

Weitere “Neoklassische” Effekte



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

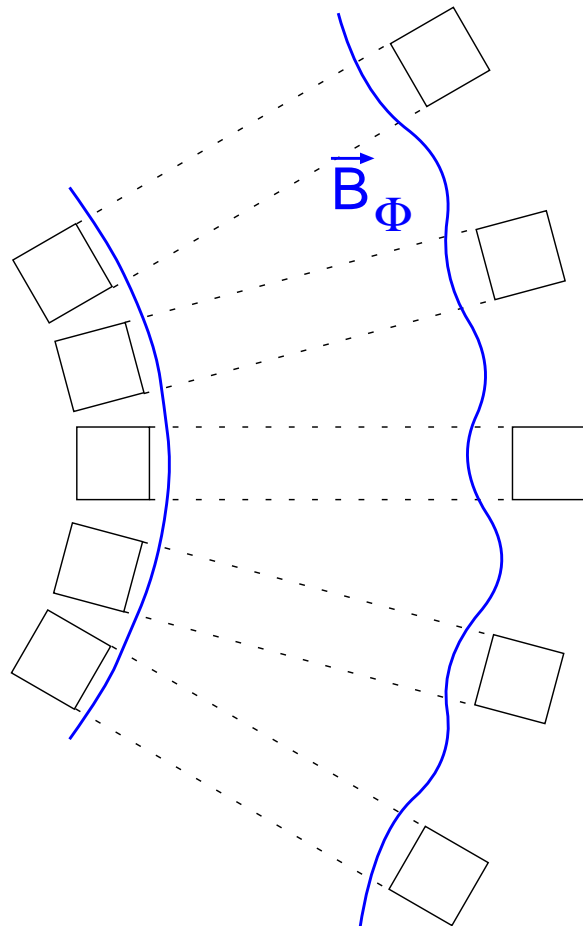
“Neoklassische” Effekte

- Erhöhter Transport durch Teilchenstöße (s. vorige Vorlesung)
- “Ripple”-Transport
- Modifikation der elektrischen Leitfähigkeit
- Der “Bootstrap”-Strom
- Der “Ware-pinch”

“Ripple”-Transport

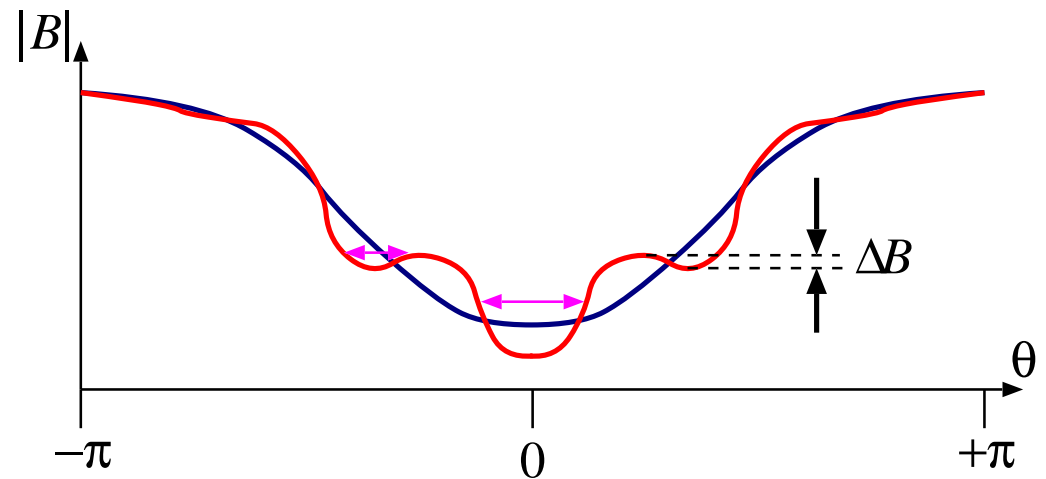
Durch nicht-axisymmetrische \vec{B} -Feld Variation können stoßfreie Teilchenverluste entstehen.

Beispiel: Toroidale Modulation von \vec{B} durch diskrete Toroidalfeldspulen (“field ripple”)



Ein kleiner Anteil von Teilchen kann im Ripple-Feld gefangen sein.

