Magnetohydrodynamische (MHD-) Beschreibung

Hannes Alfvén (1908-1995)

1933	Ursprung der kosmischen Strahlung (“Nature”)
1940	Professor für Elektrodynamik, KTH Stockholm
1942	Alfvén’sches Theorem (eingefrorener magn. Fluß)
1942	MHD-Wellen (“Nature”)
1950	Buch “Cosmical Electrodynamics”
1967	Ausserordentl. Professor UC San Diego
1970	Nobel-Preis für Physik

Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Inhalt

1. MHD Einflüssigkeits-Modell
   - Kraftgleichung
   - Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz
   - Magnetischer Drucktensor, Plasma-Beta
2. Anwendungen der MHD
   - *Heute:* Magneto-Schallwellen, *MHD-Wellen*
   - *Weitere wichtige Anwendungen:*
     Erhaltung des magn. Flusses bei unendlicher Leitfähigkeit
     elektrische Leitfähigkeit $\perp \vec{B}$
     Magnetfeld-Diffusion/-Konvektion

(Mehr-) Flüssigkeitsgleichungen

Haben (aus den Momentengleichungen für die Verteilungsfunktion) separat für jede Spezies s (Elektronen und Ionen bzw. mehrere Ionenspezies):

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s\, u_s) = 0$$

Kraftgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_s\, n_s\, \vec{u}_s) + \nabla \cdot (m_s\, n_s\, \vec{u}_s\vec{u}_s) = n_s\, q_s\, \left[\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}\right] - \nabla \cdot \overline{\overline{P}}_s + \frac{\delta_c p_s}{\delta t}$$

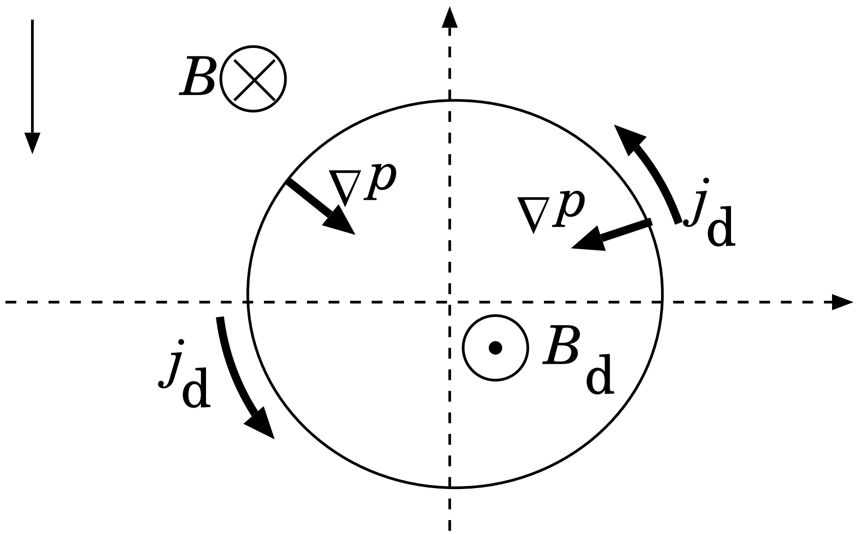
Neutralität:

$$\rho = \sum_s q_s n_s = 0$$

- Massenströmung: Im wesentlichen durch Ionen.
- Elektrischer Strom: Relativbewegung (i.w. getragen durch Elektronen).

Diamagnetische Drift

Wie unterscheiden sich Flüssigkeitsbild und Teilchenbild?



Betrachte stationären Fall, $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\,\vec{u}) = 0$,

Ann.: isotroper kinetischer Druck

Kraftgleichung für Spezies s:

$$n_s q_s \left[\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}\right] = \nabla p_s$$

Multipliziere $\times\vec{B}/B^2$, und auflösen nach u_s:

$$\vec{u}_s = \underbrace{\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}}_{\vec{E}\times\vec{B}-\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{q_s n_s B^2}\left(\vec{B}\times\nabla p\right)}_{\text{diamagnetische Drift}}$$

Diamagnetische Drift:

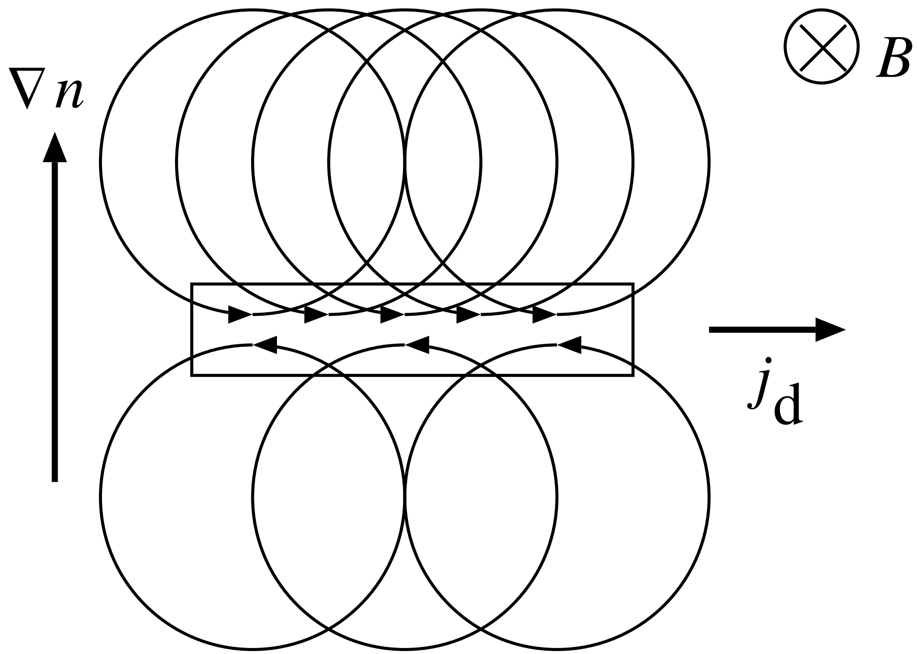
- Keine Entsprechung in Teilchen-Bewegungsgleichung (kein Druck, Druckgradient)
- Unterschiedliche Driftrichtung für Elektronen und Ionen
  $\rightarrow$ Diamagnetischer Strom (senkt $\vec{B}$ ab).

