

# Algebra 2

Sommersemester 2018

Universität Heidelberg

Dr. Denis Vogel

Letzte Aktualisierung: 4. Juni 2018

Mitschrieb von Jonas Wildberger und Celine Fietz

**Dies ist eine inoffizielle Version. Es können daher Fehler vorkommen.**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Moduln</b>	<b>3</b>
1.1	Grundlagen über Moduln . . . . .	3
1.2	Exakte Folgen . . . . .	11
1.3	Noethersche und Artinsche Moduln . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Homologische Algebra</b>	<b>24</b>
2.4	Kategorien . . . . .	24
2.5	Abelsche Kategorien . . . . .	32
2.6	Projektive und Injektive Moduln . . . . .	43
2.7	Komplexe . . . . .	53
2.8	Abgeleitete Funktoren . . . . .	62
2.9	$\delta$ -Funktoren . . . . .	66

# 1 Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung “Ring“ stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1. In diesem Kapitel sei  $R$  ein Ring.

## 1.1 Grundlagen über Moduln

**Definition 1.1.1.** Ein  $R$ -Linksmodul ist eine abelsche Gruppe  $(M, +)$  zusammen mit einer Abbildung  $R \times M \rightarrow M$ ,  $(a, x) \mapsto ax$  (skalare Multiplikation), sodass für alle  $a, b \in R$ ,  $x, y \in M$  gilt:

$$\text{a) } a(x + y) = ax + ay$$

$$\text{b) } (a + b)x = ax + bx$$

$$\text{c) } a(bx) = (ab)x$$

$$\text{d) } 1x = x$$

Ein  $R$ -Rechtsmodul ist eine abelsche Gruppe  $(M, +)$  zusammen mit einer Abbildung  $M \times R \rightarrow M$ ,  $(x, a) \mapsto xa$ , sodass für alle  $a, b \in R$ ,  $x, y \in M$  gilt:

$$\text{a') } (x + y)a = xa + ya$$

$$\text{b') } x(a + b) = xa + xb$$

$$\text{c') } x(ab) = (xa)b$$

$$\text{d') } x1 = x$$

**Anmerkung.** Es bezeichne  $R^{\text{op}}$  den zu  $R$  entgegengesetzten Ring, d.h. eine Menge  $R$  mit derselben Addition, sowie der Multiplikation  $a \cdot_{\text{op}} b := b \cdot a$ . Ist  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul, dann wird  $M$  durch  $ax := xa$  zu einem  $R^{\text{op}}$ -Linksmodul, denn es gilt

$$a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a \cdot_{\text{op}} b)x \quad \text{für alle } a, b \in R, x, a \in M$$

Analog anders herum. Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur  $R$ -Linksmoduln, und unter einem  $R$ -Modul verstehen wir einen  $R$ -Linksmodul

- Forderung a) impliziert, dass für alle  $a \in R$  die Abbildung

$$l_a : M \rightarrow M, \quad x \mapsto ax$$

zum Ring  $\text{End}(M)$  aller Gruppenhomomorphismen  $M \rightarrow M$  gehört.

$$(\text{mit } (f + g)(x) := f(x) + g(x), (f \cdot g) := (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

für  $f, g \in \text{End}(M)$ ,  $x \in M$ . Nach b) – d) ist die Abbildung  $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$ ,  $a \mapsto l_a$  ein Ringhomomorphismus. Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$  eine abelsche Gruppe  $(M, +)$  zu einem  $R$ -Modul via  $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle  $x \in M$  ist  $0x = 0$ ,  $(-1)x = -x$ , und für alle  $a \in R$  ist  $a0 = 0$

**Beispiel 1.1.2.** a) Ist  $K$  ein Körper, dann sind  $K$ -Moduln die  $K$ -Vektorräume.

b) Jede abelsche Gruppe  $G$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -Modul via

$$\mathbb{Z} \times G \rightarrow G, \quad (n, x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(\underbrace{x + \dots + x}_{(-n)\text{-mal}}) & n < 0 \end{cases}$$

Für jeden Ring  $R$  gibt es genau einen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  (analog zur Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe  $G$  genau einen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(G)$ , d.h. genau eine Struktur als  $\mathbb{Z}$ -Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf  $G$  überein stimmt (nämlich obige).

**Definition 1.1.3.** Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln,  $\varphi : M \rightarrow M'$ . Dann heißt  $\varphi$   *$R$ -Modulhomomorphismus* ( $R$ -linear), wenn für alle  $x, y \in M$ ,  $a, b \in R$  gilt:

a)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

b)  $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

$\text{Hom}_R(M, M')$  bezeichne die Menge der  $R$ -Modulhomomorphismen von  $M$  nach  $M'$ .

**Anmerkung.**  $\text{Hom}_R(M, M')$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  für  $f, g \in \text{Hom}_R(M, M')$ ,  $x \in M$

**Beispiel 1.1.4.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $\varphi \in \text{Hom}_R(M, M) =: \text{End}_R(M) \subseteq \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \text{End}(M)$ . Den Polynomring  $R[X]$  kann man wie über kommutativen Ringen definieren, allerdings ist die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \rightarrow R, \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i b^i, \quad \text{für ein } b \in R$$

im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus (“ $X$  vertauscht mit Elementen aus  $R$ ,  $b$  im Allgemeinen nicht“). Die Abbildung

$$\Psi : R[X] \rightarrow \text{End}(M), \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \varphi^i$$

ist ein Ringhomomorphismus, da  $\varphi$   $R$ -linear ist. Somit wird  $M$  zum  $R[X]$ -Modul.

**Definition 1.1.5.** Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln,  $\varphi : M \rightarrow M'$   $R$ -linear.  $\varphi$  heißt

*Monomorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$  ist injektiv (Notation:  $M \hookrightarrow M'$ )

*Epimorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$  ist surjektiv (Notation:  $M \twoheadrightarrow M'$ )

*Isomorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \varphi$  ist bijektiv (Notation:  $M \xrightarrow{\sim} M'$ )

Existiert ein Isomorphismus zwischen  $M, M'$ , so heißen  $M, M'$  “isomorph“ (Notation:  $M \cong M'$ )

**Anmerkung.** Ist  $\varphi$  ein Isomorphismus, dann ist  $\varphi^{-1}$  ein Isomorphismus.

**Bemerkung 1.1.6.** Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln. Dann gilt:

- a)  $R$  kommutativ  $\Rightarrow \text{Hom}_R(M, M')$  ist ein  $R$ -Modul via  $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$  für  $a \in R, \varphi \in \text{Hom}_R(M, M'), x \in M$ .
- b)  $\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$  ist ein Unterring von  $\text{End}(M) = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ .
- c) Die Abbildung  $\Phi : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \varphi \mapsto \varphi(1)$  ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (hierbei ist  $R$  auf natürliche Weise ein  $R$ -Linksmodul). Ist  $R$  kommutativ, so ist  $\Phi$  ein Isomorphismus von  $R$ -Moduln.
- d)  $\text{End}_R(R) \cong R^{\text{op}}$

*Beweis.* a) Beachte: Für  $a \in R, \varphi \in \text{Hom}_R(M, M')$  ist  $a\varphi$  wieder  $R$ -linear, denn für  $a, b \in R, x \in M$  ist  $(a\varphi)(bx) = a\varphi(bx) = ab\varphi(x) = ba\varphi(x) = b(a\varphi)(x)$

b) Nachrechnen.

c) Eine Umkehrabbildung zu  $\Phi$  ist gegeben durch

$$\Psi : M \rightarrow \text{Hom}_R(R, M), \quad m \mapsto (\varphi : R \rightarrow M, a \mapsto am)$$

- d) Nach Aussage c) haben wir sofort einen Isomorphismus:  $\Phi : \text{End}_R(R) \rightarrow R$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(1)$  von abelschen Gruppen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(\psi(1) \cdot 1) = \psi(1)\varphi(1) \\ &= \varphi(1) \cdot_{\text{op}} \psi(1) = \Phi(\varphi) \cdot_{\text{op}} \Phi(\psi)\end{aligned}$$

■

**Definition 1.1.7.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $N \subseteq M$ .  $N$  heißt  $R$ -Unterm modul von  $M$ , wenn gilt:

- a)  $0 \in N$
- b)  $x + y \in N$  für alle  $x, y \in N$
- c)  $ax \in N$  für alle  $a \in R, x \in N$

**Beispiel 1.1.8.** a) Betrachte  $R$  als  $R$ -Linksmodul. Dann sind die Unterm modul von  $R$  genau die Linksideale in  $R$  (analog: Rechtsideale für  $R$  als  $R$ -Rechtsmodul).

- b) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul, dann sind  $\{0\}$  (meist als  $0$  geschrieben) und  $M \subseteq M$  die trivialen Unterm modul. Ist  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Unterm modul von  $M$ , dann ist  $\bigcap_{i \in I} M_i \subseteq M$  ein Unterm modul, sowie  $\sum_{i \in I} M_i = \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_i, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$
- c) Sind  $M, M'$   $R$ -Moduln,  $\varphi \in \text{Hom}_R(M, M')$ ,  $N \subseteq M$  ein Unterm modul,  $N' \subseteq M'$  ein Unterm modul, dann sind  $\varphi(N) \subseteq M'$  und  $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$  Unterm moduln.

$\text{im } \varphi := \varphi(M)$  heißt das *Bild* von  $\varphi$

$\ker \varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$  heißt der *Kern* von  $\varphi$

Es gilt:  $\varphi$  ist injektiv  $\Leftrightarrow \ker \varphi = 0$  und  $\varphi$  surjektiv  $\Leftrightarrow \text{im } \varphi = M'$

**Bemerkung + Definition 1.1.9.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $N \subseteq M$  ein Unterm modul. Dann ist die Faktorgruppe  $M/N$  via  $a(x+N) = ax+N$ ,  $a \in R$ ,  $x \in M$  ein  $R$ -Modul, der *Faktormodul* von  $M$  nach  $N$ . Die kanonische Abbildung  $\pi : M \rightarrow M/N$ ,  $m \mapsto m+N$  ist ein Modulepimorphismus mit  $\ker \pi = N$ .

**Beispiel 1.1.10.** Sei  $I \subseteq R$  ein Linksideal,  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann ist

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \right\} \subseteq M$$

ein Unterm modul von  $M$ . Ist  $I$  ein zweiseitiges Ideal, dann ist  $R/I$  ein Ring (beachte: Die Zweiseitigkeit von  $I$  geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation

$$R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \quad (a+I, b+I) \mapsto ab+I$$

$M/IM$  ist ein  $R/I$ -Modul vermöge

$$(a + I)(x + M) := ax + IM, \quad a \in R, x \in M$$

Die nächsten Sätze zeigt man wie für Gruppen (K-VR,...)

**Satz 1.1.11.** Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln,  $N \subseteq M$  ein Untermodul,  $\pi : M \rightarrow M/N$  die kanonische Projektion,  $\varphi : M \rightarrow M'$   $R$ -Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

i)  $N \subseteq \ker \varphi$

ii) Es ex. genau ein Modulhomomorphismus  $\bar{\varphi} : M/N \rightarrow M'$  mit  $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$ :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{\varphi} \\ & M/N & \end{array}$$

**Satz 1.1.12 (Homomorphiesatz).** Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln,  $\varphi : M \rightarrow M'$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus. Dann existiert ein  $R$ -Modulisomorphismus

$$\bar{\varphi} : M/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \varphi \quad \text{mit} \quad \bar{\varphi}(x + \ker \varphi) = \varphi(x)$$

für alle  $x \in M$ .

**Satz 1.1.13 (Isomorphiesätze).** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $N_1, N_2 \subseteq M$  Untermoduln. Dann gilt:

a) Die Abbildung

$$N_1/N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\sim} (N_1 + N_2)/N_2 \quad x + N_1 \cap N_2 \mapsto x + N_2$$

ist ein Isomorphismus.

b) Ist  $N_2 \subseteq N_1$ , so ist

$$M/N_2/M/N_1 \xrightarrow{\sim} M/N_1 \quad (x + N_2) + N_1/N_2 \mapsto x + N_1$$

ein Isomorphismus.

**Satz 1.1.14.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $N \subseteq M$  ein Untermodul,  $\pi : M \rightarrow M/N$  die kanonische Projektion. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Untermoduln } M' \text{ von } M \text{ mit } N \subseteq M'\} &\longrightarrow \{\text{Untermoduln von } M/N\} \\ M' &\mapsto \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) &\longleftarrow L \end{aligned}$$

die inklusionserhaltend ist.

**Bemerkung + Definition 1.1.15.** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln. Dann gilt:  $\prod_{i \in I} M_i$  ist ein  $R$ -Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das *direkte Produkt* der  $M_i$ . Die Projektionsabbildungen  $p_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$  mit  $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$  sind  $R$ -Modulhomomorphismen.

**Satz 1.1.16 (Universelle Eigenschaft des Produkts).** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln. Dann gilt: Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(M, \prod_{i \in I} M_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M, M_i) \quad \varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i \in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie  $(\varphi_i)_{i \in I}$  von  $R$ -Modulhomomorphismen  $\varphi_i : M \rightarrow M_i$  ex. genau ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$  mit  $p_i \circ \varphi = \varphi_i$  für alle  $i \in I$  (nämlich der durch  $\varphi(x) := ((\varphi_i(x))_{i \in I})$ ).

**Definition 1.1.17.** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln. Der Untermodul

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid \text{fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i \in I} M_i$$

heißt die *direkte Summe* der  $M_i$ . Die Inklusionsabbildungen

$$q_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad x \mapsto (x_i)_{i \in I} \quad \text{mit} \quad x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

sind  $R$ -Modulhomomorphismen.

**Anmerkung.** Ist  $I$  endlich, dann ist  $\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$ .

**Satz 1.1.18 (Universelle Eigenschaft der Summe).** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln. Dann gilt: Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} M_i, M) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, M) \quad \text{mit} \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i \in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie  $(\psi_i)_{i \in I}$  von  $R$ -Modulhomomorphismen  $\psi_i : M_i \rightarrow M$  ex. genau ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$  mit  $\psi \circ q_i = \psi_i$  für alle  $i \in I$  (nämlich der durch  $\psi((m_i)_{i \in I}) := \sum_{i \in I} \psi_i(m_i)$  definierte).



**Anmerkung.** Sei  $I$  eine Indexmenge,  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann ist:

$$M^I := \prod_{i \in I} M, \quad M^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} M, \quad M^r := M^{\{1, \dots, r\}} = M^{(\{1, \dots, r\})}$$

**Bemerkung 1.1.19.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untermoduln von  $M$ . Dann erhalten wir (aus der Universellen Eigenschaft von  $\bigoplus$  mit  $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$  Inklusionsabbildung) einen  $R$ -Modulhomomorphismus

$$\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M, \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} m_i \quad \text{mit} \quad \text{im } \psi = \sum_{i \in I} M_i$$

Ist  $\psi$  injektiv, so heißt die Summe  $\sum_{i \in I} M_i$  „direkt“, und wir schreiben auch  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  für  $\sum_{i \in I} M_i$ .

**Anmerkung.** In der Situation von 1.1.19 gilt:

- $\sum_{i \in I} M_i$  direkt  $\iff \sum_{i \in J} M_i$  direkt für alle Teilmengen  $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2 \iff M_1 \cap M_2 = 0$

**Definition 1.1.20.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und sei  $x \in M$ . Die Abbildung  $f_x : R \rightarrow M, a \mapsto ax$  ist ein  $R$ -Modulhomomorphismus, das Linksideal

$$\text{ann}_R(x) := \ker f_x = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

heißt der *Annulator* von  $x$ . Das Bild  $\text{im } f_x = Rx = \{ax \mid a \in R\}$  heißt der von  $x$  erzeugte Untermodul von  $M$ . Allgemeiner heißt für eine Teilmenge  $X \subseteq M$

$$RX := \langle X \rangle_R := \sum_{x \in X} Rx = \text{im}(R^{(X)} \rightarrow M) = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \subseteq M \\ N \text{ Untermodul mit } X \subseteq N}} N$$

Der von  $X$  erzeugte Untermodul von  $M$ .

**Definition 1.1.21.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $(x_i)_{i \in I}$  Familie von Elementen aus  $M$ ,  $\psi : R^{(I)} \rightarrow M, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$ .  $(x_i)_{i \in I}$  heißt

*Erzeugendensystem* von  $M$  mit  $R \xrightarrow{\text{Def}} \psi$  surjektiv  $\iff M$  stimmt mit dem von  $(x_i)_{i \in I}$  erzeugten Untermodul überein

*linear abhängig*  $\iff \psi$  injektiv

*Basis* von  $M$  über  $R$   $\iff \psi$  bijektiv

$M$  heißt

*endlich erzeugt*  $\iff M$  besitzt ein endliches Erzeugendensystem

*frei*  $\iff M$  besitzt eine Basis

**Anmerkung.** • Ist  $R = K$  ein Körper, so sind alle  $K$ -Moduln frei (LA1)

- Im allgemeinen ist dies jedoch falsch:  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist eine abelsche Gruppe (=  $\mathbb{Z}$ -Modul), die nicht frei als  $\mathbb{Z}$ -Modul ist.
- Jeder  $R$ -Modul  $M$  ist Faktormodul eines freien  $R$ -Moduls, denn:

$$R^{(M)} \rightarrow M, (a_x)_{x \in M} \mapsto \sum_{x \in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv.}$$

- Basen eines freien  $R$ -Moduls können unterschiedliche Länge haben.

**Satz 1.1.22.** Sei  $A$  ein kommutativer Ring,  $A \neq 0$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$A^{n_1} \simeq A^{n_2} \iff n_1 = n_2$$

*Beweis.* Vorüberlegung: nach Algebra 1, 4.18 ex in  $A$  ein maximales Ideal  $J$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $A^n/JA^n$  ein  $A/J$ -Modul (vgl Beispiel 1.10) und  $A/J$  ist ein Körper. Die Abbildung  $A^n/JA^n \rightarrow (A/J)^n, (x_1, \dots, x_n) + JA^n \mapsto (x_1 + J, \dots, x_n + J)$  ist ein Isomorphismus von  $A/J$ -Moduln, d.h.  $A^n/JA^n \simeq (A/J)^n$  ist ein  $n$ -dimensionaler  $A/J$ -Vektorraum. Aus  $A^{n_1} \simeq A^{n_2}$  folgt  $A^{n_1}/JA^{n_1} \simeq A^{n_2}/JA^{n_2}$ , also  $(A/J)^{n_1} \simeq (A/J)^{n_2}$  (als  $A/J$ -Vektorraum) ■

**Definition 1.1.23.** Sei  $A$  ein kommutativer Ring,  $M$  ein freier  $A$ -Modul mit endlicher Basis. Die Kardinalität dieser Basis heißt der *Rang* von  $M$  (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.1.22)

## 1.2 Exakte Folgen

**Definition 1.2.1.** Eine *exakte Folge* (*exakte Sequenz*) von  $R$ -Moduln ist eine Familie  $(f_i)_{i \in I}$  von  $R$ -Modulhomomorphismen  $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$  für ein (endliches oder unendliches) Intervall  $I \in \mathbb{Z}$ , sodass:

$$\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1} \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } i+1 \in I$$

gilt.