Verlauf von B im poloidalen Schnitt:



$$\text{Def: } \delta \equiv \frac{\Delta B}{B}$$

Im ripple gefangene Teilchen sind bei endlichem θ lokalisiert

(laufen nicht mehr poloidal um)

\Rightarrow unkompensierte vertikale Drift

Abschätzung “ripple”-Diffusivität

Ansatz für die Diffusivität (random walk)

$$D_R \sim f_{\text{rg}} (\Delta x)^2 \nu_{\text{eff}}$$

Analog zu Bananen-Teilchen ist der Anteil der ripple-gefangenen Teilchen $f_{\text{rg}} = \delta^{1/2}$

Ebenfalls analog zu Bananen-Teilchen ist die effektive Stoßfrequenz ν_{eff} für im ripple gefangene Teilchen gleich dem Quadrat des pitch-Streuwinkels, der zum Impulsverlust führt:

$$\nu_{\text{eff}} \sim \frac{\nu_c}{\delta} \gg \nu_c$$

Der radiale Bahnversatz ist größenordnungsmäßig die senkrechte Drift zwischen Stößen, $\Delta x \sim \nu_D / \nu_{\text{eff}}$.

$$\Rightarrow D \sim \delta^{1/2} \frac{\nu_D^2}{\nu_{\text{eff}}} \sim \underbrace{\frac{\delta^{3/2}}{\nu_c}}_{\propto T^{3/2}} \underbrace{\left(\frac{\nu_{\text{th}} r_L}{R_0} \right)^2}_{\propto T^2} \propto T^{7/2}$$

Stöße behindern die Ripple-Diffusion:

- Je stoßärmer das Plasma, desto größer ist D_R
- Ganz ohne Stöße ist der Teilchenverlust eine Drift ($\sim \nu_D$), d.h. nicht durch Dichtegradienten getrieben.

Die ripple-Verluste sind traditionell das größte Problem für toroidale, nicht-axisymmetrische Konfigurationen (z.B. den “Stellarator”).

Um diese zu vermeiden, müssen neue Symmetrien gefunden werden, die die Driftbahnen wieder in sich schließen.

Elektrische Leitfähigkeit $\parallel \vec{B}$

Einfachster Ansatz: Leitfähigkeit $\parallel \vec{B}$ entsteht nur durch umlaufende Teilchen (vorwiegend Elektronen), denn gefangene Teilchen kehren um und tragen keinen Strom, obwohl das elektrische Feld an ihnen Arbeit verrichtet.

$$\sigma = \sigma_c \left(1 - \sqrt{2\varepsilon} \right)$$

Das ist aber nicht ganz richtig:

Für $v_e^* = v_{\text{eff},e}/v_{T,e} \gg 1$ (Elektronen!) tauschen gefangene und umlaufende Elektronen untereinander Impuls aus, so dass der Unterschied verschwindet und die Leitfähigkeit wieder steigt.

Verbesserte Näherungsformel:

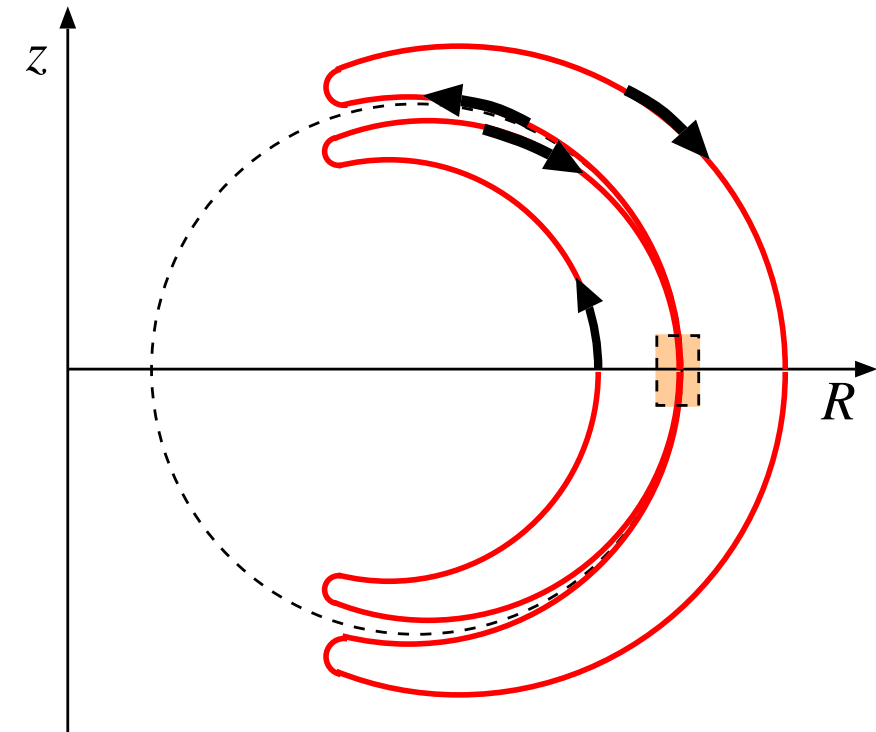
$$\sigma = \sigma_c \left(1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{1 + v_e^*} \right)$$

