

Einführung in die Plasmaphysik

Ionisationsgrad



Abbildung: <http://www.geo.mtu.edu/weather/aurora/images/aurora/jan.curtis>

Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Ionisationsgrad eines Plasmas

Def. **Ionisationsgrad**:

Quotient aus Ionendichte und gesamter Atomdichte (Ionen und Neutrale).

$$F_{ion} = \frac{n_i}{n_i + n_0} \sim \frac{n_e}{n_e + Zn_0}$$

n_i : Ionendichte, $n_e \sim Zn_i$: Elektronendichte, Z : Ionen-Ladungszahl

Wie bestimmt sich der Ionisationsgrad?

- Im **thermischen Gleichgewicht**:

Aus der Besetzungswahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände
(ionisiert oder nicht ionisiert)

→ Thermodynamik, statistische Physik

- Abseits des thermischen Gleichgewichts:

Aus der Bilanz der Raten der (wichtigsten) Ionisations- und Rekombinations-Prozesse
(**“Ratengleichgewicht”**)

(Lokales) Thermisches Gleichgewicht

1. Starke Forderung:

Thermisches Gleichgewicht

(thermal equilibrium)

Def.: Die Raten aller Prozesse sind gleich der Raten ihrer Umkehrprozesse

Bedingungen:

— Geschlossenes thermodynamisches System

— Rascher Austausch zwischen allen Energiezuständen darin.

Statistische Physik:

Die Besetzung der Energiezustände wird unabhängig vom Wechselwirkungsprozess durch eine Temperatur T beschrieben (“ thermische Verteilung ”)

2. Abgeschwächte Forderung:

Lokales Thermisches Gleichgewicht

(local thermal equilibrium)

Plasmen sind fast immer im thermodynamischen Sinne ein *offenes System* mit starken Wärme- und Teilchenflüssen sowie räumlicher Variation aller Größen.

Bei hohen Stoßraten kann aber in Näherung *lokal* eine Gleichgewichts-Temperatur definiert werden: $T = T(\vec{r})$

Ionisationsgrad im thermodynamischen Gleichgewicht

Einfachster Fall: 2 Zustände

- neutrales Atom im Grundzustand
- ionisierter Zustand (Ion und freies Elektron)

Besetzungsverhältnis:

$$\frac{N_e}{N_0} = \frac{g_i}{g_0} \exp(-E_{ion}/k_B T) \int_0^\infty \exp(-E/k_B T) \frac{\partial g}{\partial E} dE$$

Integral über die freien Elektronenzustände.

$\partial g / \partial E = D(E) / N_e = (1/N_e) \partial N(E) / \partial E$: Zahl der Zustände pro Elektron.

g_i und g_0 : Entartungszahlen Ion bzw. neutrales Atom.

Zustandsdichte im Vakuum

Bestimmung der Zustandsdichte:

Vakuum-Zustandsdichte ist im Impulsraum konstant

$$dg = \frac{2V}{N_e (2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{2V}{N_e (2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{2V}{N_e (2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp$$

Mit $\int_0^\infty x^2 \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi}/4a^{3/2}$ ergibt sich das Integral über die freien Elektronenzustände:

$$\int \dots = 4\pi \int_0^\infty p^2 \exp(-p^2/2m_e k_B T) = (2\pi m_e k_B T)^{3/2}$$

Saha-Gleichung

Benutze $n_e = N_e/V$ und $n_0 = N_0/V$

→ “**Saha-Gleichung**” (Meghnad Saha, 1893-1956):

$$\frac{n_e^2}{n_0} = 2 \frac{g_i}{g_0} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \exp(-E_{ion}/k_B T) \quad (1)$$

Neutralitätsbedingung $n_e = Z_i n_i$

→ “Massenwirkungsgesetz”

$$\frac{n_e n_i}{n_0} = \frac{1}{Z_i} f(T)$$

R.S.: $f(T)$ hängt nur von der Temperatur ab.

Saha-Gleichung für Wasserstoff ($Z_i = 1$)

Zustände mit gleicher Hauptquantenzahl n und unterschiedlichen Nebenquantenzahlen p, d sind entartet

$$E_n = -\frac{1}{n^2} E_{ion}, \quad g_n = 2n^2,$$

Ionisierungsenergie: $E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$.

Ionisierter Zustand: $g_i = 1$, Grundzustand: $g_1 = 2$.

Ionisationsgrad:

Quotient aus Ionendichte und gesamter Wasserstoffdichte ($n_i + n_0$).

Saha-Gl. $\rightarrow n_e = (n_0 f(T))^{1/2}$

$$F_{ion} = \frac{n_e}{n_e + n_0} = \left[\frac{f(T)}{f(T) + 2(n_0 f(T))^{1/2} + n_0} \right]^{1/2}$$

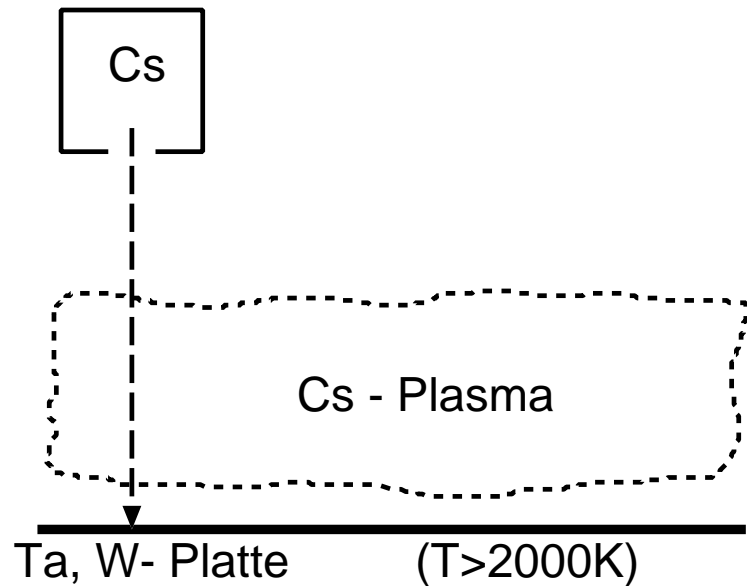
Beispiel für thermisches Laborplasma: “Q-Maschine”

