \subseteq M$ ein Untermodul, ι Inklusionsabbildung.

1. Setze $\mathcal{X} := \{(L', \varphi') |\, L' \subseteq M$ Untermodul mit $L \subseteq L', \varphi' : L' \to Q$ R-linear mit $\varphi'\big|_L = \varphi\}$. Dann ist $\mathcal{X} \neq \emptyset$, denn: $(L, \varphi) \in \mathcal{X}$. Auf $\mathcal{X}$ ist die Halbordung "$\leq$" durch
$$(L', \varphi') \leq (L'', \varphi'') \Leftrightarrow L' \subseteq L'',\ \varphi''\big|_{L'} = \varphi'$$
erklärt. $\mathcal{X}$ ist induktiv geordnet bzgl "$\leq$", denn: Sei $(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$ eine totalgeordnete Familie von Elementen aus $\mathcal{X}$. Setze $L' := \bigcup_{i \in I} L_i$. L' ist Untermodul von M (beachte: $a, b \in L' \Rightarrow$ Es existieren i, j mit $a \in L_i, b \in L_j$,ohne Einschränkung: $L_i \subseteq L_j \Rightarrow a + b \in L_j \subseteq L'$) und es ist $L \subseteq L'$. Außerdem kann die R-lineare Abbildung $\varphi' : L' \to Q$ mit $\varphi'|_{L_i} := \varphi_i$ für alle $i \in I$ definieren. (wohldefiniert, denn: Für $i, j \in I$, ohne Einschränkung: $(L_i, \varphi_i) \subseteq (L_j, \varphi_j)$ ist $\varphi_j|_{L_i} = \varphi_i) \Rightarrow (L', \varphi')$ ist obere Schranke für die Familie$(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Mit dem Zornshen Lemma folgt, dass ein maximales Element (L', φ') in $\mathcal{X}$ exsitiert.

2. Behauptung: $L' = M$, denn:
Sei $x \in M$. Setze $I := \{a \in R |\, ax \in L'\} \subseteq R \cdot I$ ist Linksideal in R, und die Abbildung $f : I \to Q, a \mapsto \varphi'(ax)$ ist R-linear. Mit (ii) folgt, dass eine R-lineare Abbildung $g : R \to Q$ mit $g|_I = f$. Setze:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

$$\psi' : L' \oplus R \to Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

und

$$\pi : L' \oplus R \to M, \quad (y, a) \mapsto y + ax$$

welche beide r-Modulhomomorphismen sind. Es ist $\psi'(\ker \pi) = 0$, denn für $(y, a) \in \ker \pi$ ist $y + ax = 0$, also $ax = -y \in L'$, das heißt $a \in I$, also $g(a) = f(a) = \varphi'(ax) = \varphi'(-y) = -\varphi'(y)$und somit $\psi'(y, a) = \varphi'(y) + g(a) = 0 \Rightarrow \psi'$ induziert R-Modulhomomorphismus

$$L' \oplus R/_{\ker \pi} \to Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

Außerdem ist

$$L' + Rx = \operatorname{im} \pi \simeq L' \oplus R/_{\ker \pi} \quad \text{via} \quad y + ax \mapsto (y, a)$$

Wir erhalten den Homomorphismus

$$\psi : L' + Rx \to Q \quad \text{mit} \quad \psi(y + ax) = \varphi'(y) + g(a)$$

für alle $a \in R, y \in L'$, das heißt $\psi|_{L'} = \varphi' \Rightarrow (L', \varphi') \leq (L' + Rx, \psi)$ Wegen (L', φ') maximal folgt dass $L' = L' + Rx \Rightarrow x \in L'$. Somit $M \subseteq L' \subseteq M$, also $M = L'$. ■

Definition 2.6.10. Sei A ein Integritätsbereich (kommutativer nullteilerfreier Ring), M ein A-Modul. M heißt *teilbar* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in A \backslash \{0\}$ ist $aM = M$. $\Leftrightarrow$ Für alle $x \in M, a \in A \backslash \{0\}$ existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$.

Bemerkung 2.6.11. *Sei A ein Integritätsbereich, M ein injektiver A-Modul. Dann ist M teilbar.*

Beweis. Sei $x \in M, a \in A \backslash \{0\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : Aa \to M, \quad ra \mapsto rx$$

φ ist wohldefiniert, denn: $r_1 a = r_2 a \Rightarrow (r_1 - r_2)a = 0$ Da A nullterilerfrei ist folgt $r_1 = r_2$. φ ist A-linear, so folgt mit Satz 2.6.9, dass eine A-lineare Abbildung $\psi : A \to M$ mit $\psi|_{Aa} = \varphi$. Setze $y := \psi(1)$, dann ist $x = \varphi(a) = \psi(a) = \psi(a1) = a\psi(1) = ay$. ■

Bemerkung 2.6.12. *Sei A ein Hauptidealring, M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M injektiv

ii) M teilbar

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ aus 2.6.11
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $I \subseteq A$ ein Ideal, $\varphi : I \to M$ A linear. Falls $I = 0$, dann wird φ durch die Nullabbildung nach A fortgesetzt. Im Folgendem sein $I \neq 0$. Da A ein Hauptidealring ist, existieren $a \in A, a \neq 0$ mit $I = Aa$. Setze $x := \varphi(a) \Rightarrow \varphi(ra) = r\varphi(a) = rx$ für alle $r \in A$. Wegen (ii) existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$. Setze

$$\psi : A \to M, \quad r \mapsto ry$$

Dann ist ψ A-linear und $\psi(ra) = ray = rx = \varphi(ra)$ für alle $r \in A$ das heißt $\psi|_{Aa} = \varphi$. Dann folgt aus 6.9 M ist injektiv. ∎

Beispiel 2.6.13. a) Sei K ein Körper, V ein K-VR $\Rightarrow V$ ist teilbarer K-Modul, also injektiver K-Modul. Ist $\operatorname{char} K = 0$ dann ist V teilbarer $\mathbb{Z}$-Modul, also injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

b) Faktormoduln teilbarer $\mathbb{Z}$-Moduln sind teilbar, somit sind Faktormoduln inketiver $\mathbb{Z}$-Moduln wieder injektive $\mathbb{Z}$-Moduln.

c) Nach (a) sind $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ injektive $\mathbb{Z}$-Moduln, nach (b) also auch ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}, {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$

Ziel injektive R-Moduln sind dierekte Faktoren von kofreien R-Moduln

Anmerkung. M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ via $(a\varphi)(r) = \varphi(ra)$ ein R-Modul. (beachte: $b(a\varphi)(r) = (a\varphi)(rb) = \varphi(rba) = ((ba)\varphi)(r))$

Bemerkung 2.6.14. *Sei M ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ ein injektiver R-Modul. Insbesondere ist $R^v := Hom_{\mathbb{Z}}(R, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}})$ ein injektiver R-Modul.*

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, $\varphi : I \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ R-linear. Nach 2.6.9, genügt es zu zeigen: φ lässt sich auf R fortsetzen. Setze

$$f : I \to M, \quad a \mapsto \varphi(a)(1)$$

Dann ist f ist $\mathbb{Z}$-linear und für $r \in R, a \in I$ gilt: $f(ra) = \varphi(ra)(1) = (r\varphi(a))(1) = \varphi(a)(1r) = \varphi(a)(r)$. Da M ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul, existiert eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $g : R \to M$ mit $g\big|_I = f$. Wir setzen $\psi : R \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M), a \mapsto ag$. ψ ist R-linear, und für $a \in I, r \in R$ ist $\psi(a)(r) = (ag)(r) = g(ra) = f(ra) = \varphi(a)(r)$, das heißt $\psi\big|_I = \varphi$. ∎

Definition 2.6.15. Sei M ein R-Modul. M heißt *kofrei* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert eine Menge I mit $M \simeq (R^v)^I = \prod_{i \in I} R^v$.

Bemerkung 2.6.16. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt:*

a) $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *ist ein projektiver R-Modul* $\Leftrightarrow$ M_i *projektive R-Moduln für alle* $i \in I$.

b) $\prod_{i\in I} M_i$ *ist ein injektiver R-Modul* $\Leftrightarrow$ M_i *ist injektiver R-Modul für alle* $i \in I$.

Beweis. Übungsaufgaben. ■

Satz 2.6.17. *Sei M ein kofreier R-Modul. dann ist M ein injektiver R-Modul.*

Beweis. folgt direkt aus 2.6.16 und 2.6.14 ■

Bemerkung 2.6.18. *Sei M ein R-Modul,* $m \in M, m \neq 0$. *Dann existiert ein R-Modulhomomorphimus* $\varphi : M \to R^v$ *mit* $\varphi(m) \neq 0$.

Beweis. 1. Die Abbildung

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Hom}_R(M, R^v), \psi \mapsto (m \mapsto \varphi_m : R \to {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}, r \mapsto \psi(rm))$$

ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln (tatsächlich sogar ein Isomorphismus).

2. Ist $\psi : M \to {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus mit $\psi(m) \neq 0$ dann ist $\theta(\psi)(m) = \varphi_m \neq 0$ wegen $\varphi_m(1) = \psi(m) \neq 0$, das heißt: $\theta(\psi) : M \to R^v$ ist ein R-Modulhomomorphismus mit $\theta(\psi)(m) \neq 0$

3. Nach 2 genügt es zu zeigen: Es existiert ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphimus $\psi : M \to {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ mit $\psi(m) \neq 0$. Setze $N := \langle m \rangle_{\mathbb{Z}}$.
   1.Fall: $N \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$ für ein $n \in N$. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : N \xrightarrow{\sim} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}} &\longrightarrow {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}} \\ 1 &\longmapsto \tfrac{1}{n} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Dann ist $\psi\ (m) \neq 0$ und, da ${}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, setzt sich $\tilde{\psi}$ auf M fort.
   2. Fall: $N \cong \mathbb{Z}$. Setze dann

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : N \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} &\longrightarrow {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}} \\ 1 &\longmapsto \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Dann ist $\tilde{\psi}(m) \neq 0$, also weiter wie in Fall 1.

, ■

Satz 2.6.19. *Jeder R-Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven, R-Moduls.*

Beweis. Sei $0 \neq M$ ein R-Modul. Nach 6.18 existiert zu jedem $m \in M$ ein R-Modulhomomorphismus $\varphi_m : M \to R^v$ mit $\varphi_m(m) \neq 0$. Wir setzen

$$f : M \longrightarrow \prod_{m \in M\setminus\{0\}} R^v, \quad x \mapsto ((\varphi_m(x))_{m \in M\setminus\{0\}}$$

Dann gilt

- f ist ein R-Modulhomomorphismus
- f ist injekitv, denn: Sei $x \in M$ mit $f(x) = 0$. Dann ist $\varphi_m(x) = 0$ für alle $m \in M\setminus\{0\}$. Wäre $x \neq 0$, dann wäre $\varphi_x(x) = 0$, Widerspruch! ■

Folgerung 2.6.20. *Sei Q ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *Q ist injektiv*

ii) *Es gibt einen R-Modul Q', sodass $Q \times Q'$ ein kofreier R-Modul ist (d.h. Q ist direkter Faktor eines kofreien R-Moduls)*

Beweis. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Nach 2.6.19 existiert ein kofreier R-Modul N, sodass Q Untermodul von N ist. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow {}^{N}/_{Q} \longrightarrow 0$$

spaltet nach 2.6.7, da Q injektiv ist, d.h. $N \cong Q \oplus {}^{N}/_{Q} = Q \times {}^{N}/_{Q}$
ii) $\Rightarrow$ *i)* Ist $Q \times Q'$ kofrei, dann ist nach 6.17 $Q \times Q'$ injektiv und nach 6.16 Q injektiv. ■

2.7 Komplexe

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ stets eine abelsche Kategorie

Definition 2.7.1. Ein *Komplex* $A^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $(A^i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Objekten $A^i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und Morphismen $d_i : A^i \to A^{i+1}$ (*Differentiale*)

$$\ldots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \longrightarrow \ldots$$

sodass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Ein *Komplexhomomorphismus* $f : A^\bullet \to B^\bullet$ in einem Komplexe $B^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \to B^i$, sodass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & A^{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & B^i \arrow[r, "d_i"'] & B^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Anmerkung. Komplexe in $\mathcal{A}$ zusammen mit Komplexhomomorphismenbilden bilden eine abelsche Kategorie (Kerne, Kokerne, endliche Produkte separat an jeder Stelle bilden).

Bemerkung 2.7.2. *Sei $A^\bullet$ ein Komplex in $\mathcal{A}$. Dann induzieren die Differentiale in natürlicher Weise Monomorphismen* $\operatorname{im} d_{i-1} \longrightarrow \ker d_i$ *für $i \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "q_{i-1}"'] & A^i \arrow[r, "d_i"] & A^{i+1} \\
\operatorname{coim} d_{i-1} \arrow[r, "\overline{d}_{i-1}"'] & \operatorname{im} d_{i-1} \arrow[u, "k_{i-1}"] \arrow[r, dashed, "l_i"] & \ker d_i \arrow[ul, "j_i"']
\end{tikzcd}$$

(Es ist k_{i-1} ein Mono-, q_{i-1} ein Epi- und der durch den Homomorphiesatz induzierte Pfeil $\overline{d}_{i-1}$ ein Isomorphismus). Damit ist $0 = d_i \circ d_{i-1} = d_i \circ k_{i-1} \circ \overline{d}_{i-1} \circ q_{i-1}$ und, da q_{i-1} Epi, d_{i-1} Iso, folgt $d_i \circ k_{i-1} = 0$. Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns existiert ein $l_i : \operatorname{im} d_{i-1} \to \ker d_i$ mit $k_{i-1} = j_i \circ l_i$. Nun ist l_i ein Monomorphismus, da $k_{i-1} = j_i \circ l_i$ Monomorphismus. ■

Definition 2.7.3. Sei $A^\bullet$ ein Komplex in $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{Z}^i(A^\bullet) := \ker d_i \qquad (i\text{-Kozykel})$$

$$\mathcal{B}^i(A^\bullet) := \operatorname{im} d_{i-1} \qquad (i\text{-Koränder})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^i(A^\bullet) &:= \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \to \ker d_i) \qquad (i\text{-te Kohomologie})\\ &= \operatorname{coker}(\mathcal{B}^i(A^\bullet) \to \mathcal{Z}^i(A^\bullet))\end{aligned}$$

Anmerkung. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ induziert Homomorphismen

$$\mathcal{Z}^i(f) : Z^i(A^\bullet) \to \mathcal{Z}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{B}^i(f) : \mathcal{B}^i A^\bullet \to \mathcal{B}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{H}^i(f) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet)$$

Satz 2.7.4 (Lange exakte Kohomologiefolge). *Sei*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Komplexen in $\mathcal{A}$ (d.h. die Morphisemen sind Komplexhomomorphismen und für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist

$$0 \longrightarrow A^i \longrightarrow B^i \longrightarrow C^i \longrightarrow 0$$

exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{H}^i(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet) \longrightarrow \ldots$$

Beweis (Beweisskizze).

1. $M^\bullet$ ein Komplex in $\mathcal{A}$. Setze

   $$Q^i(M^\bullet) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \to M^i) \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

   Dann induzieren die Differentiale natürliche Morphismen

   $$\overline{d}_i : Q^i(M^\bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^{i+1}(M^\bullet)$$

   mit $\ker \overline{d}_i = \mathcal{H}^i(M^\bullet)$ und $\operatorname{coker}(\overline{d}_i) = \mathcal{H}^{i+1}(M^\bullet)$

2. Wir erhalten für $i \in \mathbb{Z}$ ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} & Q^i(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_i"] & Q^i(B^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_i"] & Q^i(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{Z}^{i+1}(A^\bullet) \arrow[r] & \mathcal{Z}^{i+1}(B^\bullet) \arrow[r] & \mathcal{Z}^{i+1}(C^\bullet) & \end{tikzcd}$$

3. Das Schlangenlemma liefert nach 1. für jedes $i \in \mathbb{Z}$ eine exakte Folge

$$\mathcal{H}^i(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet)$$

Diese setzen sich zu einer langen exakten Folge aus der Behauptung zusammen. ■

Definition 2.7.5. Sei $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Eine *injektive Auflösung* von A ist ein Komplex

$$I^\bullet : \ I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

bestehend aus injektiven Objekten I^i aus $\mathcal{A}$ mit $I^i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einem Morphismus $\varepsilon : A \longrightarrow I^0$, so dass der *augmentierte Komplex*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist (Notation: $A \longrightarrow I^\bullet$ injektive Auflösung von A).
Eine *projektive Auflösung* von A ist eine injektive Auflösung von A in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, d.h. ein Komplex

$$P^\bullet : \ \dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0$$

aus projektiven Objekten P^i aus $\mathcal{A}$ mit $P^i = 0$ für $i > 0$ zusammen mit einem Morphismus $\varepsilon : P^0 \to A$, sodass der augmentierte Komplex

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

exakt ist (Notation: $P^\bullet \longrightarrow A$ projektive Auflösung).

Anmerkung. Man schreibt in obiger Situation auch $P_i = P^{-i}$ und $\mathcal{H}_i(-) = \mathcal{H}^{-i}(-)$.

Definition 2.7.6. $\mathcal{A}$ hat

genügend viele Injektive“ $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jedes $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ existiert ein injektives Objekt $I \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $\iota : A \to I$.

genügend viele Projektive $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ hat genügend viele Injektive

Beispiel 2.7.7. R-Mod hat nach 6.19 genügend viele Injektive und nach 6.4 genügend viele Projektive.

Bemerkung 2.7.8. *Sei $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Dann gilt:*

a) Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, dann hat A eine injektive Auflösung *b) Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Projektive, dann hat A eine projektive Auflösung*

Beweis. Es genüge *a*) zu zeigen, *b*) folgt dual.