Ursache der diamagnetischen Drift

Beispiel: Ruhende Gyrozentren — dennoch endliche Flüssigkeitsgeschwindigkeit (bei nicht-verschwindendem Druckgradienten)

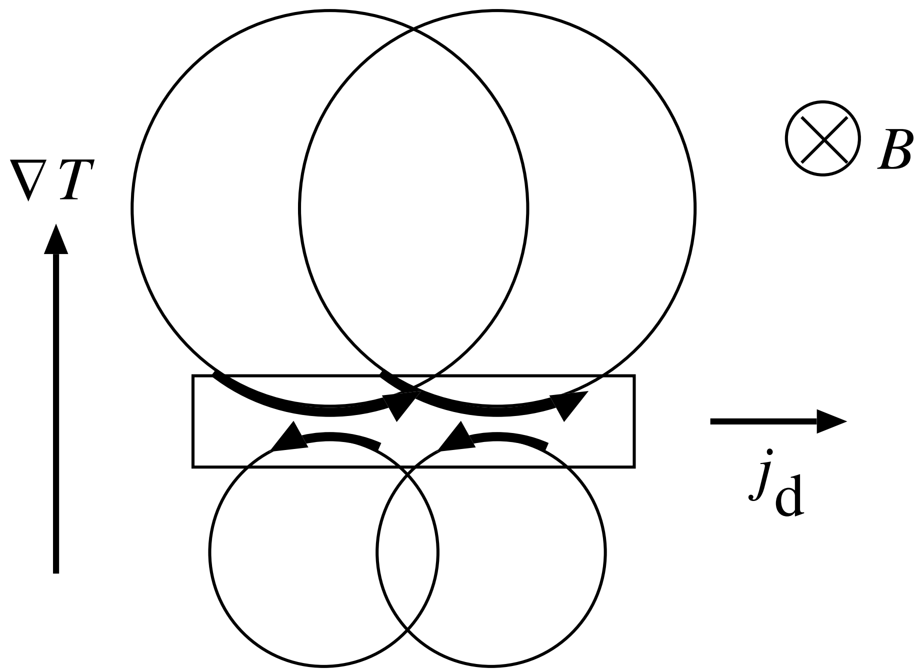
Dichtegradient

$T = const., \nabla n \neq 0$



Temperaturgradient

$n = const., \nabla T \neq 0$



Keine Einzelteilchendrift — "Drift" entsteht durch Summierung über Teilchenverteilung

Flüssigkeitsströmung $\neq$ Gyrozentrumsbewegung !

Teilchen- vs. Flüssigkeitsbild

Flüssigkeitsbild — Diamagnetische Drift (Flüssigkeitsgeschwindigkeit)

$$\vec{u}_d = \frac{1}{q_s n_s B^2} \left(\vec{B} \times \nabla p \right)$$

$\rightarrow$ Tritt bei endlichem Druckgradienten auf.

Teilchenbild — ∇B-Drift der Gyrozentren:

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{m v_\perp^2}{2 q_s B^3} \left(\vec{B} \times \nabla B \right)$$

$\rightarrow$ Tritt bei endlichem Magnetfeld-Gradienten auf.

Außerdem: Krümmungsdrift ($v_\|$)

Beide Bilder sind konsistent (s. Anhang)

Ein-Flüssigkeits-Modell

Masse m, Massendichte ρ_m, Teilchendichte $n = \rho_m/m$:

$$m = \sum_s m_s, \qquad \rho_m = \sum_s \rho_{m,s}, \qquad n = \frac{1}{m}\sum_s m_s n_s$$

Flüssigkeitsgeschwindigkeit (gewichtet, wg. $m_i \gg m_e$ i.w. Ionengeschwindigkeit):

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho_m}\sum_s \rho_{m,s}\vec{u}_s = \frac{1}{mn}\sum_s m_s n_s \vec{u}_s$$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung (Summe über Spezies, jeweils $\times m_s/m$):

$$0 = \frac{1}{m}\sum_s m_s \left(\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla\cdot(n_s\,\vec{u}_s)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{m}\sum_s n_s m_s\right) + \nabla\cdot\left(\frac{1}{m}\sum_s n_s m_s \vec{u}_s\right) = \frac{\partial}{\partial t}n + \nabla\cdot(n\vec{u})$$

Kraftgleichung

Betrachte Elektronen und eine Ionenspezies ($Z = 1$). Neutralität: $n_i = n_e = n$.

Wechselwirkung durch Coulomb-Stösse. Impulserhaltung: $\delta_c p_i/\delta t = -\delta_c p_e/\delta t$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(m_e n \vec{u}_e) + \nabla\cdot(m_e\, n\, \vec{u}_e\vec{u}_e) &= -n_e e\left[\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}\right] - \nabla\cdot\overline{\overline{P}}_e + \frac{\delta_c p_e}{\delta t} \\
\frac{\partial}{\partial t}(m_i n \vec{u}_i) + \nabla\cdot(m_i\, n\, \vec{u}_i\vec{u}_i) &= n_i e\left[\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}\right] - \nabla\cdot\overline{\overline{P}}_i - \frac{\delta_c p_e}{\delta t}
\end{aligned}
$$