Cäsium: Ionisationsenergie (1. Stufe)

$$E_{\text{ion}} = 3.8939 \text{ eV}$$

Cäsium-Atomstrahl trifft auf heiße Platte:
Kontaktionisation.

→ “ruhiges” (*quiet*) Plasma mit
 $T_e = T_i = T$ und geringem
Ionisationsgrad.



N. Rynn, N. D'Angelo, Rev. Sci. Instrum. **31**
(1960) 1326

Ionisations- und Rekombinations-Prozesse

n_e hoch	Elektronen-Stoßionisation $e^- + H^0 \rightarrow 2e^- + H^+$ Rate: $S \propto n_e n_0$	Dreier-Stoß-Rekombination $2e^- + H^+ \rightarrow e^- + H^0$ $S \propto n_e^2 n_i$
n_e niedrig		strahlende Rekombination $e^- + H^+ \rightarrow \gamma + H^0$ $S \propto n_e n_i$
Strahlungsfeld intensiv	Photoionisation $\gamma + H^0 \rightarrow e^- + H^+ (+\gamma')$ $S \propto n_0 n_\gamma$	“stimulierte” Rekombination $\gamma + e^- + H^+ \rightarrow \gamma' + H^0$ $S \propto n_\gamma n_e n_i$

Stationärer Zustand (“Stoß-Strahlungsmodell”): Ratengleichgewicht $\sum S_{\text{ion}} = \sum S_{\text{rekomb}}$

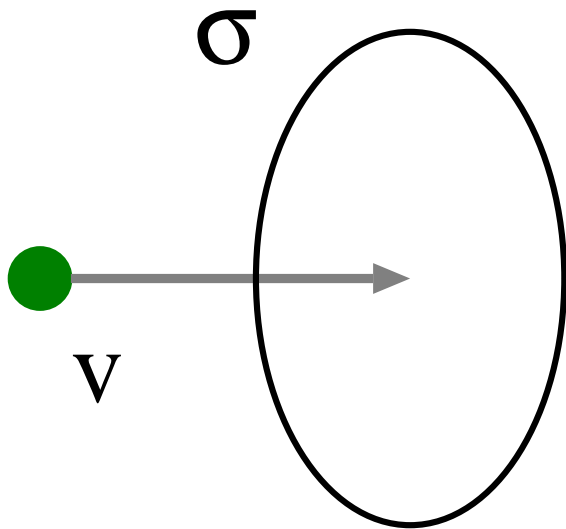
Grenzfälle:

Hohe Dichte $n_e n_i / n_0 = f(T)$ (Form wie Saha Gleichung!)

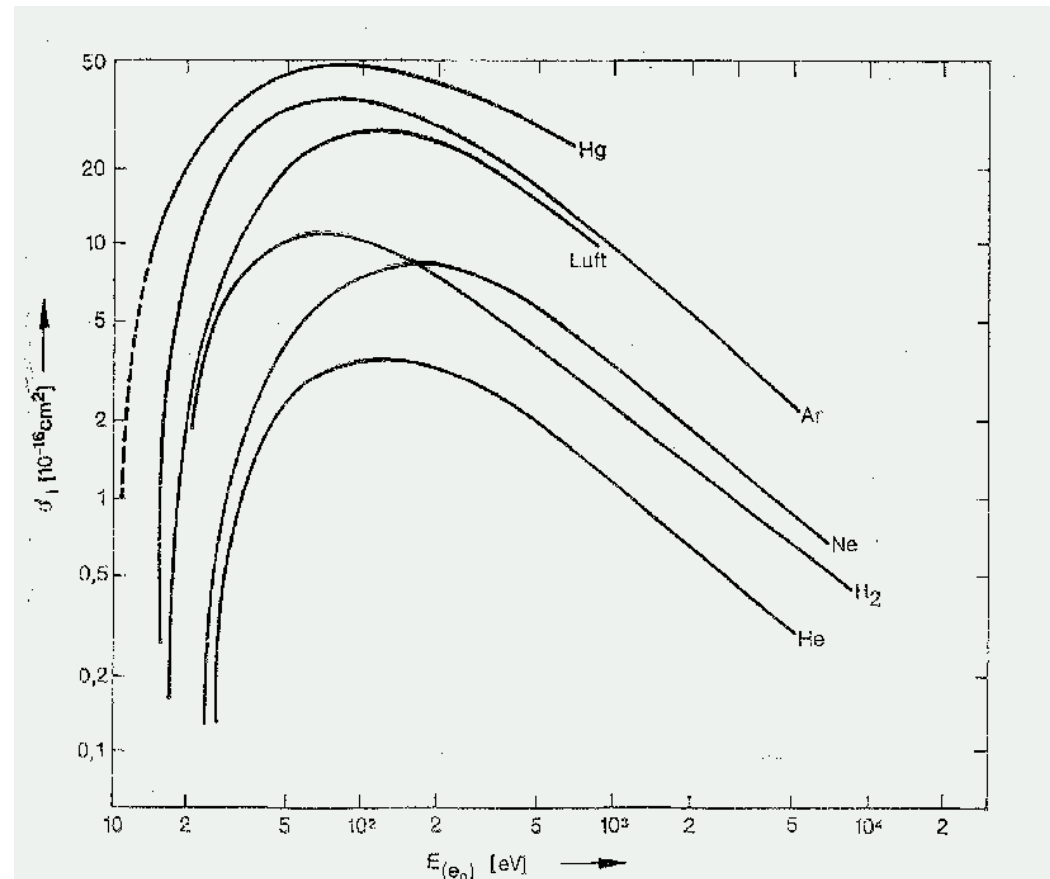
Niedrige Dichte $n_i / n_0 = f(T)$ (“Korona-Gleichgewicht”)

