

Einführung in die Fusionsforschung
Wichtige Grundlagen der Plasmaphysik
(Zusammenfassung der Vorlesung Einführung in die Plasmaphysik)

Wolfgang Suttrop

Max-Planck-Institut für Plasmaphysik

D-85740 Garching

Was ist ein Plasma?

Plasma = Ionisiertes Gas (Elektronen und Ionen)

Wechselwirkung durch elektrische und magnetische Felder

Neutralität.

Skalen:

- Ladungsabschirmung → Charakteristische Länge

Debye-Länge:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e} \right)^{1/2}$$

- Elektrostatische Plasmaschwingungen → Charakteristische Frequenz

Plasmafrequenz:

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{m_e \epsilon_0}$$

Parameter verschiedener Plasmen

	L (m)	n_e (m ⁻³)	T_e (eV)	N	λ_D (m)	N_D	$\omega_p/2\pi$ (Hz)
Gasentladungen	10 ⁻²	10 ¹⁸	2	1 × 10 ¹²	11 × 10 ⁻⁶	4.4 × 10 ¹³	8.9 × 10 ⁹
Prozessplasmen	10 ⁻¹	10 ¹⁸	10 ²	1 × 10 ¹⁵	74 × 10 ⁻⁶	3.1 × 10 ¹⁴	8.9 × 10 ⁹
Fusionsexperiment	1	10 ¹⁹	10 ⁴	1 × 10 ¹⁹	0.23 × 10 ⁻³	9.8 × 10 ¹⁵	28 × 10 ⁹
Fusionsreaktor	2	10 ²⁰	10 ⁴	8 × 10 ²⁰	74 × 10 ⁻⁶	3.1 × 10 ¹⁶	89 × 10 ⁹
Ionosphäre	10 ⁵	10 ¹¹	10 ⁻¹	1 × 10 ²⁶	7 × 10 ⁻³	3.1 × 10 ⁹	2.8 × 10 ⁶
Van Allen-Gürtel	10 ⁶	10 ⁹	10 ²	1 × 10 ²⁷	2.4	9.8 × 10 ⁹	280 × 10 ³
Sonnenkorona	10 ⁸	10 ¹³	10 ²	1 × 10 ³⁷	0.02	9.8 × 10 ¹¹	28 × 10 ⁶
Sonnenwind	10 ¹⁰	10 ⁷	10	1 × 10 ³⁷	7.4	3.1 × 10 ⁸	28 × 10 ³
Interstellares Gas	10 ¹⁶	10 ⁶	1	1 × 10 ⁵⁴	7.4	31 × 10 ⁶	8.9 × 10 ³

Beschreibung von Plasmen

- **Einzelteilchenbeschreibung**

Bewegung geladener Teilchen in vorgegebenen \vec{E} - und \vec{B} -Feldern

- **Kinetische Beschreibung**

Dichte im Phasenraum: $f(\vec{r}, \vec{v})$, Zeitentwicklung

- **Flüssigkeitsbeschreibung** (Magnetohydrodynamik)

Mittelung über $\vec{v} \rightarrow n(\vec{r}), T(\vec{r}), p(\vec{r}), \dots$

- Mehrflüssigkeits-Modell
- Einflüssigkeits-Modell ($\vec{j} = e(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$)

Wechselwirkung Teilchen - Felder

Kräfte auf Teilchen

Coulomb-Kraft:

$$\vec{F}_c = q\vec{E}$$

Lorentz-Kraft:

$$q\vec{v} \times \vec{B}$$

Teilchen erzeugen Felder

Poisson-Gleichung:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \sigma / \epsilon_0$$

Ampère'sches Gesetz:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + (1/c^2) \partial \vec{E} / \partial t$$

Weitere Maxwell-Gl.:

Faraday-Gesetz (Wellenausbreitung):

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

Verbot magnetischer Monopole:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Gyrationsbewegung im Magnetfeld

