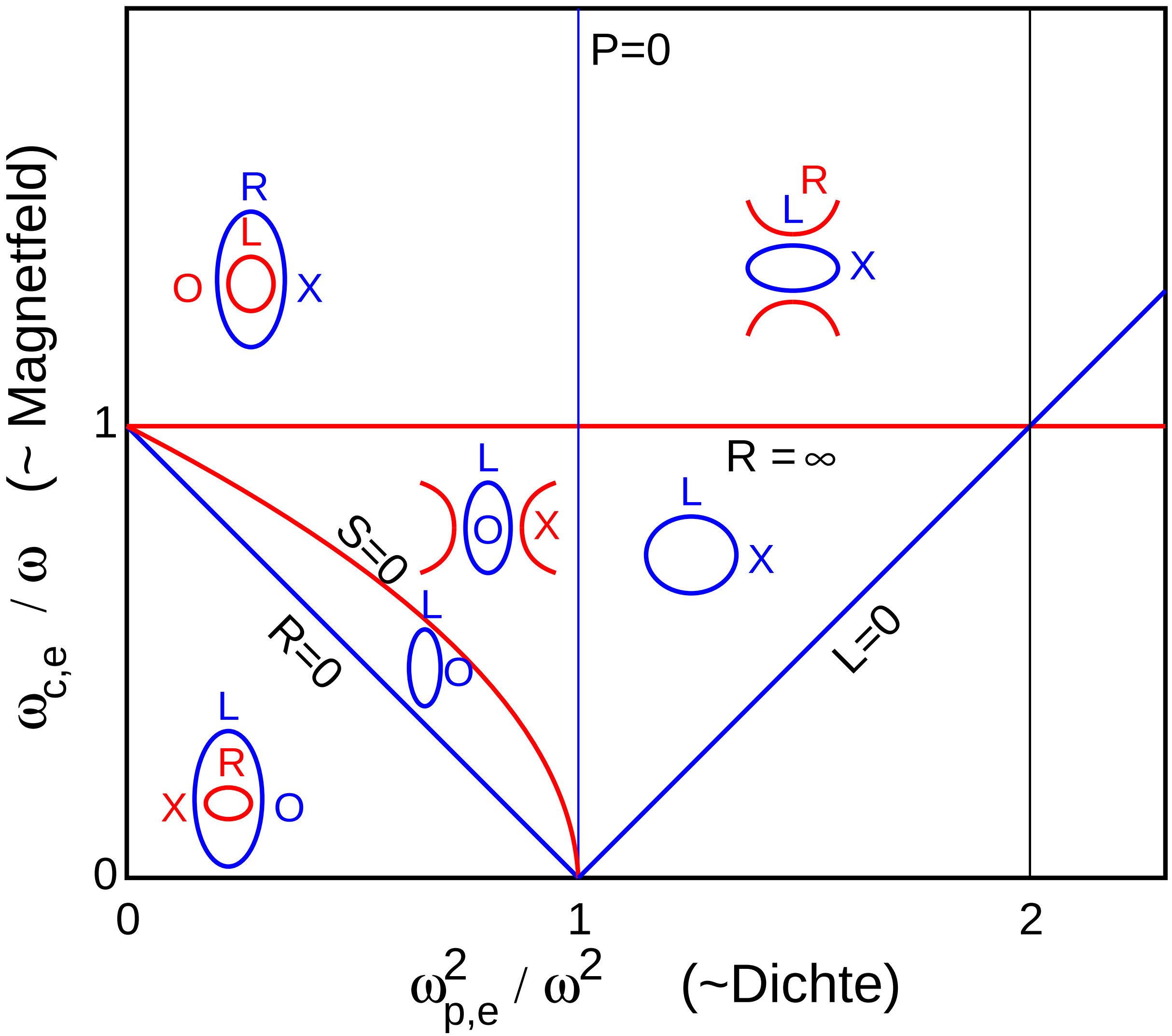
Elektromagnetische Wellen im kalten Plasma



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Heutiges Programm

Haben zuvor elektrostatische Wellen betrachtet, mit Vereinfachungen:
— Statische Ionen, nur Elektronenschwingungen (hochfrequente Wellen)
— kein Magnetfeld ($B_0 = 0$, $B_1 = 0$)
— 1-D: Longitudinale Polarisation $\vec{E}_1 \| \vec{k}$ (im Vakuum nicht ausbreitungsfähig)
— Aber: Kinetische Beschreibung! Endliche Temperatur $\rightarrow$ Dämpfung der Welle

Heute: Benutzen **Zwei-Flüssigkeits-Gleichungen**
— Elektronen- und Ionen-Schwingungen (breiter Frequenzbereich)
— Elektromagnetische Wellen: $\vec{B}_1 \neq 0$
— Hintergrundmagnetfeld: $\vec{B}_0 \neq 0$
— Beliebige Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ vs. Magnetfeldrichtung $\vec{B}_0$
— beliebige Polarisationsrichtung ($\vec{E}$ vs. $\vec{k}$)

Aber: Beschränken uns auf **kaltes Plasma**: $k_B T = 0$, $\overline{\overline{P}} = 0$
(a) keine Dämpfung (b) keine Schallwellen (Druck = Rückstellkraft)

Ein Flüssigkeitsmodell mit endlichem Druck folgt später!

Inhalt

- Allgemeine Herleitung:
  Wellengleichung, Brechungsindex, Dielektrizitätstensor $\bar{\bar{\varepsilon}}$, Dispersionsrelation

- Spezielle Lösungen für:
  - $\vec{k}\|\vec{B}$
  - $\vec{k} \perp \vec{B}$

- Beliebige Ausbreitungsrichtung (qualitativ)
  Clemmow-Mullaly-Allis (CMA) Diagramm

Literatur:

D Gurnett, A Bhattacharjee: Introduction to Plasma Physics, Kap. 4

F Chen: Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol.1, Kap. 4

T H Stix: Waves in Plasmas

Leitfähigkeits- und Dielektrizitäts-Tensoren

Ampère'sches Gesetz:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \right)$$

Plasmastrom (Summe über alle Spezies s mit Ladung q_s):

$$\vec{j} \;=\; \sum_s n_s \; q_s \; \vec{u}_s$$

Definiere formal Leitfähigkeitstensor $\overline{\overline{\sigma}}$ so dass

$$\vec{j} \;=\; \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{E}$$

Effekt des Plasmastroms kann im Dielektrizitäts-Tensor $\overline{\overline{\varepsilon}}$ absorbiert werden:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \, \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \dot{\vec{E}}, \qquad\qquad \overline{\overline{\varepsilon}} \;=\; \varepsilon_0 \left(\overline{\overline{1}} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \overline{\overline{\sigma}} \right) \;=\; \varepsilon_0 \overline{\overline{\varepsilon}}_r$$

Flüssigkeits-Geschwindigkeiten

Plan: Berechne $\bar{\bar{\varepsilon}}$ für oszillierendes $\vec{E}$-Feld $\propto \exp(-i\omega t)$

Ignoriere Stöße: $\nu_c \ll \omega$ $\quad$ ($\rightarrow$ keine Dämpfung durch Stösse)

Kraftgleichung für jede Spezies s, $\qquad$ Vereinfachung: $(\vec{u}_s \cdot \nabla)\vec{u}_s = 0$

$$m_s \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} \;=\; \omega\, m_s\, \vec{u}_s \;=\; q_s \left(\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}_0 \right)$$

Zyklotronfrequenz:

$$\omega_{c,s} \equiv \frac{|q_s| B_0}{m_s}$$

O.b.d.A.: $\vec{B} \| z$. $\qquad$ Lösung für $\vec{u}_s$ ($\pm$, je nach Vorzeichen von q_s):

$$u_{x,s} = \frac{i q_s}{m_s \omega} \frac{E_x \pm i(\omega_{c,s}/\omega) E_y}{1 - (\omega_{c,s}/\omega)^2}, \quad u_{y,s} = \frac{i q_s}{m_s \omega} \frac{E_y \mp i(\omega_{c,s}/\omega) E_x}{1 - (\omega_{c,s}/\omega)^2}, \quad u_{z,s} = \frac{i q_s}{m_s \omega} E_z$$

