Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 7. Mai 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.

Inhaltsverzeichnis

1 Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung "Ring" stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei R ein Ring.

1.1 Grundlagen über Moduln

Definition 1.1.1. *Ein "R-Linksmodul" ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $R \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:*

a) $a(x + y) = ax + ay$

b) $(a + b)x = ax + bx$

c) $a(bx) = (ab)x$

d) $1x = x$

Ein "R-Rechtsmodul" ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $M \times R \to M$, $(x, a) \mapsto xa$, sodass für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

a′) $(x + y)a = xa + yb$

b′) $x(a + b) = xa + xb$

c′) $x(ab) = (xa)b$

d′) $x1 = x$

Anmerkung: Es bezeichne R^{op} den zu R entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge R mit derselbern Addition, sowie der Multiplikation $a \cdot_{\text{op}} b := b \cdot a$. Ist M ein $R-$Rechtsmodul, dann wird M durch $ax := xa$ zu einem R^{op}-Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\text{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R,\ x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur R-Linksmoduln, und unter einem R-Modul verstehen wir einen R-Linksmodul

- Forderung a) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung

  $$l_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

  zum Ring $\text{End}(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$ gehört.

  $$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x)))$$

für $f, g \in \mathrm{End}(M)$, $x \in M$). Nach $b) - d)$ ist die Abbildung $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$, $a \mapsto l_a$ ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zu einem R-Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$

Beispiel 1.1.2: a) Ist K ein Körper, dann sind K-Moduln die K-Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe G ist ein $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \ldots x}_{\text{n-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \ldots + x}_{\text{(-n)-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe G genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(G)$, d.h. genau eine Struktur als $\mathbb{Z}-$Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf G überein einstimmt (nämlich obige).

Definition 1.1.3. *Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$. Dann heißt φ "R-Modulhomomorphismus"(R-linear), wenn für alle $x, y \in M$, $a, b \in R$ gilt:*

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

b) $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

$Hom_R(M, M')$ bezeichne die Menge der R-Modulhomomorphismen von M nach M'.

Anmerkung: $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich $(f + g)(x) := f(X) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $x \in M$

Beispiel 1.1.4: Sei M ein R-Modul, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M) =: \mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathrm{End}(M)$. Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \to R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus ("X vertauscht mit Elementen aus R, b im Allgemeinen nicht"). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \to \mathrm{End}(M), \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da φ R-linear ist. Somit wird M zum $R[X]$-Modul.

Definition 1.1.5. *Seien M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ R-linear. φ heißt*

"Monomorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ φ ist injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)

"Epimorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ φ ist surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)

"Isomorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ φ ist bijektiv (Notation: $M \overset{\sim}{\to} M'$)

Existiert ein Isomorphismus zwischen M, M', so heißen M, M' "isomorph" (Notation: $M \cong M'$)

Anmerkung: Ist φ ein Isomorphismus, dann ist φ^{-1} ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.1.6. *Seien M, M' R-Moduln. Dann gilt:*

a) R kommutativ $\Rightarrow$ $Hom_R(M, M')$ ist ein R-Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R$, $\varphi \in Hom_R(M, M')$, $x \in M$.

b) $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ ist ein Unterring von $End(M) = End_{\mathbb{Z}}(M)$.

c) Die Abbildung $\Phi : Hom_R(R, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist R auf natürliche Weise ein R-Linksmodul). Ist R kommutativ, so ist Φ ein Isomorphismus von R-Moduln.

d) $End_R(R) \cong R^{op}$

Beweis. a) Beachte: Für $a \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ist $a\varphi$ wieder R-linear, denn für $a, b \in R$, $x \in M$ ist $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu Φ ist gegeben durch

$$\Psi : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \to M, \, a \mapsto am)$$

d) Nach Aussage *c*) haben wir sofort einen Isomorphismus: $\Phi : \mathrm{End}_R(R) \to R$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1) \cdot 1) = \psi(1)\varphi(1) \\ &= \varphi(1) \cdot_{\mathrm{op}} \psi(1) = \Phi(\varphi) \cdot_{\mathrm{op}} \Phi(\psi)\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.7. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$. N heißt R-Untermodul von M, wenn gilt:*

a) $0 \in N$

b) $x + y \in N$ *für alle* $x, y \in N$

c) $ax \in N$ *für alle* $a \in R, x \in N$

Beispiel 1.1.8: a) Betrachte R als R-Linksmodul. Dann sind die Untermodul von R genau die Linksideale in R (analog: Rechtsideale für R als R-Rechtsmodul).

b) Ist M ein R-Modul, dann sind $\{0\}$ (meist als 0 geschrieben) und $M \subseteq M$ die trivialen Untermoduln. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M, dann ist $\bigcap_{i\in I} M_I \subseteq M$ ein Untermodul, sowie $\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i | \, x_i \in M_i, \, x_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$

c) Sind M, M' R-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $N' \subseteq M'$ ein Untermodul, dann sind $\varphi(N) \subseteq M'$ und $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Untermoduln.

im $\varphi := \varphi(M)$ heißt das “Bild“ von φ

$\ker \varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der “Kern“ von φ

Es gilt: φ ist injektiv $\Leftrightarrow \ker \varphi = 0$ und φ surjektiv $\Leftrightarrow$ im $\varphi = M'$

Bemerkung + Definition 1.1.9. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist die Faktorgruppe ${}^M\!/_N$ via $a(x + N) = ax + N$, $a \in R$, $x \in M$ ein R-Modul,der “Faktormodul“ von M nach N. Die kanonische Abbildung $\pi : M \to {}^M\!/_N$, $m \mapsto m + N$ ist ein Modulepimorphismus mit* $\ker \pi = N$.

Beispiel 1.1.10: Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal, M ein R-Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i | \, n \in \mathbb{N}, \, a_i \in I, \, x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul von M. Ist I ein zweiseitiges Ideal, dann ist R/I ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von I geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$$R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \quad (a+I, b+I) \mapsto ab + I$$

M/IM ist ein R/I-Modul vermöge

$$(a+I)(x+M) := ax + IM, \quad a \in R,\, x \in M$$

Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)

Satz 1.1.11. *Seien $M, M^{'}$ R-Moduln, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to M/N$ die kanonische Projektion, $\varphi : M \to M^{'}$ R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

i) $N \subseteq ker\varphi$

ii) *Es ex. genau ein Modulhomomorphismus $\overline{\varphi} : M/N \to M^{'}$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \\ & M/N \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz)**.** *Seien $M, M^{'}$ R-Moduln, $\varphi : M \to M^{'}$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R-Modulisomorphismus $\overline{\varphi} : M/ker\varphi \xrightarrow{\sim} im\,\varphi$ mit $\overline{\varphi}(x + ker\varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in M$.*

Satz 1.1.13. *(Isomorphiesätze) Sein M ein R-Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:*

a) *Die Abbildung*

$$N_1/N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\sim} (N_1 + N_2)/N_2 \qquad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

ist ein Isomorphismus.

b) *Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist*

$$M/N_2 / M/N_1 \xrightarrow{\sim} M/N_1 \qquad (x + N_2) + N_1/N_2 \mapsto x + N_1$$

ein Isomorphismus.

