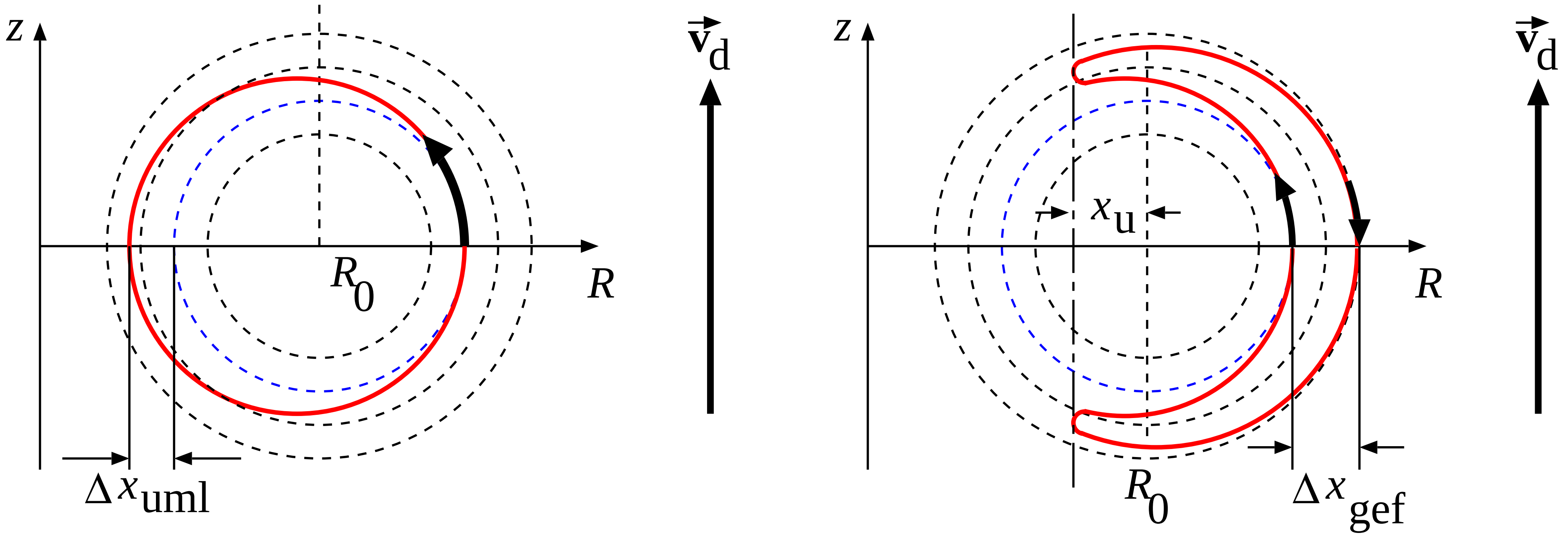
Driftbahnen im Torus



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Inhalt

- Gyrozentrums-Drift im Torus
- Magnetischer Spiegel im Torus
  - “Umlaufende” Teilchen
  - “Gefangene” Teilchen
- Führen Driftbahnen zu Teilchenverlusten?

Gyrozentrums-Driften

Krümmungsdrift (wg. Fliehkraft: $\vec{F}_R = mv_\parallel^2 \vec{R}_c / R_c^2$)

$$\vec{v}_R \;=\; \frac{mv_\parallel^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \;\sim\; \underbrace{\frac{mv_\parallel^2}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3}}_{\text{Zylindersymmetrie}, \vec{j}=0}$$

∇B-Drift (Variation von B in der Gyrationsperiode)

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{mv_\perp^2}{2qB^3} \left(\vec{B} \times \nabla B \right)$$

Vereinfachende Annahmen:

— $B \propto 1/R$ (wie im Vakuum) $\Rightarrow$ $B/\nabla B \sim R$

— Thermische Verteilung $v = v_{\text{th}}$

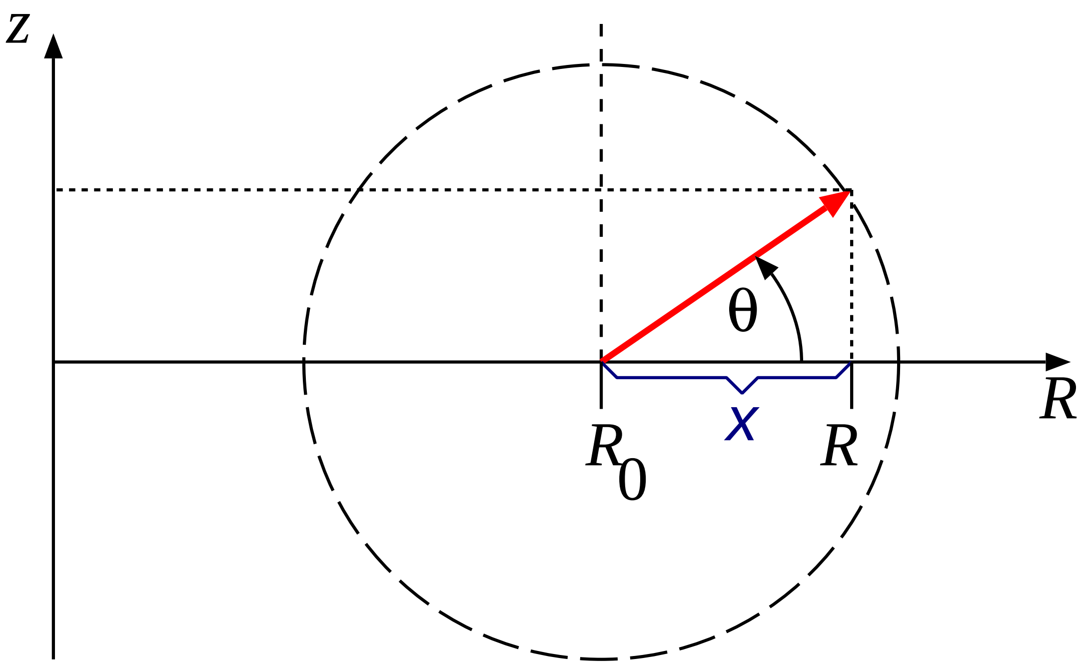
— Gleichverteilung der kinetischen Energie in allen Freiheitsgraden

$\Rightarrow$ Kombinierte ∇B- und Krümmungsdrift v_D (q: Teilchenladung, m: Teilchenmasse)

$$v_D = \frac{3}{2} m v_{\text{th}}^2 \frac{1}{RqB}$$

Toroidale Koordinaten

Poloidaler Schnitt:



Magnetische Achse: $(R_0, z = 0)$

"Großer" Radius: R

"Kleiner" Radius:

$$r = \sqrt{(R - R_0)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Poloidaler Winkel θ:

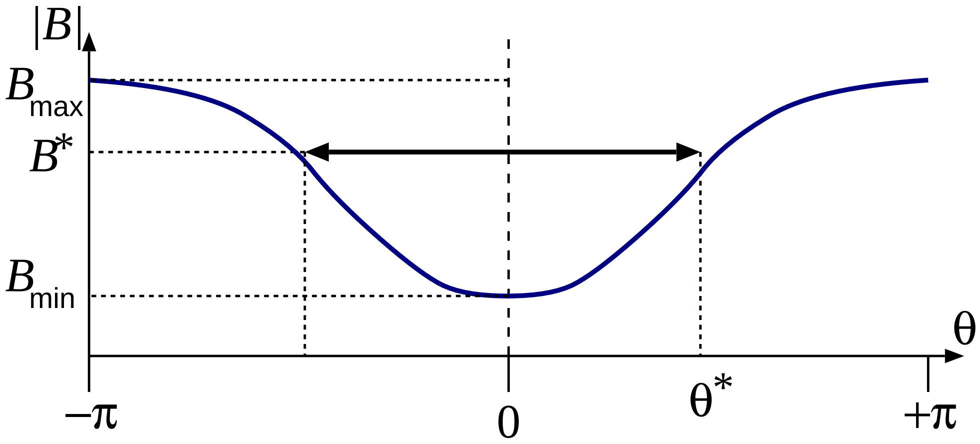
$$\sin\theta = \frac{z}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

Magnetischer Spiegel im Torus

B entlang der Gyrozentrums-Bahn:

$$B \approx B_\phi = \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0 R_0}{R_0 + x} = \frac{B_0}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

mit $\varepsilon = r/R < 1$: inverses Aspektverhältnis



Minimales und maximales B:

$$B_{\max} = \frac{B_0}{1 - \varepsilon}, \quad B_{\min} = \frac{B_0}{1 + \varepsilon}$$

Konstanten der Bewegung:

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{kinetische Energie}$$

(Bahngeschwindigkeit $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2$)

$$\mu = \frac{m v_\perp^2}{2B} \quad \text{magnetisches Moment}$$

Mit steigendem B entlang der Bahnkurve muss $v_\perp^2$ steigen. Die benötigte Energie kommt aus der Bewegung $\parallel B$.

$\Rightarrow$ Bei $v_\parallel = 0$ kehrt die Bewegungsrichtung um (gefangene Teilchen).