Bekannt aus Vorlesung über HF-Plasmen, hier $\vec{E}$ mit 3 Komponenten und $\nu_c \rightarrow 0$

Plasmastrom

Benutze Identitäten:

$$\pm\frac{1}{1-(\omega_{c,s}/\omega)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{\omega\mp\omega_{c,s}} + \frac{\omega}{\omega\pm\omega_{c,s}}\right], \qquad \pm\frac{\omega_{c,s}/\omega}{1-(\omega_{c,s}/\omega)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{\omega\mp\omega_{c,s}} - \frac{\omega}{\omega\pm\omega_{c,s}}\right]$$

Def.: Plasmafrequenz (wie ebenfalls bekannt, jedoch nun für jede Spezies)

$$\omega_{p,s}^2 \equiv \frac{n_0 q_s^2}{\varepsilon_0 m_s}$$

⇒ Plasmastrom (Komponenten):

$$\frac{i}{\varepsilon_0\omega} j_x = \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\sum_s n_{0,s} q_s u_{x,s} = -\frac{1}{2}\sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{\omega}{\omega\mp\omega_{c,s}} + \frac{\omega}{\omega\pm\omega_{c,s}}\right)E_x + \left(\frac{\omega}{\omega\mp\omega_{c,s}} - \frac{\omega}{\omega\pm\omega_{c,s}}\right)iE_y\right]$$

$$\frac{i}{\varepsilon_0\omega} j_y = \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\sum_s n_{0,s} q_s u_{y,s} = -\frac{1}{2}\sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{\omega}{\omega\mp\omega_{c,s}} - \frac{\omega}{\omega\pm\omega_{c,s}}\right)iE_x + \left(\frac{\omega}{\omega\mp\omega_{c,s}} + \frac{\omega}{\omega\pm\omega_{c,s}}\right)E_y\right]$$

$$\frac{i}{\varepsilon_0\omega} j_z = -\sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} E_z$$

Dielektrizitäts-Tensor

Def. Abkürzungen:

$$R \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega \pm \omega_{c,s}} \right), \quad L \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega \mp \omega_{c,s}} \right),$$

$$S \equiv \frac{1}{2}(L+R), \quad D \equiv \frac{1}{2}(R-L), \quad P \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}$$

Plasmastrom in Ampère'sches Gesetz einsetzen,
mit Definition des Dielektrizitäts-Tensors vergleichen:

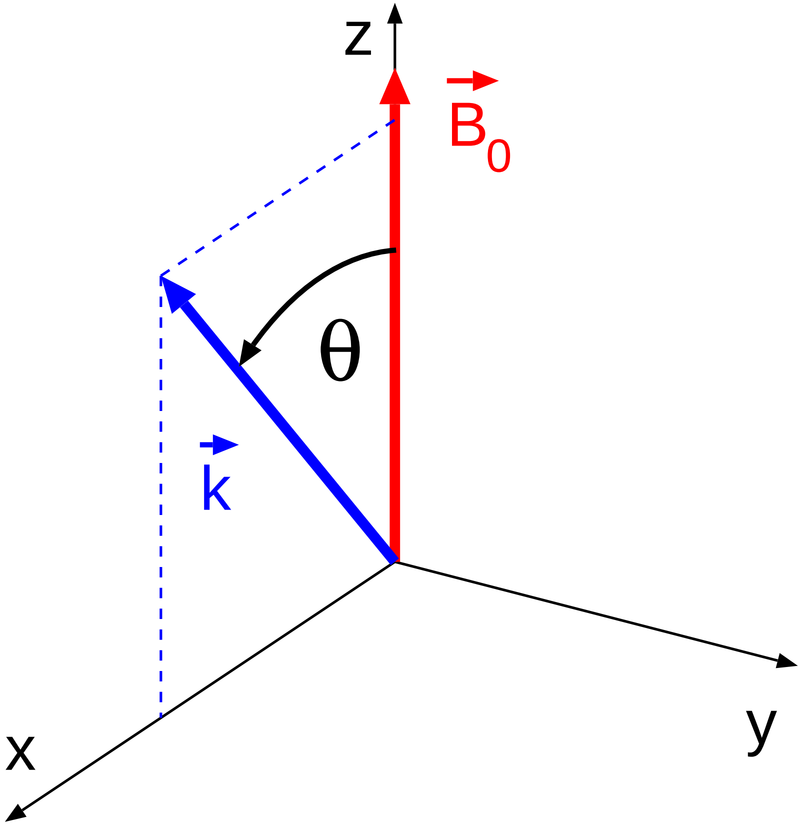
$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = \bar{\bar{\varepsilon}}_r \, \varepsilon_0$$

Optische Eigenschaften des Plasmas beschrieben durch S, D, P (bzw. R, L, P).

Wellengleichung, Brechungsindex

$\nabla\times$ Faraday-Gesetz, Ampère'sches Gesetz einsetzen:

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla \times \dot{\vec{B}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \left(\overline{\overline{\varepsilon}}_r \cdot \ddot{\vec{E}}\right) = -\frac{1}{c^2}\,\overline{\overline{\varepsilon}}_r \cdot \ddot{\vec{E}}$$



Wellenansatz: $\vec{E} \propto \exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t\right)$.

Def. Brechungsindex-Vektor:

$$\vec{N} \equiv \frac{c}{\omega}\vec{k}$$

$\Rightarrow$ Gleichung für den Brechungsindex:

$$\vec{N} \times \left(\vec{N} \times \vec{E}\right) + \overline{\overline{\varepsilon}}_r \cdot \vec{E} \;=\; 0$$

O.b.d.A. Wähle $\vec{k}$ in $x-z$-Ebene:

$$\vec{k} = (\;k_x,\;0,\;k_z\;)$$

Winkel θ zwischen $\vec{k}$ und $\vec{B}_0$, so dass

$$\vec{N} \;=\; N\,(\sin\theta,\;0,\;\cos\theta)$$

Dispersionsbedingung

Gleichung für Brechungsindex in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} S - N^2\cos^2\theta & -iD & N^2\sin\theta\cos\theta \\ iD & S - N^2 & 0 \\ N^2\sin\theta\cos\theta & 0 & P - N^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Lineares, homogenes Gleichungssystem für $\vec{E}$.

Lösungen existieren, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, d.h.

$$\tan^2\theta = -\frac{P\left(N^2 - R\right)\left(N^2 - L\right)}{(SN^2 - RL)\,(N^2 - P)}$$

Lösungen für spezielle Ausbreitungsrichtungen:

$\theta = 0$	$\vec{k}\parallel\vec{B}$	$\theta = \pi/2$	$\vec{k}\perp\vec{B}$
$P = 0$	elektrostatische Oszillation	$N^2 = P$	ordentliche Welle
$N^2 = R$	rechts-polarisierte Welle	$N^2 = RL/S$	außerordentliche Welle
$N^2 = L$	links-polarisierte Welle		

Ausbreitungsrichtung $\vec{k} \| \vec{B}$

$$\begin{pmatrix} S-N^2 & -iD & 0 \\ iD & S-N^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Koeffizientendeterminante: $(S-N^2)^2 P - D^2 P = \left[(S-N^2)^2 - D^2\right] P = 0$

Lösungen:

- $P = 0$ $\qquad \vec{E} = (0,\ 0,\ E_1)$
  $\vec{u}_1 \| \vec{B}_0$, keine Lorentzkraft
  $\rightarrow$ elektrostatische Plasmaschwingung, $\omega = \omega_p$
  $\rightarrow$ Gruppengeschwindigkeit $v_g \equiv \partial\omega/\partial k = 0$ (kaltes Plasma!)
- zirkular polarisierte Wellen: $N^2 = S \pm D$
  - "rechts-polarisierte" Welle $N^2 = R$ $\qquad \vec{E} = (E_1,\ iE_1,\ 0)$
  - "links-polarisierte" Welle $N^2 = L$ $\qquad \vec{E} = (E_1,\ -iE_1,\ 0)$

  Transversale Wellen, elektromagnetisch: $i\omega\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} \neq 0$;
  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ $\rightarrow$ keine Ladungsdichte-Oszillation.