1. Die Situation ist:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & I^0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "\pi_0"'] & & I^1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & I^2 \\
& & & M^0 \arrow[ur, hook, "\iota_0"'] & & M^1 \arrow[ur, "\iota_1"'] &
\end{tikzcd}$$

   Nach Voraussetzung existiert ein injektives Objekt $I^0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $\varepsilon : A \to I^0$. Sei $\operatorname{coker}\varepsilon = (M^0, \pi_0)$. Es existiert ein injektives Objekt I^1 und ein Monomorphismus $\iota_0 : M^0 \hookrightarrow I_1$. Iteriere dieses Verfahren: $\operatorname{coker}(d_0) = (M^1, \pi_1)$, es existiert ein injektives Objekt I^2 und ein Monomorphismus $\iota_1 : M^1 \hookrightarrow I^2$, setze $d_1 := \iota_1 \circ \pi_1$.

2. Exaktheit: bei I^0 gilt:

$$\operatorname{im}\varepsilon = \ker(\operatorname{coker}\varepsilon) = \ker\pi_0 \underset{\text{Mono}}{\overset{\iota}{=}} \ker(\iota_0 \circ \pi_0) = \ker d_0$$

   analog bei den anderen Stellen ■

Satz 2.7.9 (Hufeisenlemma). *$\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive. Gegeben sei ein Diagramm (Schwarz)*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & I'^0 \arrow[r] \arrow[d] & I'^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & I''^0 \arrow[r] \arrow[d] & I''^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, wobei die linke Spalte exakt sei, $A' \to I'^{\bullet}$ eine injektive Auflösung von A', $A'' \to I''^{\bullet}$ eine injektive Auflösung von A''. Dann lässt sich das Daigramm so zu einem kommutativen Diagramm ergänzen (rot), dass $A \to I^{\bullet}$ eine injektive Auflösung von A ist und die Spalten alle exakt sind.

Beweis. in den Standardwerken über homologische Algebra (zumindest für R-Mod). Für den Beweis einer Verallgemeinerung in Kontext abelsche Kategorien siehe Stacks-Project 013P. ■

Frage: in welchem Verhältnis stehen zwei injektive Auflösungen eines Objekts?

Definition 2.7.10. Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen. f, g heißen *homotop* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ es existieren Homomorphismen $s^i : A^{i+1} \to B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s^i \circ d_i$$

(Notation: $f \sim g$)

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & A^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, red, "s^{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, red, "s^i"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & B^i \arrow[r] & B^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Anmerkung.

- Homotopie von Komplexhomomorphismen ist eine Äquivalenzrelation.
- Sind $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von $\mathcal{A}$ in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$, dann erhalten wir einen Komplexhomomorphismus $Ff, Fg : FA^\bullet \to FB^\bullet$ mit$Ff \sim Fg$.

Bemerkung 2.7.11. *Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$. Dann gilt: $\mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet)$*

Beweis. Wir setzen $h := f - g : A^\bullet \to B^\bullet$. Offenbar genügt es zu zeigen: $\mathcal{H}^i(h) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

1. Der Morphismus $\mathcal{Z}^i(h) : \mathcal{Z}^i A^\bullet \to \mathcal{Z}^i B^\bullet$ faktorisiert über $\mathcal{B}^i B^\bullet$, denn:

$$\begin{tikzcd}
\ker d_i = Z^i A^\bullet \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[d, dashed, blue, "\mathcal{Z}^i h"] \arrow[dd, dashed, red, bend right, "\lambda_i"'] & A^i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[d, "h_i"] & & A^{i+1} \arrow[d, "h_{i+1}"] \\
\ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet \arrow[r, hook, "\beta_i"] & B^i \arrow[rr, "d_i"'] \arrow[dr, "\gamma_i"] & & B^{i+1} \\
\operatorname{im} d_{i-1} = \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i \arrow[u, "\theta_i"] \arrow[ur, hook, "\delta_i"'] & & \operatorname{coker} d_{i-1} &
\end{tikzcd}$$

$Z^i(h)$ ist der eindutig bestimmte Morphismus $\mathcal{Z}^i A^\bullet \to \mathcal{Z}^i B^\bullet$ mit $h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$ (beachte: $d_i \circ h_i \circ \alpha_i = h_{i+1} \circ d_i \circ \alpha_i = 0$). Wegen $f \sim g$ existiert eine Famillie $(si)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $s_i : A^{i+1} \to B^i$ mit $h_i = f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s_i \circ d_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$h_i \circ \alpha_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i + s_i \circ \underbrace{d_i \circ \alpha_i}_{=0} = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i$$

Wegen $\gamma_i \circ d_{i-1} = 0$ ist $\overbrace{\gamma_i \circ d_{i-1}}^{=0} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i = 0$, also $\gamma_i \circ h_i \alpha_i = 0$ Aus der Univesellen Eigenschaft des Kerns von γ_i, existiert ein eindeutig bestimmtes $\lambda_i : \mathcal{Z}^i A^\bullet \to \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i$ mit $h_i \circ \alpha_i = \delta_i \circ \lambda_i$ und mit $\delta_i = \beta_i \circ \theta_i \Rightarrow \beta_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$ da β_i ein Monomorphismus folgt: $\theta_i \circ \lambda_i = \mathcal{Z}^i h$.

2. $\mathcal{H}^i h = 0$, denn betrachte die Situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^i A^\bullet \arrow[r, "\theta_i'"] \arrow[d, "\mathcal{B}^i h"] & \mathcal{Z}^i A^\bullet \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i'"] \arrow[d, "\mathcal{Z}^i h"] \arrow[dl, "\lambda_i"'] & \mathcal{H}^i A^\bullet = \operatorname{coker} \theta_i' \arrow[d, "\mathcal{H}^i h"] \\
B^i B^\bullet \arrow[r, "\theta_i"] & Z^i B^\bullet \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i"'] & \mathcal{H}^i B^\bullet = \operatorname{coker} \theta_i
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{H}^i h$ ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\mathcal{H}^i A^\bullet \to \mathcal{H}^i B^\bullet$ mit $\mathcal{H}^i h \circ \varepsilon_i' = \varepsilon_i \circ \mathcal{Z}^i h = \varepsilon_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = 0$, denn $\varepsilon_i \circ \theta_i = 0$,somit $\mathcal{H}^i h = 0$. ∎

Definition 2.7.12. Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}, f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen. f heißt

Homotopieäquivalenz $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ es existiert ein $g : B^\bullet \to A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$

Quasiisomorphismus $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{H}^i f : \mathcal{H}^i A^\bullet \to \mathcal{H}^i B^\bullet$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 2.7.13. *Seien $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}, f : A^\bullet \to B^\bullet$ Homotopieäquivalenz. Dann ist f ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Nach Vorraussetzung existiert ein $g : B^\bullet \to A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$. Dann ist

$$\mathcal{H}^i(g) \circ \mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g \circ f) = \mathcal{H}^i(id_{A^\bullet}) = id_{\mathcal{H}^i A^\bullet}$$

analog: $\mathcal{H}^i(f) \circ \mathcal{H}^i(g) = id_{\mathcal{H}^i B^\bullet}$. Also ist $\mathcal{H}^i(f)$ ein Isomorphismus. ∎

Anmerkung. Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz.

Satz 2.7.14. *Gegeben sei folgendes Diagramm von Komplexen in $\mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & E^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_0"] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta"'] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

sodass gilt:

- *die obere Zeile ist exakt*
- *Alle $I^i, i \geq 0$, sind injektiv.*

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus $f : E^\bullet \to I^\bullet$, der φ fortsetzt, in dem Sinne, dass $f_0 \circ \varepsilon = \eta \circ \varphi$ ist. Ist $g : E^\bullet \to I^\bullet$ ein weiterer solcher Komplexhomomorphismus, dann ist $g \sim f$.

Beweis (Beweisskizze für die Existenz von f:).

1. Wir konstruieren zunächst f_0. Situation:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & E^0 \arrow[d, dashed, "f_0"] \\
B \arrow[r, "\eta"'] & I^0
\end{tikzcd}$$

   Da I^0 injektiv und ε ein Monomorphismus, existiert ein $f_0 : E^0 \to I^0$, sodass $\eta \circ \varphi = f_0 \circ \varepsilon$.

2. Konstruktion von f_1: Situation:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[ddd, "\varphi"'] & E^0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, two heads, "\pi_0"] \arrow[ddd, "f_0"] & & E^1 \arrow[ddd, dashed, "f_1"] \\
 & & \operatorname{coker}\varepsilon \arrow[ur, hook, dashed, "\iota_0"'] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_0"] & \\
 & & \operatorname{coker}\eta \arrow[dr, hook, dashed, "\iota_0'"] & \\
B \arrow[r, "\eta"] & I^0 \arrow[ur, two heads, "\pi_0'"] \arrow[rr, "d_0'"'] & & I^1
\end{tikzcd}$$

   Wegen der Kommutativität vom linken Rechteck, also

$$\pi_0' \circ f_0 \circ \varepsilon = \pi_0' \circ \eta \circ \varphi = 0$$

existiert ein eindeutig bestimmtes $\tilde{f}_0 : \operatorname{coker}\varepsilon \to \operatorname{coker}\eta$, sodass das linke Trapez kommutiert. Da $d_0 \circ \varepsilon = 0$ und $d_0' \circ \eta = 0$, existieren nach der Universellen Eigenschaft des Kokerns eindeutig bestimmte $\iota_0 : \operatorname{coker}\varepsilon \to E^1$, $\iota_0' : \operatorname{coker}\eta \to I^1$, sodass das obere und untere Dreieck kommutieren.
Behauptung: ι_0 ist ein Monomorphismus, denn:

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}\varepsilon &= \operatorname{im}\pi_0 \simeq \operatorname{coim}\pi_0 = \operatorname{coker}(\underbrace{\ker\pi_0}_{=\operatorname{im}\varepsilon}) = \operatorname{coker}(\operatorname{im}\varepsilon) \\ &\simeq \operatorname{coker}(\ker d_0) = \operatorname{coim}(d_0) \simeq \operatorname{im} d_0 \end{aligned}$$

was aus dem Homomorphiesatz und der Exaktheit bei E^0 folgt. Nun verifiziert man, dass

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varepsilon \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\iota_0"'] & & \operatorname{im} d_0 \arrow[dl, hook'] \\ & E^1 & \end{tikzcd}$$

kommutiert, das heißt, dass ι_0 ein Monomorphismus ist. Da I^1 injektiv und ι_0 ein Monomorphismus, existiert ein $f_1 : E^1 \to I^1$, sodass auch das rechte Trapez kommutiert. Also ist $f_1 \circ d_0 = d_0' \circ f_0$.

3. Iteriere das Verfahren. ■

Folgerung 2.7.15. *Sei $A \in Ob\,\mathcal{A}$, $\varepsilon : A \to I^\bullet$, $\eta : A \to J^\bullet$ injektive Auflösungen von A. Dann existiert eine Homotopieäquivalenz $f : I^\bullet \to J^\bullet$ mit $f_0 \circ \varepsilon = \eta$. Diese ist eindeutig bestimmt bis auf Homotopie.*

Beweis. Wir betrachten das Diagramm von Komplexen:

$$\begin{tikzcd} \tilde{I}^\bullet : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}_A"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift right, "f_0"'] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift right, "f_1"'] & \dots \\ \tilde{J}^\bullet : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta"'] \arrow[u, shift right] & J^0 \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift right, "g_0"'] & J^1 \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift right, "g_1"'] & \dots \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Nach 2.7.14 existiert ein Komplexhomomorphismus $f : I^\bullet \to J^\bullet$, der id_A fortsetzt und es existiert ein Komplexhomomorphismus $g : J^\bullet \to I^\bullet$, der id_A fortsetzt. Dann ist aber auch $g \circ f : I^\bullet \to I^\bullet$ eine Fortsetzung von id_A, ebenso wie $id_{J^\bullet}$. Aus der Eindeutigkeit in 2.7.14 ist $g \circ f \sim id_{I^\bullet}$. Analog ist $f \circ g \sim id_{J^\bullet}$. Somit folgt, dass f eine Homotopieäquivalenz ist. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 2.7.14. ■

Folgerung 2.7.16. *Sei $I^\bullet$ ein exakter Komplex von injektiven Objekten in $\mathcal{A}$ mit $I^i = 0$ für $i \ll 0$. Dann ist $0^\bullet \to I^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Ohne Einschränkung ist $I^i = 0$ für $i < 0$ (durch Verschiebung des Komplexes) Dann sind $0^\bullet, I^\bullet$ injektive Auflösungen von 0. Aus 2.7.15 folgt: $0^\bullet \to I^\bullet$ist eine Homotopieäquivalenz. ■

2.8 Abgeleitete Funktoren

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektive, $\mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor

Bemerkung + Definition 2.8.1. Für $i \in \mathbb{N}_0$ und jedes Objekt $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ fixieren wir eine injektive Auflösung $A \to I^\bullet$ von A und setzen

$$R^i F(A) := \mathcal{H}^i(F I^\bullet)$$

Ist $\varphi : A \to A'$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ und sind $A \to I^\bullet$, $A' \to I'^\bullet$ injektive Auflösungen von A, A', dann existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Komplexhomomorphismus $f : I^\bullet \to I'^\bullet$, der φ fortsetzt. Wir setzen

$$R^i F(\varphi) := \mathcal{H}^i(Ff).$$

Auf diese Weise wird $R^i F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zu einem additiven Funktor. Wird auf dieselbe Art und Weise mit einer anderen Wahl von injektiven Auflösungen ein Funktor $\widehat{R}^i F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ konstruiert, dann sind $R^i F(A)$ und $\hat{R}^i F(A)$ kanonisch isomroph für alle $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, und es gibt eine natürliche Äquivalenz $R^i F \overset{\sim}{\Rrightarrow} \hat{R}^i F$. $R^i F$ heißt der *i-te rechtsabgeleitete Funktor*

Beweis.

- Wohldefiniertheit von $R^i F(\varphi)$: Ist $g : I^\bullet \to I'^\bullet$ eine weitere Fortsetzung von φ, dann ist $f \sim g$ nach 2.7.14 und somit $Ff \sim Fg$. Mit 2.7.11 folgt $\mathcal{H}^i(Ff) = \mathcal{H}^i(Fg)$ für alle $i \geq 0$.

- $R^i F$ ist ein Funktor, denn für $\varphi : A \to A'$, $\psi : A' \to A''$ mit Fortsetzungen $f : I^\bullet \to I'^\bullet$, $g : I'^\bullet \to I''^\bullet$ auf injektiven Auflösungen $A \to I^\bullet$, $A' \to I^\bullet$, $A'' \to I''^\bullet$ von A, A', A''' ist $g \circ f : I^\bullet \to I''^\bullet$ ein Fortsetzung von $\psi \circ \varphi : A \to A''$, also

$$\begin{aligned}(R^i F)(\psi \circ \varphi) &= \mathcal{H}^i(F(g \circ f)) = \mathcal{H}^i(Fg \circ Ff) = \mathcal{H}^i Fg \circ \mathcal{H}^i Ff \\ &= R^i F(\psi) \circ R^i F(\varphi)\end{aligned}$$

- $R^i F$ ist additiv, denn sind $\varphi : A \to A'$, $\psi : A \to A'$ mit Fortsetzungen $f : I \to I'^\bullet$, $g : I^\bullet \to I'^\bullet$ auf injektiven Auflösungen $A \to I^\bullet$, $A' \to I'^\bullet$ von A, A', so ist $f + g : I^\bullet \to I'^\bullet$ eine Fortsetzung von $\varphi + \psi : A \to A'$. Der Rest ist klar, da F, $\mathcal{H}^i$ additiv.

- Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösungen im obigen Sinne: Für $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ sei $A \xrightarrow{\varepsilon} I_A^\bullet$ die injektive Auflösung, mit der $R^i F$ berechnet wird und $A \xrightarrow{\eta} J_A^\bullet$ die injektive Auflösung von A, mit der $\hat{R}^i F$ berechnet wird. Nach 2.7.15

existiert eine Homotopieäquivalenz $h_A : I_A^\bullet \to J_A^\bullet$ existiert mit $h_A^0 \circ \varepsilon = \eta$. Wir definieren

$$t_A^i : R^iF(A) = \mathcal{H}^i(FI_A^\bullet) \longrightarrow \hat{R}^iF(A) = \mathcal{H}^i(FJ_A^\bullet) \quad \text{mit} \quad t_A^i := \mathcal{H}^iFh_A$$

Dann ist t_A^i nach 2.7.13 ein Isomorphismus, da Fh_A eine Homotopieäquivalenz ist. Durch $t^i = (t_A^i)_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} : R^iF \Rightarrow \hat{R}^iF$ ist eine natürliche Äquivalenz gegeben, denn für alle $A, A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $\varphi : A \to A'$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
R^iF(A) \arrow[r, "t_A^i"] \arrow[d, "\mathcal{H}^iFf_I"'] & \hat{R}^iF(A) \arrow[d, "\mathcal{H}^iFf_J"] \\
R^iF(A') \arrow[r, "t_{A'}^i"'] & \hat{R}^iF(A')
\end{tikzcd}$$

(wobei $f_I : I_A^\bullet \to J_A^\bullet$, $f_J : J_A^\bullet \to J_A'^\bullet$ Fortsetzungen von φ sind), denn $f_J \circ h_A$, $h_{A'} \circ f_I : I_A^\bullet \to J_A'^\bullet$ sind beides Fortsetzungen von $\varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{A'} \circ \varphi$, somit $f_J \circ h_A \sim h_A' \circ f_I$, also $Ff_J \circ Fh_A \sim Fh_{A'} \circ Ff_I$ und damit $\mathcal{H}^iFf_J \circ t_A^i = t_{A'}^i \circ \mathcal{H}^iFf_I$. ■

Bemerkung 2.8.2. *Es gilt:*

a) $R^0F = F$

b) Ist F exakt, dann ist $R^iF = 0$ für alle $i > 0$.