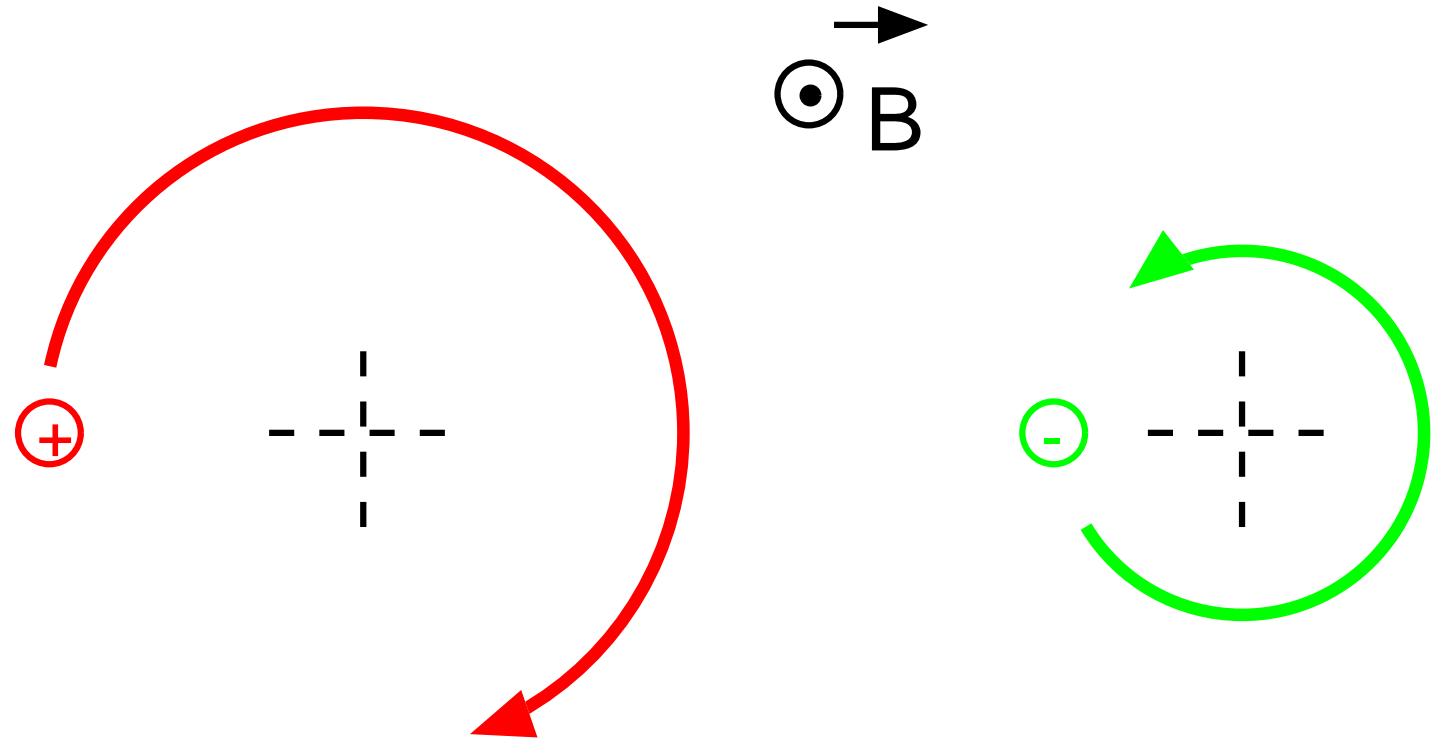
Zyklotronfrequenz:

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Gyroradius

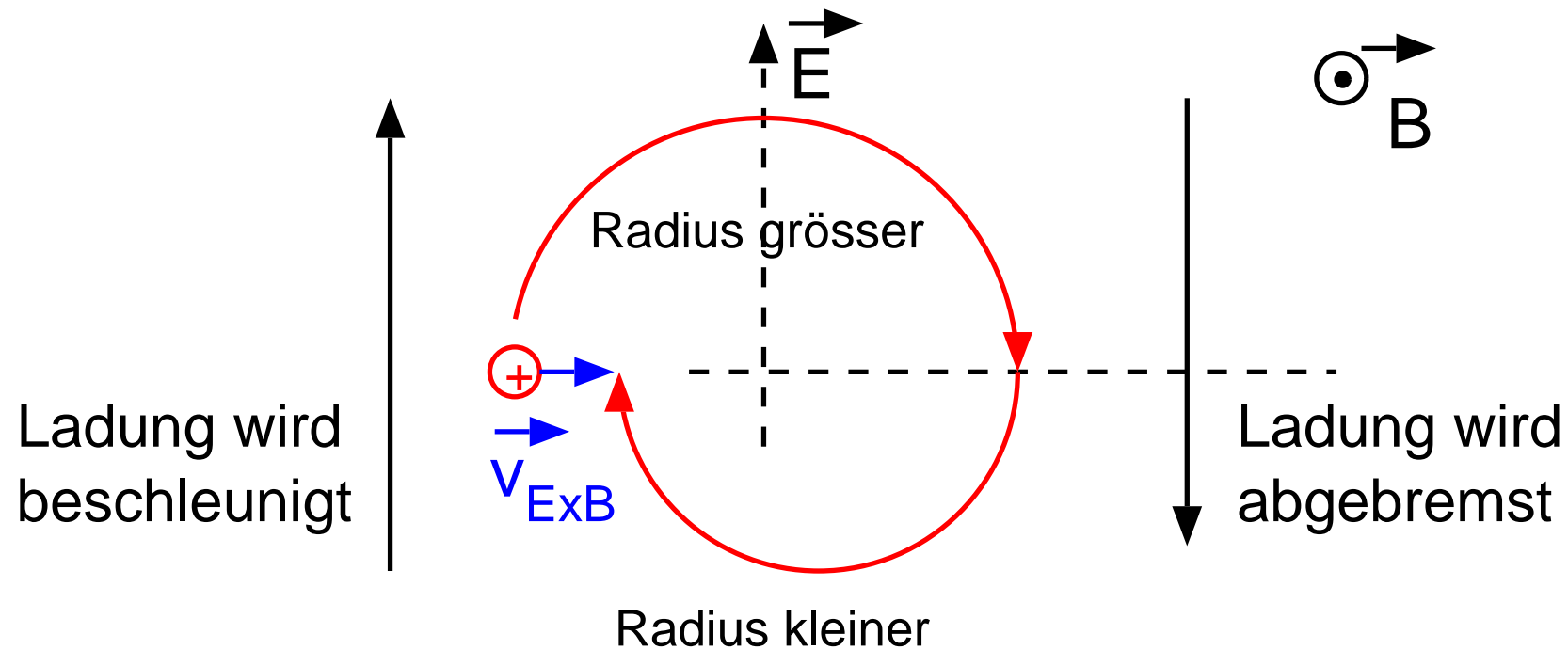
(“Larmor”-Radius):

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{|\omega_c|} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$



Konservatives Kraftfeld \rightarrow Teilchendrift $\perp \vec{F}, \perp \vec{B}$

Durch Bewegung im konservativen Kraftfeld (z.B. elektrostatisch $\vec{F} = q\vec{E}$) ändert sich der Gyroradius.



“Gravitations”-Driften

Beliebiges konservatives Kraftfeld:

$$\vec{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}$$

Gravitationsdrift ($\vec{F} = m\vec{g}$)

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

$E \times B$ -Drift (Coulomb-Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$)

$$v_{E \times B} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Krümmungsdrift (Fliehkraft: $\vec{F}_R = mv_{\parallel}^2 \vec{R}_c / R_c^2$)

$$\vec{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} = \underbrace{\frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3}}_{\text{Zylindersymmetrie, } \vec{j}=0}$$

∇B - (Grad B -) Drift

Ursache: Variation von B in der Gyrationperiode.

∇B -Drift:

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3} \left(\vec{B} \times \nabla B \right)$$

Vgl. Krümmungsdrift für zylindersymmetrisches \vec{B} -Feld im Vakuum ($j = 0$):

$$\vec{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^3} \left(\vec{B} \times \nabla B \right)$$

Driftstrom, da Richtung der ∇B - und Krümmungsdriften vom Vorzeichen der Ladung q abhängt!

Magnetisches Moment, magnetischer Spiegel

Magnetisches Moment:

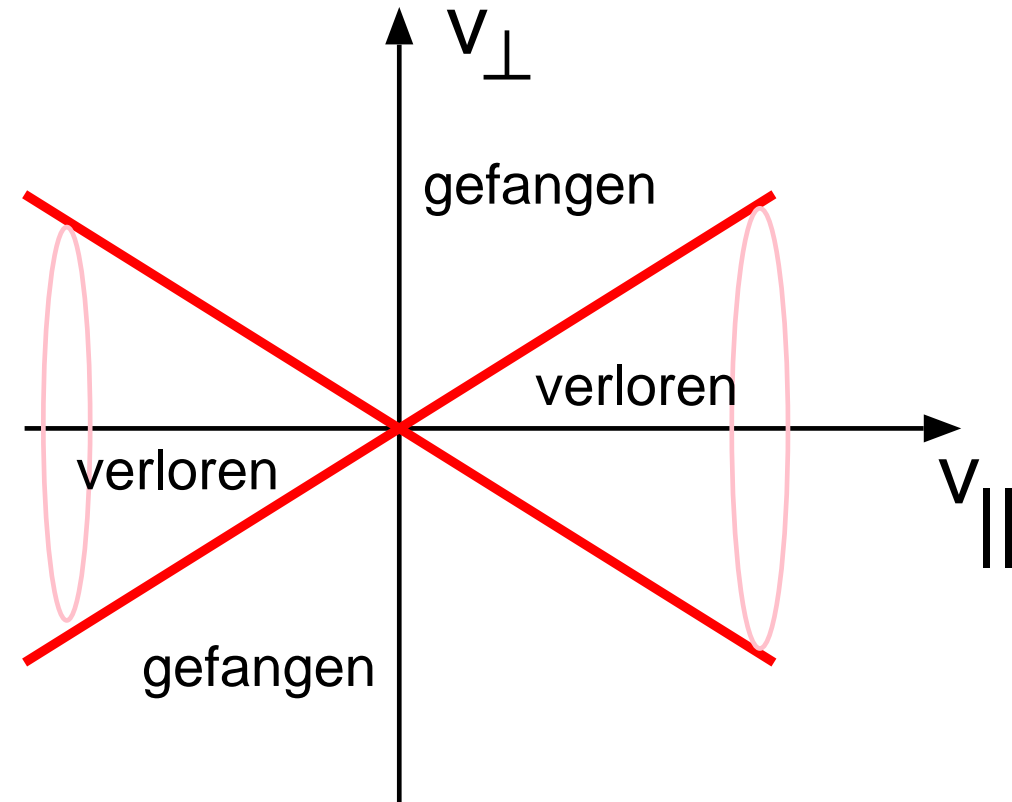
$$\mu = \frac{mv_{\perp}}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B}$$

Erhaltungsgrösse (adiabatische Invariante) für statische Magnetfelder.

Magnetischer Spiegel:

Mit steigendem B -Feld steigt W_{\perp} .

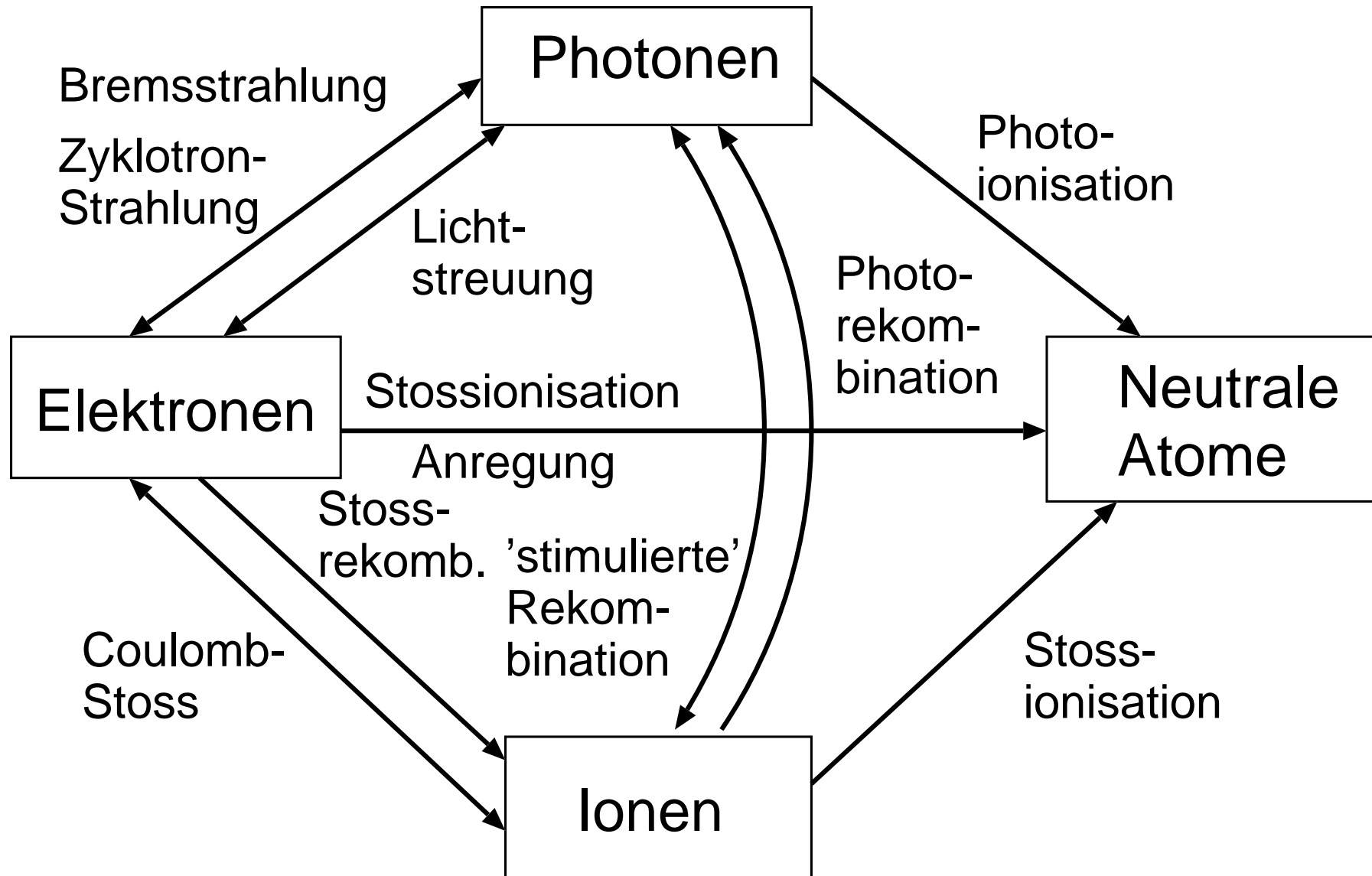
Bei $W_{\parallel} = 0$ kehrt Parallelbewegung um
 \rightarrow “Gefangene” Teilchen



