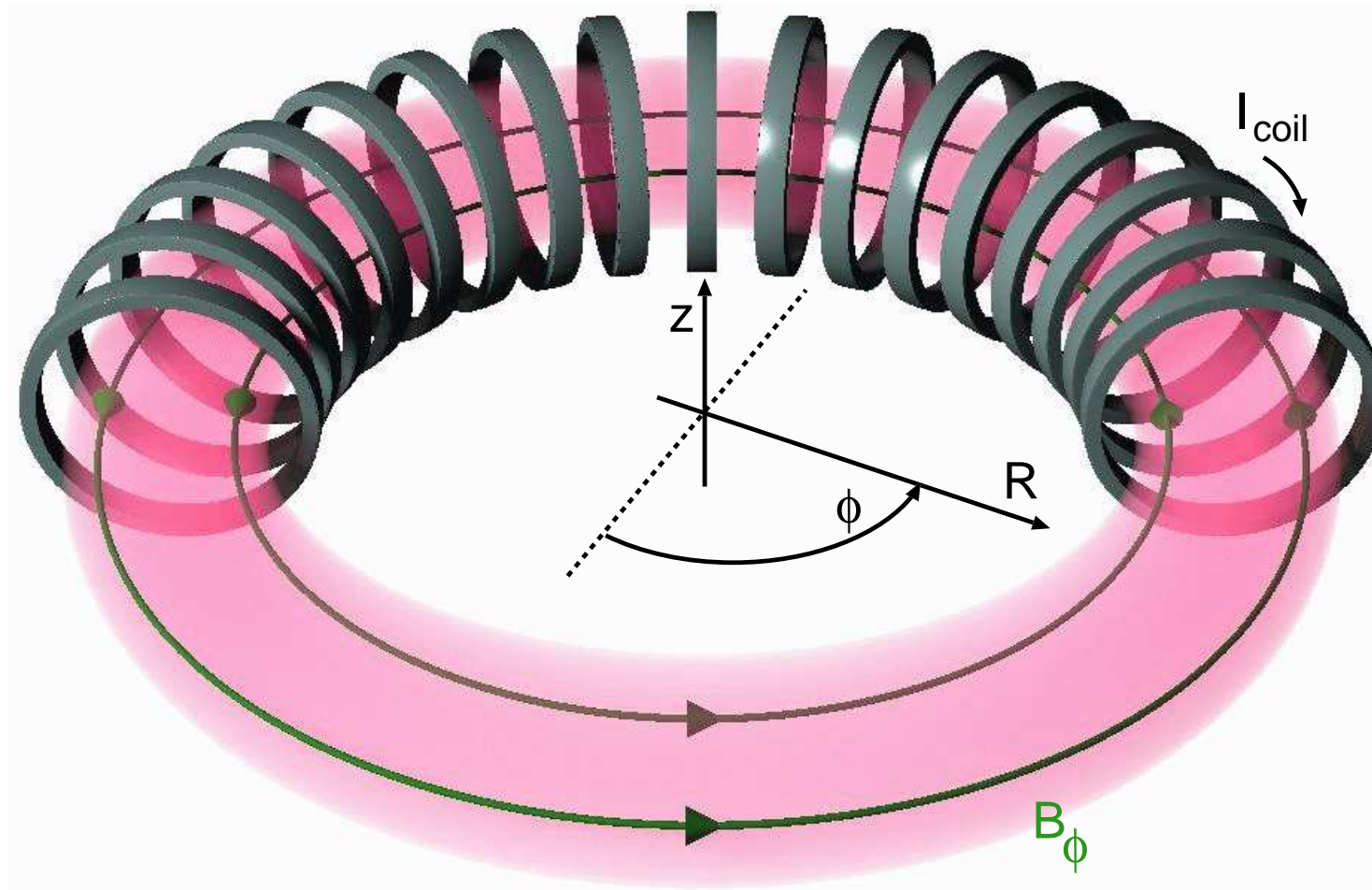


# Axisymmetrische toroidale Konfigurationen



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

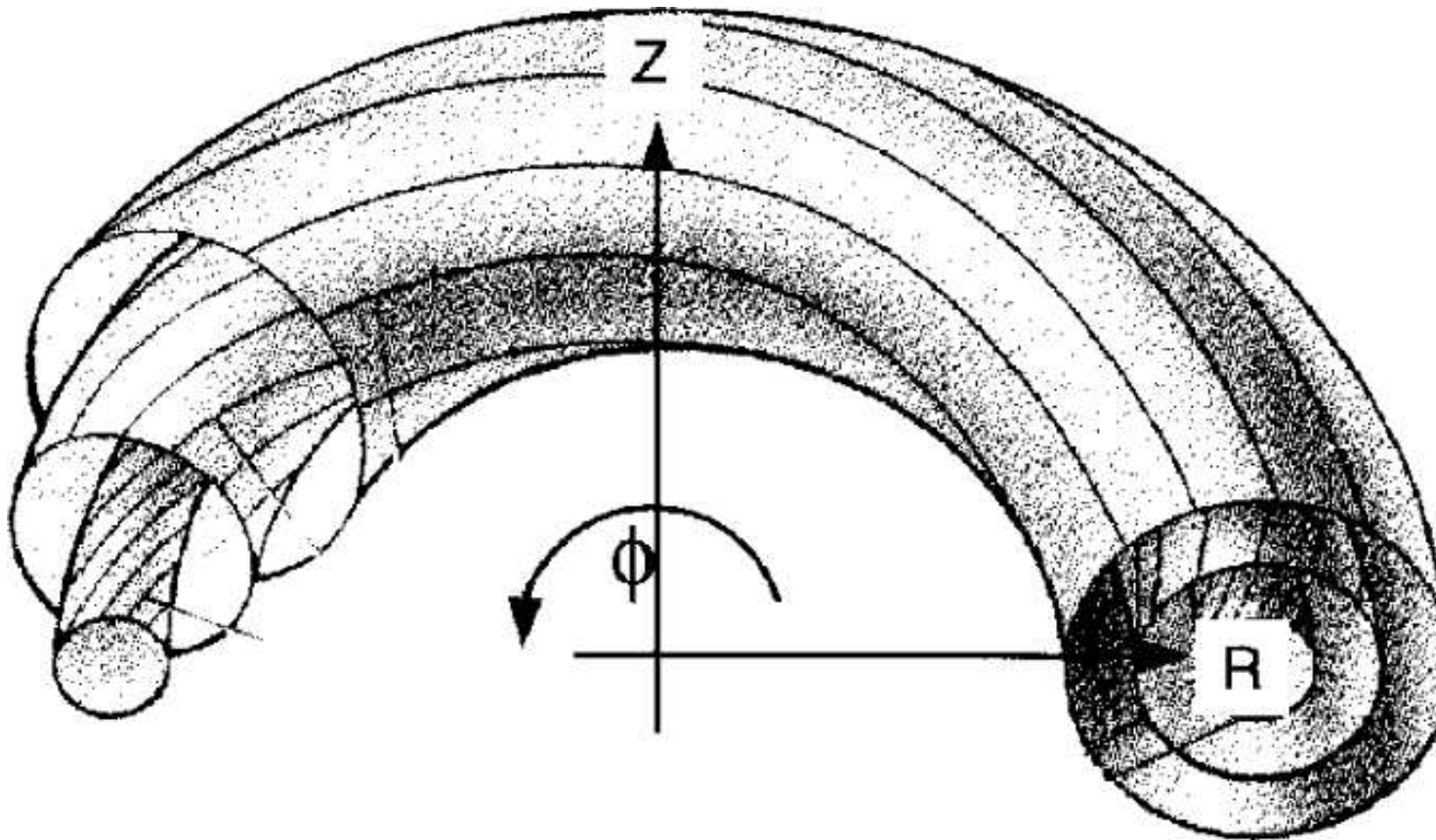
# Inhalt

Toroidale Konfiguration schliesst  $\vec{B}$ -Feld innerhalb des Plasmas  
 $\Rightarrow$  keine Strömung  $\vec{B}$  auf die Wand (End-Verluste)

- Koordinaten im Torus
- Poloidale und toroidale Flüsse
- Axi-symmetrische Konfigurationen
  - Grad-Shafranov(-Schlüter)-Gleichung
  - Der Tokamak
  - Tokamak-Beispiel: “ASDEX Upgrade”