Satz 1.1.14. *Sei M ein R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\pi : M \to {}^{M}/_{N}$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{Untermoduln } M' \textit{ von } M \textit{ mit } N \subseteq M'\} & \longrightarrow & \{\textit{Untermoduln von } {}^{M}/_{N}\} \\ M' & \mapsto & \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) & \leftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

die inklusionserhaltend ist.

Bemerkung + Definition 1.1.15. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: $\prod_{i\in I} M_i$ ist ein R-Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das "direkte Produkt" der M_i. Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ mit $(m_i)_{i\in I} \mapsto m_j$ sind R-Modulhomomorphismen.*

Satz 1.1.16 (Universelle Eingenschaft des Produkts)**.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung*

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i) \qquad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \to M_i$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i\in I})$

Definition 1.1.17. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Der Untermodul*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \textit{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

heißt die "direkte Summe" der M_i. Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i\in I} \quad \textit{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

sind R-Modulhomomorphismen.

Anmerkung: Ist I endlich, dann ist $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

Satz 1.1.18 (Universelle Eingenschaft der Summe)**.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) \quad \textit{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to M$ ex. genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\psi((m_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} \psi_i(m_i)$ definierte).

Anmerkung: Sei I eine Indexmenge, M ein R-Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i\in I} M, \qquad M^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} M, \qquad M^r := M^{\{1,..,r\}} = M^{(\{1,..,r\})}$$

Bemerkung 1.1.19. *Sei M ein R-Modul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von $\bigoplus$ mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R-Modulhomomorphismus*

$$\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i \quad mit \quad im\, \psi = \sum_{i\in I} M_i$$

Ist ψ injekitv, so heißt die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ "direkt", und wir schreiben auch $\bigoplus_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$.

Anmerkung: In der Situation von 1.19 gilt:

- $\sum_{i\in I} M_i$ direkt $\Longleftrightarrow \sum_{i\in J} M_i$ direkt für alle Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \bigoplus M_2 \Longleftrightarrow M_1 \cap M_2 = 0$

Definition 1.1.20. *Sei M ein R-Modul und sei $x \in M$. Die Abbildung $f_x : R \to M, a \mapsto ax$ ist ein R-Modulhomomorphismus, das Linksideal*

$$ann_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der "Annulator"von x. Das Bild im $f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ heißt der von x erzeugte Untermodul von M. Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$

$$RX := \langle X\rangle_R := \sum_{x\in X} Rx = im\,(R^{(X)} \to M) = \bigcap_{\substack{X\subseteq N\subseteq M \\ N\, Untermodul\ mit\ X\subseteq N}} N$$

Der von X erzeugte Untermodul von M.

Definition 1.1.21. *Sei M ein R-Modul, $(x_i)_{i\in I}$ Familie von Elementen aus M, $\psi : R^{(I)} \to M, (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$. $(x_i)_{i\in I}$ heißt*

> *"Erzeugendensystem" von M mit $R \overset{Def}{\Leftrightarrow} \psi$ surjektiv $\Longleftrightarrow M$ stimmt mit dem von $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten Untermodul überein*
>
> *"linear abhängig" $\Longleftrightarrow \psi$ injektiv*

“Basis“ von M über $R \Longleftrightarrow \psi$ bijektiv

M heißt

“endlich erzeugt“ $\Longleftrightarrow M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem

“frei“ $\Longleftrightarrow M$ besitzt eine Basis

Anmerkung:

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K-Moduln frei (LA1)
- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Gruppe (=$\mathbb{Z}$ Modul), die nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.
- Jeder R-Modul M ist Faktormodul eines freien R-Moduls, denn:
$$R^{(M)} \to M, (a_x)_{x\in M} \mapsto \sum_{x\in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$
- Basen eines freien R-Moduls können unterschiedliche Länge haben.

Satz 1.1.22. *Sei A ein kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt:*

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \Longleftrightarrow n_1 = n_2$$

Beweis. Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in A ein maximales Ideal J . Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A^n/_{JA^n}$ ein $A/_J$-Modul (vgl Beispiel 1.10) und $A/_J$ ist ein Körper. Die Abbildung $A^n/_{JA^n} \to (A/_J)^n, (x_1, .., x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, ..., x_n + J)$ ist ein Isomorphismus von $A/_J$-Moduln, d.h. $A^n/_{JA^n} \simeq (A/_J)^n$ ist ein n-dimensionaler $A/_J$-Vektorraum. Aus $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$ folgt $A^{n_1}/_{JA^{n_1}} \simeq A^{n_2}/_{JA^{n_2}}$, also $(A/_J)^{n_1} \simeq (A/_J)^{n_2}$ (als $A/_J$-Vektorraum) □

Definition 1.1.23. *Sei A ein kommutativer Ring, M ein freier A-Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der ”Rang”von M (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.22)*

1.2 Exakte Folgen

Definition 1.2.1. *Eine "'exakte Folge (exakte Sequenz) "' von R-Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \to M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \in \mathbb{Z}$, sodass:*

$$\text{im } f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I \, \text{mit } i+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise: $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ *. Eine exakte Folge der Form:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

heißt eine "kurze exakte Folge" (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von $(*)$ bedeutet explizit:

- *f injektiv*
- *g surjektiv*
- *im $f = \ker g$.*

Anmerkung:

- Seien M, N R-Moduln und $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Falls f injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/_{\text{im } f} \longrightarrow 0$ exakt.

  falls f surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.

- Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R-Moduln, und setzen wir $N := \ker g$, so induziert g einen Isomorphismus $\overline{g} : M/_N \xrightarrow{\sim} M''$, und f beschränkt sich zu einem Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$. (d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f", "\sim"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "e"] & M \arrow[r, "f"] & M/_N \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & 0
\end{tikzcd}$$

  ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i' \longrightarrow M_i'' \longrightarrow 0$, $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von R-Moduln, dann sind auch die Folgen
$$\prod_{i\in I} M_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i''$$
sowie
$$\bigoplus_{i\in I} M_i' \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i''$$
(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

Satz 1.2.2. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[l, dashed, bend right, "t"'] & M'' \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend right, "s"'] & 0 \end{tikzcd}$$

i) Es gibt ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker g \oplus N'$

ii) Es gibt einen R-Moduolhomomorphismus $s : M'' \to M$ mit $g \circ s = id_{M''}$

iii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $t : M \to M'$ mit $t \circ f = id_{M'}$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, das die kurze exakte Sequenz “spaltet“. In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus s heißt ein “Schnitt“ von g.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = \ker g \oplus N'$. Dann ist $N' \cap \ker g = 0$. Dann ist $g\big|_{N'} : N' \to M''$ injektiv. Außerdem gilt: $M'' = g(M) = g(N')$, also ist $G\big|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$ ein Isomorphismus. Setze $s : M'' \to N' \hookrightarrow M$. Dann ist s ein R-Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Außerdem ist $M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \mathrm{im}\ s = \mathrm{im}\ f \oplus \mathrm{im}\ s = f(M') \oplus s(M'') \underset{f,s\text{ inj}}{\cong} M' \oplus M''$

