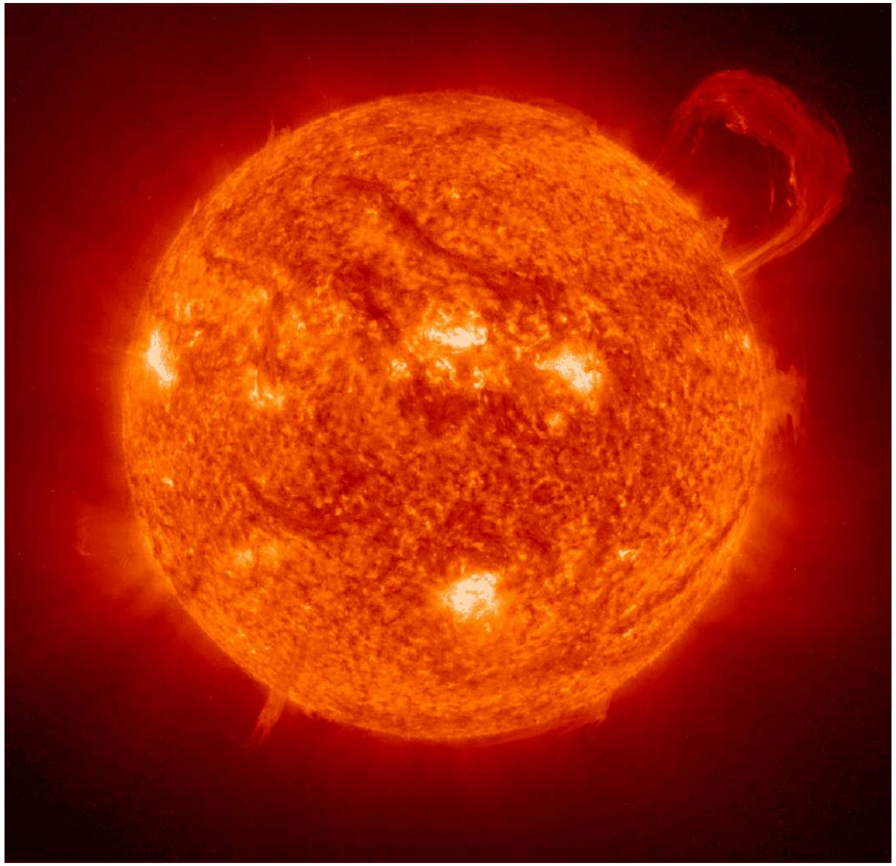
Einführung in die Fusionsforschung

Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching



SOHO EIT 304 Å(He II, 60000 K) 14 Sep 1999, Quelle: `http://sohowww.nascom.nasa.gov`

Plan der Vorlesung

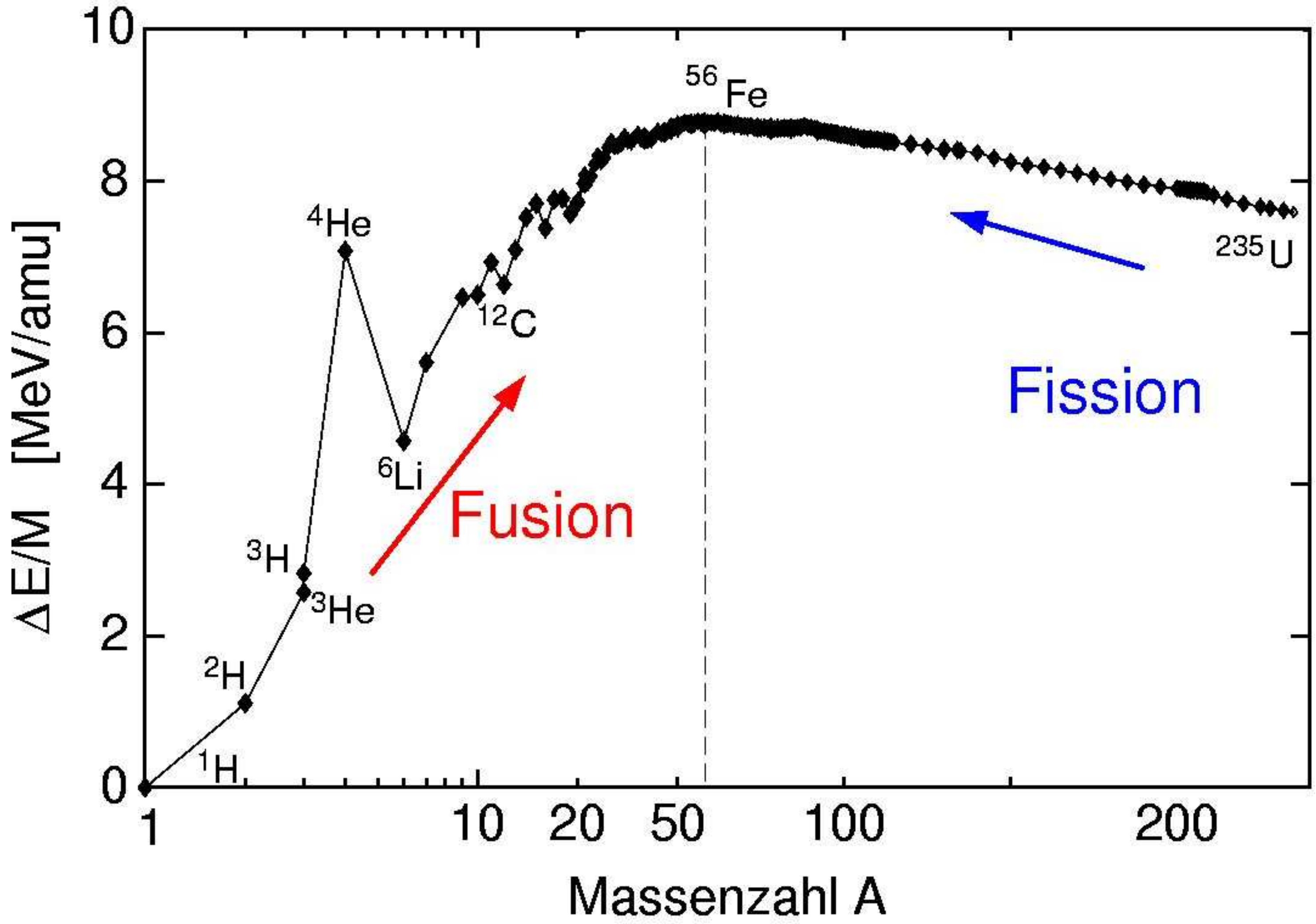
- Wie kann man Energie aus Fusion von Wasserstoff gewinnen?
- Man braucht ein heißes Plasma …
- …und dieses Plasma muss …
  - gut wärmeisoliert (eingeschlossen) werden
  - auf hinreichende Temperatur geheizt werden
  - stabil sein
  - kompatibel mit der Behälterwand sein
  - durch Messungen charakterisiert werden
  - …