# Koordinatensystem

$\equiv$  Zylinderkoordinaten mit  $z$ -Achse = Torusachse



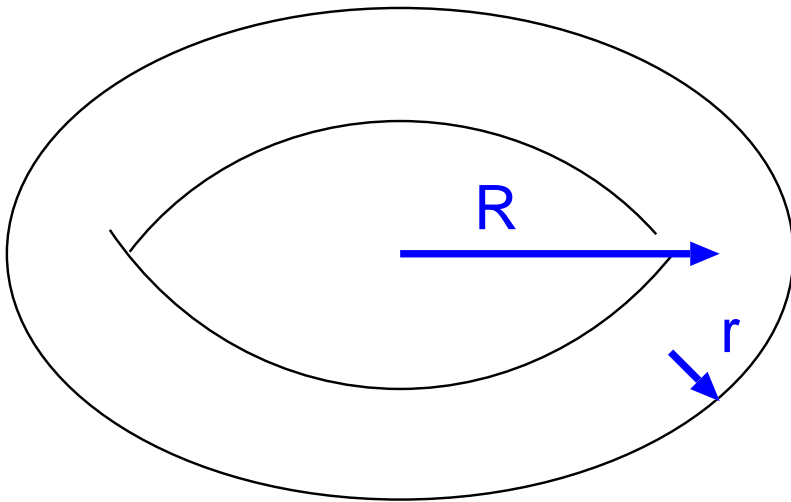
$B_\theta, j_\theta \rightarrow B_p, j_p$  (poloidale Größen)

$B_z, j_z \rightarrow B_\phi, j_\phi$  (toroidale Größen)

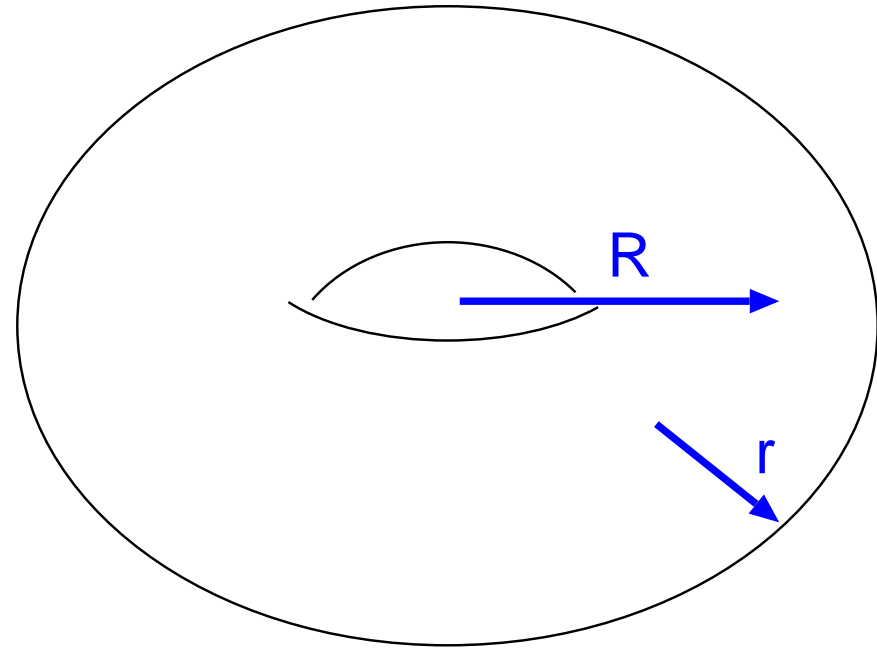
## Aspektverhältnis

$A \equiv R/r =$  großer Radius / kleiner Radius.

$\varepsilon \equiv 1/A$  (inverses Aspektverhältnis)



A gross



A klein

Grenzfall  $A \rightarrow \infty$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ): Keine Krümmung, lineare Plasmasäule

## Torusdrift (Teilchenbild)

### Grad- $B$ und Krümmungsdrift

(s. Teil I, Plasmaphysik):

$$\vec{v}_d = \frac{mv_{\parallel}^2 + mv_{\perp}^2/2}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3}$$

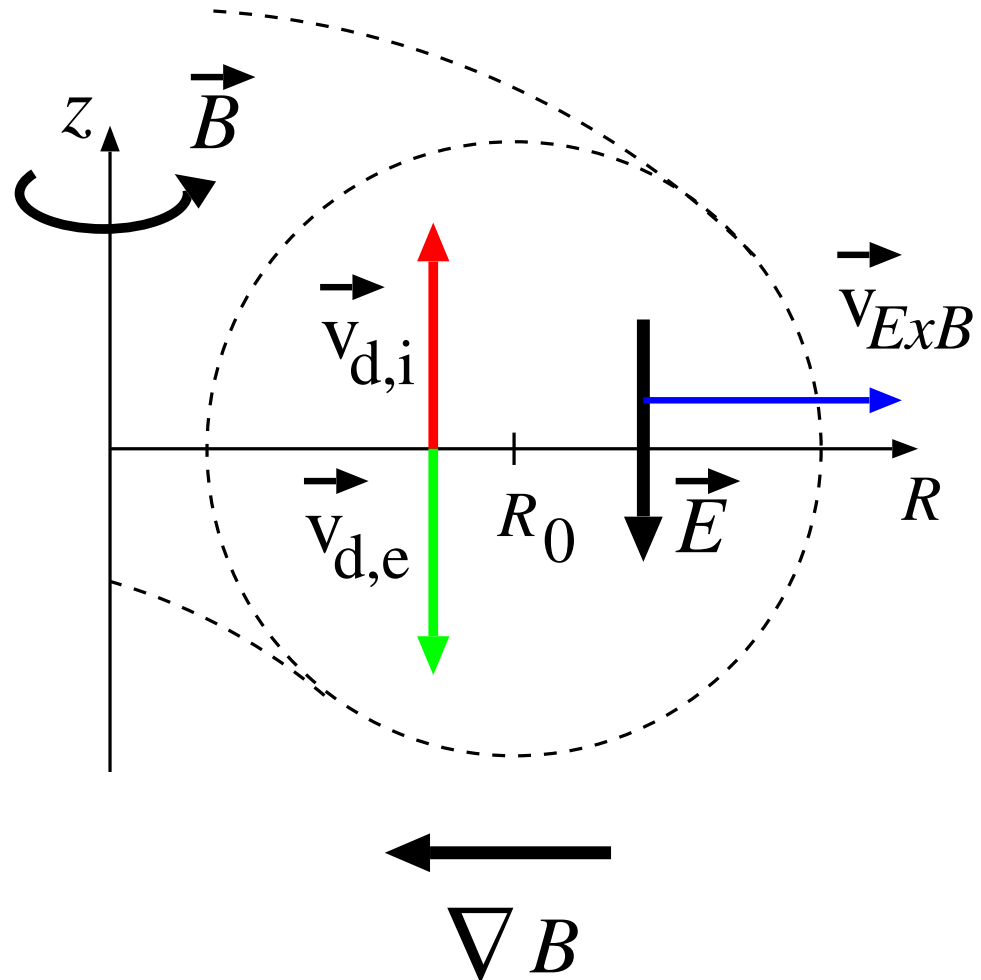
→ Ladungstrennung, vertikales  $\vec{E}$ -Feld.

$E \times B$ -Drift:

$$v_{E \times B} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Schneller radialer Teilchenverlust

$$\Delta t \sim r/v_d \sim (r L_B) \omega_c / v_{th}^2 \sim \frac{r^2 \omega_c}{\epsilon v_{th}^2}$$



## Lösung: Zusätzliches poloidales Magnetfeld

Teilchenbild:

Poloidales Feld führt Gyrozentrum  
abwechselnd auf beide Seiten des Äquators

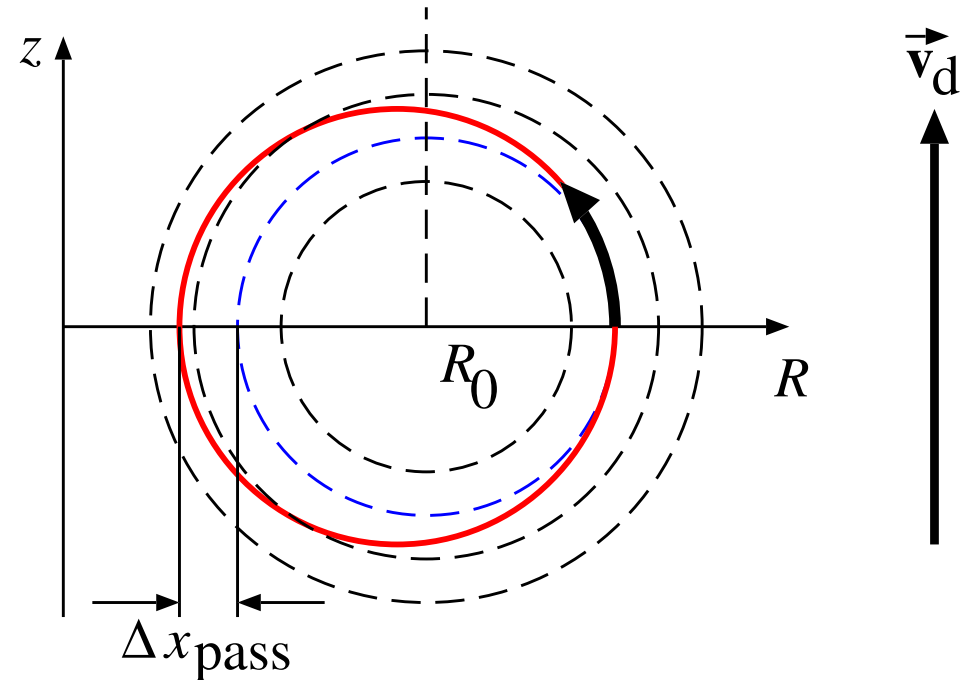
⇒ Torusdrift abwechselnd radial einwärts  
und auswärts

Torusdrift wird kompensiert

Beachte: Magnetischer Spiegel

$$B \propto 1/R$$

→ Teilchen können gefangen sein



## Poloidalfeld im MHD-Bild

Kraftgleichgewicht:  $\nabla p = j_{\perp} \times B$

$\nabla p$  konstant auf Flußflächen.