$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $s : M'' \to M$ ein Modulhomomorphismus mit $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Sei $h : f(M') \to M'$ invers zu $f\big|^{f(M)} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$. Für $m \in M$ ist
$$g \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g))(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - ((\underbrace{g \circ s}_{=\mathrm{id}_{M''}}) \circ g)(m) = 0$$
Also ist $(\mathrm{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \mathrm{im}\ f$. Wir setzen $t : M \xrightarrow{\mathrm{id}_M - s\circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$, welcher ein R-Modulhomomorphisus ist mit
$$t \circ f = h \circ (\mathrm{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \mathrm{id}_M \circ f}_{=\mathrm{id}_{M'}} - h \circ s \circ \underbrace{g \circ f}_{=0} = \mathrm{id}_{M'}$$

iii) $\Rightarrow$ *i)* Setze $t : M \to M'$ ein Modulhomomorphismus mit $t \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Setze $N' := \ker t$. Für $m \in M$ ist $m = \mathrm{id}_M(m) = \underbrace{(\mathrm{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \mathrm{im}\, f}$, also ist $M = N' + \mathrm{im}\, f$. Sei außerdem $m \in N' \cap \mathrm{im}\, f$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $m = f(m')$, somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \mathrm{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch $m = 0$. Damit ist $M = N' \oplus \mathrm{im}\, f$. □

Satz 1.2.3. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von* R*-Moduln,* M'' *ein freier* R*-Modul. Dan spaltet die obige Folge.*

Beweis. Sei also $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von M''. Wähle für alle $i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $g(m_i) = v_i$ (beachte: g ist surjektiv). Sei $s : M'' = \bigoplus_{i \in I} Rv_i \to M$ der durch die Vorgabe $s(v_i) = m_i$ induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von $\bigoplus$). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$ □

Folgerung 1.2.4. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von* R*-Moduln,* M', M'' *freie* R*-Moduln. Dann ist auch* M *frei.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M' \cong R^{(I)}$, $M'' \cong R^{(J)}$. Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot\cup J)}$$

und damit auch frei. □

Anmerkung: Ist R kommutativ, und haben M, M' endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(M') + \mathrm{rang}(M'')$$

Bemerkung 1.2.5. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von* R*-Moduln. Dann gilt:*

a) Ist M *endlich erzeugt, dann ist* M'' *endlich erzeugt.*

b) Sind M', M'' *endlich erzeugt, dann ist* M *endlich erzeugt.*

Beweis. a) Ist M endlich erzeugt, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $\varphi : R^n \to M$. Dann ist $g \circ \varphi : R^n \to M''$ ebenfalls ein Epimorphismus, also ist M'' endlich erzeugt.

b) Sei $(x_1, \ldots, x_r)$ ein Erzeugendensystem von M', $(y_1, \ldots, y_s)$ ein Erzeugendensystem von M''. Da g surjektiv, exitieren $z_1, \ldots, z_s \in M$ mit $g(z_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, s$.
Behauptung: $f(x_1), \ldots, f(x_r), z_1, \ldots, z_s$ ist ein Erzeugendensystem von M, denn sei $m \in M$. Dann exsitieren $a_1, \ldots, a_s \in R$ mit $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$. Damit ist $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \operatorname{im} f$. Also existiert ein $v \in M'$, etwa $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$ mit $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$. Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^{s} a_i z_i = \sum_{i=1}^{r} b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{s} a_i z_i$$

□

Anmerkung: Aus M endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass M' endlich erzeugt ist.

Beispiel 1.2.6: Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \ldots]$. Dann ist R als R-Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setze $I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$. Dann ist I ein Ideal in R, aber I ist nicht endlich erzeugt als R-Modul, denn angenommen ex existieren $f_1, \ldots, f_r \in I$ mit $I = \sum_{i=1}^r R f_i$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_n] \subseteq R$.
Problem: $X_{n+1} \notin I$, denn andernfalls wäre $X^{n+1} = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$ mit $a_1, \ldots, a_r \in R$ und setze $X_1 = \ldots = X_n = 0,\ X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$ Widerspruch!

Bemerkung 1.2.7. *Seien $M_1, \ldots, M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ *ist endlich erzeugt.*

ii) $M_1, \ldots, M_r$ *sind endlich erzeugt.*

Beweis. Es genügt, die Behaptung für $r = 2$ zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\ f\ } M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\ g\ } M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\ f\ } M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\ g\ } M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 2.5 □

Anmerkung: Ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_I$ mit $|I| = \infty,\ M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist M nicht endlich erzeugt, dann für $x_1, \ldots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \ldots, x_s \in \bigoplus_{j \in J} M_j$, also $\sum_{i=1}^s R_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i \in I} M_i$

Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma)**.** *Ist ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphisme mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

gegeben und φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen, φ_5 injektiv. Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd (Übungen). □

Anmerkung: Wir meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$ angewandt.

Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma)**.** *Sei folgendes kommutatives Diagramm von R Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{f} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$$

wobei δ die sogenannte Übergangabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und f', f, g', g induziert sind. Ist f' injektiv, dann ist auch $\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi$ injektiv. Ist g surjektiv, dann auch $\operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \varphi' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varphi \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varphi'' \arrow[d] \arrow[dddll, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} \varphi' \arrow[r] & \operatorname{coker} \varphi \arrow[r] & \operatorname{coker} \varphi'' &
\end{tikzcd}$$

Konstruktion von δ : Sei $m'' \in \ker \varphi'' \subseteq M''$. Da f surjektiv, existiert ein $m \in M$ mit $m'' = f(m)$. Setze $n := \varphi(m)$. Dann ist $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$. Dann ist $n \in \ker g = \text{im } g'$. Also existiert ein $n' \in N'$ mit $g'(n') = n$ (n' ist eindeutig bestimmt wegen g' injektiv.) Setze $\delta(m'') := n' + \text{im } \varphi'$
Wohldefiniertheit von δ: Sei $\tilde{m} \in M$ mit $m'' = f(\tilde{m})$. Dann ist $(\tilde{m}) = f(m)$, also $\tilde{m} - m \in \ker f = \text{im } f'$. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\tilde{m} - m = f'(m')$. Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m+f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist $\tilde{n}' + \text{im } \varphi' = n' + \text{im } \varphi'$, Rest ist Übungsaufgabe. $\square$

1.3 Noethersche und Artinsche Moduln

Definition 1.3.1. *Sei M ein R-Modul. M heißt "noethersch" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

Anmerkung: M noetersch $\Rightarrow$ M ist endlich erzeugt.

Beispiel 1.3.2: Sei K ein Körper, V ein K-VR. Dann gilt: V noethersch $\Leftrightarrow$ V ist endlich dimensional

Satz 1.3.3. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *M ist noethersch*

ii) *Jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ von Untermoduln wird stationär, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$.*

iii) *Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M enthält ein maximales Element.*

Man sagt in diesem Fall auch: die Untermoduln von M erfüllen die "aufsteigende Kettenbedigung".