Schreibweise:  $\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \dots$

Eine exakte Folge der Form:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

heißt eine *kurze exakte Folge* (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen). Die Exaktheit von  $(*)$  bedeutet explizit:

- $f$  injektiv
- $g$  surjektiv
- $\operatorname{im} f = \ker g$ .

**Anmerkung.** • Seien  $M, N$   $R$ -Moduln und  $f : M \rightarrow N$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus.

Falls  $f$  injektiv, dann ist  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0$  exakt.

falls  $f$  surjektiv, so ist  $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$  exakt.

- Ist  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  eine exakte Folge von  $R$ -Moduln, und setzen wir  $N := \ker g$ , so induziert  $g$  einen Isomorphismus  $\bar{g} : M/N \xrightarrow{\sim} M''$ , und  $f$  beschränkt sich zu einem Isomorphismus  $f : M' \xrightarrow{\sim} N$ . (d.h.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \sim \downarrow f & & \parallel & & \uparrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{e} & M & \xrightarrow{f} & M/N \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.)

- Ist  $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M'_i \longrightarrow M''_i \longrightarrow 0$ ,  $i \in I$  eine Familie exakter Folgen von  $R$ -Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i \in I} M'_i \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} M''_i$$

sowie

$$\bigoplus_{i \in I} M'_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M''_i$$

(mit der komponentenweisen Abbildungen) exakt.

**Satz 1.2.2.** Sei  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i) Es gibt ein Untermodul  $N' \subseteq M$  mit  $M = \ker g \oplus N'$
- ii) Es gibt einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $s : M'' \rightarrow M$  mit  $g \circ s = \text{id}_{M''}$
- iii) Es existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $t : M \rightarrow M'$  mit  $t \circ f = \text{id}_{M'}$

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, das die kurze exakte Sequenz “spaltet“. In diesem Fall gilt:  $M \cong M' \oplus M''$ . Der Homomorphismus  $s$  heißt ein “Schnitt“ von  $g$ .

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  ii) Sei  $N' \subseteq M$  ein Untermodul mit  $M = \ker g \oplus N'$ . Dann ist  $N' \cap \ker g = 0$ . Dann ist  $g|_{N'} : N' \rightarrow M''$  injektiv. Außerdem gilt:  $M'' = g(M) = g(N')$ , also ist  $g|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} M''$  ein Isomorphismus. Setze  $s : M'' \rightarrow N' \hookrightarrow M$ . Dann ist  $s$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus mit  $g \circ s = \text{id}_{M''}$ . Außerdem ist

$$M = \ker g \oplus N' = \ker g \oplus \text{im } s = \text{im } f \oplus \text{im } s = f(M') \oplus s(M'') \xrightarrow{f, s \text{ inj}} M' \oplus M''$$

ii)  $\Rightarrow$  iii) Sei  $s : M'' \rightarrow M$  ein Modulhomomorphismus mit  $g \circ s = \text{id}_{M''}$ . Sei  $h : f(M') \rightarrow M'$  invers zu  $f|_{f(M')} : M' \xrightarrow{\sim} f(M')$ . Für  $m \in M$  ist

$$g \circ (\text{id}_M - s \circ g)(m) = g(m) - g \circ (s \circ g)(m) = g(m) - \underbrace{(g \circ s) \circ g(m)}_{=\text{id}_{M''}} = 0$$

Also ist  $(\text{id}_M - s \circ g)(m) \in \ker g = \text{im } f$ . Wir setzen  $t : M \xrightarrow{\text{id}_M - s \circ g} f(M') \xrightarrow{h} M'$ , welcher ein  $R$ -Modulhomomorphismus ist mit

$$t \circ f = h \circ (\text{id}_M - s \circ g) \circ f = \underbrace{h \circ \text{id}_M \circ f}_{=\text{id}_{M'}} - \underbrace{h \circ s \circ g \circ f}_{=0} = \text{id}_{M'}$$

iii)  $\Rightarrow$  i) Setze  $t : M \rightarrow M'$  ein Modulhomomorphismus mit  $t \circ f = \text{id}_{M'}$ . Setze  $N' := \ker t$ . Für  $m \in M$  ist  $m = \text{id}_M(m) = \underbrace{(\text{id}_M - f \circ t)(m)}_{\in \ker t} + \underbrace{(f \circ t)(m)}_{\in \text{im } f}$ , also ist

$M = N' + \text{im } f$ . Sei außerdem  $m \in N' \cap \text{im } f$ . Dann existiert ein  $m' \in M'$  mit  $m = f(m')$ , somit ist

$$0 = t(m) = (t \circ f)(m') = \text{id}_{M'}(m') = m'$$

also auch  $m = 0$ . Damit ist  $M = N' \oplus \text{im } f$ . ■

**Satz 1.2.3.** Sei  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln,  $M''$  ein freier  $R$ -Modul. Dann spaltet die obige Folge.

*Beweis.* Sei also  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $M''$ . Wähle für alle  $i \in I$  ein  $m_i \in M$  mit  $g(m_i) = v_i$  (beachte:  $g$  ist surjektiv). Sei  $s : M'' = \bigoplus_{i \in I} Rv_i \rightarrow M$  der durch die Vorgabe  $s(v_i) = m_i$  induzierte Modulhomomorphismus (existiert nach der UE von  $\bigoplus$ ). Es ist

$$(g \circ s)(v_i) = g(m_i) = v_i, \quad \forall i \in I$$

Also ist  $g \circ s = \text{id}_{M''}$  ■

**Folgerung 1.2.4.** Sei  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln,  $M', M''$  freie  $R$ -Moduln. Dann ist auch  $M$  frei.

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $M' \cong R^{(I)}$ ,  $M'' \cong R^{(J)}$ . Nach 1.2.3 spaltet die Folge, also ist

$$M \cong M' \oplus M'' \cong R^{(I)} \oplus R^{(J)} \cong R^{(I \dot{\cup} J)}$$

und damit auch frei. ■

**Anmerkung.** Ist  $R$  kommutativ, und haben  $M, M'$  endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(M') + \text{rang}(M'')$$

**Bemerkung 1.2.5.** Sei  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann gilt:

- a) Ist  $M$  endlich erzeugt, dann ist  $M''$  endlich erzeugt.
- b) Sind  $M', M''$  endlich erzeugt, dann ist  $M$  endlich erzeugt.

*Beweis.* a) Ist  $M$  endlich erzeugt, dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein Epimorphismus  $\varphi : R^n \rightarrow M$ . Dann ist  $g \circ \varphi : R^n \rightarrow M''$  ebenfalls ein Epimorphismus, also ist  $M''$  endlich erzeugt.

- b) Sei  $(x_1, \dots, x_r)$  ein Erzeugendensystem von  $M'$ ,  $(y_1, \dots, y_s)$  ein Erzeugendensystem von  $M''$ . Da  $g$  surjektiv, existieren  $z_1, \dots, z_s \in M$  mit  $g(z_i) = y_i$  für  $i = 1, \dots, s$ .

Behauptung:  $f(x_1), \dots, f(x_r), z_1, \dots, z_s$  ist ein Erzeugendensystem von  $M$ , denn sei  $m \in M$ . Dann existieren  $a_1, \dots, a_s \in R$  mit  $g(m) = \sum_{i=1}^s a_i y_i = \sum_{i=1}^s a_i g(z_i) = g(\sum_{i=1}^s a_i z_i)$ . Damit ist  $m - \sum_{i=1}^s a_i z_i \in \ker g = \text{im } f$ . Also existiert ein  $v \in M'$ , etwa  $v = \sum_{i=1}^r b_i x_i$  mit  $f(v) = m - \sum_{i=1}^s a_i z_i$ . Also ist

$$m = f(v) + \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^r b_i f(x_i) + \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

**Anmerkung.** Aus  $M$  endlich erzeugt, folgt im Allgemeinen nicht, dass  $M'$  endlich erzeugt ist.

**Beispiel 1.2.6.** Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[X_1, X_2, \dots]$ . Dann ist  $R$  als  $R$ -Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1). Setze

$$I := \{f \in R \mid \text{konstanter Term von } f \text{ ist } = 0\}$$

Dann ist  $I$  ein Ideal in  $R$ , aber  $I$  ist nicht endlich erzeugt als  $R$ -Modul, denn angenommen es existieren  $f_1, \dots, f_r \in I$  mit  $I = \sum_{i=1}^r R f_i$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_n] \subseteq R$ .

Problem:  $X_{n+1} \notin I$ , denn andernfalls wäre  $X_{n+1} = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$  mit  $a_1, \dots, a_r \in R$  und setze  $X_1 = \dots = X_n = 0$ ,  $X_{n+1} = 1$ , also  $1 = 0$  Widerspruch!

**Bemerkung 1.2.7.** Seien  $M_1, \dots, M_r$   $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

i)  $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$  ist endlich erzeugt.

ii)  $M_1, \dots, M_r$  sind endlich erzeugt.

*Beweis.* Es genügt, die Behauptung für  $r = 2$  zu zeigen (Rest induktiv). Wir haben kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_1 \longrightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung aus 1.2.5 ■

**Anmerkung.** Ist  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$  mit  $|I| = \infty$ ,  $M_i \neq 0$  für alle  $i \in I$ , dann ist  $M$  nicht endlich erzeugt, dann für  $x_1, \dots, x_s \in M$  existiert ein  $J \subsetneq I$  mit  $x_1, \dots, x_s \in \bigoplus_{j \in J} M_j$ , also

$$\sum_{i=1}^s R_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} M_j \subsetneq \bigoplus_{i \in I} M_i$$

**Bemerkung 1.2.8 (Fünferlemma).** Ist ein kommutatives Diagramm von  $R$ -Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

gegeben und  $\varphi_1$  surjektiv,  $\varphi_2, \varphi_4$  Isomorphismen,  $\varphi_5$  injektiv. Dann ist  $\varphi_3$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Diagrammjagd (Übungen). ■

**Anmerkung.** Wir meist in der Situation  $M_1 = N_1 = M_5 = N_5$  angewandt.

**Bemerkung 1.2.9 (Schlangenlemma).** Sei folgendes kommutatives Diagramm von  $R$  Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:

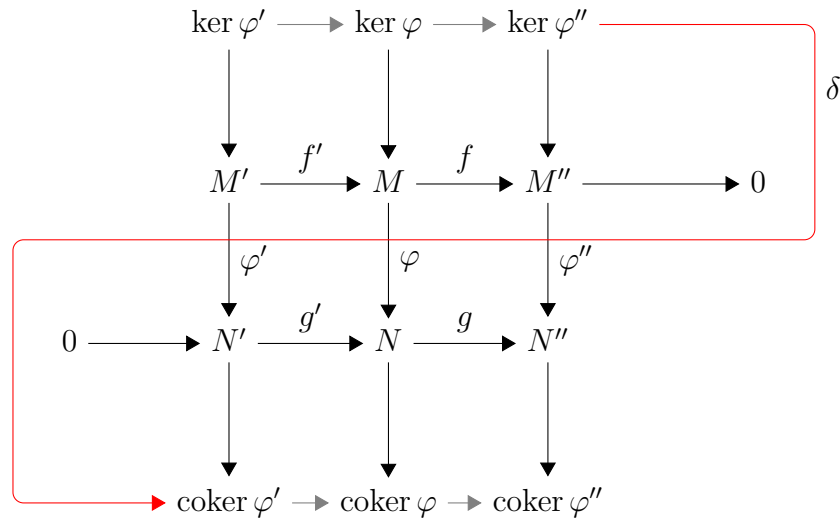
$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' \end{array}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln

$$\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{f} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$$

wobei  $\delta$  die sogenannte Übergangabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und  $f', f, g', g$  induziert sind. Ist  $f'$  injektiv, dann ist auch  $\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi$  injektiv. Ist  $g$  surjektiv, dann auch  $\operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi''$

*Beweis.* Betrachte



Konstruktion von  $\delta$ : Sei  $m'' \in \ker \varphi'' \subseteq M''$ . Da  $f$  surjektiv, existiert ein  $m \in M$  mit  $m'' = f(m)$ . Setze  $n := \varphi(m)$ . Dann ist  $g(n) = g(\varphi(m)) = \varphi''(f(m)) = \varphi''(m'') = 0$ . Dann ist  $n \in \ker g = \text{im } g'$ . Also existiert ein  $n' \in N'$  mit  $g'(n') = n$  ( $n'$  ist eindeutig bestimmt wegen  $g'$  injektiv.) Setze  $\delta(m'') := n' + \text{im } \varphi'$

Wohldefiniertheit von  $\delta$ : Sei  $\tilde{m} \in M$  mit  $m'' = f(\tilde{m})$ . Dann ist  $f(\tilde{m}) = f(m)$ , also  $\tilde{m} - m \in \ker f = \text{im } f'$ . Damit existiert ein  $m' \in M'$  mit  $\tilde{m} - m = f'(m')$ . Also ist

$$\tilde{n} := \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m + f'(m')) = \underbrace{\varphi(m)}_{=n} + \varphi(f'(m')) = g'(n') + g'(\varphi'(m')) = g'(\underbrace{n' + \varphi'(m')}_{:=\tilde{n}'})$$

Damit ist  $\tilde{n}' + \text{im } \varphi' = n' + \text{im } \varphi'$ , Rest ist Übungsaufgabe. ■



## 1.3 Noethersche und Artinsche Moduln

**Definition 1.3.1.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul.  $M$  heißt *noethersch*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  jeder Untermodul von  $M$  ist endlich erzeugt.

**Anmerkung.**  $M$  noethersch  $\Rightarrow M$  ist endlich erzeugt.

**Beispiel 1.3.2.** Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -VR. Dann gilt:  $V$  noethersch  $\Leftrightarrow V$  ist endlich dimensional

**Satz 1.3.3.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:

- i)  $M$  ist noethersch
- ii) Jede aufsteigende Kette  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$  von Untermoduln wird stationär, d.h. es existiert ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $M_i = M_n$  für alle  $i \geq n$ .
- iii) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von  $M$  enthält ein maximales Element.

Man sagt in diesem Fall auch: die Untermoduln von  $M$  erfüllen die aufsteigende Kettenbedingung.

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  ii) Sei  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$  eine Kette von Untermoduln von  $M$ . Setze  $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_i \subseteq M$ .  $N$  ist Untermodul von  $M$  (beachte:  $a, b \in N \Rightarrow$  Es existieren  $i, j \in \mathbb{N}_0$  mit  $a \in M_i, b \in M_j$ , (Es gilt:  $i \leq j \Rightarrow M_i \subseteq M_j, a, b \in M_j \Rightarrow a + b \in M_j \subseteq N$ ). Da  $M$  noethersch, ist  $N$  endlich erzeugt, d.h. es existiert ein endliches Erzeugendensystem  $x_1, \dots, x_r$  von  $N$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, r\}$  existieren  $j_i \in \mathbb{N}_0$  mit  $x_i \in M_{j_i}$ . Setze  $n := \max\{j_i \mid i = 1, \dots, r\} \Rightarrow x_1, \dots, x_r \in M_n \Rightarrow N \subseteq M_n \subseteq N \Rightarrow N = M_n \Rightarrow$  für alle  $i \geq n$  ist  $M_i = M_n$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii) Sei  $\mathcal{X}$  eine nichtleere Menge von Untermoduln von  $M$ , die kein maximales Element hat. Insbesondere existiert zu jedem  $M' \in \mathcal{X}$  ein  $M'' \in \mathcal{X}$  mit  $M' \subsetneq M''$ .  $\Rightarrow$  Es existiert eine Kette von Untermoduln  $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$  von  $M$ , die nicht stationär wird.

iii)  $\Rightarrow$  i) Sei  $N \subseteq M$  ein Untermodul. Setze

$$\mathcal{X} := \{M' \subseteq M \text{ Untermodul} \mid M' \text{ endlich erzeugt, } M' \subseteq N\}$$

Wegen  $0 \in \mathcal{X}$  ist  $\mathcal{X} \neq \emptyset \stackrel{(iii)}{\Rightarrow}$  Es existiert ein maximales Element  $\tilde{M}$  in  $\mathcal{X}$ .

Behauptung:  $\tilde{M} = N$ , denn: Sei  $x \in N \Rightarrow Rx + \tilde{M} \in \mathcal{X}$  und  $\tilde{M} \subseteq Rx + \tilde{M}$ . Aufgrund der Maximalität von  $\tilde{M}$ , folgt  $Rx + \tilde{M} = \tilde{M}$ , als  $x \in \tilde{M}$ . ■

**Bemerkung 1.3.4.** Sei  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

i)  $M$  ist noethersch

ii)  $M'$  und  $M''$  sind noethersch

*Beweis.* Es genügt den Fall der Folge  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  für einen Untermodul  $N \subseteq M$  zu betrachten. (Vgl. Anmerkung nach 1.2.1)

i)  $\Rightarrow$  ii) Sei  $N' \subseteq N$  Untermodul  $\Rightarrow N'$  Untermodul von  $M \xrightarrow{M_{\text{noet.}}} N'$  endlich erzeugt. Sei  $N'' \subseteq M/N$  Untermodul. Also ist  $\pi^{-1}(N'') \rightarrow N''$  ein Epimorphismus und damit  $N''$  endlich erzeugt nach 2.5 (a).

ii)  $\Rightarrow$  i) Seien  $N, M/N$  noethersch, und sei  $M' \subseteq M$  Untermodul. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln

$$0 \longrightarrow M' \cap N \longrightarrow M' \longrightarrow M'/M' \cap N \longrightarrow 0$$

wobei  $M' \cap N$  endlich erzeugt, da  $N$  noethersch. Außerdem ist

$$M'/M' \cap N \simeq (M' + N)/N \subseteq M/N$$

endlich erzeugt, da  $M/N$  noethersch.  $\Rightarrow M'$  ist endlich erzeugt nach 1.2.5 ■

**Bemerkung 1.3.5.**  $M_1, \dots, M_r$   $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

i)  $\bigoplus_{i=1}^r M_i$  noethersch

ii)  $M_1, \dots, M_r$  noethersch.

*Beweis.* Analog zum Beweis von 1.2.7 unter Verwendung von 1.3.4 ■

**Definition 1.3.6.**  $R$  heißt *linksnoethersch* (bzw. *rechtsnoethersch*), wenn  $R$  als Links- (bzw. Rechts-) Modul über sich selbst noethersch ist.  $R$  heißt *noethersch*, wenn  $R$  links- und rechtsnoethersch ist.

**Anmerkung.** Es gibt Ringe, die rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch sind (und umgekehrt)

**Beispiel 1.3.7.** a) Ist  $R$  ein Schiefkörper (Divisionsring) (d.h.  $R \setminus \{0\}$  ist eine Gruppe bzgl.  $\cdot$ ), dann ist  $R$  noethersch, denn wegen  $Ra = R = aR$  für alle  $a \in R \setminus \{0\}$  sind die einzigen Linksideale (Rechtsideale) in  $R$  durch  $0, R$  gegeben, diese sind endlich erzeugt.

b) Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[X_1, X_2, \dots]$  ist nicht noethersch nach Beispiel 1.2.6.