Wirkungsquerschnitt, Ratenkoeffizient, Stoßfrequenz, Ionisationsrate

Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{ion}}(v)$
für Elektronen-Stoßionisation



Wirkungsquerschnitt für die Ionisation durch Elektronenstöße als Funktion der Elektronen-Energie:

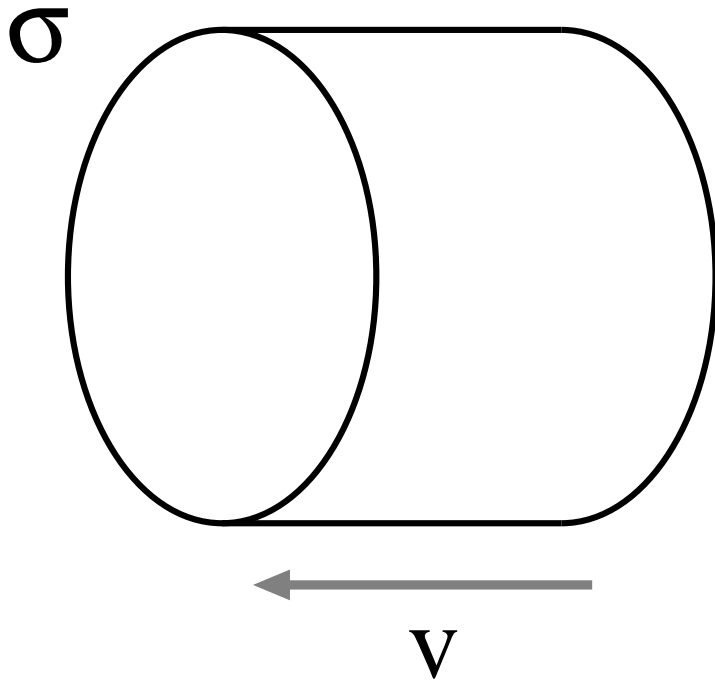


Atomdaten im Web: <http://open.adas.ac.uk>

<http://physics.nist.gov/PhysRefData/Ionization>

Wirkungsquerschnitt, Ratenkoeffizient, Stoßfrequenz, Ionisationsrate

Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{ion}}(v)$
für Elektronen-Stoßionisation



Ratenkoeffizient $\langle \sigma_{\text{ion}} v_e \rangle$:

Umgesetztes Volumen/Zeit pro Elektron und Atom

Gemittelt wird über die Geschwindigkeits-Verteilung der *Elektronen* (denn $v_e \gg v_n, v_i$)

$$\langle \sigma_{\text{ion}} v \rangle \equiv \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sigma(v) v d^3 v$$

Bei Maxwell-Verteilung ist Ratenkoeffizient eine Funktion der (Elektronen-) Temperatur:

$$\langle \sigma_{\text{ion}} v \rangle = f(T_e)$$

Beispiel: Ionisationsratenkoeffizient für Wasserstoff (Fitformel)

$$\langle \sigma_{\text{ion}} v_e \rangle = \frac{2 \times 10^{-13}}{6 + T_e(\text{eV})/13.6} \left(\frac{T_e(\text{eV})}{13.6} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{13.6}{T_e(\text{eV})} \right) \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Wirkungsquerschnitt, Ratenkoeffizient, Stoßfrequenz, Ionisationsrate

Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{ion}}(v)$
für Elektronen-Stoßionisation

