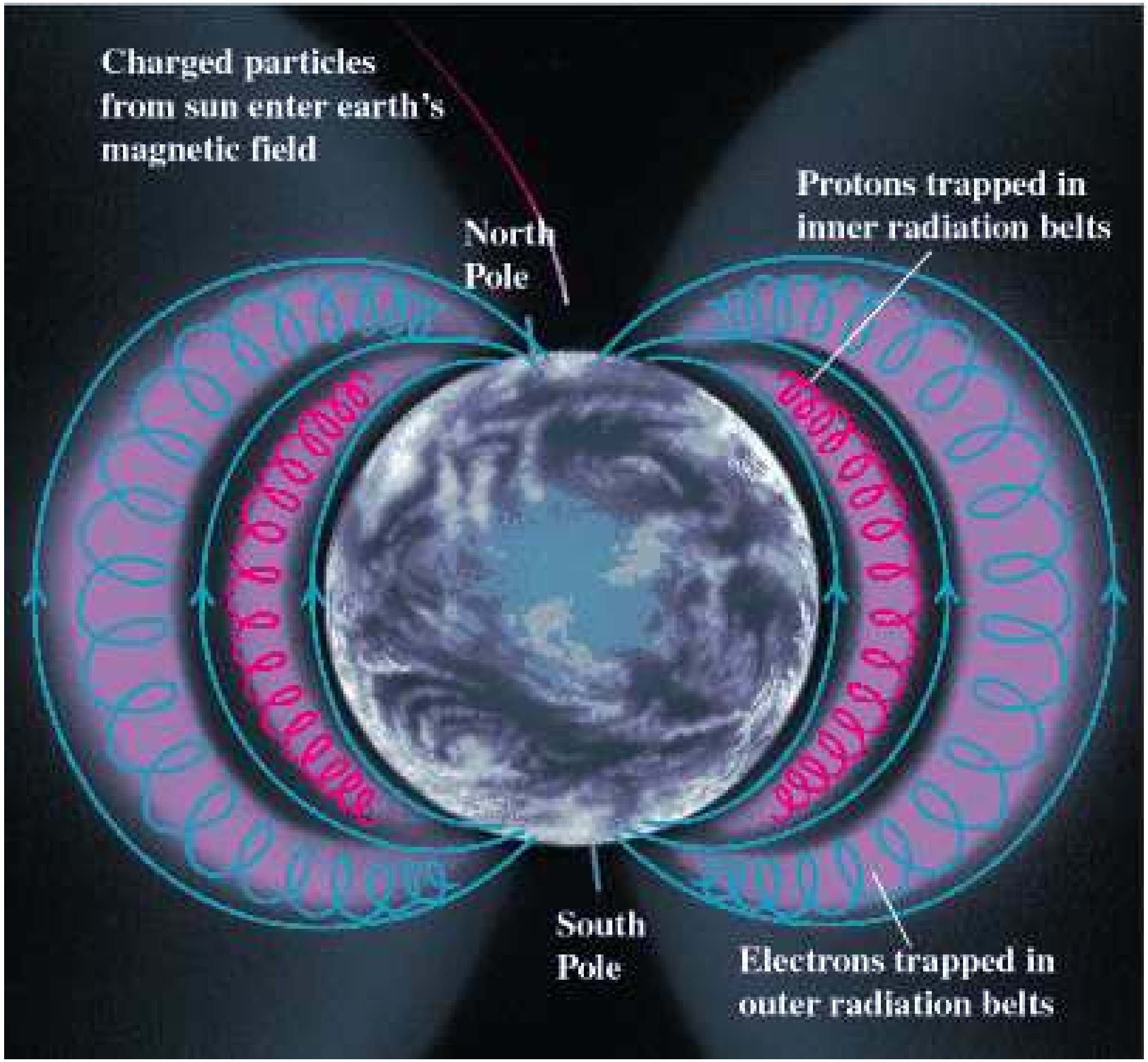
Einführung in die Plasmaphysik

Einzelteilchen-Bewegung



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Wechselwirkung Teilchen - Felder

Kräfte auf Teilchen

Coulomb-Kraft: $F_C = q\vec{E}$ **Lorentz-Kraft**: $F_L = q\vec{v} \times \vec{B}$

Durch Teilchen erzeugte Felder

Poisson: $\nabla \cdot \vec{E} = \sigma/\varepsilon_0$ **Ampère**: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + (1/c^2)\partial\vec{E}/\partial t$

Weitere Feldgesetze

Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ Induktion, EM-Wellen

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ Keine magnetischen Monopole

Einzelteilchenbewegung: Felder als unabhängig gegeben vorausgesetzt

…werden nicht durch das Testteilchen verändert

Inhalt

1. Elektrisches Feld: $E \neq 0, B = 0$

Bewegungsgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{E}, \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi$$

Integriere über Weg $x_1 \to x_2$

$$m\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = q\int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}x$$

Linke Seite:

$$m\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = m\int_1^2 v\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Rechte Seite:

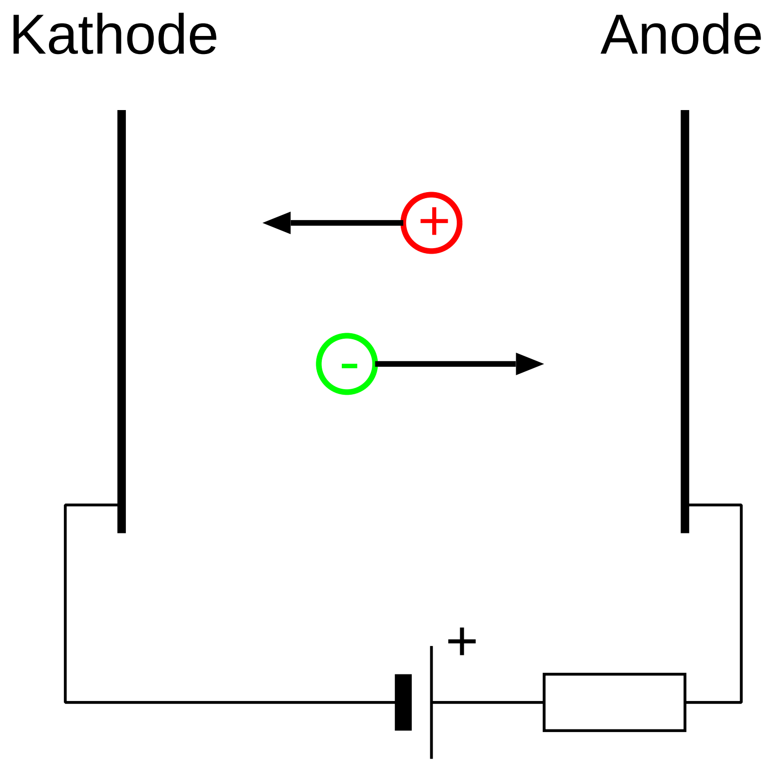
$$q\Phi_1 - q\Phi_2$$

Konstante der Bewegung: $W = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}}$

$$q\Phi_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = q\Phi_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}}$$

Z.B. Gasentladung:

Beschleunigung im festen $\vec{E}$-Feld.



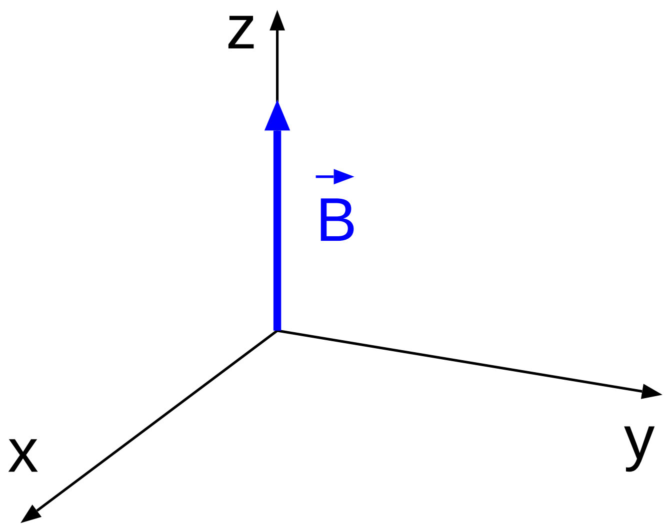
$E = 1$ eV: Energie einer Elementarladung bei $U = 1$ V.

$1\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{J}$

2. Statisches homogenes Magnetfeld, $E = 0, B \neq 0$

Bewegungsgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$



Sei $\vec{B} = (0, 0, B)$ in z-Richtung:

$$m\dot{v}_x = qBv_y$$

$$m\dot{v}_y = -qBv_x$$

$$m\dot{v}_z = 0$$

Ableitung Bewegungsgleichung:

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

und

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

Schwingungs-Ansatz erfüllt diese DGL:

$$v_{x,y} = v_\perp \exp\left(i\omega_c t + i\theta_{x,y}\right)$$

wobei $v_\perp$: Geschwindigkeit senkrecht zum $\vec{B}$-Feld

Einsetzen ergibt die **Zyklotronfrequenz**:

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB}{m}}$$

(Die Phasen $\theta_{x,y}$ sind noch zu bestimmen)

Geladene Teilchen kreisen ("gyrieren") um das Magnetfeld

Wähle x–Phase $\theta_x \equiv 0$:

$$v_x = v_\perp \exp\left(i\omega_c t\right)$$

$$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = i v_x = v_\perp \exp\left(i\omega_c t + i\frac{\pi}{2}\right)$$

Integrieren für Teilchenposition:

$$x = \frac{1}{i\omega_c} v_x (+C) = \frac{v_\perp}{i\omega_c}\exp\left(i\omega_c t\right) = \frac{v_\perp}{\omega_c}\exp\left(i\omega_c t - i\frac{\pi}{2}\right)$$