Außerdem:

Hin- und Rückweg der Bananenbahn erfolgen nicht beim selben Radius (s. unten)

Elektrischer Strom durch gefangene Teilchen

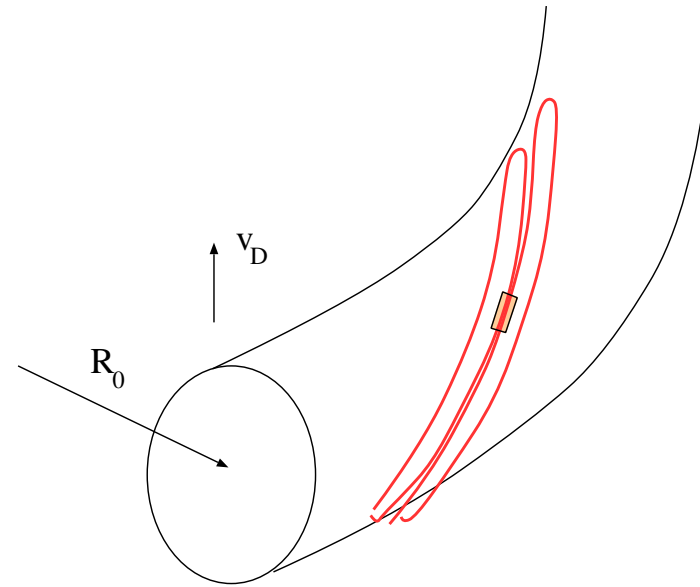
Betrachte Volumenelement, das von verschiedenen Bananenbahnen berührt wird:



Im Volumenelement heben sich bei endlichem Druckgradient die Ströme der Bananenteilchen nicht auf, es entsteht eine Netto-Stromdichte.

Analogie: Gyrobewegung bei endlichem Druckgradient, ergibt den diamagnetischen Strom $\perp \vec{B}$

Der Netto-Strom hat eine Komponente $\parallel \vec{B}$:



Dichte gefangener Teilchen: $n \epsilon^{1/2}$
(bis auf Faktor $\sqrt{2}$)

Typ. Parallelgeschwindigkeit: $v_{\parallel} \sim \epsilon^{1/2} v_{th}$

$$\Rightarrow j_{\parallel, \text{trapped}} \sim e(n_2 - n_1) \epsilon v_{th} \sim e \epsilon v_{th} \Delta x_{\text{gef}} \frac{dn}{dr}$$

bzw.

$$j_{\parallel, \text{trapped}} \sim \frac{\epsilon^{3/2} k_B T}{B_{\theta}} \frac{dn}{dr}$$

Der Bootstrap-Strom

Strom durch gefangene Teilchen:

$$j_{\parallel, \text{trapped}} \sim \frac{\varepsilon^{3/2} k_B T}{B_\theta} \frac{dn}{dr}$$

— “druckgetrieben” ($\propto T \nabla n \sim \nabla p$)

— kleiner Effekt ($\propto \varepsilon^{3/2}$)

— steigt mit sinkendem I_ϕ ($\propto B_\theta^{-1}$)

Durch Reibung der
gefangenen Teilchen (Minderheit) mit den
umlaufenden Teilchen (Mehrheit) tragen diese
einen “echten” Strom $\parallel \vec{B}$

Betrachte Impulsbilanz für
umlaufende Elektronen:

- Gewinn durch Stöße von gefangenen Teilchen.
- Verlust durch Stöße mit ruhendem Hintergrund.

$$j_{\parallel, \text{gef}} v_{ee}^{\text{eff}} = j_{\parallel, \text{uml}} v_{ei}$$

wobei $v_{ee}^{\text{eff}} \sim v_{ee}/\varepsilon \propto v_{ei}/\varepsilon$

\Rightarrow **“Bootstrap”-Strom**

$$j_{\parallel, \text{uml}} \propto \frac{1}{\varepsilon} j_{\parallel, \text{gef}} \sim \frac{\varepsilon^{1/2} k_B T}{B_\theta} \frac{dn}{dr}$$

... hängt schwächer von ε ab als $j_{\parallel, \text{gef}}$
... steigt mit steigendem $\beta_p \equiv \mu_0 p / B_\theta^2$.

