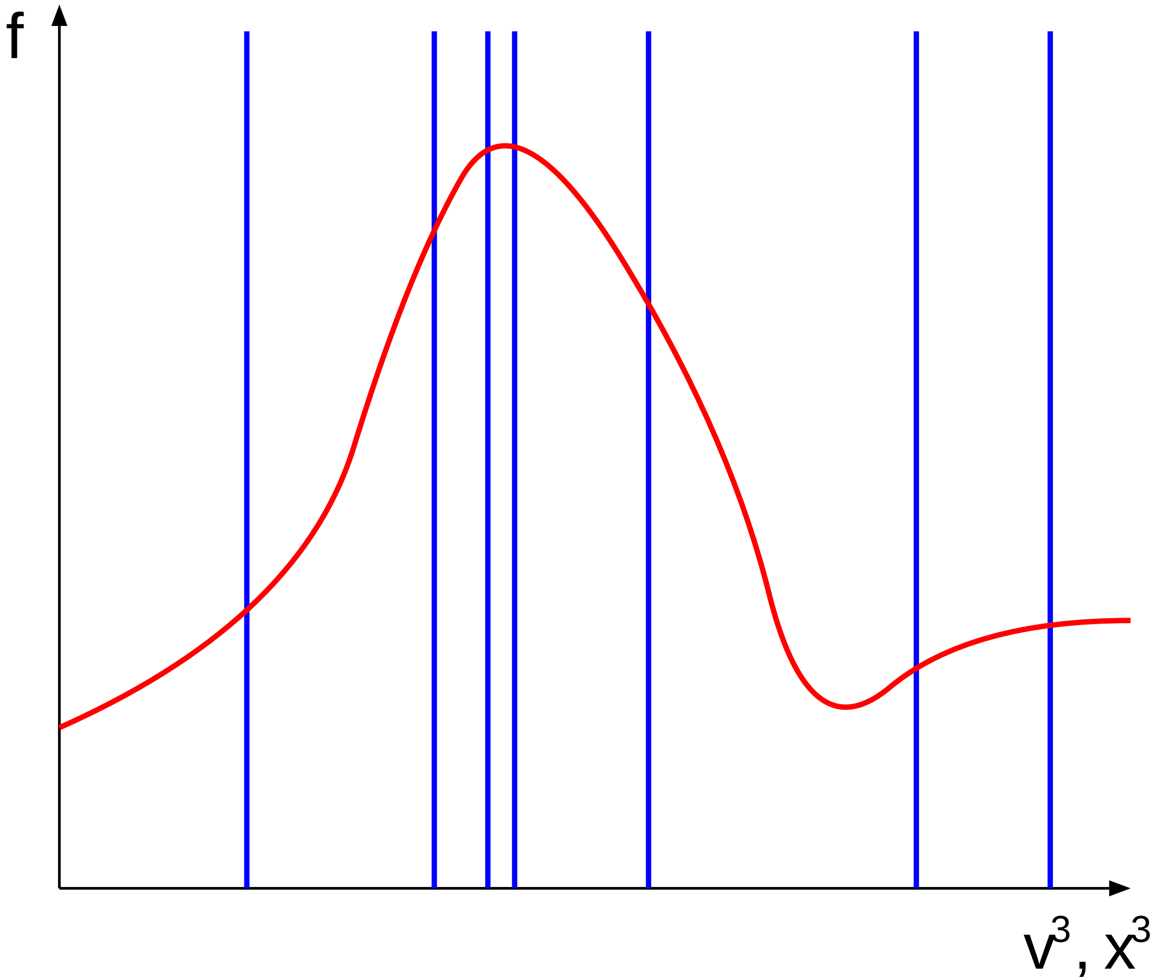
Kinetische Beschreibung von Plasmen



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Beschreibung von Plasmen

- **Einzelteilchen-Beschreibung**
  - Bewegungsgleichung für einzelne Teilchen
  - Exakt oder in Näherung (z. B. Driftnäherung) lösbar
  - Rückwirkung auf $\vec{E}$ und $\vec{B}$ schwierig zu berechnen
- **Kinetische Beschreibung** $\leftarrow$ *(wir sind hier)*
  - Verteilungsfunktion (Dichte) im 6-dimensionalen Phasenraum $(\vec{x}, \vec{v})$
  - Beobachtbare Grössen (Ort, Geschwindigkeit) sind Momente der Verteilungsfunktion
  - "Bewegungsgleichungen" im 6-D Phasenraum
- Flüssigkeits-Beschreibung *(folgt später)*

N-Teilchen-Problem

Plasma mit N Teilchen ($i = 1 \dots N$). Bewegungsgleichung des i-ten Teilchens:

$$m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1 \dots N, j \neq i} F_{i,j},$$

mit $F_{i,j}$: Kraft des j-ten Teilchens auf das i-te Teilchen.