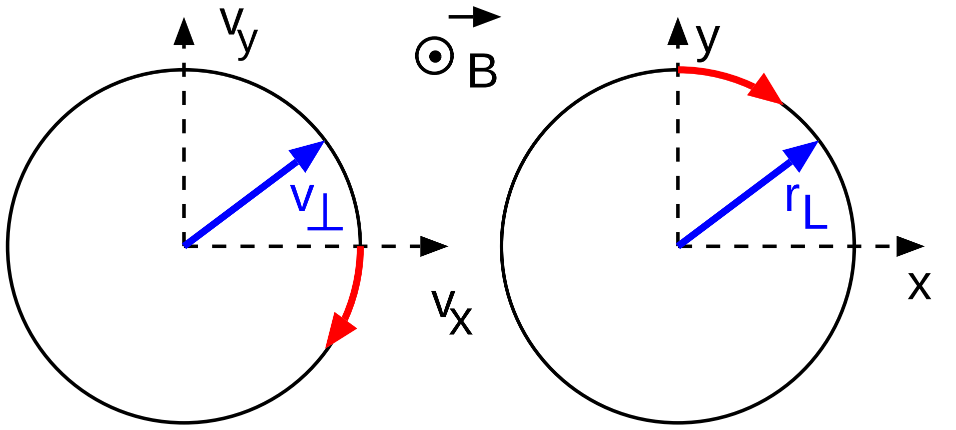
$$y = \frac{v_\perp}{\omega_c}\exp\left(i\omega_c t\right)$$

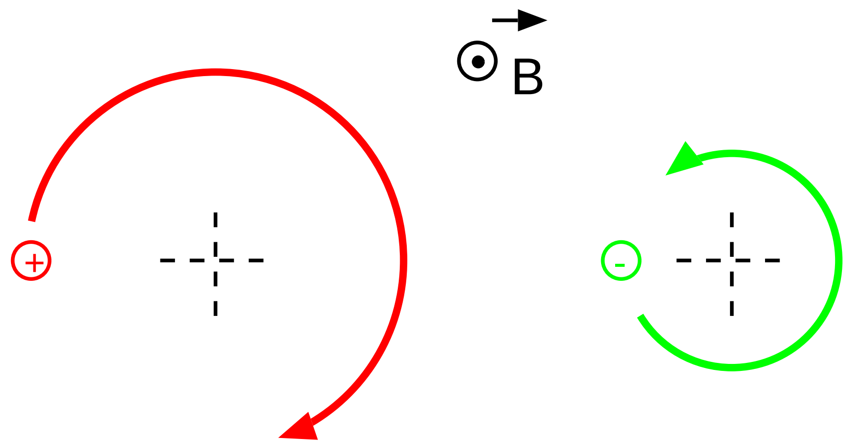
Gyroradius

("Larmor"-Radius):

$$r_L \equiv \frac{v_\perp}{|\omega_c|} = \frac{m v_\perp}{|q| B}$$

- Ionen und Elektronen gyrieren in unterschiedlicher Richtung (links-/rechtshändig)
- Mit $W_i = W_e$: Ionen-Gyroradius grösser um $\sqrt{m_i/m_e}$

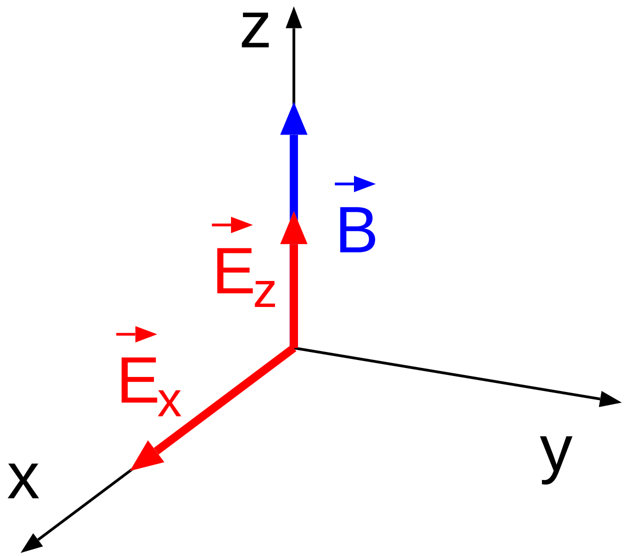




3. Statisches homogenes elektrisches und Magnet-Feld, $E \neq 0, B \neq 0$

Bewegungsgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$



O.B.d.A.: $\vec{B} \| z$, $\vec{E}$ in x, z-Ebene

$$\dot{v}_z = \frac{q}{m}E_z$$

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m}E_x + \omega_c v_y$$

$$\dot{v}_y = -\frac{q}{m}0 - \omega_c v_x$$

Lösung:

$$v_x = v_\perp \exp(i\omega_c t), \qquad v_y = iv_\perp \exp(i\omega_c t) - \frac{E_x}{B}$$