Beweis. Für $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ ist $R^iF(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet)$, wobei $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ eine injektive Auflösung von A ist. Wir wissen: Ist $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1$ exakt, dann ist ohnehin $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1$ exakt.

$$FI^\bullet : \qquad \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} FI^2 \longrightarrow \ldots$$

mit

$$\begin{aligned} R^0F(A) &= \mathcal{H}^0(FI^\bullet) = \operatorname{coker}(0 \to \ker Fd_0) = \ker Fd_0 = \operatorname{im} F\varepsilon \\ &= \operatorname{coim} F\varepsilon = FA \end{aligned}$$

Falls F exakt, dann ist

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} \ldots$$

exakt, also $R^iF(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet) = 0$ für $i > 0$. ■

Satz 2.8.3. *Sei* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Folge in* $\mathcal{A}$. *Dann existieren natürliche Morphismen*

$$\delta^i : R^iF(A'') \longrightarrow R^{i+1}F(A') \quad \text{für alle } i \geq 0$$

sodass die Folge

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \longrightarrow & FA' & \longrightarrow & FA & \longrightarrow & FA'' \\
& \longrightarrow & R^1FA' & \longrightarrow & R^1FA & \longrightarrow & R^1FA'' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \longrightarrow & R^iFA' & \longrightarrow & R^iFA & \longrightarrow & R^iFA'' \\
& \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}FA' & \longrightarrow & R^{i+1}FA & \longrightarrow & R^{i+1}FA'' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

exakt ist. Ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei die untere Zeile exakt ist, so kommutiert für alle $i \geq 0$ *das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
R^iF(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1}F(A') \arrow[d] \\
R^iF(B'') \arrow[r, "\delta^i"'] & R^{i+1}F(B')
\end{tikzcd}$$

Beweis (Beweisskizze). Nach dem Hufeisenlemma existieren kompatible injektive Auflösungen $A' \to I'^{\bullet}$, $A \to I^{\bullet}$, $A'' \to I''^{\bullet}$ in dem Sinne, dass

$$0 \longrightarrow I'^{\bullet} \longrightarrow I^{\bullet} \longrightarrow I''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Komplexen ist. I'^i ist injektiv für alle $i \geq 0$, also spaltet die Folge

$$0 \longrightarrow I'^i \longrightarrow I^i \longrightarrow I''^i \longrightarrow 0$$

(wobei Spaltung in abelschen Kategorien analog zu R-Mod definiert ist und analoge Resultate gelten). Dann ist $I^i = I'^i \oplus I''^i$ und, da F additiv, $F(I^i) = F(I'^i) \oplus F(I''^i)$, womit

$$0 \longrightarrow FI'^i \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI''^i \longrightarrow 0$$

exakt ist. Insbesondere existiert ein exakte Folge von Komplexen

$$0 \longrightarrow FI'^\bullet \longrightarrow FI^\bullet \longrightarrow FI''^\bullet \longrightarrow 0$$

woraus wir eine lange exakte Kohomologiefolge erhalten, was die Behauptung liefert. ■

Definition 2.8.4. Sei $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Dann heißt A *F-azylisch* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $R^iF(A) = 0$ für alle $i \geq 1$.

Bemerkung 2.8.5. *Ist $A \in Ob\, \mathcal{A}$ injektiv, dann ist A F-azyklisch.*

Beweis. Offenbar ist $A \xrightarrow{\text{id}} (A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots)$ eine injektive Auflösung von A. Damit ist

$$R^iF(A) = \mathcal{H}^i(\ FA \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots) \ = 0 \quad \text{für } i \geq 1$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Satz 2.8.6. *Sei $A \to J^\bullet$ eine Auflösung von A durch F-azyklische Objekte, d.h. $J^\bullet$ ist ein Komplex mit $J^i = 0$ für $i < 0$ und J^i F-azyklisch für $i \geq 0$, sodass der augmentierte Komplex*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^1 \longrightarrow J^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $R^iF(A) \cong \mathcal{H}^i(FJ^\bullet)$ für alle $i \geq 0$.

Beweis. (für R-Mod in S.Lang "Algebra") ■

Anmerkung. Die Theorie der Linksableitung rechtsexakter Funktoren lässt sich analog entwickeln: Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven, $\mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor. Wir wählen für jedes $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $P_\bullet \to A$ und setzen

$$L_iF(A) := \mathcal{H}_i(FP_\bullet)$$

Rest analog.

2.9 δ-Funktoren

In Folgenden seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien

Definition 2.9.1. Ein *δ-Funktor* $H = (H^n)_{n \geq 0}$ ist eine Familie additiver Funktoren $H^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ für alle $n \geq 0$ und jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, sodass gilt:

(D1) δ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{A}$ mit exakten Zeilen, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H^n(C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^{n+1}(A) \arrow[d] \\
H^n(C') \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(A')
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{B}$ für alle $n \geq 0$

(D2) Für jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ in $\mathring{A}$ ist die lange exakte Folge

$$\ldots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \ldots$$

exakt in $\mathcal{B}$.

Beispiel 2.9.2. $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt. Dann ist $H := (R^n F)_{n \geq 0}$ ein δ-Funktor nach 2.8.3

Definition 2.9.3. Sei $H = (H^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein δ-Funktor. H heißt *universell* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jeden δ-Funktor $H' = (H'^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ setzt sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \Rightarrow H^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus von δ-Funktoren fort, d.h. zu einer Familie $f = (f^n)_{n \geq 0}$ von natürlichen Transformationen $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$ die auf naheliegende Weise mit den δ' verträglich sind.

Bemerkung 2.9.4. *Sind F, G universelle δ-Funktoren mit $F^0 = G^0$, dann gibt es eine kanonische natürliche Äquivalenz von δ-Funktoren $F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$.*

Beweis. $id : F^0 \Rightarrow G^0$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\Phi : (\Phi_n)_{n\geq 0}, \Phi_n : F_n \Rightarrow G_n$ von δ-Funktoren. $id : G^0 \Rightarrow F^0$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\Psi = (\Psi_n)_{n\geq 0}, \Psi_n : G_n \Rightarrow F_n$von δ-Funktoren. $\Psi \circ \Phi := (\Psi_n \circ \Phi_n)_{n\geq 0}$ ist eine Fortsetzung von $id : F^0 \Rightarrow F^0$. Aus der Eindeutigekeit in der Universellen Eigenschaft folgt $\Psi \circ \Phi = id_F$. Analog $\Phi \circ \Psi = id_G$ ■

Definition 2.9.5. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. F heißt *auslöschbar* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Für jedes $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ existiert ein $A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow A'$ mit $F(u) = 0$.

Satz 2.9.6. *Sei $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein δ-Funktor, sodass H^n auslöschbar für alle $n \geq 1$. Dann ist H universell.*

Beweis (Beweisskizze). Sei $H' = (H'^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein δ-Funktor, $f^0 : H^0 \Rightarrow H'^n$ eine natürliche Transformation. Wir konstruieren die natürliche Transformation $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$ die mit δ kommutieren, per Induktion nach n. Seien $f^0, \dots f^n$ bereits konstruiert. Sei $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Da H^{n+1} auslöschbar, gibt es eine exakte Folge: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} A' \longrightarrow B \longrightarrow 0$ mit $H^{n+1}(u) = 0$. So erhalten wir Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H^nA' \arrow[r] \arrow[d] & H^nB \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^{n+1}A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\ H'^nA' \arrow[r] & H'^nB \arrow[r, "\delta'"] & H'^{n+1}A & \end{tikzcd}$$

konstruiere mit den üblichen Argumenten einen Morphismus $f_A^{n+1} : H^{n+1}A \to H'^{n+1}A$, der mit den δ's vertauscht, und so dass $f^{n+1} = (f_A^{n+1})_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} : H^{n+1} \Rightarrow H'^{n+1}$ eine natürliche Transformation ist. ■

Folgerung 2.9.7. *Habe $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakter Funktor. Dann ist $(R^nF)_{n\geq 0}$ ein universeller δ-Funktor.*

Beweis. Nach 2.9.6 genügt es zu zeigen: R^nF ist auslöschbar für alle $n \geq 1$. Sei $n \geq 1, A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Dann esistiert ein injektives Objekt $I \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow I$. Dann ist

$$R^nF(u) : R^nF(A) \to R^nF(I) = 0$$

nach 2.8.5 der Nullmorphismus für $n \geq 1$. ■

2.10 Ext und Erweiterungen

Definition 2.10.1. Seien M, N R-Moduln. Wir setzen:

$$Ext_R^n(M,N) := R^n Hom_R(M,-)(N), \quad \text{für } n \geq 0$$

Explizit: wähle eine injektive Auflösung $N \to I^\bullet$ von N, dann ist

$$Ext_R^n(M,N) = H^n(Hom_R(M,I^\bullet))$$

Satz 2.10.2. *Seien M, N R-Moduln. Dann gibt es kanonische Isomorphismen*

$$Ext_R^n(M,N) \simeq R^n Hom_R(-,N)(M)$$

für alle $n \geq 0$, insbesondere kann $Ext_R^n(M,N)$ auch über eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$ von M betrachtet werden via $Ext_R^n(M,N) = H^n(Hom_R(P_\bullet, N))$.

Beweis. Sei N fixiert.

1. Die Familie kontravarianter Funktoren $(R^n Hom_R(-,N))_{n\geq 0}$ ist ein kontravarianter universeller δ-Funktor mit $R^0 Hom_R(-,N) = Hom_R(-,N)$ (analoge Aussage zu 2.9.7). Denn: $(R^n Hom_R(-,N))_{n\geq 0}$ ist ein kontravarianter δ-Funktor nach der kontravarianten Version von 2.8.3. Es bleibt noch zu zeigen: $(R^n Hom_R(N,-))_{n\geq 0}$ ist universell. Dafür genügt es nach 2.9.6 zu zeigen, dass $R^n Hom_R(-,N)$ koauslöschbar ist für alle $n \geq 1$. Sei M ein R-Modul. Dann existiert ein projektiver R-Modul P und ein Epimorphismus $u : P \to M$ So erhält man:

   $$R^n Hom_R(-,N)(u) : R^n Hom_R(-,N)(M) \to R^n Hom_R(-,N)(P)$$

   P ist $Hom_R(-,N)$-azyklisch, da $(\dots 0 \to 0 \to P) \xrightarrow{id_P} P$ eine projektive Auflösung von P ist und

   $$R^n Hom_R(-,N)(P) = H^n(Hom_R(P,N) \to 0 \to 0 \to \dots) = 0$$

   für $n \geq 1$ ist. Daraus folgt: $R^n Hom_R(-,N)(u) = 0$, das heißt $R^n Hom_R(-,N)$ ist koauslöschbar für $n \geq 1$.

2. Wir setzen:

   $$\begin{aligned} F^n : R\text{-Mod} &\longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}, \\ M &\longmapsto R^n Hom_R(M,-)(N) \\ &\qquad = H^n(Hom_R(M,I^\bullet)) \end{aligned}$$

   wobei $N \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung von N ist. Dann ist $(F^n)_{n\geq 0}$ ebenfalls ein kontravarianter universeller δ-Funktor mit $F^0 = Hom_R(-,N)$, da:

- $(F_n)_{n\geq 0}$ ist ein kontravarianter δ-Funktor, denn:
  - F^n ist kontravarianter additver Funktor: klar
  - Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, so erhält man eine Sequenz von Komplexen:

$$0 \longrightarrow Hom_R(M'', I^\bullet) \longrightarrow Hom_R(M, I^\bullet) \longrightarrow Hom_R(M', I^\bullet) \longrightarrow 0$$

(beachte: $Hom_R(-, I)$ exakt für injektive R-Moduln I). Die lange exakte Kohomologiefolge liefert die Behauptung.

- $(F_n)_{n\geq 0}$ ist ein universell: nach 2.9.6 genügt zu zeigen, dass F_n koauslöschbar für alle $n \geq 1$. sei M ein R-Modul. Dann existiert ein projektiver R-Modul P und ein Epimorphismus $u : P \to M$. Damit erhält man

$$F^n(u) : F^n(M) = R^n Hom_R(M, -)(N) \to R^n Hom_R(P, -)(N) = F^n(P).$$

Wegen der Projektivität von P ist $Hom_R(P, -)$ exakt und deshalb ist $R^n Hom_R(P, -) = 0$ für $n \geq 1$ Daraus folgt $F^n(u) = 0$, das heißt F_n ist koauslöschbar für $n \geq 1$. ■

3. nach 1. und 2. sind $(R^n Hom_R(-, N))_{n\geq 0}$ und $(F^n)_{n\geq 0}$ beides kontravariante δ-Funktoren, mit $R^0 Hom_R(-, N) = Hom_R(-, N) = F^0$. Mit 2.9.4 folgt, dass es für alle R-Moduln M eine kanonische Isomorphie:

$$R^n Hom_R(-, N)(M) \simeq F(M) = R^n Hom_R(M, -)(N) = Ext^n_R(M, N)$$

Satz 2.10.3. *Sei A ein Hauptidealring, M, N, seinen R-Moduln. Dann gilt: $Ext^n_A(M, N) = 0$ für alle $n \geq 2$.*

Beweis. 1. Wir konstruieren eine injektive Auflösung von N. Es existiert ein injektiver A-Modul I^0, und ein Monomorphismus $\varepsilon : N \hookrightarrow I^0$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varepsilon"] & I^0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & I^1 \arrow[r] & 0 \\ & & & \operatorname{coker}\varepsilon \arrow[ur, equal] & & \end{tikzcd}$$

I^0 injektiv, dann folgt mit 2.6.11 I^0 ist teilbar $\Rightarrow$ $\operatorname{coker}\varepsilon = {I^0}/_{\operatorname{im}\varepsilon}$ teilbar, damit folgt aus 2.6.12 und da A ein Hauptidealring ist, dass der $\operatorname{coker}\varepsilon$ injektiv ist. Setze $I^1 := \operatorname{coker}\varepsilon$, dann ist $N \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots$ eine injektive Auflösung von N.

2. Für $n \geq 2$ ist $Ext^n_A(M,N) = H^n(Hom_R(M, J^\bullet)) = 0$.

Bemerkung + Definition 2.10.4. Seien M, N R-Moduln.

$$\mathcal{E}(M,N) := \{\text{exakte Sequenzen } \; 0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0 \text{ von } R\text{-Moduln}\}$$

Wir definieren auf $\mathcal{E}(M,N)$ eine Relation "$\sim$"wie folgt:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \sim \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Homomorphismus $\alpha : E \to E'$, sodass:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutiert (nach dem Fünferlemma ist α bereits ein Isomorphismus). " $\sim$ " ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}(M,N)$ und wir setzen:

$$E(M,N) := {}^{\mathcal{E}(M,N)}\!/_{\sim}$$

$E(M,N)$ enthält ein ausgezeichnetes Element, die Äquivalenzklasse der spaltenden exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Satz 2.10.5. *Seien M, N R-Moduln. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\Psi : E(M,N) \to Ext^1_R(M,N).$$

Beweis. Wir fixieren einen projektiven R-Modul P und einen Epimorphismus $\varepsilon : P \twoheadrightarrow M$.

1. Konstruktion von Ψ:
   Setze $K := \ker \varepsilon$. Damit erhalten wir eine exakte Folge

   $$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0, \quad \mu \text{ Inklusion}$$

   Durch Anwendung des Hom-Funktors erhalten wir insbesondere eine exakte Folge

   $$\mathrm{Hom}_R(P,N) \xrightarrow{\mu_N^*} \mathrm{Hom}_R(K,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^1_R(P,N)}_{\substack{=0, \text{ da } P \\ \text{projektiv}}}$$

(hierbei ist $\mu_N^* =$ "$\big|_K$"). Also ist

$$\mathrm{Ext}_R^1(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(K,N) \big/ \underbrace{\ker(\mathrm{Hom}_R(K,N) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,N))}_{=\mathrm{im}\,\mu_N^*} = \mathrm{coker}\,\mu_N^*$$

Sei nun $x \in E(M,N)$ die Äquivalenzklasse von

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[u, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[ul, dashed, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Da P projektiv existiert ein Homomorphismus $\varphi : P \to E$ mit $\psi \circ \varphi = \varepsilon$. Es ist $0 = \varepsilon(K) = \psi(\varphi(K))$, also $\varphi(K) = \subseteq \ker\psi = \mathrm{im}\,\iota$. Setze

$$\delta : K \xrightarrow{\varphi|_K^{\mathrm{im}\,\iota}} \mathrm{im}\,\iota \xrightarrow[\sim]{(\iota|^{\mathrm{im}\,\iota})^{-1}} N, \quad \text{insbesondere } \iota \circ \delta = \varphi \circ \mu$$

Wir setzen

$$\Psi(x) := \text{ Bild von } \delta \text{ in } \mathrm{coker}(\mu_N^*) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M,N)$$

2. Ψ ist wohldefiniert, d.h. Ψ ist unabhängig von der Wahl eines Vertreters (und von der Wahl von φ). Sei dazu

$$0 \to N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\psi} M \to 0 \quad \sim \quad 0 \to N \xrightarrow{\iota'} E' \xrightarrow{\psi'} M \to 0$$

Daraus erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\delta'"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"'] \arrow[u, "\delta"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[u, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \end{tikzcd}$$

Mittels $\tilde{\delta} := \delta'$ und $\tilde{\varphi} := a \circ \varphi'$ liefert dies ein weiteres Diagramm:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tilde{\delta}"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"] \arrow[u, "\delta"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[u, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \end{tikzcd}$$

Wegen $\psi\circ\tilde{\varphi}=\varepsilon$, $\psi\circ\varphi=\varepsilon$, folgt $\psi\circ(\tilde{\varphi}-\varphi)=0$, d.h. $\operatorname{im}(\tilde{\varphi}-\varphi)\subseteq\ker\psi=\operatorname{im}\iota$. Setze

$$\gamma : P \xrightarrow{(\tilde{\varphi}-\varphi)|^{\operatorname{im}\iota}} \operatorname{im}\iota \xrightarrow{(\psi|^{\operatorname{im}\iota})^{-1}} N$$

dann ist $\mu_N^*(\gamma)=\gamma\big|_K=\tilde{\delta}-\delta=\delta'-\delta$, also $\delta'=\delta-\mu_N^*(\gamma)$, d.h die Bilder von δ,δ' in $\operatorname{coker}\mu_N^*$ stimmen überein.