Problem der Ordnung N^2 !

Für die meisten Plasmen: $N_D \gg 10^{10}$.

10^{20} Operationen pro Zeitschritt (noch) nicht praktikabel.

$\rightarrow$ nicht einmal die Debye-Kugel kann mit Einzelteilchen ohne Näherungen beschrieben werden.

Teilchen im Phasenraum

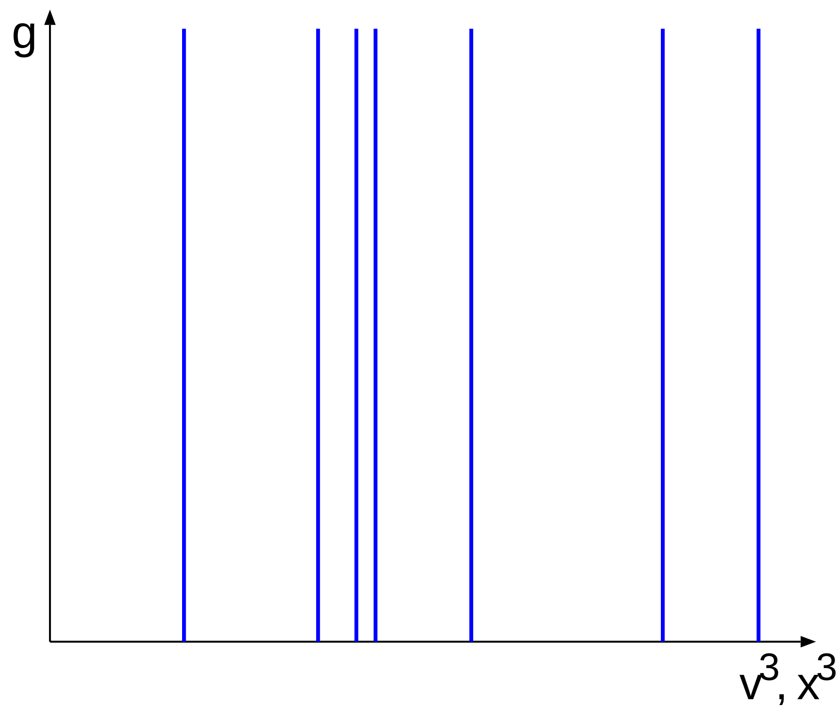
Klassisches Teilchen: “Punkt” im Phasenraum mit definiertem Ort $\vec{x}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$.

Phasenraumdichte des i-ten Teilchens (idealisiert für Atomradius null):

$$g_i(\vec{x},\vec{v},t) \;=\; \delta(\vec{x}-\vec{x}_i(t))\;\;\delta(\vec{v}-\vec{v}_i(t)), \qquad \Rightarrow \quad \int\int\int_x\int\int\int_v g_i \;\; \mathrm{d}v^3\mathrm{d}x^3 = 1$$

Viele Teilchen:

$$g(\vec{x},\vec{v},t) \;=\; \sum_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i(t))\;\;\delta(\vec{v}-\vec{v}_i(t)) \qquad \text{“Exakte“ Phasenraumdichte}$$



***Particle In Cell*-Methode**

1. Berechne Felder auf Gitter in Ortskoordinaten, *“cells”*:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|}, \qquad \vec{E} = -\nabla\phi$$