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von M. Setze $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_i \subseteq M$. N ist Untermodul von M (beachte: $a, b \in N \Rightarrow$ Es existieren $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $a \in M_i$, $b \in M_j$, o.E. gilt: $i \leq j \Rightarrow M_i \subseteq M_j$, $a, b \in M_j \Rightarrow a + b \in M_j \subseteq N$). Da M noethersch, ist N endlich erzeugt, d.h. es existiert ein endliches Erzeugendensystem $x_1, \dots x_r$ von N. Für jedes $i \in \{1, \dots r\}$ exsistieren $j_i \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in M_{j_i}$. Setze $n := max\{j_i \mid i = 1, \dots r\} \Rightarrow x_1, \dots, x_r \in M_n \Rightarrow N \subseteq M_n \subseteq N \Rightarrow N = M_n \Rightarrow$ für alle $i \geq n$ ist $M_i = M_n$.
$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von M, die kein maximales Element hat. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M' \subsetneq M''$. $\Rightarrow$ Es existiert eine Kette von Untermoduln $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$ von M , die nicht stationär wird.
$iii) \Rightarrow i)$ Sei $N \subseteq M$ ei Untermodul. Setze

$$\mathcal{X} := \{M' \subseteq M \text{Untermodul} \mid M' \text{endlich erzeugt}, M' \subseteq N\}$$

Wegen $0 \in \mathcal{X}$ ist $\mathcal{X} \neq \emptyset \overset{(iii)}{\Rightarrow}$ Es existiert ein maximales Element $\tilde{M}$ in $\mathcal{X}$.
Behauptung: $\tilde{M} = N$, denn: Sei $x \in N \Rightarrow Rx + \tilde{M} \in \mathcal{X}$ und $\tilde{M} \subseteq Rx + \tilde{M} \overset{\tilde{M} max.}{\Rightarrow} Rx + \tilde{M} = \tilde{M} \Rightarrow x \in \tilde{M}$. □

Bemerkung 1.3.4. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *ein kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch

ii) M' und M'' sind noethersch

Beweis. Es genügt den Fall der Folge $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} {}^{M}\!/_{N} \longrightarrow 0$ für einen Untermodul $N \subseteq M$ zu betrachten. (Vgl. Anmerkung nach 2.1)
$i) \Rightarrow ii)$ Sei $N' \subseteq N$ Untermodul $\Rightarrow N'$ Untermodul von $M \overset{M\text{noet.}}{\Longrightarrow} N'$ endlich erzeugt. Sei $N'' \subseteq {}^{M}\!/_{N}$ Untermodul. Also ist $\pi^{-1}(N'') \twoheadrightarrow N''$ ein Epimorphismus und damit N'' endlich erzeugt nach 2.5 (a).
$ii) \Rightarrow i)$ Seien $N, {}^{M}\!/_{N}$ noethersch, und sei $M' \subseteq M$ Untermodul. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \cap N \longrightarrow M' \longrightarrow {}^{M'}\!/_{M' \cap N} \longrightarrow 0$$

wobei $M' \cap N$ endlich erzeugt, da N noethersch. Außerdem ist

$${}^{M'}\!/_{M' \cap N} \simeq {}^{(M'+N)}\!/_{N} \subseteq {}^{M}\!/_{N}$$

endlich erzeugt, da ${}^{M}\!/_{N}$ noethersch. $\Rightarrow M'$ ist endlich erzeugt nach 2.5 □

Bemerkung 1.3.5. *$M_1, ..., M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ noethersch

ii) $M_1, ..., M_r$ noethersch.

Beweis. Analog zum Beweis von 2.7 unter Verwendung von 3.4 □

Definition 1.3.6. *R heißt "linksnoethersch" (bzw. "rechtsnoethersch"), wenn R als Links-(bzw. Rechts-) Modul über sich selbst noethersch ist. R heißt "noethersch", wenn R links-und rechtsnoethersch ist.*

Anmerkung: Es gibt Ringe, die rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch sind (und umgekehrt)

Beispiel 1.3.7: a) Ist R ein Schiefkörper (Divisionsring) (d.h. $R \backslash \{0\}$ ist eine Gruppe bzgl. "."), dann ist R noethersch, denn wegen $Ra = R = aR$ für alle $a \in R \backslash \{0\}$ sind die einzigen Linksideale (Rechtsideale) in R durch $0, R$ gegeben, diese sind endlich erzeugt.

b) Sei K ein Körper, $R = K[X_1, X_2, \ldots]$ ist nicht noethersch nach Beispiel 2.6.

Bemerkung 1.3.8. *Sei R ein linksnoetherscher Ring, M ein endlich erzeugtes R-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. Wegen M endlich erzeugt, existiert ein Epimorphismus $R^n \twoheadrightarrow M$ für geeignetes n. Nach Vorraussetzung ist R als R-Modul noethersch $\overset{3.5}{\Rightarrow}$ R^n noetherscher R-Modul $\overset{3.4}{\Rightarrow}$ M noethersch. □

Bemerkung 1.3.9. *Sei R linksnoetherscher Ring, $I \subsetneq R$ zweiseitiges Ideal. Dann ist ${}^{R}\!/_{I}$ linksnoethersch.*

Beweis. Es ist zu zeigen: ${}^{R}\!/_{I}$ ist noethersch als ${}^{R}\!/_{I}$-Modul.
Vorüberlegungen:

1. Für $N \subseteq {}^{R}\!/_{I}$ gilt:

$$N \text{ ist } {}^{R}\!/_{I}\text{-Modul von } {}^{R}\!/_{I} \Leftrightarrow N \text{ ist } R-\text{Untermodul von } {}^{R}\!/_{I}$$
$$(\text{bezüglich } \overline{a} \cdot \overline{x} := \overline{ax}) \qquad (\text{bezüglich } a \cdot \overline{x} := \overline{ax})$$

2. Für jeden ${}^{R}\!/_{I}$-Untermodul N von ${}^{R}\!/_{I}$ gilt:

$$N \text{ ist endlich erzeugt über } {}^{R}\!/_{I} \Leftrightarrow N \text{ ist endlich erzeugt über} R$$

Nach den Vorüberlegungen genügt es zu zeigen, dass ${}^{R}\!/_{I}$ noethersch ist als R-Modul. Dies folgt aus 3.8, denn ${}^{R}\!/_{I}$ ist endlich erzeugt als R-Modul (erzeugt von $\overline{1}$). □

Anmerkung: Unterringe noetherscher Ringe sind im Allgemeinen nicht noethersch (siehe Übungsaufgaben)

Bemerkung 1.3.10. *Seien M, N R-Moduln mit $M \cong M \oplus N, N \neq 0$. Dann ist M nicht noethersch.*

Beweis. Setze

$$\mathcal{X} := \{N' \subseteq M \text{Untermodul} \mid \exists M' \subseteq M, \text{ sd. } M = M' \oplus N' \text{ und } M' \cong M\}$$