$$v_{\parallel,0}^2 = \frac{2\mu(B_m - B_0)}{m} = v_{\perp,0}^2 \frac{B_m - B_0}{B_0}$$

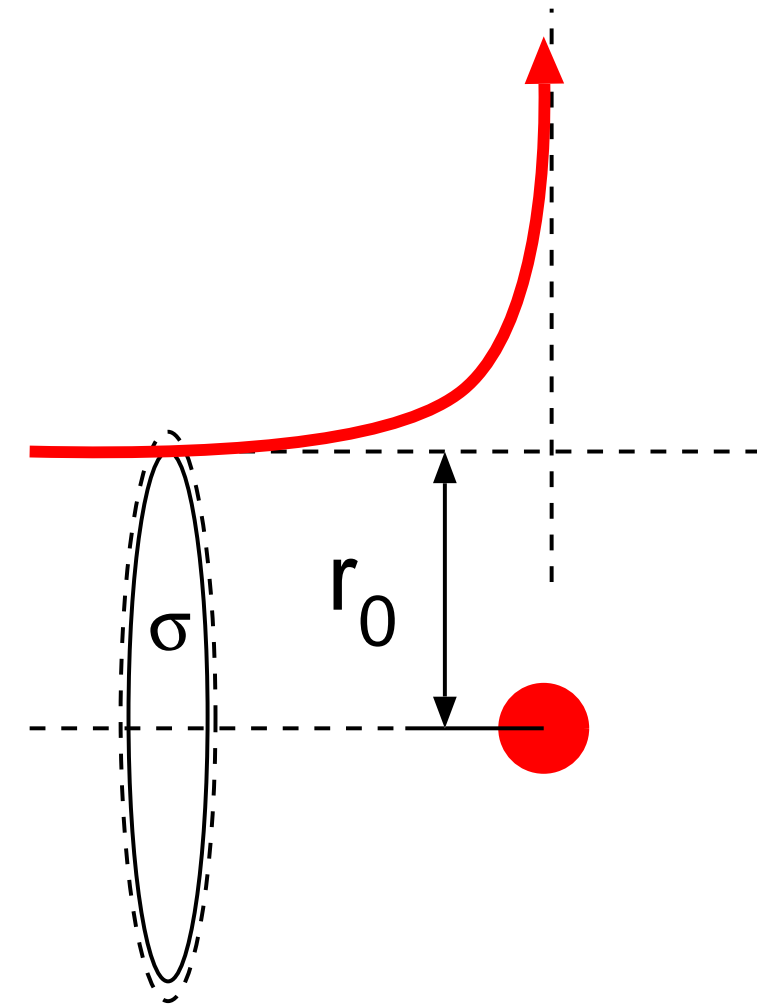
Atomare Wechselwirkungsprozesse

Wesentliche Beispiele, nach Edukten (Pfeile: Hauptwirkrichtung)



Coulomb-Stöße

$\geq 90^\circ$ -Stöße:



Aufeinanderfolgende Kleinwinkelstöße dominieren die effektive $\geq 90^\circ$ -Stoßrate.