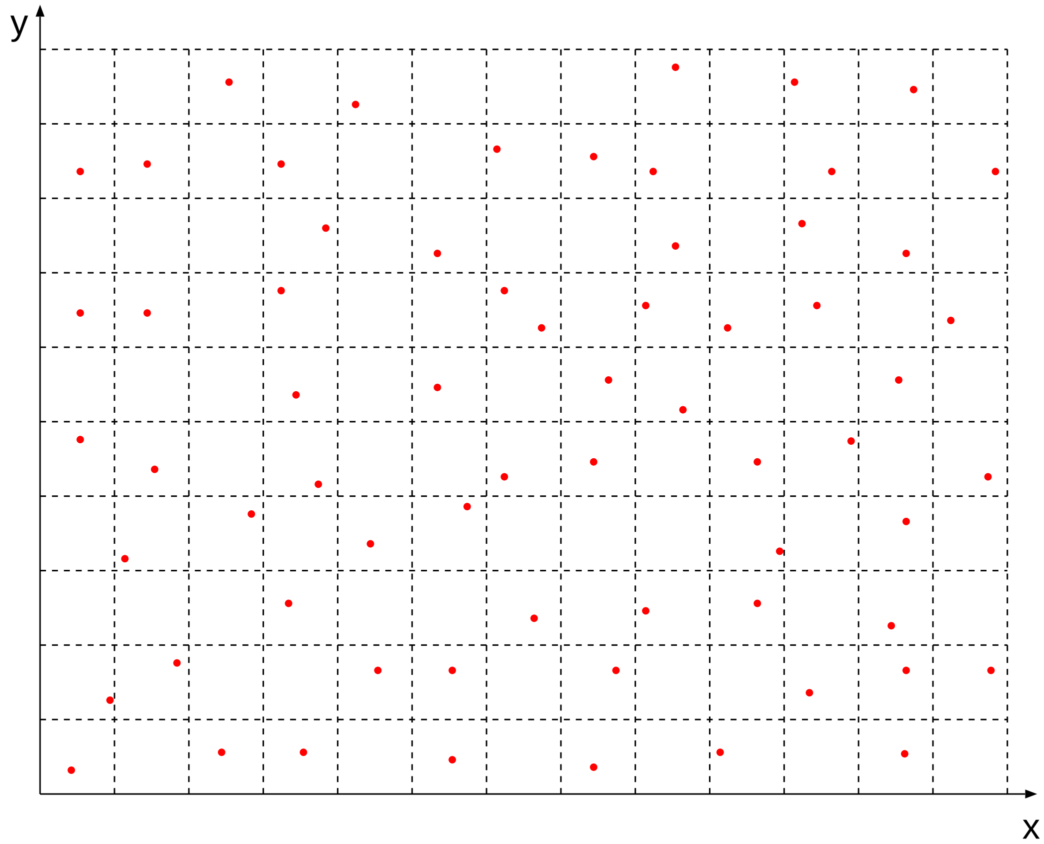
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i\vec{v}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} + \nabla\phi, \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

(Praxis: $\rho = \sum q$ und $\vec{j} = \sum \vec{v}q$ auf Gitter akkumulieren, danach $\phi, \vec{A}$ lösen)

2. Propagiere Teilchen im Feld:

$$\mathrm{d}\vec{x} = \vec{v}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}\vec{v} = \frac{q}{m}\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}t$$

Räumliches 2D-Gitter:



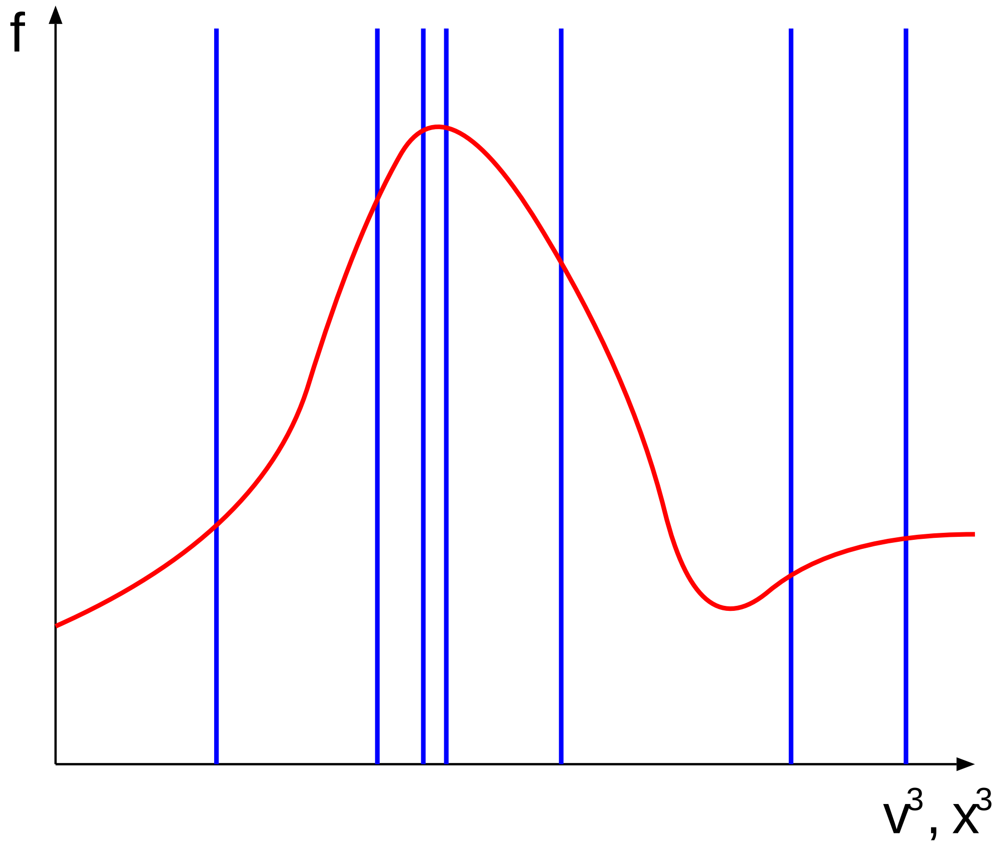
Benötige $N_{\mathrm{cell}} \gg 1$ Teilchen pro Gitterzelle!