Bootstrap-Strom im Tokamak-Experiment

Kann der Bootstrap-Strom den induktiven toroidalen Strom im Tokamak überflüssig machen?

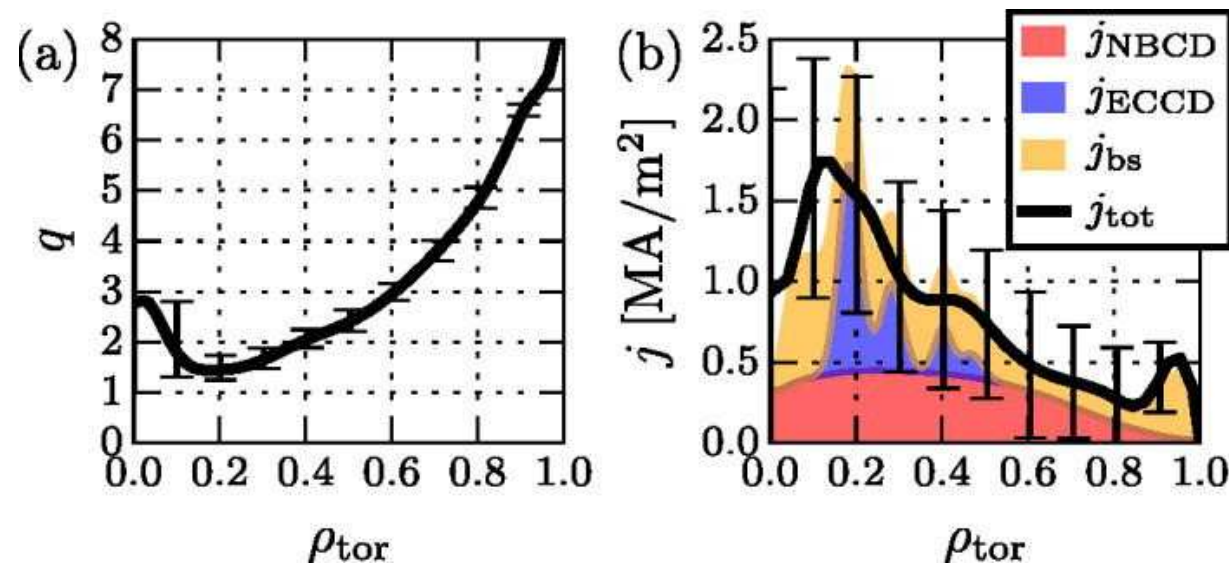
Idee (“**Advanced tokamak**”):