Literaturempfehlung

U Stroth	Plasmaphysik Vieweg & Teubner, ISBN 978-3-8348-1615-3
M Kaufmann	Plasmaphysik und Fusionsforschung Teubner, ISBN 3-519-00349-X
D A Gurnett, A Bhattacharjee	Introduction to Plasma Physics ISBN 0-521-36483-3
F F Chen	Introduction to Plasma Physics and controlled fusion ISBN 0-306-41332-9

Kernfusion leichter Kerne liefert Energie

Bethe-Weizsäcker-Massenformel:



Kernfusions-Reaktionen (Sterne)

PP-Kette (PP I):

$$
\begin{array}{rcll}
p + p & \rightarrow & {}^{2}H + e^{+} + \nu_e & (+\,0.42\ \text{MeV}) \\
{}^{2}H + p & \rightarrow & {}^{3}He + \gamma & (+\,5.49\ \text{MeV}) \\
{}^{3}He + {}^{3}He & \rightarrow & {}^{4}He + p + p & (+\,12.86\ \text{MeV}) \\
\hline
4\,p & \rightarrow & {}^{4}He + 2\,e^{+} + 2\,\nu_e + 2\,\gamma & (+\,24.68\ \text{MeV})
\end{array}
$$

CNO-Zyklus:

$$
\begin{array}{rcll}
{}^{12}C + p & \rightarrow & {}^{13}N + \gamma & (+\,1.95\ \text{MeV}) \\
{}^{13}N & \rightarrow & {}^{13}C + e^{+} + \nu_e & (+\,1.20\ \text{MeV}) \\
{}^{13}C + p & \rightarrow & {}^{14}N + \gamma & (+\,7.55\ \text{MeV}) \\
{}^{14}N + p & \rightarrow & {}^{15}O + \gamma & (+\,7.34\ \text{MeV}) \\
{}^{15}O & \rightarrow & {}^{15}N + e^{+} + \nu_e & (+\,1.68\ \text{MeV}) \\
{}^{15}N + p & \rightarrow & {}^{12}C + {}^{4}He & (+\,4.96\ \text{MeV}) \\
\hline
4\,p & \rightarrow & {}^{4}He + 2\,e^{+} + 2\,\nu_e + 3\,\gamma & (+\,24.68\ \text{MeV})
\end{array}
$$

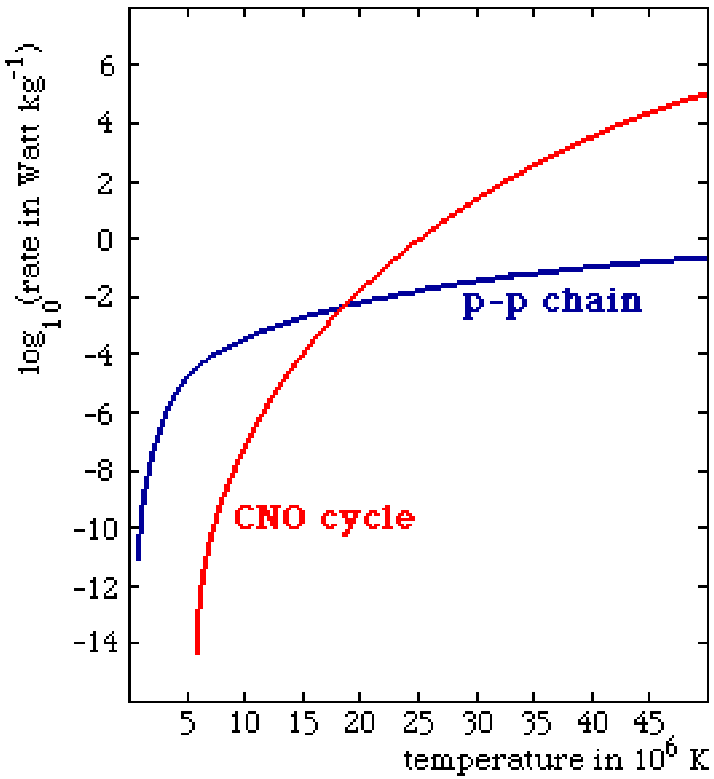
Produktion von ${}^{12}C$: **"Triple-Alpha"-Prozess**

$$
\begin{array}{rcll}
{}^{4}He + {}^{4}He & \leftrightarrow & {}^{8}Be + \gamma & (-\,91.9\ \text{keV}) \\
{}^{4}He + {}^{8}Be & \leftrightarrow & {}^{12}C + \gamma &
\end{array}
$$

Vergleich Heizraten CNO / PP:

Ann. (Sonne):

$\rho_p = 10^5\ \text{kg m}^{-3}$, $\rho_{{}^{12}C} = 10^3\ \text{kg m}^{-3}$.