“R”-Welle

Betrachte Elektronen und eine Ionenspezies:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = N^2 = R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega \pm \omega_{c,s}}\right) = 1 - \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega(\omega + \omega_{c,i})} - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega(\omega - \omega_{c,e})}$$

- **Polstelle** (“Resonanz”, $N^2 \to \infty$) für $\omega = \omega_{c,e}$ (Elektronenzyklotronfrequenz).
  - Ankopplung an Elektronen, nicht Ionen (Gyrationssinn!)
  - Phasengeschwindigkeit $v_\phi = \omega/k \to 0$
  - Anhäufung von Energiedichte $\to$ Dämpfung, falls Mechanismus existiert
- **Nullstelle** ($N = 0$), “cut-off”

  Betrachte hohe Frequenzen, $\omega^2 \gg \omega_{c,i}^2, \omega_{p,i}^2$, d.h. behalte nur Elektronenterme:

$$\omega_\pm = \frac{\omega_{c,e}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_{c,e}}{2}\right)^2 + \frac{\omega_{p,e}^2}{1-N^2}}$$

  Cut-off: $\omega = \omega_R \equiv \omega_+(N=0)$ oder $\omega = \omega_-(N=0)$

- **Keine Wellenausbreitung** (ω komplex) für $N^2 < 0$ $(\omega_{c,e} < \omega < \omega_R)$

“L”-Welle, Phasengeschwindigkeit

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = N^2 = L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega \mp \omega_{c,s}}\right) = 1 - \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega(\omega - \omega_{c,i})} - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega(\omega + \omega_{c,e})}$$

- “Ionenzyklotron-Resonanz”:

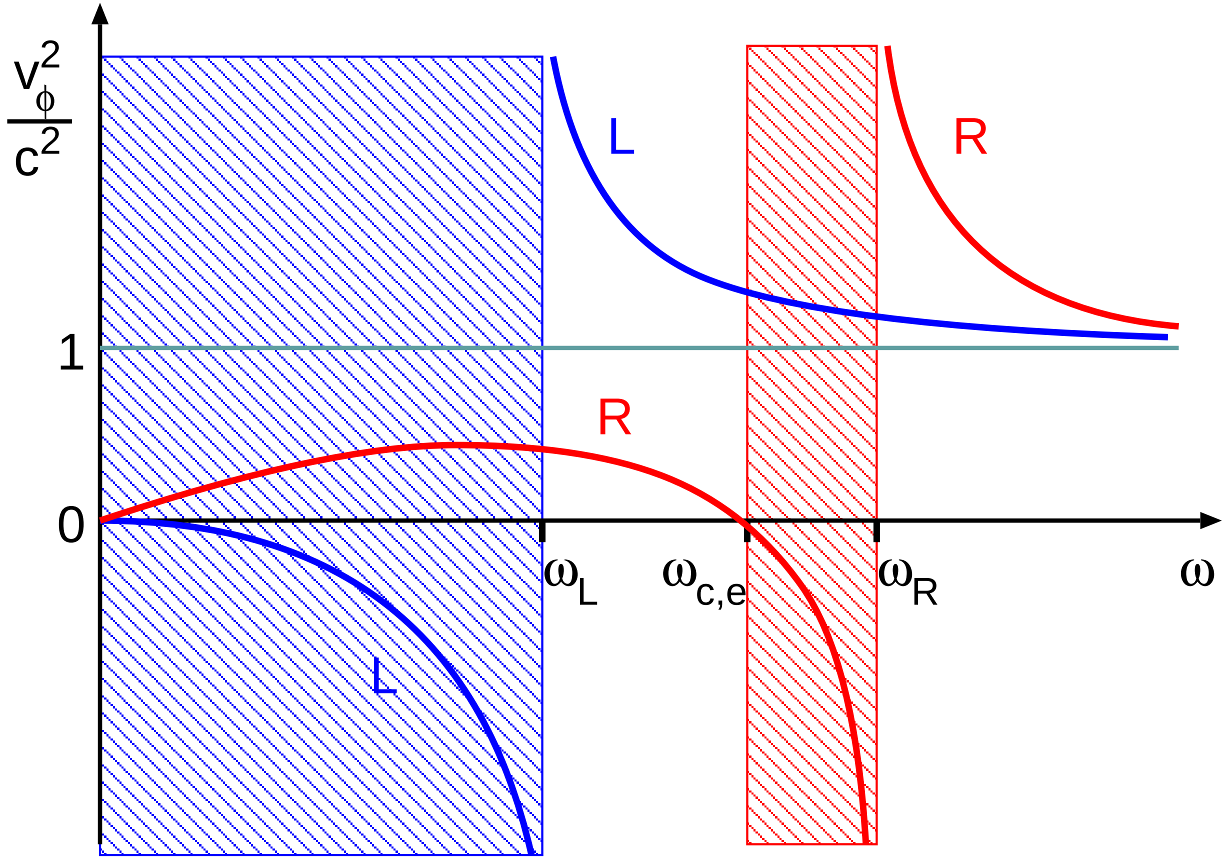
$$\omega = \omega_{c,i}$$

- $N = 0$, “cut-off”:

$$\omega = \omega_L$$

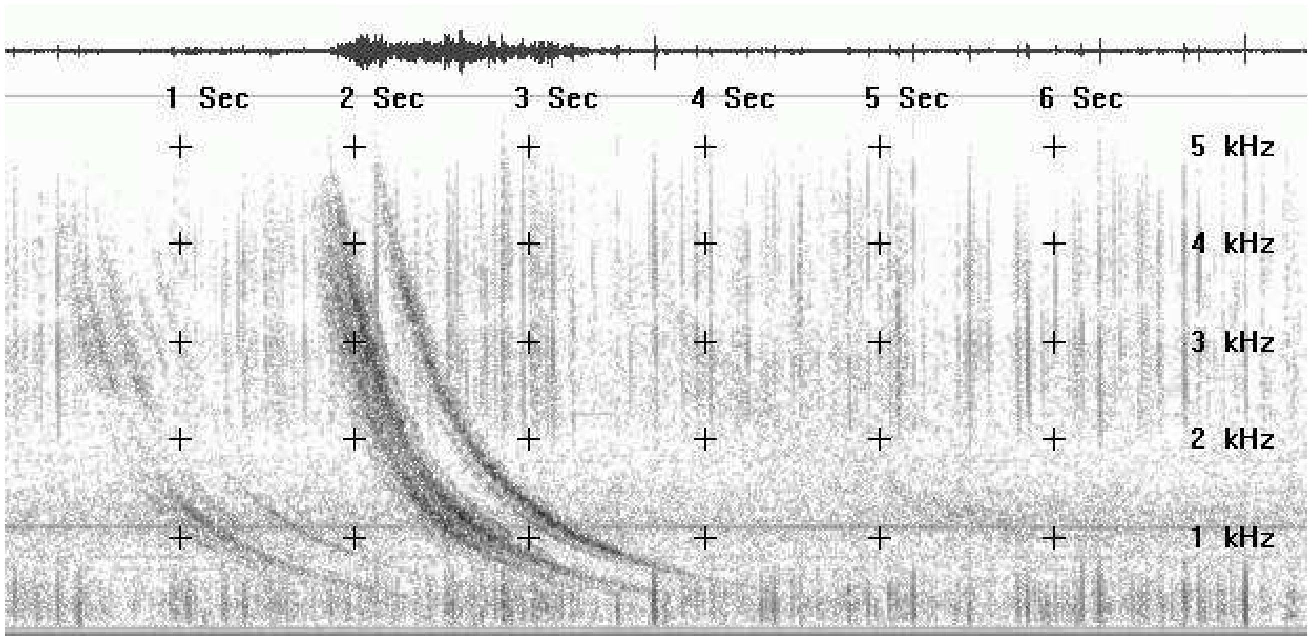
Wiederum mit $\omega^2 \gg \omega_{c,i}^2, \omega_{p,i}^2$:

$$\omega_L \equiv -\frac{\omega_{c,e}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{c,e}}{2}\right)^2 + \omega_{p,e}^2}$$