Rechenaufwand:

Ordnung N Operationen + Feldberechnung

Verteilungsfunktion

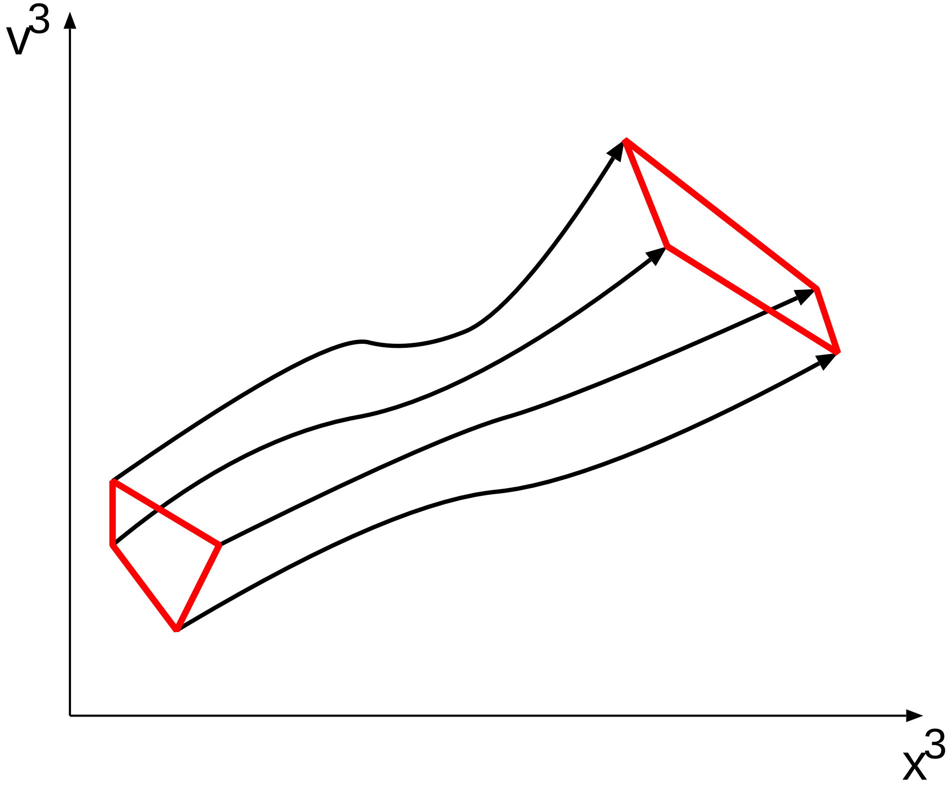
Betrachte kontinuierliche Teilchendichte $f(\vec{x},\vec{v},t)$ im 6D Phasenraum (anstelle von Einzelteilchen)



“Gleitender Mittelwert” über Volumen mit $N_v \gg 1$.