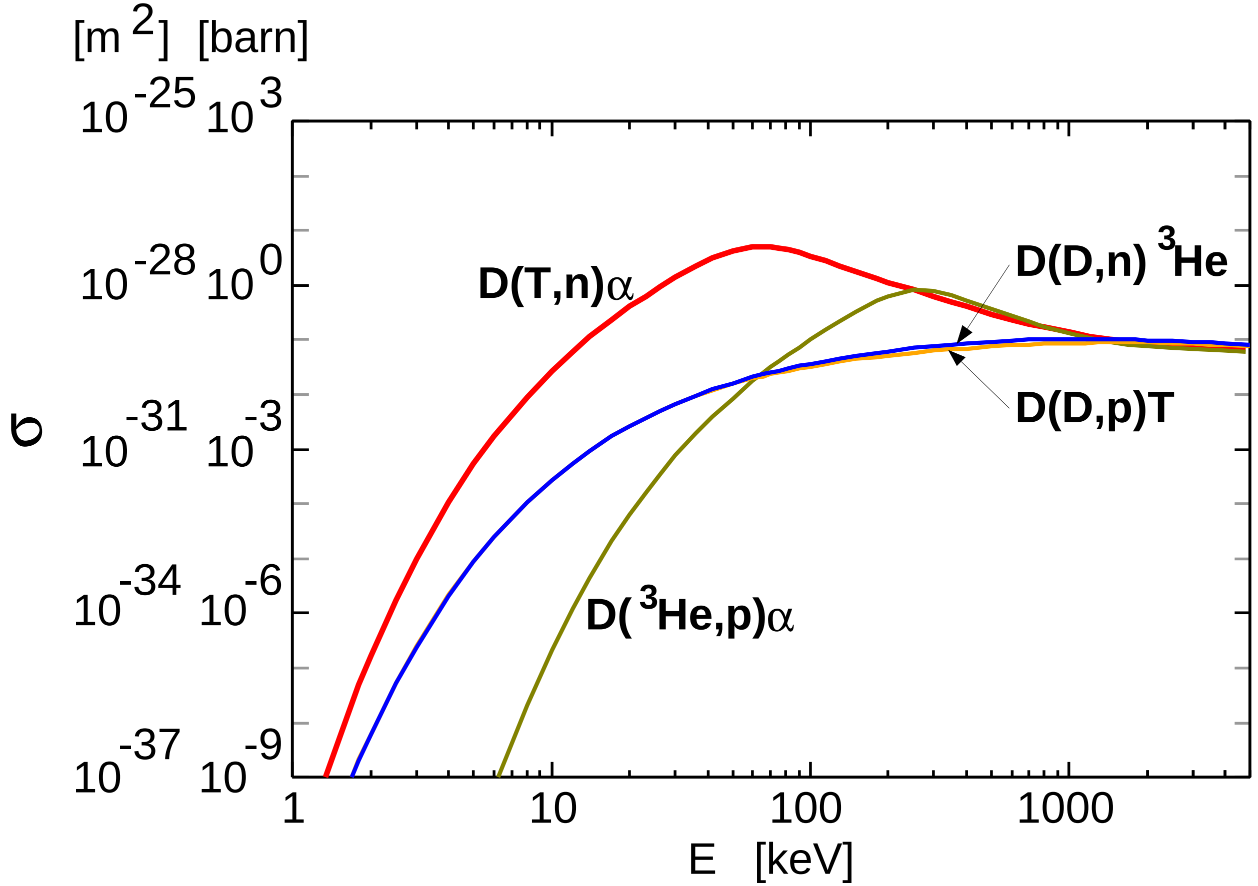
Quelle und Näheres über Kernreaktionen:

`http://www.shef.ac.uk/physics/teaching/phy303/phy303-7.html`

Wirkungsquerschnitt verschiedener Fusions-Reaktionen (Labor)

Den größten Wirkungsquerschnitt hat die D-T Reaktion: $\mathrm{D} + \mathrm{T} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n + 17.6\,\mathrm{MeV}$

Leicht verwertbar ist die Energie in den Neutronen: $14\,\mathrm{MeV} = 2.26 \times 10^{-12}$ J je Reaktion.



$4p \rightarrow {}^4\mathrm{He}$: $\sigma_{\mathrm{H-H}} \sim 10^{-30}\ \mathrm{m}^{-2}$ $(1\ \mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J})$

Wie ergiebig ist diese Energiequelle?

Energieverbrauch pro Kopf (Ungarn, 2003) = 2566.7 kgoe/a (Öl-Äquivalent) = 107.8 GJ/Jahr.

Ann.: Gesamter Weltenergieverbrauch = 50 GJ/Jahr $\times$ 10 Mrd. Einwohner = 5×10^{20} J/Jahr

Ann.: Diese Energie kommt aus D-T Reaktionen mit $\eta = 20\%$ Wirkungsgrad.

Jährlicher Brennstoff-Verbrauch Weltbevölkerung:

$$\frac{5 \times 10^{20}\ \mathrm{J}}{2.26 \times 10^{-12}\ \mathrm{J/Reaktion} \cdot 0.2} \approx 1 \times 10^{33}\ \mathrm{Reaktionen/Jahr}$$

Brennstoff-Vorräte

Deuterium

Wasser in den Meeren:

115 ppm Deuterium-Isotop

$\sim 5 \times 10^{16}$kg $\sim$ 1.5×10^{43} Atome

Tritium

Brutreaktion: $^6\mathrm{Li} + n \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{T} + 3.8\ \mathrm{MJ}$

Litium (Molgewicht 6.94 g)

– im Meerwasser: 2.3×10^{14} kg

– in der Erdkruste 2.1×10^{10} kg (US Geolocial survey 2021)