**Bemerkung 1.3.8.** Sei  $R$  ein linksnoetherscher Ring,  $M$  ein endlich erzeugtes  $R$ -Modul. Dann ist  $M$  noethersch.

*Beweis.* Wegen  $M$  endlich erzeugt, existiert ein Epimorphismus  $R^n \twoheadrightarrow M$  für geeignetes  $n$ . Nach Voraussetzung ist  $R$  als  $R$ -Modul noethersch  $\stackrel{1.3.5}{\Rightarrow} R^n$  noetherscher  $R$ -Modul  $\stackrel{1.3.4}{\Rightarrow} M$  noethersch. ■

**Bemerkung 1.3.9.** Sei  $R$  linksnoetherscher Ring,  $I \subseteq R$  zweiseitiges Ideal. Dann ist  $R/I$  linksnoethersch.

*Beweis.* Es ist zu zeigen:  $R/I$  ist noethersch als  $R/I$ -Modul.  
Vorüberlegungen:

1. Für  $N \subseteq R/I$  gilt:

$$\begin{aligned} N \text{ ist } R/I\text{-Modul von } R/I &\Leftrightarrow N \text{ ist } R\text{-Untermodul von } R/I \\ (\text{bezüglich } \bar{a} \cdot \bar{x} := \overline{ax}) &\quad (\text{bezüglich } a \cdot \bar{x} := \overline{ax}) \end{aligned}$$

2. Für jeden  $R/I$ -Untermodul  $N$  von  $R/I$  gilt:

$$N \text{ ist endlich erzeugt über } R/I \Leftrightarrow N \text{ ist endlich erzeugt über } R$$

Nach den Vorüberlegungen genügt es zu zeigen, dass  $R/I$  noethersch ist als  $R$ -Modul. Dies folgt aus 3.8, denn  $R/I$  ist endlich erzeugt als  $R$ -Modul (erzeugt von  $\bar{1}$ ). ■

**Anmerkung.** Unterringe noetherscher Ringe sind im Allgemeinen nicht noethersch (siehe Übungsaufgaben)

**Bemerkung 1.3.10.** Seien  $M, N$   $R$ -Moduln mit  $M \cong M \oplus N, N \neq 0$ . Dann ist  $M$  nicht noethersch.

*Beweis.* Setze

$$\mathcal{X} := \{N' \subseteq M \text{ Untermodul} \mid \exists M' \subseteq M, \text{ s.d. } M = M' \oplus N' \text{ und } M' \cong M\}$$

Offenbar ist  $0 \in \mathcal{X}$ , denn  $M = M \oplus 0$ , also  $\mathcal{X} \neq \emptyset$ .

Angenommen  $M$  ist noethersch. Dann enthält  $\mathcal{X}$  ein maximales Element  $N'$ , also existiert ein  $M' \subseteq M$  mit  $M = M' \oplus N'$  und  $M' \cong M$ . Nach Voraussetzung existiert ein  $\varphi : M \oplus N \xrightarrow{\sim} M \xrightarrow{\sim} M'$ . Also ist

$$M' = \varphi(M) \oplus \varphi(N) \Rightarrow M = M' \oplus N' = \underbrace{\varphi(M)}_{=: M''} \oplus \underbrace{\varphi(N) \oplus N'}_{=: N''}$$

Es ist  $M \cong \varphi(M) = M''$ , somit  $N'' \in \mathcal{X}$ . Außerdem ist  $\varphi(N) \neq 0$  wegen  $N \neq 0$  und  $\varphi$  injektiv. Damit folgt  $N' \subsetneq N''$  im Widerspruch zur Maximalität von  $N'$ . ■

**Satz 1.3.11.** *Sei  $R$  linksnoetherscher Ring,  $R \neq 0$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $R^{n_1} \simeq R^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$ .*

*Beweis.* ohne Einschränkung gelte  $n_1 \geq n_2 \Rightarrow R^{n_2} \simeq R^{n_1} \simeq R^{n_2} \simeq R^{n_1-n_2}$ . Wegen  $R^{n_2}$  noethersch, folgt mit 1.3.10 :  $R^{n_1-n_2} = 0$ , also  $n_1 = n_2$  ■

**Anmerkung.** • Obiger Satz zeigt, dass der Begriff des Ranges freier Moduln auch für endlich erzeugte, freie Moduln über linksnoetherschen Ringen wohldefiniert ist.

- Jeder Körper ist linksnoethersch  $\Rightarrow$  So erhält man einen neuen Beweis für Ergebnis aus LA1

**Satz 1.3.12 (Hilbertscher Basissatz).** *Sei  $R$  ein linksnoetherscher Ring. Dann ist  $R[X]$  linksnoethersch.*

*Beweis.* Sei  $I \subseteq R$  ein Linksideal. Es ist zu zeigen, dass  $I$  als  $R[X]$ -Modul endlich erzeugt ist.

1. Für  $n \in \mathbb{N}$  setze  $I_n := \{f \in I \mid \deg f \leq n\}$ , was offenbar ein  $R$ -Modul ist. Wir betrachten die  $R$ -lineare Abbildung

$$b_n : I_n \longrightarrow R, \quad \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto a_n$$

also ist  $B_n := b_n(I_n) \subseteq R$  ein Linksideal. Für  $f \in I_n$  ist  $Xf \in I_{n+1}$ , also  $b_n(f) = b_{n+1}(Xf) \in B_{n+1} = b_{n+1}(I_{n+1})$ , woraus wir eine Kette von Linksidealen  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$  erhalten, welche, da  $R$  linksnoethersch ist, stationär ist, also existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $B_m = B_n$  für alle  $m \geq n$ .

2. Behauptung:  $I = R[X]I_n$ , denn:

“ $\supseteq$ “ klar, wegen  $I_n \subseteq I$ , wobei  $I$  ein Linksideal ist.

“ $\subseteq$ “ Es ist  $I = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$ , d.h. es genügt zu zeigen, dass  $I_m \subseteq R[X]I_n$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ , was wir per Induktion nach  $m$  zeigen.

$m \leq n$ : klar.

$m > n$ : Sei  $f \in I_m$ . Dann ist  $b_m(f) \in B_m = B_n = b_n(I_n)$ , also existiert ein Polynom  $f_1 \in I_n$  mit  $b_m(f) = b_n(f_1) = b_m(X^{m-n}f_1)$ . Also ist  $f - X^{m-n}f_1 \in I_{m-1}$

$\stackrel{\text{IV}}{\subseteq} I_{m-1} \subseteq R[X]I_n$ . Wegen  $X^{m-n}f_1 \in R[X]I_n$ , folgt  $f \in R[X]I_n$

3.  $I_n$  ist endlich erzeugt als  $R$ -Modul, denn:  $I_n \subseteq \sum_{i=0}^n RX^i$ , und  $\sum_{i=0}^n RX^i$  ist ein endlich erzeugter  $R$ -Modul, also insbesondere noethersch nach 1.3.8,

weshalb  $I_n$  als Untermodul endlich erzeugt ist, d.h. es existieren  $g_1, \dots, g_r \in I_n$  mit  $I_n = \sum_{i=1}^r Rg_i$ , also

$$I \stackrel{2.}{=} R[X]I_n = \sum_{i=1}^r R[X]g_i$$

d.h.  $I$  ist endlich erzeugt als  $R[X]$ -Modul. ■

**Folgerung 1.3.13.** a) Ist  $R$  ein linksnoetherscher Ring, dann ist  $R[X_1, \dots, X_n]$  linksnoethersch

b) Sind  $A, B$  kommutative Ring,  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus, sodass  $B$  von  $\varphi(A)$  und einer endlichen Menge  $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq B$  als Ring erzeugt wird. Dann gilt:  $A$  ist noethersch  $\Rightarrow B$  noethersch.

*Beweis.* a) aus 1.3.12 per Induktion

b) Nach Voraussetzung existiert ein surjektiver Ringhomomorphismus

$$\psi : A[X_1, \dots, X_r] \twoheadrightarrow B, \quad X_i \mapsto x_i, \quad \text{und} \quad \psi|_A = \varphi$$

Ist  $A$  noethersch, dann ist  $A[X_1, \dots, X_r]$  noethersch nach a) und nach 3.9 ist  $B$  noethersch. ■

**Definition 1.3.14.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul.  $M$  heißt *artinsch*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  für jede absteigende Kette  $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$  von Untermoduln von  $M$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $M_i = M_n$  für alle  $i \geq n$  ("absteigende Kettenbedingung").

**Definition 1.3.15.**  $R$  heißt *linksartinsch* (bzw. *rechtsartinsch*)  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $R$  ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selber artinsch.  $R$  heißt *artinsch*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $R$  ist links- und rechtsartinsch.

**Beispiel 1.3.16.** a) Jeder endliche Ring ist artinsch (und noethersch).

b)  $\mathbb{Z}$  ist kein artinscher Ring, denn  $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \dots$

c) Sei  $M$  ein endliches Monoid,  $K$  ein Körper,  $R = K[M]$  sei der Monoidring (vgl. Algebra 1-Übungen). Dann ist  $R$  linksartinsch, denn:  $K[M]$  ist ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, jeder  $K[M]$ -Untermodul von  $K[M]$  ist ein  $K$ -Untervektorraum von  $K[M]$ , also ist jede absteigende Kette von Untermoduln eine absteigende Kette von Untervektorräumen, die stationär ist. Ebenso ist  $K[M]$  rechtsartinsch,  $K[M]$  also artinsch.

**Bemerkung 1.3.17.** Sei  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  eine exakte Folge von  $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i)  $M$  ist artinsch.
- ii)  $M', M''$  ist artinsch.

*Beweis.* Es genügt, den Fall  $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$  zu betrachten.

i)  $\Rightarrow$  ii) Sei  $M$  artinsch. Sei  $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$  eine Kette von Untermoduln von  $N$ . Dann ist  $N_i$  ein Untermodul von  $M$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und, da  $M$  artinsch ist, existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $N_i = N_n$  für alle  $i \geq n$ , weshalb  $N$  artinsch ist. Sei  $N'_1 \supseteq N'_2 \supseteq \dots$  eine Kette von Untermoduln von  $M/N$ . Dann ist  $\pi^{-1}(N'_1) \supseteq \pi^{-1}(N'_2) \supseteq \dots$  eine Kette von Untermoduln von  $M$ , welche, wegen  $M$  artinsch, stationär wird. Es ist  $N'_n = \pi(\pi^{-1}(N'_n)) = \pi(\pi^{-1}(N'_n)) = N_i$  für alle  $i \geq n$ , also ist  $M/N$  artinsch.

ii)  $\Rightarrow$  i) Seien  $N, M/N$  artinsch. Sei  $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$  eine absteigende Kette von Untermoduln von  $M$ . Dann ist  $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \dots$  eine absteigende Kette von Untermoduln von  $N$ . Damit ist

$$(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette von Untermoduln von  $M/N$ , also existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $M_i \cap N = M_n \cap N$  und  $M_i + N/N = M_n + N/N$  für alle  $i \geq n$ , also ist  $M_i + N = M_n + N$  für alle  $i \geq n$ ,

Behauptung:  $M_i = M_n$  für alle  $i \geq n$ , denn sei  $i \geq n$  fest.

“ $\subseteq$ “ klar

“ $\supseteq$ “ Sei  $x \in M_n$ . Dann existieren  $x' \in M, y \in N$  mit  $x = x' + y$  (wegen  $M_i + N = M_n + N$ ), also  $y = \underbrace{x}_{\in M_n} - \underbrace{x'}_{\in M_i \subseteq M_n} \in M_n \cap N = M_i \cap N \Rightarrow x = \underbrace{x'}_{\in M_i} + \underbrace{y}_{\in M_i} \in M_i$

■

**Folgerung 1.3.18.** Seien  $M_1, \dots, M_n$   $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i)  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  ist artinsch
- ii)  $M_1, \dots, M_n$  sind artinsch.

**Folgerung 1.3.19.** Sei  $R$  linksartinsch,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann ist  $M$  artinsch.

**Definition 1.3.20.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann heißt  $M$  *endlich koerzeugt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  für jede Familie  $(M_i)_{i \in I}$  von Untermoduln von  $M$  mit  $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$  existiert eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  mit  $\bigcap_{j \in J} M_j = 0$

**Anmerkung.** • Sei  $N \subseteq M$  ein Untermodul. Dann ist  $M/N$  endlich koerzeugt  $\Leftrightarrow$  Für jede Familie  $(M_i)_{i \in I}$  von Untermoduln von  $M$  mit  $\bigcap_{i \in I} M_i = N$  existiert eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  mit  $\bigcap_{j \in J} M_j = N$ .

- $N$  ist endlich erzeugt  $\Leftrightarrow$  Für jede Familie  $(M_i)_{i \in I}$  von Untermoduln von  $M$  mit  $\sum_{i \in I} M_i = N$  existiert eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  mit  $\sum_{j \in J} M_j = N$ .

**Satz 1.3.21.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:

- $M$  ist artinsch
- Jede nichtleere Menge von Untermoduln enthält ein minimales Element
- Jeder Faktormodul von  $M$  ist endlich koerzeugt.

*Beweis.*  $i) \Rightarrow ii)$  Sei  $\mathcal{X}$  eine nichtleere Menge von Untermoduln von  $M$ , die kein minimales Element besitzt. Insbesondere existiert zu jedem  $M' \in \mathcal{X}$  ein  $M'' \in \mathcal{X}$  mit  $M'' \subsetneq M'$ , also existiert eine Kette von Untermoduln  $M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots$ , die nicht stationär wird.

$ii) \Rightarrow iii)$  Sei  $N \subseteq M$  ein Untermodul,  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untermoduln von  $M$  mit  $\bigcap_{i \in I} M_i = N$ . Setze  $\mathcal{X} := \{\bigcap_{j \in J} M_j \mid J \subseteq I \text{ endlich}\} \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \mathcal{X}$  enthält ein minimales Element  $N_1 = \bigcap_{j \in J} M_j$  für eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$ .

Behauptung:  $N_1 = N$ , denn

“ $\supseteq$ “ klar

“ $\subseteq$ “ Angenommen  $N_1 \supsetneq N$ . Dann existiert ein  $x \in N_1$  mit  $x \notin N$ . Da  $N = \bigcap_{i \in I} M_i$  existiert ein  $i \in I$  mit  $x \notin M_i \Rightarrow x \notin \bigcap_{j \in J \cup \{i\}} M_j =: N_2$ . Somit ist  $N_2 \in \mathcal{X}$ ,

$N_2 \subsetneq N_1$  im Widerspruch zur Minimalität von  $N_1$ .

Somit  $N_1 = N$ , also ist  $M/N$  endlich koerzeugt.

$iii) \Rightarrow i)$  Sei  $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$  eine absteigende Kette von Untermoduln von  $M$ . Setze  $N := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i$ .  $M/N$  ist endlich koerzeugt, weshalb eine endliche Teilmenge  $J \subseteq \mathbb{N}$  existiert mit  $N = \bigcap_{j \in J} M_j$ . Setze  $n := \max J$ , dann ist  $N = M_n$ , also ist  $M_i = M_n$  für alle  $i \geq n$ . ■

## 2 Homologische Algebra

In diesem Kapitel sei  $R$  stets ein Ring

### 2.4 Kategorien

**Definition 2.4.1.** Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus

- einer Klasse  $\text{Ob } \mathcal{C}$  von *Objekten* einer Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  von *Morphismen* für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$
- einer Verknüpfung  $\circ : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$  für alle  $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$

wobei folgende Axiome gelten:

(K1)  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$ , falls  $A \neq A'$  oder  $B \neq B'$

(K2) Für alle  $A, B, C, D \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$  gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (\text{Assoziativität})$$

(K3) für jedes  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  existiert ein Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ , sodass für alle  $B \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$  gilt:

$$f \circ \text{id}_A = f, \text{id}_A \circ g = g$$

.

**Anmerkung.** • Man sagt *Klasse* statt Menge, um Paradoxa, wie “die Menge aller Mengen“ zu vermeiden.

- Trotzdem schreiben wir  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  um zu sagen dass  $A$  zu  $\text{Ob } \mathcal{C}$  gehört (und werden  $\text{Ob } \mathcal{C}$  im Folgenden wie eine Menge behandeln).
- In den folgenden Abschnitten werden wir mengentheoretische Probleme ignorieren und häufig von Mengen sprechen auch wenn es sich nur um Klassen handelt.
- Für  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  schreiben wir auch  $f : A \rightarrow B$ .  $A$  heißt *Quelle* und  $B$  heißt *Ziel* von  $f$ ; wegen (K1) sind diese eindeutig bestimmt.
- für  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ist  $\text{id}_A$  eindeutig bestimmt (analoges Argument wie bei Monoiden:  $\text{id}_A = \text{id}'_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$ )



**Beispiel 2.4.2.** • Mengen: Kategorie der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen

- Ringe: Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen
- $R\text{-Mod}$ : Kategorie der  $R$ -(Links)-Moduln mit  $R$ -Modulhomomorphismen als Morphismen
- Top: Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen
- $\text{Ob } \mathcal{C} = \{*\}$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(*, *) := M$ , wobei  $M$  Monoid,  $\circ$  = Verknüpfung in  $M$ .

**Definition 2.4.3.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Die zu  $\mathcal{C}$  *duale Kategorie* ( $\mathcal{C}^{op}$ ) ist die Kategorie mit:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$  für  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob } \mathcal{C}$
- $\circ_{op} : \text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$  mit  $(f, g) \mapsto f \circ g$  für  $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$

**Anmerkung.** • Anschaulich: Übergang von  $\mathcal{C}$  zu  $\mathcal{C}^{op} \hat{=}$  Pfeile umdrehen

- $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

**Definition 2.4.4.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus einer Abbildung

$$\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , sodass gilt:

$$(F1) \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ für alle } f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$$

$$(F2) \quad F(id_A) = id_{FA} \text{ für alle } A \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

**Beispiel 2.4.5.** a) Vergiss-Funktoren, zum Beispiel:  $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Mengen}$ ,  $R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ , ...

b) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie  $\Rightarrow$  Jedes Objekt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  induziert einen Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}, \quad A \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A)$$

Für  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  ist hierbei  $f_*^X := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -)(f)$  gegeben durch

$$f_*^X : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B), \quad g \mapsto f \circ g$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & A \\ & \searrow f_*^X(g) & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

c) Sei  $M \in R\text{-Mod} \Rightarrow \text{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ,  $N \mapsto \text{Hom}_R(M, N)$  ist ein Funktor.

**Definition 2.4.6.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein (kontavarianter) Funktor  $F$  von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$  ist ein Funktor  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ , das heißt besteht aus einer Abbildung

$$\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } (\mathcal{D}), \quad A \mapsto FA$$

und Abbildungen:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FB, FA), \quad f \mapsto F(f)$$

für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , sodass gilt:

(F1')  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$  für alle  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ,  $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$

(F2')  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$  für alle  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

**Beispiel 2.4.7.** a) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie  $\Rightarrow$  Jedes Objekt  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  induziert einen kontravarianten Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}, \quad A \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y)$$

Für  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  ist hierbei  $f_Y^* := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y)(f)$  gegeben durch

$$f_Y^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y), \quad g \mapsto g \circ f$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_Y^*(g)} & Y \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ B & & \end{array}$$

b) Sei  $N \in R\text{-Mod} \Rightarrow \text{Hom}_R(-, N) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ,  $M \mapsto \text{Hom}_R(M, N)$  ist ein kontravarianter Funktor.