3. Wir konstruieren eine zu Ψ inverse Abbildung $\Phi:\operatorname{Ext}^1_R(M,N)\to E(M,N)$. Sei $y\in\operatorname{Ext}^1_R(M,N)\cong\operatorname{coker}\mu_N^*$, $\varphi:K\to N$ ein Vertreter von y. Setze

$$L_\varphi := \{(-\varphi(k),\mu(k))|\, k\subseteq K\},\qquad E := {}^{N\times P}\!\big/_{L_\varphi}$$

und

$$\iota : N \longrightarrow E,\quad n\mapsto (n,0)+L_\varphi$$
$$\psi : E \longrightarrow M,\quad (n,p)+L_\varphi\mapsto \varepsilon(p)$$
$$\sigma : P \longrightarrow E,\quad p\mapsto (0,p)+L_\varphi$$

Erhalte damit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\sigma"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

denn:

- ψ ist wohldefiniert wegen $\varepsilon\circ\mu=0$
- Für $k\in K$ ist

$$(\iota\circ\varphi)(k)=(\varphi(k),0)+L_\varphi=(0,\mu(k))+L_\varphi=\sigma(\mu(k))$$

  und für $p\in P$ ist

$$(\psi\circ\sigma)(p)=\psi((0,p)+L_\varphi)=\varepsilon(p)$$

- ι ist injektiv, denn sei $n\in N$ mit $(n,0)+L_\varphi=L_\varphi$, d.h. es existiert ein $k\in K$ mit $(n,0)=(-\varphi(k),\mu(k))$, also $\mu(k)=0$, woraus $k=0$ und damit $n=-\varphi(k)=0$ folgt.
- ψ ist surjektiv, da ε surjektiv
- $\operatorname{im}\iota=\ker\psi$:
  "$\subseteq$" $(\psi\circ\iota)(u)=\psi((n,0)+L_\varphi)=\varepsilon(0)=0$

"$\supseteq$" Sei $z = (n,p) + L_\varphi \subseteq \ker\psi$, also $\varepsilon(p) = 0$. Damit existiert ein $k \in K$ mit $p = \mu(k)$, das heißt

$$\begin{aligned}(n,p) + L_\varphi &= ((n,p) + L_\varphi) + (-\varphi(-k), \mu(-k)) + L_\varphi) \\ &= (n + \varphi(k), 0) + L_\varphi = \iota(n + p(k))\end{aligned}$$

Setze

$$\Phi := \text{Restklasse von} \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0 \quad \text{in } E$$

4. Nachrechnen. dass Φ wohldefiniert und Φ, Ψ invers zu einander sind (Übung)

Fertig. ■

Anmerkung. Das im Beweis konstruierte Ψ ist unabhängig von der Wahl $\varepsilon : P \twoheadrightarrow M$ und bildet die Klasse der spaltenden Erweiterungen auf das Nullelement in $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ ab.

3 Kommutative Algebra

In diesem Kapitel sei A stets ein kommutativer Ring (mit Eins)

3.11 Grundlagen

Definition 3.11.1. A heißt *lokal* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ A besitzt genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. In diesem Fall heißt $k = {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{m}}$ der *Restklassenkörper* von A.

Bemerkung 3.11.2. *Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dann sind äquivalent:*

i) *A ist lokal mit einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$*

ii) $A \backslash \mathfrak{m} \subseteq A^*$

iii) $A \backslash \mathfrak{m} = A^*$

iv) $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $x \in A\backslash\mathfrak{m}$. Falls $x \notin A^*$, dann existiert nach Algebra 1 ein maximales Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} \subseteq A$ mit $x \in \mathfrak{m}$. Insbesondere ist $\tilde{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{m}$, d.h. A ist nicht lokal.
$ii) \Rightarrow i)$ Es gelte $A\backslash\mathfrak{m} \subseteq A^*$. Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{a} \cap A^* = \emptyset$, also $\mathfrak{a} \cap (A\backslash\mathfrak{m}) = \emptyset$. Damit ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Somit ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal in A.
$ii) \Rightarrow iii)$ klar: $x \in A^* \Rightarrow x \in A\backslash\mathfrak{m}$.
$iii) \Rightarrow iv)$ Sei $x \in 1 + \mathfrak{m}$. Falls $x \in \mathfrak{m}$, dann ist $1 \in \mathfrak{m}$, Widerspruch! Also $x \in A\backslash\mathfrak{m} \overset{iii)}{=} A^*$.
$iv) \Rightarrow ii)$ Es gelte $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$. Sei $x \in A\backslash m$. Dann ist $Ax + \mathfrak{m}$ ein Ideal mit $Ax + \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}$, also $Ax + \mathfrak{m} = (1)$. Damit existiert ein $a \in A$, $y \in \mathfrak{m}$ mit $ax + y = 1$, also $ax = 1 - y \in 1 + \mathfrak{m} \subseteq A^* \Rightarrow x \in A^*$. ∎

Definition 3.11.3. Sei $x \in A$. x heißt *nilpotent* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$.

Anmerkung. Ist $A \neq 0$, dann ist jedes nilpotentes Element ein Nullteiler, die Umkehrung ist im Allgemeinen jedoch falsch.

Bemerkung + Definition 3.11.4.

$$\mathfrak{N}(A) := \{x \in A |\, x \text{ ist nilpotent}\}$$

ist ein Ideal in A, das *Nilradikal* in A. Der Ring ${}^{A}\!/\!_{\mathfrak{N}(A)}$ hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.

Beweis. 1. $\mathfrak{N}(A)$ ist ein Ideal:

- $0 \in \mathfrak{N}(A)$
- Seien $x, y \in \mathfrak{N}(A)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ und $y^n = 0$, womit $(x+y)^{2n-1} = 0$ (aus der binomischen Formel) folgt. Damit ist $x + y \in \mathfrak{N}(A)$.
- Sei $x \in \mathfrak{N}(A)\, a \in A$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$, also $a^n x^n = (ax)^n = 0$, womit $ax \in \mathfrak{N}(A)$ gilt.

2. Sei $\overline{x} \in {}^{A}\!/_{\mathfrak{N}(A)}$ nilpotent. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{x}^n = 0$, also $x^n \in \mathfrak{N}(A)$, also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(x^n)^m = 0$, also $x^{nm} = 0$, woraus $x \in \mathfrak{N}(A)$, also $\overline{x} = 0$ folgt.

Damit folgt die Aussage ■

Satz 3.11.5. *Es gilt*

$$\mathfrak{N}(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \textit{Primideal}}} \mathfrak{p}$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{N}'(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}'(A)$.
"$\subseteq$" Sei $x \in \mathfrak{N}(A)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist dann $x^n \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$. Damit ist auch $x \in \mathfrak{N}'(A)$.
"$\supseteq$" Angenommen es existiert ein $x \in \mathfrak{N}'(A) \backslash \mathfrak{N}(A)$. Dann gilt $x^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\Sigma := \{\mathfrak{a} \in A \text{ Ideal} |\, x^n \notin \mathfrak{a} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Dann ist Σ eine bezüglich Inklusion induktiv geordnete Menge $\neq \emptyset$ (Standardargument mit $\cup$). Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\mathfrak{p}$ in Σ. Diese $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal, denn: Seien $s, t \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p} \subsetneq As + \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subsetneq At + \mathfrak{p}$. Also ist $as + \mathfrak{p}$, $At + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Damit existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in As + \mathfrak{p}$, $x^m \in At + \mathfrak{p}$. Also liegt $x^{n+m} \in Ast + \mathfrak{p}$, weshalb $Ast + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Falls $st \in \mathfrak{p}$, dann wäre $Ast + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \in \Sigma$, Widersprch! Also ist $st \notin \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ folgt $x \notin \mathfrak{p}$, also $x \notin \mathfrak{N}'(A)$. Widerpsruch! ■

Bemerkung 3.11.6. *Seien $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_n$ Primideale in A, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.*

Beweis. per Induktion nach n: $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, ..., n \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$.
n=1: trivial
$n > 1$: Sei $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, ..., n$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt: $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup ... \cup \mathfrak{p}_n$ für alle $i = 1, ..., n \Rightarrow$ Für alle $i = 1, ..., n$ existiert ein $x_i \in \mathfrak{a}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ für $j \neq i$

1.Fall: Es existiert ein $i \in \{1, ...n\}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_i$. Dann $x \notin \bigcup_{j=0}^n \mathfrak{p}_j$, fertig.
2.Fall: $x_i \in \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, ...n\}$. Setze $y := \sum_{j=1}^n x_1 \cdot ... \cdot x_{j-1} \cdot x_{j+1} \cdot ... \cdot x_n$. Dann ist $y \in \mathfrak{a}$, $y \notin \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, ...n\}$ ("Alle Summanden bis auf einen in $\mathfrak{p}_i$"). Also $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{p}_i$. ■

Bemerkung 3.11.7. *Seinen $\mathfrak{a}_1, \dots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A mit $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$. Dann existiert ein $j \in \{1, ...n\}$ mit $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$, dann existiert ein $j \in \{1, ...n\}$ mit $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{p}$.*

Beweis. Angenommen für alle $i \in \{1, ...n\}$ gilt $\mathfrak{a}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$. $\Rightarrow$ Für alle $i \in \{1, ...n\}$ existiert ein $x_i \in \mathfrak{a}_i, x_i \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $x_1 \cdots x_n \notin \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Andererseits ist jedoch $x_1 \cdots x_n \in \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$., Widerspruch! Sei nun $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i$ Dann existiert ein $j \in \{1, ...n\}$ mit $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$.
$\Rightarrow \mathfrak{p} = \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_j$. ■

Bemerkung + Definition 3.11.8. Seinen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale, $a \in A$.

$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} := \{x \in A |\ x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ heißt *Idealquotient* $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist ein Ideal in A.

$\text{ann}(\mathfrak{a}) := (0) : \mathfrak{a} = \{x \in A |\ x\mathfrak{a} = 0\}$ heißt der *Annulator* von $\mathfrak{a}$.

$\text{ann}(a) := \text{ann}((a)) = \{x \in A |\ xa = 0\}$.

Anmerkung.

- $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{c} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$
- Die Menge der Nullteiler von A ist gegeben durch $\bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} ann(x)$

Beispiel 3.11.9. $A = \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0) \Rightarrow (m) : (n) = \left(\frac{m}{ggt(m,n)}\right)$.

Definition 3.11.10. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A |$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \mathfrak{a}\}$ heißt das *Radikal* von $\mathfrak{a}$.

Anmerkung.

- $\sqrt{(0)} = \mathfrak{N}(A)$
- Ist $\pi : A \to A/_{\mathfrak{a}}$ die kanonische Projektion, dann ist:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathfrak{a}} &= \{x \in A |\ \text{Es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\} = \{x \in A | \pi(x) \in \mathfrak{N}\left(A/_{\mathfrak{a}}\right)\} \\
&= \pi^{-1}(\mathfrak{N}(A/_{\mathfrak{a}})) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{a} \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}\right) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ PI} \\ \text{mit} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal.

Definition 3.11.11. Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphimsus, $\mathfrak{a} \subseteq A, \mathfrak{b} \subseteq B$ Ideale.

$\mathfrak{a}^e := Bf(\mathfrak{a}) = \{\sum_{endl.} b_i f(a_i) | b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a}\}$ heißt die *Erweiterung* von $\mathfrak{a}$ auf B.

$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$ heißt die *Kontraktion* von $\mathfrak{b}$ auf A.

Anmerkung.

- $\mathfrak{a}^e, f^c$ sind Ideale in B bzw. in A.
- Wir können f faktorisieren in $A \xrightarrow{p} \operatorname{im} f \overset{\iota}{\hookrightarrow} B$. Die Situation für p ist einfach die für ι ist kompliziert.
- $\mathfrak{q} \in B$ Primideal $\Rightarrow \mathfrak{q}^c \subseteq A$ Primideal wegen $A/f^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow \underbrace{B/\mathfrak{q}}_{\text{nullteilerfrei}}$

  (beachte $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^c$)
- Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, dann ist $\mathfrak{p}^e \subseteq B$ im Allgemeinen kein Primideal. (Übung: p Primzahl mit $p \equiv 1 \mod 4$. Unter $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ ist $(p)^e$ ein Produkt zweier verschiedener Primideale.)

Bemerkung 3.11.12. *Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal. Dann gilt:*

a) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$

b) $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$

c) $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$

d) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$

Beweis. (a),(c) klar.
(b) $\mathfrak{a}^e \subseteq (\mathfrak{a}^{ec})^e, (\mathfrak{a}^e)^{ce} \subseteq \mathfrak{a}^e$
(d) analog. ∎

Satz 3.11.13. *Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Setze*

$$C := \{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} \mid \mathfrak{a} \text{ ist Kontraktion eines Ideals aus } B\}$$

$$E := \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ Ideal} \mid \mathfrak{b} \text{ ist Erweiterung eines Ideals aus } A\}$$

. Dann gilt:

a) $C = \{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$

b) $E = \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ } Ideal \mid \mathfrak{b}^{ce} = b\}$

c) Die Abbildungen

$$\Phi : C \to E, \quad \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e, \qquad \Psi : E \to C, \quad \mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$$

Sind zueinander inverserse, inklusionserhaltende Bijektionen.

Beweis. a) "$\supseteq$"klar. "$\subseteq$"$\mathfrak{a} \in C \Rightarrow$ es existiert ein $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c \Rightarrow \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{a}$ (letztes "="per 3.11.12(d))

b) analog

c) klar nach (a), (b). ∎

Anmerkung. Erinnerung an LA1: $T \in M(n \times n, A)$, dann existiert eine komplementäre Matrix $T^\# \in M(n \times n, A)$ zu T. Es ist $T^\# T = TT^\# = det(T)E_n$. (LA1: Satz 17.20)

Satz 3.11.14. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, $\varphi \in End_A(M)$ mit $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann existiert ein $n \in N, a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit:*

$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + ... + a_1\varphi + a_0 id_M = 0$$

Beweis. Sei $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensystem von M. Dann ist $\varphi(x_i) \in \mathfrak{a}M = \{\sum_{endl.} \alpha_i y_i | \alpha_i \in \mathfrak{a}, y_i \in M\}$, insbesondere existieren $a_{i1}, ..., a_{in} \in \mathfrak{a}$ mit $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ (stelle y_i als Linearkombination von $x_1, ..., x_n$ dar). Damit ist

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij}\varphi - a_{ij} id_M)(x_j) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Betrachte $A[\varphi] = \{b_n\varphi^n + b_{n-1}\varphi^{n-1} + ... + b_1\varphi + b_0 id_M \mid n \in \mathbb{N}_0, b_i \in A\}$, (was ein kommutativer Unterring von $End_A(M)$; ist mit der Konvention: $\varphi^0 = id_M$). Setze nun

$$T := (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, A[\varphi])$$

M wird via $(\sum b_i\varphi^i)x = \sum b_i\varphi^i(x)$ zum $A[\varphi]$-Modul.

$$T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 = T^\# T \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \det(T) \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$$

Da $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensytem von M ist folgt: $det(T)x = 0$ für alle $x \in M$, also $det(T) = 0$. Andererseits gilt aber auch:

$$det(T) = det(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{ij}) = \varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + ... + a_1\varphi + a_0 id_M$$

mit $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ nach Leibniz-Formel. ∎

Folgerung 3.11.15. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $a = 1 \mod \mathfrak{a}$ mit $aM = 0$.*

Beweis. Mit $\varphi = id_M$ ist $\varphi(M) = M = \mathfrak{a}M$ Dann existieren $a_0, .., a_{n-1} \in \mathfrak{a}$, sodass $0 = id_M^n + a_{n-1}id_M^{n-1} + ... + a_1\varphi + a_0 id_M$, das heißt: $0 = x + a_{n-1}x + ... + a_1 x + a_0 x = \underbrace{(1 + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)}_{:=a} x \Rightarrow a \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$, $ax = 0$ ■

Satz 3.11.16 (Nakayama-Lemma). *Sei A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, M ein endlich erzeugter A-Modul, $M/_{\mathfrak{m}M} = 0$. Dann ist $M = 0$.*

Beweis. Aus $M/_{\mathfrak{m}M} = 0$ folgt $M = \mathfrak{m}M$. Nach 3.11.15 folgt, dassein $a \in A, a \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$ existiert mit $aM = 0$. Wegen $a \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ ist $a \in A^*$. Mit 3.11.2 folgt $M = 0$. ■

Folgerung 3.11.17. *Sei A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, M ein endlich erzeugter A-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul mit $M = \mathfrak{m}M + N$. Dann ist $M = N$.*

Beweis. Es ist

$$\mathfrak{m}(M/_N) = (\mathfrak{m}M + N)/_N = M/_N$$

Mit dem Nakayama-Lemma folgt unmittelbar: $M/_N = 0$, also $M = N$. ■

Folgerung 3.11.18. *Sei A ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, M ein endlcih erzeugter A-Modul, $x_1, ..., x_n \in M$. Dann sind äquivalent:*

i) $x_1, \ldots, x_n$ *ist ein Erzeugendensystem von* M

ii) Die Bilder $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ *von* $x_1, \ldots, x_n$ *in* $M/_{\mathfrak{m}M}$ *erzeugen den* $A/_{\mathfrak{m}}$*-VR* $M/_{\mathfrak{m}M}$

Beweis. (i)⇒(ii) klar.
(ii)⇒(i) Setze $N := \sum_{i=1}^n Ax_i$. Nach Voraussetzung ist

$$(N + \mathfrak{m}M)/_{\mathfrak{m}M} = M/_{\mathfrak{m}M} \Longrightarrow N + \mathfrak{m}M = M$$

Mit 3.11.17 folgt: $N = M$. ■

Anmerkung. Wichtig: M endlich erzeugt ist eine Voraussetzung in 3.11.18.

