Flüssigkeits-Beschreibung von Plasmen

“Flüssiges Plasma, Wellen in einem blauen Ton” (ArenaCreative, Colourbox #2425387)

Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Beschreibung von Plasmen

- Einzelteilchen-Beschreibung
  - Kraft auf jedes einzelne Teilchen: $F = F(t, \vec{x}, \vec{v})$
  - Bewegungsgleichungen: $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = (q/m)F$ (viele!)
- Kinetische Beschreibung
  - Verteilungsfunktion (Dichte) im 6-dimensionalen Phasenraum $f(t, \vec{x}, \vec{v})$
  - Bewegungsgleichung: Teilchenzahlerhaltung im Phasenraumvolumen
- **Flüssigkeits-Beschreibung** $\leftarrow$ *(wir sind hier)*
  - Geschwindigkeits-Momente der Verteilungsfunktion $\int \vec{v}^k f(t, \vec{x}, \vec{v})$
  - Bewegungsgleichung für die Momente (potenziell unendlich viele für $k = 0 \ldots \infty$)
  - Abbruch bei endlichem k:
    * Nur wenige ortsabhängige Gleichungen (überschaubar!)
    * (Unendlicher) Regress der jeweils k-ten Gleichung auf v^{k+1}

Momentengleichungen

Oft kann oder soll die Verteilungsfunktion nicht geschlossen bestimmt werden.
$\rightarrow$ Entwicklung nach Momenten der Geschwindigkeit.

k-tes Moment, Boltzmann-Gleichung:

$$\int_v \vec{v}^k \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}^3 v + \int_v \vec{v}^{k+1} \cdot \nabla_x f \mathrm{d}^3 v + \int_v \vec{v}^k \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f \mathrm{d}^3 v = \int_v \vec{v}^k \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c \mathrm{d}^3 v$$

“Schliessungsproblem”:
Die k-te Gleichung beinhaltet die $k+1$-te Potenz von $\vec{v}$!
$\rightarrow$ Zur korrekten Lösung müssten eigentlich alle (unendliche viele!) Momenten-Gleichungen gemeinsam gelöst werden. *Kommen darauf zurück!*

Zunächst berechnen wir die Momente $k = 0 \ldots 2$.

Null-tes Moment: Kontinuitätsgleichung

Boltzmann-Gleichung über $\vec{v}$ integrieren,
Stoßterm (R.S.) verschwindet, da kurzreichweitige Stöße die Dichte nicht verändern:

$$\int_v \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}^3 v + \int_v \vec{v} \cdot \nabla_x f \mathrm{d}^3 v + \int_v \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f \mathrm{d}^3 v = \underbrace{\int_v \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c \mathrm{d}^3 v}_{=0}$$

Dritter Term (mit Satz von Gauss) verschwindet, wenn f für $v \to \infty$ schnell abfällt:

$$\int_v \vec{F} \cdot \nabla_v f \mathrm{d}^3 v = \int_v \nabla_v \cdot \left(\vec{F}\, f\right) \mathrm{d}^3 v = \int_S \left(\vec{F}\, f\right) \cdot \mathrm{d}S_v = 0$$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung für die betrachtete Spezies:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\, u) = 0}$$

Ladungserhaltung: $\times q$ und über alle Spezies aufsummieren:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Erstes Moment

Boltzmann-Gleichung, $\int_v m\vec{v}\ldots$:

$$m\int_v \vec{v}\frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}^3v + m\int_v \vec{v}\left(\vec{v}\cdot\nabla_x f\right)\,\mathrm{d}^3v + \int_v \vec{v}\left(\vec{F}\cdot\nabla_v\right)\,f\,\mathrm{d}^3v = m\int_v \vec{v}\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c \mathrm{d}^3v$$

L.S., Erstes Integral:

$$m\int_v \vec{v}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}^3v = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\int_v \vec{v} f\mathrm{d}^3v\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(mn\vec{u}\right)$$

L.S., Zweites Integral:

$$m\int_v \vec{v}\left(\vec{v}\cdot\nabla_x f\right)\mathrm{d}^3v = \nabla_x\cdot\left[m\int_v \vec{v}\,\vec{v} f\mathrm{d}^3v\right] - m\int_v f\underbrace{\left(\nabla_x\cdot\vec{v}\,\vec{v}\right)}_{=0}\mathrm{d}^3v$$

Umschreiben, mit $\vec{v}\,\vec{v} = (\vec{v}-\vec{u})\,(\vec{v}-\vec{u}) + \vec{u}\,\vec{v} + \vec{v}\,\vec{u} - \vec{u}\,\vec{u}$:

$$m\int_v \vec{v}\,\vec{v} f\mathrm{d}^3v \;=\; m\int_v (\vec{v}-\vec{u})\,(\vec{v}-\vec{u})\,f\mathrm{d}^3v \;+\; 2m\vec{u}\underbrace{\int_v \vec{v} f\mathrm{d}^3v}_{=n\vec{u}} - m\vec{u}\,\vec{u}\underbrace{\int_v f\mathrm{d}^3v}_{=n} \;=\; \overline{\overline{P}} + mn\vec{u}\,\vec{u}$$