Beide Gleichungen addieren. Rechte Seite:

$$
\underbrace{e\,(n_i - n_e)}_{\rho}\vec{E} \;+\; \underbrace{e\,(n_i\vec{u}_i - n_e\vec{u}_e)}_{\vec{j}}\times\vec{B} \;-\; \nabla\cdot\underbrace{\left(\overline{\overline{P}}_i + \overline{\overline{P}}_e\right)}_{\overline{\overline{P}}}
$$

Kraftgleichung (2)

L.S., 1. Term:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_e n\vec{u}_e + m_i n\vec{u}_i\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(nm\vec{u}\right)$$

Definiere neuen Drucktensor (bezogen auf Einflüssigkeitsgeschwindigkeit)!

$$\overline{\overline{P}}_{0,s} \equiv m_s \int_v \left(\vec{v}-\vec{u}\right)\left(\vec{v}-\vec{u}\right) f_s \mathrm{d}^3 v \;=\; \underbrace{m_s \int_v \left(\vec{v}-\vec{u}_s\right)\left(\vec{v}-\vec{u}_s\right) f_s \mathrm{d}^3 v}_{\overline{\overline{P}}_s} + m_s n \underbrace{\left(\vec{u}_s-\vec{u}\right)}_{\equiv \vec{W}_s}\left(\vec{u}_s-\vec{u}\right)$$

2. Term L.S. + 2. Term R.S., mit $\overline{\overline{P}}_0 \equiv \overline{\overline{P}}_{0,i} + \overline{\overline{P}}_{0,e}$:

$$\nabla \cdot n\left(m_i\vec{u}_i\vec{u}_i + m_e\vec{u}_e\vec{u}_e\right) + \nabla\cdot\left(\overline{\overline{P}}_i + \overline{\overline{P}}_e\right) = -\nabla\cdot n\left(m_i+m_e\right)\vec{u}\vec{u} + 2\nabla\cdot\left[n\vec{u}\left(m_i\vec{u}_i + m_e\vec{u}_e\right)\right] + \nabla\cdot\overline{\overline{P}}_0$$

$$= \nabla\cdot n\, m\, \vec{u}\, \vec{u} + \nabla\cdot\overline{\overline{P}}_0$$

Kraftgleichung, zusammengefasst:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n\, m\, \vec{u}\right) + \nabla\cdot\left(m\, n\, \vec{u}\, \vec{u}\right) \;=\; m\, n\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + mn\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} \;=\; \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} - \nabla\cdot\overline{\overline{P}}_0$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz (1)

Haben $\vec{u}$ und $\vec{j}$ als unabhängige Grössen. Benötigen weitere Gleichung:
Differenz der Kraftgleichungen für Elektronen und Ionen.

Zunächst: Stossterm näher spezifizieren - Reibung zwischen Spezies ($u \ll v_{th}$):

$$\frac{\delta_e \vec{p}_e}{\delta t} = -n_e m_e \nu_{ei} \left(\vec{u}_e - \vec{u}_i\right), \qquad \frac{\delta_i \vec{p}_i}{\delta t} = -n_i m_i \nu_{ie} \left(\vec{u}_i - \vec{u}_e\right),$$

Impulserhaltung — Elektronen und Ionen stossen aneinander $\quad \Rightarrow \quad m_i \nu_{ie} = m_e \nu_{ei}$.
(Reibung am Neutralgas sei vernachlässigbar)

Differenz der Stossterme:

$$\frac{\delta_i \vec{p}_i}{\delta t} - \frac{\delta_e \vec{p}_e}{\delta t} = -n m_i \nu_{ie} \left(\vec{u}_i - \vec{u}_e\right) + n m_e \nu_{ei} \left(\vec{u}_e - \vec{u}_i\right) = -n \left(m_e + m_i\right) m_e \nu_{ei} \left(\vec{u}_i - \vec{u}_e\right)$$

$$= -e\, m\, n \underbrace{\left(\frac{m_e \nu_{ei}}{n e^2}\right)}_{\equiv 1/\sigma_0 = \eta_0} \vec{j}$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_e n\vec{u}_e)+\nabla\cdot(m_e\, n\, \vec{u}_e\vec{u}_e) \quad = -n_e e\left[\vec{E}+\vec{u}_e\times\vec{B}\right]-\nabla\cdot\overline{\overline{P}}_e+\frac{\delta_c p_e}{\delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i n\vec{u}_i)+\nabla\cdot(m_i\, n\, \vec{u}_i\vec{u}_i) \quad = n_i e\left[\vec{E}+\vec{u}_i\times\vec{B}\right]-\nabla\cdot\overline{\overline{P}}_i-\frac{\delta_c p_e}{\delta t}$$

$\times m_i, m_e$ und Differenz (Ionen-Elektronen):

$$m_e m_i \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[n\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)\right]}_{\frac{1}{e}\vec{j}}+m_e m_i\nabla\cdot\left[n\left(\vec{u}_i\vec{u}_i-\vec{u}_e\vec{u}_e\right)\right]=$$

$$=en\underbrace{(m_i+m_e)}_{m}\vec{E}\;+\;en\quad\underbrace{(m_e\vec{u}_i+m_i\vec{u}_e)}_{(m_e+m_i)\vec{u}-(m_i-m_e)\vec{j}/en}\quad\times\vec{B}\;-\;\underbrace{m_e\nabla\cdot\overline{\overline{P}}_i}_{\ll m_i\nabla\cdot\overline{\overline{P}}_e}+m_i\nabla\cdot\overline{\overline{P}}_e\;-\;e\,n\,m\,\eta_0\,\vec{j}$$

L.S., 2. Term, Ann. $\vec{u}_i-\vec{u}_e\ll\vec{u}_i,\vec{u}_e$:

$$\vec{u}_i\vec{u}_i-\vec{u}_e\vec{u}_e=\vec{u}_i\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)+\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)\vec{u}_e=\vec{u}_i\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)+\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)\vec{u}_i-\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)\left(\vec{u}_i-\vec{u}_e\right)\approx\frac{1}{en}\left(\vec{u}\vec{j}+\vec{j}\vec{u}\right)$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz (3)