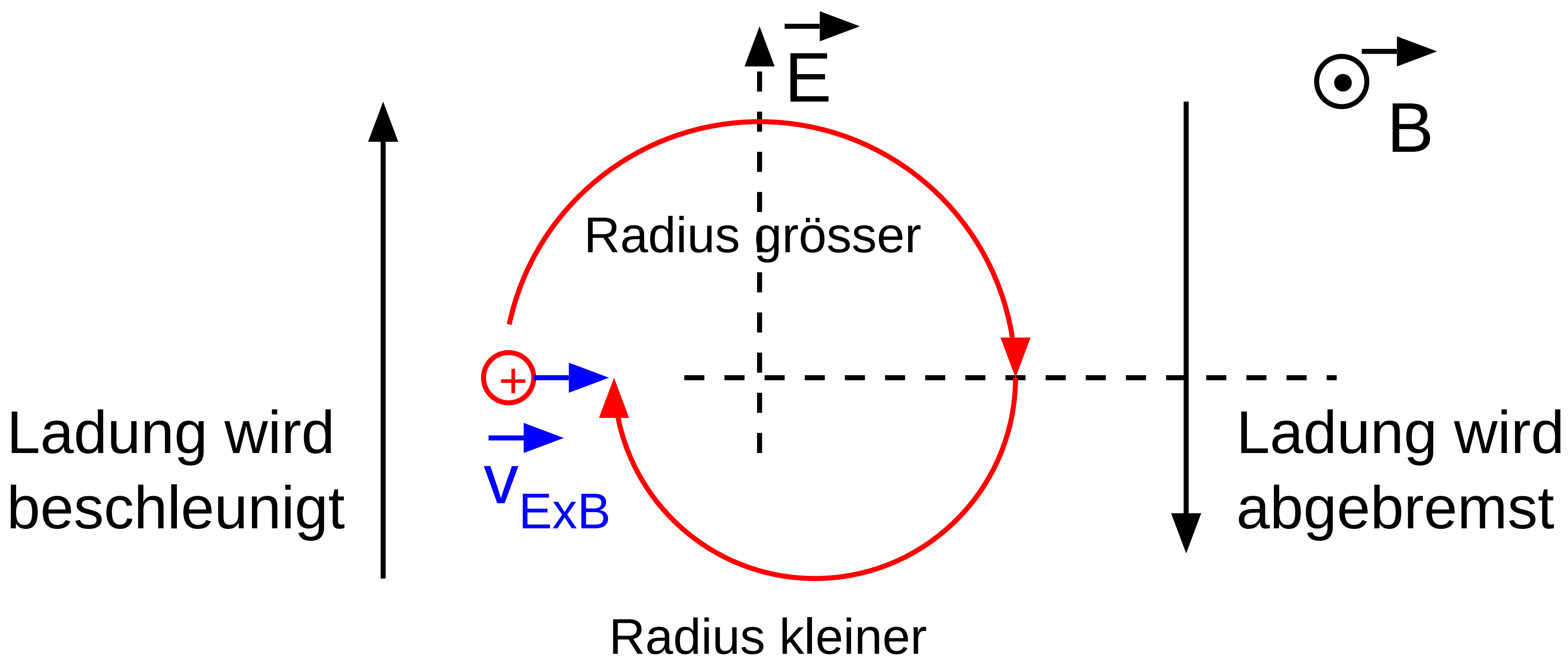
Gyrozentrum driftet in y-Richtung, senkrecht zu $\vec{E}$ und $\vec{B}$!

Ursprung der $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift

Vektorschreibweise:

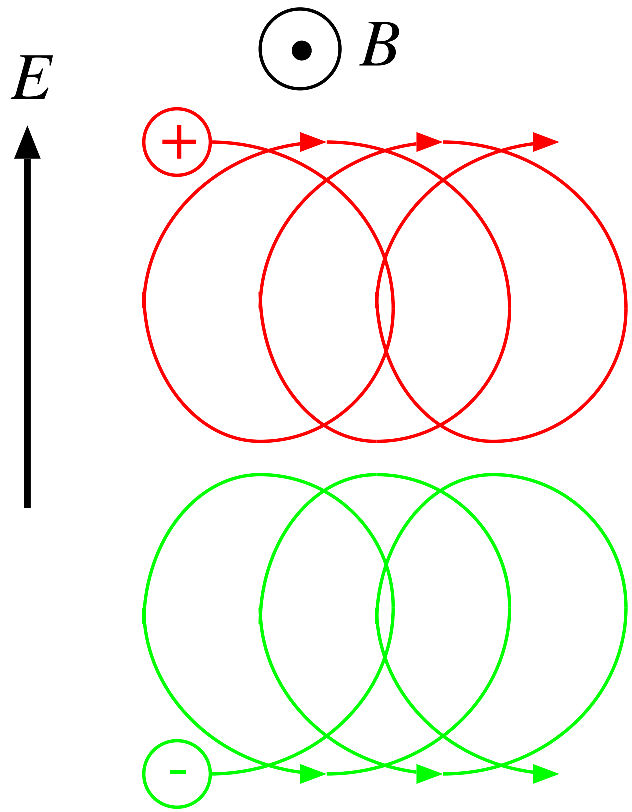
$$\vec{v}_{\mathrm{ExB}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Anschauliche Erklärung: Durch Bewegung im elektrostatischen Potenzial ändert sich der Gyroradius.



Gleiche Richtung der $\vec{E} \times \vec{B}$ Drift für Elektronen und Ionen

Vorzeichenwechsel in Gyrationsrichtung und Richtung der Coulomb-Kraft (Bahn-Beschleunigung) heben sich auf



Verallgemeinerung: “Gravitations”-drift

beliebiges konservatives Kraftfeld:

$$q\vec{E} \rightarrow \vec{F} \qquad \vec{v}_F = \frac{1}{q}\frac{\vec{F}\times\vec{B}}{B^2}$$

Beispiel: Gravitation $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q}\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}$$

“Echte” Gravitationsdrift im allgemeinen vernachlässigbar gegen andere Driften
(z.B. $\vec{B}\times\nabla B$-Drift, s.u.).