Betrachte zwei Punkte auf einer Flußfläche:  $R_1 < R_2$ :

Toroidalfeld  $B_{\phi}(R_1) > B_{\phi}(R_2)$ .

$\Rightarrow$  Poloidale Stromdichte:  $j_p(R_2) > j_p(R_1)$ .

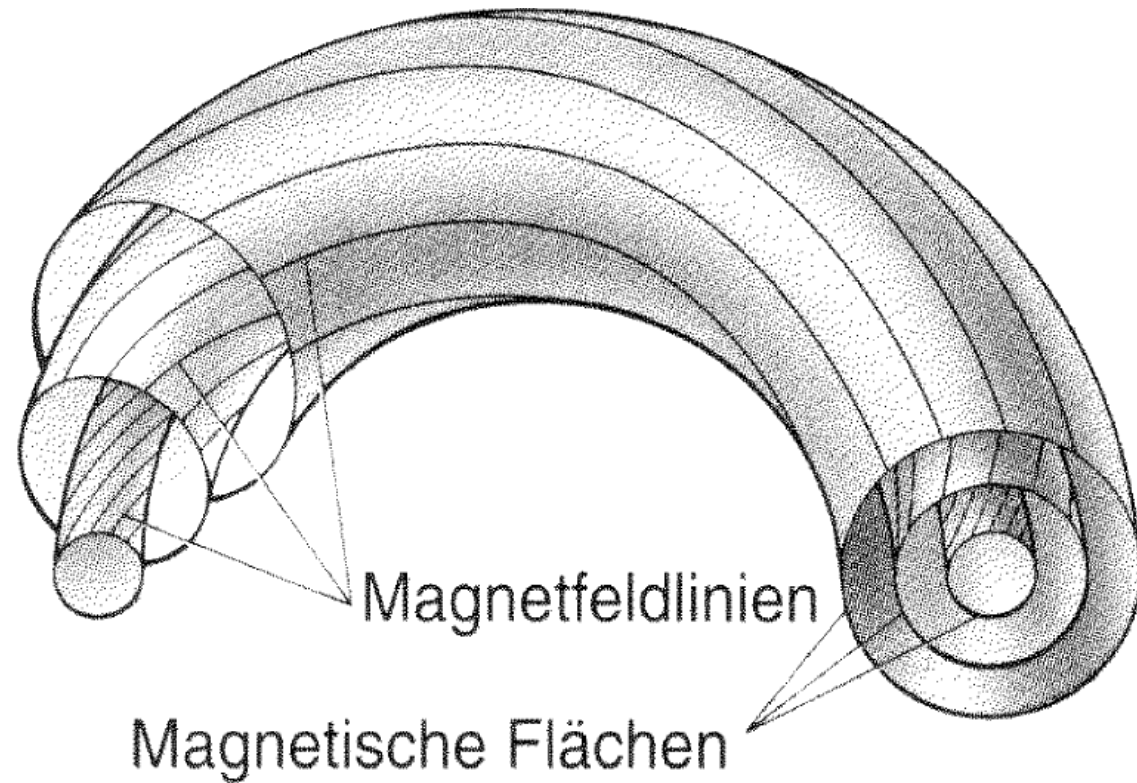
Ohne weiteres ist diese Stromdichte nicht quelfrei!

Quellfreiheit wird hergestellt durch zusätzlichen toroidalen Strom  $j_{\phi,PS}$  (“Pfirsch-Schlüter-Strom”):

$$\nabla_{\phi} \cdot \nabla j_{\phi,PS} + \nabla_p \cdot \nabla j_p = 0$$

(Gesamter toroidaler Strom  $I_{\phi} = \int_A \vec{j}_{\phi} dA$  kann null oder endlich sein, jedoch kann die Stromdichte  $j_{\phi}$  nicht überall null sein)

# Der Sicherheitsfaktor



Def. Sicherheitsfaktor:

$$q = \frac{\text{Zahl toroidale Umläufe}}{\text{Zahl poloidale Umläufe}}$$

... einer Feldlinie.

Zylindrische Näherung (*screw pinch*):

$$q = \frac{r}{R} \frac{B_\phi}{B_p}$$

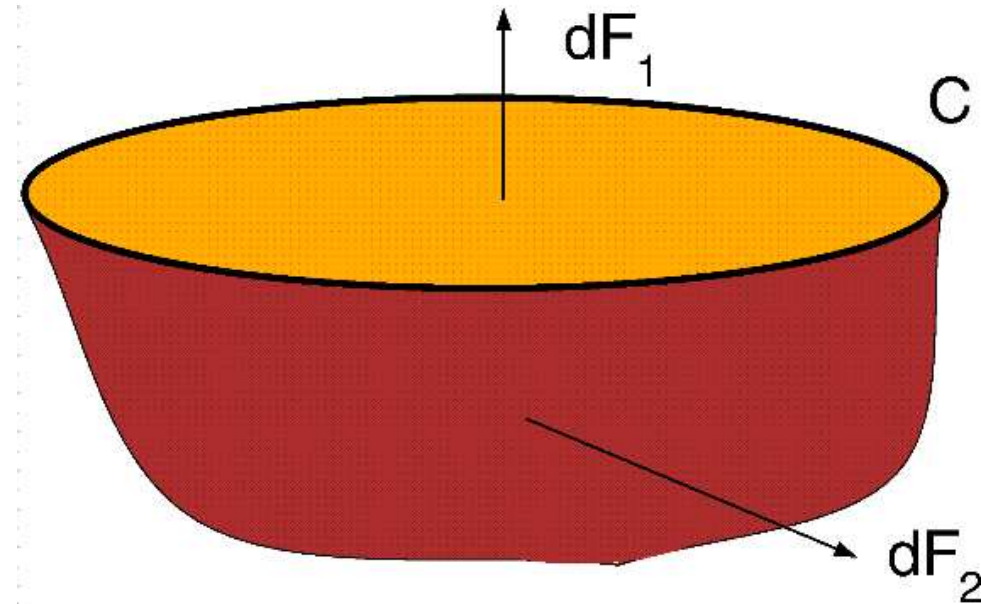
Stabilität:  $\boxed{q > 1}$  (normalerweise)



# Magnetischer Fluß, elektrischer Stromfluß

Maxwell:  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ,

Keine Ladungsquellen:  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$



$$\int_{F_1} \vec{B} d\vec{A} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{A} = \int_{F_1+F_2} \vec{B} d\vec{A}$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{Gauss'scher Satz}} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

$\Rightarrow$  Flüsse

$$\psi \equiv \int_F \vec{B} d\vec{A}, \quad I \equiv \int_F \vec{j} d\vec{A}$$

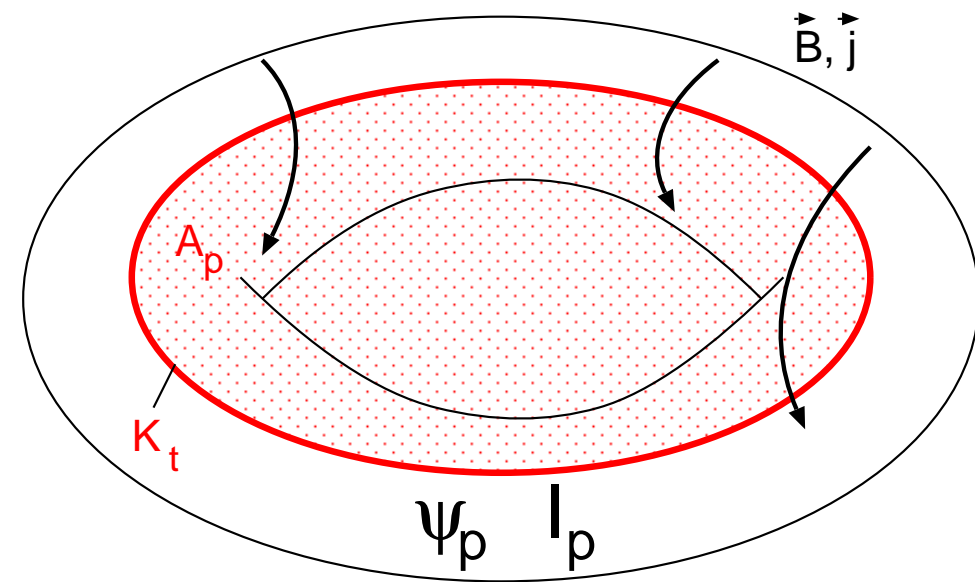
hängen nur von Umrandung der durchströmten Fläche ab.