Konvektion des Phasenraum-Volumens

Langreichweitige Felder

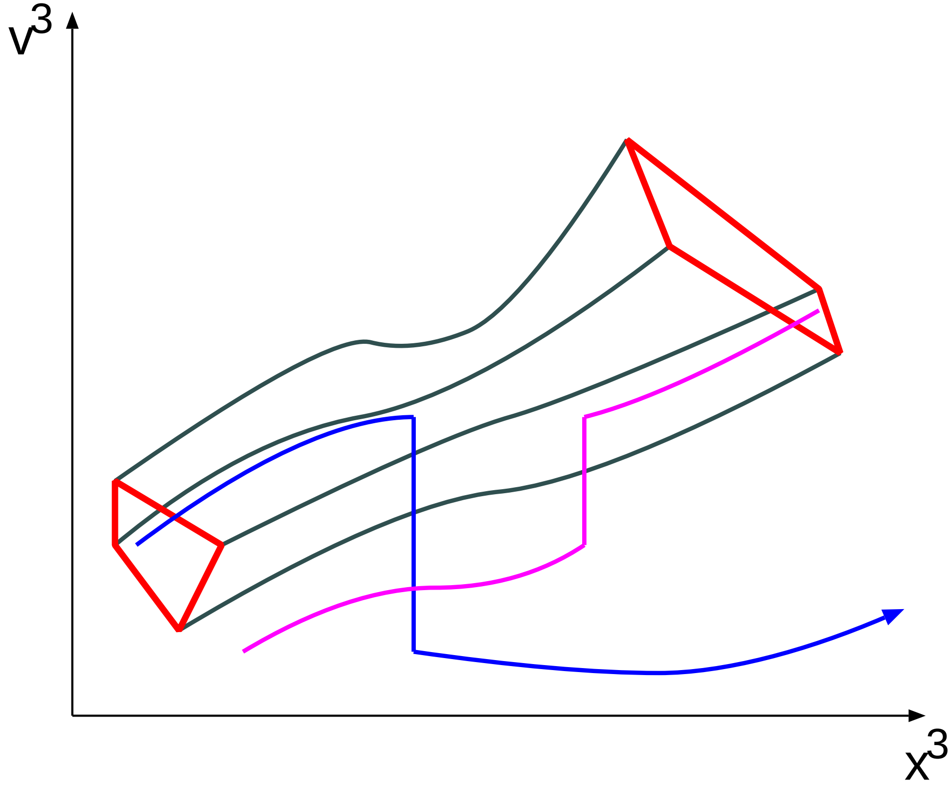


“Gleiche Kraft am gleichen Ort”

(im 6D-Phasenraum)

→ **Teilchenzahlerhaltung** im konvektiertem Phasenraumvolumen

Kurzreichweitige Stösse



Streuung ins/aus dem Phasenraumvolumen

→ **keine Teilchenzahlerhaltung**

Momente der Verteilungsfunktion

Makroskopische Grössen durch Mittelwertbildung:

$$< g(\vec{x},\vec{v}) >= \int g(\vec{x},\vec{v}) \;\; f(\vec{x},\vec{v},t)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3v$$

Ortsabhängige Grössen:

$$\begin{aligned}
\text{Teilchendichte} \quad n(\vec{x},t) &= \int_v f(\vec{x},\vec{v},t) \;\; \mathrm{d}^3v \\
\text{mittlere Geschwindigkeit} \quad u(\vec{x},t) &= \frac{1}{n}\int_v \vec{v} \;\; f(\vec{x},\vec{v},t) \;\; \mathrm{d}^3v \\
\text{kinetische Energiedichte} \quad w(\vec{x},t) &= \int_v \frac{1}{2}mv^2 \;\; f(\vec{x},\vec{v},t) \;\; \mathrm{d}^3v \\
\text{Drucktensor} \quad \overline{\overline{P}}(\vec{x},t) &= \int_v m\,(\vec{v}-\vec{u})\,(\vec{v}-\vec{u}) \;\; f(\vec{x},\vec{v},t) \;\; \mathrm{d}^3v
\end{aligned}$$

Die Temperatur

Maxwell-Verteilung:

$$f(\vec{v}) = \frac{n}{(\pi < v^2 >)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{< v^2 >}\right) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

Temperatur: $k_B T = \frac{1}{2} m < v^2 >$

Mit unterliegender Geschwindigkeit u: “Verschobene” Maxwell-Verteilung

$$f(\vec{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\vec{v}-\vec{u})^2}{2k_B T}\right)$$

“Temperatur” einer beliebigen Verteilungsfunktion:

$$k_B T = \frac{m}{n} \int_v \ (\vec{v}-\vec{u}) \cdot (\vec{v}-\vec{u}) \ \ f(\vec{x},\vec{v},t) \ \ \mathrm{d}^3 v$$

Vgl. mit (skalarem) Druck:

$$p = n k_B T$$

“Bewegungsgleichung” für die Verteilungsfunktion f

Nehmen langreichweitige Kräfte an (=Teilchenzahlerhaltung im Phasenraumvolumen)

Konvektion eines Orts $(\vec{x}, \vec{v})$ im Phasenraum:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{x}, \vec{v})$$

Erhaltung der Teilchenzahl:

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t)\ \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3v \ = \ f(\vec{x}', \vec{v}', t')\, \mathrm{d}^3x'\ \mathrm{d}^3v'$$

Rezept für die Bewegungsgleichung:
Berechne

1. Zeitentwicklung des Phasenraumvolumens $\mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3v$
2. Zeitentwicklung von $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$

und setze dies in die Gl. für Teilchenzahlerhaltung ein.