Vgl. Umkehrpunkt ($\theta = \theta^*$) und $\theta = 0$:

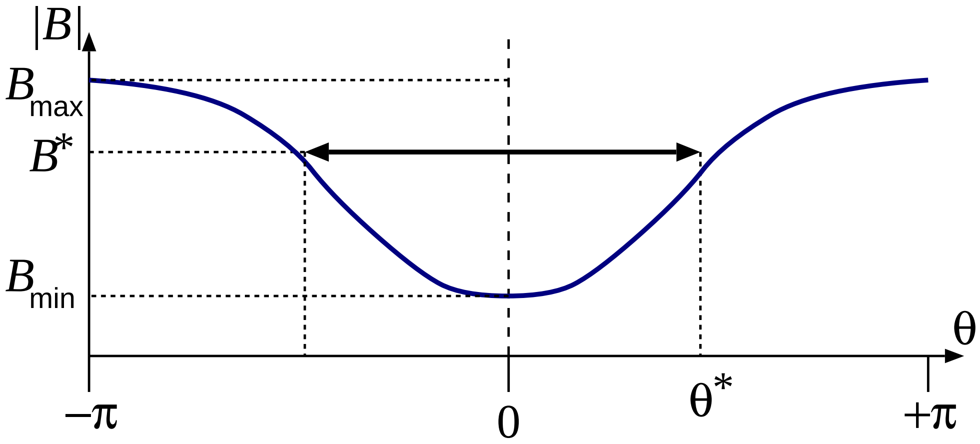
$$\frac{v_\perp^2(\theta)}{2B^*} = \frac{v_\perp^2(0)}{2B_{\min}}, \qquad v_\perp^2(\theta) = v_\perp^2(0) + v_\parallel^2(0)$$

Umlaufende und gefangene Teilchen

B entlang der Gyrozentrums-Bahn:

$$B \approx B_\phi = \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0 R_0}{R_0 + x} = \frac{B_0}{1 + \varepsilon\, \cos\theta}$$

mit $\varepsilon = r/R < 1$: inverses Aspektverhältnis



Minimales und maximales B:

$$B_{\max} = \frac{B_0}{1-\varepsilon}, \quad B_{\min} = \frac{B_0}{1+\varepsilon}$$

Umkehrpunkt:

$$\frac{B^*}{B_{\max}} = 1 + \frac{v_\parallel^2(0)}{v_\perp^2(0)}$$

Zwei Typen von Teilchenbahnen:

$B^* > B_{\max}$: Parallelgeschwindigkeit wird bei $B = B_{\max}$ nicht komplett aufgebraucht, Teilchen durchlaufen weiter ihre Bahn um den Torus.

$\Rightarrow$ **Umlaufende Teilchen**

$B^* \leq B_{\max}$: Parallelgeschwindigkeit erreicht $v_\parallel = 0$ bei $B = B^*$, Teilchen wird im magnetischen Spiegel reflekiert und erreicht das maximale Feld nicht.

$\Rightarrow$ **Gefangene Teilchen**

Grenze zwischen umlaufenden und gefangenen Teilchen

Def.: Umkehrpunkt $B^* = B_{\max}$

$$\frac{v_\parallel^2(0)}{v_\perp^2(0)} = \frac{B_{\max}}{B_{\min}} - 1 = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \sim 2\varepsilon \quad (\varepsilon \leq 1)$$

Für großes Aspektverhältnis ($\varepsilon \leq 1$):