Flaches / invertiertes q -Profil erzeugt guten Einschluß

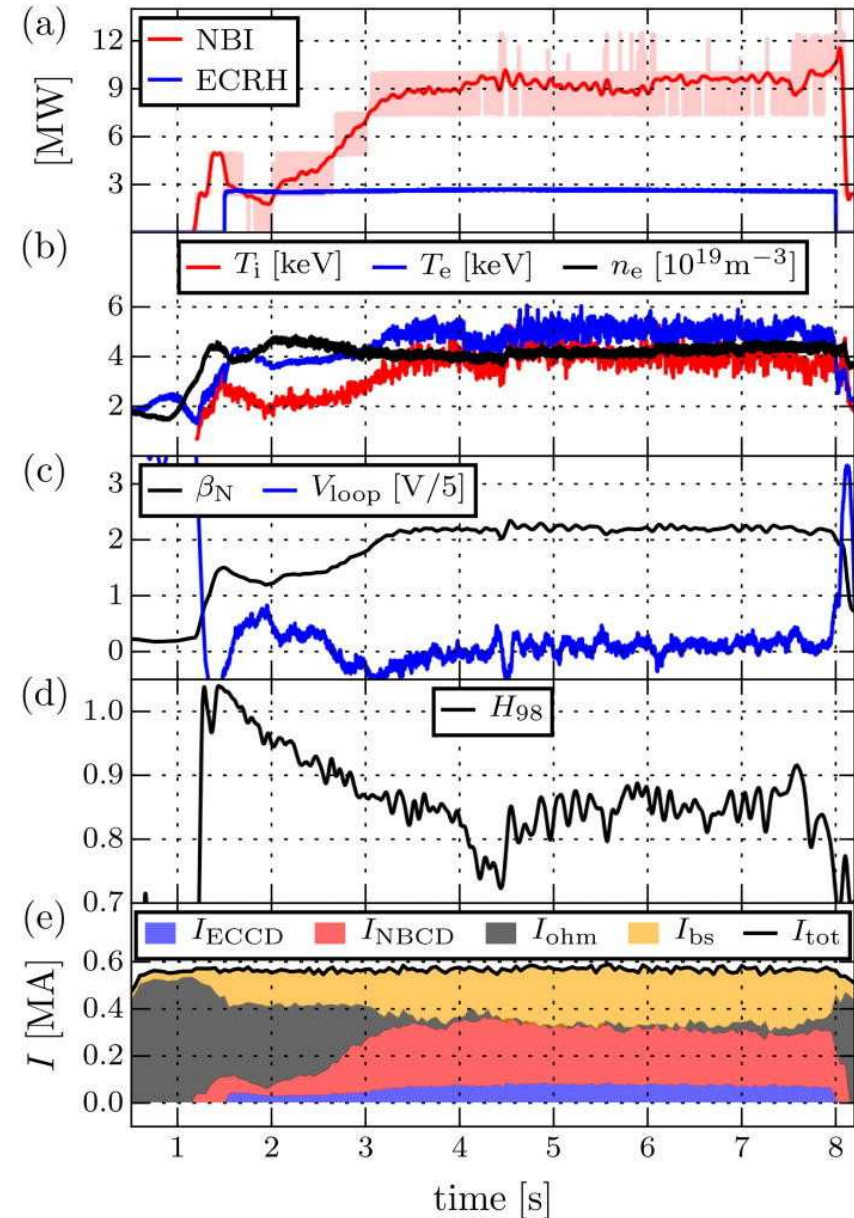
→ hohes β_p

→ hoher Bootstrap-Strom (off-axis)

→ flaches / invertiertes q -Profil ...



ASDEX Upgrade #33379:



A. Bock *et al*, Physics of Plasmas **25** (2018) 056115

<https://doi.org/10.1063/1.5024320>

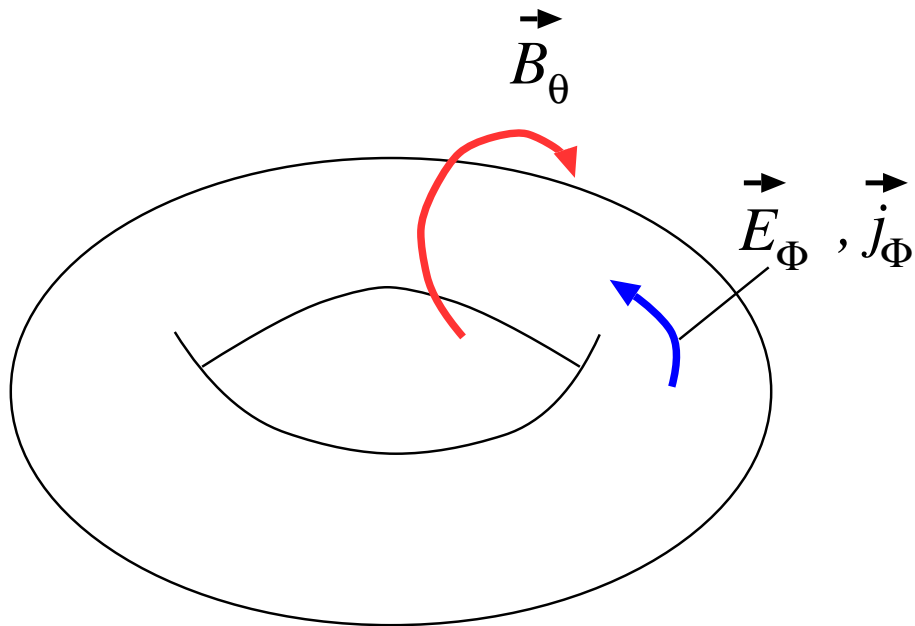
Radiale Driften: $E \times B$ -Drift

Im Tokamak wird der toroidale Plasmastrom meist ganz oder teilweise durch ein toroidales, induziertes \vec{E} -Feld getrieben.