Offenbar ist $0 \in \mathcal{X}$, denn $M = M \oplus 0$, also $\mathcal{X} \neq \emptyset$.
Angenommen M ist noethersch. Dann enthält $\mathcal{X}$ ein maximales Element N', also existiert ein $M' \subsetneq M$ mit $M = M' \oplus N'$ und $M' \cong M$. Nach Voraussetzung existiert ein $\varphi : M \bigoplus N \xrightarrow{\sim} M \xrightarrow{\sim} M'$. Also ist

$$M' = \varphi(M) \oplus \varphi(N) \Rightarrow M = M' \oplus N' = \underbrace{\varphi(M)}_{=:M''} \oplus \underbrace{\varphi(N) \oplus N'}_{=:N''}$$

Es ist $M \cong \varphi(M) = M''$, somit $N'' \in \mathcal{X}$. Außerdem ist $\varphi(N) \neq 0$ wegen $N \neq 0$ und φ injektiv. Damit folgt $N' \subsetneq N''$ im Widerspruch zur Maximalität von N'. □

Satz 1.3.11. *Sei R linksnoetherscher Ring, $R \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt: $R^{n_1} \simeq R^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$.*

Beweis. ohne Einschränkung gelte $n_1 \geq n_2 \Rightarrow R^{n_2} \simeq R^{n_1} \simeq R^{n_2} \simeq R^{n_1 - n_2}$. Wegen R^{n_2} noethersch, folgt mit 3.10 : $R^{n_1 - n_2} = 0$, also $n_1 = n_2$ □

Anmerkung:

- Obiger Satz zeigt, dass der Bergiff des Ranges freier Moduln auch für endlich erzeugte, freie Modlun über linksnoetherschen Ringen wohldefiniert ist.
- Jeder Körper ist linksnoethersch $\Rightarrow$ So erhält man einen neuen Beweis für Ergebnis aus LA1

Satz 1.3.12 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei R ein linksnoetherscher Ring. Dann ist $R[X]$ linksnoethersch.*

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal. Es ist zu zeigen, dass I als $R[X]$-Modul endlich erzeugt ist.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $I_n := \{f \in I \mid \deg f \leq n\}$, was offenbar ein R-Modul ist. Wir betrachten die R-lineare Abbildung

$$b_n : I_n \longrightarrow R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto a_n$$

   also ist $B_n := b_n(I_n) \subseteq R$ ein Linksideal. Für $f \in I_n$ ist $Xf \in I_{n+1}$, also $b_n(f) = b_{n+1}(Xf) \in B_{n+1} = b_{n+1}(I_{n+1})$, woraus wir eine Kette von Linksidealen $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ erhalten, welche, da R linksnoethersch ist, stationär ist, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B_m = B_n$ für alle $m \geq n$.

2. Behauptung: $I = R[X]I_n$, denn:

   "$\supseteq$" klar, wegen $I_n \subseteq I$, wobei I ein Linksideal ist.

   "$\subseteq$" Es ist $I = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$, d.h. es genügt zu zeigen, dass $I_m \subseteq R[X]I_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, was wir per Induktion nach m zeigen.
   $m \leq n$: klar.
   $m > n$: Sei $f \in I_m$. Dann ist $b_m(f) \in B_m = B_n = b_n(I_n)$, also existiert ein Polynom $f_1 \in I_n$ mit $b_m(f) = b_n(f_1) = b_m(X^{m-n} f_1)$. Also ist $f - X^{m-n} f_1 \in I_{m-1} \overset{\text{IV}}{\subseteq} R[X]I_n$. Wegen $X^{m-n} f_1 \in R[X]I_n$, folgt $f \in R[X]I_n$

3. I_n ist endlich erzeugt als R-Modul, denn: $I_n \subseteq \sum_{i=0}^{n} RX^i$, und $\sum_{i=0}^{n} RX^i$ ist ein endlich erzeugter R-Modul, also insbesondere noethersch nach 3.8, weshalb I_n als Untermodul endlich erzeugt ist, d.h. es existieren $g_1, \dots, g_r \in I_n$ mit $I_n = \sum_{i=1}^{r} Rg_i$, also
$$I \overset{2.}{=} R[X]I_n = \sum_{i=1}^{r} R[X]g_i$$
d.h. I ist endlich erzeugt als $R[X]$-Modul.

□

Folgerung 1.3.13. *a) Ist R ein linksnoetherscher Ring, dann ist $R[X_1, \dots, X_n]$ linksnoethersch*

b) Sind A, B kommutative Ring, $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, sodass B von $\varphi(A)$ und einer endlichen Menge $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq B$ als Ring erzeugt wird. Dann gilt: A ist nothersch $\Rightarrow$ B noethersch.

Beweis. a) aus 3.12 per Induktion

b) Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Ringhomomorphismus
$$\psi : A[X_1, \dots, X_r] \twoheadrightarrow B, \quad X_i \mapsto x_i, \quad \text{und} \quad \psi\big|_A = \varphi$$
Ist A noethersch, dann ist $A[X_1, \dots, X_r]$ nothersch nach *a*) und nach 3.9 ist B noethersch.

□

Definition 1.3.14. *Sei M ein R-Modul. M heißt "artinsch" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ für jede absteigende Kette $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ von Untermoduln von M gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$ ("absteigende Kettenbedingung").*

Definition 1.3.15. *R heißt "linksartinsch" (bzw. "rechtsartinsch") $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ R ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selber artinsch. R heißt "artinsch" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ R ist links- und rechtsartinsch.*

Beispiel 1.3.16: a) Jeder endliche Ring ist artinsch (und noethersch).

b) $\mathbb{Z}$ ist kein artinscher Ring, denn $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \dots$

c) Sei M ein endliches Monoid, K ein Körper, $R = K[M]$ sei der Monoidring (vgl. Algebra 1-Übungen). Dann ist R linksartinsch, denn: $K[M]$ ist ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, jeder $K[M]$-Untermodul von $K[M]$ ist ein K-Untervektorraum von $K[M]$, also ist jede absteigende Kette von Untermoduln eine absteigende Kette von Untervektorräumen, die stationär ist. Ebenso ist $K[M]$ rechtsartinsch, $K[M]$ also artinsch.

Bemerkung 1.3.17. *Sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Folge vn R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) M *ist artinsch.*

ii) M', M'' *ist artinsch.*

Beweis. Es genügt, den Fall $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}\!/_{N} \longrightarrow 0$ zu betrachten.
i) $\Rightarrow$ *ii)* Sei M artinsch. Sei $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln von N. Dann ist N_i ein Untermodul von M für alle $i \in \mathbb{N}$ und, da M artinsch ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_n$ für alle $i \geq n$, weshalb N artinsch ist. Sei $N_1' \supseteq N_2' \supseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln von ${}^{M}\!/_{N}$. Dann ist $\pi^{-1}(N_1') \supseteq \pi^{-1}(N_2') \supseteq \ldots$ eine Kettte von Untermoduln von M, welche, wegen M artinsch, stationär wird. Es ist $N_n' = \pi(\pi^{-1}(N_n')) = \pi(\pi^{-1}(N_i')) = N_i$ für alle $i \geq n$, also ist ${}^{M}\!/_{N}$ artinsch.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Seien $N, {}^{M}\!/_{N}$ artinsch. Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M. Dann ist $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von N. Damit ist

$$^{(M_1+N)}\!/_{N} \supseteq {}^{(M_2+N)}\!/_{N} \supseteq \ldots$$

eine absteigende Kette von Untermoduln von ${}^{M}\!/_{N}$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i \cap N = M_n \cap N$ und ${}^{M_i+N}\!/_{N} = {}^{M_n+N}\!/_{N}$ für alle $i \geq n$, also ist $M_i + N = M_n + N$ für alle $i \geq n$,
Behauptung: $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$, denn sei $i \geq n$ fest.

