Tercer Parcial Métodos Numéricos

Nombre:

1- Considere la siguiente serie de puntos:

$$C = \{(2,2),(3,6),(4,5),(5,5),(6,6)\}$$

a) ¿Cuál sería el polinomio de mayor grado capaz de pasar por todos ellos?
b) Cree un código que muestre los coeficientes correspondientes al polinomio de mayor grado (puede usar Sympy).
c) Genere un gráfico que:
- Muestre los puntos.
- Muestre una curva generada por el polinomio de mayor grado (interpolación).

2- Pruebe que el método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2) es concordante con una serie de Taylor hasta el segundo orden.

Tips: Considere el problema $y'(x) = f(x,y)$.

a) Escriba una serie de Taylor hasta orden h^4 es decir:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j) + O(h^4)$$

y opérela de tal forma que el miembro derecho quede en función de f y su derivada.

b) Asuma la aproximación RK2:

$$y_{j+1} = y_j + c_0 h f(x_j, y_j) + c_1 h f\left[x_j + c_2 h, y_j + c_2 h f(x_j, y_j)\right]$$

y expanda la función f en una serie de Taylor. Del resultado, compare con la serie de Taylor anterior y determine el valor de las constantes c_i para que la aproximación anterior sea equivalente hasta orden dos a la serie de Taylor.

3- Considere la ecuación 2D

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

la cual describe la trayectoria de un proyectil teniendo en cuenta la resistencia del aire. Resuelva numéricamente dicha ecuación usando su código de RK4 vectorial y

a) grafique la trayectoria del proyectil (es decir, $x(t)\ vs\ y(t)$),
b) así como la evolución de las coordenadas $x(t), y(t)$) en el tiempo (es decir $x(t)\ vs\ t, y(t)\ vs\ t$)).

Considere $k = 1,\ g = 9.8,\ x(t=0) = 1, v_x(t=0) = 2, y(t=0) = 5, v_y(t=0) = 7.808$. Integre desde $t = [0, 2.5]$.

4- De mecánica cuántica conocemos que una partícula no relativista **dentro** de una (1D) caja de longitud $L = 2\ a$, es descrita a través de la ecuación Schrödinger estacionaria.

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$$

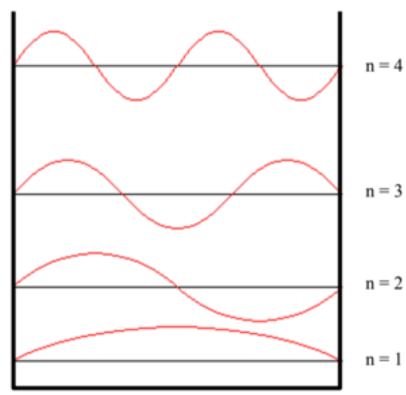
Acá se considera que el potencial es $V = 0$ dentro de la caja $(-a < x < a)$, y que las paredes son infinitas. (Más información consultar: https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Modern_Physics/Book%3A_Spiral_Modern_Physics_(D'Alessandris)/6%3A_The_Schrodinger_Equation/6.2%3A_Solving_the_1D_Infinite_Square_Well)

Considere $\frac{\hbar^2}{m} = 1\ y\ a = 0.5$ y obtenga los primeros cuatro autovalores de la energía y sus respectivas autofunciones usando:

a) el método de shooting.

b) el método matricial (en caso de ser posible).

Compare los autovalores de la energía con el resultado analítico, $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2$. Donde n es el número del autovalor. Grafique las autofunciones y valide que presentan la siguiente estructura:



COMENTARIO: Las respuestas se ha de dar en un notebook, y la demostración puede ser resulta en una hoja y enviada en PDF. ¡Éxitos!