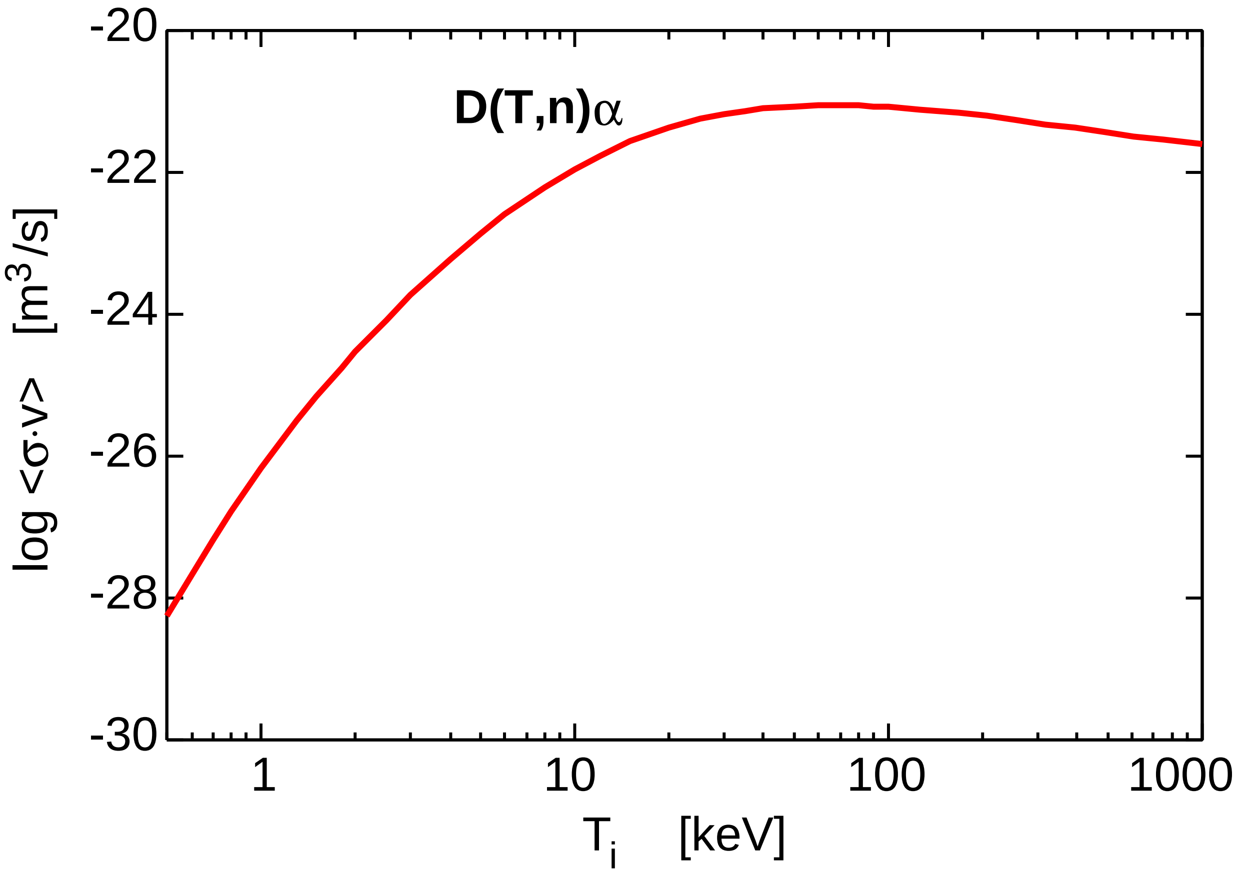
^{6}Li (stabil) kommt zu 7.5% natürlich vor

$\Rightarrow 1.4 \times 10^{35}$ Atome

Reaktionsdurchsatz vs. Temperatur

$< \sigma_{\mathrm{D-T}}\, v_{\mathrm{therm}} >$: Volumendurchsatz pro Zeiteinheit

$< \sigma_{\mathrm{D-T}}\, v_{\mathrm{therm}} > \times n_{\mathrm{D}} n_{\mathrm{T}}$: Zahl der D-T-Reaktionen pro Volumen und Zeiteinheit



1 eV = 11 600 K = 1.602×10^{-19} J

$T \geq 100$ Mio. K

Ionisationsenergie Wasserstoff:

$E_{ion} = 13.6$ eV $\ll k_B T$

$\Rightarrow$ vollständig ionisiertes Gas

= **Plasma** aus Elektronen und Ionen

Elektrostatische Coulomb-Stöße

$< \sigma_{\mathrm{Coul}}\, v_{\mathrm{th}} > \sim 10^{-16}$ m^3/s

$\gg\ < \sigma_{\mathrm{D-T}}\, v_{\mathrm{th}} >$

$\Rightarrow$ **thermalisiertes** Plasma

Was ist ein Plasma?

griechisch: Plasma = πλάσμα (das Geformte)

Plasma = Ionisiertes Gas

Geladene Teilchen: Elektronen und Ionen

Gas:	kurzreichweitige Stösse	"ideales" Gas
Plasma:	Coulomb-Wechselwirkung	
	lange Reichweite	kollektive Effekte

$\rightarrow$ "Vierter Aggregatszustand"

Mehr als 99 % der sichtbaren Materie im Universum ist im Plasmazustand.

- Weltraum: Sterne, interplanetarer Raum
- Erde: Ionosphäre, Magnetosphäre
- Labor: Technische Plasmen, Kernfusion

Im Plasma wechselwirken Teilchen und Felder

Felder üben Kräfte auf Teilchen aus

- Coulomb-Kraft (el. Ladung q):

$$F_\mathrm{C} = q\vec{E}$$

- Lorentz-Kraft (Teilchengeschw. $\vec{v}$):

$$F_\mathrm{L} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Teilchen erzeugen Felder

- Poisson-Gleichung:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

- Ampère'sches Gesetz:

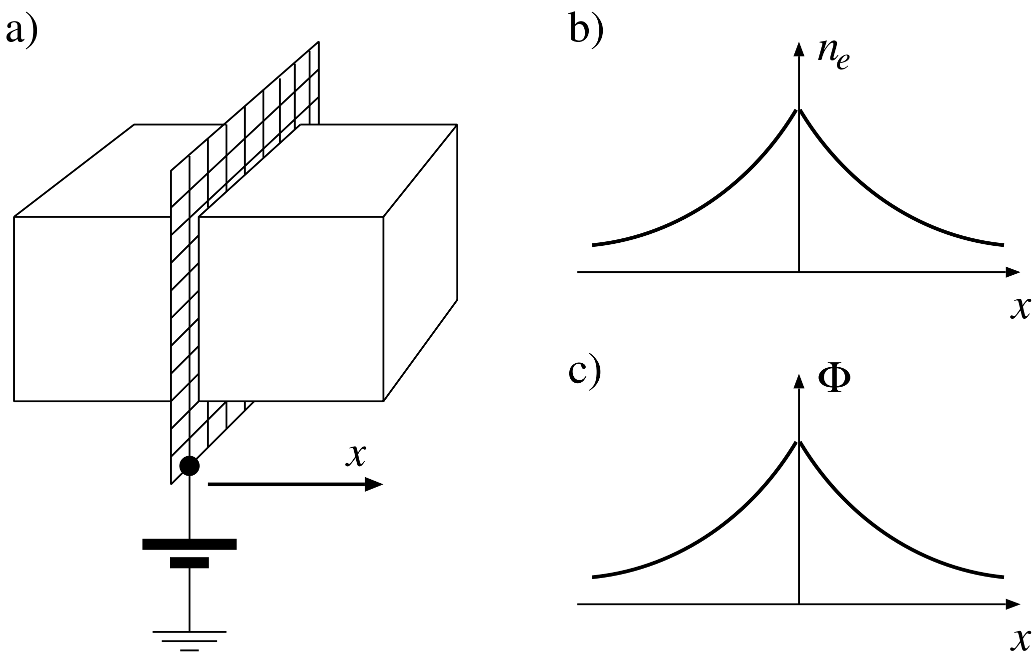
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad + \quad \underbrace{(1/c^2)\partial\vec{E}/\partial t}_{\text{Verschiebungsstrom}}$$

Weitere (Maxwell-) Gleichungen:

- Faraday-Gesetz: $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$
- Keine magnetischen Monopole: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

Elektrostatische Abschirmung macht Plasma “quasi-neutral”

Betrachte 1-D Potenzialstörung:



$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = -\rho(x) = -e\left(Z_i n_i(x) - n_e(x)\right)$$

Φ: Elektrisches Potenzial, $\vec{E} = -\nabla\Phi$,

ρ: Ladungsdichte, n_e: Elektronendichte,

n_i: Ionendichte, Z_i: Ionenladungszahl

Ionen sind für hohe Frequenzen träge

Vereinfachende Ann.: $n_i = \text{const.}$

Elektronen sind beweglich und folgen der “Boltzmann-Relation”

$$n_e = n_\infty \exp(e\Phi/k_B T_e).$$

Mit $n_e(\infty) = n_\infty$, $Z_i n_i(\infty) = n_\infty$ löse

$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = e n_\infty \left(\exp\left[\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right] - 1 \right) \approx \frac{e^2 n_\infty}{k_B T_e}\Phi$$

so daß

$$\Phi = \Phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D)$$

Debye-Länge (Räumliche Skala für Neutralität)

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e}\right)^{1/2}$$

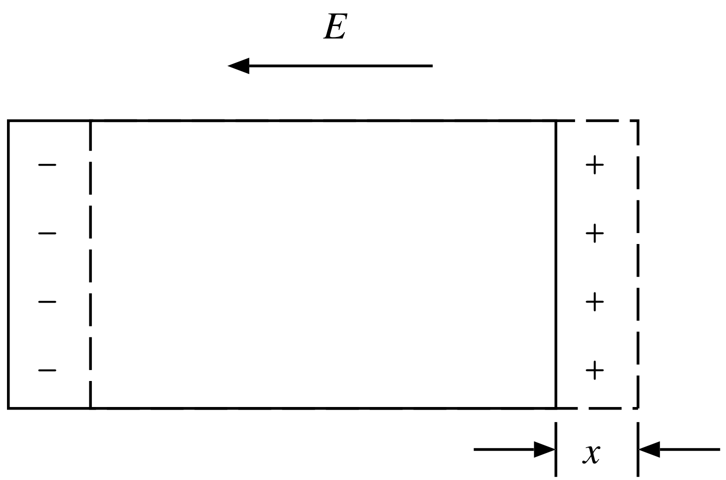
$T_e = 10$ keV, $n_e = 10^{20}$ m^{-3} $\rightarrow$ $\lambda_D = 74\ \mu$m.

Elektronenträgheit, Plasmaschwingungen

Ab welcher Frequenz wird Trägheit der Elektronen wichtig?

Betrachte Plasmavolumen mit

Querschnittsfläche A, Auslenkung x



Verschobene Ladung: $Q = e n_e A x$

Elektrische Feldstärke E

(analog Plattenkondensator)

$$E = \frac{Q}{A\varepsilon_0} = \frac{e n_e x}{\varepsilon_0}$$

Bewegungsgleichung für ein Elektron:

$$-eE = -\frac{e^2 n_e x}{\varepsilon_0} = m_e \ddot{x}$$

Ansatz

$$x(t) = x_0 \exp(i\omega_p t)$$

$\rightarrow$ "Plasmafrequenz" (Zeitskala für Neutralität)