## Poloidaler und toroidaler Fluß

Magnetische Flächen im Torus: 2 Möglichkeiten der Umrandung

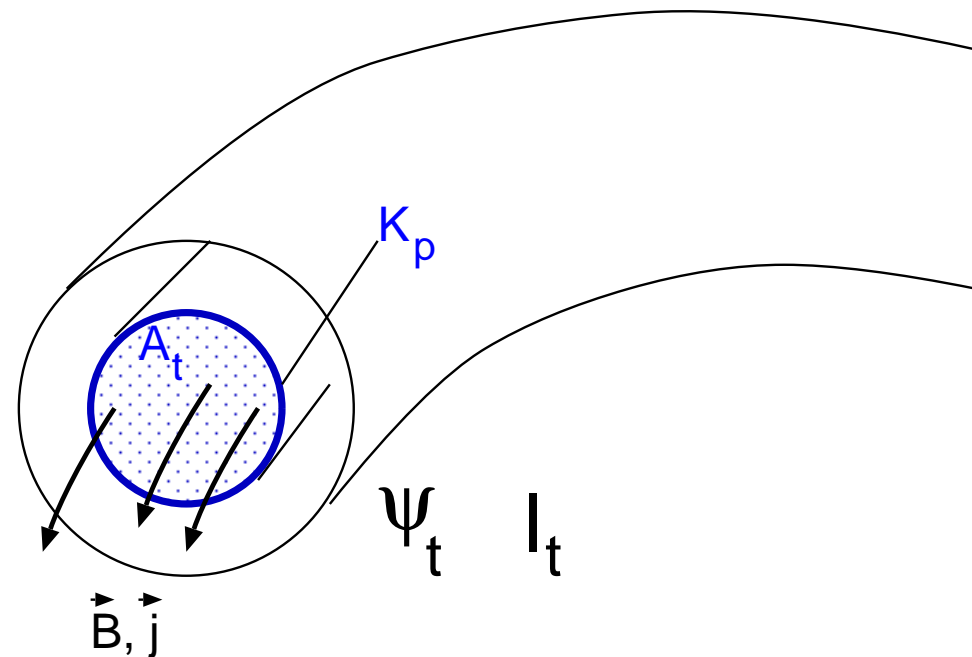
**Poloidaler Fluß** durch Fläche mit

- poloidaler Normalen  $A_p$
- toroidal umlaufender Umrandung  $K_t$



**Toroidaler Fluß** durch Fläche mit

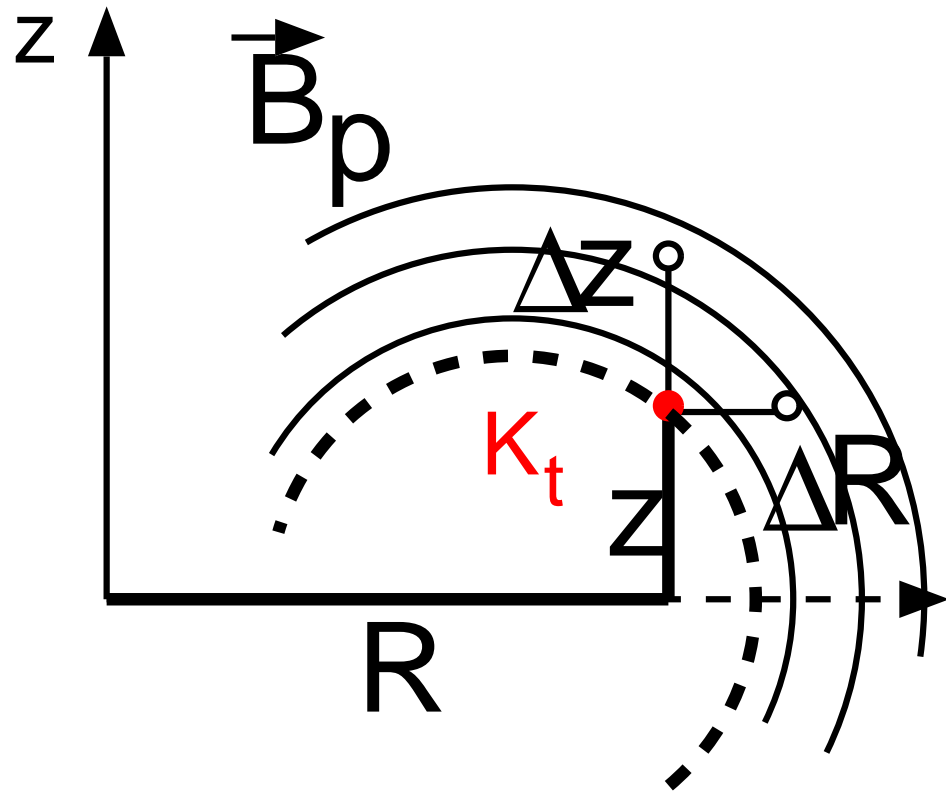
- toroidaler Normalen  $A_t$
- poloidal umlaufender Umrandung  $K_p$



Magnetische Flächen werden durch  $p$ ,  $\psi_p$  und  $\psi_t$  charakterisiert. → “Flußflächengrößen”

Wählen im Folgenden poloidale Flüsse ( $\psi_p, I_p$ ).

# Poloidales Magnetfeld $\leftrightarrow$ pol. magnetischer Fluß



Flußdifferenz, benachbarte Flächen:

$$\psi_p(R, z + \Delta z) = \psi_p(R, z) - 2\pi R B_R \Delta z$$

$$\psi_p(R + \Delta R, z) = \psi_p(R, z) + 2\pi R B_z \Delta R$$

$\rightarrow$  Poloidalfeld-Komponenten:

$$B_R = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \psi_p}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \psi_p}{\partial R}$$

## Toroidale Stromdichte

Ampère'sche Gesetz  $\vec{j} = \nabla \times \vec{B} / \mu_0$  in Zylinderkoordinaten  $(R, \phi, z)$ :

$$j_R = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_z}{R \partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right), \quad j_\phi = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R} \right), \quad j_z = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial(RB_\phi)}{R \partial R} - \frac{\partial B_R}{R \partial \phi} \right),$$

Toroidale Stromdichte:

$$j_\phi = -\frac{1}{2\pi\mu_0} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_p}{\partial R} \right) \right] \equiv -\frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{1}{R} \Delta^* \psi_p$$

$\Delta^*$ : “*Elliptischer Differentialoperator*”

## Vakuum-Toroidalfeld

Einschränkende Annahme: **Axialsymmetrie** ( $\partial/\partial\phi = 0$ )

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial(RB_\phi)}{R\partial R} - \underbrace{\frac{\partial B_R}{R\partial\phi}}_{=0} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{R} \frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} \underbrace{=0}_{\text{Vakuum}}$$

Vakuum ( $j_z = 0$ ):  $RB_\phi = \text{const.}$

$$B_\phi \propto R^{-1}$$

(unabhängig von der Form der felderzeugenden Spulen)

## **Toroidalfeld $\leftrightarrow$ poloidaler elektrischer Strom**

Poloidaler Stromfluß  $I_p$  (durch Fläche  $A_p$ , berandet durch  $K_t$ ):

$$I_p = \int \vec{j} dA_p = \int \vec{j}_p dA_p = \frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times B_\phi) dA_p = \frac{1}{\mu_0} \oint_{K_t} B_\phi dK_t = 2\pi \frac{RB_\phi}{\mu_0}$$

(Stokes'scher Satz  $\int \nabla \times \vec{B} dA = \oint_K \vec{B} dK$ )

$I_p$  Flußflächengröße  $\rightarrow RB_\phi$  Flußflächengröße.

## Radiale Kraftbilanz

$$(\nabla p)_R = (\vec{j} \times \vec{B})_R, \quad \text{Zylinderkoordinaten: } \frac{\partial p}{\partial R} = j_\phi B_z - j_z B_\phi$$

Einsetzen aller bisherigen Gleichungen  $\rightarrow$  durch poloidalen Fluß  $\psi_p$  ausdrücken:

$$\frac{\partial p}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial R} = -\frac{1}{4\pi^2 \mu_0} \frac{1}{R^2} \Delta^* \psi_p \frac{\partial \psi_p}{\partial R} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{R^2} \frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} RB_\phi$$

Da  $RB_\phi = I_p \mu_0 / (2\pi)$ :

$$\frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial(I_p)}{\partial R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial I_p}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial R}$$

Einsetzen und Dividieren durch  $\partial \psi_p / \partial R$ ,  $' \equiv \partial / \partial \psi_p$

$\rightarrow$  **Grad-Shafranov (-Schlüter) Gleichung:**

$$\Delta^* \psi_p = -4\pi^2 \mu_0 R^2 p' - \mu_0^2 I_p I_p'$$

Nichtlineare DGL in  $\psi_p$ !