"$\subseteq$" klar

"$\supseteq$" Sei $x \in M_n$. Dann existieen $x' \in M$, $y \in N$ mit $x = x' + y$ (wegen $M_i + N = M_n + N$), also $y = \underbrace{x}_{\in M_n} - \underbrace{x'}_{\in M_i \subseteq M_n} \in M_n \cap N = M_i \cap N \Rightarrow x = \underbrace{x'}_{\in M_i} + \underbrace{y}_{\in M_i} \in M_i$

□

Folgerung 1.3.18. *Seien* $M_1, \ldots, M_n$ *R-Moduln. Dann sind äquivalent:*

i) $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ *ist artinsch*

ii) $M_1, \ldots, M_n$ *sind artinsch.*

Folgerung 1.3.19. *Sei R linksartinsch, M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M artinsch.*

Definition 1.3.20. *Sei M ein R-Modul. Dann heißt M "endlich koerzeugt"* $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ *für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = 0$*

Anmerkung:

- Sei $N \subseteq N$ ein Untermodul. Dann ist ${}^{M}\!/_{N}$ endlich koerzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{\in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq U$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = N$.
- N ist endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\sum_{i\in I} M_I = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sum_{j\in J} M_j = N$.

Satz 1.3.21. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

a) M ist artinsch

b) Jede nichtleere Menge von Untermoduln enthält ein minimales Element

c) Jeder Faktormodul von M ist endlich koerzeugt.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ Sei $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von M, die kein minimales Element besitzt. Insbesondere existiert zu jedem $M' \in \mathcal{X}$ ein $M'' \in \mathcal{X}$ mit $M'' \subsetneq M'$, also existiert eine Kette von Untermoduln $M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \ldots$, die nicht stationär wird.
$ii) \Rightarrow iii)$ Sei $N \subseteq M$ eine Untermodul, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i\in I} M_i = N$. Setze $\mathcal{X} := \{\bigcap_{j\in J} M_j \mid J \subseteq I \text{ endlich}\} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mathcal{X}$ enthält ein minimales Element $N_1 = \bigcap_{j\in J} M_j$ für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$.
Behauptung: $N_1 = N$, denn

"$\supseteq$" klar

"$\subseteq$" Angenommen $N_1 \supsetneq N$. Dann existiert ein $x \in N_1$ mit $x \notin N$. Da $N = \bigcap_{i\in I} M_i$ existiert ein $i \in I$ mit $x \notin M_i \Rightarrow x \notin \bigcap\limits_{j\in J\cup\{i\}} M_j =: N_2$. Somit ist $N_2 \in \mathcal{X}$, $N_2 \subsetneq N_1$ im Widerspruch zur Minimalität von N_1.

Somit $N_1 = N$, also ist ${}^{M}\!/_{N}$ endlich koerzeugt.
$iii) \Rightarrow i)$ Sei $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M. Setze $N := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i$. ${}^{M}\!/_{N}$ ist endlich koerzeugt, weshalb eine endliche Teilmenge $J \in I$ existiert mit $N = \bigcap_{j\in J} M_j$. Setze $n := \max J$, dann ist $N = M_n$, also ist $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$. $\square$

2 Homologische Algebra

In diesem Kapitel sei R stets ein Ring

2.4 Kategorien

Definition 2.4.1. *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus*

- *einer Klasse $Ob(\mathcal{C})$ von "Objekten" einer Menge $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ von "Morphismen" für alle $A, B \in Ob(\mathcal{C})$*
- *einer Verknüpfung $\circ : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ für alle $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$*

wobei folgende Axiome gelten:

($K1$) $Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$, *falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$*

($K2$) *Für alle $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C}), f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C), h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ gilt:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad (Assoziativität)$$

($K3$) *für jedes $A \in Ob(\mathcal{C})$ existiert ein Morphismus $id_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$, sodass für alle $B \in Ob(\mathcal{C}), f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ gilt:*

$$f \circ id_A = f, \ id_A \circ g = g$$

.

Anmerkung:

- Man sagt "Klasse" statt Menge, um Paradoxien, wie "die Menge aller Mengenßu vermeiden.
- Trotzdem schreiben wir $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ um zu sagen dass A zu $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gehört (und werden $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ im Folgenden wie eine Menge behandeln).
- In den folgenden Abschnitten werden wir mengentheoretische Probleme ignorieren und häufig von Mengen sprechen auch wenn es sich nur um Klassen handelt.
- Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir auch $f : A \to B$. A heißt "Quelle" und B heißt "Ziel" von f; wegen ($K1$) sind diese eindeutig bestimmt.
- für $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist id_A eindeutig bestimmt (analoges Argument wie bei Monoiden: $id_A = id'_A \circ id_A = id'_A$)

Beispiel 2.4.2:
- Mengen: Kategorie der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen
- Ringe: Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen
- R-Mod: Kategorie der R-(Links)-Moduln mit R-Modulhomomorphismen als Morphismen
- Top: Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}, Mor_{\mathcal{C}}(*,*) := M$, wobei M Monoid, $\circ =$ Verknüpfung in M.

Definition 2.4.3. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die zu $\mathcal{C}$ "duale Kategorie'"$\mathcal{C}^{op}$" ist die Kategorie mit:*

- *$Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$, $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$ für $A, B \in Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$*
- *$\circ_{op} : Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) \times Mor_{\mathcal{C}^{op}}(B,C) \to Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,C)$ mit $(f,g) \mapsto f \circ g$ für $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$*

Anmerkung:

- Anschaulich: Übergang von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}^{op}$ $\widehat{=}$ Pfeile umdrehen
- $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

Definition 2.4.4. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein "(kovarianter) Funktor" $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung*

$$Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FA, FB), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, sodass gilt:

(F1) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *für alle* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C),\ A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$

(F2) $F(id_A) = id_{FA}$ *für alle* $A \in Ob(\mathcal{C})$.

Beispiel 2.4.5: a) Vergiss-Funktoren, zum Beispiel: R-Mod $\to$ Mengen, R-Mod $\to$ $\mathbb{Z}$-Mod, ...

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ induziert einen Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \text{Mengen}, \quad A \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(X, A)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist hierbei $f_*^X := Mor_{\mathcal{C}}(X, -)(f)$ gegeben durch

$$f_*^X : Mor_{\mathcal{C}}(X, A) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, B), \quad g \mapsto f \circ g \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_*^X(g)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

c) Sei $M \in R$-Mod $\Rightarrow Hom_R(M, -) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, $N \mapsto Hom_R(M, N)$ ist ein Funktor.