1. Schritt: Zeitentwicklung des Phasenraumvolumens

Zeitentwicklung der Koordinaten $t \to t + \delta t \qquad (\delta t \to 0)$

$$x'_r = x_r + v_r \delta t, \qquad v'_r = v_r + \frac{F_r}{m}\delta t, \qquad (r = x, y, z)$$

so dass

$$\frac{\mathrm{d}x'_r}{\mathrm{d}x_r} = 1 + \frac{\partial v_r}{\partial x_r}\delta t, \qquad \frac{\mathrm{d}v'_r}{\mathrm{d}v_r} = 1 + \frac{\partial}{\partial v_r}\left(\frac{F_r}{m}\right)\delta t$$

Zusammenfassen (nur Terme 1. Ordnung in δt):

$$\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}^3v' = \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3v\left[1 + \sum_r \frac{\partial v_r}{\partial x_r}\delta t + \sum_r \frac{\partial}{\partial v_r}\left(\frac{F_r}{m}\right)\delta t + O(\delta t^2)\right]$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}^3v'}{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3v} = \left[1 + (\nabla_x \cdot \vec{v})\,\delta t + \nabla_v \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m}\right)\delta t\right]$$

2. Schritt: Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion

$f = f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, und $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$

Kettenregel $\rightarrow$ "konvektive Ableitung"

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_v f) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + (\nabla_x f) \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}}_{\equiv \vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \nabla_v \right) f + (\vec{v} \cdot \nabla_x)\, f$$

Kraft auf Teilchen im Phasenraumelement: $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}) = m\, \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v \right) f + (\vec{v} \cdot \nabla_x)\, f$$

Bzw.

$$f' = f + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \delta t = f + \frac{\partial f}{\partial t}\, \delta t + \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v \right) f\, \delta t + (\vec{v} \cdot \nabla_x)\, f\, \delta t$$

Bewegungsgleichung

Einsetzen der vorherigen 2 Beziehungen in

$$f(\vec{x},\vec{v},t) \; = f(\vec{x}',\vec{v}',t')\,\frac{\mathrm{d}^3x'\;\mathrm{d}^3v'}{\mathrm{d}^3x\;\mathrm{d}^3v}$$

ergibt:

$$f(t) = \left[f(t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\nabla_v\right) f(t)\mathrm{d}t + (\vec{v}\cdot\nabla_x)\, f(t)\mathrm{d}t \right] \left[1 + (\nabla_x\cdot\vec{v})\,\mathrm{d}t + \nabla_v\cdot\left(\frac{\vec{F}}{m}\right)\mathrm{d}t \right]$$

In 1. Ordnung dt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x\cdot(\vec{v}f) + \nabla_v\cdot\left(\frac{\vec{F}}{m}f\right) = 0$$

Formal: Kontinuitätsgleichung für f (im 6-D Phasenraum)!

Vgl. “echte” Kontinuitätsgleichung für Flüssigkeitsströmung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{v}\rho) = 0$$

Vlasov-Gleichung

Betrachte $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Dann:

$$\nabla_v \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m} \right) = \frac{q}{m} \nabla_v \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = 0$$

z.B. x-Koordinate:

$$\frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial v_x} \left(E_x + v_y B_z - v_z B_y \right) = 0$$

Ausserdem: $\vec{x}$ und $\vec{v}$ unabhängige Koordinaten, d.h. $\partial v_r / \partial x_r = 0$.

$\Rightarrow$ *Vlasov*-Gleichung (Anatoly Vlasov, 1938):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_v f = 0$$

Gyrokinetische Gleichung

Vlasov-Gleichung berücksichtigt kompletten dynamischen Pfad der Phasenraumelemente.