“Whistler”-Mode

Spektrogramm



Quelle: `www.auroralchorus.com`

Erste Beschreibung:

Heinrich Barkhausen, Physikalische Zeitschrift **20** (1919), 401-3

“Pfeifsignal”
mit abfallender Frequenz,
$\vec{E} \perp \vec{B}$.
Typ.: hörbare Frequenzen
$\omega < \omega_{c,e}$, auch terrestrisch zu empfangen

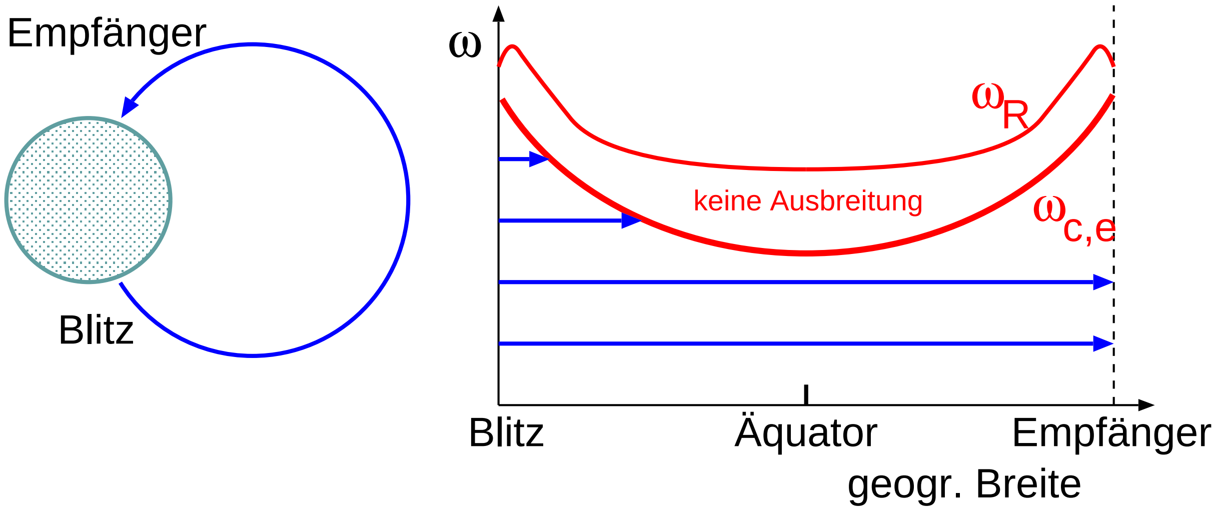
Ursache:
Wellenanregung durch
Kurzzeitige Entladungen
(Blitze)
+ Ausbreitung $\| B$

Dispersionsrelation: "Whistler"-Mode

Für $\omega < \omega_L$ ist nur R-Welle ausbreitungsfähig: $v_\phi / c \ll 1$, $N \gg 1$.

$\rightarrow$ Näherung für Dispersionsrelation:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = N^2 = R = 1 - \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega(\omega+\omega_{c,i})} - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega(\omega-\omega_{c,e})} \approx 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega(\omega-\omega_{c,e})} \approx \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega(\omega_{c,e}-\omega)}$$



Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2c \frac{\omega^{1/2}(\omega_{c,e}-\omega)^{3/2}}{\omega_{c,e}\omega_{p,e}}$$

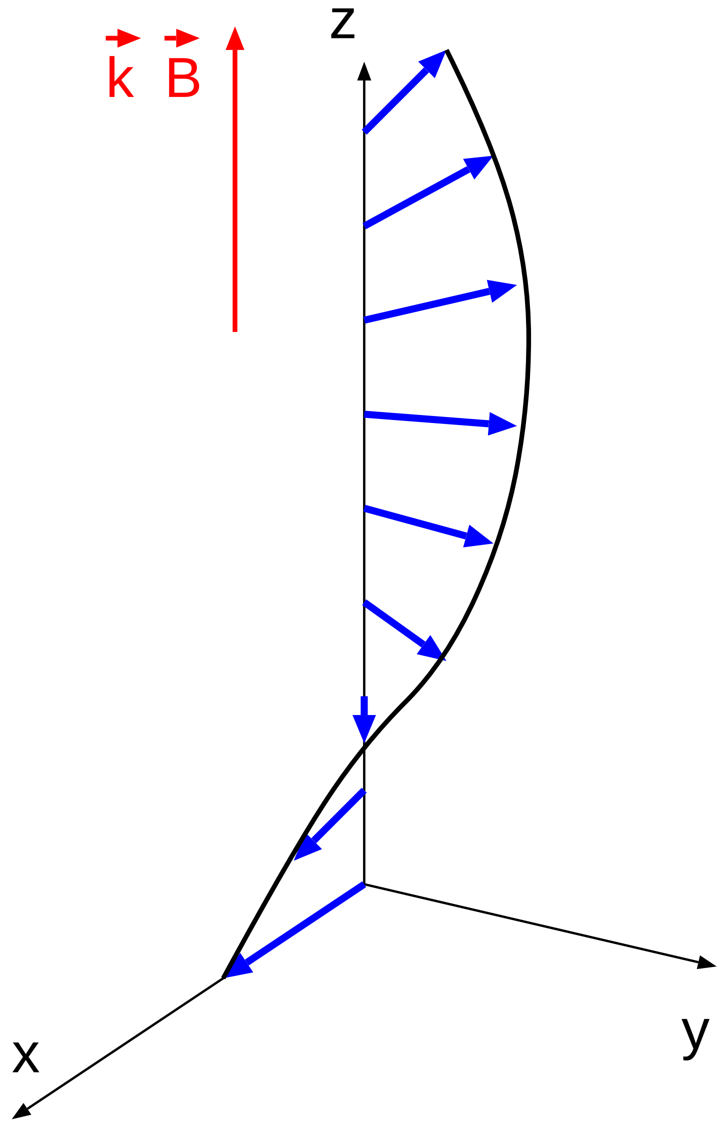
Signal-Laufzeit:

$$\Delta t(\omega) = \frac{1}{c\omega} \int \frac{\omega_{p,e}\omega_{c,e}}{(\omega_{c,e}-\omega)^{3/2}} \mathrm{d}s$$

Faraday-Rotation

Betrachte linear polarisierte Welle, $\vec{k} \parallel \vec{B} \parallel \vec{e}_z$, Überlagerung aus R- und L-Wellen:

$$E_y = \tfrac{1}{2}E_1\left[\sin\left(k_L z-\omega t\right)-\sin\left(k_R z-\omega t\right)\right]$$
$$E_x = \tfrac{1}{2}E_1\left[\cos\left(k_L z-\omega t\right)-\cos\left(k_R z-\omega t\right)\right]$$



Additionstheoreme:

$$E_y = \tfrac{1}{2}E_1\sin\left[\tfrac{1}{2}\left(k_L-k_R\right)z\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}\left(k_L+k_R\right)z-\omega t\right]$$
$$E_x = \tfrac{1}{2}E_1\cos\left[\tfrac{1}{2}\left(k_L-k_R\right)z\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}\left(k_L+k_R\right)z-\omega t\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x} = \tan\Psi = \tan\left[\frac{1}{2}\left(k_L-k_R\right)z\right]$$