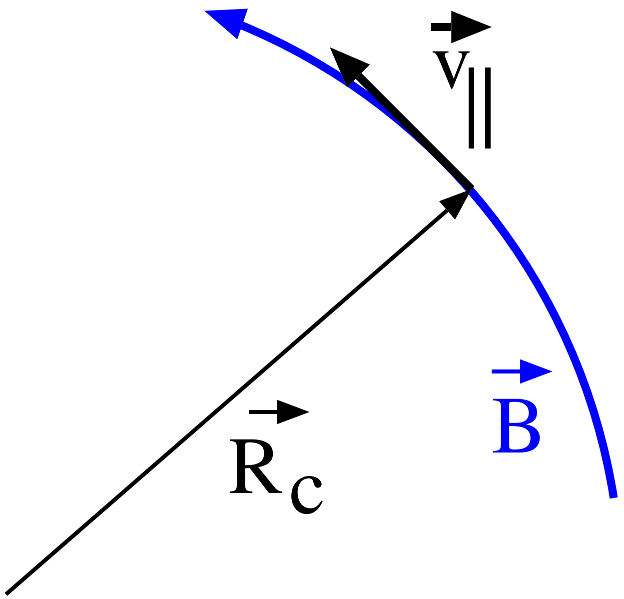
4. Driften im inhomogenen Magnetfeld

- Krümmungsdrift
- ∇B-Drift (“Grad-B” Drift)

Literaturempfehlung:

R J Goldston, P H Rutherford: Introduction to Plasma Physics, ISBN 0-7503-0325-5

Krümmungsdrift



Zentrifugalkraft:

$$\vec{F}_R = m v_{\|}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2}$$

($\vec{R}_c$: lokaler Krümmungsradius, $\vec{R}_c \perp \vec{B}$)

Einsetzen in “Gravitationsdrift”:

$$\vec{v}_R = \frac{m v_{\|}^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} = \frac{2W_{\|}}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2}$$

Spezialfall: Zylindersymmetrisches $\vec{B}$-Feld im Vakuum ($j = 0$)

$\Rightarrow \quad -\nabla \vec{B} = (B/R_c^2)\vec{R}_c \quad$ (ohne Beweis)

$$\vec{v}_R = \frac{m v_{\|}^2}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3} = \frac{v_{\|}^2}{\omega_c} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2}$$

∇B- (Grad B-) Drift

Bisherige Driften: Variation von $v_\perp$ in der Gyrationsperiode.

Ursache der ∇B-Drift: Variation von B.

Taylor-Entwicklung von $\vec{B}$ (bis einschl. 1. Ordnung) um Gyrozentrum ($\vec{r} = 0$)

$\vec{B}_0 \equiv \vec{B}(\vec{r} = 0)$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}_0$$

Z.B. kartesische Koordinaten, $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$:

$$B_z = B_0 + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) B_0$$

Bewegungsgleichung:

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q \left(\vec{v} \times \vec{B}_0\right) + q \left[\vec{v} \times (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}_0\right]$$

5. Die Driftnäherung

Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$

$\vec{v}_0$ löst BewGl 0. Ordnung (Gyrationsbewegung):

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_0}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{v}_0 \times \vec{B}_0\right)$$

$\vec{v}_1$ löst BewGl 1. Ordnung (Driftbewegung des Gyrozentrums):

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} &= q\left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right) + q\left[(\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \times (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{B}_0\right] \\ &\approx q\left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right) + q\left[(\vec{v}_0 \times (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{B}_0\right] \end{aligned}$$

Driftnäherung:

- $v_1 \ll v_0$
- Mittelung über Gyrozyklus
- Betrachte $\omega \ll \omega_c \quad \Rightarrow \dot{\vec{v}}_1 \to 0$ $\quad\quad$ $\Rightarrow$ Bew-Gl. 1. Ordnung nach $\vec{v}_1$ auflösen

Anwendung der Driftnäherung auf die ∇B-Drift

Kreuzprodukt: $\times\vec{B}_0/B^2 \quad \Rightarrow \quad (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0/B_0^2 = -\vec{v}_1$

Mittelung über Gyrozyklus:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{B_0^2} \left\langle \left(\vec{v}_0 \times (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}_0 \right) \times \vec{B}_0 \right\rangle$$

$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ variiere nur in x-Richtung

$$v_{1,x} = -\frac{1}{B_0} \left\langle v_{0,x}\, x\, \frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}x} \right\rangle, \quad v_{1,y} = -\frac{1}{B_0} \left\langle v_{0,y}\, x\, \frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}x} \right\rangle$$

Gyrobewegung einsetzen:

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= \quad -\tfrac{v_\perp r_L}{B_0} \left\langle \cos(\omega_c t)\ \sin(\omega_c t) \right\rangle \tfrac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}x} &&= 0 \\ v_{1,y} &= \quad \tfrac{v_\perp r_L}{B_0} \left\langle \sin^2(\omega_c t) \right\rangle \tfrac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}x} &&= \frac{v_\perp r_L}{2B_0}\ \frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: ∇B- und Krümmungsdrift

∇B-Drift (Vektorschreibweise):

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{m v_\perp^2}{2qB^3}\left(\vec{B} \times \nabla B\right)$$