Betrachte Gleichung für Gyrozentrendichte (anstatt Teilchendichte)

$f(\vec{X}, v_\parallel, \vec{V}_\perp, \psi, t)$ (ψ: Phasenwinkel der Gyration)

Koordinatentransformation: $\vec{X}$ - Gyrozentrumsposition:

$$\vec{x} = \vec{X} - \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{\omega_c B}, \qquad \vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp + \vec{v}_E, \qquad \vec{v}_\perp = v_\perp \left(\vec{e}_x \cos\psi - \vec{e}_y \sin\psi\right)$$

Ann. zur Vereinfachung: $\partial\vec{B}/\partial t = 0$, und $\vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B}/B^2$ (el. Drift)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(v_\parallel \frac{\vec{B}}{B}\right) \cdot \nabla_X f + \frac{qE_\parallel}{m}\frac{\partial f}{\partial v_\parallel} + \frac{q\vec{E}_\perp \cdot \vec{v}_\perp}{m v_\perp}\frac{\partial f}{\partial v_\perp} + \omega_c \left(1 - \frac{\vec{v}_E \cdot \vec{v}_\perp}{v_\perp^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$$

Mittelung über Gyrobewegung: $\partial < f > /\partial\psi = 0$, $< \vec{E}_\perp \cdot \vec{v}_\perp >= 0$:

$$\frac{\partial < f >}{\partial t} + \left(v_\parallel \frac{\vec{B}}{B} + \vec{v}_E\right) \cdot \nabla_X < f > + \frac{q}{m} E_\parallel \frac{\partial}{\partial v_\parallel} < f >= 0$$

Boltzmann-Gleichung

Boltzmann-Gleichung berücksichtigt kurzreichweitige Stösse

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \underbrace{\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c}_{\text{Stossoperator}}$$

dto. mit elektromagnetischer Kraft

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c$$

Z.B. *Krook*'scher Stossoperator (ohne Beweis):

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = \nu_n \left(f_n - f\right)$$

f_n: Verteilungsfunktion der Spezies, an der gestreut wird.

Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

Ein “einfaches” kinetisches Problem: Elektrostatische Wellen

Betrachten Elektronen, $q = -e$, elektrostatisches Problem: B, $\dot{B} = 0$, $\vec{E} = -\nabla\phi$

Stoßfreiheit → **Vlasov-Gleichung**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla_x f + \frac{e}{m}(\nabla\phi)\cdot\nabla_v f = 0$$

Haben zwei Unbekannte:

(Elektronenverteilung f, el. Potenzial ϕ)

→ Benötigen 2. Gleichung:

Poisson-Gleichung

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left[n_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f \, \mathrm{d}^3v\right]$$

Linearisieren (f_0, $\phi_0 = \text{const}$):

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla_x f_1 + \frac{e}{m}(\nabla\phi_1)\cdot\nabla_v f_0 = 0$$

$$\nabla^2\phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} f_1 \, \mathrm{d}^3v$$

Fourier-Ansatz (Vlasov, J.Phys.USSR ’45)

$$\partial/\partial t \to -i\omega, \qquad \nabla_x \to i\vec{k}$$

Wähle $\vec{k}\|\vec{e}_z$:

$$-i\omega f_1 + ikv_z f_1 + ik\frac{e}{m}\phi_1\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0$$

$$k^2\phi_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} f_1 \, \mathrm{d}^3v$$

Elektrostatische Wellen (2)

Ab jetzt lassen wir Index “1” für erste Ordnung von f und ϕ weg:

$$-i\omega f \ + ikv_z f \ + ik\frac{e}{m}\phi\,\frac{\partial f_0}{\partial v_z} \ = \ 0, \qquad k^2\phi = -\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathrm{d}^3 v$$

Vlasov-Gl. nach f auflösen und in Poisson-Gl. einsetzen:

$$k^2\phi = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m}k\phi \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v_z}{kv_z - \omega}\,\mathrm{d}^3 v$$

nach ϕ auflösen:

$$\underbrace{\left[1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v_z}{v_z - \omega/k}\,\mathrm{d}^3 v\right]}_{\text{Dispersionsfunktion } D}\phi = 0$$

– Nicht-triviale Lösung ($\phi \neq 0$) nur für $D = 0$

– Phasengeschwindigkeit der Welle: $v_{\mathrm{ph}} = \omega/k$

Singularität im Integranden für $v_{\mathrm{ph}} = v_z$! (noch zu behandeln)

Dispersionsrelation (1)

"Dispersionsrelation" für $\omega(k)$

$$D \equiv 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v_z}{v_z - \omega/k} \, \mathrm{d}^3 v = 0$$

Über $x-$ und $y-$Richtung kann integriert werden.