Dadurch entsteht eine Drift:

$$\vec{v}_{E \times B} = \frac{\vec{E}_\phi \times \vec{B}_\theta}{B^2}$$

Diese Drift ist immer radial einwärts gerichtet!



Größenordnung der Radialkomponente:

Sei $E_\phi = 1$ V/m (realistischer Wert bei rein ohm'scher Heizung)

$B_\theta = 0.1$ T (typ. Wert bei halbem Radius in ASDEX Upgrade)

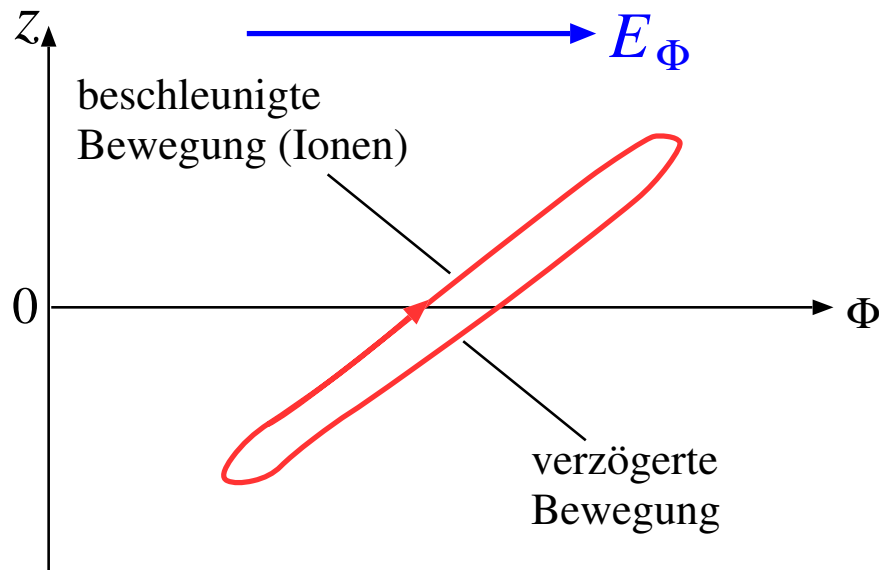
$B = 1$ T (für den Gyoradius)

$$\Rightarrow \vec{v}_{E \times B} \sim 0.1 \text{ m/s}$$

Das ist *sehr* langsam im Vergleich z.B. zur ∇B -Drift!

Radiale Driften: “Ware-pinch”

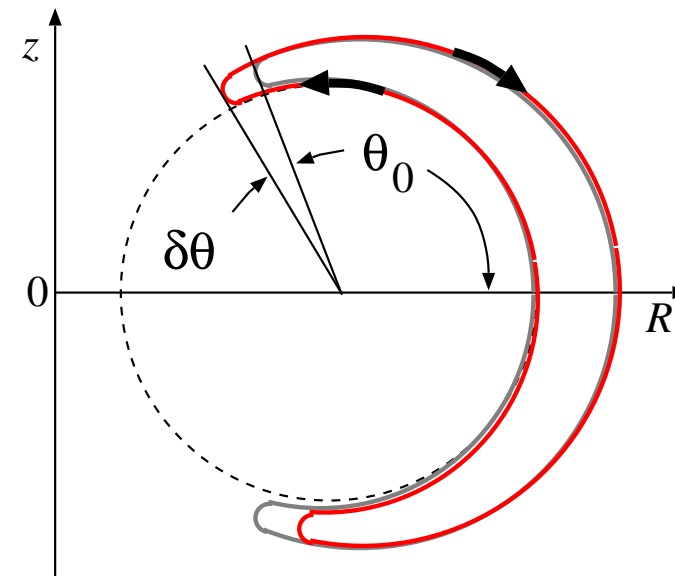
Bei endlichem toroidalen \vec{E} -Feld werden gefangene Teilchen in einem Zweig ihrer Bananenbahn beschleunigt, im anderen verzögert:



Das moduliert v_{\parallel} des Gyrozentrums, und die vertikale Drift wirkt in beiden Zweigen unterschiedlich lange.