Alles zusammenfassen, mit $m \approx m_i, m_e \ll m_i$:

$$\vec{E} + \underbrace{\vec{u} \times \vec{B}}_{\text{Dynamo}} - \underbrace{\eta_0 \vec{j}}_{\text{Ohm}} = \underbrace{\frac{1}{en} \vec{j} \times \vec{B}}_{\text{Hall-Effekt}} - \underbrace{\frac{1}{en} \nabla \cdot \overline{\overline{P}}_e}_{\text{thermoel. Effekt}} + \underbrace{\frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{u}\vec{j} + \vec{j}\vec{u} \right) \right]}_{\text{Elektronen-Trägheit}}$$

- Terme auf der L.S. aus Teilchenbild bekannt
- Hall-Term wichtig bei kleiner Dichte und kleinem el. Widerstand
- Thermo-elektrischer Effekt: $\nabla p/n \sim T \frac{\nabla n}{n} + \nabla T \qquad (\nabla T \rightarrow$ Seebeck-Effekt$)$
- Elektronen-Trägheit: Wichtig wenn z.B.

$$\frac{1}{j} \frac{\partial j}{\partial t} > \frac{ne^2}{m_e} \eta_0 \;\Leftrightarrow\; \omega > \nu_{ei}, \quad \text{oder} \quad u > \eta_0 \frac{m_e}{ne^2} \frac{j}{\nabla j} \;\Leftrightarrow\; u > \nu_{ei} L_j$$

d.h. bei hochfrequenter (stoßfreier) Bewegung oder
stoßfreier Durchströmung der charakteristischen Gradienten-Länge

Zusammenfassung: MHD-Gleichungen

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0$$

Kraftgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\,\vec{u}) \;=\; m\,n\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + mn\,(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} \;=\; \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} - \nabla\cdot\overline{\overline{P}}_0$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz (einfachste Näherung):

$$\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} = \eta_0\vec{j}$$

Zustandsgleichung, z.B. adiabatisch mit z Freiheitsgraden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) = 0, \quad \gamma = \frac{z+2}{z}$$

Maxwell-Gleichungen ($\vec{E}$ statisch, Ladungsneutralität):

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \stackrel{!}{=} 0, \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0\vec{j}$$

Magnetischer Drucktensor

Betrachte $\vec{j} \times \vec{B}$-Term. Benutze:

1. Ampère'sches Gesetz: $\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B}$
2. Vektoridentität: $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla \vec{G}) + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})$

$$\vec{j} \times \vec{B} \quad = \quad -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) \quad = \quad -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B} \quad \equiv \quad -\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$$

Magnetischer Drucktensor:

$$\overline{\overline{T}} \equiv \underbrace{\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)}_{\text{isotroper Magnetfelddruck}} \overline{\overline{1}} \quad - \quad \underbrace{\left(\frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}\right)}_{\text{Zugspannung in } \vec{B}-\text{Richtung}}$$

Komponenten ($\vec{B} \| z$-Richtung):

$$\overline{\overline{T}} \equiv \begin{pmatrix} B^2/2\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2/2\mu_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2/\mu_0 \end{pmatrix}$$

Plasma-“Beta”

Betrachte stationären Fall, $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(n\,\vec{u}) = 0$, $E = 0$, isotroper kinetischer Druck p

Kraftgleichung:

$$0 \;=\; \vec{j}\times\vec{B}-\nabla p \;=\; -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}+p\right)+\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{B}\vec{B}\right)$$

Def.:

$$\beta \equiv \frac{p}{B^2/2\mu_0}$$

Grenzfälle:

- $\beta \ll 1$: Magnetfelddruck bestimmt Plasmabewegung
- $\beta \approx 1$ (und höher): kinetischer Druck bestimmt Plasmabewegung

Schallgeschwindigkeit (neutrales Gas)

Navier-Stokes- und Kontinuitäts-Gleichung $(\rho_m = mn)$

$$\rho_m \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \rho_m \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho_m}\nabla\rho_m, \qquad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\vec{u}) = 0$$

$\gamma = c_p/c_v = (f+2)/f$: Adiabatenkoeffizient

Ansatz: $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 \exp\left[i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t\right]$, $\quad p_0, \rho_{m,0}$ konstant, $u_0 = 0$, 1. Ordnung:

$$-i\omega\rho_{m,0}\vec{u}_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_{m,0}} i\vec{k}\rho_{m,1}, \qquad -i\omega\rho_{m,1} + \rho_{m,0} i\vec{k}\cdot\vec{u}_1 = 0$$

Ebene Kompressionswelle, $\vec{k}\|\vec{u}$ $\Rightarrow$ Phasen- (Schall-) Geschwindigkeit:

$$c_s \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_{m,0}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma\, k_B T}{m}\right)^{1/2}$$

Akustische Ionenwelle (Plasma)

MHD-Kraftgleichung (Annehme $B = 0$ bzw. $\vec{k} \| \vec{B}$, skalarer Druck)

$$mn\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = mn\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] = \rho\vec{E} - \nabla p$$

Linearisierung, 1. Ordnung, ebene Welle (wie vor), $\vec{E} = -\nabla\phi = -ik\phi_1$

$$-i\omega m n_0 u_1 = -\underbrace{\rho_0}_{=0} ik\phi_1 - \gamma k_B T ikn_1 = -\gamma k_B\left(T_i + T_e\right) ikn_1$$

Mit Kontinuitätsgleichung $\to$ Phasengeschwindigkeit v_s:

$$v_s \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma k_B T_e + \gamma k_B T_i}{m}\right)^{1/2}$$

MHD-Wellen (mit Magnetfeld)

Vereinfachende Annahmen

Linearisierung:

$$n(\vec{x},t) = n_0(\vec{x}) + n_1(\vec{x},t) \quad \vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}_0(\vec{x}) + \vec{u}_1(\vec{x},t),$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0(\vec{x}) + \vec{B}_1(\vec{x},t), \quad p(\vec{x},t) = p_0(\vec{x}) + p_1(\vec{x},t)$$

- $\vec{u}_0 = 0$ - keine stationäre Flüssigkeits-Strömung $\Rightarrow (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$-Terme fallen weg!
- $\nabla \times B_0 = 0$ - keine stationären elektrischen Ströme

Linearisierte MHD-Gleichungen

Betrachte MHD-Gleichungen in 1. Ordnung der zeitabhängigen Grössen (0. Ordnung bereits abgezogen), unter den vorherigen Annahmen.