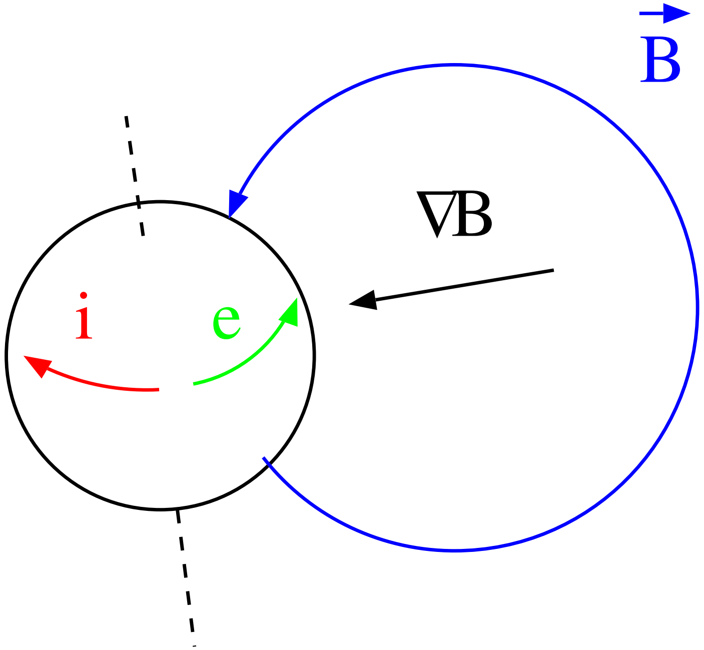
Krümmungsdrift:

$$\vec{v}_R = \frac{m v_\parallel^2}{q R_c^2 B^2}\left(\vec{R}_c \times \vec{B}\right) = \frac{m v_\parallel^2}{q B^4}\left(\vec{B} \times (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}\right)$$

dto., für zylindersymmetrisches $\vec{B}$-Feld im Vakuum ($j = 0$):

$$\vec{v}_R = \frac{m v_\parallel^2}{q B^3}\left(\vec{B} \times \nabla B\right)$$

Driftstrom



$\vec{E} \times \vec{B}$-Drift:

Selbe Richtung für Elektronen und Ionen

$\rightarrow$ kein elektrischer Strom.

∇B- und Krümmungsdrift:

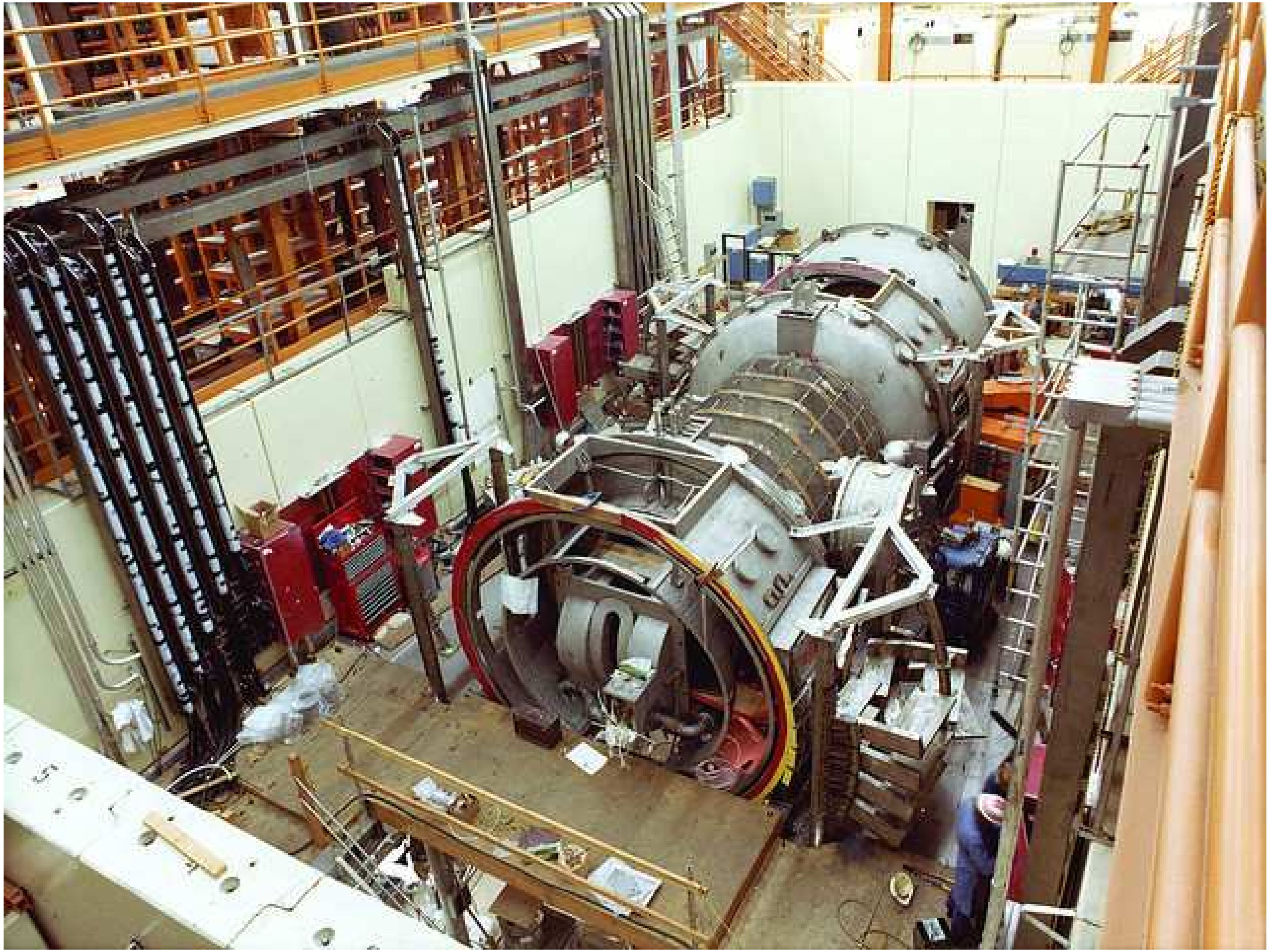
Unterschiedliche Richtung

$\rightarrow$ elektrischer Strom.

Im Erdmagnetfeld: Ringstrom

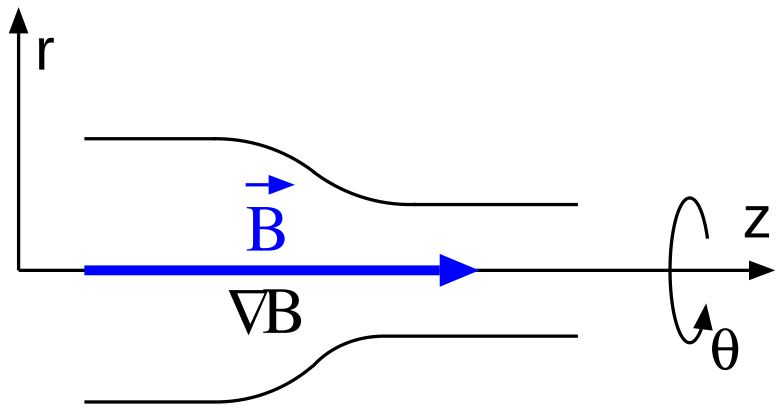
$$\vec{j} = n_e e \left(\vec{v}_i - \vec{v}_e\right) = n_e \left[\frac{1}{2}\left(m_i v_{\perp,i}^2 - m_e v_{\perp,e}^2\right) + \left(m_i v_{\parallel,i}^2 - m_e v_{\parallel,e}^2\right)\right] \left(\frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3}\right)$$

6. Magnetischer Spiegel



Tandem Mirror Experiment (TMX), LLNL (1979)

Magnetischer Spiegel



Zylindersymmetrie, $\vec{B} = (B_r, 0, B_z)$.

Gradient in z-Richtung: $\partial B_z / \partial z > 0$

Kraft auf Teilchen: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$F_r = \quad q(\underbrace{v_\theta B_z}_{(1)} - \underbrace{v_z B_\theta}_{=0})$$

$$F_\theta = \quad q(-\underbrace{v_r B_z}_{(2)} + \underbrace{v_z B_r}_{(3)})$$

$$F_z = \quad q(\underbrace{v_r B_\theta}_{=0} + \underbrace{v_\theta B_r}_{(1)})$$

(1): Gyrationsbewegung

(2): Änderung des Gyroradius

(3): Parallelbewegung

Berechnung von B_r (Ann. $\partial B_z / \partial z$ schwach veränderlich in r):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial r}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial z}B_z \quad \Rightarrow \quad rB_r = -\int_0^r r\frac{\partial B_z}{\partial z}\mathrm{d}r \approx -\frac{1}{2}r^2\left[\frac{\partial B_z}{\partial z}\right]_{r=0}$$

Magnetisches Moment im Spiegel

Betrachte gyrierendes Teilchen (Gyrozentrum auf der Achse, $r = r_L$).

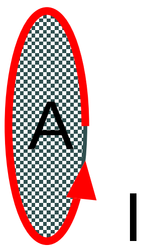
Kraft parallel B:

$$F_z = -\frac{1}{2} q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} q \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -q \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}}_{\equiv \mu} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Magnetisches Moment:

$$\mu = \frac{m v_\perp^2}{2B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_\parallel = -\mu \nabla_\parallel B$$

Andere (bekannte) Definition von μ:



$$\mu = I \cdot A, \quad I = q \frac{\omega_c}{2\pi}, \quad A = \pi r_L^2 = \frac{\pi v_\perp}{\omega_c^2}$$

$$\Rightarrow \mu = I \cdot A = \frac{q v_\perp^2}{2\omega_c} = \frac{m v_\perp^2}{2B}$$

Erhaltung des Magnetischen Moments

Mittelung über Gyrobewegung, B jeweils am Ort des Gyrozentrums

Bewegungsgleichung $\|B$:

$$m\frac{\mathrm{d}v_\|}{\mathrm{d}t} = -\mu\frac{\partial B}{\partial s}$$

Mit $v_\| = \partial s/\partial t$:

$$mv_\|\frac{\mathrm{d}v_\|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_\|^2\right) = -\mu\frac{\partial B}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = -\mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_\|^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = -\mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu B) = B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \text{const.}$$