Definition 2.4.6. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein "(kontavarianter) Funktor" F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, das heißt besteht aus einer Abbildung*

$$Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{D}}(FB, FA), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, sodass gilt:

(F1') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für alle $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C),\ A, B, C \in Ob\mathcal{C}$

(F2') $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in Ob(\mathcal{C})$.

Beispiel 2.4.7: a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ induziert einen kontravarianten Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C} \to \text{Mengen}, \quad A \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(A, Y)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist hierbei $f_Y^* := Mor_{\mathcal{C}}(-, Y)(f)$ gegeben durch

$$f_Y^* : Mor_{\mathcal{C}}(B, Y) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, Y), \quad g \mapsto g \circ f \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_Y^*(g)"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

b) Sei $N \in R$-Mod $\Rightarrow Hom_R(-, N) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, $M \mapsto Hom_R(M, N)$ ist ein kontavarianter Funktor.

Anmerkung:

- Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, so ist auf naheliegende Weise der Funktor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$
- Unter Funktoren werden kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme abgebildet.

Definition 2.4.8. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. "Das Produkt" $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ist diejenige Kategorie mit $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$ und $Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$ und "komponentenweisen $\circ$".*

Definition 2.4.9. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ Kategorien. Ein "Bifunktor" F "von $\mathcal{C}$ kreuz $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{E}$ " ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$*

Beispiel 2.4.10: a) $\bigoplus$: R-Mod $\times R$-Mod $\to R$-Mod, $(M, N) \to M \bigoplus N$ ist ein Bifunktor

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie $\Rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to$ Mengen, $(M, N) \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(M, N)$ ist ein Bifunktor.

Definition 2.4.11. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob(\mathcal{C}), f : A \to B$ f heißt*

"Monomorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in Ob(\mathcal{C})$, $g_1, g_2 : C \to A$ gilt: $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob(\mathcal{C})$ ist $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(C, A) \to Mor_{\mathcal{C}}(C, B)$ injektiv.

"Epimorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ Für alle $C \in Ob\mathcal{C}, g_1, g_2 : B \to C$ gilt: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob\mathcal{C} ist f_C^* : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ injektiv.

"Isomorphismus" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $g : b \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

Anmerkung: In der Situation von 4.11 gilt:

- f Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in $\mathcal{C}^{op}$.
- f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ ist Isomorphismus in $\mathcal{C}^{op}$.
- Ist f ein Isomorphismus und $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$, dann ist g ein eindeutig bestimmt (und wird mit f^{-1} bezeichnet). Denn: $g_1, g_2 : B \to A$ mit dieser Eigenschaft $Rag_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$.
- In Mengen ist f Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ injektv, f Epimorphismus $Lraf$ surjektiv, f Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv. Im Allgemeinen ist dies für Kategorien, in denen die Morphismen Abbildungen sind, jedoch falsch (vgl. Bsp. 4.13)

Bemerkung 2.4.12. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob(\mathcal{C}), f : A \to B$ ein Isomorphismus. Dann ist f ein Monomorphismus und Ein Epimorphismus.*

Beweis. Seien $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), g_1, g_2 : C \to A$ mit $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2) \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow f$ Monomorphimus. Analog wird gezeigt dass f ein Epimorphimus. □

Anmerkung: Die Umkehrung von 4.12 ist im Allgemeinen falsch, siehe nächstes Beispiel.

Beispiel 2.4.13:

a) Sei $\mathcal{C} = Top$ die Kategorie der Topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Wir betrachten $id : (\mathbb{R}, \text{diskrete Topologie}) \to (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$. Diese ist eine stetige Abbildung, ein Monomorphismus sowie ein Epimorphismus, jedoch kein Isomorphismus (Nicht hömöomorph, da kein stetiges Inverses)

b) Sei $\mathcal{C} = Ringe, f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ Inklusion. f ist ein Monomorphismus und ein Epimorphimus (Achtung, denn: Für $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \to R$ Ringhomomorphismus ist ein Ring R mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, das heißt $g_1\big|_{\mathbb{Z}} = g_2\big|_{\mathbb{Z}}$ folgt $g_1 = g_2$ wegen der Universellen Eigenschaft von $\mathbb{Q}$ als Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$), aber kein Isomorphismus. Insbesondere ist ein Epimorphismus in $\mathcal{C}$ im obigen Sinne ("kategorieller Epimorphismus") nicht dasselbe wie ein surjektiver Ringhomomorphismus.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "f"] & \mathbb{Q} \arrow[d, shift right, "g_1"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Definition 2.4.14. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine "natürliche Transformation" t von F nach G ($t : F \Rightarrow G$) ist eine Familie $(t_A)_{A \in Ob(\mathcal{C})}$ von Morphismen $t_A \in Mor_{\mathcal{D}}(FA, GA)$, sodass*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "t_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\ FB \arrow[r, "t_B"] & GB \end{tikzcd}$$

für alle $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, $f : A \to B$ kommutiert. Man sagt häufig auch $t_A : F \to GA$ ist natürlich in A.

Beispiel 2.4.15:

a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f : A \to B$. Dann ist

$$f^* = (f^*_Y)_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

ist eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{C} \to$ Mengen, denn für $Y_1, Y_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $g : Y_1 \to Y_2$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_1) \arrow[r, "f^*_{Y_1}"] \arrow[d, "g^B_*"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y_1) \arrow[d, "g^A_*"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \arrow[r, "f^*_{Y_2}"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \end{tikzcd}$$

denn: Für $\varphi : B \to Y_1$ ist

$$(g_*^A \circ f_{Y_1}^*)(\varphi) = g_*^A(\varphi \circ f) = g \circ \varphi \circ f = f_{Y_2}^*(g \circ \varphi) = (f_{Y_2}^* \circ g_*^B)(\varphi)$$

b) Sei K-VR die Kategorie der K-Vektorräume über einem festen Körper K (mit linearen Abbildungen als Morphismen). Für $V \in K$-VR sei $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum. Die kanonische Abbildung $\varphi : V : V \to V^{**},\ w \mapsto \varphi_v(w) : V^* \to K,\ \psi \mapsto \psi(w)$ ist natürlich in V, denn für $V, W \in K$-VR, eine lineare Abbildung $f : V \to W$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_v"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\varphi_w"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

mit $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$, $(\varphi : V^* \to K) \mapsto f^{**}(\varphi) : W^* \to K$, $\psi \mapsto \varphi(\underbrace{\psi \circ f}_{\in V^*})$, d.h. $\varphi : id_V \Rightarrow \_^{**}$ ist eine natürliche Transformation von $id : K\text{-VR} \to K\text{-VR}$ nach $\_^{**} : K\text{-VR} \to K\text{-VR}$.