$$\frac{v_\parallel^2(0)}{v_\perp^2(0)} \sim 2\varepsilon$$

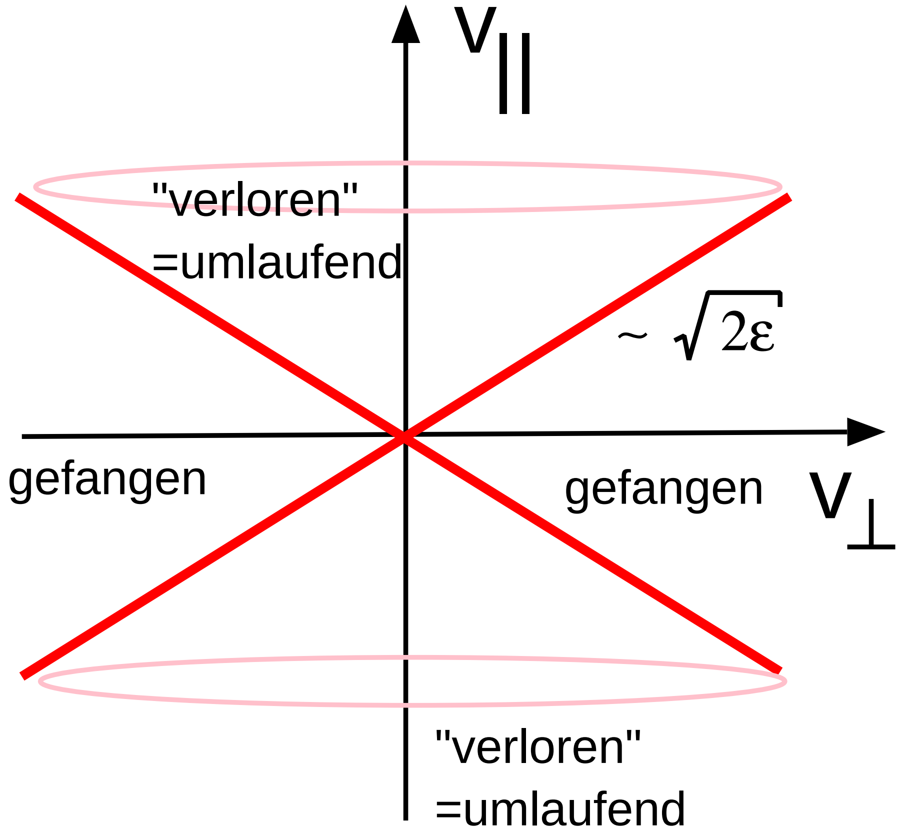
bzw.

$$\frac{v_\parallel(0)}{v_\perp(0)} \sim \sqrt{2\varepsilon}$$

"Verlustkegel":

$v_\parallel$ (1 Raumrichtung)

$v_\perp$ (2 Raumrichtungen)



Anteil gefangener Teilchen

Berechne zuerst den Anteil *umlaufender* Teilchen, d.h. Teilchen im Verlustkegel:

$$f_{\mathrm{uml}} = \frac{\int_{\mathrm{uml}} f(\vec{v})\, \mathrm{d}^3v}{\int_{\mathrm{alle}} f(\vec{v})\, \mathrm{d}^3v}$$

Isotrope Geschwindigkeitsverteilung (bei $\theta = 0$):

$$f_{\mathrm{uml}} = \frac{\text{Vol. Verlustkegel}}{\text{Vol. Kugel}} = \frac{\frac{4}{3}\pi v^2 (v - v_\parallel)^{(1)}}{\frac{4}{3}\pi v^3} = \frac{v - v_\parallel}{v}$$

Anteil *gefangener* Teilchen:

$$f_{\mathrm{gef}} \;=\; 1 - f_{\mathrm{uml}} \;=\; \frac{v_\parallel}{v} \;=\; \sqrt{2\varepsilon}\frac{v_\perp}{v}$$

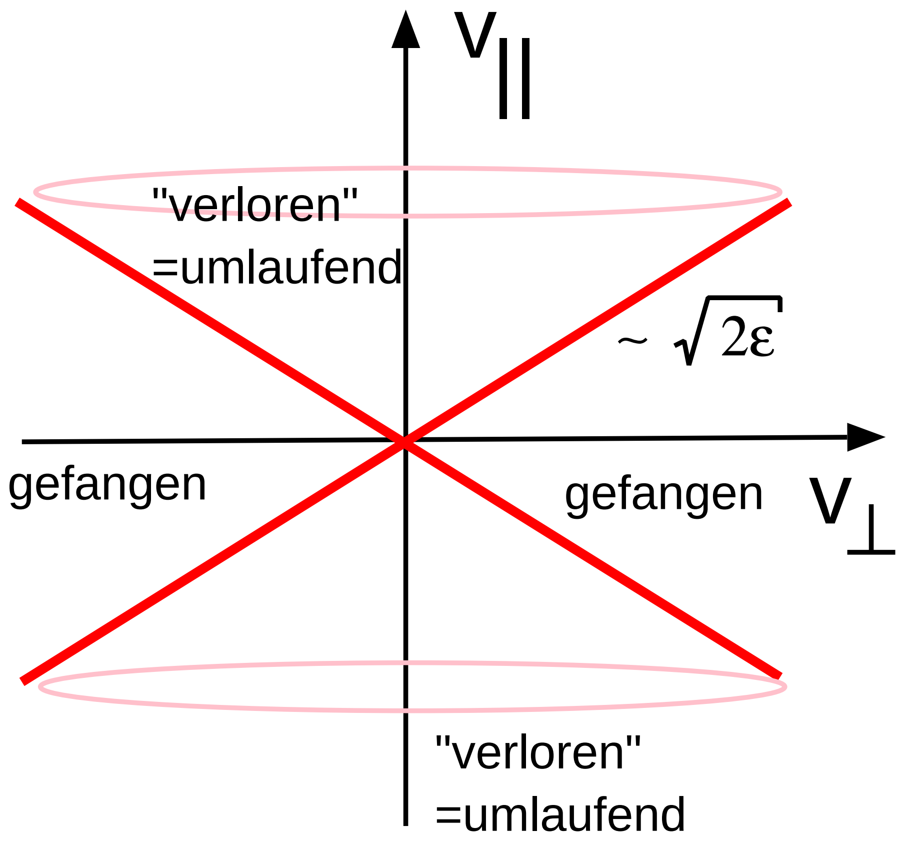
Für großes Aspektverhältnis:

$$f_{\mathrm{gef}} \;\approx\; \sqrt{2\varepsilon}$$

“Verlustkegel”:

$v_\parallel$ (1 Raumrichtung)

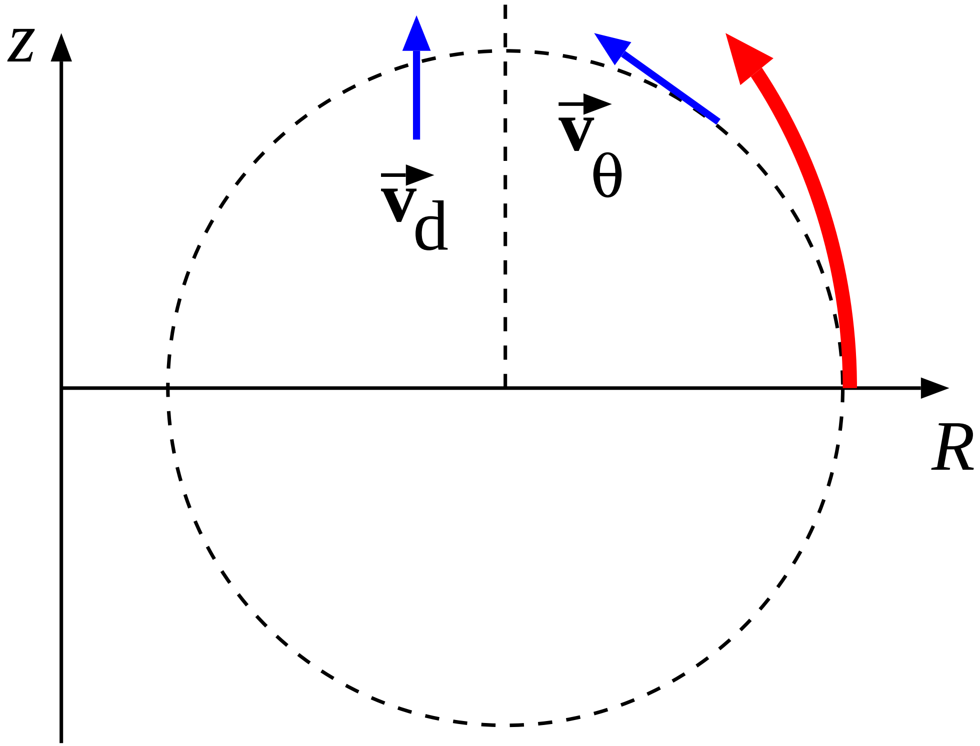
$v_\perp$ (2 Raumrichtungen)



(1) vgl. z.B. Bronstein. Taschenbuch der Mathematik, Kap 2.6.2.4

Bahnkurve der Gyrozentren

Durch die Gyrozentrums-Drift entfernen sich die Teilchen von den magnetischen Flächen. Betrachten zunächst umlaufende Teilchen.



Poloidale Komponente von $v_\parallel$:

$$v_\theta \equiv \frac{B_\theta}{B} v_\parallel$$

In Tokamaks, $B_\phi > B_\theta$, so dass $B \approx B_\phi$. Die Drift verläuft näherungsweise in z-Richtung.

Poloidale Komponenten von v_θ:

$$v_R = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -v_\theta \sin\theta = -v_\theta \frac{z}{r}$$

und

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_\theta \cos\theta + v_D = v_\theta \frac{x}{r} + v_D$$

Bahnkurve umlaufende Teilchen

Bahnkurve durch Auflösen nach dt und gleichsetzen

$$\left(v_\theta \frac{x}{r} + v_D\right) \mathrm{d}R = -v_\theta \frac{z}{r} \mathrm{d}z$$

Mit

$$x\mathrm{d}R + z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2) = r\mathrm{d}r = -\frac{v_D}{v_\theta} r\mathrm{d}R$$

ergibt sich eine DGL for r (radiale Abweichung von der magnetischen Fläche):

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} = -\frac{v_D}{v_\theta} = -\frac{v_D}{v_\parallel}\frac{B}{B_\theta} \equiv -\alpha$$

Für $\varepsilon \ll 1$, $v_D B \approx$ const.