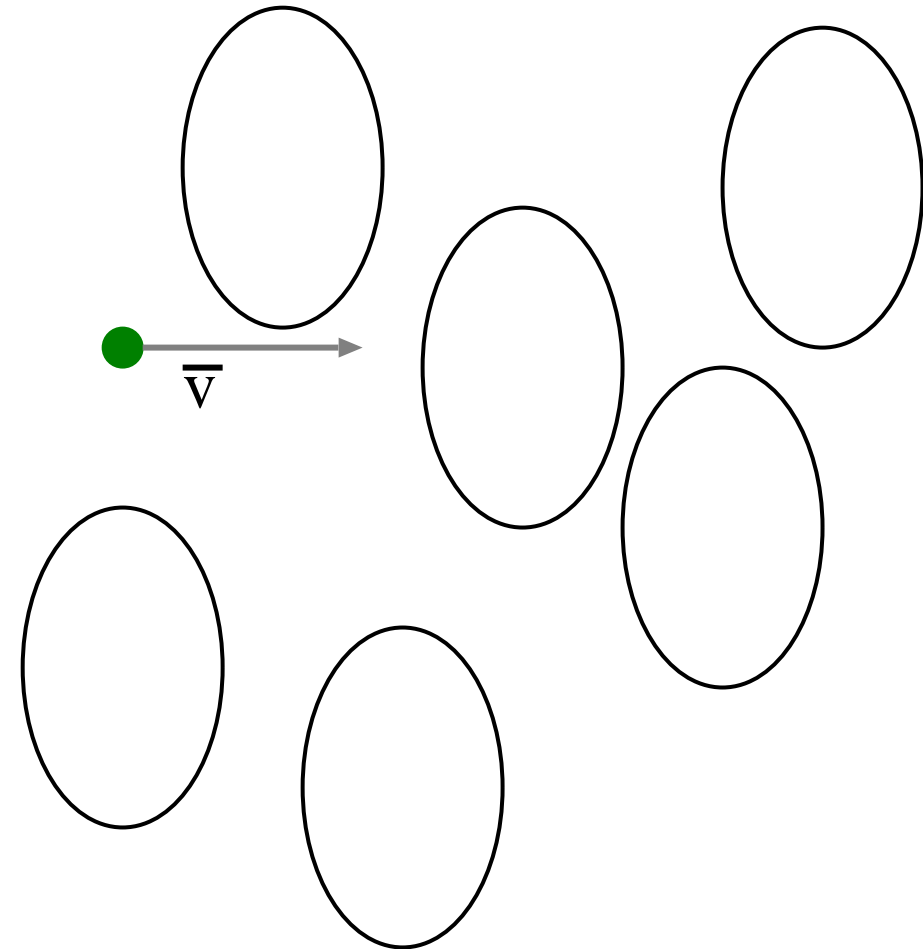
Ratenkoeffizient $\langle \sigma_{\text{ion}} v_e \rangle$:

Umgesetztes Volumen/Zeit pro Elektron und Atom

Ionisations-Stoßfrequenz ν_{en} *eines* Elektrons:

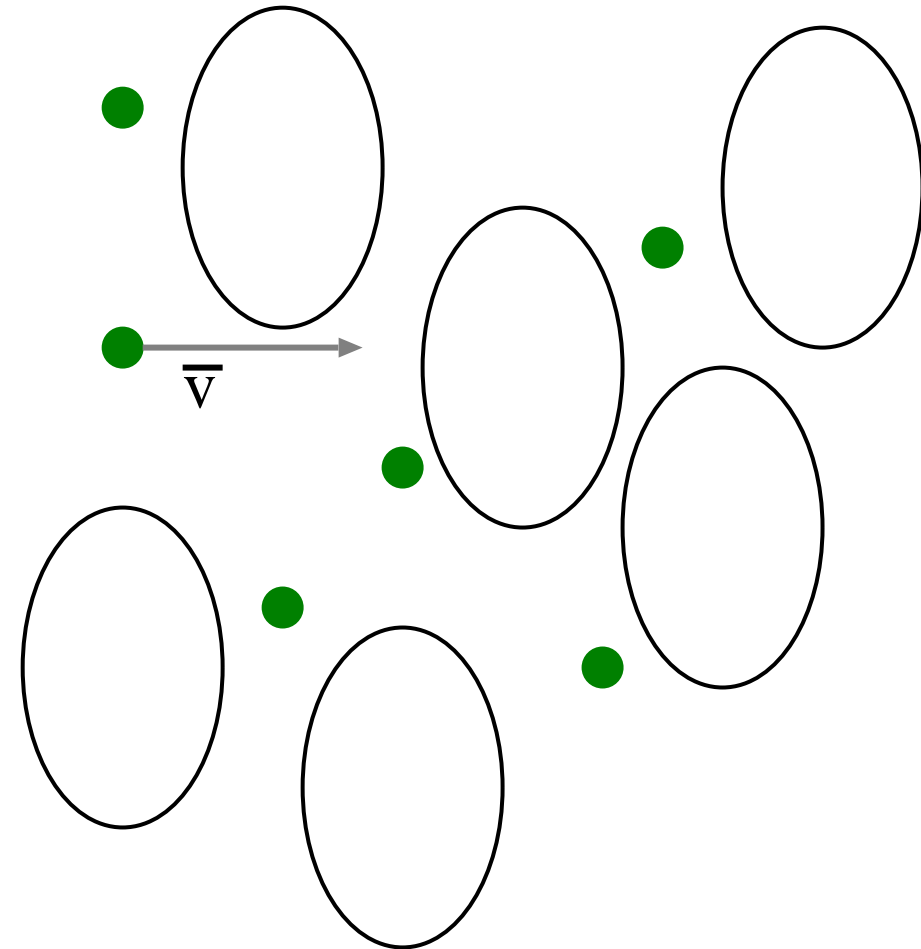
$$\nu_{\text{en}} = n_n \langle \sigma_{\text{ion}} v \rangle$$

n_n : Neutralgasdichte



Wirkungsquerschnitt, Ratenkoeffizient, Stoßfrequenz, Ionisationsrate

Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{ion}}(v)$
für Elektronen-Stoßionisation



Ratenkoeffizient $\langle \sigma_{\text{ion}} v_e \rangle$:

Umgesetztes Volumen/Zeit pro Elektron und Atom

Ionisations-Stoßfrequenz ν_{en} eines Elektrons:

$$\nu_{\text{en}} = n_n \langle \sigma_{\text{ion}} v \rangle$$

n_n : Neutralgasdichte

Ionisationsrate S :