Def.: 1-D Verteilungsfunktion $F_0(v_z)$ mit $\int F_0 \mathrm{d}v_z = 1$:

$$F_0(v_z) \equiv \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\vec{v}) \, \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y$$

Außerdem: $\omega_p^2 = n_0 e^2/(\varepsilon_0 m)$

$\rightarrow$ "1-D" Dispersionsrelation:

$$D = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0/\partial v_z}{v_z - \omega/k} \, \mathrm{d}v_z = 0$$

Dispersionsrelation (2)

"1-D" Dispersionsrelation:

$$D \;=\; 1-\frac{\omega_p^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_0/\partial v_z}{v_z-\omega/k}\,\mathrm{d}v_z \;=\; 0$$

Partielle Integration: $\int uv' = [uv] - \int u'v$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_0/\partial v_z}{v_z-\omega/k}\,\mathrm{d}v_z = \left[\frac{F_0}{v_z-\omega/k}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0}{(v_z-\omega/k)^2}\,\mathrm{d}v_z$$

anwenden und mit k^2/ω^2 erweitern:

$$D \;=\; 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(v_z)}{\left(1-\frac{v_z k}{\omega}\right)^2}\,\mathrm{d}v_z \;=\; 0$$

Sonderfälle:

Stehende Welle, $k=0$

Kaltes Plasma, $v_z=0$

$\rightarrow \omega=\omega_p$

(Plasmaschwingungen)

Resonanz, $v_z=\omega/k=v_{\mathrm{ph}}$

Reelle Lösung existiert nur, wenn

$F_0\ (\omega/k)=0$

d.h. keine Teilchen stehen in Resonanz mit der Welle.

Grundsätzliches Problem, behandelt durch Lev Landau

$\rightarrow$ *"Landau-Dämpfung"*

(wir kommen darauf zurück)

Dispersionsrelation (3)

Betrachten jetzt nur hochfrequente Wellen: $(\omega/k) \gg v_{z,\max}$ bzw. $x \equiv v_{z,\max} k/\omega \ll 1$

$\rightarrow$ Entwicklung des Integranden von D: $(1-x)^{-2} \sim 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$, so dass

$$D(k,\omega) \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + 2\left(\frac{v_z k}{\omega}\right) + 3\left(\frac{v_z k}{\omega}\right)^2 + \ldots \right] F_0(v_z)\, \mathrm{d}v_z$$

Ann: Kein stationärer Strom. Dann verschwindet das Integral über den 2. Term.

Die Lösung bis zur 2. Ordnung lautet:

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + 3\frac{k^2 < v_z^2 >}{\omega^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 12k^2 \frac{< v_z^2 >}{\omega_p^2}}\right)$$

Bemerkungen:

(a) Schwingungslösung nur für positiven Zweig

(b) Für $\vec{u} = 0$ (vorherige Annahme) ist $< v_z^2 > \sim k_B T/m \sim \lambda_D^2 \omega_p^2$

(c) Entwicklung der Wurzel: $\sqrt{1+x} \sim x^2/2 - x^4/8 \pm \ldots$ Näherung für $12k^2\lambda_D^2 \ll 1$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 < v_z^2 > \qquad \text{(“Bohm-Gross-Dispersionsrelation”)}$$

Zusammenfassung

- In “kinetischer Beschreibung” von Plasmen wird die Dichte im Phasenraum betrachtet: $f(\vec{x},\vec{v},t)$ (Verteilungsfunktion)
- Die Verteilungsfunktion wird als kontinuierlich angenommen, d.h. über Phasenraumvolumen mit $N \gg 1$ gemittelt
- Die makroskopischen, ortsabhängigen Grössen Teilchendichte n, mittlere Geschwindigkeit $\vec{u}$, Drucktensor, etc. ergeben sich als Momente der Verteilungsfunktion
- Man unterscheidet
  - langreichweitige Wechselwirkung (z.B. Lorentz-Kraft) - im Phasenraumvolumen bleibt die Teilchenzahl erhalten
  - kurzreichweitige Stösse - Streuung in das bzw. aus dem Phasenraumvolumen
- “Bewegungsgleichungen” für f:
  - Vlasov-Gleichung - elektromagnetische Kräfte, keine kurzeichweitigen Stösse
  - Boltzmann-Gleichung - inkl. kurzreichweitige Stösse
  - Gyrokinetische Gleichung - für Gyrozentrendichte