3.12 Lokalisierung

Erinnerung (an Algebra 1): Sei $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich "$\cdot$" (d.h. $1 \in S$ und $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$). Definiere eine Relation "$\sim$" auf $A \times S$ wie folgt:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \text{Es existiert ein } t \in S \text{ mit } ta_2s_1 = ta_1s_2$$

"$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation, setze $S^{-1}A := {}^{A \times S}\!/\!_{\sim}$, wobei $\frac{a}{s}$ die Äquivalenzklasse von $(a, s) \in A \times S$ ist. Dann ist $S^{-1}A$ ein kommutativer Ring via

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1s_2 + a_2s_1}{s_1s_2}, \qquad \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1a_2}{s_1s_2}$$

Ferner gibt es einen Ringhomomorphismus $\tau : A \to S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{a}{1}$. Diese ist genau dann injektiv, wenn S nur aus Nichtnullteilern besteht.

Im Folgenden sei $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich "$\cdot$", Erweiterung und Kontraktion von Idealen sind bezüglich τ zu verstehen.

Bemerkung + Definition 3.12.1. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal

$$S^{-1}\mathfrak{a} := a^e = \{\tfrac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{a},\ s \in S\} \subseteq S^{-1}A \text{ ist ein Ideal.}$$

Ferner gilt: $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.

Beweis. "$\Rightarrow$" $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A \Rightarrow 1 = \frac{1}{1} \in S^{-1}\mathfrak{a} \Rightarrow$ Es existiert ein $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ mit $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. Damit exitstiert ein $t \in S$ mit $ta = ts$, also ist $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Sei $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$. Dann existiert ein $s \in \mathfrak{a} \cap S$ mit $\frac{s}{s} = \frac{1}{1} \in S^{-1}A$, also ist $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A$ ∎

Bemerkung 3.12.2. *Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Dann ist $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S^{-1}A$.*

Beweis. Seien $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ mit $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Dann existieren $b \in \mathfrak{p}$, $s \in S$ mit $\frac{a_1a_2}{s_1s_2} = \frac{b}{s}$. Dann existiert ein $t \in S$ mit $tsa_1a_2 = tbs_1s_2 \in \mathfrak{p}$, woebi $t, s \notin \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ Primideal, muss also $a_1a_2 \in \mathfrak{p}$ gelten und damit $a_1 \in \mathfrak{p}$ oder $a_2 \in \mathfrak{p}$. Damit folgt schließlich $\frac{a_1}{s_1} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ oder $\frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. ∎

Bemerkung 3.12.3. *Es gilt:*

a) Für die Abbildungen

$$\begin{aligned} \{\textit{Ideale in } A\} &\underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \{\textit{Ideale in } S^{-1}A\} \\ \mathfrak{a} &\longmapsto a^e = S^{-1}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{b}^c = \tau^{-1}(\mathfrak{b}) &\longleftarrow\!\shortmid\; b \end{aligned}$$

gilt: $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{\textit{Ideale in } S^{-1}A\}}$*, insbesondere ist* Φ *surjektiv und* Ψ *injektiv. Beide Abbildungen sind inklusionserhaltend.*

b) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \{\textit{Primideale in Amit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} &\underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \{\textit{Primideale in } S^{-1}A\} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto p^e = S^{-1}\mathfrak{p} \\ q^c = \tau^{-1}(q) &\longleftarrow\!\shortmid\; q \end{aligned}$$

sind bijektiv und invers zueinander, beide sind inklusionserhaltend.

Beweis. a) Es ist zu zeigen, dass $b^{ce} = b$ für alle Ideale b in $S^{-1}A$.
“$\subseteq$“ gilt nach 3.11.12.
“$\supseteq$“ Sei $\frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$ mit $a \in A$, $s \in S$. Dann ist $\frac{a}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann ist $a \in c^c$, also $\frac{a}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$.

b)
- Ψ ist wohldefiniert: Für ein Primideal $\mathfrak{q} \in S^{-1}A$ ist $\mathfrak{q}^c$ ein Primideal (vgl. Übungen). Es ist $\mathfrak{q}^c \cap S = \emptyset$, denn andernfalls würde ein $s \in S$ existieren mit $\frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, also $1 = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, Widerpsruch!
- Φ ist wohldefiniert nach 3.12.2.

Nach a) ist $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{\text{Primideale in } S^{-1}A\}}$, also genügt es zu zeigen, dass für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.
“$\supseteq$“ aus 3.11.12 a)
“$\supseteq$“ Sei $a \in \mathfrak{p}^{ec}$. Dann existiert ein $b \in \mathfrak{p}$, $s \in S$ mit $\frac{a}{1} = \frac{b}{s}$, also existiert ein $t \in S$ mit $tas = tb$, d.h. $sta = tb$. Da $st \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ Primideal, folgt $a \in \mathfrak{p}$. ■

Bemerkung + Definition 3.12.4. Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal, setze $S := A \backslash \mathfrak{p}$ (ist ein Untermonoid).

$A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$ heißt die *Lokalisierung von* A *bei* $\mathfrak{p}$.

$A_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$. Erweiterung und Kontraktion liefern inklusionserhaltende Bijektionen zwischen der Menge der Primideale in A, die $\mathfrak{p}$ enthalten und der Menge der Primideale in $A_\mathfrak{p}$.

Beweis. folgt aus 3.12.3 *b*) (beachte: $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$). ■

Beispiel 3.12.5. Betrachte $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$ für eine Primzahl p. Dann ist

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \middle| \, m, n \in \mathbb{Z}, \, \mathrm{ggT}(m,n) = 1, \, p \nmid n \right\}$$

lokal mit dem maximalen Ideal

$$p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \middle| \, m, n \in \mathbb{Z}, \, \mathrm{ggT}(m,n) = 1, \, p|m, \, , p \nmid n \right\}$$

Bemerkung + Definition 3.12.6. Sei M ein A-Modul. Wir definieren eine Relation "$\sim$" auf $S \times M$ wie folgt:

$$(s_1, m_1) \sim (s_2, m_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \text{Es existiert ein } t \in S \text{ mit } ts_2m_1 = ts_1m_2$$

"$\sim$" ist ein Äquivalenzrelation und wir setzen $S^{-1}M := {(S \times M)}/{\sim}$; $\frac{m}{s}$ bezeichne die Äquivalenzklasse on $(s, m) \in S \times M$. Dann ist $S^{-1}M$ ein $S^{-1}A$-Modul vermöge

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} := \frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

für $m_1, m_2, m \in M$, $s_1, s_2, s, t \in S$. $S^{-1}M$ heißt der *Quotientenmodul* von M nach S. Es gibt eine natürliche Abbildung $\tau : M \to S^{-1}M$, $m \mapsto \frac{m}{1}$.

Beweis. nachrechnen. ■

Anmerkung. $S^{-1}M$ ist auch ein A-Modul vermöge $a \cdot \frac{m}{s} := \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{s}$. τ ist dann ein Homomorphismus von A-Moduln.

Satz 3.12.7. *Seien M, N A-Moduln, $\varphi : M \to N$ A-linear, $\tau_M : M \to S^{-1}M$, $\tau_N : N \to S^{-1}N$ die kanonischen Abbildungen. Dann gibt es genau eine $S^{-1}A$-lineare Abbildung*

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_M"'] & N \arrow[d, "\tau_N"] \\ S^{-1}M \arrow[r, dashed, "S^{-1}\varphi"] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

mit $S^{-1}\varphi \circ \tau_M = \tau_N \circ \varphi$
Auf diese Weise wird $S^{-1}\_ : A\text{-Mod} \longrightarrow S^{-1}A\text{-Mod}$ zu einem additiven Funktor.

Beweis. 1. Existenz: Setze $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$, $\frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$.

- $S^{-1}\varphi$ ist wohldefiniert: Sei $(s_1, m_1) \sim (s_2, m_2)$. Dann existiert ein $t \in S$ mit $ts_2m_1 = ts_1m_2$, also $ts_2\varphi(m_1) = ts_1\varphi(m_2) \Rightarrow (s_1, \varphi(m_1)) \sim (s_2\varphi(m_2)) \Rightarrow \frac{\varphi(m_1)}{s_1} = \frac{\varphi(m_2)}{s_2}$.
- $S^{-1}\varphi$ ist $S^{-1}A$-linear.

- Das Diagramm kommutiert, denn

$$(S^{-1}\varphi)(\tau_M(m)) = (S^{-1}\varphi)\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{\varphi(m)}{1} = \tau_N(\varphi(m))$$

2. Eindeutigkeit: Aus der Kommutativität des Diagramms und der $S^{-1}A$-Linearität vo $S^{-1}\varphi$ folgt:

$$\begin{aligned}(S^{-1}\varphi)\left(\frac{m}{s}\right) &= S^{-1}\varphi\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{m}{1}\right) = \frac{1}{s}S^{-1}\varphi\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{1}{s}S^{-1}\varphi(\tau_M(m)) = \frac{1}{s}(\tau_N(\varphi(m))) \\ &= \frac{1}{s}\cdot\frac{\varphi(m)}{1} = \frac{\varphi(m)}{2}\end{aligned}$$

3. Die Funktorialität und Additivität von $S^{-1}\_$ ist leicht nachzurechnen. ■

Satz 3.12.8. *$S^{-1}\_ : A$-Mod $\longrightarrow S^{-1}A$-Mod ist ein exakter Funktor.*

Beweis. Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M''$ eine exakte Folge von A-Moduln. Nach den Übungen genügt es zu zeigen, dass

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

exakt ist, d.h. $\operatorname{im}(S^{-1}f) = \ker(S^{-1}g)$.
"$\subseteq$" Es ist $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(\underbrace{g \circ f}_{=0}) = 0$
"$\supseteq$" Sei $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}g)$. Dann ist $\frac{g(m)}{s} = 0 = \frac{0}{1}$, also existiert ein $t \in S$ mit $tg(m) = 0$, d.h. $g(tm) = 0 \Rightarrow tm \in \ker g = \operatorname{im} f$, also existiert ein $m' \in M$ mit $f(m') = tm$. Damit folgt schließlich

$$S^{-1}f\left(\frac{f(m')}{st}\right) = \frac{f(m')}{st} = \frac{tm}{st} = \frac{m}{s}$$

also $\frac{m}{s} \in \operatorname{im}(S^{-1}f)$. ■

Folgerung 3.12.9. *Sei M ein A-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist $S^{-1}N$ auf natürliche Weise ein Untermodul von $S^{-1}M$ und es gilt:*

$$S^{-1}\left({}^{M}/_{N}\right) \cong {}^{S^{-1}M}/_{S^{-1}N}$$

(wir identifizieren diese Moduln im Folgenden mit einander.)

Beweis. Wende $S^{-1}\_$ auf die exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}/_{N} \longrightarrow 0$$

an. Dann olgt die Behauptung aus 3.12.8 ∎

Bemerkung 3.12.10. *Seien M, N A-Moduln, $\varphi : M \to N$ A-linear. Dann gilt:*

a) $\ker(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\ker\varphi)$

b) $\operatorname{coker}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\operatorname{coker}\varphi)$

c) $\operatorname{im}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\operatorname{im}\varphi)$

Beweis. a Wende S^{-1} auf die exakte Folge $0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ an.

b Wende S^{-1} auf die exakte Folge $M \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow 0$ an.

c Wende S^{-1} auf die exakte Folge $0 \longrightarrow \operatorname{im}\varphi \longrightarrow N \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow 0$ an. ∎

Bemerkung 3.12.11. *Für die Abbildungen:*

$$\{A\text{-}Untermoduln\ von\ M\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \{S^{-1}A\text{-}Untermoduln\ von\ S^{-1}M\}$$

$$N \longmapsto S^{-1}N$$

$$\tau^{-1}(P) \longleftarrow\!\shortmid P$$

gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\{S^{-1}A\text{-}Untermoduln\ von\ S^{-1}M\}}$*, insbesondere ist Φ surjektiv und Ψ injektiv. Beide Abbildungen sind inklusionserhaltend.*

Beweis. nachrechnen. ∎

Folgerung 3.12.12. *Es gilt:*

a) Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, dann folgt: $S^{-1}M$ ist ein endlich erzeugter $S^{-1}A$-Modul

b) Ist M ein noetherscher A-Modul, dann ist auch $S^{-1}M$ ein noetherscher $S^{-1}A$-Modul.

Beweis. 1. Sei $x_1, \ldots, x_r$ ein Erzeugendensystem von M über A, dann ist $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1}$ ein Erzeugendensystem von $S^{-1}M$ über $S^{-1}A$.

2. Sei M ein noetherscher A-Modul, $L \subseteq S^{-1}M$ ein $S^{-1}A$-Untermodul. Mit 3.12.11 folgt die Existenz eines Untermoduls N in M mit $L = S^{-1}N$, da M noethersch ist N endlich erzeugt. Mit (a) folgt $L = S^{-1}N$ ist endlich erzeugt über $S^{-1}A$. ■

Definition 3.12.13. Sei M ein A-Modul, $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal. Wir setzen $S := A \backslash \mathfrak{p}$.

$M_\mathfrak{p} := S^{-1}M$ heißt die *Lokalisierung* von M bei $\mathfrak{p}$.

Für einen Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von A-Moduln ist entsprechend $\varphi_\mathfrak{p} = S^{-1}\varphi : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ definiert.

Anmerkung. Eine Eigenschaft (E) eines A-Moduls M nennt man eine *lokale Eigenschaft*, wenn gilt: M erfüllt $(E) \Leftrightarrow M_\mathfrak{p}$ erfüllt (E) für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$.

Satz 3.12.14. *Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) $M = 0$

ii) $M_\mathfrak{p} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subseteq A$

iii) $M_\mathfrak{m} = 0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m} \subseteq A$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ trivial
$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $M \neq 0$. Dann existiert ein $x \in M, x \neq 0$. Es ist $\mathrm{ann}_A(x) \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathrm{ann}_A(x) \neq A$. Wegen $1 \notin \mathrm{ann}_A(x)$, folgt dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ mit $ann_A(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Für alle $s \in A\backslash\mathfrak{m} \subseteq A\backslash\mathrm{ann}_A(x)$ ist $sx \neq 0$ ist $\frac{x}{1} \neq \frac{0}{1}$ in $M_\mathfrak{m}$. Daraus folgt $M_\mathfrak{m} \neq 0$. ■

Folgerung 3.12.15. *Sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *eine Sequenz vn A-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *ist exakt*

ii) $M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p}$ *ist exakt für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subseteq A$.

iii) $M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m}$ *ist exakt für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m} \subseteq A$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ aus 3.12.8, $(ii) \Rightarrow (iii)$ trivial.
$(iii) \Rightarrow (i)$ zu zeigen ist: $\operatorname{im} f = \ker g$:
"$\subseteq$" Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ ist

$$(\operatorname{im}(g \circ f))_{\mathfrak{m}} = \operatorname{im}((g \circ f)_{\mathfrak{m}}) = \operatorname{im}(g_{\mathfrak{m}} \circ f_{\mathfrak{m}}) = 0$$

Mit 3.12.14 folgt $\operatorname{im}(g \circ f) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$.
"$\supseteq$" Setze $N := {}^{\ker g}/_{\operatorname{im} f}$ mit 3.12.9 folgt:

$$N_{\mathfrak{m}} = {}^{(\ker g)_{\mathfrak{m}}}/_{(\operatorname{im} f)_{\mathfrak{m}}} = {}^{\ker g_{\mathfrak{m}}}/_{\operatorname{im} f_{\mathfrak{m}}} = 0$$

für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$. Mit 3.12.14 folgt $\ker g = \operatorname{im} f$. ■

Folgerung 3.12.16. *Seien M, N A-Moduln, $f : M \to N$ A-Modulhomomorphismen. Dann gilt:*

a) f injektiv $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{m}}$ injektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{p}}$ injektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.

b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{m}}$ surjektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{p}}$ surjektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.

c) $f = 0 \Leftrightarrow f_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ $\Leftrightarrow$ $f_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.

Beweis. a) Wende 3.12.15 an auf $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ an.

b) Wende 3.12.15 an auf $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ an.

c) Wende 3.12.14 auf $\operatorname{im} f$ an. ■

Bemerkung 3.12.17. *Sei A nullteilerfrei, $K = \operatorname{Quot}(A)$. Die natürliche Abbildung $A \to K$ beziehungsweise $A_{\mathfrak{p}} \to K$, $\mathfrak{p}$ Primideal in A, sind alle injektiv, fasse also A bzw $A_{\mathfrak{p}}$ als Unterringe von K auf. Dann gilt:*

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq A \\ \text{max. Ideal}}} A_{\mathfrak{m}}$$

.