Erstes Moment: Kraftgleichung

L.S., Drittes Integral (Ann.: F sei Lorentz-Kraft, $\nabla_v F = 0$)

$$\int_v \vec{v}\left(\vec{F}\cdot\nabla_v\right) f\,\mathrm{d}^3v \;=\; \int_v \vec{v}\left[\nabla_v\cdot\left(\vec{F}f\right)\right]\mathrm{d}^3v \;=\; -\int_v \vec{F} f \mathrm{d}^3v \;=\; -qn\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right)$$

R.S., Kollisionsterm: Impulsübertrag pro Volumen und Zeit durch Stöße

$$m\int_v \vec{v}\frac{\delta_c f}{\delta t}\mathrm{d}^3v = \frac{\delta_c p}{\delta t}$$

Alles zusammenfassen und geeignet umformen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\vec{u}) + \nabla\cdot(mn\vec{u}\vec{u}) \;=\; mn\underbrace{\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right]}_{\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}t} \;=\; \underbrace{nq\left[\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right]}_{\text{Lorentz}-\text{Kraft}} \; \underbrace{-\nabla\cdot\overline{\overline{P}}}_{\text{Druckgradient}} \;+\; \underbrace{\frac{\delta_c p}{\delta t}}_{\text{Reibungskraft}}$$

(Newton'sche Kraftgleichung auf Flüssigkeitselement)

Zweites Moment

I.a.: $\vec{v}\,\vec{v}$: Tensor 2. Ordnung $\Rightarrow$ 9 Gleichungen

(6 nicht-redundant, 3 Diagonal-, 3 Nebendiagonalelemente)

Hier: Benutze $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$ (Spur) als 2. Moment

Multipliziere mit Boltzmann-Gl (und integriere über alle Geschwindigkeiten)

$$\frac{m}{2}\int_v v^2 \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}^3v + \frac{m}{2}\int_v v^2\,(\vec{v}\cdot\nabla_x f)\,\mathrm{d}^3v + \frac{1}{2}\int_v v^2\left(\vec{F}\cdot\nabla_v\right) f\mathrm{d}^3v = m\int_v v^2\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c \mathrm{d}^3v$$

L.S., Erster Term, W: Kinetische Energiedichte

$$\frac{m}{2}\int_v v^2 \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}^3v = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_v \frac{1}{2}mv^2 f\mathrm{d}^3v\right) = \frac{\partial W}{\partial t}$$

L.S., Zweiter Term, $\vec{Q}$: Wärmefluss

$$\frac{m}{2}\int_v v^2\,(\vec{v}\cdot\nabla_x f)\,\mathrm{d}^3v = \nabla\cdot\left(\int_v \frac{1}{2}\vec{v}\,v^2 f\mathrm{d}^3v\right) = \nabla\cdot\vec{Q}$$

Zweites Moment: Energiegleichung

L.S., Dritter Term, mit $\nabla_v v^2 = 2\vec{v}$, und $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \rightarrow$ Joule'sche Wärme

$$\frac{1}{2}\int_v v^2\left(\vec{F}\cdot\nabla_v f\right)\mathrm{d}^3v = -\frac{1}{2}\int_v f\left(\vec{F}\cdot\nabla_v v^2\right)\mathrm{d}^3v = -q\vec{E}\cdot\int_v \vec{v}f\mathrm{d}^3v = -\vec{E}\cdot\vec{j}_i$$

Energiegleichung i-te Spezies:

$$\boxed{\frac{\partial W_i}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{Q}_i - \vec{E}\cdot\vec{j}_i = \int_v \frac{1}{2}m_i v^2\frac{\delta_c f_i}{\delta t}\mathrm{d}^3v}$$

Summation über alle Spezies, Kollisionsterm (Energieaustausch) hebt sich auf:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{\nabla\cdot\vec{Q}}_{\text{Wärmeleitung}} = \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{j}}_{\text{Wärmequelle}}$$

Das Schliessungsproblem

Der Term $\vec{v}\cdot\nabla f$ der Boltzmanngleichung verknüpft jede Momentengleichung mit dem nächsthöheren Moment $\rightarrow$ Zur Schliessung des Systems mit endlich vielen Gleichungen ist eine zusätzliche Bedingung notwendig.

Keine allgemeine Lösung dieses “Schliessungsproblems”

(Triviale) **Option 1: Kaltes Plasma**

Wenn $k_BT \rightarrow 0$, dann $p = nk_BT = 0$ und normalerweise auch

$$\overline{\overline{P}} = 0$$

(alle Tensorkomponenten).