Definition 2.4.16. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren, $t : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. t heißt "natürliche Äquivalenz" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ Für alle $A \in Ob(\mathcal{C})$ ist $t_A : FA \to GA$ ein Isomorphismus. (Notation $t : F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$)*

Anmerkung: Ist $t : F \to G$ eine natürliche Äquivalenz, dann existiert eine natürliche Äquivalenz $t^{-1} : G \overset{\sim}{\Rightarrow} F$ via $t_A^{-1} = (t_A)^{-1} : GA \to FA$

Beispiel 2.4.17: Bezeichne K-VR$_{<\infty}$ die Kategorie der endlichdiimensionalen K-VR. Dann ist die natürliche Transformation φ : id $\Rightarrow$ $\_^{**}$ aus Beispiel 4.15 eine natürliche Transformation.

Definition 2.4.18. *Seien $\mathbb{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. F heißt "Kategorienäquivalenz" $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Äquivalenzen $F \circ G \overset{\sim}{\Rightarrow} id_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \overset{\sim}{\Rightarrow} id_{\mathcal{C}}$*

Beispiel 2.4.19: Der Funktor $\_^* : K\text{-VR}_{<\infty} \to (K\text{-VR}_{<\infty})^{\mathrm{op}},\ v \mapsto V^*$ ist eine Kategorienäquivalent, denn mit $\widetilde{\_^*} : (K\text{-VR}_{<\infty})^{\mathrm{op}} \to K\text{-VR}_{<\infty},\ W \mapsto W^*$ gilt offenbar $\widetilde{\_^*} \circ \_^* = \_^{**}$, und φ : id $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $\_^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz, analog andersherum (d.h. die Kategorie K-VR$_{<\infty}$ ist selbstdual).

Satz 2.4.20 (Yoneda-Lemma)**.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in Ob(\mathcal{C})$, $F : \mathcal{C} \to$ Mengen ein Funktor. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \{\textit{natürliche Transformationen } t : Mor_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F\} & \to & F(A) \\ t & \mapsto & t_a(id_A) \end{array}$$

Beweis. 1. Sei $a \in F(A)$. Wir definieren $S^a : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F$ als $s^a = (s^a_B)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ mit

$$s^a_B := F(\varphi)(a) \quad \text{für } \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

s^a ist eine natürliche Transformation, denn für $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f : B \to C$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "s^a_B"] \arrow[d, "f^A_*"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "s^a_C"] & F(C) \end{tikzcd}$$

denn:

$$\begin{aligned} (F(f) \circ s^a_B)(\varphi) &= F(f)(s^a_B(\varphi)) = F(f)(F(\varphi)(a)) = F(f \circ \varphi)(a) \\ &= F(f^A_*(\varphi))(a) = s^a_C(f^A_*(\varphi)) \end{aligned}$$

2. Setze

$$\begin{aligned} \Psi : F(A) &\to \{\text{natürliche Transformationen } t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F\} \\ a &\mapsto s^a \end{aligned}$$

Dann sind Φ, Ψ invers zueinander, denn: Für $a \in F(A)$, $t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F$ gilt

$$(\Phi \circ \Psi)(a) = \Phi(s^a) = s^a_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(a) = \mathrm{id}_{FA}(a) = a$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(t) = \Psi(t_A(\mathrm{id}_A))$$

und für $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\varphi^A_*"'] & F(A) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "t_B"] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$(\Psi(t_A(\mathrm{id}_A)))_B(\varphi) = s^{t_A(\mathrm{id}_A)}_B(\varphi) = F(\varphi)(t_A(\mathrm{id}_A)) = t_B(\varphi^A_*(\mathrm{id}_A)) = t_B(\varphi)$$

d.h. $(\Psi \circ \Phi)(t) = t$

□

Folgerung 2.4.21. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Psi : Mor_{\mathcal{C}}(B, A) &\longrightarrow \{\textit{natürliche Transformationen } Mor_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(B, -)\} \\ \psi : B \to A &\mapsto \psi^* : Mor_{\mathcal{C}}(A, -) \to Mor_{\mathcal{C}}(B, -) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Wende 4.20 auf $F = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)$ and. In der Notation des Beweises von 4.20 ist $\Psi(\psi) = s^\psi = (s^\psi_C)_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$, wobei für $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ gilt:

$$(s^\psi_C)(\varphi) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)(\varphi)(\psi) = \varphi^B_*(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi^*_C(\varphi)$$

d.h. $\Psi(\psi) = \psi^*$. □

Anmerkung:

- Folgerung 4.21 liefert einen sogenannten volltreuen Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Funk}(\mathcal{C}, \mathrm{Mengen})$, wobei $A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$, wobei $\mathrm{Funk}(\mathcal{C}, \mathrm{Mengen})$ die Funktorkategorie von $\mathcal{C}$ nach Mengen bezeichnet (Objekte sind Funktoren: $\mathcal{C} \to$ Mengen, und Morphismen die natürlichen Transformationen) ("Yoneda-Einbettung")

- Folgerung 4.21 liefert insbesondere eine Verallgemeinerung des Satzes von Caley aus der Gruppentheorie: Für eine Gruppe G ist $G \hookrightarrow S(G)$, $g \mapsto \tau_G$ (Linkstranslation mit $g \in G$) ein injektiver Gruppehomomorphismus. Wende 4.21 an auf:

  - $\mathcal{C}$ = Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{\cdot\}$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) = G$
  - $A = B = \cdot$

  und erhalte eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} G = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) & \longrightarrow & \{\text{natürliche Transformationen } \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -)\} \\ g & \mapsto & g^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \mathrel{\widehat{=}} \tau_G \end{array}$$

2.5 Abelsche Kategorien

Definition 2.5.1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in Ob(\mathcal{C})$. A heißt*

$$\text{“Anfangsobjekt“} \overset{Def}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } M \in Ob(\mathcal{C}) \text{ ist } Mor_{\mathcal{C}}(A, M) \text{ einelementig}$$

$$\text{“Endobjekt“} \overset{Def}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } M \in Ob(\mathcal{C}) \text{ ist } Mor_{\mathcal{C}}(M, A) \text{ einelementig}$$

Anmerkung: Falls sie existieren sind Anfangs-und Endobjekte eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (denn: Sind A_1, A_2 Anfangsobjekte, dann ist $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_1) = \{\beta\}$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_1) = \{\mathrm{id}_{A_1}\}$ und analog $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_2) = \{\mathrm{id}_{A_2}\}$, insbesondere ist $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{A_1}$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{A_2}$

Definition 2.5.2. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. $0 \in Ob(\mathcal{C})$ heißt “Nullobjekt“ $\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ 0 ist sowohl Anfangs- als auch Endobjekt. Existiert in $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0, so enthält $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ für alle $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ einen ausgezeichnetes Element, den “Nullmorphismus“ $A \to 0 \to B$*

Anmerkung: Der Nullmorphismus in $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist unabhängig von der Wahl des Nullobjekts:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B \\
& \tilde{0} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 2.5.3: a) In Mengen ist $\emptyset$ ein Anfangsobjekt, jede einelementige Menge ist ein Endobjekt, insbesondere existiert in Mengen kein Nullobjekt

b) in Ringe ist $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt, und der Nullring ist ein Endobjekt. In Ringe existiert ebenfalls ein Nullobjekt

c) In R-Mod ist der Nullmodul ein Nullobjekt.