Beweis (Für Primideale). "$\subseteq$ "klar.
"$\supseteq$ " Sei $x \in K$ mit $x \in A_\mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$. Setze

$$\varphi : A \to {}^{K}\!/_{A}, \quad a \mapsto ax + A$$

(Homomorphismus von A-Moduln) dann ist

$$\varphi_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \to \left({}^{K}\!/_{A}\right)_\mathfrak{p} = {}^{k_\mathfrak{p}}\!/_{A_\mathfrak{p}}, \quad \frac{a}{s} \mapsto \frac{ax}{s} + A_\mathfrak{p}$$

die Nullabbildung für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ wegen $x \in A_\mathfrak{p}$. Nach 3.12.16 ist $\varphi = 0$, also insbesondere $\varphi(1) = 0 = x + A = A$, also ist $x \in A$. Analog für maximale Ideale. ■

3.13 Tensorprodukt und flache Moduln

Definition 3.13.1. Seien L, M, N A-Moduln, $\varphi : M \times N \to L$.. φ heißt *A-bilinear* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $M \to L \quad m \mapsto \varphi(m, n)$ A-linear und für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $N \to L \quad n \mapsto \varphi(m, n)$ A-linear.

Definition 3.13.2. Seien M, N A-Moduln, Ein *Tensorprodukt* von M und N über A ist ein A-Modul T zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$ sodass folgende Universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jeden A-Modul L und jede A-lineare Abbildung $\varphi : M \times N \to L$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\alpha : T \to L$, sodass $\alpha \circ \tau = \varphi$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr] \arrow[dr, "\tau"] & & L \\
& T \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 3.13.3. *Seien M, N A-Moduln. Dann gilt:*

a) Es gibt ein Tensorprodukt von M, N über A.

b) Sind T, T' Tensorprodukte von M, N über A mit A-bilinearen Abbildungen $\tau : M \times N \to T$, $\tau^{'} : M \times N \to T^{'}$, dann existiert genau ein A-Modulhomomorphismus $\alpha : T \to T^{'}$ mit $\alpha \circ \tau = \tau^{'}$. α ist ein Isomorphismus. Mit anderen Worten: Das Tensorprodukt von M, N ist eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

c) Ist T ein Tensorprodukt von M, N über A mit einer A-bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$ und setzen wir für $m \in M, n \in N$:

$$m \otimes n := \tau(m, n)$$

Dann wird T erzeugt von den Elementen $m \otimes n$, $m \in M, n \in N$ das heißt jedes Element von T ist von der Form $\sum_{i=1}^{r} a_i(m_i \otimes n_i)$ mit $a_i \in A, m_i \in M, n_i \in N$. Hierbei gilt:

$$(m + m^{'}) \otimes n = m \otimes n + m^{'} \otimes n, \qquad m \otimes (n + n^{'}) = M \otimes n + m \otimes n^{'},$$

$$(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$$

für alle $m, m^{'} \in M, n, n^{'} \in N, a \in A$. Notation für Tensorprodukt von M und N über A: $M \otimes_A N$

Beweis. a) 1. Es gibt eine kanonische Inklusion:

$$\iota : M \times N \hookrightarrow A^{(M\times N)} = \bigoplus_{k\in M\times N} A$$
$$(m,n) \longmapsto = ([m,n]_k)_{k\in M\times N}$$

(was kein A-Modulhomomorphismus ist) wobei

$$[m,n]_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k=(m,n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Elemente $[m,n]$ bilden offenbar eine A-Basis von $A^{M\times N}$. Sei U ein Untermodul von $A^{M\times N}$, der von allen Elementen der folgenden Gestalt erzeugt wird:

$$\begin{array}{ll} [m+m^{'},n]-[m,n]-[m^{'},n], & [m,n+n^{'}]-[m,n]-[m,n^{'}], \\ [am,n]-a[m,n], & [m,an]-a[m,n] \end{array}$$

mit $m,m^{'} \in M, n,n^{'} \in N, a \in A$. Setze

$$T := {A^{M\times N}}/{U}, \quad \tau : M\times N \overset{\iota}{\hookrightarrow} A^{M\times N} \overset{\pi}{\to} T, \quad (m,n)\mapsto \overline{[m,n]}$$

2. T ist zusammen mit τ ein Tensorprodukt von M,N über A:

- T ist A- bilinear nach Konstruktion von U. (zum Beispiel: $\tau(m+m^{'},n) = \overline{[m+m',n]} = \overline{[m,n]} + \overline{[m',n]} = \tau(m,n)+\tau(m^{'},n))$
- T erfüllt die Universelle Eigenschaft: Sei L ein A-Modul $\varphi : M\times N \to L$ A-bilinear. Wir erhalten eine A-lineare Abbildung

  $$\psi : A^{M\times N} \to L, \quad \psi([m,n]) := \varphi(m,n)$$

  Wegen φ bilinear ist $\psi(U) = 0$:

  $$\begin{aligned} \psi([m+m',n]-[m,n]-[m',n]) &= \psi([m+m',n]) - \psi([m,n]) - \psi([m',n]) \\ &= \varphi(m+m',n) - \varphi(m,n) - \varphi(m',n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  . Daraus erhalten wir eine A-lineare Abbildung

  $$\alpha : T = {A^{M\times N}}/{U} \to L$$

  mit $\alpha([m,n]) = \psi([m,n]) = \varphi(m,n)$ also $\alpha(\tau(m,n)) = \varphi(m,n)$, das heißt $\alpha\circ\tau = \varphi$. α ist durch die Vorgabe $\alpha\circ\tau=\varphi$ eindeutig bestimmt, da die Elemente $\overline{[m,n]} = \tau(m,n)$ den A-Modul T erzeugen.

b) mit Standardargumenten

c) aus der Konstruktion im Beweis von (a) ■

Anmerkung. Für $m \in M$ ist stets $m \otimes 0 = 0$ denn $m \otimes 0 = m \otimes (0+0) = m \otimes 0 + m \otimes 0$ analog $0 \otimes n = 0$ für $n \in N$.

Beispiel 3.13.4. 1. ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} = 0$ Denn: Seien $a, b \in {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ so existiert ein $n \in N$ mit $na = 0$, es existiert ein $b' \in {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ mit $nb' = b \Rightarrow a \otimes b = a \otimes (nb') = (na) \otimes b' = 0 \otimes b'$

2. ${}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Z}}/_{3\mathbb{Z}} = 0$. Denn: Für $a \in {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}, b \in {}^{\mathbb{Z}}/_{3\mathbb{Z}}$ ist $a \otimes b = (3a) \otimes b = a \otimes (3b) = a \otimes 0 = 0$

Bemerkung 3.13.5. *Seien M, M', N, N' A-Moduln, $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ A-Modulhomomorphismen. Dann gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus*

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

mit $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ für alle $m \in M$, $n \in N$.

Beweis. Die Abbildung $f \times g : M \times N \to M' \otimes N'$, $(m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ ist A-bilinear. Dann folgt die Behauptung aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukts. ■

Folgerung 3.13.6. *Seien M, N A-Moduln. Dann sind*

$$M \otimes_A - : A\text{-}Mod \to A\text{-}Mod \quad und \quad - \otimes_A N : A\text{-}Mod \to A\text{-}Mod$$

additive Funktoren. hierbei setzen wir für $N_1, N_2 \in A$-Mod, $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(N_1, N_2)$

$$(M \otimes_A -)(\varphi) := \mathrm{id}_M \otimes \varphi : M \otimes N_1 \to M \otimes N_2, \quad m \otimes n \mapsto m \otimes \varphi(n)$$

(analog für $- \otimes_A N$)

Beweis. Offenbar ist $(M \otimes_A -)(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes N}$ und für $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(N_1, N_2)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N_2, N_3)$ ist

$$(M \otimes_A -)(\psi \circ \varphi) = \mathrm{id}_M \otimes (\psi \circ \varphi) = (\mathrm{id}_M \otimes \psi) \otimes (\mathrm{id}_M \otimes \varphi) = (M \otimes_A -)(\psi) \circ (M \otimes_A -)(\varphi)$$

Bemerkung 3.13.7. *Seien L, M, N A-Moduln, $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln. Dann gibt es natürliche Isomorphismen* *a)* $M \otimes_A A \cong A \cong A \otimes_A N$

b) $N \otimes_A N \cong N \otimes_A M$

c) $(L \otimes_A M) \otimes_A N \cong L \otimes_A (M \otimes_A N)$

d) $M \otimes_A \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I}(M \otimes N_i)$

Beweis. a) Die Abbildung $\varphi : M \times A \to M$, $(m,a) \mapsto am$ ist A-bilinear. Aus der Universellen Eigenschaft erhalten wir einen A-Modulhomommorphismus $\alpha : M \otimes_A A \to M$ mit $\alpha(m \otimes a) = am$. Die Abbildung $\beta : M \to M \otimes_A A$, $m \mapsto m \otimes 1$ ist A-linear. Es ist

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(m \otimes a) &= \beta(am) = (am) \otimes 1 = m \otimes a \\ (\alpha \circ \beta)(m) &= \alpha(m \otimes 1) = 1m = m \end{aligned}$$

d.h. α, β sind invers zueinander, also $M \otimes_A A \cong A$. Für A-Modulhomomorphismen M_1, M_2, $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes A \arrow[r, "{\alpha_1, \sim}"] \arrow[d, "\varphi\otimes \mathrm{id}_A"'] & M_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ M_2 \otimes A \arrow[r, "{\alpha_2, \sim}"] & M_2 \end{tikzcd}$$

denn:

$$\alpha(\varphi \otimes \mathrm{id}_A)(m \otimes a) = \alpha_2(\varphi(m) \otimes a) = a\varphi(m) = \varphi(am) = \varphi(\alpha_1(m \otimes a))$$

b) Die Abbildung $\varphi : M \times N \to N \otimes_A M$, $(m,n) \mapsto n \otimes m$ ist A-bilinear. Nach der Universellen Eigenschaft erhalten wir einen A-Modulhomomorphismus $\alpha : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ mit $\alpha(m \otimes n) = n \otimes m$ für alle $m \in M$, $n \in N$. Analog erhlalten wir einen A-Modulhomomorphismus $\beta : M \otimes_A M \to M \otimes_A N$ mit $\beta(n \otimes m) = m \otimes n$ für alle $m \in M$, $n \in N$. Diese sind offenbar invers zueinander. Die Natürlichkeit folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes N_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi\otimes\psi"'] & N_1 \otimes_A M_1 \arrow[d, "\psi\circ\varphi"] \\ M_2 \otimes_A N_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & N_2 \otimes M_2 \end{tikzcd}$$

Rest Übung. ■

Anmerkung. Das Tensorprodukt kommutiert im Allgemeinen nicht mit Produkten (Übung).

Folgerung 3.13.8. *Seien M, N freie A-Moduln. Dann ist $M \otimes_A N$ ein freier A-Modul.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M \cong R^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A$, $N \cong A^{(J)}$ für geeignete I, J. Dann ist

$$M \otimes_A N \cong A^{(I)} \otimes_A A^{(J)} = \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} A\right) = \bigoplus_{I\times J}(A \otimes_A A) \cong \bigoplus_{I\times J} A = A^{(I\times J)}$$

Bemerkung 3.13.9. *Sei B ein kommutativer Ring. $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, M ein A-Modul. Dann wird B ein $A-$Modul vermöge $A\times B \to M$, $(a, b) \mapsto f(a)b$ und $M \otimes_A B$ ist ein B-Modul vermöge*

$$B \times (M \otimes_A B) \to M \otimes_A B \quad (b, \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes b_i) \mapsto \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes bb_i$$

Bemerkung 3.13.10. *Sei B ein kommutativer Ring, M ein A-Modul, L ein B-Modul, N A- und B-Modul mit $a(bx) = b(ax)$ für alle $a \in A$, $b \in B$, $x \in N$ („N* ist ein (A, B)-Bimodul*“). Dann ist $M \otimes_A N$ in natürlicher Weise ein B-Modul, $M \otimes_B L$ ein A-Modul und es ists*

$$(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L)$$

ein Isomomorphismus von A- und B-Moduln.

Beweis. Übung. ∎

Bemerkung 3.13.11. *Sei M ein A-Modul, $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich „$\cdot$“. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus (von A- und $S^{-1}A$-Moduln)*

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$$

Beweis. Setze

$$\varphi : S^{-1}A \times M \to S^{-1}M, \quad \left(\frac{a}{s}, m\right) \mapsto \frac{am}{s}$$

φ ist wohldefniert und A-bilinear, d.h. wir erhalten einen A-Modulhomomorphismus

$$\psi : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M \quad \text{mit} \quad \psi\left(\frac{a}{s} \otimes m\right) = \frac{am}{s}$$

für alle $a \in A$, $s \in S$, $m \in M$. Definiere $\delta : S^{-1}M \to S^{-1}A \otimes_A M$, $\frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s} \otimes me$. Dann ist δ wohldefiniert, denn sei $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$. Dann existiert ein $t \in S$ mit $ts_2m_1 = ts_1m_2$, also ist

$$\frac{1}{s_1} \otimes m_1 = \frac{1}{ts_2s_1} \otimes ts_2m_1 = \frac{1}{ts_2s_1} \otimes ts_1m_2 = \frac{1}{s_2} \otimes m_2$$

Es ist $\psi \circ \delta = \mathrm{id}_{S^{-1}M}$ und

$$(\delta \circ \psi)\left(\frac{a}{s} \otimes m\right) = \delta\left(\frac{am}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes (am) = \frac{a}{s} \otimes m$$

d.h. $\delta \circ \psi = \mathrm{id}_{S^{-1}A \otimes_A M}$. ψ ist auch ein Homomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln. Die Natürlichkeit n M rechnet man leicht nach. ∎

Bemerkung 3.13.12. *Seiene M, N A-Moduln, $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich "·". Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln*

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}M} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_A N)$$

Beweis. Übung. ∎

Bemerkung 3.13.13. *Seien L, M, N A-Moduln. Dann gilt:*

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L))$$

auf natürliche Weise. Insbesondere ist $- \otimes_A N \dashv \mathrm{Hom}_A(N, -)$.

Beweis. Setze $\mathrm{Bil}_A(M \times N, L) := \{f : M \times N \to L \mid f \text{ ist } A\text{-bilinear}\}$. Dann ist $\mathrm{Bil}_A(M \times N, L)$ auf natürliche Weise ein A-Modul. Nach Definition des Tensorprodukts ist

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \mathrm{Bil}_A(M \times N, L)$$

ein Isomorphismus von A-Moduln. Definiere

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Bil}_A(M \times N, L) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L)) \\ \varphi &\mapsto \Phi(\varphi) : M \to \mathrm{Hom}_A(N, L),\ m \mapsto (N \to L, n \mapsto \varphi(m, n)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L)) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_A(M \times N, L) \\ \psi &\mapsto (M \times N \to L,\ (m, n) \mapsto \psi(m)(n)) \end{aligned}$$ ∎

Φ, Ψ sind zueinander inverse A-Modulhomomorphismen. Also folgt

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \mathrm{Bil}_A(M \times N, L) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L))$$

Folgerung 3.13.14. *Seien M, N A-Moduln. Dann sind die Funktoren $M \otimes_A -$ und $- \otimes_A N$ rechtsexakt.*

Beweis. Wegen $- \otimes_A \dashv \mathrm{Hom}_A(N, -)$ ist $- \otimes_A N$ rechtsexakt nach 2.5.33. Nach 3.13.7 *b*) ist auch $M \otimes_A -$ rechtsexakt. ∎

Beispiel 3.13.15. $-\otimes_A N$ ist im Allgemeinen nicht exakt: Sei $A = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir betrachten die Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

wobei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$ und π der kanonischen Projektion. Es ist $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$ und die Abbildung

$$f \otimes_A \mathrm{id}_N : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ist die Nullabbildung, denn für $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist

$$(f \otimes \mathrm{id}_N)(x \otimes y) = f(x) \otimes y = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$$

Bemerkung 3.13.16. *Sei M ein A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gilt:*

$$A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

von A-Moduln. Anwendung von $-\otimes_A M$ liefert nach 3.13.14 die exakte Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{a} \otimes_A M & \xrightarrow{\iota \otimes \mathrm{id}_M} & A \otimes_A M & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi,\sim} & & & & \\ & & M & & & & \end{array}$$

d.h. $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong \mathrm{coker}(\iota \otimes_A \mathrm{id}_M)$. Nach 3.13.7 $a)$ ist die Abbildung $\psi : A \otimes_A M \to M$, $a \otimes m \mapsto am$ ein A-Modulisomorphismus. Es folgt

$$A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong \mathrm{coker}(\iota \otimes_A \mathrm{id}_M) \cong \mathrm{coker}(\psi \circ (\iota \otimes_A \mathrm{id}_M))$$

wobei $\psi \circ (\iota \otimes_A \mathrm{id}_M) : \mathfrak{a} \otimes_A M \to M$, $\sum a_i \otimes m_i \mapsto \sum a_i m_i$, insbesondere ist $\mathrm{im}(\psi \circ (\iota \otimes_A \mathrm{id}_M)) = \mathfrak{a}M$, d.h. $\mathrm{coker}(\psi \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_M)) = M/\mathfrak{a}M$. ■

Definition 3.13.17. Sei M ein A-Modul. Dann heißt M *flach* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} -\otimes_A M$ ist exakt $\Leftrightarrow M \otimes_A -$ ist exakt.

Bemerkung 3.13.18. *Sei P ein projektiver A-Modul. Dann ist P flach.*

Beweis. Nach 2.6.3 existiert eine Menge I, ein A-Modul Q mit $P \oplus Q \cong A^{(I)}$. Nach 3.13.14 genügt es zu zeigen: $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ exakte Folge von A-Moduln $\Rightarrow$ $0 \longrightarrow M' \otimes_A P \xrightarrow{f \otimes id_P} M \otimes_A P$ ist exakt.

Sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ exakt. Wir erhalten kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} M' \arrow[r, "\oplus f"] \arrow[d, "\cong"'] & \bigoplus_{i\in I} M \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & M' \otimes_A \bigoplus_{i\in I} A \arrow[r, "f\otimes id_{A^{(I)}}"] \arrow[d, "\cong"'] & M \otimes_A \bigoplus_{i\in I} A \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & M' \otimes_A P \oplus Q \arrow[r, "f\otimes(id_p \oplus id_Q)"] \arrow[d, "\cong"'] & M \otimes_A P \oplus Q \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & (M' \otimes_A P) \oplus (M' \otimes_A Q) \arrow[r, "(f\otimes id_p)\oplus(f\otimes id_Q)"] & (M \otimes_A P) \oplus (M \otimes Q)
\end{tikzcd}$$

Woraus folgt dass $0 \longrightarrow M' \otimes_A P \xrightarrow{f\otimes id_P} M \otimes_A P$ exakt ist. ∎

Bemerkung 3.13.19. *Seien M, N flache A-Moduln. Dann ist $M \otimes_A N$ flach.*

Beweis. Sei $0 \longrightarrow L' \longrightarrow L$ eine exakte Sequenz von A-Moduln

Da M flach ist folgt: $0 \longrightarrow L' \otimes_A M \longrightarrow L \otimes_A M$ ist exakt

Da N flach ist, folgt: $0 \longrightarrow (L' \otimes_A M) \otimes_A N \longrightarrow (L \otimes_A M) \otimes_A N$ ist exakt

Und mit 3.13.7 schließlich dass $0 \longrightarrow L' \otimes_A (M \otimes_A N) \longrightarrow L \otimes_A (M \otimes_A N)$ exakt ist.

Bemerkung 3.13.20. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *flach*

ii) M_i *flach für alle* $i \in I$.

Beweis. Sei $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& 0 \longrightarrow N' \otimes_A (\textstyle\bigoplus_{i\in I} M_i) \longrightarrow N \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \quad \text{exakt} \\
\overset{13.7}{\Leftrightarrow} \quad & 0 \longrightarrow \textstyle\bigoplus_{i\in I}(N' \otimes_A M_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(N \otimes_A M_i) \quad \text{exakt} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \longrightarrow N' \otimes_A M_i \longrightarrow N \otimes_A M_i \quad \text{exakt für alle } i \in I
\end{aligned}$$ ∎

Bemerkung 3.13.21. *Sei B ein kommutativer Ring, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, M ein flacher A-Modul. Dann ist $B \otimes_A M$ ein flacher B-Modul.*

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Bemerkung 3.13.22. *Sei $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich „ $\cdot$ ". Dann ist $S^{-1}A$ ein flacher A-Modul.*

Beweis. Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ eine exakte Folge von A-Moduln. Wir erhalten kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S^{-1}M' & \longrightarrow & S^{-1}M \\ & & \sim\big\downarrow & & \big\downarrow\sim \\ 0 & \longrightarrow & S^{-1}A \otimes_A M' & \longrightarrow & S^{-1}A \otimes_A M \end{array}$$

(Beachte: $S^{-1}-$ ist exakt nach 3.12.8) ■

Anmerkung. A nullteilerfrei $\Rightarrow$ Quot A flacher Modul.

Bemerkung 3.13.23. *Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist ein flacher A-Modul

ii) $M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$

iii) $M_\mathfrak{m}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ folgt wegen $M_\mathfrak{p} \cong M \otimes_A A_\mathfrak{p}$ aus 3.13.21
$(ii) \Rightarrow (iii)$ trivial.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$ eine exakte Folge von A-Moduln. Mit 3.12.15 folgt $0 \longrightarrow N'_\mathfrak{m} \longrightarrow N_\mathfrak{m}$ ist eine exakte Sequenz von $A_\mathfrak{m}$-Moduln für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$. mit (iii) folgt $0 \longrightarrow N'_\mathfrak{m} \otimes_A M_\mathfrak{m} \longrightarrow N_\mathfrak{m} \otimes_A M_\mathfrak{m}$ ist eine exakte Sequenz von $A_\mathfrak{m}$-Moduln für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$. Das heißt $0 \longrightarrow (N' \otimes_A M)_\mathfrak{m} \longrightarrow (N \otimes_A M)_\mathfrak{m}$ ist eine exakte Sequenz von $A_\mathfrak{m}$-Moduln für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$. Mit 3.12.15 ist dann $0 \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M$ eine exakte folge von A-Moduln. ■

Anmerkung. Erinnerung an LA2 (29.15): Sei M ein A-Modul.

$$T(M) := \{x \in M \mid \exists a \in A, a \text{ kein Nullteiler mit } ax = 0\}$$

ist das *Torsionsmodul von M*. M heißt *torsionsfrei* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} T(M) = \{0\}$

Bemerkung 3.13.24. *Sei A nullteilerfrei, M ein flacher A-Modul. Dann ist M torsionsfrei.*

Beweis. Setze $K := \operatorname{Quot} A$ Dann folgt $0 \longrightarrow A \longrightarrow K$ ist eine exakte Folge von A-Moduln. Aus der Flachheit von M folgt $0 \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A M$ exakt. $K \otimes_A M$ ist ein K-Vektorraum und somit torsionsfrei als K-Vektorraum und auch als A-Modul. Daraus folgt, dass M torsionsfrei als A-Modul ist. ■

Bemerkung + Definition 3.13.25. Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:

i) Für jede Sequenz $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ von A-Moduln gilt:

$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \text{ exakt} \Leftrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \text{ exakt}$$

ii) M ist flach und für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$ ist ${}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M} \neq 0$.

iii) M ist flach und für alle A-Moduln N gilt: $N \otimes_A M = 0 \Rightarrow N = 0$.

iv) M ist flach und für alle A-Modulhomomorphismen $\varphi : N_1 \to N_2$ gilt:

$$\varphi \otimes_A id_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt so heißt M ein *treuflacher* A-Modul.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Dass M flach ist, ist trivial. Sei also $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal, dann erhält man die exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow A \longrightarrow {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$ von A-Moduln. mit (i) und unter Anwendung von $- \otimes_A M$ erhalten wir dass

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}} \otimes_A M \longrightarrow 0$$

exakt ist. Nach 3.13.16 gilt außerdem ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}} \otimes_A M \cong {}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M}$. Angenommen ${}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M} = 0$. Dann wäre

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow 0$$

exakt und mit (i) wäre dann auch $0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ exakt, Widerspruch!
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sei N ein A-Modul, $N \neq 0$. Dann existiert ein $x \in N$, $x \neq 0$, das heißt $\operatorname{ann}_A(x) \subsetneq A$. Dann existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \in A$ mit $\operatorname{ann}_A(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Man erhält einen Epimorphismus von A-Moduln

$$f : Ax \longrightarrow {}^{A}\!/_{\operatorname{ann}_A(x)} \longrightarrow {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$$

woraus

$$f \otimes_A id_M : Ax \otimes_A M \to {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}} \otimes_A M \cong {}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M} \neq 0$$

folgt. Damit ist dann $Ax \otimes_A M \neq 0$. Die Sequenz $0 \longrightarrow Ax \longrightarrow N$ ist exakt, da wegen M flach auch $0 \longrightarrow Ax \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M$ exakt ist. Somit: $N \otimes_a M \neq 0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sei $\varphi : N_1 \to N_2$ A-linear und $\varphi \otimes \mathrm{id}_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ sei die Nullabbildung. Setze $U := \operatorname{im} \varphi$. So erhalten wie die Faktorisierung $\varphi : N_1 \to U \to N_2$. Dann ist $\varphi|^U \otimes_A id_M$ ist surjektiv, $\iota \otimes_A id_M$ ist injektiv, da M flach ist. Außerdem ist

$$(\iota \otimes_A id_M) \circ (\varphi|^U \otimes_A id_M) = \varphi \otimes id_M = 0$$

Aus der Injektivität von $\iota \otimes_A id_M$ folgt $\varphi|^U \otimes_A id_M = 0$ und die Surjektivität von $\varphi|^U \otimes_A id_M = 0$ impliziert $U \otimes_A M = 0$ und mit (iii) folgt $U = 0$, das heißt $\varphi = 0$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Sei N ein A-Modul mit $N \otimes_A M = 0 \Rightarrow id_N \otimes_A id_M : N \otimes_A M \to N \otimes_A M$ ist die Nullabildung. Dann folgt mit (iv) $id_N = 0 \Rightarrow N = 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ eine Sequenz von A-Moduln. Zu zeigen ist:

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \text{ exakt} \Leftrightarrow N' \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes id_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g \otimes id_M} N'' \otimes_A M \text{ exakt}$$

" $\Rightarrow$ " folgt aus der Flachheit von M.
Für " $\Leftarrow$ " ist zu zeigen $\operatorname{im} f = \ker g$
" $\subseteq$ " Es ist $(g \circ f) \otimes_A id_M = (g \otimes_A id_M) \circ (f \otimes_A id_M) = 0$ mit (iv) folgt $g \circ f = 0$.
" $\supseteq$ " Wir betrachten die exakten Sequenzen

$$N' \xrightarrow{f|^{\operatorname{im} f}} \operatorname{im} f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} f \xrightarrow{\iota_1} \ker g \longrightarrow {}^{\ker g}\!/_{\operatorname{im} f} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker g \xrightarrow{\iota_2} N \xrightarrow{g|^{\operatorname{im} g}} \operatorname{im} g \longrightarrow 0$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{im}((\iota_a \otimes_A id_M) \circ (\iota_i \otimes_A id_M) \circ (f|^{\operatorname{im} f} \otimes_A id_M)) &= \operatorname{im}(f \otimes_A id_M) = \ker(g \otimes_A id_M) \\ &= \ker(g|^{\operatorname{im} g} \otimes_A id_M) = \operatorname{im}(\iota_2 \otimes_A id_M) \end{aligned}$$

wobei die letze Gleichheit aus der Flachheit von M folgt. Wegen M flach, ist $\iota_2 \otimes id_M$ injektiv, woraus

$$\operatorname{im}((\iota_1 \otimes id_M) \circ (f|^{\operatorname{im} f} \otimes id_M)) = \ker g \otimes_A M$$

folgt, also $(\iota_1 \otimes id_M) \circ (f|^{\operatorname{im} f} \otimes id_M)$ surjektiv. Damit ist auch $\iota_1 \otimes id_M$ surjektiv. Da M flach ist, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} f \otimes_A M \xrightarrow{\iota_1 \otimes id_M} \ker g \otimes_A M \longrightarrow ({}^{\ker g}/_{\operatorname{im} f}) \otimes_A M \longrightarrow 0$$

Daraus resultiert schließlich

$$\left({}^{\ker g}/_{\operatorname{im} f}\right) \otimes_A M = 0$$

und mit (ii) folgt, dass ${}^{\ker g}/_{\operatorname{im} f} = 0$, d.h. $\ker g = \operatorname{im} f$. ■

Beispiel 3.13.26. a) $\mathbb{Q}$ ist flacher $\mathbb{Z}$-Modul nach 3.13.22, aber kein treuflacher $\mathbb{Z}$-Modul, denn $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} = 0$

b) $A^{(I)}$ ist ein treuflacher A-Modul für $I \neq \emptyset$.Denn:
$A^{(I)}$ ist flach, da freier A-Modul
Sei N A-Modul mit $N \otimes_A A^{(I)} = 0 \Rightarrow \bigoplus_{i \in I} N = 0 \Rightarrow N = 0$
Insbesondere ist $A[X] \cong A^{(\mathbb{N}_0)}$ ein treuflacher A-Modul.

3.14 Tor

Definition 3.14.1. Seien M, N A-Moduln. Wir setzen

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) := L_n(M \otimes_A -)(N) \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

Explizit: Wähle eine projektive Auflösung $Q_\bullet \to N$, dann ist $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \mathcal{H}_n(M \otimes_A Q_\bullet)$

Satz 3.14.2. *Sei M ein A-Modul. Dann ist $(Tor_n^A(M,-))_{n\geq 0}$ ein universeller δ-Funktor, d.h.*

- *$Tor_n^A(M,-) : A\text{-}Mod \to A\text{-}Mod$ sind additive Funktoren für alle $n \geq 0$*
- *Für jede exakte Folge $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ gibt es Verbindungshomomorphismen $\delta : Tor_{n+1}^A(M,N'') \to Tor_n^A(M,N)$, sodass die lange Folge*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Tor_{n+1}^A(M,N'') \arrow[r, "\delta"] & Tor_n^A(M,N') \arrow[r] & Tor_n^A(M,N) \arrow[dll, rounded corners, "\delta"'] \\
& Tor_n^A(M,N'') \arrow[r, "\delta"] & Tor_{n-1}^A(M,N') \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

  exakt ist, δ funktoriell (vgl. 2.9.1).

- *Für jeden homologischen δ-Funktor $H' = (H'_n)_{n\geq 0} : A\text{-}Mod \to A\text{-}Mod$ setzt sich jede natürliche Transformation $f_0 : M \otimes_A - \Rightarrow H'_0$ eindeutig zu einem Homomorphismus von homologichen δ-Funktoren fortsetzt.*

Beweis. Analog zu Kapitel 2. ■

Satz 3.14.3. *Seien M, N A-Moduln. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphimus*

$$Tor_n^A(M,N) \cong L_n(- \otimes_A N)(M) \quad \textit{für alle} \quad n \geq 0$$

insbesondere kann $Tor_n^A(M,N)$ auch über eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$ von M berechnet werden via $Tor_n^A(M,N) = \mathcal{H}_n(P_\bullet \otimes_A N)$.

Beweis. Analog zum Beweis von 2.10.2, verwende hierbei, dass projektive Moduln flach sind. ■

Folgerung 3.14.4. *Sei M ein flacher A-Modul, N ein A-Modul. Dann ist M $(-\otimes_A N)$-azyklisch.*

Beweis. Es ist

$$L_n(- \otimes_A N)(M) \underset{3.14.3}{\cong} \operatorname{Tor}_n^A(M,N) = L_n(M \otimes_A -)(N)$$

Da M flach ist, ist $M \otimes_A -$ exakt, d.h. $L_n(M \otimes_A -) = 0$ für $n \geq 1$, also $L_n(- \otimes_A N)(M) = 0$ für $n \geq 1$. ■

Folgerung 3.14.5. *Seien M, N A-Moduln. Dann gilt:*

$$\operatorname{Tor}_n^A(M,N) \cong \operatorname{Tor}_n^A(N,M) \quad \textit{für alle} \quad n \geq 0$$

Beweis. Sei $P_\bullet \to M$ eine projektive Auflösung von M. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_n^A(M,N) &= L_n(M \otimes_A -)(N) \underset{3.14.3}{\cong} L_n(- \otimes_A N)(M) = \mathcal{H}_n(P_\bullet \otimes_A N) = \mathcal{H}_n(N \otimes_A P_\bullet) \\ &= L_N(N \otimes_A -)(M) = \operatorname{Tor}_n^A(N,M) \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.14.6. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Folge von A-Moduln, M'' flach, N ein A-Modul. Dann ist die Folge*

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Nach 3.14.2 erhalten wir eine exakte Folge

$$\operatorname{Tor}_n^A(M'',N) \longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

Da M'' flach ist, ist $\operatorname{Tor}_1^A(M'',N) = 0$ nach 3.14.4. ■

Satz 3.14.7. *Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$, M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *M ist frei*

ii) *M ist projektiv*

iii) *M ist flach*

iv) *$\operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.*

Ist A noethersch, dann sind $i) - iv)$ äquivalent zu:

v) *$\operatorname{Tor}_1^A(k, M) = 0$*

Beweis. $i) \Rightarrow i)$) klar, $ii) \Rightarrow iii)$ aus 3.13.18, $iii) \Rightarrow iv)$ aus 3.14.4, $iv) \Rightarrow v)$ klar. $iv) \Rightarrow i)$ (bzw. $v) \Rightarrow i)$)

1. Seien $x_1, \dots, x_n \in M$, sodass die Restklassen $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ in k eine k-Basis von ${}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M}$ bilden. Das Nakayama-Lemma liefert, dass $x_1, \dots, x_n \in M$ bereits ein Erzeugendensystem von M sind. Setze $F := A^n$, $\varphi : F \to M$, $e_i \mapsto x_i$. $E := \ker \varphi$, erhalte also ein exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Anwendung von $- \otimes_A k$ liefert die exakte Folge

$$0 \overset{iv)}{=} \mathrm{Tor}_1^A(k, M) \longrightarrow k \otimes_A E \longrightarrow k \otimes_A F \xrightarrow{\mathrm{id}_k \otimes \varphi} k \otimes_A M \longrightarrow 0$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \dim_k(k \otimes_A M) &= \dim_k \left({}^{A}\!/_{\mathfrak{m}} \otimes_A M \right) = \dim_k \left({}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M} \right) = n = \dim_k(k^n) \\ &= \dim_k(k \otimes_A A^n) = \dim_k(k \otimes_A F) \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{id}_k \otimes \varphi$ ein Isomorphismus, d.h. $k \otimes_A E = 0$, also ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}} \otimes_A E = 0$ und damit ${}^{E}\!/_{\mathfrak{m}E} = 0$. Ist A noethersch, dann ist E endlich erzeugt und nach dem Nakayama-Lemma folgt, dass $E = 0$, also $M \cong F$, d.h. M ist frei, woraus $v) \Rightarrow i)$ folgt.