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1 + n_0 \left(\nabla \cdot \vec{u}_1 \right) = 0$$

Kraftgleichung:

$$m n_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 \;=\; \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \vec{B}_1 \right) \times \vec{B}_0 - \nabla p_1$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz ($\eta = 0$)

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{u}_1 \times \vec{B}_0 \right)$$

Zustandsgleichung $\rightarrow$ Schallgeschwindigkeit (im 1-Flüssigkeits-Modell):

$$p_1 = \gamma \left(\frac{p_0}{n_0} \right) n_1, \qquad v_s^2 = \gamma \left(\frac{p_0}{m n_0} \right) = \frac{\gamma\, k_B T}{m}$$

Ansatz: Ebene Welle

$$X_1 \equiv \tilde{X} \exp\left(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla \to i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

In linearisierte Gleichungen einsetzen:

$$\begin{aligned} -i\,\omega\, m\,\tilde{n} + i\, m\, n_0 \vec{k} \cdot \vec{\tilde{u}} &= 0 && (1) \\ -i\,\omega\, m\, n_0 \vec{\tilde{u}} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{k} \times \vec{\tilde{B}}\right) \times \vec{B}_0 - i\vec{k}\tilde{p} && (2) \\ -i\,\omega\,\vec{B} &= i\vec{k} \times \left(\vec{\tilde{u}} \times \vec{B}_0\right) && (3) \\ \tilde{p} &= v_s^2\, m\, \tilde{n} && (4) \end{aligned}$$

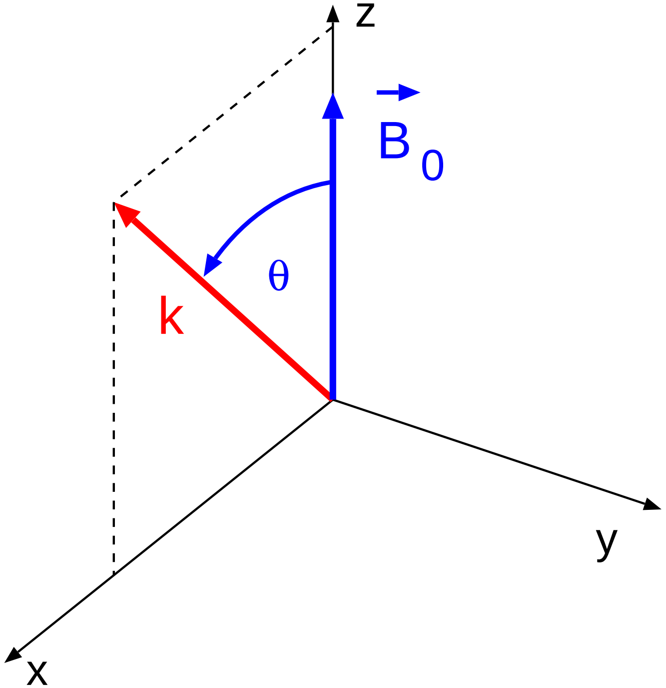
(1) in (4) $\Rightarrow$ Druck in (2), $\cdot i\omega/(mn_0)$

$$\tilde{p} = \frac{v_s^2\, mn_0}{\omega}\left(\vec{k} \cdot \vec{\tilde{u}}\right), \qquad \omega^2 \vec{\tilde{u}} = -\frac{\omega}{\mu_0\, m\, n_0}\left(\vec{k} \times \vec{\tilde{B}}\right) \times \vec{B}_0 + v_s^2\, \vec{k}\left(\vec{k} \cdot \vec{\tilde{u}}\right)$$

Einsetzen von (3) eliminiert $\vec{\tilde{B}}$ $\Rightarrow$ Gleichung für $\vec{\tilde{u}}$:

$$\omega^2 \vec{\tilde{u}} = \frac{1}{\mu_0 m n_0}\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \left(\vec{\tilde{u}} \times \vec{B}_0\right)\right) + v_s^2\, \vec{k}\left(\vec{k} \cdot \vec{\tilde{u}}\right)$$

Koordinatensystem für die Lösung



O.B.d.A.: ausgerichtetes Koordinatensystem
$\vec{B}_0 \| z$, $\vec{k}$ in x, z-Ebene, Winkel θ zur z-Achse

Alfvén-Geschwindigkeit: $v_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 m n_0}$

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix} = v_A^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \cos^2\theta \\ 0 \end{pmatrix} + v_s^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \sin^2\theta + \tilde{u}_z \sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ \tilde{u}_x \sin\theta\cos\theta + \tilde{u}_z \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise, mit Phasengeschwindigkeit $v_p = \omega/k$:

$$\begin{pmatrix} v_p^2 - v_s^2 \sin^2\theta & 0 & -v_s^2 \sin^2 \cos^2 \\ 0 & v_p^2 - v_A^2 \cos^2\theta & 0 \\ -v_s^2 \sin\theta\cos\theta & 0 & v_p^2 - v_s^2 \cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix} = 0.$$

Gleichungssystem — hat Lösungen, wenn Determinante der Koeffizientenmatrix $= 0$.