Mit $v^2 = k_B T_e / m_e$:

$$v_{ei} = \frac{ne^4 \pi m^{1/2}}{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T_e)^{3/2}} \ln \Lambda$$

$$(\Lambda = \lambda_D / r_0)$$

(Lyman Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases, Wiley, 1962)

Kinetische Beschreibung

Klassische Teilchen: “Punkte” im Phasenraum mit definiertem Ort \vec{x} und Geschwindigkeit \vec{v} .

$$g(\vec{x}, \vec{v}, t) = \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_i(t)) \quad \text{“Exakte” Phasenraumdichte}$$

Mittelung über (kleine) Volumina

→ kontinuierliche Phasenraumdichte $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$

Momente der Verteilungsfunktion

Makroskopische Grössen durch Mittelwertbildung:

$$\langle g(\vec{x}, \vec{v}) \rangle = \int g(\vec{x}, \vec{v}) f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v$$

Ortsabhängige Grössen:

Teilchendichte $n(\vec{x}, t) = \int_v f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v$

mittlere Geschwindigkeit $u(\vec{x}, t) = \frac{1}{n} \int_v \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v$

Temperatur $k_B T = \frac{m}{3n} \int_v m (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v$

kinetische Energiedichte $w(\vec{x}, t) = \int_v \frac{1}{2} m v^2 f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v$

Drucktensor $\bar{\bar{P}}(\vec{x}, t) = \int_v m (\vec{v} - \vec{u}) (\vec{v} - \vec{u}) f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v$

Bewegungsgleichung

Bewegungsgleichung (1. Ordnung dt):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\vec{v}f) + \nabla_v \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m} f \right) dt = 0$$

Formal: Kontinuitätsgleichung für f (im 6-D Phasenraum)!

Vlasov-Gleichung (A. Vlasov, 1945):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_v f = 0$$

Boltzmann-Gl., mit elektromagnetischer Kraft

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c$$

Z.B. *Krook*'scher Stossoperator:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c = \mathbf{v}_n (f_n - f)$$

(f_n : Verteilungsfunktion der Spezies, an der gestreut wird)

Momentengleichungen

Entwicklung der Boltzmann-Gleichung nach Momenten der Geschwindigkeit.

k -tes Moment:

$$\int_{\mathbf{v}} \vec{v}^k \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int_{\mathbf{v}} \vec{v}^{k+1} \cdot \nabla_x f d^3v + \int_{\mathbf{v}} \vec{v}^k \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f d^3v = \int_{\mathbf{v}} \vec{v}^k \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3v$$

verknüpft k -te und $k+1$ -te Potenz von \vec{v} !

(Schliessungsproblem!)

Momentengleichungen = Flüssigkeitsgleichungen

Null-tes Moment: Kontinuitätsgleichung (je Spezies s)

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \vec{u}_s) = 0$$

Erstes Moment: Kraftgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_s n_s \vec{u}_s) + \nabla \cdot (m_s n_s \vec{u}_s \vec{u}_s) = m_s n_s \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} + (\vec{u}_s \cdot \nabla) \vec{u}_s \right]}_{d\vec{u}_s/dt} = \underbrace{n_s q_s \left[\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B} \right]}_{\text{Lorentz-Kraft}} \underbrace{-\nabla \cdot \vec{P}_s}_{\text{Druckgradient}} + \underbrace{\frac{\delta_c p_s}{\delta t}}_{\text{Reibungskraft}}$$

Zweites Moment; Energiegleichung:

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{Q}_s - \vec{E} \cdot \vec{j}_s = \int_v \frac{1}{2} m_s v^2 \frac{\delta_c f_s}{\delta t} d^3 v$$

Schliessungsbedingungen

kaltes Plasma ($k_B T \rightarrow 0$)

$$\overline{\overline{P}} = 0$$

Adiabatische Zustandsgleichung ($\gamma = \frac{z+2}{z}$, z Zahl Freiheitsgrade)