Zur Lösung spezifiziere  $p(\psi_p)$  und  $I_p I_p'(\psi_p)$  sowie Randbedingungen.

## Analytische Lösungen der GSS-Gleichung

$$\Delta^* \psi_p = 2\pi\mu_0 R j_\phi = \left[ \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_p}{\partial R} \right) \right] = -\mu_0^2 I_p I'_p - 4\pi^2 \mu_0 R^2 p' \equiv C_1 + R^2 C_2$$

( $C_1, C_2$  konstant)

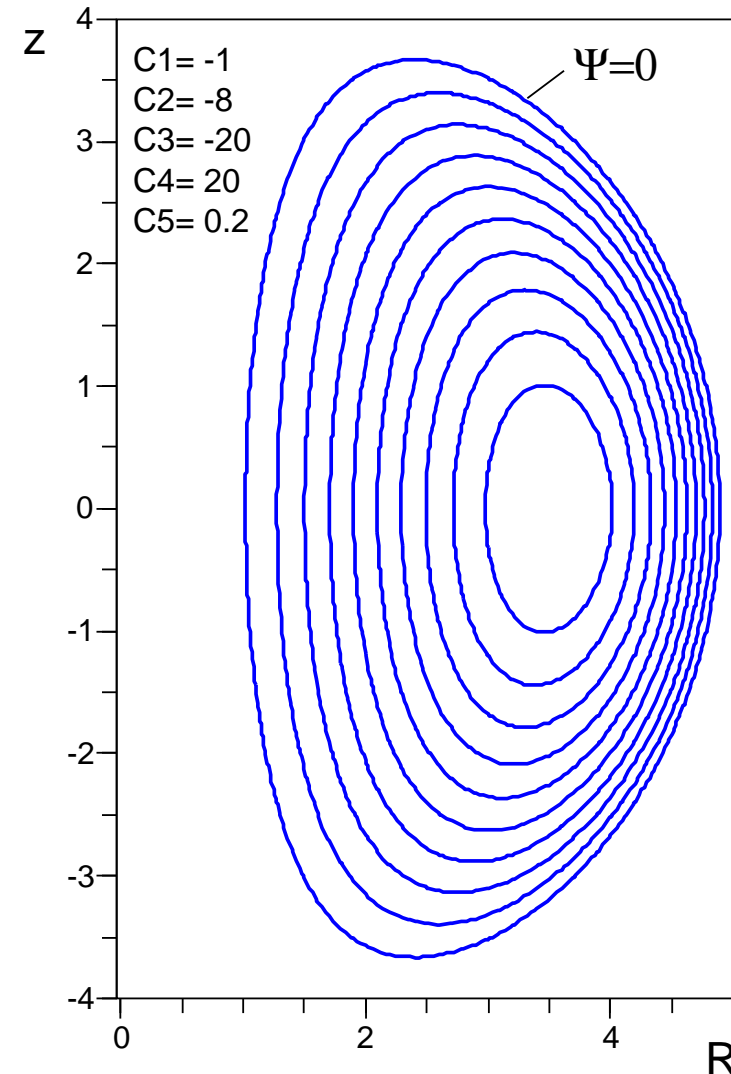
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \psi_p &= \frac{C_1}{2} z^2 + \frac{C_2}{8} R^4 \\ &+ \underbrace{C_3 + C_4 R^2 + C_5 (R^4 - 4R^2 z^2) + \dots}_{\text{Lösungen homogene Gl.}} \end{aligned}$$

(Beweis durch Einsetzen)

Lösungen der homogenen Gleichung (Vakuum)  
erfüllen Randbedingungen für  $\psi_p$   
(Fluß aufgrund äußerer Magnetfeldspulen)

→ Plasmalage, Plasmaform!

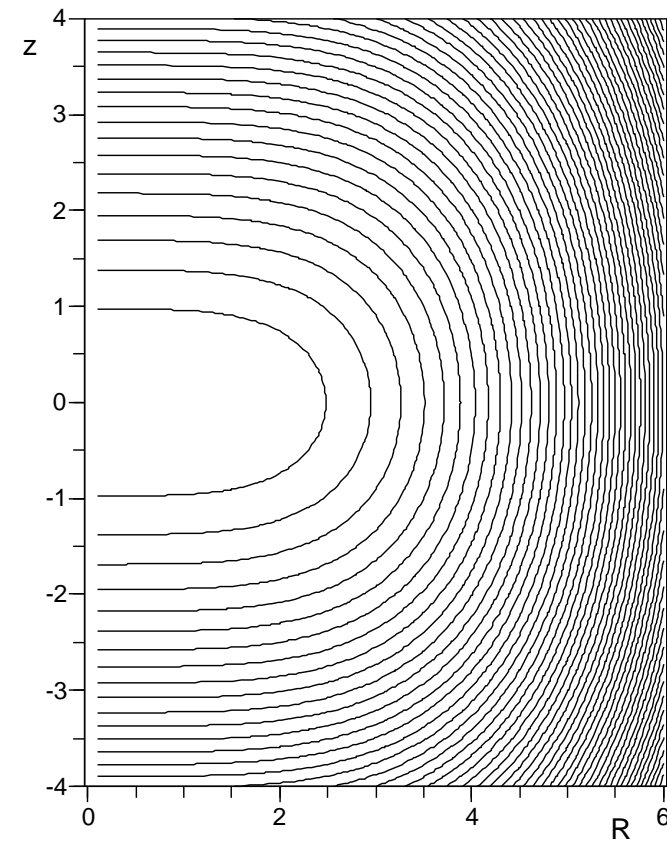




# Vertikalfeld

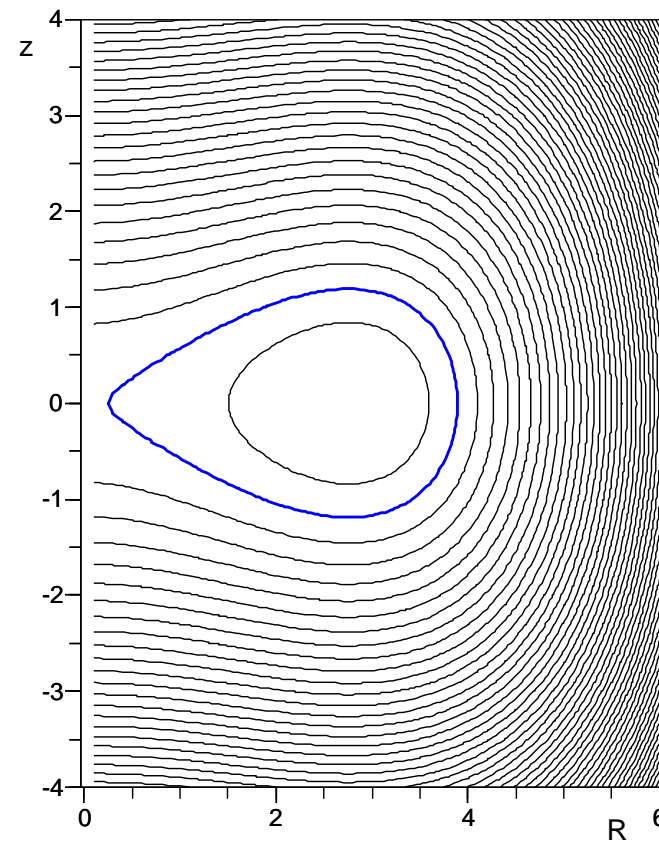
$$B_z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \psi_p}{\partial R}, \quad \text{homogenes Vertialfeld: } \psi_p \propto R^2$$