Dispersionsrelation

Determinante der Koeffizientenmatrix $= 0 \rightarrow$ Dispersionsrelation:

$$D(\vec{k}, \omega) = \left(v_p^2 - v_A^2 \cos^2\theta\right) \left[v_p^4 - v_p^2 \left(v_A^2 + v_s^2\right)^2 + v_A^2 v_s^2 \cos^2\theta\right] = 0$$

3 Lösungen:

Transversale (Scher-) Alfvén-Welle (*transverse / shear Alfvén mode*)

$$v_p^2 = v_A^2 \cos^2\theta$$

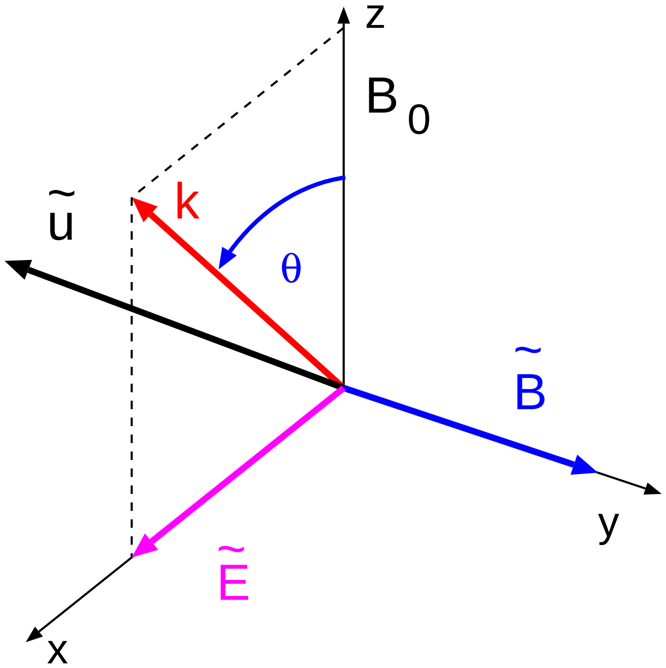
Langsame Magnetoschallwelle (*slow magnetosonic mode*)

$$v_p^2 = \frac{1}{2}\left(v_A^2 + v_s^2\right) - \frac{1}{2}\left[\left(v_A^2 - v_s^2\right)^2 + 4 v_A^2 V_s^2 \sin^2\theta\right]^{1/2}$$

Schnelle Magnetoschallwelle (*fast magnetosonic mode*)

$$v_p^2 = \frac{1}{2}\left(v_A^2 + v_s^2\right) + \frac{1}{2}\left[\left(v_A^2 - v_s^2\right)^2 + 4 v_A^2 V_s^2 \sin^2\theta\right]^{1/2}$$

Transversale Alfvén-Welle



Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{k} = v_A \cos\theta = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m n_0}} \cos\theta$$

$$\tilde{\vec{u}} = (0, \tilde{u}_y, 0)$$

$$\tilde{\vec{B}} = \left(0, \tilde{B}_y, 0\right) \qquad \tilde{B}_y = -B_0(\tilde{u}_y / V_A)\mathrm{Sgn}\ \cos\theta$$

$$\tilde{\vec{E}} = \left(\tilde{E}_x, 0, 0\right) \qquad \tilde{E}_x = -B_0 \tilde{u}_y$$

$$\tilde{n} = 0$$

Poynting-Fluss $S = \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{B}} / \mu_0$ <u>immer</u> $\| \vec{B}_0$ (unabhängig von θ, d.h. Richtung des k-Vektors)!

Gruppengeschwindigkeit:

$$\vec{v}_g = \nabla_k \omega = v_A \vec{e}_z$$

Analogie: Welle einer gezupften Saite; Fluid $\rightarrow$ Masse, $\vec{B}$-Feld $\rightarrow$ Saitenspannung

Magnetoschallwelle

	$\vec{k} \| \vec{B}_0$	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$
	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
	$\begin{pmatrix} v_p^2 - v_A^2 & 0 \\ 0 & v_p^2 - v_s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} v_p^2 - (v_s^2 + v_A^2) & 0 \\ 0 & v_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix} = 0$