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{n^\gamma} = 0, \quad p = p_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma$$

Nicht-isotroper Druck:

$$p_{\parallel} = p_{\parallel,0} \left(\frac{n}{n_0} \right)^3, \quad p_{\perp} = p_{\perp,0} \left(\frac{n}{n_0} \right)^2$$

Chew-Goldberger-Low

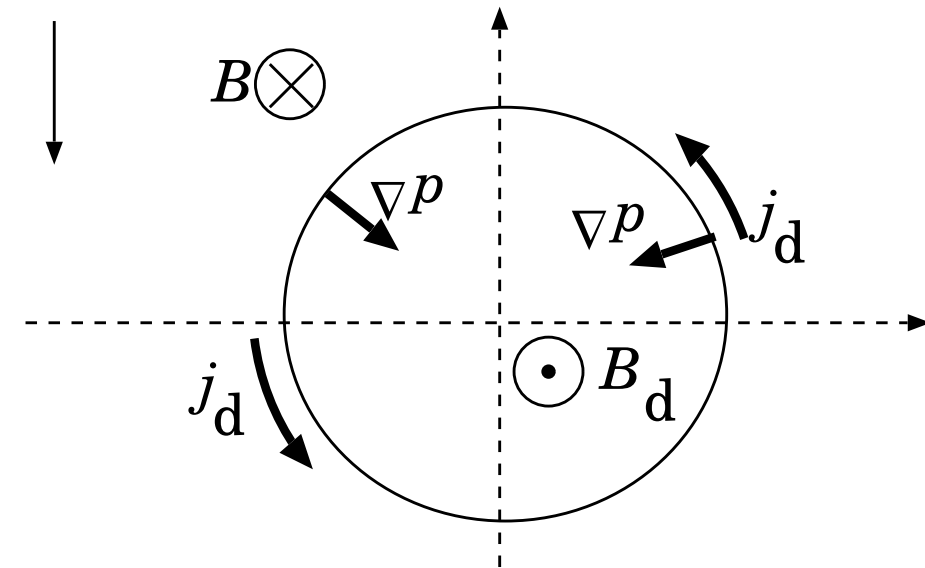
Adiabatische Invarianten: $\frac{d}{dt} \mu = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{nB} \right) = 0$, $J = \oint v_{\parallel} ds = v_{\parallel} L = \text{const.}$

Teilchenzahlerhaltung: $N = nAL = \text{const.}$, Flusserhaltung: $\Psi = AB = \text{const.}$

$$\frac{d}{dt} \frac{J^2 \Psi^2}{N} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2p_{\parallel} L^2}{nm} \frac{B^2 A^2}{n^2 A^2 L^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0$$

Flüssigkeitsbild vs. Teilchenbild

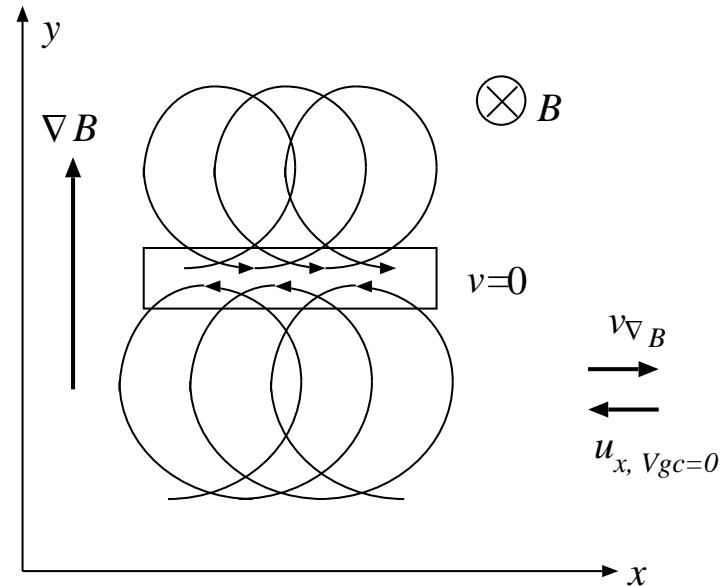
Diamagnetische Drift (Strom)



$$\vec{u}_s = \underbrace{\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}}_{\vec{E} \times \vec{B}\text{-Drift}} + \underbrace{\frac{1}{q_s n_s B^2} (\vec{B} \times \nabla p)}_{\text{diamagnetische Drift}}$$