Kein Vakuumfeld



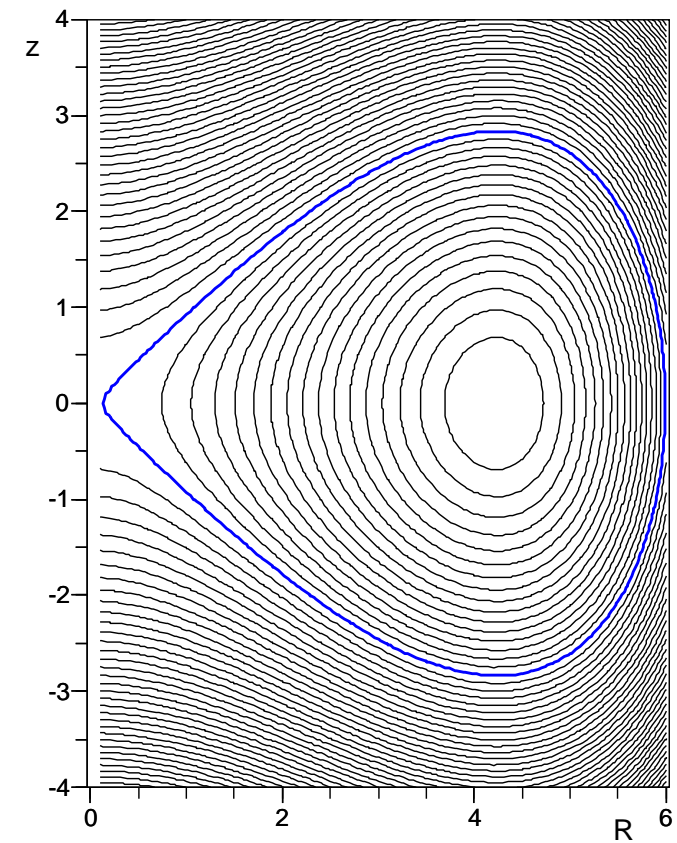
$$C_1 = -10, C_2 = -1, C_3 = C_4 = C_5 = 0$$

Kleines (positives) Vertikalfeld



$$C_4 = 1.89$$

Großes (positives) Vertikalfeld



$$C_4 = 4.49$$

# Der Tokamak

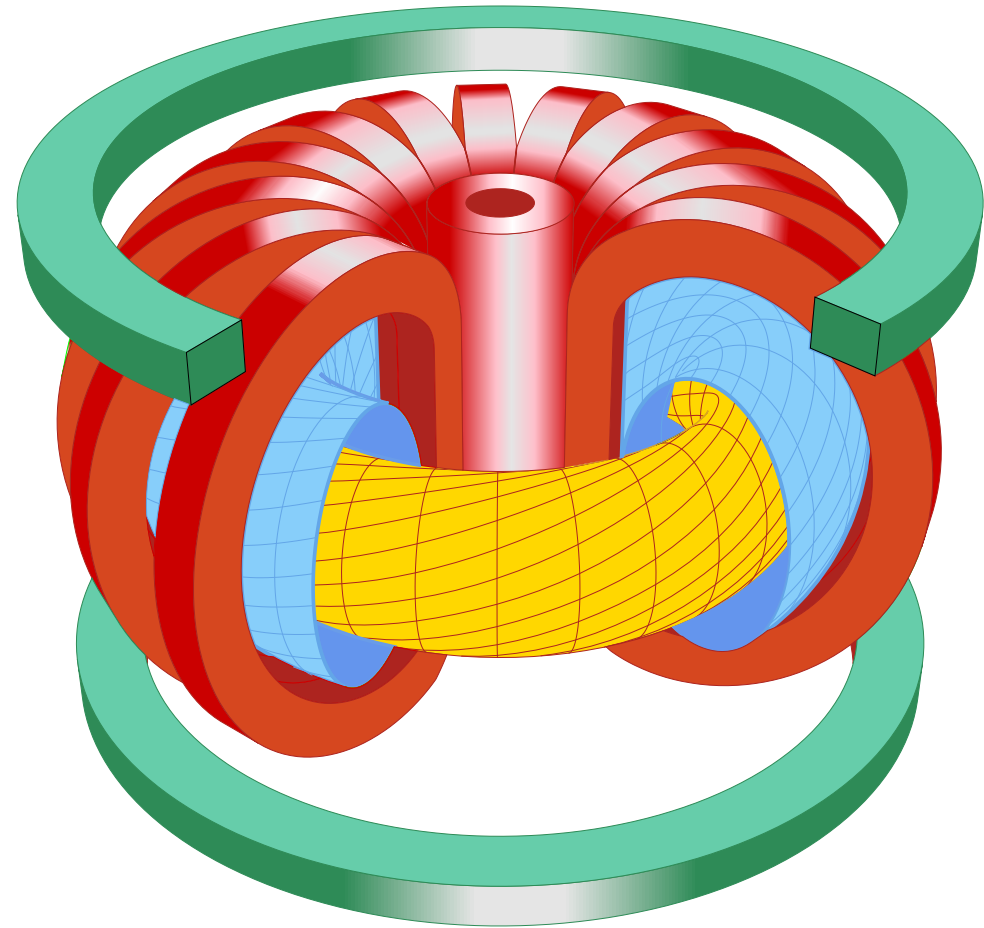
Tokamak =

**toroidalnaja kamera** (toroidale Kammer)

**magnitnaja katushka** (magnetische Spulen)

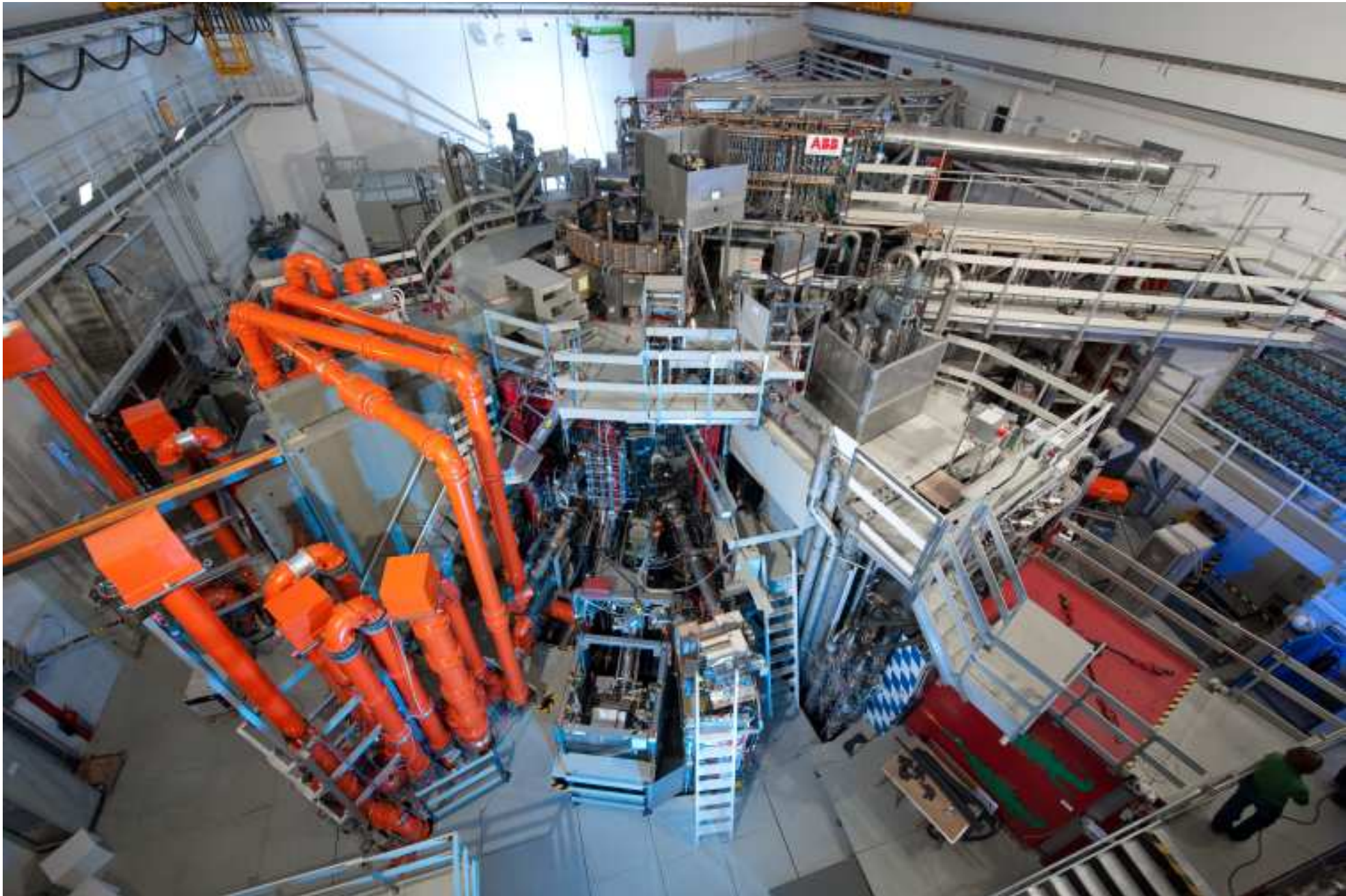
Tamm, Sakharov (1952)

- torusförmiges axisymmetrisches Plasma
- Toroidalfeld durch poloidale Spulen
- Vertikalfeld durch toroidale Spulen
- Zentraler Solenoid (“OH-Trafo”):
  - $\partial\psi_p/\partial t$
  - toroidale Ringspannung
  - toroidaler Plasmastrom  $j_\phi$ 
    - Kraftgleichgewicht
    - Ohm’sche Heizung