$\rightarrow$ Kraftgleichung ist höchstes Moment, da keine Wärme mehr gespeicher ist:

$$mn\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] = nq\left[\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right] + \frac{\delta_c p}{\delta t}$$

Option 2: Adiabatische Zustandsgleichung

Ideales Gas: $pV = Nk_B T$.

Thermodynamisches Gleichgewicht: $pV^\gamma = const.$, $(\gamma = C_p/C_v)$.

Skalarer Druck: $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{1}} p$

Wenn Teilchendichte gegeben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{p}{n^\gamma} = 0, \qquad p = p_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^\gamma$$

Verknüpfung mit Zahl der Freiheitsgrade z:

$$\gamma = \frac{z+2}{z}$$

$\Rightarrow$ 3-D: $\gamma = 5/3$, 2-D: $\gamma = 2$, 1-D: $\gamma = 3$

Option 3: Zustandsgleichung für nicht-isotropen Druck

Geringe Kopplung (Stöße) zwischen Bewegung $\|\vec{B}$ und $\perp \vec{B} \Rightarrow$ Anisotroper Druck-Tensor

$$\overline{\overline{P}} = p_\perp \overline{\overline{1}} + \left(p_\| - p_\perp\right) \frac{\vec{B}\vec{B}}{B^2} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\| \end{pmatrix}$$

mit $\quad p_\| = nk_B T_\|, \quad p_\perp = nk_B T_\perp.$

$$p_\| = p_{\|,0} \left(\frac{n}{n_0}\right)^3, \qquad p_\perp = p_{\perp,0} \left(\frac{n}{n_0}\right)^2$$

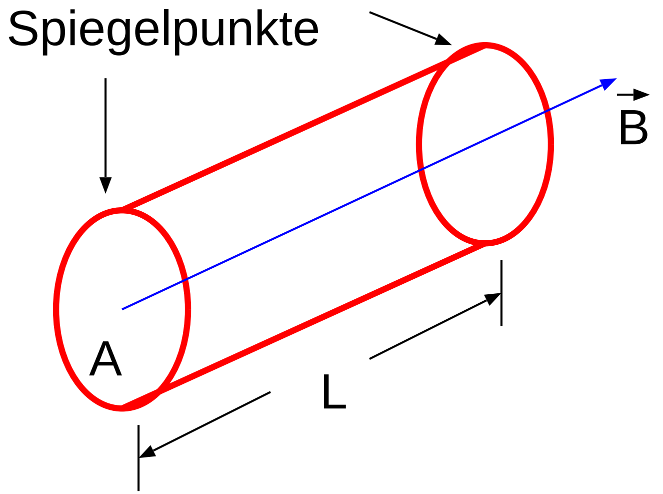
Allerdings:

- Keine Kopplung der Druckkomponenten im inhomogenen $\vec{B}$-Feld
- Keine Feldabhängigkeit von $p_\|/p_\perp$ (wie z.B. im magnetischen Spiegel)

Option 4: *Chew-Goldberger-Low*-Zustandsgleichungen

1. Adiabatische Invariante: Erhaltung des magnetischen Moments:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv_\perp^2}{2B}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{k_B T_\perp}{B}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_\perp}{n\,B}\right) = 0$$



2. Adiabatische Invariante:

Erhaltung von $J = \oint v_\parallel ds$, bzw. $J = v_\parallel L = const.$

Teilchenzahlerhaltung: $N = nAL = const.$

Flusserhaltung: $\Psi = AB = const.$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{J^2\Psi^2}{N} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2p_\parallel L^2}{nm}\,\frac{B^2A^2}{n^2A^2L^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_\parallel B^2}{n^3}\right) = 0$$

Ideales Gas: $T_\perp \propto B, \qquad T_\parallel \propto (n/B)^2$

Temperatur-Anisotropie bei Strömung im inhomogenen $\vec{B}$-Feld, z.B. Magnetosphäre

Zusammenfassung: Flüssigkeits-Beschreibung

Flüssigkeitsgleichungen (je Spezies)

$k = 0$: Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\,u) = 0$$

$k = 1$: Kraftgleichung

$$mn\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] = nq\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right) - \nabla\cdot\overline{\overline{P}} + \frac{\delta_c p}{\delta t}$$

$k = 2$: Energiegleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{Q} - \vec{E}\cdot\vec{j} = \int_v \frac{1}{2}mv^2\,\frac{\delta_c f}{\delta t}\,\mathrm{d}^3 v$$

Schliessungen

1. Kaltes Plasma: $\overline{\overline{P}} = 0$
2. Adiabatische Schliessung: $\overline{\overline{P}} = p$

$$p = p_0\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\gamma}$$

Mit z: Zahl der Freiheitsgrade:

$$\gamma = \frac{z+2}{z}$$