Keine Entsprechung in
Teilchen-Bewegungsgleichung
Diamagnetischer Strom senkt \vec{B} ab

∇B -Drift



$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q_s B^3} (\vec{B} \times \nabla B)$$

Drift der Gyrozentren und
Geschwindigkeitsvariation durch
Magnetfeldgradient heben sich auf
→ mittlere Geschwindigkeit $u = 0$

Ein-Flüssigkeits-Modell

Masse m , Massendichte ρ_m , Teilchendichte $n = \rho_m/m$, Flüssigkeitsgeschwindigkeit \vec{u}

$$m = \sum_s m_s, \quad \rho_m = \sum_s \rho_{m,s}, \quad n = \frac{1}{m} \sum_s m_s n_s \quad \vec{u} = \frac{1}{\rho_m} \sum_s \rho_{m,s} \vec{u}_s = \frac{1}{mn} \sum_s m_s n_s \vec{u}_s$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n \vec{u}) = 0$$

$$\text{Kraftgleichung: } \frac{\partial}{\partial t} (n m \vec{u}) + \nabla \cdot (m n \vec{u} \vec{u}) = m n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + mn (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla \cdot \bar{\bar{P}}_0$$

$$\text{Ohm'sches Gesetz: } \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \eta_0 \vec{j} = \frac{1}{en} \vec{j} \times \vec{B} - \frac{1}{en} \nabla \cdot \bar{\bar{P}}_e + \frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \vec{j} + \vec{j} \vec{u}) \right]$$

Magnetischer Drucktensor ($\vec{j} \times \vec{B}$ -Kraftdichte)

$$\overline{\overline{T}} \equiv \underbrace{\left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \overline{\overline{1}}}_{\text{isotroper Magnetfelddruck}} - \underbrace{\left(\frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0} \right)}_{\text{Zugspannung in } \vec{B}\text{-Richtung}}$$

Komponenten ($\vec{B} \parallel z$ -Richtung):

$$\overline{\overline{T}} \equiv \begin{pmatrix} B^2/2\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2/2\mu_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2/\mu_0 \end{pmatrix}$$

Plasma-“Beta”

Betrachte stationären Fall, $m \frac{d}{dt} (n \vec{u}) = 0$, $E = 0$, isotroper kinetischer Druck p

Kraftgleichung:

$$0 = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B})$$

Def.:

$$\beta \equiv \frac{p}{B^2/2\mu_0}$$

Grenzfälle:

- $\beta \ll 1$: Magnetfelddruck bestimmt Plasmabewegung
- $\beta \approx 1$ (und höher): kinetischer Druck bestimmt Plasmabewegung

MHD-Anwendung: “Akustische” Wellen

Plasma, $B_0 \neq 0$, $E_0 = 0$, Kraftgleichung, linearisiert:

$$mn_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 = \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \vec{B}_1 \right) \times \vec{B}_0 - \nabla p_1$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz ($\eta = 0$)

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla \times \vec{E}_1 = \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{u}_1 \times \vec{B}_0 \right)$$

MHD-Anwendung: Magneto-Schallwellen

Schallgeschwindigkeit:

$$c_s \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma k_B T}{M} \right)^{1/2}$$

Alfvén-Geschwindigkeit:

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m n_0}}$$

Transversale (Scher-) Alfvén-Welle

$$c^2 = v_A^2 \cos^2 \theta$$

Langsame Magnetoschallwelle

$$c^2 = \frac{1}{2} (v_A^2 + v_s^2) - \frac{1}{2} \left[(v_A^2 - c_s^2)^2 + 4v_A^2 c_s^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

Schnelle Magnetoschallwelle

$$c^2 = \frac{1}{2} (v_A^2 + v_s^2) + \frac{1}{2} \left[(v_A^2 - c_s^2)^2 + 4v_A^2 c_s^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

Themen 2. Teil Vorlesung

1. Magnetischer Einschluss
2. Toroidale Kraftgleichgewichte
3. Transport, Diffusion
4. “Neoklassischer” Transport
5. Plasmadiagnostik
6. Plasmarandschicht, Leistungsabfuhr
7. Fusion als Energiequelle
8. Exkursion zum Fusionsexperiment ASDEX Upgrade