# Axial-Symmetrisches Divertor EXperiment (ASDEX) Upgrade



Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (Garching)

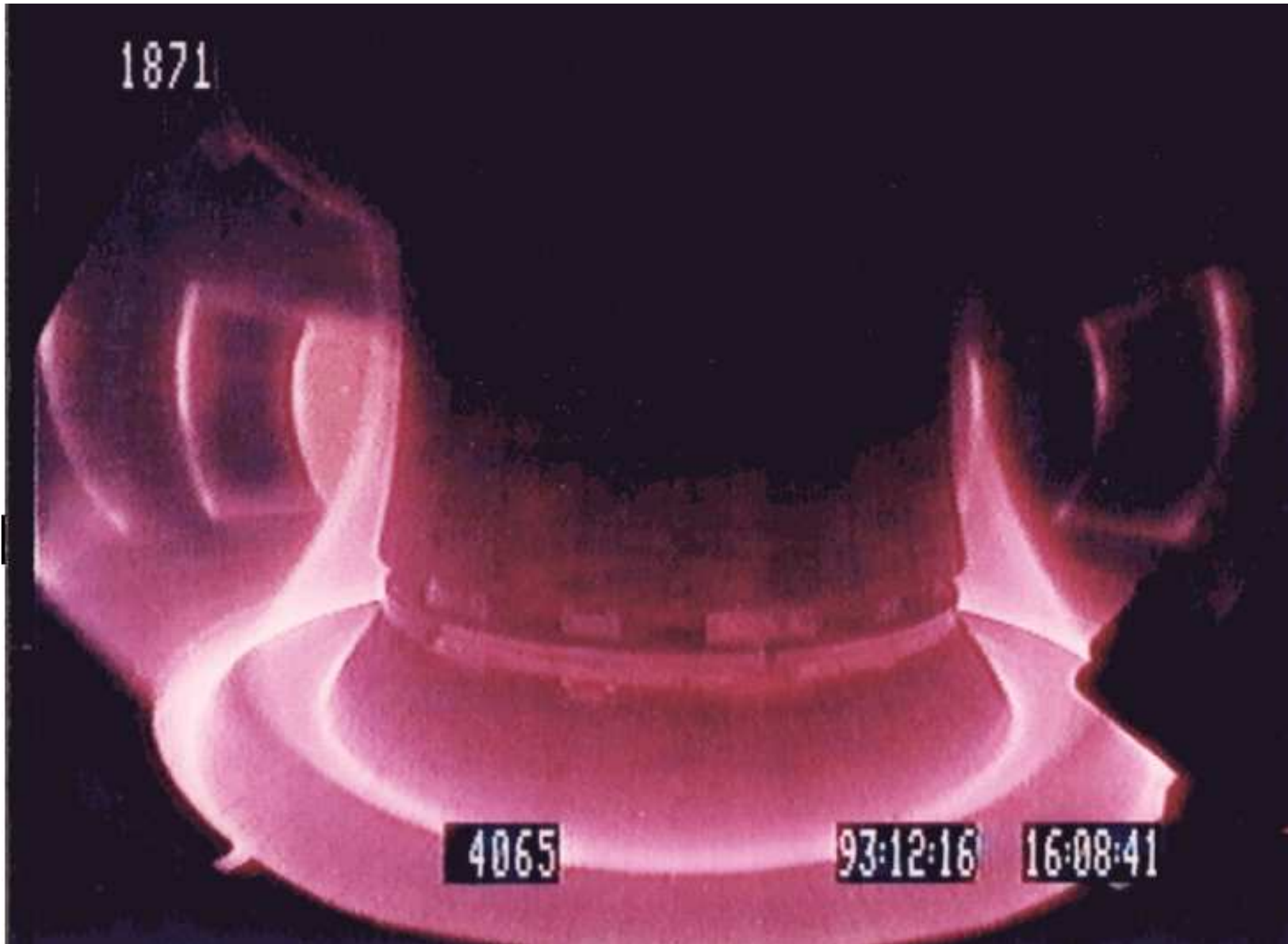


## ASDEX Upgrade, Plasmagefäß (innen)



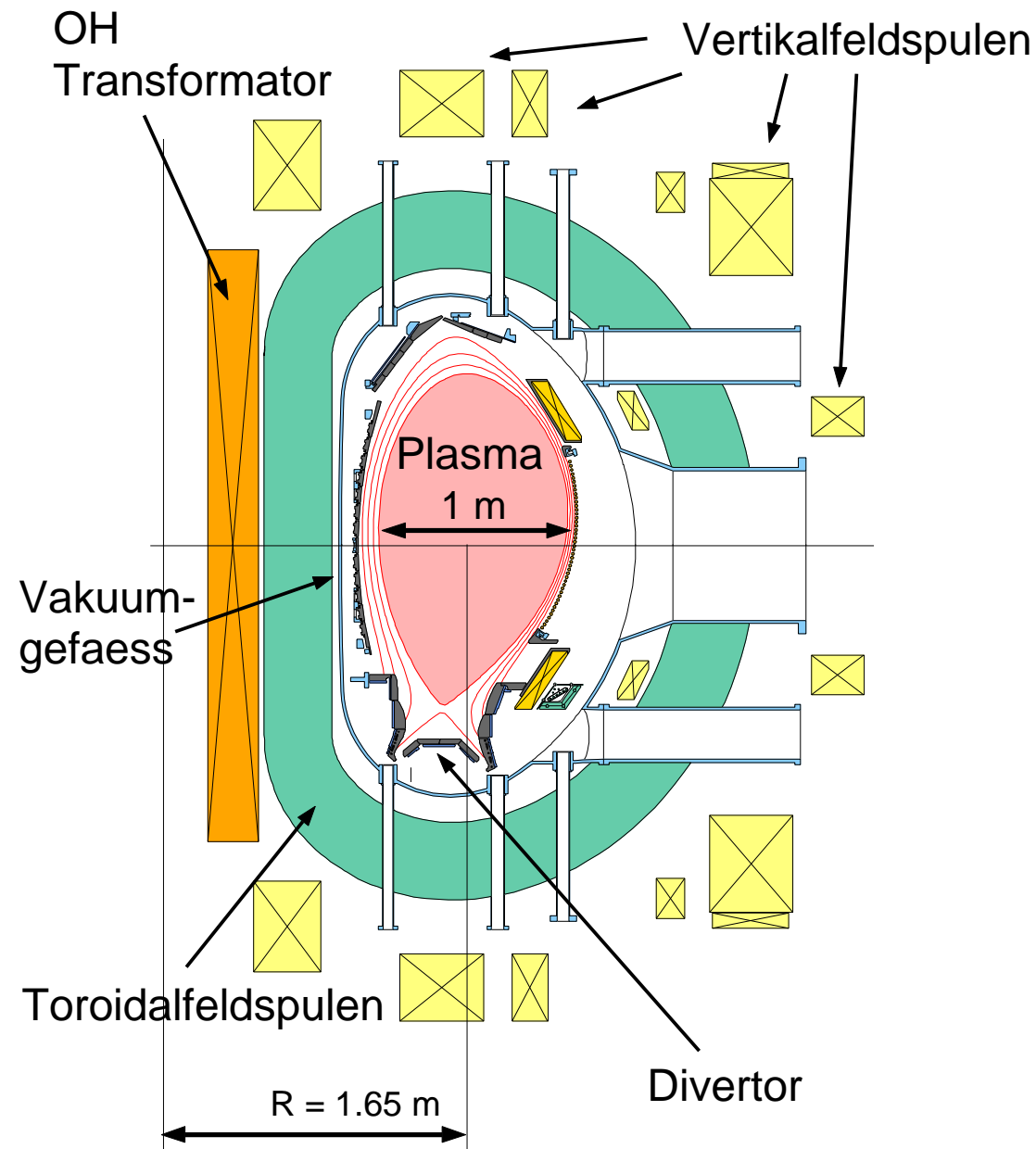
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (Garching)