Radiale Ein- und Auswärtsbewegung heben sich nicht mehr auf und es entsteht eine radiale Drift.

Im poloidalen Schnitt ist die Bananenbahn nicht mehr oben-unten symmetrisch (wie bei $E_\phi = 0$) sondern verschiebt sich um einen poloidalen Winkel $\delta\theta$.



Abschätzung des “Ware-pinch”-Teilchenflusses Γ_{Ware}

Teilchenenergie W , bei Durchlaufen der Bahn $\ell \parallel \vec{B}$, bleibt erhalten:

$$W = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2} + e \int_0^{\ell} E_{\parallel} d\ell$$

wobei $d\ell = (B_{\phi}/B_{\theta})d\ell_{\theta} = (B_{\phi}/B_{\theta})r d\theta \sim R q d\theta$.
Mit dem magnetischen Moment $\mu = mv_{\perp}^2/(2B)$
... für $\vec{E}_{\parallel} = 0$ (Umkehrpunkt θ_0 , $v_{\parallel}(\theta_0) = 0$):

$$W = \mu B_0 [1 - \varepsilon \cos \theta_0]$$

... für $\vec{E}_{\parallel} \neq 0$ (Umkehrpunkt $\theta_0 + \delta\theta$):

$$W = \mu B_0 [1 - \varepsilon \cos(\theta_0 + \delta\theta)] + e E_{\parallel} R q (\theta_0 + \delta\theta)$$

Mit $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
 $\cos(\delta\theta) \approx 1$, und $\sin(\delta\theta) \approx \delta\theta$:

$$W = \mu B_0 [1 - \varepsilon \cos(\theta_0)] - \mu B_0 \varepsilon \sin(\theta_0) \delta\theta + e E_{\parallel} R q \theta_0$$

Gleichungen mit $E_{\parallel} = 0$ und $E_{\parallel} \neq 0$
voneinander abziehen:

$$\delta\theta = \frac{e E_{\parallel} R q \theta_0}{\mu B_0 \varepsilon \sin \theta_0} \sim \frac{e E_{\parallel} R q}{\mu B_0 \varepsilon}$$

Mit Sicherheitsfaktor $q = r B_{\phi}/(R_0 B_{\theta})$,
inversen Aspektverhältnis $\varepsilon = r/R_0$,
Anteil gefangener Teilchen $\sim \varepsilon^{1/2}$,
und ∇B -Driftgeschwindigkeit:

$$v_D \sim v_{\text{th}} r_L / R_0 \sim m v_{\text{th}}^2 / (e B_0 R_0) \sim \mu / e R_0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\text{Ware}} = \varepsilon^{1/2} n v_D \delta\theta = \varepsilon^{1/2} n \frac{E_{\parallel}}{B_{\theta}}$$

Verhältnis zur $E \times B$ -Drift:

$$\frac{\Gamma_{\text{Ware}}}{\Gamma_{E \times B}} \sim \varepsilon^{1/2} \frac{B^2}{B_{\theta}^2} \sim q^2 \varepsilon^{-3/2}$$

Der Ware-Pinch überwiegt bei weitem!

Zusammenfassung: Neoklassische Effekte

- **Ripple-Transport:** Zusätzliche magnetische Spiegel durch toroidale Asymmetrie erzeugen stoßfreie Driftverluste für darin gefangene Teilchen.
Grund: Komplette poloidale Umläufe werden nicht mehr durchlaufen und daher wird die vertikale Drift nicht kompensiert (im Unterschied zu Bananen-Teilchen bei Axisymmetrie).
- Gefangene Teilchen modifizieren leicht die **elektrische Leitfähigkeit** $\parallel \vec{B}$: Ohne Stöße tragen sie nicht zum elektrischen Strom bei.
- Mit endlichem Druckgradient ∇p ergibt sich durch gefangene Teilchen lokal eine endliche Stromdichte (**“Bootstrap”-Strom**), die durch Stöße auf die umlaufenden Teilchen übertragen werden und dadurch einen endlichen Gesamtstrom verursachen.
- Ein toroidales elektrisches Feld verursacht radiale Driften, einerseits eine $E_\phi \times B_\theta$ -Drift mit radialer Einwärtskomponente und andererseits den **“Ware-pinch”** durch Versatz der Bananenbahnen gefangener Teilchen. Unter üblichen Bedingungen (z.B. Tokamaks) überwiegt der Ware-pinch.