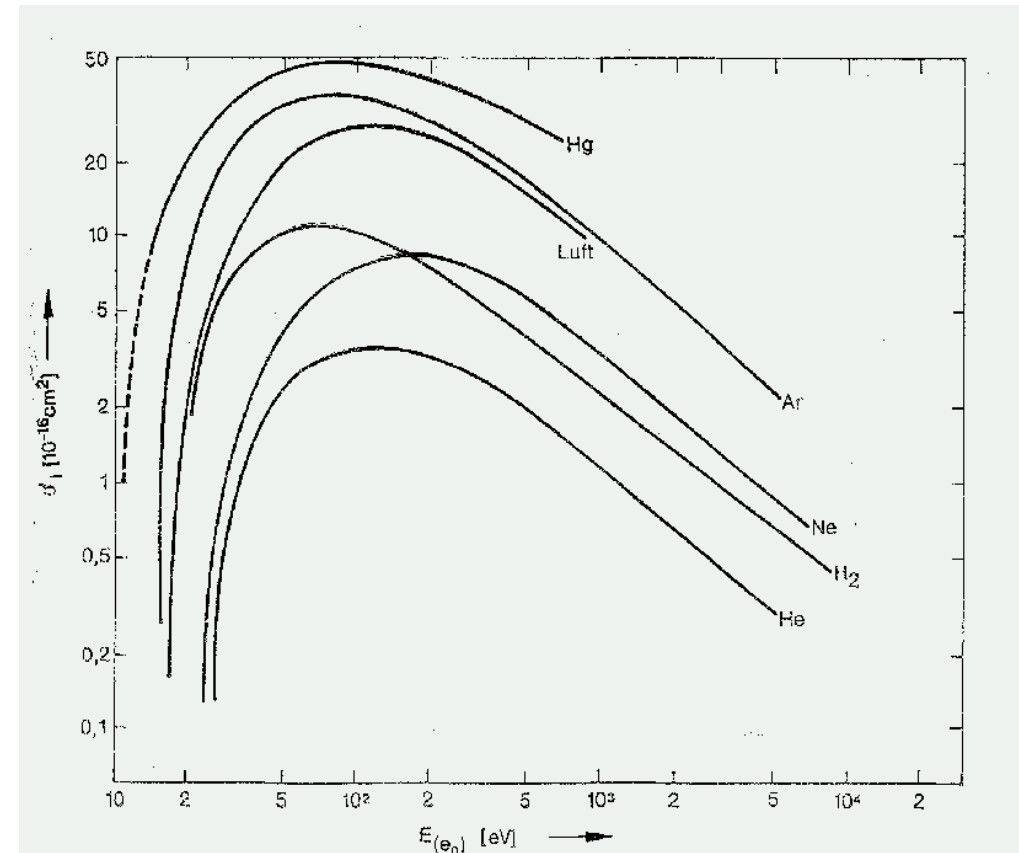
Ionisationen pro Volumen und Zeit

$$S = n_e n_n \langle \sigma_{\text{ion}} v_e \rangle$$

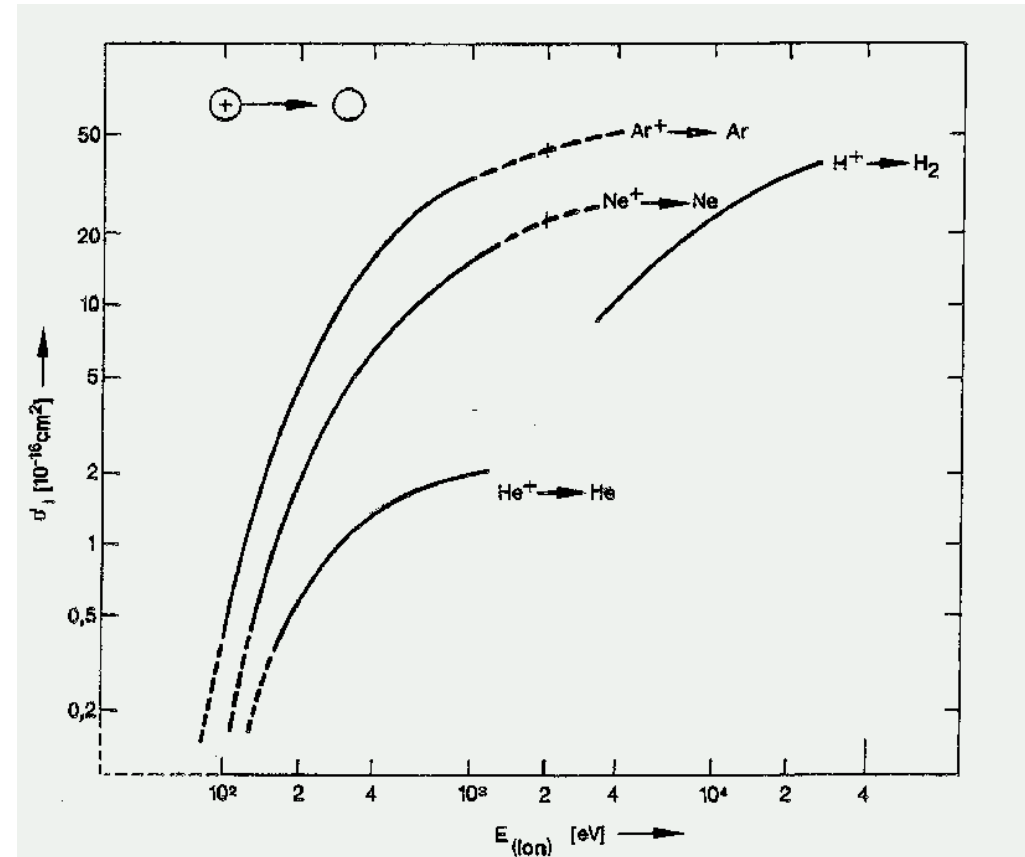
n_e : Elektronendichte

Ionisation durch Ionen?