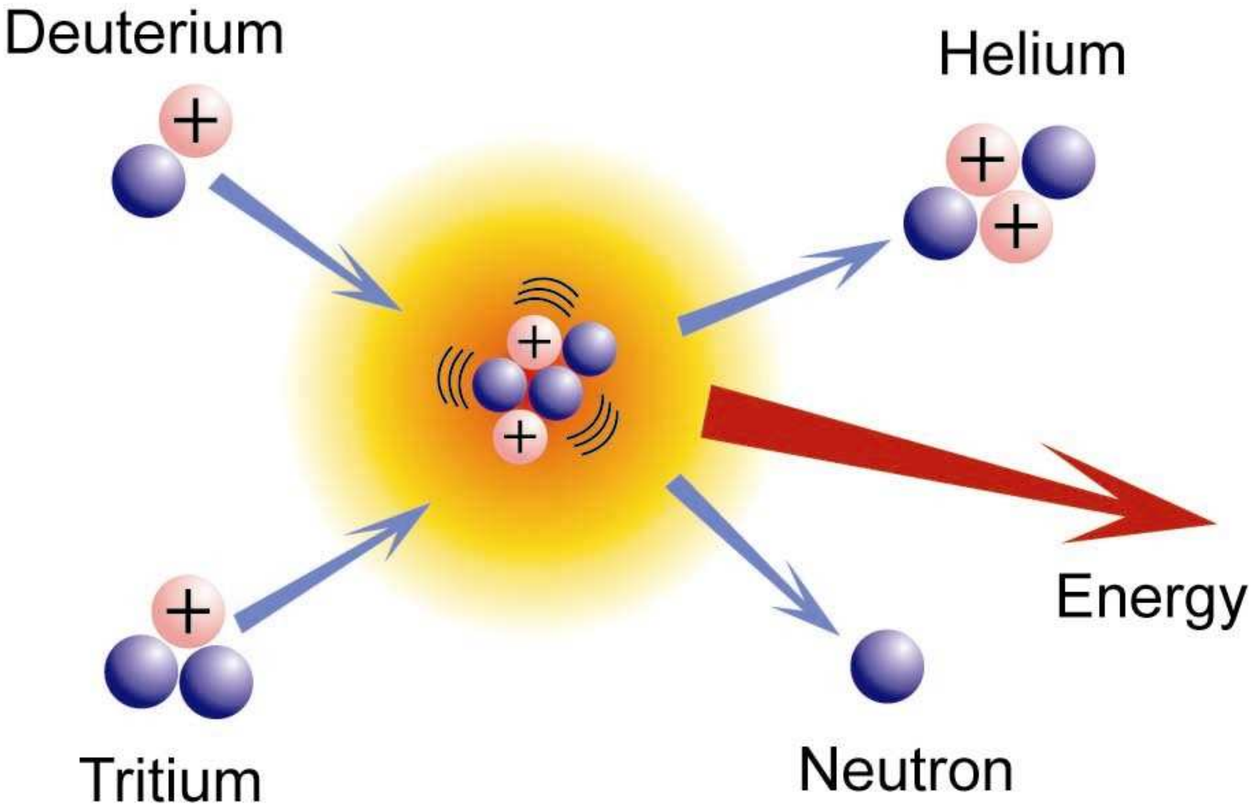
$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{m_e \varepsilon_0}$$

Mit $n_e = 10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$

$\rightarrow f_p = \omega_p / 2\pi = 89$ GHz.

Selbstheizung des Plasmas durch D-T Reaktion

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \;\rightarrow\; {}^4\mathrm{He} + n + 17.6\,\mathrm{MeV}$$



Energie verteilt sich auf Reaktionsprodukte (Impulserhaltung):

Neutron: 4/5
^{4}He: 1/5 $(E_\alpha = 3.5\,\mathrm{MeV})$

Neutrales Neutron verlässt Plasma

^{4}He(-Kern) (vollständig geladen, α-Teilchen) erfährt Coulomb-Stöße mit geladenen Plasmateilchen (Ionen, Elektronen) und heizt sie dadurch auf.

Radioaktivität

Tritium als Brennstoff

Tritium (^{3}H) ist instabil (Beta-Zerfall)
$\tau_{1/2} = 12.32$ Jahre

Biologische Halbwertszeit: $\sim$Tage

Minimiere Tritium-Vorrat
(Nur wenige Gramm im Plasma benötigt)

Abbremsung von Neutronen

Aktivierung von Wand- und Strukturmaterialien

Halbwertszeit hängt vom Material ab
(z.B. Legierungsbestandteile im Stahl)

Zähe Strukturmaterialen ohne langanhaltend aktivierbare Legierungsbestandteile
$\rightarrow$ Materialforschung

Ziel: Geschlossener Materialkreislauf
($\sim$ 30 Jahre Umlaufzeit)

Kriterium für positive Energie-Bilanz

Plasma-Heizleistung	$>$	Verlustleistung	
α-Teilchen-Heizung	$>$	Bremsstrahlungsverluste	+ Wärmeleitung
$< \sigma_{\mathrm{D-T}} v_{\mathrm{therm}} > n_{\mathrm{D}}\, n_{\mathrm{T}}\, E_\alpha$	$>$	$c_B n_e^2 \sqrt{k_B T}$	$3 n k_B T / \tau_E$

τ_E: "Energieeinschlusszeit"

— $\tau_E = W_{th}/P_{\mathrm{netto}}$

— Abfallzeitkonstante der thermischen Energie W_{th} nach Abschalten der Heizung

$c_B \sim Z_{\mathrm{eff}} \times 4.85 \times 10^{-37}$ W m^3 keV$^{-1/2}$, Z_{eff}: eff. Kernladungszahl im Plasma

$\Rightarrow$ "Lawson-Kriterium":

$$n_e \tau_E \;\geq\; \frac{3 k_B T}{\frac{1}{4} < \sigma v > E_\alpha - c_B \sqrt{k_B T}} \;=\; f(T)$$