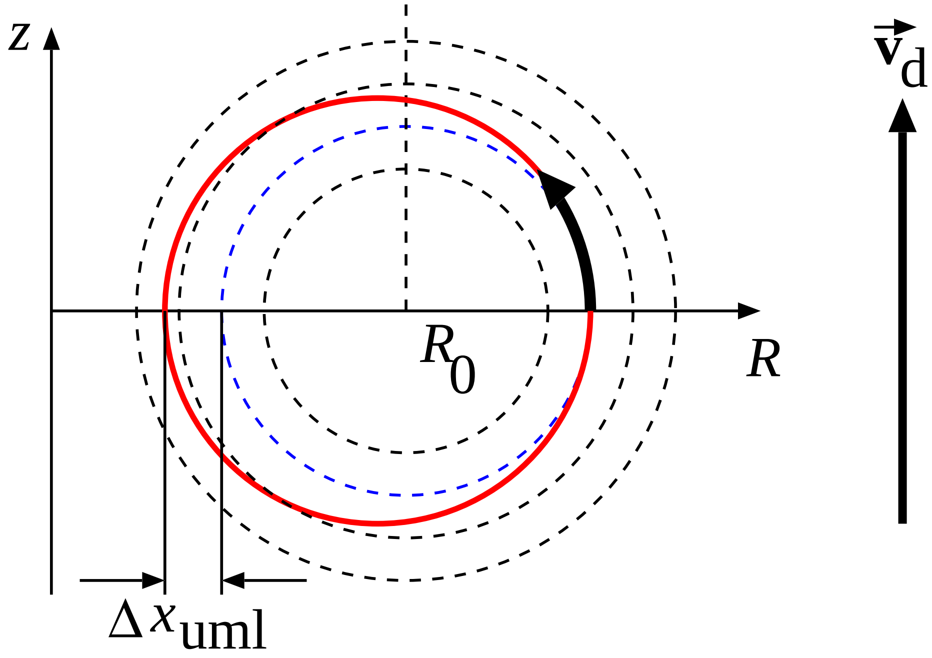
Für $v_\parallel / v_\perp \gg \sqrt{2\varepsilon}$ (tief umlaufende Teilchen), $v_\parallel \approx$ const.

$\Rightarrow \alpha \approx$ const.

Bahnkurve durch (triviales) Integrieren:

$$r(R) = r_0 - \alpha x, \quad r_0^2 = z^2 + (x + \alpha r_0)^2$$

$\rightarrow$ Kreisbahn mit Zentrum um αr_0 in $(-R)$-Richtung verschoben:

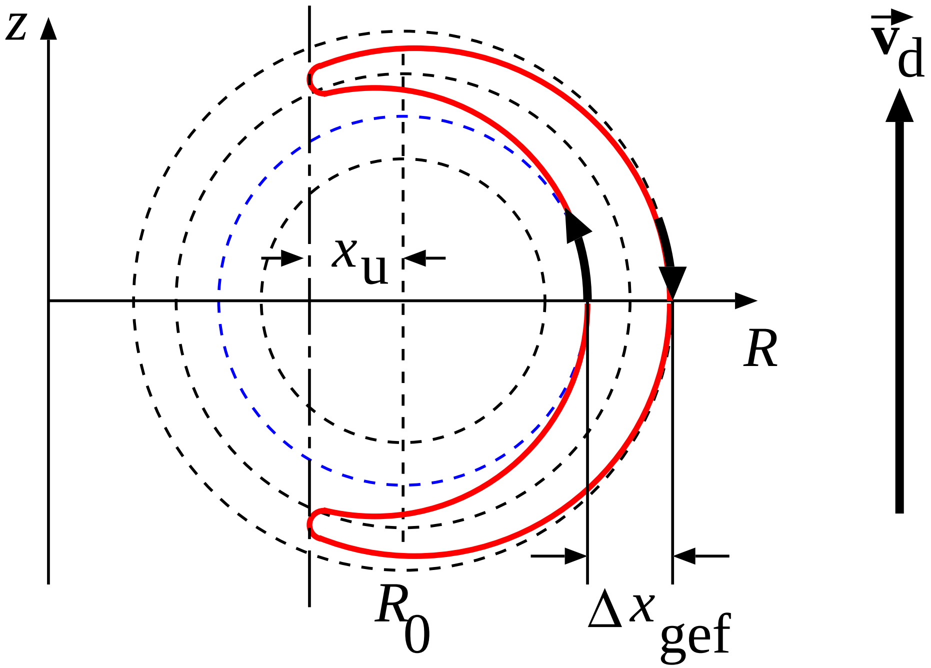


Max. Bahnabweichung von magn. Fläche:

$$\Delta x_{\text{uml}} = 2\|\alpha\| r_0 = 2\frac{v_D}{v_\parallel}\frac{B}{B_\theta} r_0$$