## ASDEX Upgrade, Plasma



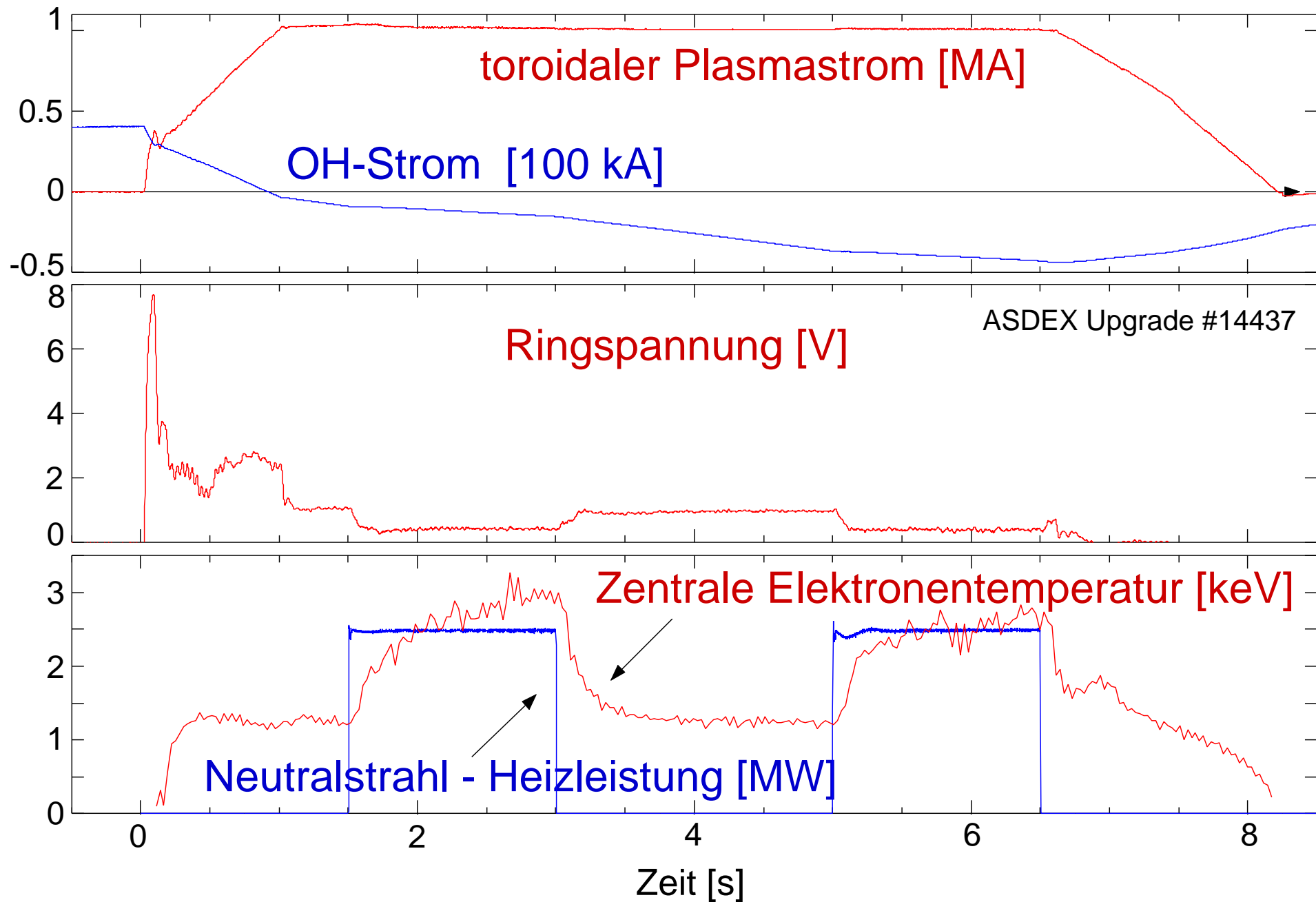
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (Garching)

# ASDEX Upgrade, Daten



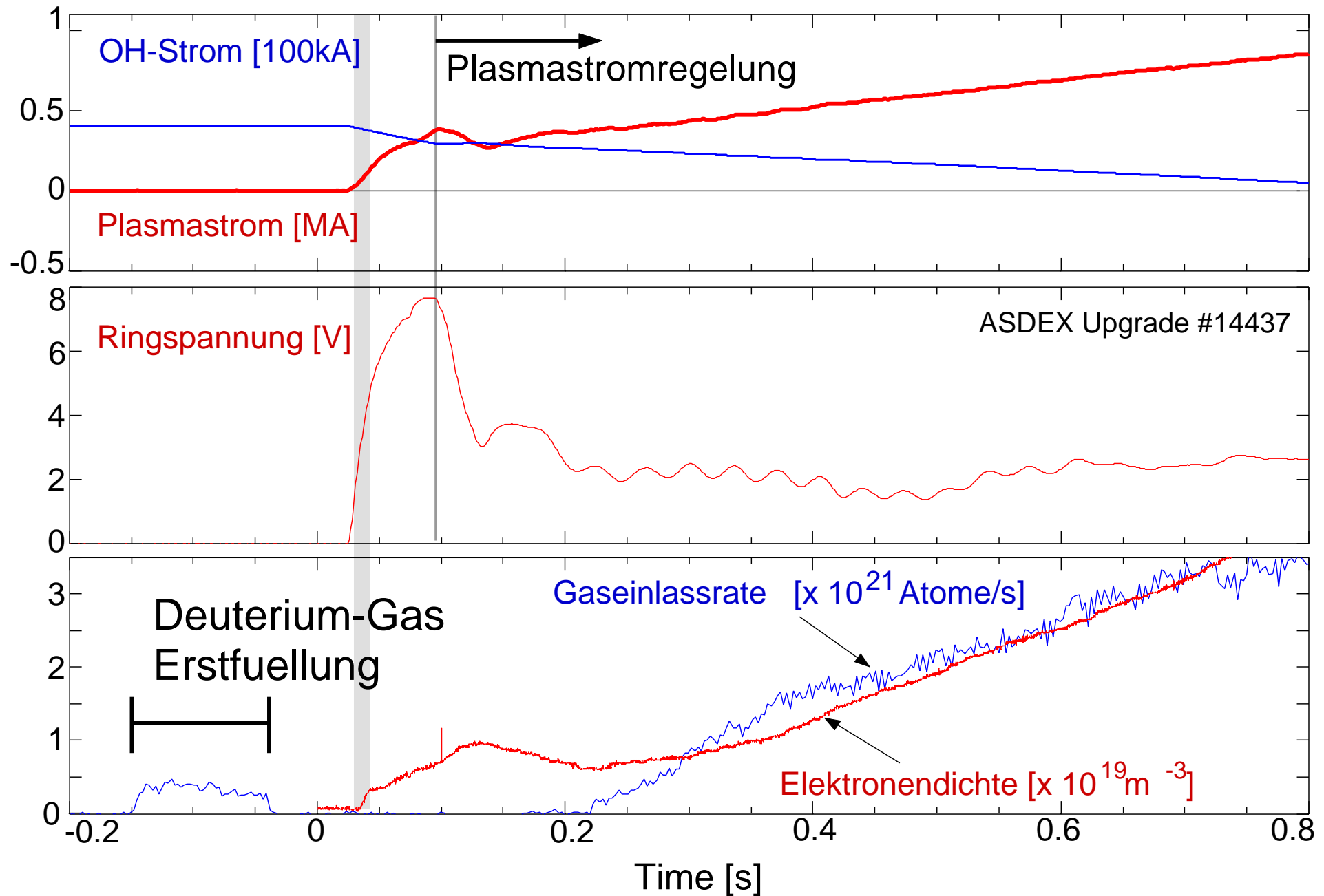
Großer Plasmaradius	$R$	1.65	m
Kleiner Plasmaradius	$a$	0.5	m
tor. Plasmastrom	$I_\phi$	$\leq 1.6$	MA
Toroidalfeld	$B_\phi$	$\leq 3.2$	T
Basis-Vakuumdruck	$p$	$\leq 1 \times 10^{-7}$	mbar
Plasmaheizleistung:			
Neutralstrahlinjektion	$P_{\text{NBI}}$	$\leq 20$	MW
Ionenzyklotronheizung	$P_{\text{ICRH}}$	$\leq 8$	MW
Elektronenzykl.-Hz.	$P_{\text{ECRH}}$	$\leq 4$	MW

## Zeitspuren Plasma-“Entladung”





# Start der Plasma-Entladung





## Zusammenfassung: Axisymmetrische toroidale Konfigurationen

- Toroidales Plasma vermeidet Endverluste (cf. magn. Spiegel)
- “Natürliches” Koordinatensystem: Zylinderkoo.,  $z \parallel$  Torusachse.
- Magnetischer- und Stromfluß durch poloidal oder toroidal umrandete Flächen. Wähle normalerweise poloidale Flüsse  $\psi_p, I_p$
- Radiale Komponente von  $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$  führt zur Grad-Shafranov(-Schlüter)-Gleichung: Differentialgleichung für  $\psi_p$  vs.  $p'(\psi_p), I_p I_p'(\psi_p)$
- Addieren von Vakuumlösungen (homogene GSS-Gl.) erlaubt Erfüllen von Randbedingungen (durch externe Spulen erzeugte Flüsse)
- Der Tokamak ist eine axisymmetrische toroidale Konfiguration:
  - Starkes toroidales Führungsfeld durch äußere Spulen
  - Toroidaler Plasmastrom, induziert durch Stromänderung in OH-“Transformator”.
  - “Ohm’sche” Plasmaheizung durch (Ringspannung  $\times$  Plasmastrom)  
+ Zusatzheizung
  - Vertikalfeld: Radiale Lagekontrolle