**Anmerkung.** • Sind  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Funktoren, so ist auf naheliegende Weise der Funktor  $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  definiert.

- Unter Funktoren werden kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme abgebildet.

**Definition 2.4.8.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Das *Produkt*  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  ist diejenige Kategorie mit  $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$  und  $Mor_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$  und "komponentenweisen  $\circ$ ".

**Definition 2.4.9.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  Kategorien. Ein *Bifunktor*  $F$  "von  $\mathcal{C}$  kreuz  $\mathcal{D}$  nach  $\mathcal{E}$ " ist ein Funktor  $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$

**Beispiel 2.4.10.** a)  $\oplus : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}, (M, N) \rightarrow M \oplus N$  ist ein Bifunktor

- b) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie  $\Rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}, (M, N) \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(M, N)$  ist ein Bifunktor.

**Definition 2.4.11.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A, B \in Ob \mathcal{C}, f : A \rightarrow B$   $f$  heißt

*Monomorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $C \in Ob \mathcal{C}, g_1, g_2 : C \rightarrow A$  gilt:  $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$  Für alle  $C \in Ob \mathcal{C}$  ist  $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(C, A) \rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(C, B)$  injektiv.

*Epimorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $C \in Ob \mathcal{C}, g_1, g_2 : B \rightarrow C$  gilt:  $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow$  Für alle  $C \in Ob \mathcal{C}$  ist  $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$  injektiv.

*Isomorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Es existiert ein  $g : B \rightarrow A$  mit  $f \circ g = id_B$  und  $g \circ f = id_A$ .

**Anmerkung.** In der Situation von 2.4.11 gilt:

- $f$  Monomorphismus in  $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$  Epimorphismus in  $\mathcal{C}^{op}$ .
- $f$  Isomorphismus in  $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$  ist Isomorphismus in  $\mathcal{C}^{op}$ .
- Ist  $f$  ein Isomorphismus und  $g : B \rightarrow A$  mit  $f \circ g = id_B$  und  $g \circ f = id_A$ , dann ist  $g$  eindeutig bestimmt (und wird mit  $f^{-1}$  bezeichnet), denn sind  $g_1, g_2 : B \rightarrow A$  mit dieser Eigenschaft  $\Rightarrow g_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$ .
- In Mengen ist  $f$  Monomorphismus  $\Leftrightarrow f$  injektiv,  $f$  Epimorphismus  $\Leftrightarrow f$  surjektiv,  $f$  Isomorphismus  $\Leftrightarrow f$  bijektiv. Im Allgemeinen ist dies für Kategorien, in denen die Morphismen Abbildungen sind, jedoch falsch (vgl. Bsp. 4.13)

**Bemerkung 2.4.12.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $f : A \rightarrow B$  ein Isomorphismus. Dann ist  $f$  ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.

*Beweis.* Seien  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $g_1, g_2 : C \rightarrow A$  mit  $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2) \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow f$  Monomorphismus. Analog wird gezeigt dass  $f$  ein Epimorphismus. ■

**Anmerkung.** Die Umkehrung von 2.4.12 ist im Allgemeinen falsch, siehe nächstes Beispiel.

**Beispiel 2.4.13.** a) Sei  $\mathcal{C} = \text{Top}$  die Kategorie der Topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Wir betrachten

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \text{diskrete Topologie}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$$

Diese ist eine stetige Abbildung, ein Monomorphismus sowie ein Epimorphismus, jedoch kein Isomorphismus (Nicht hömöomorph, da kein stetiges Inverses)

b) Sei  $\mathcal{C} = \text{Ringe}$ ,  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  Inklusion.  $f$  ist ein Monomorphismus und ein Epimorphismus (Achtung, denn: Für  $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \rightarrow R$  Ringhomomorphismus ist ein Ring  $R$  mit  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ , das heißt  $g_1|_{\mathbb{Z}} = g_2|_{\mathbb{Z}}$  folgt  $g_1 = g_2$  wegen der Universellen Eigenschaft von  $\mathbb{Q}$  als Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}$ ), aber kein Isomorphismus. Insbesondere ist ein Epimorphismus in  $\mathcal{C}$  im obigen Sinne ("kategorieller Epimorphismus") nicht dasselbe wie ein surjektiver Ringhomomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ & & \downarrow g_1 \quad \downarrow g_2 \\ & & R \end{array}$$

**Definition 2.4.14.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren. Eine *natürliche Transformation*  $t$  von  $F$  nach  $G$  ( $t : F \Rightarrow G$ ) ist eine Familie  $(t_A)_{A \in \text{Ob}\mathcal{C}}$  von Morphismen  $t_A \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, GA)$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{t_A} & GA \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ FB & \xrightarrow{t_B} & GB \end{array}$$

für alle  $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $f : A \rightarrow B$  kommutiert. Man sagt häufig auch  $t_A : FA \rightarrow GA$  ist natürlich in  $A$ .

**Beispiel 2.4.15.** a) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $f : A \rightarrow B$ . Dann ist

$$f^* = (f_Y^*)_{Y \in \text{Ob}\mathcal{C}} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}$ , denn für  $Y_1, Y_2 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_1) & \xrightarrow{f_{Y_1}^*} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y_1) \\ g_*^B \downarrow & & \downarrow g_*^A \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) & \xrightarrow{f_{Y_2}^*} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \end{array}$$

denn: Für  $\varphi : B \rightarrow Y_1$  ist

$$(g_*^A \circ f_{Y_1}^*)(\varphi) = g_*^A(\varphi \circ f) = g \circ \varphi \circ f = f_{Y_2}^*(g \circ \varphi) = (f_{Y_2}^* \circ g_*^B)(\varphi)$$

- b) Sei  $K\text{-VR}$  die Kategorie der  $K$ -Vektorräume über einem festen Körper  $K$  (mit linearen Abbildungen als Morphismen). Für  $V \in K\text{-VR}$  sei  $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$  der Dualraum. Die kanonische Abbildung  $\varphi_v : V \rightarrow V^{**}$ ,  $w \mapsto \varphi_v(w) : V^* \rightarrow K$ ,  $\psi \mapsto \psi(w)$  ist natürlich in  $V$ , denn für  $V, W \in K\text{-VR}$ , eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_v} & V^{**} \\ \downarrow f & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{\varphi_w} & W^{**} \end{array}$$

mit  $f^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$ ,  $(\varphi : V^* \rightarrow K) \mapsto f^{**}(\varphi) : W^* \rightarrow K$ ,  $\psi \mapsto \varphi(\underbrace{\psi \circ f}_{\in V^*})$ , d.h.

$\varphi : id_V \Rightarrow \_^{**}$  ist eine natürliche Transformation von  $id : K\text{-VR} \rightarrow K\text{-VR}$  nach  $\_^{**} : K\text{-VR} \rightarrow K\text{-VR}$ .

**Definition 2.4.16.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren,  $t : F \Rightarrow G$  eine natürliche Transformation.  $t$  heißt *natürliche Äquivalenz*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ist  $t_A : FA \rightarrow GA$  ein Isomorphismus. (Notation  $t : F \xrightarrow{\sim} G$ )

**Anmerkung.** Ist  $t : F \rightarrow G$  eine natürliche Äquivalenz, dann existiert eine natürliche Äquivalenz  $t^{-1} : G \xrightarrow{\sim} F$  via  $t_A^{-1} = (t_A)^{-1} : GA \rightarrow FA$

**Beispiel 2.4.17.** Bezeichne  $K\text{-VR}_{<\infty}$  die Kategorie der endlichdimensionalen  $K$ -VR. Dann ist die natürliche Transformation  $\varphi : id \Rightarrow \_^{**}$  aus Beispiel 4.15 eine natürliche Äquivalenz.

**Definition 2.4.18.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor.  $F$  heißt *Kategorienäquivalenz*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Es existiert ein Funktor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  und natürliche Äquivalenzen  $F \circ G \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{D}}$ ,  $G \circ F \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{C}}$

**Beispiel 2.4.19.** Der Funktor  $_{-}^* : K\text{-VR}_{<\infty} \rightarrow (K\text{-VR}_{<\infty})^{\text{op}}$ ,  $v \mapsto V^*$  ist eine Kategorienäquivalenz, denn mit  $_{-}^{\sim*} : (K\text{-VR}_{<\infty})^{\text{op}} \rightarrow K\text{-VR}_{<\infty}$ ,  $W \mapsto W^*$  gilt offenbar  $_{-}^{\sim*} \circ _{-}^* = _{-}^{**}$ , und  $\varphi : \text{id} \xrightarrow{\sim} _{-}^{**}$  ist eine natürliche Äquivalenz, analog andersherum (d.h. die Kategorie  $K\text{-VR}_{<\infty}$  ist selbstdual).

**Satz 2.4.20 (Yoneda-Lemma).** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}$  ein Funktor. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi : \{ \text{natürliche Transformationen } t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F \} &\rightarrow F(A) \\ t &\mapsto t_a(\text{id}_A) \end{aligned}$$

*Beweis.* 1. Sei  $a \in F(A)$ . Wir definieren  $s^a : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F$  als  $s^a = (s_B^a)_{B \in \text{Ob}\mathcal{C}}$  mit

$$s_B^a := F(\varphi)(a) \quad \text{für } \varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$s^a$  ist eine natürliche Transformation, denn für  $B, C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $f : B \rightarrow C$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{s_B^a} & F(B) \\ f_*^A \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) & \xrightarrow{s_C^a} & F(C) \end{array}$$

denn:

$$\begin{aligned} (F(f) \circ s_B^a)(\varphi) &= F(f)(s_B^a(\varphi)) = F(f)(F(\varphi)(a)) = F(f \circ \varphi)(a) \\ &= F(f_*^A(\varphi))(a) = s_C^a(f_*^A(\varphi)) \end{aligned}$$

2. Setze

$$\begin{aligned} \Psi : F(A) &\rightarrow \{ \text{natürliche Transformationen } t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F \} \\ a &\mapsto s^a \end{aligned}$$

Dann sind  $\Phi, \Psi$  invers zueinander, denn: Für  $a \in F(A)$ ,  $t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F$  gilt

$$(\Phi \circ \Psi)(a) = \Phi(s^a) = s_A^a(\text{id}_A) = F(\text{id}_A)(a) = \text{id}_{FA}(a) = a$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(t) = \Psi(t_A(\text{id}_A))$$

und für  $B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  gilt wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ \varphi_*^A \downarrow & & \downarrow F(\varphi) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}$$

$$(\Psi(t_A(\text{id}_A)))_B(\varphi) = s_B^{t_A(\text{id}_A)}(\varphi) = F(\varphi)(t_A(\text{id}_A)) = t_B(\varphi^A(\text{id}_A)) = t_B(\varphi)$$

d.h.  $(\Psi \circ \Phi)(t) = t$  ■

**Folgerung 2.4.21.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) &\longrightarrow \{\text{natürliche Transformationen } \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)\} \\ \psi : B \rightarrow A &\mapsto \psi^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -) \end{aligned}$$

bijektiv.

*Beweis.* Wende 2.4.20 auf  $F = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)$  and. In der Notation des Beweises von 4.20 ist  $\Psi(\psi) = s^\psi = (s_C^\psi)_{C \in \text{Ob}\mathcal{C}}$ , wobei für  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$  gilt:

$$(s_C^\psi)(\varphi) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, -)(\varphi)(\psi) = \varphi_*^B(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi_C^*(\varphi)$$

d.h.  $\Psi(\psi) = \psi^*$ . ■

**Anmerkung.** • Folgerung 2.4.21 liefert einen sogenannten volltreuen Funktor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Funk}(\mathcal{C}, \text{Mengen})$ , wobei  $A \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ , wobei  $\text{Funk}(\mathcal{C}, \text{Mengen})$  die Funktorkategorie von  $\mathcal{C}$  nach Mengen bezeichnet (Objekte sind Funktoren:  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mengen}$ , und Morphismen die natürlichen Transformationen) (*Yoneda-Einbettung*)

- Folgerung 2.4.21 liefert insbesondere eine Verallgemeinerung des Satzes von Cayley aus der Gruppentheorie: Für eine Gruppe  $G$  ist  $G \hookrightarrow S(G)$ ,  $g \mapsto \tau_g$  (Linkstranslation mit  $g \in G$ ) ein injektiver Grupphomomorphismus. Wende 2.4.21 an auf:

- $\mathcal{C} = \text{Kategorie mit } \text{Ob}\mathcal{C} = \{\cdot\}, \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) = G$
- $A = B = \cdot$

und erhalte eine Bijektion

$$\begin{aligned} G = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) &\longrightarrow \{\text{natürliche Transformationen } \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -)\} \\ g &\mapsto g^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, -) \hat{=} \tau_g \end{aligned}$$

## 2.5 Abelsche Kategorien

**Definition 2.5.1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .  $A$  heißt

*Anfangsobjekt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ist  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M)$  einelementig

*Endobjekt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ist  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, A)$  einelementig

**Anmerkung.** Falls sie existieren, sind Anfangs- und Endobjekte eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (denn: Sind  $A_1, A_2$  Anfangsobjekte, dann ist  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) = \{\alpha\}$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_1) = \{\beta\}$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_1) = \{\text{id}_{A_1}\}$  und analog  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_2) = \{\text{id}_{A_2}\}$ , insbesondere ist  $\beta \circ \alpha = \text{id}_{A_1}$ ,  $\alpha \circ \beta = \text{id}_{A_2}$ ).

**Definition 2.5.2.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie.  $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$  heißt *Nullobjekt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $0$  ist sowohl Anfangs- als auch Endobjekt. Existiert in  $\mathcal{C}$  ein Nullobjekt  $0$ , so enthält  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ein ausgezeichnetes Element, den “Nullmorphismus“  $A \rightarrow 0 \rightarrow B$

**Anmerkung.** Der Nullmorphismus in  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$  ist unabhängig von der Wahl des Nullobjekts:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \tilde{0} & & \end{array}$$

**Beispiel 2.5.3.** a) In Mengen ist  $\emptyset$  ein Anfangsobjekt, jede einelementige Menge ist ein Endobjekt, insbesondere existiert in Mengen kein Nullobjekt

b) in Ringe ist  $\mathbb{Z}$  ein Anfangsobjekt, und der Nullring ist ein Endobjekt. In Ringe existiert ebenfalls ein Nullobjekt

c) In  $R\text{-Mod}$  ist der Nullmodul ein Nullobjekt.

**Definition 2.5.4.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie.  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten aus  $\mathcal{C}$ . Ein *Produkt*  $(A, (p_i)_{i \in I})$  von  $(A_i)_{i \in I}$  ist ein Objekt  $A \in \mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $p_i : A \rightarrow A_i$ , sodass für alle  $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  die Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A_i), \quad f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I}$$

bijektiv ist, das heißt für jede Familie  $(f_i)_{i \in I}$  von Morphismen  $f_i : B \rightarrow A_i$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $f : B \rightarrow A$  mit  $f_i = p_i \circ f$  für alle  $i \in I$ .



**Bemerkung 2.5.5.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten aus  $\mathcal{C}$ ,  $(A, (p_i)_{i \in I})$ ,  $(A', (p'_i)_{i \in I})$ , Produkte von  $(A_i)_{i \in I}$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus  $f : A \rightarrow A'$ , sodass für alle  $i \in I$  gilt:  $p'_i \circ f = p_i$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ & \searrow p_i & \swarrow p'_i \\ & A_i & \end{array}$$

(kurz:  $A, A'$  sind kanonisch isomorph. Wir sprechen daher oft von “dem Produkt” und schreiben  $A = \prod_{i \in I} A_i$ )

- Beweis.* 1. Wir wenden die Universelle Eigenschaft auf das Produkt  $(A', (p'_i)_{i \in I})$ ,  $B = A$ ,  $f_i = p_i \Rightarrow$  Wir erhalten einen eindeutig bestimmten Morphismus  $f : A \rightarrow A'$  mit  $p'_i \circ f = p_i$  für alle  $i \in I$ . Analog: Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt  $(A, (p_i)_{i \in I})$ ,  $B = A'$ ,  $f_i = p'_i \Rightarrow$  Es existiert genau ein  $g : A' \rightarrow A$  mit  $p_i \circ g = p'_i$  für alle  $i \in I$ .
2. Es gilt  $g \circ f = id_A$ ,  $f \circ g = id_{A'}$  (d.h.  $f$  ist ein Isomorphismus), denn: Für alle  $i \in I$  ist  $p_i \circ (g \circ f) = (p_i \circ g) \circ f = p'_i \circ f = p_i$ . Wende die Universelle Eigenschaft auf das Produkt  $(A, (p_i)_{i \in I})$ ,  $B = A$ ,  $f_i = p_i$  an: Es existiert genau ein  $h : A \rightarrow A$  mit  $p_i \circ h = p_i$  für alle  $i \in I$  (nämlich  $h = id_A$ ). Somit ist  $id_A = g \circ f$ . Analog:  $f \circ g = id_{A'}$ . ■

**Beispiel 2.5.6.** a) In Mengen ist das Produkt das kartesische Produkt.

b) In  $R\text{-Mod}$  ist das Produkt das direkte Produkt.

c) In der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen existiert kein Produkt der Familie  $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  (Übung)

**Bemerkung + Definition 2.5.7.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten aus  $\mathcal{C}$ . Ein *Koprodukt*  $(A, (q_i)_{i \in I})$  von  $(A_i)_{i \in I}$  ist ein Objekt  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $q_i : A_i \rightarrow A$ , sodass  $(A, (q_i)_{i \in I})$  Ein Produkt von  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}^{op}$  ist, das heißt für alle  $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ist die Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A_i, B), \quad f \mapsto (f \circ q_i)_{i \in I}$$

bijektiv. Falls es existiert ist ein Koprodukt von  $(A_i)_{i \in I}$  eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (analog zu 2.5.5). Wir sprechen dann von dem *Koprodukt* und schreiben  $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$  ( $= \coprod_{i \in I} A_i$ )

**Beispiel 2.5.8.** a) In Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.

b) in  $R\text{-Mod}$  ist das Koprodukt die direkte Summe.

c) In der Kategorie der Gruppen existiert ein Koprodukt, das sogenannte freie Produkt (siehe Zettel Algebra 1)

**Definition 2.5.9.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie.  $\mathcal{A}$  heißt *additiv*, wenn gilt:

(K1)  $\mathcal{A}$  hat ein Nullobjekt,

(K2) In  $\mathcal{A}$  existieren endliche Produkte

(K3) Für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{A}$  trägt  $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$  die Struktur einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphimus als neutrales Element, sodass für alle  $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{A}$  die Verknüpfung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{\circ} \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

bilinear ist.

**Anmerkung.** In einer additiven Kategorie  $\mathcal{A}$  schreiben wir auch  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}$  für  $\text{Mor}_{\mathcal{A}}$ .