Ionisation durch Elektronenstoss



Ionisation durch Ionen des Muttergases



Ionen sind schwerer als Elektronen, benötigen höhere kinetische Energie für gleiche Wechselwirkungszeit

→ Wenn $T_i \leq T_e$, dann überwiegt Ionisation durch Elektronen

→ Bei sehr heißen Plasmen (z.B. Kernfusion, $T_i \sim 10 \text{ keV}$) ist Ionisation durch Ionen wichtig

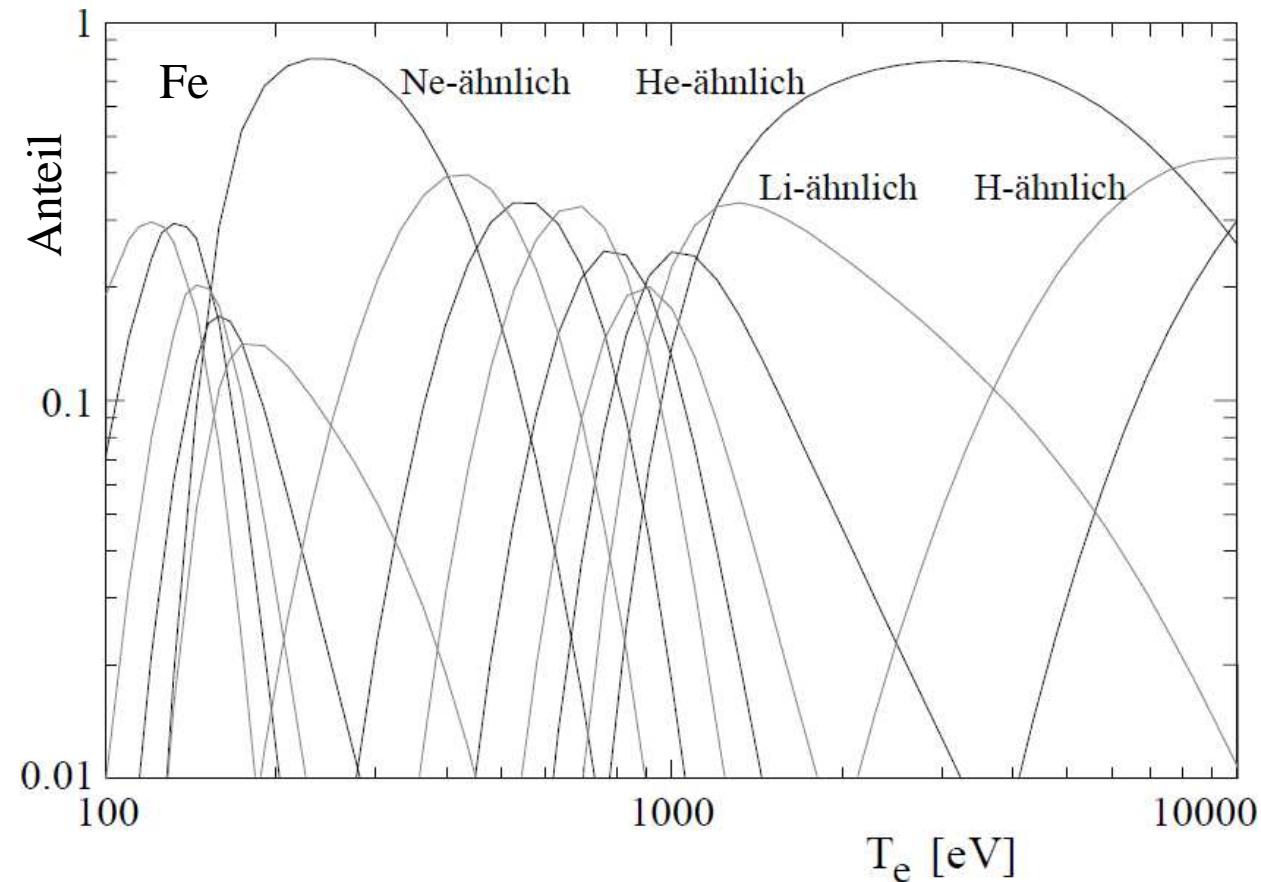
Korona-Ionisationsgleichgewicht

Grenzfall niedriger Dichte, Stationärer Zustand:

Elektronen-Stoßionisation \rightleftharpoons strahlende Rekombination

$$S_{Z \rightarrow (Z+1)} = S_{(Z+1) \rightarrow Z}$$

$$n_e n_Z \langle \sigma_{ion} v_e \rangle = \alpha_Z(T_e) n_e n_{Z+1}$$



Gesamtdichte: $\sum_Z n_Z = n$
 \rightarrow Gleichungssystem für
 Besetzungsdichten n_Z

Beispiel:

Ionisationstufen von Eisen

Quelle: K Behringer, A Kallenbach,
 Vorl. Nichtgleichgewichtsplasmen,
 U Augsburg,

www.physik.uni-augsburg.de/epp/lehre

Analog zu Ionisation: Anregungs-Ratengleichgewicht

Elektronenstoss-Anregung aus Grundzustand \rightleftharpoons spontane Photoemission

$$\dot{N}_{1,m} = \sum_k \dot{N}_{m,k}$$

$$n_1 n_e X_{1,m}(T_e) = n_m \sum_{(k < m)} A_{m,k}$$

wobei:

n_1 (n_m): Dichte der Atome im Grundzustand (Zustand m)

