Respuesta examen

1- Señalar si las sgtes afirmaciones son V o F y argumente sus respuestas

a) ¿Verdadero? La precisión de maquina nos indica el número más pequeño en pto flotante que sumado 1 nos da diferente de 1. Lo que usualmente es del orden de 10^{-7}, lo que implica que números entre dos ≠ serán redondeados.

b) Falso. Las cifras significativas están dadas por la mantissa y para un doble precisión es del orden de 15 a 16 cifras decimales

c) Falso. Se ha de cumplir el reescalamiento $d(x, x_0) = d(\lambda x, \lambda x_0)$

2- Recordando la fórmula del error relativo para una función de dos variables

$$\delta y = \sum_i \frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_i \frac{x_i}{f(x)} \left| \frac{df(x)}{dx_i} \right| \delta x_i \rightarrow \delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

tendremos: $T = 2\pi\sqrt{L/g} \Rightarrow \boxed{g(L,T) = \frac{4\pi^2 L}{T^2}} \Rightarrow g(1,2) = \frac{4\pi^2}{4} = \pi^2$

$$\delta g \approx \frac{L}{g(L,T)} \left| \frac{\partial g}{\partial L} \right| \delta_L + \frac{T}{g(L,T)} \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \delta_T \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2} \; ; \; \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{-8\pi^2 L}{T^3}$$

$$\delta_g \approx \frac{L}{g(L,T)} \left| \frac{4\pi^2}{T^2} \right| \delta_L + \frac{T}{g(L,T)} \left| -\frac{8\pi^2 L}{T^3} \right| \delta_T$$

$$\boxed{\delta_g \approx \delta_L + 2\delta_T} \Rightarrow \delta_g \approx \frac{\Delta_L}{L} + 2\frac{\Delta_T}{T} = \frac{10^{-3}}{1} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} = 0.011$$

R/ el error relativo para g es $\delta g = 0.011$

3 -

$$\delta f = \frac{x}{f} \left| \frac{df}{dx} \right| \delta x = \frac{x}{\arcsin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \delta x \rightarrow \text{error relativo a } x$$

Ahora, como tenemos que $\sin y = x \Longleftrightarrow \arcsin x = y$ sale entonces que $\sin y = 1 \Rightarrow y = \pi/2$ por tanto $\lim_{x \to 1} \arcsin(x) \approx \pi/2$.

tendremos que:

$$\lim_{x\to 1} \delta f = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x}{\arcsin(x)}}_{\text{Finito}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{+\infty} \underbrace{\delta x}_{\text{Finito}}$$

Por tanto, podemos concluir que producto de que el término $(1-x^2)^{-1/2} \to \infty$, cuando $x \to 1$, un pequeño error relativo δx se vería magnificado afectando a δf.

4 - $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ con $x=\sqrt{2}$; $\Delta_f \approx \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x$; donde Δ_f es el error abs en f
" Δx " " " " " x

$$\Delta_f \approx \frac{\Delta x}{|x|} \Rightarrow \boxed{\Delta x \approx |x| \Delta_f} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_f = 10^{-4} \\ x = \sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow \Delta x \approx \sqrt{2} \cdot 10^{-4}$$

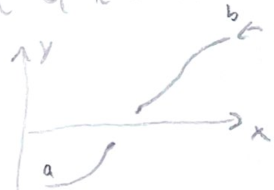
$$\Delta x \approx 1.41421 \cdot 10^{-4}.$$

$$\boxed{\Delta x \approx 1.4 \times 10^{-4}}$$

R/ Si queremos obtener una precisión de cuatro cifras decimales tenemos que asegurar que $\Delta x \lesssim 1.4 \times 10^{-4}$.

5 -

a) Verdadero si la función es continua en ese intervalo pues el teorema del valor intermedio implica que existe un pto. p tal que $f(p)=0$.
Si la función no es continua, no necesariamente es verdadero



b) Falso; el método de Newton-Raphson converge más rápido que el de Bisección.

c) Verdadero; es cierto pq para este método $f(x) \in C^1$, y se ve de la fórmula $p_1 \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$

(3)

6- $P(t) = \dfrac{c_1}{1 - c_2 e^{-c_3 t}}$; Ptos: $(0, 151341)$, $(20, 203302)$
$(10, 179323)$

$y_1 = \dfrac{c_1}{1-c_2} \Rightarrow c_1 = y_1(1-c_2)$ (1)

$a = e^{-10c_3}$

$y_2 = \dfrac{c_1}{1-c_2 e^{-10c_3}} \Rightarrow c_1 = y_2(1 - c_2 e^{-10c_3})$ (2)

$y_3 = \dfrac{c_1}{1-c_2 e^{-20c_3}} \Rightarrow c_1 = y_3(1 - c_2 e^{-20c_3})$ (3)

De (1) con (2) tenemos:

$y_1(1-c_2) = y_2(1-c_2 a)$

$\Rightarrow y_1 - y_1 c_2 = y_2 - y_2 c_2 a$

$y_1 - y_1 c_2 - y_2 + y_2 c_2 a = 0$

$\boxed{c_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{y_2 a - y_1}}$ (4)

De (1) con (3) tenemos

$\Rightarrow y_1(1-c_2) = y_3(1-c_2 a^2)$

$\Rightarrow y_1 - y_1 c_2 - y_3 + y_3 c_2 a^2 = 0$

$\boxed{c_2 = \dfrac{y_3 - y_1}{y_3 a^2 - y_1}}$ (5)

De (2) con (3)

$y_2(1-c_2 a) = y_3(1-c_2 a^2)$

$\Rightarrow y_2 - y_2 c_2 a - y_3 + y_3 c_2 a^2 = 0$

$\boxed{c_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{a(y_3 a - y_2)}}$ (6)

$$\frac{y_2 - y_1}{y_2 a - y_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 a^2 - y_1}$$

$(y_2 - y_1)(y_3 a^2 - y_1) = (y_3 - y_1)(y_2 a - y_1)$

$y_3(y_2 - y_1)a^2 - y_1(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)y_2 a + (y_3 - y_1)y_1 = 0$

$y_3(y_2 - y_1)a^2 - y_2(y_3 - y_1)a + y_1(y_3 - \cancel{y_1} - y_2 + \cancel{y_1}) = 0$

$$\boxed{a^2 - \frac{y_2(y_3 - y_1)}{y_3(y_2 - y_1)} a + \frac{y_1(y_3 - y_2)}{y_3(y_2 - y_1)} = 0}$$

Analíticamente podemos usar la fórmula general, o su código numérico

$y_1 = 151341$
$y_2 = 179323$
$y_3 = 203302$

$a = 0.637922 \rightarrow \boxed{c_3 = 0.044954}$

$a = 1 \rightarrow c_3 = -2.22 \times 10^{-17}$ pero $c_3 > 0$ por tanto no es la buscada

usando (4) $\rightarrow c_2 = -0.757355$

usando (1) $\rightarrow c_1 = 265960$