**Beispiel 2.5.10.** a)  $R\text{-Mod}$  ist eine additive Kategorie

b) Ringe sind keine additive Kategorie (kein Nullobjekt, vgl 2.5.3(b)).

**Satz 2.5.11.** Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie,  $A_1, A_2 \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$  Produkt von  $A_1 \times A_2$ ,  $i_1 : A_1 \rightarrow A_1 \times A_2$  sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch  $\text{id}_{A_1} : A_1 \rightarrow A_1, 0 : A_1 \rightarrow A_2$ . Analog sei  $i_2 : A_2 \rightarrow A_1 \times A_2$  sei via der Univesellen Eigenschaft gegeben durch  $0 : A_2 \rightarrow A_1, \text{id} : A_2 \rightarrow A_2$ . Dann ist  $(A_1 \times A_2, (i_1, i_2))$  ein Koprodukt von  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{A}$ .

*Beweis.* 1. Behauptung:  $\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow A_1 \times A_2$  stimmt mit  $\text{id}_{A_1 \times A_2}$  überein. Denn: Es ist

$$p_1 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\text{id}_{A_1}} \circ p_1 + \underbrace{p_1 \circ \iota_2}_{=0: A_2 \rightarrow A_1} \circ p_2 = p_1 = p_1 \circ \text{id}_{A_1 \times A_2}$$

Analog:

$$p_2 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = p_2 = p_2 \circ \text{id}_{A_1 \times A_2} \xrightarrow{UE} \iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 = \text{id}_{A_1 \times A_2}$$

2. Universelle Eigenschaft des Koprodukts: Sei  $B \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $f_1 : A_1 \rightarrow B$ ,  $f_2 : A_2 \rightarrow B$

Existenz: Wir setzen  $f := f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow B$ . Dann ist

$$f \circ \iota_1 = f_1 \circ \underbrace{p_1 \circ \iota_1}_{=\text{id}_{A_1}} + f_2 \circ \underbrace{p_2 \circ \iota_1}_{=0: A_1 \rightarrow A_2} = f_1.$$

Analog:  $f \circ \iota_2 = f_2$ .

Eindeutigkeit: Sei  $f' : A_1 \times A_2 \rightarrow B$  mit  $f' \circ \iota_1 = f_1$ ,  $f' \circ \iota_2 = f_2$ . Dann folgt

$$f' = f' \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = \underbrace{f' \circ \iota_1}_{=f_1} \circ p_1 + \underbrace{f' \circ \iota_2}_{=f_2} \circ p_2 = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 = f$$

**Folgerung 2.5.12.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Additive Kategorie. Dann existieren in  $\mathcal{A}$  endliche Koprodukte.

**Definition 2.5.13.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  additive Kategorien,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor.  $F$  heißt *additiv* “ $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  für alle  $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$  ist eine Abbildung:

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(FA, FA'), \quad f \mapsto F(f)$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

**Anmerkung.**  $F$  additiv  $\Rightarrow F(A \oplus A') = F(A) \oplus F(A')$  (Übungen)

**Bemerkung + Definition 2.5.14.** Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie,  $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $f : A \rightarrow A'$ . Ein *Kern*  $(B, \iota)$  von  $f$  ist ein Objekt  $B \in \text{Ob } \mathcal{A}$  zusammen mit einem Morphismus  $\iota : B \rightarrow A$ , sodass  $f \circ \iota = 0$  ist und für alle  $C \in \text{Ob } \mathcal{A}$  die Abbildung:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, B) \longrightarrow \{g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A) \mid f \circ g = 0\}, \quad h \mapsto \iota \circ h$$

bijektiv ist, das heißt für alle  $g : C \rightarrow A$  mit  $f \circ g = 0$  existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $h : C \rightarrow B$  mit  $g = \iota \circ h$ :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & A' \\ \uparrow h & \nearrow g & & & \\ C & & & & \end{array}$$

Ist  $(B', \iota')$  ein weiterer Kern von  $f$ , dann existiert ein eindeutig bestimmte Isomorphismus  $\alpha : B \rightarrow B'$  mit  $\iota = \iota' \circ \alpha$ :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & B' \\ & \searrow \iota & \swarrow \iota' \\ & A & \end{array}$$

Wir nennen  $(B, \iota)$  daher auch “den Kern“ von  $f$  und schreiben  $\ker f = (B, \iota)$  beziehungsweise kürzer:  $\ker f = B$  oder auch  $\ker f = \iota$

**Anmerkung.** Die Existenz von Kernen ist im Allgemeinen nicht gegeben

**Beispiel 2.5.15.** In  $R\text{-Mod}$  ist der kategorielle Kern gegeben durch die Inklusion des gewöhnlichen Kerns:

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \xhookrightarrow{\iota} & A \xrightarrow{f} A' \\ \uparrow h & \nearrow g & \\ C & & \end{array}$$

$f \circ g = 0 \Rightarrow \text{im } g \subseteq \ker f$  setze  $h := g|_{\ker f} : C \in \ker f$ , dann ist  $\iota \circ h = g$  und  $h$  ist eindeutig mit dieser Bedingung.

**Bemerkung 2.5.16.** Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie,  $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $f : A \rightarrow A'$ ,  $(\ker f, \iota)$  Kern von  $f$ . Dann ist  $\iota$  ein Monomorphismus.

*Beweis.* Seien  $h_1, h_2 : C \rightarrow \ker f$  mit  $\iota \circ h_1 = \iota \circ h_2 =: g \Rightarrow f \circ g = f \circ \iota \circ h_1 = 0$  Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $h : C \rightarrow \ker f$  mit  $g = \iota \circ h \Rightarrow h = h_1 = h_2$ . ■

**Bemerkung + Definition 2.5.17.** Dual zum Kern definiert man den Kokern (Notation:  $\text{coker } f$ ). Die Aussagen 2.5.14, 2.5.16 gelten dual.

**Definition 2.5.18.** Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie,  $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $f : A \rightarrow A'$

$\text{im } f := \ker(\text{coker } f)$  heißt das *Bild* von  $f$

$\text{coim } f := \text{coker}(\ker f)$  heißt das *Kobild* von  $f$ .

**Anmerkung.**  $\text{im } f$  kommt mit einem Monomorphismus  $\iota' : \text{im } f \rightarrow A'$ ,  $\text{coim } f$  mit einem Epimorphismus  $q' : A \rightarrow \text{coim } f$ .

**Beispiel 2.5.19.** Sein  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ ,  $f : A \rightarrow A'$   $R$ -Modulhomomorphismus. Dann ist

$$\text{im } f = \ker \left( A' / \text{im } f, \quad A' \rightarrow A' / \text{im } f \right) = (\text{im } f, \text{im } f \hookrightarrow A')$$

$$\text{coim } f = \text{coker}(\ker f, \ker f \rightarrow A) = \left( A / \ker f, \quad A \rightarrow A / \ker f \right)$$

**Bemerkung 2.5.20.** Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie,  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $f : A \rightarrow B$ , sodass  $\ker f, \text{coker } f, \text{im } f, \text{coim } f$  existieren  $(\text{im } f, \iota')$  Bild von  $f$ ,  $(\text{coim } f, q')$  Kobild von  $f$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $\bar{f} : \text{coim } f \rightarrow \text{im } f$  mit  $f = \iota' \circ \bar{f} \circ q'$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow q' & & \uparrow \iota' \\ \text{coim } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{im } f \end{array}$$

*Beweis.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker f & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{q} & \operatorname{coker} f \\
 & & \downarrow q' & & \uparrow \iota' & & \\
 & & \operatorname{coim} f = \operatorname{coker} \iota & \xrightarrow{\bar{f}} & \ker q = \operatorname{im} f & & 
 \end{array}$$

1. Existenz: Wegen  $f \circ \iota = 0$  existiert nach der Universellen Eigenschaft von  $\operatorname{coker}$  ein  $f' : \operatorname{coim} f \rightarrow B$  mit  $f = f' \circ q'$ . Es ist  $q \circ f = 0$ , also  $q \circ f' \circ q' = q \circ f = 0 = 0 \circ q'$ . Da  $q'$  ein Epimorphismus ist, folgt  $q \circ f' = 0$ . Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns, existiert ein  $\bar{f} : \operatorname{coim} f \rightarrow \operatorname{im} f$  mit  $\iota' \circ \bar{f} = f'$ , also  $\iota' \circ \bar{f} \circ q' = f' \circ q' = f$ .
2. Eindeutigkeit: Sei  $\tilde{f} : \operatorname{coim} f \rightarrow \operatorname{im} f$  mit  $\iota' \circ \tilde{f} \circ q' = f = \iota' \circ \bar{f} \circ q'$ , woraus, wegen  $\iota'$  Monomorphismus zunächst  $\tilde{f} \circ q' = \bar{f} \circ q'$  folgt und dann, wegen  $q'$  Epimorphismus,  $\tilde{f} = \bar{f}$ . ■

**Definition 2.5.21.** Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie.  $\mathcal{A}$  heißt *abelsche Kategorie*, wenn gilt:

- (Ab1) Jeder Morphismus in  $\mathcal{A}$  hat Kern und Kokern
- (Ab2) (*Homomorphiesatz*). Für jeden Morphismus  $f : A \rightarrow A'$  in  $\mathcal{A}$  ist der induzierte Morphismus

$$\bar{f} : \operatorname{coim} f \rightarrow \operatorname{im} f$$

ein Isomorphismus

**Beispiel 2.5.22.** a)  $R\text{-Mod}$  ist eine abelsche Kategorie

- b) Die Kategorie der freien  $\mathbb{Z}$ -Moduln ist additiv, aber nicht abelsch: (Ab1) ist nicht erfüllt.
- c) Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen ist eine additive Kategorie, die (Ab1) erfüllt, aber nicht (Ab2):  $\operatorname{id} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  (links mit der diskreten Topologie und rechts mit der Standardtopologie)  $\bar{\operatorname{id}} = \operatorname{id}$  ist kein Isomorphismus.

**Anmerkung.** Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie, dann ist auch  $\mathcal{A}^{\operatorname{op}}$  abelsche Kategorie (einziger nichttrivialer Punkt: Existenz endlicher Produkte, was jedoch aus 2.5.11 folgt).

**Satz 2.5.23.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $A, A' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ ,  $f : A \rightarrow A'$  Mono- und Epimorphismus. Dann ist  $\bar{f}$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* • Da  $f$  ein Monomorphismus ist, ist  $(0, 0 \rightarrow A)$  ein Kern von  $f$ , denn:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} A' \\ \uparrow \text{red dashed} & \nearrow g & \\ C & \xrightarrow{\text{red } 0} & \end{array} \quad f \circ g = 0 = f \circ 0 \xrightarrow{f \text{ Mono}} g = 0$$

- $\text{coim } f = \text{coker}(0 \rightarrow A) = (A, \text{id}_A)$ , denn

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{\text{id}_A} A \\ & & \searrow g \downarrow \text{red dashed } g \\ & & C \end{array}$$

Analog ist  $\text{im } f = (A', \text{id}_{A'})$ , also ist  $\bar{f} = f$  ein Isomorphismus nach (Ab2). ■

**Bemerkung 2.5.24.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $f : A \rightarrow A'$ . Dann gilt:

- a)  $f$  Monomorphismus  $\Leftrightarrow \ker f = 0$
- b)  $f$  Epimorphismus  $\Leftrightarrow \text{coker } f = 0$

*Beweis.* Übungsaufgabe. ■

**Definition 2.5.25.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $A, A', A'' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ .

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

heißt eine *exakte Folge*  $\Leftrightarrow \text{im } f \cong \ker g$  in dem Sinne, dass es einen Isomorphismus  $\text{im } f \xrightarrow{\alpha} \ker g$  gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \iota' \nearrow & & \nwarrow \iota \\ \text{im } f & \xrightarrow{\alpha} & \ker g \end{array}$$

kommutiert (wobei  $(\ker g, \iota)$  Kern von  $g$ ,  $(\text{im } f, \iota')$  Bild von  $f$ )

**Satz 2.5.26.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Dann gilt:

- a) In  $\mathcal{A}$  gilt das Fünferlemma
- b) In  $\mathcal{A}$  gilt das Schlangenlemma

- c) Eine Folge  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$  ist genau dann exakte, wenn für jedes Objekt  $N \in \text{Ob } \mathcal{A}$  die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakte ist.

- d) Eine Folge  $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$  in  $\mathcal{A}$  ist genau dann exakte, wenn für jedes  $M \in \text{Ob } \mathcal{A}$  die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

exakt ist.

*Beweis.* a) Stacks-Project: 12.5.17, b) 12.5.20

c), d) werden in 2.6 für  $R\text{-Mod}$  bewiesen. ■

**Definition 2.5.27.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor.  $F$  heißt

*exakt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $F$  überführt kurze exakte Folgen in  $\mathcal{A}$  in kurze exakte Folgen in  $\mathcal{B}$

*links-exakt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für jede exakte Folge  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$  in  $\mathcal{A}$  ist die Folge

$$0 \longrightarrow FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM''$$

exakt

*rechts-exakt*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für jede exakte Folge  $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$  ist die Folge

$$FM' \longrightarrow FM \longrightarrow FM'' \longrightarrow 0$$

exakt.

**Anmerkung.**  $F$  ist exakt  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $F$  ist links- und rechts-exakt  $\Leftrightarrow$  Für alle exakten Folgen  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$  in  $\mathcal{A}$  ist  $FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''$  exakt (Übung)

**Definition 2.5.28.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $I, P \in \text{Ob } \mathcal{A}$ .  $I$  heißt

*injektiv*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für jeden Monomorphismus  $\iota : A \hookrightarrow B$  und jeden Morphismus  $f : A \rightarrow I$  existiert ein Morphismus  $g : B \rightarrow I$  mit  $g \circ \iota = f$ , d.h.  $\iota_I^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I)$  ist surjektiv.

$$\begin{array}{ccc} A & \xhookrightarrow{\iota} & B \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ I & & \end{array}$$

$P$  heißt

*projektiv*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $P$  ist injektiv in  $\mathcal{A}^{\text{op}}$ , d.h. für jeden Epimorphismus  $p : B \twoheadrightarrow A$  und jeden Morphismus  $f : P \rightarrow A$  existiert ein Morphismus  $g : P \rightarrow B$  mit  $p \circ g = f$

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow g & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{p} & A \end{array}$$

**Bemerkung 2.5.29.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $I \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Dann sind äquivalent:

- i)  $I$  ist injektiv
- ii) Der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  ist exakt

*Beweis.* Nach 2.5.26 c) ist für alle exakten Folgen  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$  ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$$

exakt. Somit genügt es zu zeigen, dass  $I$  injektiv  $\Leftrightarrow$  Für alle exakten Folgen

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \quad \text{in } \mathcal{A} \text{ ist}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \xrightarrow{\iota_I^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in  $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ , d.h.  $\iota_I^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', I)$  ist surjektiv. Die Exaktheit von  $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A$  ist äquivalent dazu, dass  $\iota$  ein Monomorphismus ist. ■

**Bemerkung 2.5.30.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $P \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Dann sind äquivalent:

- i)  $P$  ist projektiv
- ii) Der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  ist exakt.

**Definition 2.5.31.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  (additive) Kategorien,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  (additive) Funktoren. Dann heißt  $F$  *linksadjungiert* zu  $G$  (und  $G$  *rechtsadjungiert* zu  $F$ )  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Mengen}$  (bzw.  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  im additiven Fall).  
Notation:  $F \dashv G$



**Beispiel 2.5.32.**  $F : \text{Mengen} \rightarrow K\text{-VR}$ ,  $M \mapsto K^{(M)}$ ,  $G : K\text{-VR} \rightarrow \text{Mengen}$  der Vergissfunktors. Es ist

$$\text{Mor}_{\text{Mengen}}(M, V) \xrightarrow[\text{Bij.}]{\sim} \text{Mor}_{K\text{-VR}}(K^{(M)}, V)$$

für alle Mengen  $M$  und  $K\text{-VR}$ , wobei die naheliegenden Diagramme kommutieren, d.h. wir haben eine natürliche Äquivalenz.

$$\text{Mor}_{\text{Mengen}}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}_{K\text{-VR}}(F-, -)$$

also  $F \dashv G$ .

**Satz 2.5.33.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  additive Funktoren mit  $F \dashv G$ . Dann gilt:

- a)  $F$  ist rechtsexakt
- b) Ist  $F$  exakt, dann überführt  $G$  injektive Objekte aus  $\mathcal{B}$  in injektive Objekte aus  $\mathcal{A}$ .
- c)  $G$  ist linksexakt
- d) Ist  $G$  exakt, dann überführt  $F$  projektive Objekte aus  $\mathcal{A}$  in projektive Objekte aus  $\mathcal{B}$ .

*Beweis.* a) Sei  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  eine exakte Folge in  $\mathcal{A}$ . Nach 2.5.26 c) ist

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', GB) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GB)$$

exakt für alle  $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$  und, da  $F \dashv G$  ist

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'', B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA', B)$$

exakt für alle  $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$ . Damit ist nach 2.5.26 c)

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0$$

exakt.

- b) Sei  $I \in \text{Ob } \mathcal{B}$  injektiv. Es ist zu zeigen, dass  $GI \in \text{Ob } \mathcal{A}$  injektiv ist, d.h. der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  ist exakt. Allerdings gilt  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, I)$  und letzterer ist exakt, da  $F$  exakt und  $I$  injektiv.

**Definition 2.5.34.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor.  $F$  heißt *volltreu*  
 $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ist die Abb  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB), f \mapsto F(f)$   
 bijektiv.

**Satz 2.5.35 (Einbettungssatz von Freyd-Mitchell).** *Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie (dh.  $\text{Ob } \mathcal{A}$  ist eine Menge) Dann existiert ein Ring  $R$  und ein volltreuer exakter Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-Mod}$*

**Anmerkung.** •  $F$  induziert eine Äquivalenz zwischen  $\mathcal{A}$  und einer vollen Unterkategorie von  $R\text{-Mod}$  ( das heißt  $\mathcal{C}$  ist eine Unterkategorie von  $R\text{-Mod}$  mit  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(A, B)$  für alle  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ )

• In  $\mathcal{A}$  berechnete Kerne und Kokerne entsprechen über diese Äquivalenz Kernen und Kokernen in  $R\text{-Mod}$ . ( Achtung: injektive/projektive Objekte korrespondieren im Allgemeinen nicht zu injektiven/projektiven  $R$ -Moduln)

## 2.6 Projektive und Injektive Moduln

**Satz 2.6.1.** Sei  $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$  eine Folge von  $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

- i)  $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$  ist exakt
- ii) Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist die Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N'')$$

ist exakt.

insbesondere ist der kovariante Funktor  $\operatorname{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  linksexakt

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Sei  $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$  exakt.