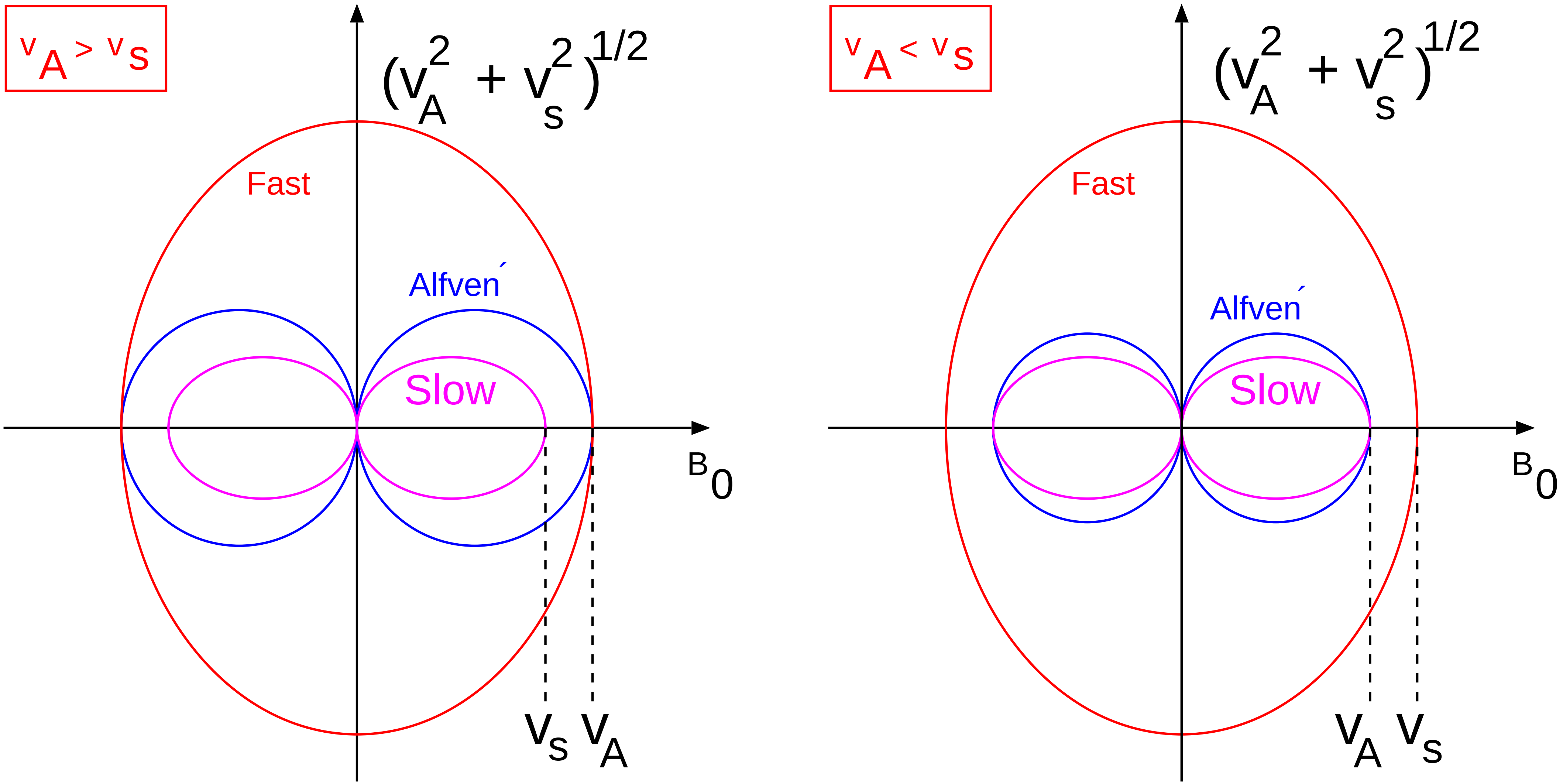
Lösungsbedingung:

	$v_p^2 = \frac{1}{2}\left(v_A^2 + v_s^2\right) \pm \frac{1}{2}\left(v_A^2 - v_s^2\right)$	$v_p^2 = \frac{1}{2}\left(v_A^2 + v_s^2\right) \pm \frac{1}{2}\left(v_A^2 + v_s^2\right)$

Lösungen:

v_p	v_A	v_s	0	$\sqrt{v_a^2 + v_s^2}$
$\tilde{\vec{u}}$	$(\tilde{u}_x, 0, 0)$	$(0, 0, \tilde{u}_z)$		$(\tilde{u}_x, 0, 0)$
$\tilde{\vec{B}}$	$(\tilde{B}_x, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$		$(0, 0, \tilde{B}_z)$
$\tilde{\vec{E}}$	$(0, \tilde{E}_y, 0)$	$(0, 0, 0)$		$(0, \tilde{E}_y, 0)$
$\tilde{n}$	0	$n_0 \tilde{u}_z / v_p$		$n_0 \tilde{u}_x / v_p$
Typ	Scherwelle	Kompressionswelle	triviale Lösung.	gemischt

Phasengeschwindigkeits-Diagramme



Zusammenfassung (1)

- Im Flüssigkeitsbild ergibt sich eine Driftgeschwindigkeit $u^* \propto \vec{B} \times \nabla p$ ("diamagnetische Drift"), anschaulich durch Gradienten in der Teilchendichte und/oder der Temperatur ($v_\perp$ in der Gyrationsbewegung)

- Die ∇B- und Krümmungsdrift im Teilchenbild hat keine Entsprechung im Flüssigkeitsbild, anschaulich weil sich die mittlere Flüssigkeitsgeschwindigkeit durch $\nabla B \neq 0$ (bei ruhenden Gyrozentren) und die überlagerte Gyrozentrendrift genau auslöschen.

- Das **MHD-Einflüssigkeitsmodell** beschreibt ein Plasma durch die Summe der spez. Massendichte, eine (gewichtete) Strömungsgeschwindigkeit ($\approx \vec{v}_i$) und die Stromdichte $\vec{j} = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$. Es lassen sich Kontinuitäts- und Kraftgleichungen sowie ein verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz ableiten.
  Zusammen mit den Maxwell-Gleichungen (vereinfachend $\rho = 0$, $\partial\vec{E}/\partial t = 0$) ergibt sich das einfachste Modell der Magnetohydrodynamik (MHD).

- Je nach spez. Widerstand unterscheidet man resistive ($\eta \neq 0$) und ideale ($\eta = 0$) MHD.

- (Bereits behandelte) Anwendungen der MHD umfassen die akustische Ionenwelle, elektrische Leitfähigkeit $\perp \vec{B}$, Magnetfeld-Diffusion/-Konvektion (resistive MHD), die Erhaltung des magn. Flusses (ideale MHD).