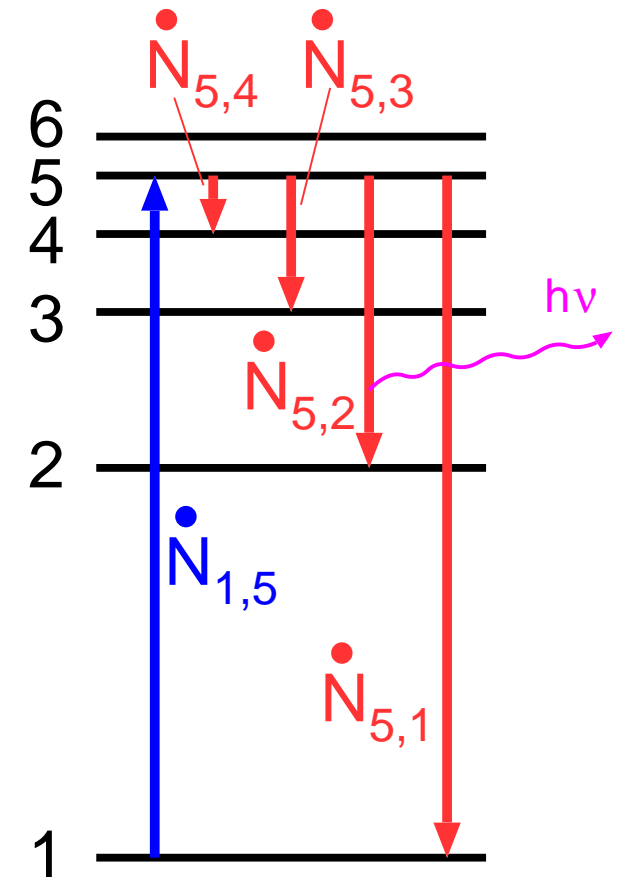
$X_{1,m} = \langle v_e \sigma_{1,m} \rangle$: Ratenkoeffizient e^- -Stoss-Anregung,

$A_{m,k}$: Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand m in Zustand k .

Emittierte Photonen pro Sekunde in einer Spektrallinie $m \rightarrow j$:

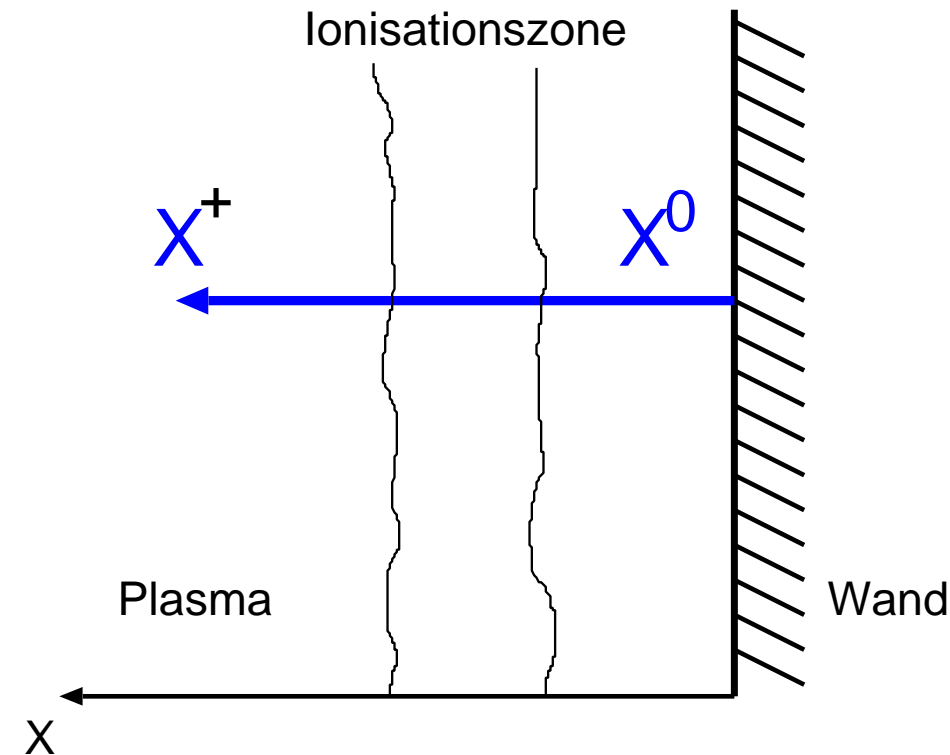
$$\dot{N}_{m,j} = n_m A_{m,j} = n_1 n_e X_{1,m} \underbrace{\frac{A_{m,j}}{\sum_{(k < m)} A_{m,k}}}_{\equiv B_{m,j}}$$

$B_{m,j}$: “Verzweigungsverhältnis” (branching ratio)



Anwendung: Spektroskopische Messung des Verunreinigungs-Zuflusses

Oft erodiert das Wandmaterial des Plasmagefäßes.