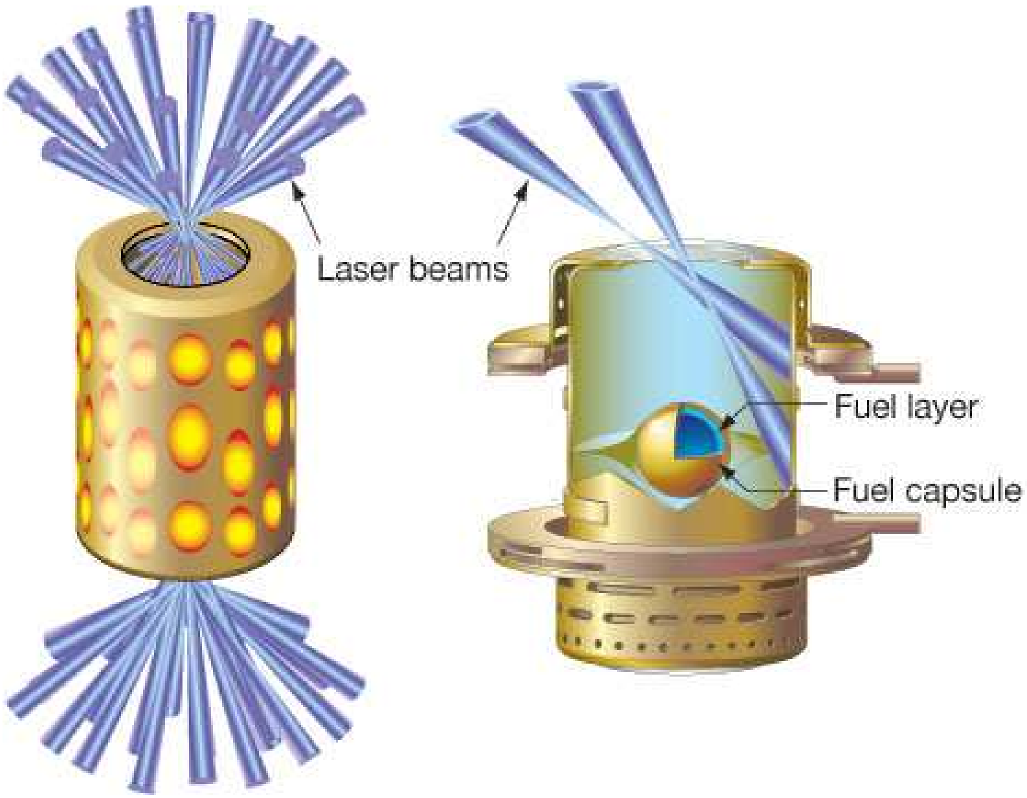
Zu erreichen:

1. $n_e \tau_E \geq 2 \times 10^{20}$ m^{-3}s
2. $T_0 \geq 10$ keV $(116 \times 10^6$ K$)$

Zwei Methoden für den Plasma-Einschluß

Trägheit

Rückstoß von abladierendem Mantel (Laser, Schwerionen) komprimiert D-T-Brennstoff

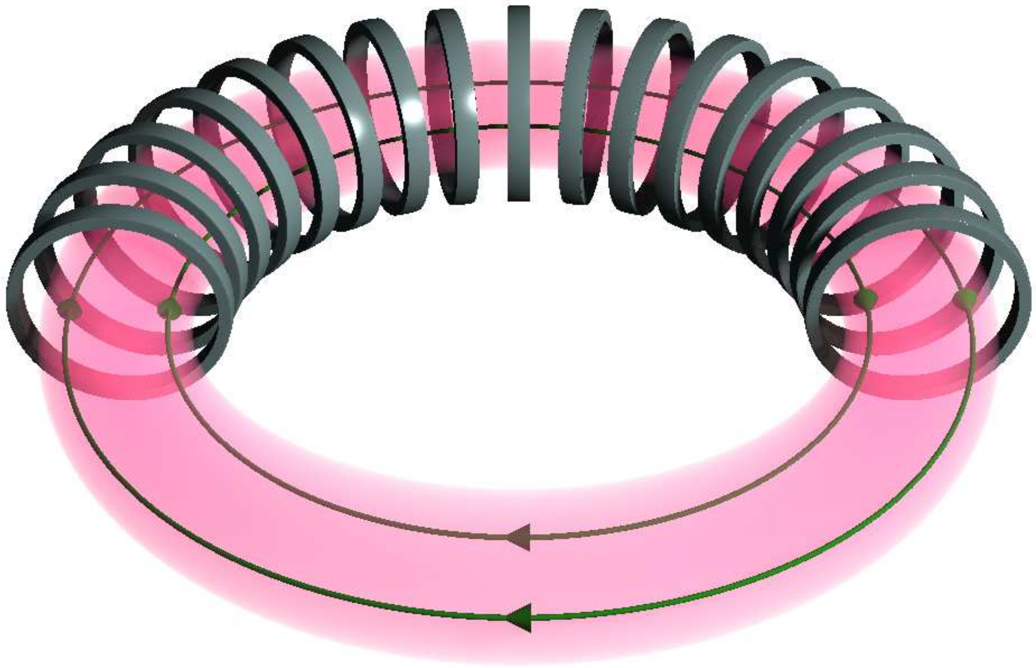


τ_E klein (10^{-10} s)

$\Rightarrow$ Dichte groß (10^{31} m^{-3})

Magnetfeld

Ionen und Elektronen gyrieren um in sich geschlossene Magnetfeldlinien



τ_E groß (5 s)

$\Rightarrow$ Dichte klein (10^{20} m^{-3})

Elektronen und Ionen gyrieren "um" das Magnetfeld

Bewegungsgleichung (Lorentz-Kraft):

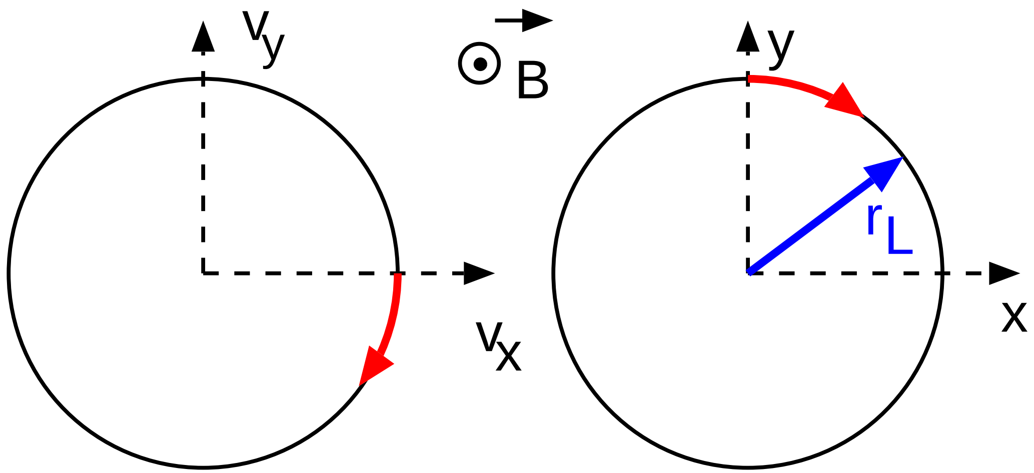
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