Für $\omega \gg \omega_{c,e}, \omega_{p,e}$:

$$N_{R,L} = k_{R,L}\frac{c}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2}\left(1\pm\frac{\omega_{c,e}}{\omega}\right)$$

$$\Psi \approx \frac{1}{2\,c}\left(\frac{\omega_{p,e}^2\omega_{c,e}}{\omega}\right)z \propto \; n\,B$$

Ausbreitungsrichtung $\vec{k} \perp \vec{B}$

$$\begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S-N^2 & 0 \\ 0 & 0 & P-N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Koeffizientendeterminante: $S(S-N^2)(P-N^2) - D^2(P-N^2) = \left[S(S-N^2) - D^2\right](P-N^2) = 0$

Lösungen:

- "Ordentliche" Welle *(O-mode)*: $N^2 = P$ $\quad\quad \vec{E} = (0,\ 0,\ E_1)$
  - $\vec{E} \| \vec{B}_0$
  - transversale Welle: $\vec{E} \perp \vec{k}$
- "Außerordentliche" Welle *(X-mode)*: $N^2 = RL/S$ $\quad\quad \vec{E} = (iE_1 D/S,\ E_1,\ 0)$
  - $\vec{E} \perp \vec{B}_0$
  - longitudinale und transversale Komponenten, elliptische Polarisation

N.B. O- bzw. X-mode haben im Festkörper (bezüglich Kristallachse) umgekehrte Bedeutung.

“Ordentliche” Welle *(O-mode)*

Näherung: Behalte nur Elektronen-Terme ($\omega_p^2 = n_s e^2/m_s\varepsilon_0$ größer um m_i/m_e)

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = N^2 = P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2}$$

$\rightarrow$ Dispersionsrelation

$$\omega^2 = c^2k^2 + \omega_{p,e}^2$$

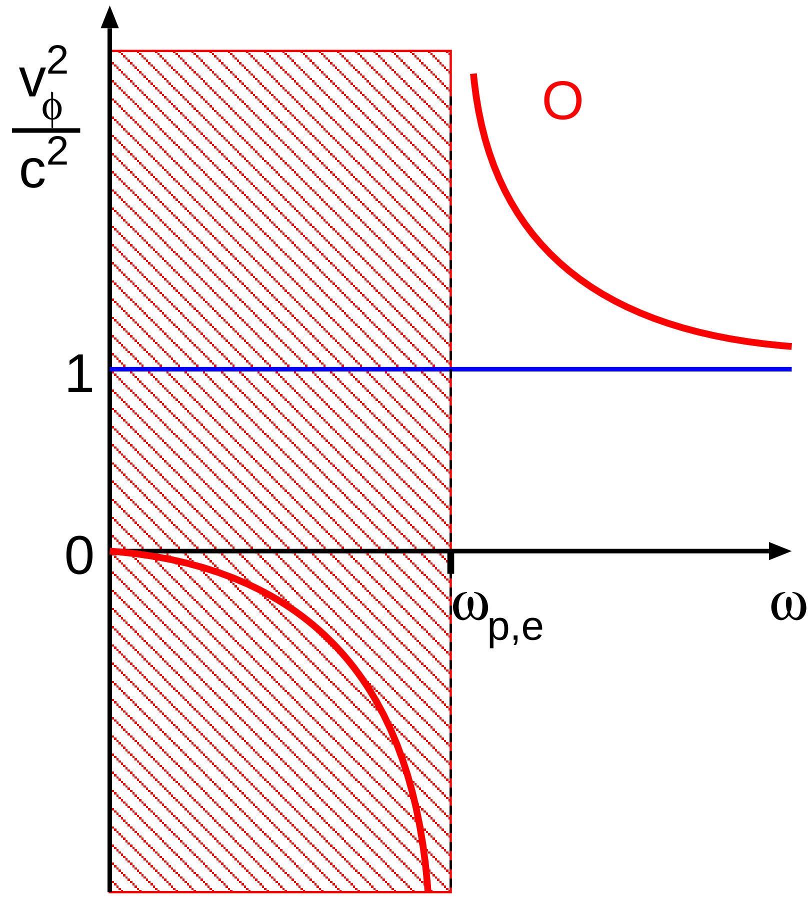
Phasengeschwindigkeit - schneller als das Licht

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_{p,e}^2}{k^2} > c^2$$

Gruppengeschwindigkeit ($< c$)

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\omega^{-1} \cdot 2kc^2 = \frac{c^2}{v_\phi}$$

- Wie für $B = 0$
- keine Ausbreitung f. $\omega < \omega_{p,e}$ ($N, k \rightarrow 0$; *“cut-off”*)



"Außerordentliche" Welle *(X-mode)*

$$N^2 = \frac{RL}{S} = \frac{\left[1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega \pm \omega_{c,s}}\right)\right]\left[1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega \mp \omega_{c,s}}\right)\right]}{1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2 - \omega_{c,s}^2}}$$

Nenner $S \to 0$ ergibt Polstelle ($N, k \to \infty$).

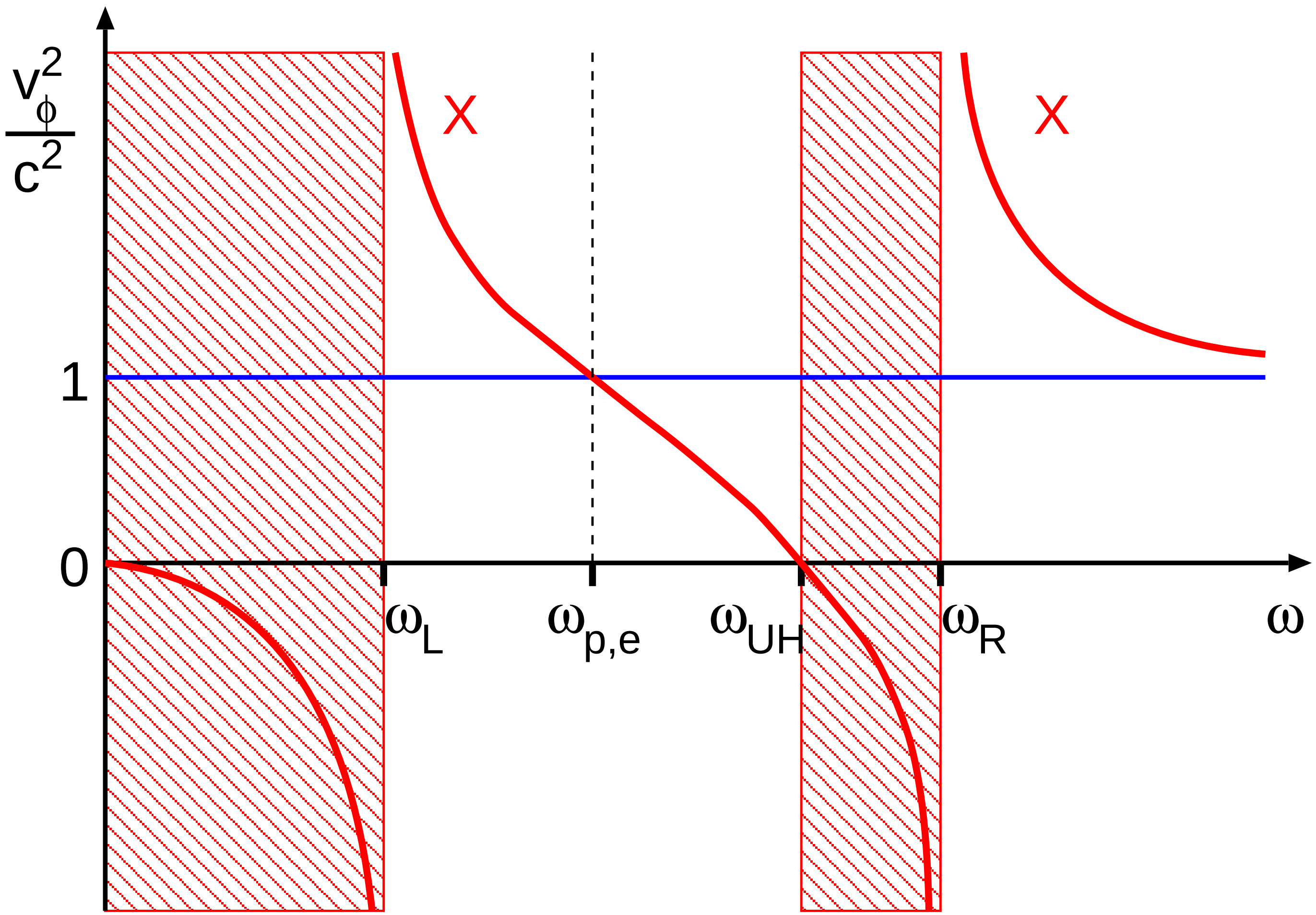
- Nur Elektronen: $\omega_{UH}^2 = \omega_{p,e}^2 + \omega_{c,e}^2$, "obere Hybridresonanz" *(upper hybrid resonance)*
- Elektronen und 1 Ionenspezies: zusätzliche Resonanz zwischen $\omega_{p,i}$ und $\omega_{c,e}$, "Untere Hybridresonanz" (*lower hybrid resonance*). Mit (typ.) $\omega_{c,i} \ll \omega_{LH} \ll \omega_{c,e}$:

$$\frac{1}{\omega_{LH}^2} \approx \frac{1}{\omega_{p,i}^2} + \frac{1}{\omega_{c,i}\omega_{c,e}}$$

- Elektronen und 2 Ionenspezies: zusätzliche "Ionen-Hybridresonanz" (usw.)
- Ohne weiteres *keine* Zyklotronresonanzen bei $\omega = \omega_{c,e}, \omega_{c,i}$ (Zähler $\sim$ Nenner) Dämpfung jedoch möglich durch (a) Stöße (s. Teil I), (b) kinetisch (heißes Plasma)

X-Mode, Zusammenfassung

Phasengeschwindigkeit, nur Elektronen



cut-offs ($N \to 0, v_\phi \to \infty$):

$$\omega_R = \frac{\omega_{c,e}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{c,e}}{2}\right)^2 + \omega_{p,e}^2}$$

$$\omega_L = -\frac{\omega_{c,e}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{c,e}}{2}\right)^2 + \omega_{p,e}^2}$$

Resonanzen: ($N \to \infty, v_\phi \to 0$):

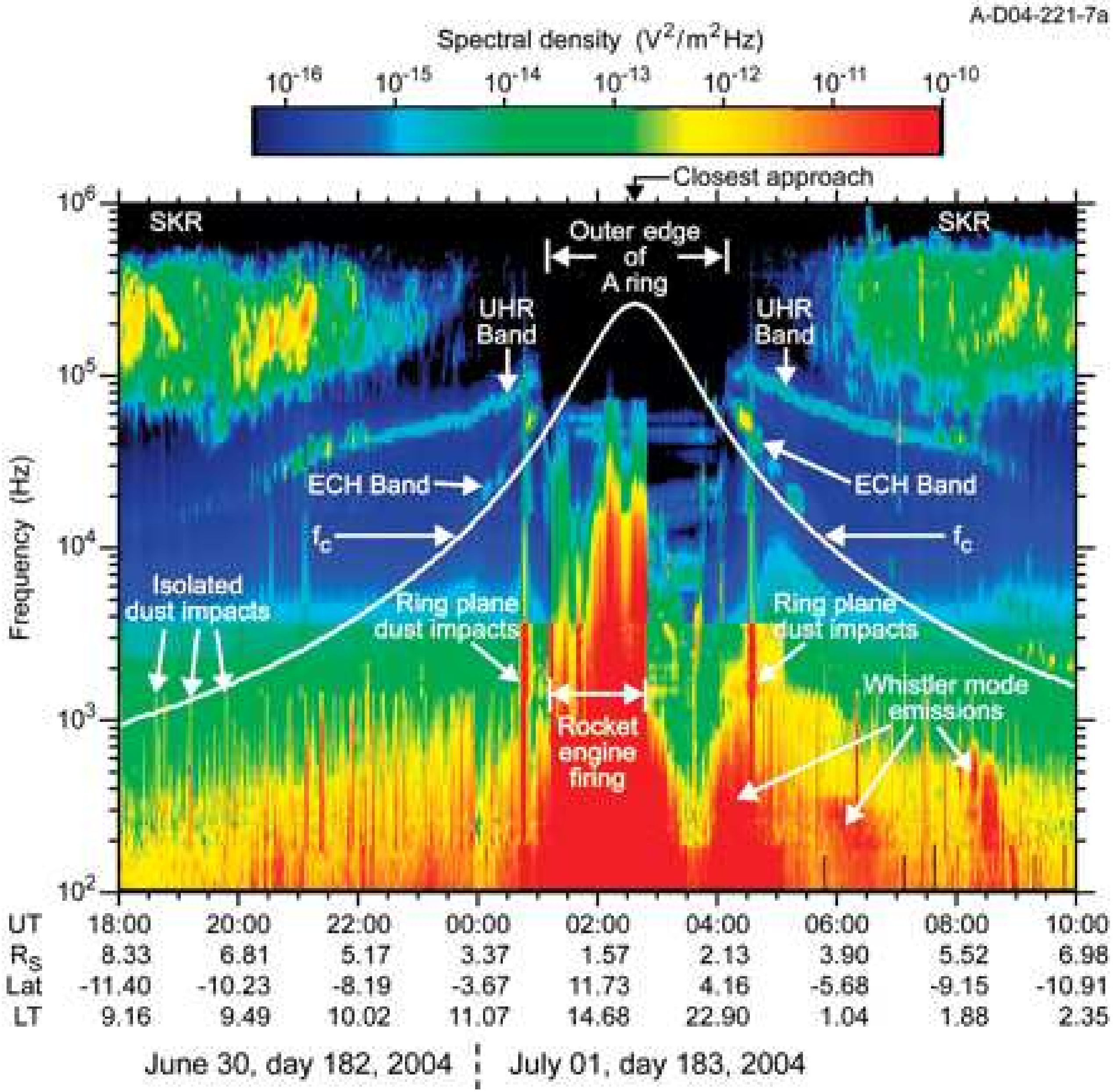
$$\omega_{UH}^2 = \omega_{p,e}^2 + \omega_{c,e}^2$$

Mit 1 Ionenspezies:

$$\frac{1}{\omega_{LH}^2} \approx \frac{1}{\omega_{p,i}^2} + \frac{1}{\omega_{c,i}\omega_{c,e}}$$

+ weitere Resonanzen für mehrere Ionenspezies

Cassini-Sonde kreuzt Magnetosphäre des Saturn

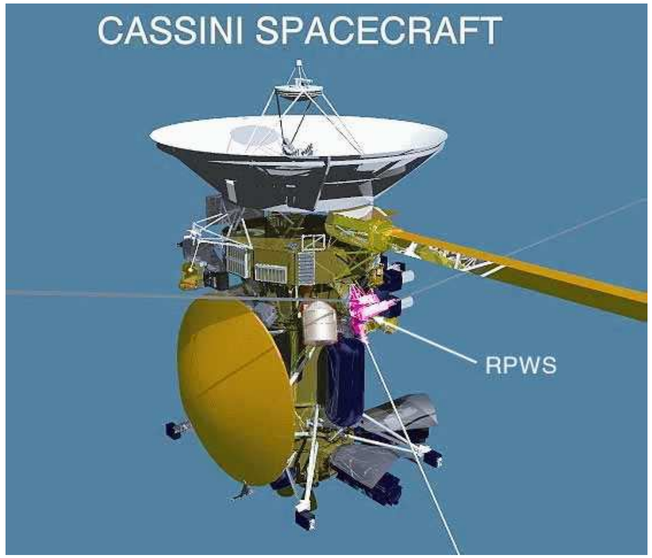


Magnetosphäre des Saturns:

$R \approx 30 R_S, n_e \leq 1.5 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$

Da $f_{c,e} \ll f_{p,e}$, gilt in Näherung:

$$f_{UH}^2 = f_{c,e}^2 + f_{p,e}^2 \approx f_{p,e}^2$$



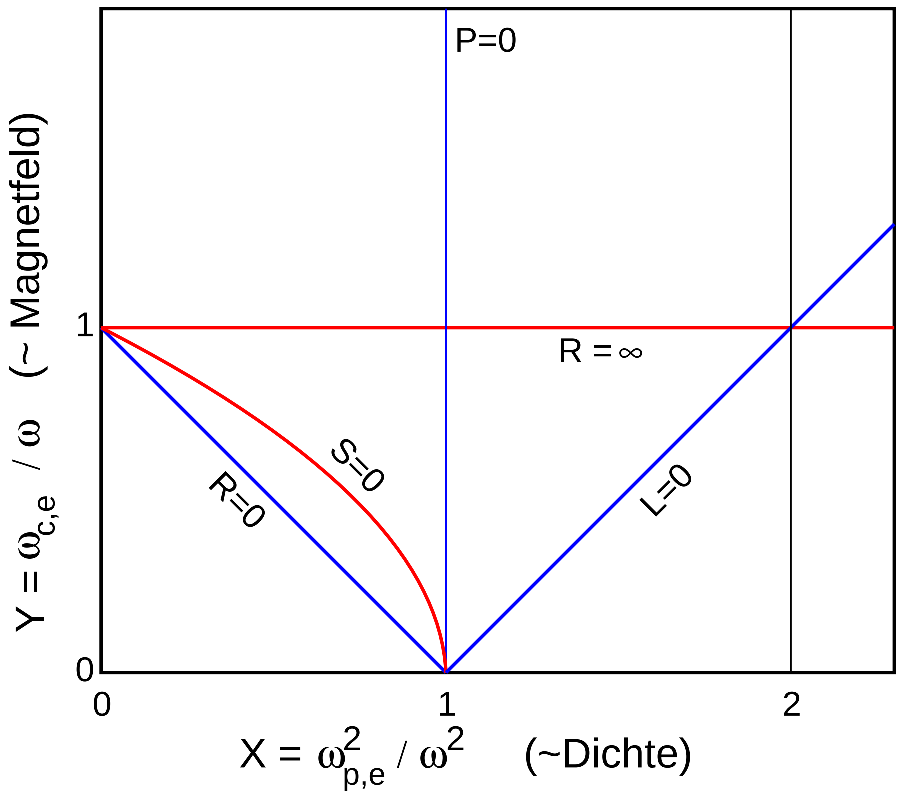
Quelle:

D A Gurnett et al., Science **307** (2005) 1255,

`www.sciencemag.org`

Zusammenfassung: Clemmow-Mullaly-Allis (CMA) - Diagramm

CMA Diagramm für (kalte) Elektronen (und unbewegliche Ionen)



$$\omega_{c,e} = \frac{eB_0}{m_e} \qquad \omega_{p,e}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0},$$

Vernachlässige Ionenterme:

$$L,R = 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{c,e})}; \;\; S = 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2 - \omega_{c,e}^2}; \;\; P = 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2}$$

Def.: $X \equiv \omega_{p,e}^2/\omega^2, \;\; Y \equiv \omega_{c,e}/\omega.$

$$L = 1 - \frac{X}{1+Y}; \;\; R = 1 - \frac{X}{1-Y}; \;\; S = 1 - \frac{X}{1-Y^2}; \;\; P = 1 - X$$

Cut-offs und Resonanzen:

$R = 0$	$X = 1 - Y$	R cut-off
$L = 0$	$X = 1 + Y$	L cut-off
$P = 0$	$X = 1$	Plasmafrequenz
$S = 0$	$X = 1 - Y^2$	Hybridresonanz
$R = \infty$	$Y = 1$	Zyklotronresonanz

Beliebige Ausbreitungsrichtung

Dispersionsrelation:

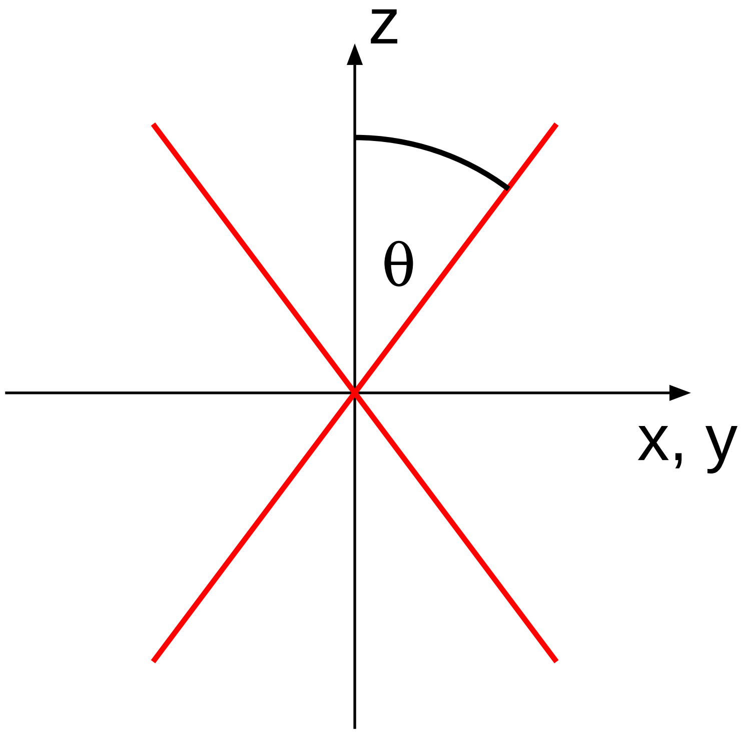
$$\tan^2\theta = -\frac{P\left(N^2-R\right)\left(N^2-L\right)}{\left(SN^2-RL\right)\left(N^2-P\right)}$$

Umschreiben als quadratische Gleichung für N^2:

$$N^4\left(S\sin^2\theta+P\cos^2\theta\right)-N^2\left[RL\sin^2\theta+PS\left(1+\cos^2\theta\right)\right]+PRL \;=\; 0$$

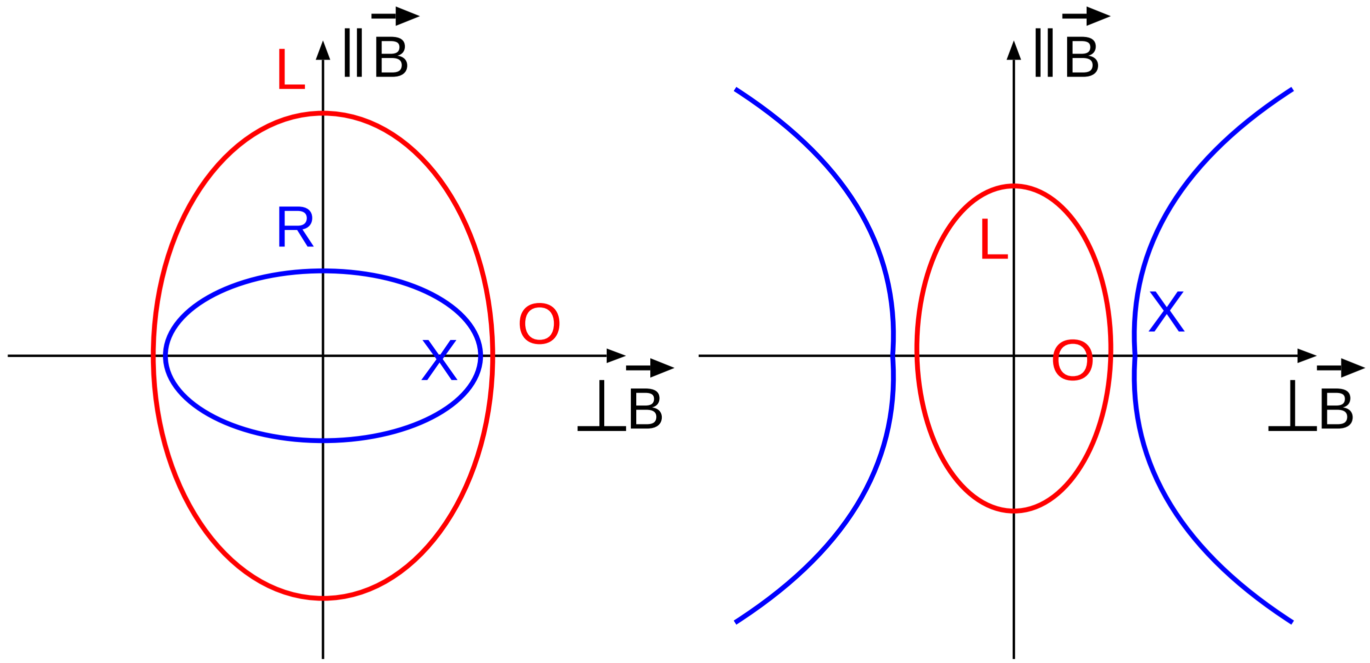
Symmetrieeigenschaften für N^2:

1. Spiegelsymmetrie um $\theta=\pi/2$ (Achse $\perp \vec{B}$),
   (da nur $\sin^2\theta, \cos^2\theta$ eingehen)
2. Cut-off ($N=0$): Frequenz unabhängig von θ
   (da $RLP \neq f(\theta)$)
3. Resonanzen ($N\to\infty$) für $\tan^2\theta=-P/S$
   (Resonanzkegel).
   Nur eine Mode gleichzeitig in Resonanz für $\theta=0\ldots\pi/2$.
4. Keine Entartung von N^2 für verschiedene Moden
   (ausser $\theta=0,\pi/2$)



Winkelabhängigkeit von N (qualitativ)

$\vec{N}$ im Polardiagramm:



keine Resonanz

$\omega > \omega_R$

(elektromagnetische Welle):

$O \leftrightarrow L$,

$X \leftrightarrow R$

Resonanz mit

Ausbreitung $\perp$ B

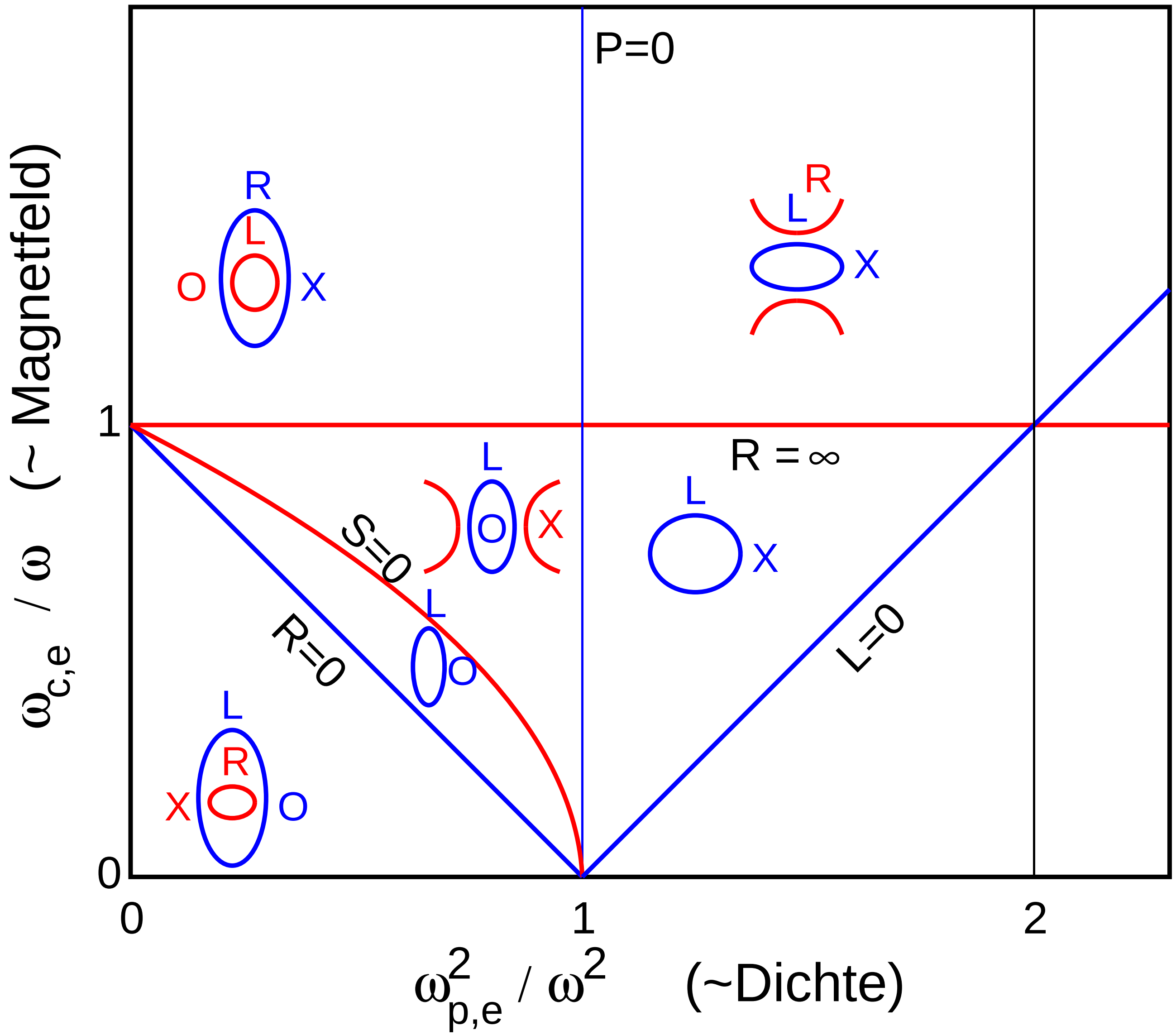
$\omega \geq \omega_{c,e}, \omega_{p,e}$, $\omega \leq \omega_{UH}$

(R-Welle im cut-off):

$O \leftrightarrow L$

CMA-Diagramm (2)

Mit Winkelabhängigkeit von N:



Zusammenfassung

- Neben den (bereits behandelten) Ionenwellen gibt es im Plasma hochfrequente Wellen mit nicht vernachlässigbarer Elektronen-Trägheit und Maxwell'schem Verschiebungsstrom. Der Rolle der Elektronen wird durch eine Behandlung im Zweiflüssigkeits-Modell Rechnung getragen, wobei für hohe Frequenzen der Druckgradient vernachlässigt wird ("kaltes Plasma").
- Analog zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in anderen Medien wird ein Dielektrizitätstensor definiert, der alle Plasmaeffekte (Plasmastrom) beinhaltet.
- Aus der Wellengleichung ergibt sich eine Dispersionsrelation mit bis zu drei Lösungen (je nach Frequenz und Ausbreitungsrichtung), die verschiedene longitudinale und transversale Schwingungsmoden beschreiben.
- Für verschwindenen Brechungsindex ($N \to 0$) bzw. imaginäres N sind Wellen nicht ausbreitungsfähig und werden reflektiert.
- Für $N \to \infty$ treten Resonanzen auf, an denen die Wellenenergie absorbiert wird. Der Absorptionsmechanismus selbst (durch Stösse und stossfreie Dämpfung) wird allerdings im idealen MHD-Modell nicht beschrieben.
- Wellenausbreitungsphänomene, z. B. den Whistler-Mode $\|\vec{B}$ und Emission und Absorption an Resonanzen (Hybrid- und Zyklotronresonanz) wird häufig beobachtet, z.B. in der Magnetosphäre (von verschiedenen Planeten).