1. Injektivität von  $f_*^M$  : Sei  $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N')$  mit  $f_*^M(\varphi) = 0 \Rightarrow f \circ \varphi = 0$   
Wegen  $f$  injektiv, folgt  $\varphi = 0$ , also  $\ker f_*^M = 0$
2.  $\operatorname{im} f_*^M = \ker g_*^M$ ,  
"  $\subseteq$  " Es ist  $g_*^M \circ f_*^M = (g \circ f)_*^M = 0_*^M = 0$ , also  $\operatorname{im} f_*^M \subseteq \ker g_*^M$ ,  
"  $\supseteq$  " Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  mit  $\varphi \in \ker g_*^M \Rightarrow g \circ \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{im} \varphi \subseteq \ker g = \operatorname{im} f$ . Setze  $\varphi' : M \rightarrow \operatorname{im} f \rightarrow N'$  mit  $\varphi' \in \operatorname{Hom}_R(M, N')$  mit  $f \circ \varphi' = \varphi \Rightarrow \varphi \in \operatorname{im} f_*^M$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{f_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{g_*^M} \operatorname{Hom}_R(M, N'') \longrightarrow 0$  exakt für alle  $R$ -Moduln  $M$ .

1.  $f$  injektiv: Setze  $M := \ker f$ ,  $\iota : \ker f \rightarrow N'$  Inklusion. Dann ist  $f_*^M(\iota) = f \circ \iota = 0$ . Und, da  $f_*^M$  injektiv, ist  $\iota = 0 \Rightarrow \ker f = 0$
2.  $\operatorname{im} f = \ker g$  :  
"  $\subseteq$  " Setze  $M := N' \Rightarrow 0 = 0_*^M(\operatorname{id}_{N'}) = (g_*^M \circ f_*^M)(\operatorname{id}_{N'}) = ((g \circ f)_*^M)(\operatorname{id}_{N'}) = g \circ f \circ \operatorname{id}_{N'} = g \circ f$   
"  $\supseteq$  " Setze  $M := \ker g$ ,  $\iota : \ker g \rightarrow N \Rightarrow g_*^M(\iota) = g \circ \iota = 0 \Rightarrow \iota \in \operatorname{im} f_*^M$  Dann existiert ein  $\varphi : \ker g \rightarrow N'$  mit  $f \circ \varphi = \iota$ . Somit:  $x \in \ker g \Rightarrow x = \iota(x) = f(\varphi(x)) \in \operatorname{im} f$ . ■

**Anmerkung.** Der kovariante Funktor  $\operatorname{Hom}_R(M, -)$  ist im Allgemeinen nicht exakt.

**Beispiel 2.6.2.** Sei  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von  $\mathbb{Z}$ -Moduln mit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x, \pi$  kanonische Projektion. Die Abbildung  $\pi_*^M : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ist nicht surjektiv, denn: Für  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  gilt:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(1 + 1) = \varphi(2 \cdot 1) = 2\varphi(1)$$

, also  $\varphi(1) = 0$ , das heißt  $\varphi = 0$ . Insbesondere ist  $\pi_*^M(\varphi) = \pi_*^M(0) = 0 \neq \text{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ .

Mit anderen Worten  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist kein projektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul.

**Satz 2.6.3.** Sei  $P$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:

- i)  $P$  ist ein projektiver  $R$ -Modul
- ii)  $\text{Hom}_R(P, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  ist exakt.
- iii) Für jeden Epimorphismus  $\pi : M \rightarrow N$  von  $R$ -Moduln und jeden Hom  $\varphi : P \rightarrow N$  existiert ein Homomorphismus  $\psi : P \rightarrow M$  mit  $\pi \circ \psi = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \psi \swarrow & & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{\pi} & N \end{array}$$

- iv) Jede kurze exakte Sequenz  $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$  von  $R$ -Moduln spaltet.
- v) Es gibt einen  $R$ -Modul  $P'$ , sodass  $P \oplus P'$  ein freier  $R$ -Modul ist (das heißt  $P$  ist direkter Summand eines freien  $R$ -Moduls)

*Beweis.* (i)  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  (ii)  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  (iii) folgt aus Definition 5.30.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Sei  $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Nach (iii) existiert zu dem Epimorphismus  $g : M \rightarrow P$  und dem Homomorphismus  $\text{id}_P : P \rightarrow P$  ein Homomorphismus  $\psi : P \rightarrow M$  mit  $g \circ \psi = \text{id}_P$ , das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & P \longrightarrow 0 \\ & & & & & \nwarrow \psi & \uparrow \text{id} \\ & & & & & & P \end{array}$$

(iv)  $\Rightarrow$  (v) Es existiert ein freier  $R$ -Modul  $F$  und ein Epimorphismus  $f : F \rightarrow P$ . Wir erhalten eine exakte Sequenz  $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$ , diese spaltet nach (iv), das heißt  $F \simeq P \oplus \ker f$

(v)  $\Rightarrow$  (iii) Sei  $\pi : M \rightarrow N$  ein Epimorphismus von  $R$ -Moduln,  $\varphi : P \rightarrow N$  ein Homomorphismus. Wegen (v) existiert ein  $R$ -Modul  $P'$  sodass  $F := P \oplus P'$  frei ist, Setze

$$\varphi' : F \rightarrow N, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x)$$

Sei  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $F$ , wähle für  $i \in I$  jeweils ein  $z_i \in \pi^{-1}(\varphi'(b_i))$ . Durch  $\psi' : F \rightarrow M, b_i \mapsto z_i$  wird ein Homomorphismus definiert mit  $\pi \circ \psi' = \varphi'$ . Setze

$$\psi : P \rightarrow M, \quad x \mapsto \psi'((x, 0))$$

dann gilt für  $x \in P : \pi(\psi(x)) = \pi(\psi'((x, 0))) = \varphi'((x, 0)) = \varphi(x)$  das heißt  $\pi \circ \psi = \varphi$ . ■

**Folgerung 2.6.4.** a) Jeder freie  $R$ -Modul ist ein projektiver  $R$ -Modul

b) Jeder  $R$ -Modul ist ein Faktormodul eines projektiven  $R$ -Moduls.

*Beweis.* a) klar nach 2.6.3.

b) da jeder  $R$ -Modul Faktormodul eines freien  $R$ -Moduls ist. ■

**Satz 2.6.5.** Sei  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  eine Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann sind äquivalent:

i)  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  ist exakt.

ii) Für jeden  $R$ -Modul  $N$  ist die Sequenz abelscher Gruppen:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{g_N^*} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f_N^*} \operatorname{Hom}_R(M', N) \text{ exakt.}$$

Insbesondere ist der kontravariante Funktor:  $\operatorname{Hom}_R(-, N) : R\text{-Mod}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  linksexakt.

*Beweis.* Übungsaufgabe. ■

**Anmerkung.** Der kontravariante Funktor  $\operatorname{Hom}_R(-, N)$  ist im Allgemeinen nicht exakt.

**Beispiel 2.6.6.** Sei  $R = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}$ . Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von  $\mathbb{Z}$ -Moduln mit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$  und  $\pi$  der kanonischen Projektion. Die Abbildung  $f_{\mathbb{Z}}^* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  ist nicht surjektiv, denn für alle  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  ist

$$(f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi))(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = 2\varphi(x) \in 2\mathbb{Z}$$

insbesondere ist  $f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi) \neq \text{id}_{\mathbb{Z}}$ . Mit anderen Worten:  $\mathbb{Z}$  ist kein injektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul.

**Satz 2.6.7.** Sei  $Q$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:

- i)  $Q$  ist ein injektiver  $R$ -Modul
- ii)  $\text{Hom}_R(-, Q) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  ist exakt.
- iii) Für jeden Monomorphismus  $\iota : L \rightarrow M$  von  $R$ -Moduln und jedem Homomorphismus  $\varphi : L \rightarrow Q$  existiert ein Homomorphismus  $\psi : M \rightarrow Q$  von  $R$ -Moduln mit  $\psi \circ \iota = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\iota} & M \\ \downarrow & \swarrow \psi & \\ Q' & & \end{array}$$

- iv) Jede kurze exakte Sequenz  $0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$  von  $R$ -Moduln spaltet.

*Beweis.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) folgt aus 2.5.29

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Sei  $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Nach (iii) existiert zum Monomorphismus  $f : L \rightarrow M$  von  $R$ -Moduln und zum Homomorphismus  $\text{id}_L : L \rightarrow L$  ein Homomorphismus  $\psi : M \rightarrow L$  mit  $\psi \circ f = \text{id}_L$ . das heißt die Sequenz spaltet.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_Q & \swarrow \psi & & & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) Sei  $\iota : L \rightarrow M$  ein Monomorphismus,  $\varphi : L \rightarrow Q$  ein Homomorphismus von  $R$ -Moduln. Setze

$$S := \{(\varphi(x), -\iota(x)) \mid x \in L\} \subseteq Q \oplus M \quad M' := (Q \oplus M)/S, \quad N := M/\text{im } \iota$$

$\pi : M \rightarrow N$  kanonische Projektion.

1. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & y & \longmapsto & \overline{(y, 0)} & & \\ & & & & \overline{(y, z)} & \longmapsto & \pi(z) \end{array}$$

von  $R$ -Moduln. denn:

- $g$  ist wohldefiniert, denn:  $\pi \circ \iota = 0$
- $f$  ist injektiv, denn  $(y, 0) = (0, 0) \Rightarrow$  Es existiert ein  $x \in L$  mit  $y = \varphi(x), 0 = -\iota(x)$ . Wegen  $\iota$  injektiv, folgt  $x = 0 \Rightarrow y = \varphi(0) = 0$
- $g$  surjektiv, klar
- $\text{im } f = \ker g$  :  
 “ $\subseteq$ “ klar, wegen  $g \circ f = 0$   
 “ $\supseteq$ “ Sei  $(y, z) \in \ker g \Rightarrow \pi(z) = 0 \Rightarrow z \in \text{im } \iota$ , das heißt es existiert ein  $x \in L$  mit  $z = \iota(x) = -\iota(-x)$  Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{(y, z)} &= \overline{(y, -\iota(-x))} = \overline{(y + \varphi(x), 0)} + \overline{(\varphi(-x), -\iota(-x))} \\ &= \overline{(y + \varphi(x), 0)} = f(y + \varphi(x)) \in \text{im } f. \end{aligned}$$

2. Wegen (iv) spaltet die Sequenz, das heißt es existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $h : M' \rightarrow Q$  mit  $h \circ f = \text{id}_Q$ . Setze

$$\psi : M \rightarrow Q, z \mapsto h((0, z))$$

$\psi$  ist ein  $R$ -Modulhomomorphismus. Für  $x \in L$  ist

$$\begin{aligned} (\psi \circ \iota)(x) &= h((0, \iota(x))) = h((0, \iota(x))) + h(\varphi(x), -\iota(x)) \\ &= h((\varphi(x), 0)) = h(f(\varphi(x))) = \varphi(x) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Also ist  $\psi \circ \iota = \varphi$

**Beispiel 2.6.8.** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann ist  $V$  ein injektiver  $K$ -Modul, denn für jede exakte Folge  $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$  von  $K$ -Moduln, ist  $N$  ein freier  $K$ -Modul, d.h. die Folge spaltet.

**Satz 2.6.9 (Baer-Kriterium).** Sei  $Q$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:

i)  $Q$  ist ein injektiver  $R$ -Modul

- ii) Für jedes Linksideal  $I \subseteq R$  und jede  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : I \rightarrow Q$  existiert eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi : R \rightarrow Q$  mit  $\psi|_I = \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ Q & & \end{array}$$

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Betrachte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\iota} & R \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ Q & & \end{array}$$

Da  $Q$  injektiv, existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $\psi : R \rightarrow Q$  mit  $\varphi = \psi \circ \iota = \psi$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $\iota : L \rightarrow M$  ein Monomorphismus von  $R$ -Moduln,  $\varphi : L \rightarrow Q$ .

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\iota} & M \\ \varphi \downarrow & \swarrow ? & \\ Q & & \end{array}$$

Ohne Einschränkung sei  $L \subseteq M$  ein Untermodul,  $\iota$  Inklusionsabbildung.

- Setze  $\mathcal{X} := \{(L', \varphi') \mid L' \subseteq M \text{ Untermodul mit } L \subseteq L', \varphi' : L' \rightarrow Q \text{ } R\text{-linear mit } \varphi'|_L = \varphi\}$ . Dann ist  $\mathcal{X} \neq \emptyset$ , denn:  $(L, \varphi) \in \mathcal{X}$ . Auf  $\mathcal{X}$  ist die Halbordnung " $\leq$ " durch

$$(L', \varphi') \leq (L'', \varphi'') \Leftrightarrow L' \subseteq L'', \varphi'|_{L'} = \varphi''|_{L'}$$

erklärt.  $\mathcal{X}$  ist induktiv geordnet bzgl. " $\leq$ ", denn: Sei  $(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$  eine totalgeordnete Familie von Elementen aus  $\mathcal{X}$ . Setze  $L' := \bigcup_{i \in I} L_i$ .  $L'$  ist Untermodul von  $M$  (beachte:  $a, b \in L' \Rightarrow$  Es existieren  $i, j$  mit  $a \in L_i, b \in L_j$ , ohne Einschränkung:  $L_i \subseteq L_j \Rightarrow a + b \in L_j \subseteq L'$ ) und es ist  $L \subseteq L'$ . Außerdem kann die  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi' : L' \rightarrow Q$  mit  $\varphi'|_{L_i} := \varphi_i$  für alle  $i \in I$  definieren. (wohldefiniert, denn: Für  $i, j \in I$ , ohne Einschränkung:  $(L_i, \varphi_i) \subseteq (L_j, \varphi_j)$  ist  $\varphi_j|_{L_i} = \varphi_i \Rightarrow (L', \varphi')$  ist obere Schranke für die Familie  $(L_i, \varphi_i)_{i \in I}$ . Mit dem Zornschen Lemma folgt, dass ein maximales Element  $(L', \varphi')$  in  $\mathcal{X}$  existiert.

- Behauptung:  $L' = M$ , denn:

Sei  $x \in M$ . Setze  $I := \{a \in R \mid ax \in L'\} \subseteq R \cdot I$  ist Linksideal in  $R$ , und die Abbildung  $f : I \rightarrow Q, a \mapsto \varphi'(ax)$  ist  $R$ -linear. Mit (ii) folgt, dass eine  $R$ -lineare Abbildung  $g : R \rightarrow Q$  mit  $g|_I = f$ . Setze:

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ Q & & \end{array}$$

$$\psi' : L' \oplus R \rightarrow Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$



und

$$\pi : L' \oplus R \rightarrow M, \quad (y, a) \mapsto y + ax$$

welche beide  $r$ -Modulhomomorphismen sind. Es ist  $\psi'(\ker \pi) = 0$ , denn für  $(y, a) \in \ker \pi$  ist  $y + ax = 0$ , also  $ax = -y \in L'$ , das heißt  $a \in I$ , also  $g(a) = f(a) = \varphi'(ax) = \varphi'(-y) = -\varphi'(y)$  und somit  $\psi'(y, a) = \varphi'(y) + g(a) = 0 \Rightarrow \psi'$  induziert  $R$ -Modulhomomorphismus

$$L' \oplus R /_{\ker \pi} \rightarrow Q, \quad (y, a) \mapsto \varphi'(y) + g(a)$$

Außerdem ist

$$L' + Rx = \operatorname{im} \pi \simeq L' \oplus R /_{\ker \pi} \quad \text{via} \quad y + ax \mapsto (y, a)$$

Wir erhalten den Homomorphismus

$$\psi : L' + Rx \rightarrow Q \quad \text{mit} \quad \psi(y + ax) = \varphi'(y) + g(a)$$

für alle  $a \in R, y \in L'$ , das heißt  $\psi|_{L'} = \varphi' \Rightarrow (L', \varphi') \leq (L' + Rx, \psi)$  Wegen  $(L', \varphi')$  maximal folgt dass  $L' = L' + Rx \Rightarrow x \in L'$ . Somit  $M \subseteq L' \subseteq M$ , also  $M = L'$ . ■

**Definition 2.6.10.** Sei  $A$  ein Integritätsbereich (kommutativer nullteilerfreier Ring),  $M$  ein  $A$ -Modul.  $M$  heißt *teilbar*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $a \in A \setminus \{0\}$  ist  $aM = M$ .  $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in M, a \in A \setminus \{0\}$  existiert ein  $y \in M$  mit  $x = ay$ .

**Bemerkung 2.6.11.** Sei  $A$  ein Integritätsbereich,  $M$  ein injektiver  $A$ -Modul. Dann ist  $M$  teilbar.

*Beweis.* Sei  $x \in M, a \in A \setminus \{0\}$ . Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : Aa \rightarrow M, \quad ra \mapsto rx$$

$\varphi$  ist wohldefiniert, denn:  $r_1a = r_2a \Rightarrow (r_1 - r_2)a = 0$  Da  $A$  nullteilerfrei ist folgt  $r_1 = r_2$ .  $\varphi$  ist  $A$ -linear, so folgt mit Satz 2.6.9, dass eine  $A$ -lineare Abbildung  $\psi : A \rightarrow M$  mit  $\psi|_{Aa} = \varphi$ . Setze  $y := \psi(1)$ , dann ist  $x = \varphi(a) = \psi(a) = \psi(a1) = a\psi(1) = ay$ . ■

**Bemerkung 2.6.12.** Sei  $A$  ein Hauptidealring,  $M$  ein  $A$ -Modul. Dann sind äquivalent:

- i)  $M$  injektiv
- ii)  $M$  teilbar

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) aus 2.6.11

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $I \subseteq A$  ein Ideal,  $\varphi : I \rightarrow M$   $A$ -linear. Falls  $I = 0$ , dann wird  $\varphi$  durch die Nullabbildung nach  $A$  fortgesetzt. Im Folgendem sein  $I \neq 0$ . Da  $A$  ein Hauptidealring ist, existieren  $a \in A, a \neq 0$  mit  $I = Aa$ . Setze  $x := \varphi(a) \Rightarrow \varphi(ra) = r\varphi(a) = rx$  für alle  $r \in A$ . Wegen (ii) existiert ein  $y \in M$  mit  $x = ay$ . Setze

$$\psi : A \rightarrow M, \quad r \mapsto ry$$

Dann ist  $\psi$   $A$ -linear und  $\psi(ra) = ray = rx = \varphi(ra)$  für alle  $r \in A$  das heißt  $\psi|_{Aa} = \varphi$ . Dann folgt aus 6.9  $M$  ist injektiv. ■

**Beispiel 2.6.13.** a) Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -VR  $\Rightarrow V$  ist teilbarer  $K$ -Modul, also injektiver  $K$ -Modul. Ist  $\text{char } K = 0$  dann ist  $V$  teilbarer  $\mathbb{Z}$ -Modul, also injektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul.

b) Faktormoduln teilbarer  $\mathbb{Z}$ -Moduln sind teilbar, somit sind Faktormoduln injektiver  $\mathbb{Z}$ -Moduln wieder injektive  $\mathbb{Z}$ -Moduln.

c) Nach (a) sind  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  injektive  $\mathbb{Z}$ -Moduln, nach (b) also auch  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

**Ziel** injektive  $R$ -Moduln sind direkte Faktoren von kofreien  $R$ -Moduln

**Anmerkung.**  $M$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Dann ist  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$  via  $(a\varphi)(r) = \varphi(ra)$  ein  $R$ -Modul. (beachte:  $b(a\varphi)(r) = (a\varphi)(rb) = \varphi(rba) = ((ba)\varphi)(r)$ )

**Bemerkung 2.6.14.** Sei  $M$  ein injektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul. Dann ist  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$  ein injektiver  $R$ -Modul. Insbesondere ist  $R^v := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  ein injektiver  $R$ -Modul.