Zusammenfassung (2)

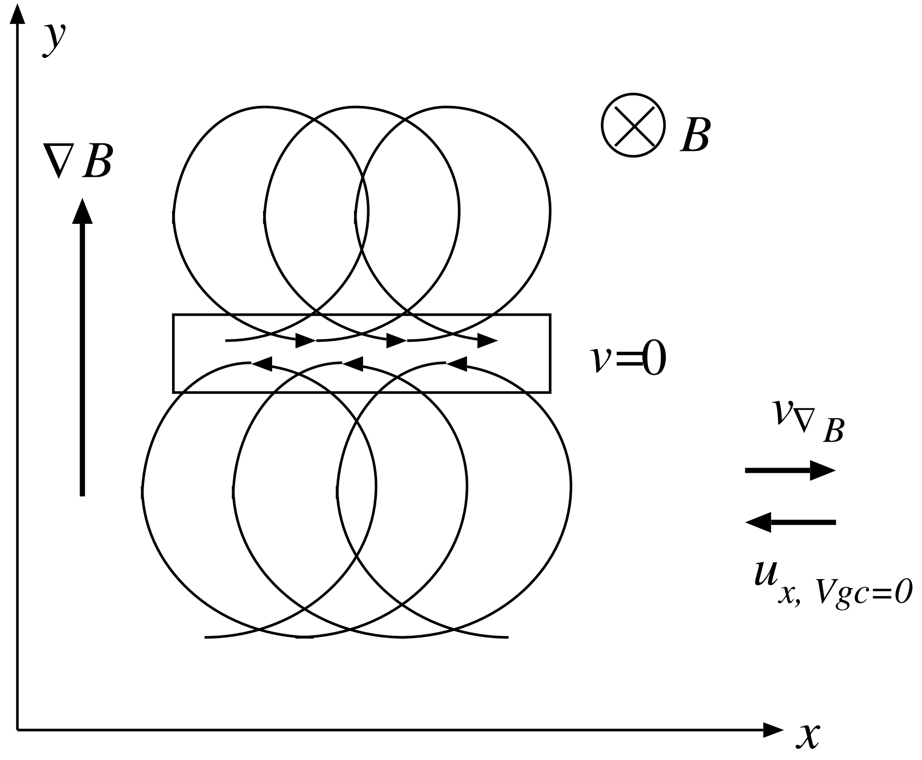
- Das Magnetfeld übt einen isotropen Druck (Energiedichte im $\vec{B}$-Feld) sowie eine anisotrope Zugspannung entlang $\vec{B}$ aus.
- Die Magnetfeldspannung koppelt an die Schallausbreitung (Schallwellen) im Plasma an: MHD-Wellen.
- MHD-Wellenausbreitung kann durch Linearisierung der MHD-Gleichungen beschrieben werden.
- Es existieren drei Zweige in der Dispersionsrelation: Die (transversale) Alfvén-Welle ($v_g = v_A$) und die "langsame" und "schnelle" Magnetoschallwelle. Je nachdem, ob $v_s < v_A$ oder $v_s > v_A$ ergibt sich eine unterschiedliche Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit vom Winkel zum $\vec{B}$-Feld.

Anhang

Widerspruch zwischen Teilchen- und Flüssigkeitsbild?

∇B-Drift im Flüssigkeitsbild ?

$n, T = const.$, $B = B_z < 0$, $\nabla B \neq 0$, $q > 0$



Sei y_{Gz}: Ort des Gyrozentrums,

v_x: Teilchengeschwindigkeit in x-Richtung.

Teilchenort während Gyrationsperiode:

$$y_{Gz} = y + \frac{v_x}{\omega_c} = y + \frac{v_x\, m}{q\, B(y)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{Gz}}{\mathrm{d}y} = 1 - \frac{v_x\, m}{q\, B^2(y)} \frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y} \approx 1 - \frac{v_x}{\omega_c} \frac{1}{B(y_{Gz})} \frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y}$$

Erhaltung der Teilchenzahl:

$$\int f(y,v)\mathrm{d}y = \int f_{Gz}(y_{Gz},v)\mathrm{d}y_{Gz}$$

Gilt für beliebige Wahl der Integrationsgrenzen, d.h. Integranden sind gleich:

$$f(y,v) = f_{Gz}(y_{Gz},v)\frac{\mathrm{d}y_{Gz}}{\mathrm{d}y} = f_{Gz}\left(y + \frac{v_x}{\omega_c}, v\right)\underbrace{\left(1 - \frac{v_x}{\omega_c}\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y}\right)}$$

Unterschiedliche v-Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen in Driftrichtung

Keine ∇B-Drift im Flüssigkeitsbild

Mittlere Geschwindigkeit: $\overline{v}_x = \int v_x f(\vec{r},\vec{v})\mathrm{d}^3 v$

Sei die Gyrozentrumsdichte räumlich konstant: $f_{Gz}(y + \frac{v_x}{\omega_c}, v) = f_{Gz}(y, v)$

Flüssigkeitsgeschwindigkeit für $v_d = 0$ (f_{Gz} symmetrisch in v), $\quad f(\vec{r},\vec{v})$ einsetzen wie vor:

$$u_{x,(v_{Gz}=0)} = \frac{1}{n}\int v_x f(y,v)\mathrm{d}^3 v = \frac{1}{n}\int v_x f_{Gz}\left(1 - \frac{v_x}{\omega_c B}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}^3 v = -\frac{1}{n}\int f_{Gz}\left(\frac{v_x^2}{\omega_c B}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}^3 v$$

Überlagere mittlere Gyrozentrumsdrift:

$$\overline{v}_{d,x} = \frac{1}{n}\int v_d f_{Gz}\mathrm{d}^3 v = \frac{1}{n}\int \frac{m v_\perp^2}{2qB^2}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y} f_{Gz}\mathrm{d}^3 v = \frac{1}{n}\int \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2qB^2}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y} f_{Gz}\mathrm{d}^3 v$$

Langsame Drift: $\overline{v}_d \ll v_x, v_y$: $\quad v_x \approx v_y$

$$\overline{v}_{d,x} = \frac{1}{n}\int f_{Gz}\frac{m v_x^2}{qB^2}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}^3 v = \frac{1}{n}\int f_{Gz}\frac{v_x^2}{\omega_c B}\frac{\mathrm{d}B(y)}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}^3 v = -u_{x,(v_{Gz}=0)}$$

Summe: $\quad u_x \; = \; u_{x,(v_{Gz}=0)} \; + \; \overline{v}_{d,x} \; = \; 0$