Sei $\vec{B} = (0,0,B)$ in z-Richtung:

$m\dot{v}_x = qBv_y$

$m\dot{v}_y = -qBv_x$

$m\dot{v}_z = 0$



Ansatz:

$$v_{x,y} = v_\perp \exp\left(i\omega_c t + i\theta_{x,y}\right)$$

($v_\perp$: Geschwindigkeit senkrecht zu $\vec{B}$)

Zyklotronfrequenz:

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Gyroradius ("Larmor"-Radius):

$$r_L \equiv \frac{v_\perp}{|\omega_c|} = \frac{mv_\perp}{|q|B}$$

Ionen ($q > 0$) gyrieren "linkshändig"

Elektronen ($q < 0$) gyrieren "rechtshändig"

Wie können wir das Plasma mathematisch beschreiben?

Plasma mit N Teilchen ($i = 1 \ldots N$).

$$m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1...N, j \neq i} F_{i,j},$$

$F_{i,j}$: Kraft des j-ten Teilchens auf das i-te Teilchen.

Problem der Ordnung N^2 !

Ausweg 1

(für beliebige Geschw.-Verteilung):

Betrachte Phasenraumdichte $f(\vec{x}, \vec{v})$ jeder Spezies

(**kinetische** Beschreibung)

Ausweg 2 (für thermische Verteilung):

Beschreibe Elektronen und Ionen als **Flüssigkeiten**

Teilchendichte n_s (Index s: Spezies)

= Teilchenzahl / Volumenelement

Flüssigkeits-Geschwindigkeit $\vec{u}_s$

= Mittelwert der Teilchengeschwindigkeiten

Temperatur: Breite der Maxwellverteilung

Druck (Tensor $\overline{\overline{P}}_s$)

(Normal und Scher-) kräfte pro Fläche

Druck (skalar) $p_s = n_s \times k_B T_s$

Beide Ansätze werden ausführlicher diskutiert in der Vorlesung “Einführung in die Plasmaphysik”

Ein-Flüssigkeitsbeschreibung, “Magnetohydrodynamik” (MHD)

Def.: Masse m, Massendichte ρ_m, Teilchendichte $n = \rho_m / m$:

$$m = \sum_s m_s, \quad \rho_m = \sum_s \rho_{m,s}, \quad n = \frac{1}{m} \sum_s m_s n_s$$

Ionen und Elektronen haben sehr unterschiedliche Massen!

Def. **Einflüssigkeitsgeschwindigkeit**

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho_m} \sum_s \rho_{m,s} \vec{u}_s = \frac{1}{mn} \sum_s m_s n_s \vec{u}_s$$

(i.w. Ionengeschwindigkeit)

Def. **Elektrische Stromdichte**

$$\vec{j} = \sum_s q_s n_s \vec{u}_s$$

(i.w. $-e \times$ Elektronengeschwindigkeit)

Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\vec{u})$$

Kraftgleichung:

$$m\, n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + mn\,(\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} \;=\; \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla \cdot \overline{\overline{P}}_0$$

Verallgemeinertes Ohm’sches Gesetz:

$$\vec{E} + \underbrace{\vec{u} \times \vec{B}}_{\text{Dynamo}} - \underbrace{\eta_0 \vec{j}}_{\text{Ohm}} = \underbrace{\frac{1}{en} \vec{j} \times \vec{B}}_{\text{Hall-Effekt}}$$

$$- \underbrace{\frac{1}{en} \nabla \cdot \overline{\overline{P}}_e}_{\text{thermoel. Effekt}} + \underbrace{\frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{u}\vec{j} + \vec{j}\vec{u} \right) \right]}_{\text{Elektronen-Trägheit}}$$

η_0: spezifischer Widerstand durch e-i Stöße

Zusammenfassung

- Sterne werden beheizt durch die Fusionsreaktion $4p \rightarrow^4 \mathrm{He} + \ldots + 24.68$ MeV. Die Reaktionsbedingungen im Sterninnern (Sonne: $T = 15$ Mio. K) werden durch Gravitationsdruck erreicht.
- Die Fusionsreaktion mit dem größtem Wirkungsquerschnitt bei gleichzeitig niedrigster erforderlicher Temperatur ($T \sim 10$ keV) ist $\mathrm{D} + \mathrm{T} \rightarrow^4 \mathrm{He} + n + 17.6$ MeV.
- Die benötigten Brennstoffe, Deuterium aus den Weltmeeren und Tritium durch in-situ Brüten aus Lithium, sollten für lange Zeit den Weltenergieverbrauch decken können.
- Aufgrund der hohen Temperatur liegt das D/T Gasgemisch als vollständig ionisiertes Plasma vor, das aufgrund der vorherrschenden Coulomb-Stoßrate thermalisiert ist.
- 1/5 der Reaktionsenergie geht in α-Teilchen (^{4}He-Kern), die aufgrund ihrer Ladung mit den Plasmateilchen stoßen und sie dadurch heizen
- Das "Lawson"-Kriterium für α-Selbstheizung eines Fusionsplasma erfordert $n\tau_E \geq 2 \times 10^{20}$ m^{-3}s (τ_E Energie-Einschlußzeit)
- Für die vertiefte Beschreibung von Vorgängen im Plasma bewährt sich eine Behandlung als Flüssigkeit (Elektronen- und Ionenspezies separate oder als gemeinsames Fluid).