*Beweis.* Sei  $I \subseteq R$  ein Linksideal,  $\varphi : I \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$   $R$ -linear. Nach 2.6.9, genügt es zu zeigen:  $\varphi$  lässt sich auf  $R$  fortsetzen. Setze

$$f : I \rightarrow M, \quad a \mapsto \varphi(a)(1)$$

Dann ist  $f$  ist  $\mathbb{Z}$ -linear und für  $r \in R, a \in I$  gilt:  $f(ra) = \varphi(ra)(1) = (r\varphi(a))(1) = \varphi(a)(1r) = \varphi(a)(r)$ . Da  $M$  ein injektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul, existiert eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $g : R \rightarrow M$  mit  $g|_I = f$ . Wir setzen  $\psi : R \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M), a \mapsto ag$ .  $\psi$  ist  $R$ -linear, und für  $a \in I, r \in R$  ist  $\psi(a)(r) = (ag)(r) = g(ra) = f(ra) = \varphi(a)(r)$ , das heißt  $\psi|_I = \varphi$ . ■

**Definition 2.6.15.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul.  $M$  heißt *kofrei*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Es existiert eine Menge  $I$  mit  $M \simeq (R^v)^I = \prod_{i \in I} R^v$ .

**Bemerkung 2.6.16.** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln. Dann gilt:

- a)  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  ist ein projektiver  $R$ -Modul  $\Leftrightarrow M_i$  projektive  $R$ -Moduln für alle  $i \in I$ .
- b)  $\prod_{i \in I} M_i$  ist ein injektiver  $R$ -Modul  $\Leftrightarrow M_i$  ist injektiver  $R$ -Modul für alle  $i \in I$ .

*Beweis.* Übungsaufgaben. ■

**Satz 2.6.17.** Sei  $M$  ein kofreier  $R$ -Modul. dann ist  $M$  ein injektiver  $R$ -Modul.

*Beweis.* folgt direkt aus 2.6.16 und 2.6.14 ■

**Bemerkung 2.6.18.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $m \in M, m \neq 0$ . Dann existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $\varphi : M \rightarrow R^v$  mit  $\varphi(m) \neq 0$ .

*Beweis.* 1. Die Abbildung

$$\theta : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R^v), \psi \mapsto (m \mapsto \varphi_m : R \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, r \mapsto \psi(rm))$$

ist ein Homomorphismus von  $\mathbb{Z}$ -Moduln (tatsächlich sogar ein Isomorphismus).

- 2. Ist  $\psi : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modulhomomorphismus mit  $\psi(m) \neq 0$  dann ist  $\theta(\psi)(m) = \varphi_m \neq 0$  wegen  $\varphi_m(1) = \psi(m) \neq 0$ , das heißt:  $\theta(\psi) : M \rightarrow R^v$  ist ein  $R$ -Modulhomomorphismus mit  $\theta(\psi)(m) \neq 0$
- 3. Nach 2 genügt es zu zeigen: Es existiert ein  $\mathbb{Z}$ -Modulhomomorphismus  $\psi : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  mit  $\psi(m) \neq 0$ . Setze  $N := \langle m \rangle_{\mathbb{Z}}$ .  
1. Fall:  $N \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Setze

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : N &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dann ist  $\tilde{\psi}(m) \neq 0$  und, da  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  injektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul ist, setzt sich  $\tilde{\psi}$  auf  $M$  fort.

2. Fall:  $N \cong \mathbb{Z}$ . Setze dann

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : N &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dann ist  $\tilde{\psi}(m) \neq 0$ , also weiter wie in Fall 1. ■

**Satz 2.6.19.** *Jeder  $R$ -Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven,  $R$ -Moduls.*

*Beweis.* Sei  $0 \neq M$  ein  $R$ -Modul. Nach 6.18 existiert zu jedem  $m \in M$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $\varphi_m : M \rightarrow R^v$  mit  $\varphi_m(m) \neq 0$ . Wir setzen

$$f : M \longrightarrow \prod_{m \in M \setminus \{0\}} R^v, \quad x \mapsto ((\varphi_m(x))_{m \in M \setminus \{0\}})$$

Dann gilt

- $f$  ist ein  $R$ -Modulhomomorphismus
- $f$  ist injektiv, denn: Sei  $x \in M$  mit  $f(x) = 0$ . Dann ist  $\varphi_m(x) = 0$  für alle  $m \in M \setminus \{0\}$ . Wäre  $x \neq 0$ , dann wäre  $\varphi_x(x) = 0$ , Widerspruch! ■

**Folgerung 2.6.20.** *Sei  $Q$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:*

- $Q$  ist injektiv
- Es gibt einen  $R$ -Modul  $Q'$ , sodass  $Q \times Q'$  ein kofreier  $R$ -Modul ist (d.h.  $Q$  ist direkter Faktor eines kofreien  $R$ -Moduls)

*Beweis.*  $i) \Rightarrow ii)$  Nach 2.6.19 existiert ein kofreier  $R$ -Modul  $N$ , sodass  $Q$  Untermodul von  $N$  ist. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow N/Q \longrightarrow 0$$

spaltet nach 2.6.7, da  $Q$  injektiv ist, d.h.  $N \cong Q \oplus N/Q = Q \times N/Q$

$ii) \Rightarrow i)$  Ist  $Q \times Q'$  kofrei, dann ist nach 6.17  $Q \times Q'$  injektiv und nach 6.16  $Q$  injektiv. ■

## 2.7 Komplexe

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{A}$  stets eine abelsche Kategorie

**Definition 2.7.1.** Ein *Komplex*  $A^\bullet$  in  $\mathcal{A}$  ist eine Familie  $(A^i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Objekten  $A^i \in \text{Ob } \mathcal{A}$  und Morphismen  $d_i : A^i \rightarrow A^{i+1}$  (*Differentiale*)

$$\dots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \longrightarrow \dots$$

sodass  $d_i \circ d_{i-1} = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$  gilt. Ein *Komplexhomomorphismus*  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  in einem Komplex  $B^\bullet$  in  $\mathcal{A}$  ist eine Familie  $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Homomorphismen  $f_i : A^i \rightarrow B^i$ , sodass für alle  $i \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots \\ & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} \\ \dots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & B^i & \xrightarrow{d_i} & B^{i+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

kommutiert.

**Anmerkung.** Komplexe in  $\mathcal{A}$  zusammen mit Komplexhomomorphismen bilden eine abelsche Kategorie (Kerne, Kokerne, endliche Produkte separat an jeder Stelle bilden).

**Bemerkung 2.7.2.** Sei  $A^\bullet$  ein Komplex in  $\mathcal{A}$ . Dann induzieren die Differentiale in natürlicher Weise Monomorphismen  $\text{im } d_{i-1} \longrightarrow \ker d_i$  für  $i \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} \\ q_{i-1} \downarrow & & k_{i-1} \uparrow & \swarrow j_i & \\ \text{coim } d_{i-1} & \xrightarrow{\bar{d}_{i-1}} & \text{im } d_{i-1} & \xrightarrow{l_i} & \ker d_i \end{array}$$

(Es ist  $k_{i-1}$  ein Mono-,  $q_{i-1}$  ein Epi- und der durch den Homomorphiesatz induzierte Pfeil  $\bar{d}_{i-1}$  ein Isomorphismus). Damit ist  $0 = d_i \circ d_{i-1} = d_i \circ k_{i-1} \circ \bar{d}_{i-1} \circ q_{i-1}$  und, da  $q_{i-1}$  Epi,  $d_{i-1}$  Iso, folgt  $d_i \circ k_{i-1} = 0$ . Nach der Universellen Eigenschaft des Kerns existiert ein  $l_i : \text{im } d_{i-1} \rightarrow \ker d_i$  mit  $k_{i-1} = j_i \circ l_i$ . Nun ist  $l_i$  ein Monomorphismus, da  $k_{i-1} = j_i \circ l_i$  Monomorphismus. ■

**Definition 2.7.3.** Sei  $A^\bullet$  ein Komplex in  $\mathcal{A}$ .

$$\mathcal{Z}^i(A^\bullet) := \ker d_i \quad (i\text{-Kozykel})$$

$$\mathcal{B}^i(A^\bullet) := \operatorname{im} d_{i-1} \quad (i\text{-Koränder})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^i(A^\bullet) &:= \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \rightarrow \ker d_i) \\ &= \operatorname{coker}(\mathcal{B}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{Z}^i(A^\bullet)) \end{aligned} \quad (i\text{-te Kohomologie})$$

**Anmerkung.** Ein Komplexhomomorphismus  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  induziert Homomorphismen

$$\mathcal{Z}^i(f) : \mathcal{Z}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{Z}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{B}^i(f) : \mathcal{B}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{B}^i(B^\bullet), \quad \mathcal{H}^i(f) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet)$$

**Satz 2.7.4 (Lange exakte Kohomologiefolge).** Sei

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Komplexen in  $\mathcal{A}$  (d.h. die Morphismen sind Komplexhomomorphismen und für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  ist

$$0 \longrightarrow A^i \longrightarrow B^i \longrightarrow C^i \longrightarrow 0$$

exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet) \rightarrow \dots$$

*Beweis (Beweisskizze).* 1.  $M^\bullet$  ein Komplex in  $\mathcal{A}$ . Setze

$$Q^i(M^\bullet) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} d_{i-1} \rightarrow M^i) \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

Dann induzieren die Differentiale natürliche Morphismen

$$\bar{d}_i : Q^i(M^\bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^{i+1}(M^\bullet)$$

mit  $\ker \bar{d}_i = \mathcal{H}^i(M^\bullet)$  und  $\operatorname{coker}(\bar{d}_i) = \mathcal{H}^{i+1}(M^\bullet)$

2. Wir erhalten für  $i \in \mathbb{Z}$  ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} Q^i(A^\bullet) & \longrightarrow & Q^i(B^\bullet) & \longrightarrow & Q^i(C^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \bar{d}_i & & \downarrow \bar{d}_i & & \downarrow \bar{d}_i & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{i+1}(A^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{i+1}(B^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{i+1}(C^\bullet) \end{array}$$

3. Das Schlangenlemma liefert nach 1. für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  eine exakte Folge

$$\mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(C^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet)$$

Diese setzen sich zu einer langen exakten Folge aus der Behauptung zusammen.

■

**Definition 2.7.5.** Sei  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Eine *injektive Auflöser* von  $A$  ist ein Komplex

$$I^\bullet : I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

bestehend aus injektiven Objekten  $I^i$  aus  $\mathcal{A}$  mit  $I^i = 0$  für  $i < 0$  zusammen mit einem Morphismus  $\varepsilon : A \rightarrow I^0$ , so dass der *augmentierte Komplex*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist (Notation:  $A \rightarrow I^\bullet$  injektive Auflöser von  $A$ ).

Eine *projektive Auflöser* von  $A$  ist eine injektive Auflöser von  $A$  in  $\mathcal{A}^{\text{op}}$ , d.h. ein Komplex

$$P^\bullet : \dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0$$

aus projektiven Objekten  $P^i$  aus  $\mathcal{A}$  mit  $P^i = 0$  für  $i > 0$  zusammen mit einem Morphismus  $\varepsilon : P^0 \rightarrow A$ , sodass der augmentierte Komplex

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

exakt ist (Notation:  $P^\bullet \rightarrow A$  projektive Auflöser).

**Anmerkung.** Man schreibt in obiger Situation auch  $P_i = P^{-i}$  und  $\mathcal{H}_i(-) = \mathcal{H}^{-i}(-)$ .

**Definition 2.7.6.**  $\mathcal{A}$  hat

*genügend viele Injektive*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für jedes  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$  existiert ein injektives Objekt  $I \in \text{Ob } \mathcal{A}$  und ein Monomorphismus  $\iota : A \rightarrow I$ .

*genügend viele Projektive*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$   $\mathcal{A}^{\text{op}}$  hat genügend viele Injektive

**Beispiel 2.7.7.**  $R\text{-Mod}$  hat nach 6.19 genügend viele Injektive und nach 6.4 genügend viele Projektive.

**Bemerkung 2.7.8.** Sei  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Dann gilt:

a) Hat  $\mathcal{A}$  genügend viele Injektive, dann hat  $A$  eine injektive Auflöser

b) Hat  $\mathcal{A}$  genügend viele Projektive, dann hat  $A$  eine projektive Auflösung

*Beweis.* Es genüge a) zu zeigen, b) folgt dual.

1. Die Situation ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{d_0} & I^1 & \xrightarrow{d_1} & I^2 \\
 & & & & \searrow \pi_0 & & \swarrow \iota_0 & & \searrow \pi_1 & & \swarrow \iota_1 \\
 & & & & & & M^0 & & & & M^1
 \end{array}$$

Nach Voraussetzung existiert ein injektives Objekt  $I^0 \in \text{Ob } \mathcal{A}$  und ein Monomorphismus  $\varepsilon : A \rightarrow I^0$ . Sei  $\text{coker } \varepsilon = (M^0, \pi_0)$ . Es existiert ein injektives Objekt  $I^1$  und ein Monomorphismus  $\iota_0 : M^0 \hookrightarrow I^1$ . Iteriere dieses Verfahren:  $\text{coker}(d_0) = (M^1, \pi_1)$ , es existiert ein injektives Objekt  $I^2$  und ein Monomorphismus  $\iota_1 : M^1 \hookrightarrow I^2$ , setze  $d_1 := \iota_1 \circ \pi_1$ .

2. Exaktheit: bei  $I^0$  gilt:

$$\text{im } \varepsilon = \ker(\text{coker } \varepsilon) = \ker \pi_0 \stackrel{\iota_0}{\underset{\text{Mono}}{=}} \ker(\iota_0 \circ \pi_0) = \ker d_0$$

analog bei den anderen Stellen ■

**Satz 2.7.9 (Hufeisenlemma).**  $\mathcal{A}$  habe genügend viele Injektive. Gegeben sei ein Diagramm (Schwarz)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & I''^0 & \longrightarrow & I''^1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

in  $\mathcal{A}$ , wobei die linke Spalte exakt sei,  $A' \rightarrow I'^{\bullet}$  eine injektive Auflösung von  $A'$ ,  $A'' \rightarrow I''^{\bullet}$  eine injektive Auflösung von  $A''$ . Dann lässt sich das Diagramm so zu einem kommutativen Diagramm ergänzen (rot), dass  $A \rightarrow I^{\bullet}$  eine injektive Auflösung von  $A$  ist und die Spalten alle exakt sind.



*Beweis.* in den Standardwerken über homologische Algebra (zumindest für  $R\text{-Mod}$ ). Für den Beweis einer Verallgemeinerung in Kontext abelsche Kategorien siehe Stacks-Project 013P. ■

**Frage:** in welchem Verhältnis stehen zwei injektive Auflösungen eines Objekts?

**Definition 2.7.10.** Seien  $A^\bullet, B^\bullet$  Komplexe in  $\mathcal{A}$ ,  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  Komplexhomomorphismen.  $f, g$  heißen *homotop*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  es existieren Homomorphismen  $s^i : A^{i+1} \rightarrow B^i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$  mit

$$f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s^i \circ d_i$$

(Notation:  $f \sim g$ )

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1} & \longrightarrow & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & B^i & \longrightarrow & B^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

(Red arrows in the original image represent  $s^{i-1} : A^i \rightarrow B^{i-1}$  and  $s^i : A^{i+1} \rightarrow B^i$ .)

**Anmerkung.** • Homotopie von Komplexhomomorphismen ist eine Äquivalenzrelation.

- Sind  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  Komplexhomomorphismen mit  $f \sim g$  und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor von  $\mathcal{A}$  in eine abelsche Kategorie  $\mathcal{B}$ , dann erhalten wir einen Komplexhomomorphismus  $Ff, Fg : FA^\bullet \rightarrow FB^\bullet$  mit  $Ff \sim Fg$ .

**Bemerkung 2.7.11.** Seien  $A^\bullet, B^\bullet$  Komplexe in  $\mathcal{A}$ ,  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  Komplexhomomorphismen mit  $f \sim g$ . Dann gilt:  $\mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(B^\bullet)$

*Beweis.* Wir setzen  $h := f - g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ . Offenbar genügt es zu zeigen:  $\mathcal{H}^i(h) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

1. Der Morphismus  $\mathcal{Z}^i(h) : \mathcal{Z}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{Z}^i B^\bullet$  faktorisiert über  $\mathcal{B}^i B^\bullet$ , denn:

$$\begin{array}{ccccc} \ker d_i = \mathcal{Z}^i A^\bullet & \xrightarrow{\alpha_i} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} \\ & \downarrow \mathcal{Z}^i h & \downarrow h_i & & \downarrow h_{i+1} \\ \ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet & \xrightarrow{\quad} & B^i & \xrightarrow{d_i} & B^{i+1} \\ & \uparrow \theta_i & \swarrow \delta_i & \searrow \gamma_i & \\ \text{im } d_{i-1} = \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i & & & & \text{coker } d_{i-1} \end{array}$$

(A red dashed arrow labeled  $\lambda_i$  points from  $\ker d_i = \mathcal{Z}^i B^\bullet$  to  $\text{im } d_{i-1} = \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i$ .)

$\mathcal{Z}^i(h)$  ist der eindeutig bestimmte Morphismus  $\mathcal{Z}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{Z}^i B^\bullet$  mit  $h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$  (beachte:  $d_i \circ h_i \circ \alpha_i = h_{i+1} \circ d_i \circ \alpha_i = 0$ ). Wegen  $f \sim g$  existiert

eine Familie  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Homomorphismen  $s_i : A^{i+1} \rightarrow B^i$  mit  $h_i = f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s_i \circ d_i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$h_i \circ \alpha_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i + s_i \circ \underbrace{d_i \circ \alpha_i}_{=0} = d_{i-1} \circ s^{i-1} \circ \alpha_i$$

Wegen  $\gamma_i \circ d_{i-1} = 0$  ist  $\overbrace{\gamma_i \circ d_{i-1} \circ s^{i-1}}^{=0} \circ \alpha_i = 0$ , also  $\gamma_i \circ h_i \alpha_i = 0$ . Aus der Univesellen Eigenschaft des Kerns von  $\gamma_i$ , existiert ein eindeutig bestimmtes  $\lambda_i : \mathcal{Z}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{B}^i B^\bullet = \ker \gamma_i$  mit  $h_i \circ \alpha_i = \delta_i \circ \lambda_i$  und mit  $\delta_i = \beta_i \circ \theta_i \Rightarrow \beta_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = h_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \mathcal{Z}^i h$  da  $\beta_i$  ein Monomorphismus folgt:  $\theta_i \circ \lambda_i = \mathcal{Z}^i h$ .