Annahme: Anregungsrate = Emissionsrate

Messe emittierten Photonenfluss (Element k) in einer Linie $m \rightarrow j$:

$$L = \int \dot{N}_{m,j} dx = \int n_k n_e X_k B_{m,j} dx$$

X_k : Anregungs-Ratenkoeffizient

$B_{m,j}$: Verzweigungsverhältnis

Neutralenfluss von der Wand nimmt im Plasma ab:

$$\nabla \cdot \Gamma_k = \frac{d}{dx} \Gamma_k = \underbrace{-n_k n_e S_k}_{\text{Senke durch Ionisation}}$$

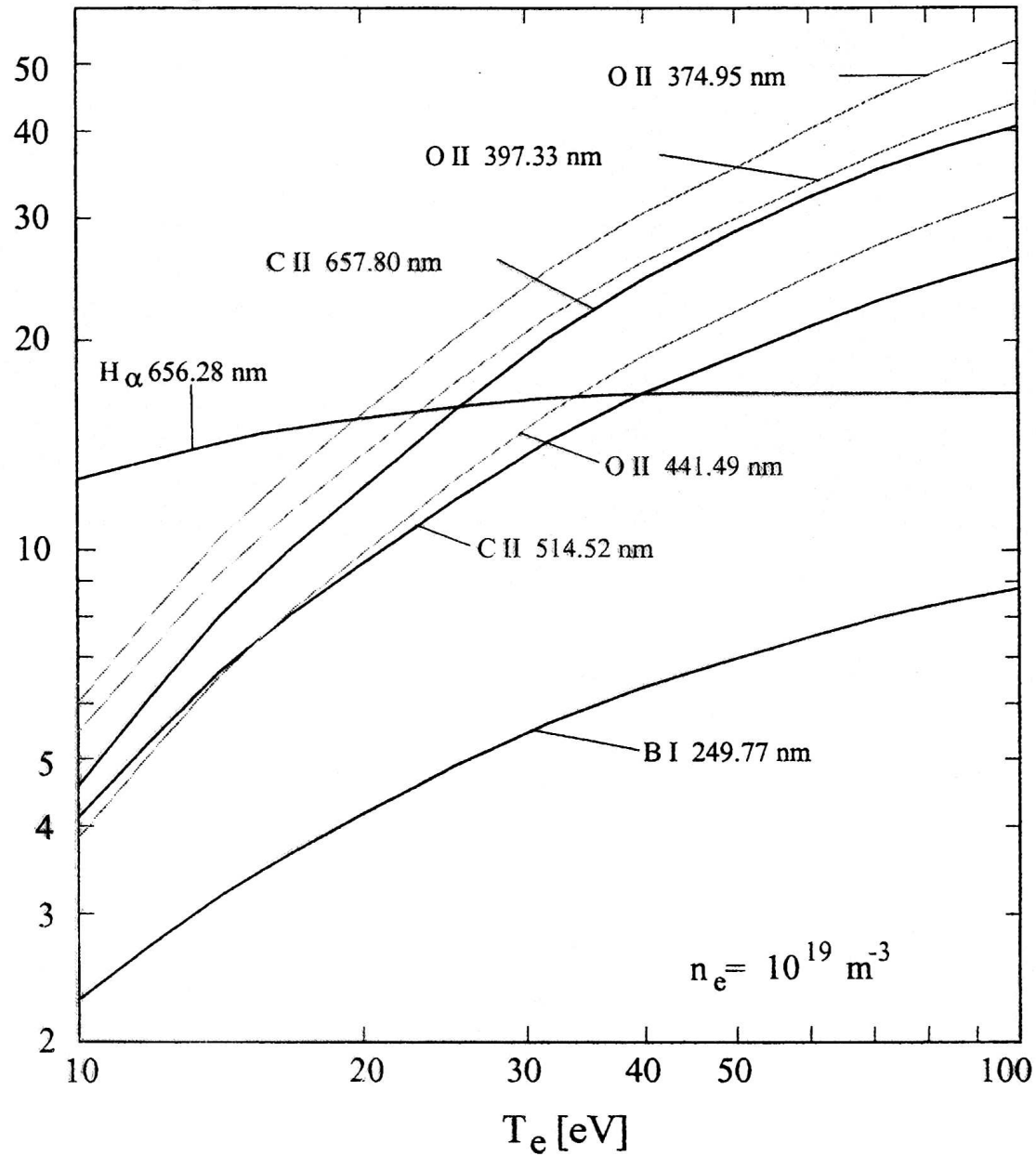
S_k : Ionisations-Ratenkoeffizient

Neutrale Verunreinigungen werden im Plasma z.T. angeregt und z.T. ionisiert.

$$\Gamma_k(0) = \frac{\int n_k n_e S_k dx}{\int n_k n_e X_k B dx} L \approx \frac{S_k}{X_k B} L$$

S/XB -Verhältnis

Ionisationsprozesse / Photon S/XB



Zusammenfassung

- Betrachte Ionisationsgrad - Zustände: neutrales Atome (evtl. angeregt), Ionen
- Im thermischen Gleichgewicht hängt die Besetzung nicht von der speziellen Form der Wechselwirkung ab \rightarrow Saha-Gleichung $n_e^2/n_0 = f(T_e)$.
- Im Nichtgleichgewicht kann die Besetzung im stationären Fall aus der Bilanz der Übergangsraten berechnet werden.

Die Rate für Stoßionisation hat die Form: $S = n_e n_n \langle \sigma_{ion} v_e \rangle$

Grenzfälle:

1. Rekombination vorwiegend durch Dreier-Stoß (hohe Dichte): $n_e^2/n_0 = f(T_e)$
2. Rekombination vorwiegend durch Strahlung (niedrige Dichte, Korona-Gleichgewicht):
 $n_e/n_0 = f(T_e)$

Bei mehreren Ionisationsniveaus gilt Ratengleichheit zwischen benachbarten Niveaus
 $Z \leftrightarrow (Z + 1)$ (detailliertes Gleichgewicht)