Bahnkurve gefangener Teilchen

Teilchen kehren bei $v_\parallel = 0$ im magnetischen Spiegel um. Die überlagerte Driftbewegung erzeugt (im poloidalen Querschnitt) eine sogenannte "Bananenbahn":



$v_\parallel$ ist entlang der Bahn nicht mehr konstant und muss berechnet werden.

Erhaltung des magnetischen Moments:

$$\underbrace{\frac{mv^2}{2B^*}}_{\text{Umkehrpunkt}} = \underbrace{\frac{m(v^2 - v_\parallel^2)}{2B}}_{\text{andere Bahnorte}} \Rightarrow v_\parallel = v\sqrt{1 - \frac{B}{B^*}}$$

Ortsabhängigkeit von B:

$$B \sim \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0 R_0}{R_0 + x} = \frac{B_0}{1 + x/R_0}$$

Da $x \leq r$, ist $x/R_0 \ll 1$ wenn $\varepsilon = r/R_0 \ll 1$. Entwickeln, 1. Ordnung:

$$v_\parallel \sim v\sqrt{1 - \frac{1 - x/R_0}{1 - x^*/R_0}} = v\sqrt{\frac{x - x^*}{R_0 - x^*}} \sim v\sqrt{\frac{x - x^*}{R_0}}$$

Bahnkurve gefangener Teilchen (2)

Damit ergibt sich für r:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} = -\alpha = -\frac{v_D}{v_\parallel}\frac{B}{B_\theta} = -\frac{v_D}{v}\frac{B}{B_\theta}\sqrt{\frac{R_0}{x-x^*}}$$

Integrieren, beginnend bei $x = +r$ (Mittelebene außen):

$$r^* - r = \int_{x=r}^{x^*} \frac{v_D}{v}\frac{B}{B_\theta}\sqrt{\frac{R_0}{x-x^*}}\mathrm{d}x$$

Zur Vereinfachung betrachten wir *tief* gefangene Teilchen, die weit außen bleiben, so dass $B \sim$ const.

$$r^* - r = -\sqrt{R_0}\frac{v_D}{v}\frac{B}{B_\theta}\int_{x=r}^{x^*}\sqrt{\frac{R_0}{x-x^*}}\mathrm{d}x$$

bzw.

$$r^* - r = -\frac{2v_D}{v}\frac{B}{B_\theta}\sqrt{R_0(r-x^*)}$$

Versatz in der Äquatorialebene (doppelt wg. Hinweg zum und Rückweg vom Umkehrpunkt):

$$\Delta x_{\mathrm{gef}} = 2(r^* - r) = -\frac{4v_D}{v}\frac{B}{B_\theta}\sqrt{R_0(r-x^*)}$$

Verhältnis des Bahnversatzes gefangener und umlaufender Teilchen:

$$\frac{\Delta x_{\mathrm{gef}}}{\Delta x_{\mathrm{uml}}} \sim 2\frac{v_\parallel}{v}\sqrt{\frac{R_0}{r}} = 2\frac{v_\parallel}{v}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Führen Driftbahnen zu Teilchenverlusten?

Betrachte:
— axisymmetrisches, stationäres $\vec{B}$−Feld
— keine Beschleunigung durch zusätzliche konservative Kraftfelder, d.h. $E = 0$.
Bewegungsgleichung für Teilchen:

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Toroidale Komponente:

$$\frac{m}{q} \frac{\mathrm{d}v_\phi}{\mathrm{d}t} = v_z B_R - v_R B_z = B_R \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - B_z \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{1}{2\pi R} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \right]$$

mit $\Psi(R,z)$: poloidaler magnetischer Fluss (s. Vorlesung MHD-Gleichgewichte)

Da $\vec{B}$ und Ψ im ortsfesten System zeitlich konstant angenommen sind, ändert sich $\Psi(R,z)$ nur durch die Bewegung des Teilchens im Raum, $R(t), z(t)$, d.h.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial R} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}R}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}$$