2. Sei $x = a_1 e_a + \ldots + a_n e_n \in E \subseteq F$. Setze $\mathfrak{a}_x := a_1 A + \ldots + a_n A$ (ist ein endlich erzeugtes Ideal in A.) Wir wollen einsehen. das $\mathfrak{a}_x = 0$ ist. Tensoriere $(*)$ mit ${}^{A}\!/_{\mathfrak{a}_x}$ und erhalte die exakte Folge:

$$\begin{tikzcd} 0 \underset{iv)}{=} \mathrm{Tor}_1^A\left({}^{A}\!/_{\mathfrak{a}_x}, M\right) \arrow[r] & {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}_x} \otimes_A E \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}_x} \otimes_A F \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}_x} \otimes_M M \arrow[r] & 0 \\ & {}^{E}\!/_{\mathfrak{a}_x E} \arrow[r, hook] & {}^{F}\!/_{\mathfrak{a}_x F} & & \end{tikzcd}$$

Da $x \in E \cap F$ ist $x \in \mathfrak{a}_X E = \mathfrak{a}_x \mathfrak{m} E \subseteq \mathfrak{a}_x \mathfrak{m} F$. Damit ist $x = \sum a_i' b_i$ mit $a_i' \in \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$, $b_i \in F$, also ist $x = \sum_i \tilde{a}_i e_i$ mit $\tilde{a}_i \in \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$. Also lieft $a_i \in \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$ für alle $i = 1, \ldots,$, das heißt $\mathfrak{a}_x \subseteq \mathfrak{a}_x \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}_x$, woraus schließlich $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$ folgt. Anwendung des Nakayama-Lemmas liefert also $\mathfrak{a}_x = 0$, also $x = 0$, womit $E = \ker \varphi = 0$, also $M \cong F$, also ist M frei. ■

Folgerung 3.14.8. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist ein flacher A-Modul

ii) $M_\mathfrak{p}$ ist ein freier $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$.

iii) $M_\mathfrak{m}$ ist ein freier $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$.

Beweis. Flachheit ist eine lokale Eigenschaft nach 3.13.24. Damit folgt die Behauptung aus 3.14.7. ∎

Satz 3.14.9. *Sei A ein Hauptidealring, M, N seien A-Moduln. Dann ist $Tor_n^A(M,N) = 0$ für $n \geq 2$.*

Beweis. Es existiert ein freier A-Modul F_0 und ein Epimorphismus $\varepsilon : F_0 \twoheadrightarrow N$. Setze $F_1 := \ker \varepsilon \subseteq F_0$. Da A ein Hauptidealring ist, ist F_1 frei und

$$(0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0) \xrightarrow{\ \varepsilon\ } N$$

eine projektive Auflösung von N. Für Tor folgt damit:

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \mathcal{H}_n(M \otimes F_0) = 0 \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

Bemerkung 3.14.10. *Sei M ein A-Modul, $a \in A$ kein Nullteiler. Dann gilt:*

$$Tor_1^A\left({}^{A}\!/_{(a)}, M\right) \cong \{x \in M \mid ax = 0\}$$

Beweis. Setze $\varphi_a : A \to A$, $b \mapsto ab$. Da a kein Nullteiler ist, ist φ_a injekitv. Erhalte also eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \varphi_a\ } A \longrightarrow {}^{A}\!/_{(a)} \longrightarrow 0$$

Tensorieren mit M liefert die exakte Folge

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Tor}_1^A(A,M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^A\left({}^{A}\!/_{(a)}, M\right) \arrow[r] & A \otimes_A M \arrow[r, "\varphi_a \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\sim"] & A \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & {}^{A}\!/_{(a)} \otimes_A M \arrow[r] & 0 \\
& & M \arrow[r, "x \mapsto ax"] & M & &
\end{tikzcd}$$

Also ist $\mathrm{Tor}_1^A\left({}^{A}\!/_{(a)}, M\right) \cong \ker(\varphi_a \otimes \mathrm{id}_M) \cong \{x \in M \mid ax = 0\}$. ∎

3.15 Ganze Ringerweiterungen und Dimension

In diesem Abschnitt bedeute “Ringerweiterung“ stets Erweiterung kommutativer Ringe

Definition 3.15.1. Sei $B|A$ eine Ringerweiterung.

$B|A$ heißt *endlich* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ B ist endlich erzeugt als A-Modul

$b \in B$ heißt *ganz* über A $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $A[b]|A$ ist endlich

$B|A$ heißt *ganz* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ Alle $b \in B$ sind ganz über A.

Anmerkung. Seien $B|A$, $C|B$ endliche Ringerweiterungen. Dann ist $C|A$ eine endliche Ringerweiterung, denn ist $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ ein Erzeugendensystem von B als A-Modul, $(c_j)_{j=1,\dots,m}$ ein Erzeugendensystem von C als B-Modul. Dann ist $(b_i c_j)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ ein Erzeugendensystem von C als A-Modul.

Satz 3.15.2. *Sei $B|A$ eine Ringerweiterung, $b \in B$. Dann sind äquivalent:*

i) b ist ganz über A

ii) ES gibt ein $n \in \mathbb{N}$, $a_{n-1}, \dots, a_0 \in A$ mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 = 0 \tag{$*$}$$

$(*)$ *heißt eine* Ganzheitsgleichung *für b.*

iii) Es gibt eine Zwischenring $A \subseteq Z \subseteq B$, sodass $b \in Z$ ist und $Z|A$ endlich ist.

iv) Es gibt einen $A[b]$-Modul M mit $\text{ann}_{A[b]} M = 0$, der als A-Modul endlich erzeugt ist.

Beweis. *i)* $\Rightarrow$ *iii)* Ist b ganz über A. Dann ist $A[b]|A$ endlich. Setze $Z := A[b]$.
iii) $\Rightarrow$ *iv)* Setze $M := Z$. Dann ist M in natürlicher Weise ein $A[b] \subseteq Z$-Modul. Es gilt: $x \in \text{ann}_{A[b]} Z \Rightarrow xZ = 0$ und wegen $1 \in Z$ ist $x = 0$, also $\text{ann}_{A[b]} M = 0$. Wegen $Z|A$ endlich, ist M endlich erzeugt als A-Modul.
iv) $\Rightarrow$ *ii)* Setze $\varphi : M \to M$, $x \mapsto bx$. Dann ist φ offenbar ein A-Modulhomomorphismus und wegen 3.11.14 mit $\mathfrak{a} = A$ folgt die Existenz von $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ mit

$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0 \,\text{id}_M = 0$$

Für alle $x \in M$ ist dann

$$(\underbrace{b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0}_{\in \text{ann}_{A[b]} M = 0})x = 0$$

Als ist $b^n + \ldots + a_0 = 0$.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Sei $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. Dann ist $1, b, \ldots, b^{n-1}$ ein Erzeugendensystem von $A[b]$ als A-Modul, denn: Sei $c \in A[b]$, etwa $c = \alpha_0 + \alpha_1 b + \ldots + \alpha_s b^s$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_s \in A$. Setze $h := \sum_{i=0}^{s} \alpha_i T^i \in A[T]$, $f := \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ $(a_n := 1)$. Da f normiert ist, existieren $q, r \in A[T]$ mit $h = qf + r$ und $\deg r < \deg f$. Dann ist

$$c = h(b) = q(b)\underbrace{f(b)}_{=0} + r(b) = r(b) \in \sum_{i=0}^{n-1} Ab^i$$

Anmerkung. Ist $B|A$ eine Körpererweiterung, dann gilt:

$$\begin{aligned} b \in B \text{ ist ganz über } A \quad &\Leftrightarrow \quad b \text{ ist algebraisch über } A \\ B|A \text{ ist ganz} \quad &\Leftrightarrow \quad B|A \text{ ist algebraisch} \end{aligned}$$

Folgerung 3.15.3. *Es gilt:*

a) *$B|A$ endlich $\Rightarrow$ $B|A$ ganz*

b) *$C|B|A$ Ringerweiterungen, $c \in C$ ganz über A. Dann ist c gnaz über B.*

Beweis. *b)* Sei $b \in B$. Dann folgt die Behauptung aus 3.15.2 *iii)* $\Rightarrow$ *i)* mit $Z = B$.
a) aus 3.15.2 *i)* $\Rightarrow$ *ii)* ■

Beispiel 3.15.4. $\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}$ ist ganz, denn $\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}$ ist endlich, da $1, i$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}[i]$ als $\mathbb{Z}$-Modul bilden.

Satz 3.15.5. *Seien $C|B|A$ Ringerweiterungen. Dann sind äquivalent:*

i) *$B|A$ ist ganz und $C|B$ ist ganz*

ii) *$C|A$ ist ganz*

Beweis. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sei $c \in C$. Dann existieren $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ mit

$$c^n + b_{n-}c^{n-1} + \ldots + b_1 c + b_0 = 0 \tag{$*$}$$

Dann ist $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c]|A$ endlich (also ist c ganz über A nach 3.15.2 mit $Z = A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c]$), denn:

- $A[b_0]|A$ ist endlich wegen $b_0 \in B$ und $B|A$ ist ganz.
- $(A[b_0])[b_1]|A[b_0]$ ist endlich, wegen $b_1 \in B$, also ist b_1 ganz über A. Somit ist b_1 ganz über $A[b_0]$, usw. Dann ist $(A[b_0, \ldots, b_{n-1}])[c]|A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$ endlich, da c gegenüber $A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$ ganz ist wegen $(*)$.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Sei $C|A$ ganz. Dann ist offensichtlich $B|A$ ganz und $C|B$ ist ganz nach 3.15.3 *b*). ■

Bemerkung 3.15.6. *Sei $B|A$ eine ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist ${}^{B}/_{\mathfrak{b}}|{}^{A}/_{\mathfrak{b}\cap A}$ eine ganze Ringerweiterung.*

Beweis. Wir haben eine natürliche Inklusion ${}^{A}/_{\mathfrak{b}\cap A} \hookrightarrow {}^{B}/_{\mathfrak{b}}$. Sei $\overline{b} \in {}^{B}/_{\mathfrak{b}}$. Da b ganz über A ist, existieren $a_{n-1}, \dots, a_0 \in A$ mit $b^n + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$, d.h.

$$\overline{b} + \ldots + \overline{a}_1 \overline{b} + \overline{a}_0 = \overline{0}$$

Damit ist $\overline{b}$ ganz über ${}^{A}/_{\mathfrak{b}\cap A}$. ■

Bemerkung 3.15.7. *Sei $B|A$ eine ganze Ringerweiterung, $S \subseteq A$ ein Untermonois bezüglich "·". Dann ist $S^{-1}B|S^{-1}A$ eine ganze Ringerweiterung.*

Beweis. Wir haben eine natürliche Inklusion $S^{-1}A \hookrightarrow S^{-1}B$. Sei $b \in B$, $s \in S$. Da $B|A$ ganz ist, existieren $a_{n-1}, \dots, a_0 \in A$ mit $b^n + \ldots + a_0 = 0$. Also ist

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{s^{n-1}}\left(\frac{b}{s}\right) + \frac{a_0}{s^n} = 0$$

also ist $\frac{b}{s}$ ganz über $S^{-1}A$. ■

Bemerkung + Definition 3.15.8. Sei $B|A$ eine Ringerweiterung. Dann gilt:

$$\overline{A}^B := \{b \in B \mid b \text{ ist ganz über } A\}$$

ist ein Unterring von B mit $A \subseteq \overline{A}^B$, der *ganze Abschluss*. A heißt *ganzabgeschlossen in B* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \overline{A}^B = A$. $\overline{A}^B|A$ ist eine ganze Ringerweiterung und $\overline{A}^B$ ist ganzabgeschlossen in B.

Beweis. Seien $b_1, b_2 \in \overline{A}^B$. Setze $Z := A[b_1, b_2]$. Es ist $A[b_1]|A$ endlich, da b_1 ganz über A ist. Da b_2 ganz über A ist, ist $b_2$auch ganz über $A[b_1]$ nach 3.15.3. Dann ist $Z = (A[b_1])[b_2]|A[b_1]$ endlich und $Z|A$ ist endlich. Es sind $b_1 - b_2$, $b_1 \cdot b_2 \in Z$ und nach 3.15.2 sind $b_1 - b_2$, $b_1 \cdot b_2$ ganz über A. Außerdem sind $0, 1 \in \overline{A}^B$. Somit ist $\overline{A}^B$ ein Unterring von B. $\overline{A}^B|A$ ist ganz nach Konstruktion und $\overline{A}^B$ ist ganzabgeschlossen in B, denn:

$$\overline{(\overline{A}^B)}^B = \{b \in B \mid b \text{ ist ganz über } \overline{A}^B\} = \{b \in B \mid b \text{ ist ganz über } A\} = \overline{A}^B$$

Bemerkung 3.15.9. *Sei $B|A$ eine Ringerweiterung, $S \subseteq A$ ein Untermonoid bezüglich "$\cdot$". Dann gilt:*

$$\overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B} = S^{-1}(\overline{A}^B)$$

Insbesondere gilt: Ist A ganzabgeschlossen in B, dann ist $S^{-1}A$ ganzabgeschlossen in $S^{-1}B$.

Beweis. "$\subseteq$" Die Erweiterung $S^{-1}(\overline{A}^B)|S^{-1}A$ ist ganz, da $\overline{A}^B|A$ ganz ist und nach **??** ist $S^{-1}(\overline{A}^B) \subseteq \overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B}$.
"$\supseteq$" Sei $b \in B$, $s \in S$ mit $\frac{b}{s}$ ganz über $S^{-1}A$. Dann existieren $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in A$, $s_{n-1}, \ldots, s_0 \in S$ mit

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{s_1}\frac{b}{s} + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

Setze $t := s_0 \cdots s_{n-1} \in S$. Mutlipliziere die Gleichung mit $(st)^n$:

$$(bt)^n + \frac{a_{n-1}st}{s_{n-1}}(bt)^{n-1} + \ldots = 0$$

d.h. wir erhalten eine Ganzheitsgleichung für bt über A. Dann ist $bt \in \overline{A}^B$, d.h. $\frac{b}{s} = \frac{bt}{st} \in S^{-1}(\overline{A}^B)$ ■

Definition 3.15.10. Sei A nullteilerfrei. Der *ganze Abschluss* von A ist der ganze Abschluss von A in $\mathrm{Quot}(A)$. A heißt *normal (ganzabgeschlossen)* $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ A stimmt mit seinem ganzen Abschluss überein.

Bemerkung 3.15.11. *Sei A faktoriell. Dann ist A normal.*

Beweis. Sei $b \in \mathrm{Quot}(A)$ ganz über A. Es ist zu zeigen, dass $b \in A$ liegt. Es existieren $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in A$ mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$$

Sei $b = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in A$ teilerfremd. Dann ist

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplikation mit q^n liefert

$$p^n = a_{n-1}qp^{n-1} - \ldots - a_1 q^{n-1}p - a_0 q^n$$

Angenommen $q \notin A^*$. Da A faktoriell, existieren Primteiler π von a, sodass $\pi | p^n$, also $\pi | p$ Widerspruch zu p, q teilerfremd! Alst liegt $q \in A^*$, d.h. $b \in A$. ■

Beispiel 3.15.12. Es ist $\overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i]$, denn: $\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}$ ist ganz, $\mathbb{Z}[i]$ ist normal, da faktoriell.

Index

abelsche Kategorie, 37
additive Kategorie, 34, 35
adjungierter Funktor, 40
Anfangsobjekt, 32
Annulator, 9
artinsch, 21
artinscher Ring, 21
Auflösung von Objekten, 55
aufsteigende Kettenbedingung, 17
augmentiere Komplex, 55

Baer-Kriterium, 47
Basis, 9
Bild, 6

Differential, 53
direkte Summe, 8
direktes Produkt, 8
Duale Kategorie, 25

Einbettungssatz von Freyd-Mitchell, 42
endlich erzeugter Modul, 10
endlich koerzeugt, 23
Endobjekt, 32
Epimorphismus, 5
Erzeugendensystem, 9
erzeugter Untermodul, 9
exakte Sequent, 11
exakter Funktor, 39

Fünferlemma, 15
Faktormodul, 6
freier Modul, 10

genügend viele Injektive, 55
genügend viele Projektive, 55

Hilbertscher Basissatz, 20
homotope Komplexhomomomorphismen, 57
Homotopieäquivalenz, 58
Hufeisenlemma, 56

injektives Objekt, 39
Isomorphismus, 5

Kategorie, 24
kategorielle exakte Folge, 38
kategorieller Epimorphismus, 27
kategorieller Isomorphismus, 27
kategorieller Kern, 35
kategorieller Monomorphismus, 27
kategorielles Bile, 36
kategorielles Kobild, 36
kategorielles Koprodukt, 33
Kategorienäquivalenz, 29
Kern, 6
Klasse, 24
kofreier Modul, 50
Kohomologie, 54
Komplex, 53
Komplexhomomorphismus, 53
kontravarianter Funktor, 26
Koprodukt, 33
Korand, 54
kovarianter Funktor, 25
Kozykel, 54
kurze exakte Sequenz, 11

Lange exakte Kohomologiefolge, 54
linear abhängig, 9
linksexakter Funktor, 39
Linksmodul, 3

Modulhomomorphismus, 4
Monomorphismus, 5
Morphismus, 24

natürliche Äquivalenz, 29
natürliche Transformation, 28

noetherscher Modul, 17
noetherscher Ring, 18
Nullobjekt, 32

Objekt, 24

Produkt, 32
Produkt von Kategorien, 27
projektives Objekt, 40

Quasiisomorphismus, 58

Rang eines Moduls, 10
rechtsexakter Funktor, 39
Rechtsmodul, 3

Schlangenlemma, 15
Schnitt einer exakten Sequenz, 12

teilbarer Modul, 49

Untermodul, 6

volltreuer Funktor, 42

Yoneda-Einbettung, 31
Yoneda-Lemma, 30