2.  $\mathcal{H}^i h = 0$ , denn betrachte die Situation:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}^i A^\bullet & \xrightarrow{\theta'_i} & \mathcal{Z}^i A^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'_i} & \mathcal{H}^i A^\bullet = \text{coker } \theta'_i \\ \downarrow \mathcal{B}^i h & \swarrow \lambda_i & \downarrow \mathcal{Z}^i h & & \downarrow \mathcal{H}^i h \\ \mathcal{B}^i B^\bullet & \xrightarrow{\theta_i} & \mathcal{Z}^i B^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_i} & \mathcal{H}^i B^\bullet = \text{coker } \theta_i \end{array}$$

$\mathcal{H}^i h$  ist der eindeutig bestimmte Morphismus  $\mathcal{H}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^i B^\bullet$  mit  $\mathcal{H}^i h \circ \varepsilon'_i = \varepsilon_i \circ \mathcal{Z}^i h = \varepsilon_i \circ \theta_i \circ \lambda_i = 0$ , denn  $\varepsilon_i \circ \theta_i = 0$ , somit  $\mathcal{H}^i h = 0$ . ■

**Definition 2.7.12.** Seien  $A^\bullet, B^\bullet$  Komplexe in  $\mathcal{A}$ ,  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  Komplexhomomorphismen.  $f$  heißt

*Homotopieäquivalenz*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  es existiert ein  $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$  Komplexhomomorphismus mit  $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$  und  $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$ .

*Quasiisomorphismus*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Für alle  $i \in \mathbb{Z}$  ist  $\mathcal{H}^i f : \mathcal{H}^i A^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^i B^\bullet$  ein Isomorphismus.

**Bemerkung 2.7.13.** Seien  $A^\bullet, B^\bullet$  Komplexe in  $\mathcal{A}$ ,  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  Homotopieäquivalenz. Dann ist  $f$  ein Quasiisomorphismus.

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein  $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$  Komplexhomomorphismus mit  $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$  und  $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$ . Dann ist

$$\mathcal{H}^i(g) \circ \mathcal{H}^i(f) = \mathcal{H}^i(g \circ f) = \mathcal{H}^i(id_{A^\bullet}) = id_{\mathcal{H}^i A^\bullet}$$

analog:  $\mathcal{H}^i(f) \circ \mathcal{H}^i(g) = id_{\mathcal{H}^i B^\bullet}$ . Also ist  $\mathcal{H}^i(f)$  ein Isomorphismus. ■

**Anmerkung.** Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz.

**Satz 2.7.14.** Gegeben sei folgendes Diagramm von Komplexen in  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \longrightarrow & E^1 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

sodass gilt:

- die obere Zeile ist exakt
- Alle  $I^i, i \geq 0$ , sind injektiv.

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus  $f : E^\bullet \rightarrow I^\bullet$ , der  $\varphi$  fortsetzt, in dem Sinne, dass  $f_0 \circ \varepsilon = \eta \circ \varphi$  ist. Ist  $g : E^\bullet \rightarrow I^\bullet$  ein weiterer solcher Komplexhomomorphismus, dann ist  $g \sim f$ .

*Beweis (Beweisskizze für die Existenz von  $f$ ):* 1. Wir konstruieren zunächst  $f_0$ .  
Situation:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 \\
 B & \xrightarrow{\eta} & I^0
 \end{array}$$

Da  $I^0$  injektiv und  $\varepsilon$  ein Monomorphismus, existiert ein  $f_0 : E^0 \rightarrow I^0$ , sodass  $\eta \circ \varphi = f_0 \circ \varepsilon$ .

2. Konstruktion von  $f_1$ : Situation:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d_0} & E^1 \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow f_0 & \searrow \pi_0 & \swarrow \iota_0 \\
 & & & \text{coker } \varepsilon & \\
 & & & \downarrow \tilde{f}_0 & \\
 & & & \text{coker } \eta & \\
 & \nearrow \pi_0' & & \swarrow \iota_0' & \\
 B & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \xrightarrow{d_0'} & I^1 \\
 & & & & \downarrow f_1
 \end{array}$$

Wegen der Kommutativität vom linken Rechteck, also

$$\pi_0' \circ f_0 \circ \varepsilon = \pi_0' \circ \eta \circ \varphi = 0$$

existiert ein eindeutig bestimmtes  $\tilde{f}_0 : \text{coker } \varepsilon \rightarrow \text{coker } \eta$ , sodass das linke Trapez kommutiert. Da  $d_0 \circ \varepsilon = 0$  und  $d'_0 \circ \eta = 0$ , existieren nach der Universellen Eigenschaft des Kokerns eindeutig bestimmte  $\iota_0 : \text{coker } \varepsilon \rightarrow E^1$ ,  $\iota'_0 : \text{coker } \eta \rightarrow I^1$ , sodass das obere und untere Dreieck kommutieren.

*Behauptung:*  $\iota_0$  ist ein Monomorphismus, denn:

$$\begin{aligned} \text{coker } \varepsilon &= \text{im } \pi_0 \simeq \text{coim } \pi_0 = \text{coker}(\underbrace{\ker \pi_0}_{=\text{im } \varepsilon}) = \text{coker}(\text{im } \varepsilon) \\ &\simeq \text{coker}(\ker d_0) = \text{coim}(d_0) \simeq \text{im } d_0 \end{aligned}$$

was aus dem Homomorphiesatz und der Exaktheit bei  $E^0$  folgt. Nun verifiziert man, dass

$$\begin{array}{ccc} \text{coker } \varepsilon & \xrightarrow{\sim} & \text{im } d_0 \\ & \searrow \iota_0 & \swarrow \\ & E^1 & \end{array}$$

kommutiert, das heißt, dass  $\iota_0$  ein Monomorphismus ist. Da  $I^1$  injektiv und  $\iota_0$  ein Monomorphismus, existiert ein  $f_1 : E^1 \rightarrow I^1$ , sodass auch das rechte Trapez kommutiert. Also ist  $f_1 \circ d_0 = d'_0 \circ f_0$ .

3. Iteriere das Verfahren. ■

**Folgerung 2.7.15.** Sei  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $\varepsilon : A \rightarrow I^\bullet$ ,  $\eta : A \rightarrow J^\bullet$  injektive Auflösungen von  $A$ . Dann existiert eine Homotopieäquivalenz  $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  mit  $f_0 \circ \varepsilon = \eta$ . Diese ist eindeutig bestimmt bis auf Homotopie.

*Beweis.* Wir betrachten das Diagramm von Komplexen:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{I}^\bullet : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & & \uparrow \text{id}_A & & \uparrow f_0 & & \uparrow g_0 & & \\ \tilde{J}^\bullet : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\eta} & J^0 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Nach 2.7.14 existiert ein Komplexhomomorphismus  $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ , der  $\text{id}_A$  fortsetzt und es existiert ein Komplexhomomorphismus  $g : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$ , der  $\text{id}_A$  fortsetzt. Dann ist aber auch  $g \circ f : I^\bullet \rightarrow I^\bullet$  eine Fortsetzung von  $\text{id}_A$ , ebenso wie  $\text{id}_{J^\bullet}$ . Aus der Eindeutigkeit in 2.7.14 ist  $g \circ f \sim \text{id}_{I^\bullet}$ . Analog ist  $f \circ g \sim \text{id}_{J^\bullet}$ . Somit folgt, dass  $f$  eine Homotopieäquivalenz ist. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 2.7.14. ■

**Folgerung 2.7.16.** Sei  $I^\bullet$  ein exakter Komplex von injektiven Objekten in  $\mathcal{A}$  mit  $I^i = 0$  für  $i \ll 0$ . Dann ist  $0^\bullet \rightarrow I^\bullet$  eine Homotopieäquivalenz.

*Beweis.* Ohne Einschränkung ist  $I^i = 0$  für  $i < 0$  (durch Verschiebung des Komplexes) Dann sind  $0^\bullet, I^\bullet$  injektive Auflösungen von 0. Aus 2.7.15 folgt:  $0^\bullet \rightarrow I^\bullet$  ist eine Homotopieäquivalenz. ■

## 2.8 Abgeleitete Funktoren

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven,  $\mathcal{B}$  eine abelsche Kategorie und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor

**Bemerkung + Definition 2.8.1.** Für  $i \in \mathbb{N}_0$  und jedes Objekt  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$  fixieren wir eine injektive Auflösung  $A \rightarrow I^\bullet$  von  $A$  und setzen

$$R^i F(A) := \mathcal{H}^i(FI^\bullet)$$

Ist  $\varphi : A \rightarrow A'$  ein Morphismus in  $\mathcal{A}$  und sind  $A \rightarrow I^\bullet$ ,  $A' \rightarrow I'^\bullet$  injektive Auflösungen von  $A, A'$ , dann existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Komplexhomomorphismus  $f : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ , der  $\varphi$  fortsetzt. Wir setzen

$$R^i F(\varphi) := \mathcal{H}^i(Ff).$$

Auf diese Weise wird  $R^i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zu einem additiven Funktor. Wird auf dieselbe Art und Weise mit einer anderen Wahl von injektiven Auflösungen ein Funktor  $\hat{R}^i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  konstruiert, dann sind  $R^i F(A)$  und  $\hat{R}^i F(A)$  kanonisch isomorph für alle  $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ , und es gibt eine natürliche Äquivalenz  $R^i F \xrightarrow{\sim} \hat{R}^i F$ .  $R^i F$  heißt der  $i$ -te rechtsabgeleitete Funktor

*Beweis.* • Wohldefiniertheit von  $R^i F(\varphi)$ : Ist  $g : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$  eine weitere Fortsetzung von  $\varphi$ , dann ist  $f \sim g$  nach 2.7.14 und somit  $Ff \sim Fg$ . Mit 2.7.11 folgt  $\mathcal{H}^i(Ff) = \mathcal{H}^i(Fg)$  für alle  $i \geq 0$ .

- $R^i F$  ist ein Funktor, denn für  $\varphi : A \rightarrow A'$ ,  $\psi : A' \rightarrow A''$  mit Fortsetzungen  $f : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ ,  $g : I'^\bullet \rightarrow I''^\bullet$  auf injektiven Auflösungen  $A \rightarrow I^\bullet$ ,  $A' \rightarrow I'^\bullet$ ,  $A'' \rightarrow I''^\bullet$  von  $A, A', A''$  ist  $g \circ f : I^\bullet \rightarrow I''^\bullet$  ein Fortsetzung von  $\psi \circ \varphi : A \rightarrow A''$ , also

$$\begin{aligned} (R^i F)(\psi \circ \varphi) &= \mathcal{H}^i(F(g \circ f)) = \mathcal{H}^i(Fg \circ Ff) = \mathcal{H}^i Fg \circ \mathcal{H}^i Ff \\ &= R^i F(\psi) \circ R^i F(\varphi) \end{aligned}$$

- $R^i F$  ist additiv, denn sind  $\varphi : A \rightarrow A'$ ,  $\psi : A \rightarrow A'$  mit Fortsetzungen  $f : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ ,  $g : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$  auf injektiven Auflösungen  $A \rightarrow I^\bullet$ ,  $A' \rightarrow I'^\bullet$  von  $A, A'$ , so ist  $f - g : I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$  eine Fortsetzung von  $\varphi + \psi : A \rightarrow A'$ . Der Rest ist klar, da  $F, \mathcal{H}^i$  additiv.
- Unabhängigkeit von der Wahl der Auflösungen im obigen Sinne: Für  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$  sei  $A \xrightarrow{\varepsilon} I_A^\bullet$  die injektive Auflösung, mit der  $R^i F$  berechnet wird und  $A \xrightarrow{\eta} J_A^\bullet$  die injektive Auflösung von  $A$ , mit der  $\hat{R}^i F$  berechnet wird. Da nach 2.7.15 eine Homotopieäquivalenz  $h_A : I_A^\bullet \rightarrow J_A^\bullet$  existiert mit  $h_A^0 \circ \varepsilon = \eta$ . Wir definieren

$$t_A^i : R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FI_A^\bullet) \longrightarrow \hat{R}^i F(A) = \mathcal{H}^i(FJ_A^\bullet) \quad \text{mit} \quad t_A^i := \mathcal{H}^i F h_A$$

Dann ist  $t_A^i$  nach 2.7.13 ein Isomorphismus, da  $Fh_A$  eine Homotopieäquivalenz ist. Durch  $t^i = (t_A^i)_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} : R^i F \Rightarrow \hat{R}^i F$  ist eine natürliche Äquivalenz gegeben, denn für alle  $A, A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $\varphi : A \rightarrow A'$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A) & \xrightarrow{t_A^i} & \hat{R}^i F(A) \\ \mathcal{H}^i F f_I \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}^i F f_J \\ R^i F(A') & \xrightarrow{t_{A'}^i} & \hat{R}^i F(A') \end{array}$$

wobei  $f_I : I_A^\bullet \rightarrow J_A^\bullet$ ,  $f_J : J_A^\bullet \rightarrow J_{A'}^\bullet$  Fortsetzungen von  $\varphi$  sind), denn  $f_J \circ h_A$ ,  $h_{A'} \circ f_I : I_A^\bullet \rightarrow J_{A'}^\bullet$  sind beides Fortsetzungen von  $\varphi = \varphi \circ \text{id}_A = \text{id}_{A'} \circ \varphi$ , somit  $f_J \circ h_A \sim h_{A'} \circ f_I$ , also  $Ff_J \circ Fh_A \sim Fh_{A'} \circ Ff_I$  und damit  $\mathcal{H}^i F f_J \circ t_A^i = t_{A'}^i \circ \mathcal{H}^i F f_I$ . ■

**Bemerkung 2.8.2.** *Es gilt:*

- a)  $R^0 F = F$
- b) *Ist  $F$  exakt, dann ist  $R^i F = 0$  für alle  $i > 0$ .*

*Beweis.* Für  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$  ist  $R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet)$ , wobei  $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$  eine injektive Auflösung von  $A$  ist. Wir wissen: Ist  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1$  exakt, dann ist ohnehin  $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1$  exakt.

$$FI^\bullet : \quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} FI^2 \longrightarrow \dots$$

mit

$$\begin{aligned} R^0 F(A) &= \mathcal{H}^0(FI^\bullet) = \text{coker}(0 \rightarrow \ker Fd_0) = \ker Fd_0 = \text{im } F\varepsilon \\ &= \text{coim } F\varepsilon = FA \end{aligned}$$

Falls  $F$  exakt, dann ist

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon} FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} \dots$$

exakt, also  $R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FI^\bullet) = 0$  für  $i > 0$ . ■

**Satz 2.8.3.** *Sei  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  eine exakte Folge in  $\mathcal{A}$ . Dann existieren natürliche Morphismen*

$$\delta^i : R^i F(A'') \longrightarrow R^{i+1} F(A') \quad \text{für alle } i \geq 0$$

sodass die Folge

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & FA' & \longrightarrow & FA & \longrightarrow & FA'' \\
 & & \longrightarrow & R^1FA' & \longrightarrow & R^1FA & \longrightarrow R^1FA'' \\
 & & \longrightarrow & \dots & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}FA' & \longrightarrow & R^{i+1}FA & \longrightarrow R^{i+1}FA''
 \end{array}$$

exakte ist. Ist

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei die untere Zeile exakt ist, so kommutiert für alle  $i \geq 0$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B')
 \end{array}$$

*Beweis (Beweisskizze).* Nach dem Hufeisenlemma existieren kompatible injektive Auflösungen  $A' \rightarrow I'^\bullet$ ,  $A \rightarrow I^\bullet$ ,  $A'' \rightarrow I''^\bullet$  in dem Sinne, dass

$$0 \longrightarrow I'^\bullet \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow I''^\bullet \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Komplexen ist.  $I'^i$  ist injektiv für alle  $i \geq 0$ , also spaltet die Folge

$$0 \longrightarrow I'^i \longrightarrow I^i \longrightarrow I''^i \longrightarrow 0$$

(wobei Spaltung in abelschen Kategorien analog zu  $R\text{-Mod}$  definiert ist und analoge Resultate gelten). Dann ist  $I^i = I'^i \oplus I''^i$  und, da  $F$  additiv,  $F(I^i) = F(I'^i) \oplus F(I''^i)$ , womit

$$0 \longrightarrow FI'^i \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI''^i \longrightarrow 0$$



exakt ist. Insbesondere existiert eine exakte Folge von Komplexen

$$0 \longrightarrow FI'^{\bullet} \longrightarrow FI^{\bullet} \longrightarrow FI''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

woraus wir eine lange exakte Kohomologiefolge erhalten, was die Behauptung liefert. ■

**Definition 2.8.4.** Sei  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Dann heißt  $A$  *F-azyklisch*  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} R^i F(A) = 0$  für alle  $i > 1$ .

**Bemerkung 2.8.5.** Ist  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$  injektiv, dann ist  $A$  *F-azyklisch*.

*Beweis.* Offenbar ist  $A \xrightarrow{\text{id}} (A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots)$  eine injektive Auflösung von  $A$ . Damit ist

$$R^i F(A) = \mathcal{H}^i(FA \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots) = 0 \quad \text{für } i \geq 1$$

woraus die Behauptung folgt. ■

**Satz 2.8.6.** Sei  $A \rightarrow J^{\bullet}$  eine injektive Auflösung von  $A$  durch *F-azyklische* Objekte, d.h.  $J^{\bullet}$  ist ein Komplex mit  $J^i = 0$  für  $i < 0$  und  $J^i$  *F-azyklisch* für  $i \geq 0$ , sodass der augmentierte Komplex

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^1 \longrightarrow J^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus  $R^i F(A) \cong \mathcal{H}^i(FJ^{\bullet})$  für alle  $i \geq 0$ .

*Beweis.* (für  $R\text{-Mod}$  in S.Lang “Algebra“) ■

**Anmerkung.** Die Theorie der Linksableitung rechtsexakter Funktoren lässt sich analog entwickeln: Sei  $\mathring{\mathcal{A}}$  eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven,  $\mathcal{B}$  eine abelsche Kategorie,  $F : \mathring{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{B}$  ein rechtsexakter Funktor. Wir wählen für jedes  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$  eine projektive Auflösung  $P_{\bullet} \rightarrow A$  und setzen

$$L_i F(A) := \mathcal{H}_i(FP_{\bullet})$$

Rest analog.

## 2.9 $\delta$ -Funktoren

In Folgenden seien  $\mathring{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien

**Definition 2.9.1.** Ein  $\delta$ -Funktork  $H = (H^n)_{n \geq 0}$  ist eine Familie additiver Funktoren  $H^n : \mathring{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zusammen mit Homomorphismen  $\delta : H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(A)$  für alle  $n \geq 0$  und jede kurze exakte Folge  $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ , sodass gilt:

(D1)  $\delta$  ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in  $\mathring{A}$  mit exakten Zeilen, dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A') \end{array}$$

in  $\mathcal{B}$  für alle  $n \geq 0$

(D2) Für jede kurze exakte Folge  $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$  in  $\mathring{A}$  ist die lange exakte Folge

$$\dots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \dots$$

exakt in  $\mathcal{B}$ .

**Beispiel 2.9.2.**  $\mathring{A}$  habe genügend viele Injektive,  $F : \mathring{A} \rightarrow \mathcal{B}$  linksexakt. Dann ist  $H := (R^n F)_{n \geq 0}$  ein  $\delta$ -Funktork nach 2.8.3