Damit folgt (alle Größen jeweils am Teilchenort genommen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\Psi}{2\pi R} + \frac{m v_\phi}{q} \right) = 0$$

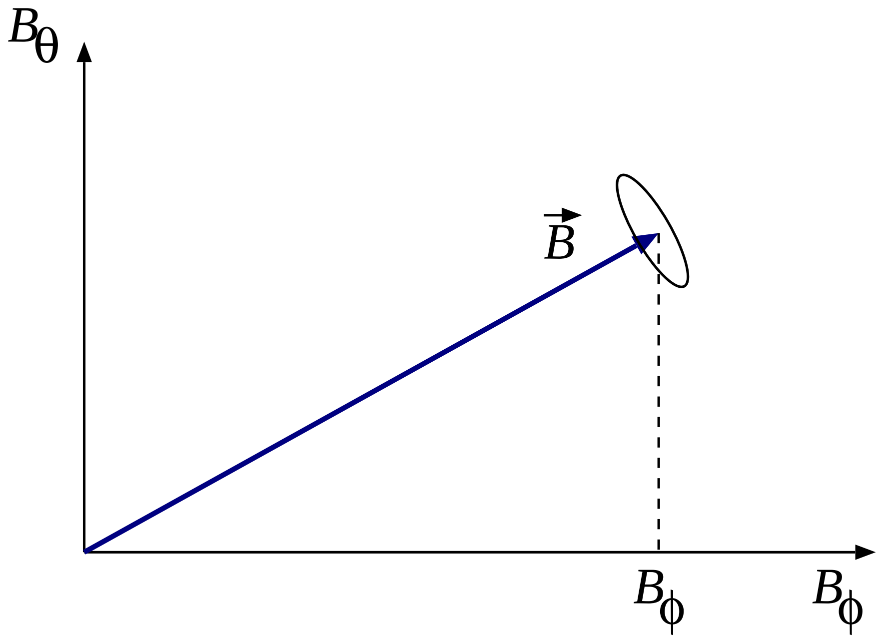
bzw.

$$\frac{\Psi}{2\pi R} + \frac{m v_\phi}{q} = \text{const.}$$

Führen Driftbahnen zu Teilchenverlusten? (2)

Entlang der Teilchenbahn haben wir:

$$\frac{\Psi}{2\pi R} + \frac{m v_\phi}{q} = \text{const.}$$



Mittelung von v_ϕ über die Gyrationsbewegung (Bewegung $\perp B$) lässt die toroidale Komponente der Bewegung $\| B$ übrig:

$$\bar{v}_\phi = v_\| \frac{B_\phi}{B}$$

Damit:

$$\Psi \;+\; \underbrace{2\pi R B_\phi}_{=\mu_0 I_\theta(\psi)} \; v_\| \; \underbrace{\frac{m}{qB}}_{=1/\omega_c} \;=\; \text{const.}$$

An den Umkehrpunkten der Bahnen gefangener Teilchen: $v_\| = 0$, und damit ist bei der Bahnumkehr das Teilchen immer am selben Ψ, d.h. auf derselben Flussfläche.

$\Rightarrow$ Ohne Stösse bleiben gefangene Teilchen eingeschlossen.

Aber: Aufgrund der o.g. Annahmen ist diese Folgerung nicht gültig für:

— Nicht-axisymmetrische Konfigurationen

— $\partial B/\partial t \neq 0$

— $E \neq 0$

Zusammenfassung: Torusdrift

- Im Torus ergibt sich durch das räumlich nicht konstante toroidale Magnetfeld ein magnetischer Spiegel. (B niedrig auf der Torusaußenseite, hoch auf der Torusinnenseite).
- In diesem Spiegel sind Teilchen für $v_{\|}/v_{\perp} < \sqrt{2\varepsilon}$ gefangen (v jeweils gemessen bei niedrigstem Feld auf der Mittelebene außen) und durchlaufen “Bananenbahnen”.
  Teilchen mit $v_{\|}/v_{\perp} > \sqrt{2\varepsilon}$ (verlorene Teilchen im linearen Spiegel, umlaufende Teilchen im Torus) durchlaufen zu den Flussflächen nach innen versetzte komplette helikale Bahnen.
- Der Anteil gefangener Teilchen an der Teilchengesamtheit mit isotroper Geschwindigkeitsverteileung beträgt ca. $\sqrt{2\varepsilon}$. Obwohl gefangene Teilchen normalerweise in der Minderzahl sind, kann aufgrund ihres größeren Bahnversatzes der stossbehaftete Transport durch sie dominiert werden.