Verlustkegel

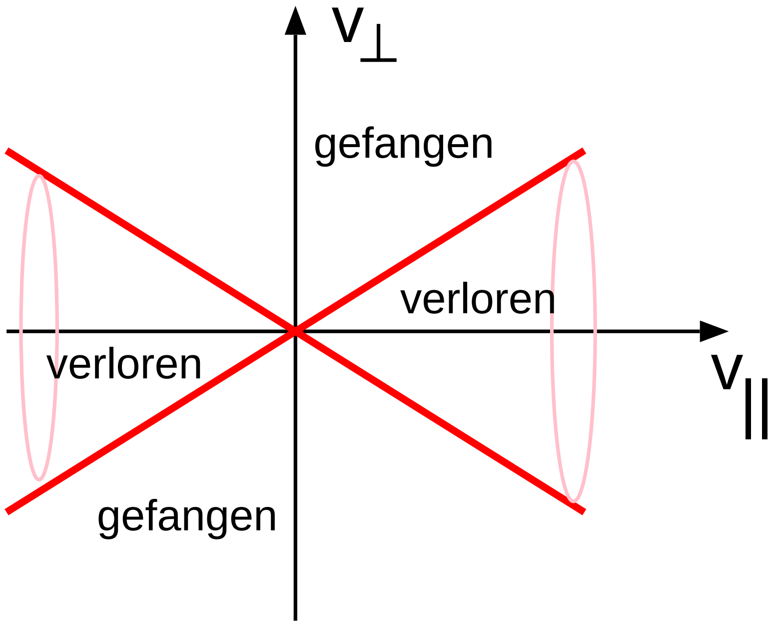
Mit steigendem B-Feld steigt $W_\perp$. Bei $W_\| = 0$ kehrt Parallelbewegung um $\rightarrow$ **"Gefangene" Teilchen**

Teilchenbahn von Startpunkt (0) bis Umkehrpunkt (m)

$$\frac{1}{2}mv_{\perp,m}^2 = \frac{1}{2}mv_{\perp,0}^2 + \frac{1}{2}mv_{\|,0}^2$$

$$\mu B_m = \frac{1}{2}mv_{\|,0}^2 + \mu B_0$$

$$v_{\|,0}^2 = \frac{2\mu(B_m - B_0)}{m} = v_{\perp,0}^2 \frac{B_m - B_0}{B_0}$$

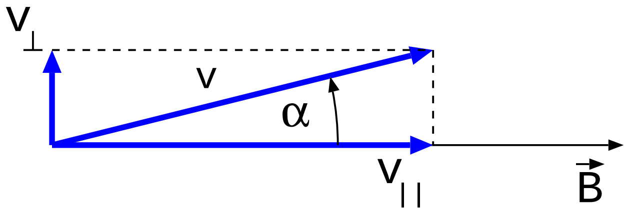


Teilchen mit $v\|/v_\perp > \sqrt{(B_{\max} - B_0)/B_0}$ können umlaufen (sind "verloren"), die anderen werden reflektiert ("im Spiegel gefangen").

Pitch-Winkel

Winkel zwischen Geschwindigkeitskomponenten senkrecht und parallel zum B-Feld.

$\alpha = 0^o : \ \vec{v} \| \vec{B}, \qquad \alpha = 90^o : \ \vec{v} \perp \vec{B}$



$$\tan\alpha = \frac{v_\perp}{v_\|}, \qquad \sin\alpha = \frac{v_\perp}{v}$$

Magnetisches Moment:

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{mv^2}{2}\frac{\sin^2\alpha}{B}$$

Magnetischer Spiegel: Am Umkehrpunkt ($B = B_m$), $\alpha = 90^o$

$$\sin\alpha = \left(\frac{B}{B_m}\right)^{1/2}$$

Adiabatische Invarianten

Das magnetische Moment μ ist eine “ungefähre” Erhaltungsgrösse:

- nur bei $E = 0$
- nur für Bewegungen langsamer als die Gyrationsbewegung
- nur wenn Feld-Gradientenlänge gross gegen Gyroradius (Driftnäherung)

Solche Erhaltungsgrössen heissen auch “adiabatische Invarianten”.

Weitere adiabatische Invarianten:

- Longitudinale Invariante $J = \oint m v_{\|} \mathrm{d}s$
  - Bewegung entlang des Feldes, gemittelt über Spiegelreflektionen
- Drift-Invariante $\Phi = \oint v_d r \, \mathrm{d}\psi$
  - Driftbewegung, gemittelt über azimuthale Umläufe

Zusammenfassung (1)

- Wir betrachten Teilchenbewegung im elektrischen und magnetischen Feld (unter Vernachlässigung der Feldänderung durch die geladenen Teilchen)
- Elektronen und Ionen gyrieren im Magnetfeld mit der Winkelgeschwindigkeit ("Zyklotronfrequenz") $\omega_c = qB/m$ (in unterschiedlichem Drehsinn).
  (Larmour-) Radius der Bewegung: $r_L = v_\perp/\omega_c$
- Im zusätzlichen konservativen Kraftfeld $\vec{F}$ (z.B. $\vec{E}$-Feld) tritt eine Drift der Gyrozentren senkrecht zu $\vec{B}$ und $\vec{F}$ auf.
- Krümmung des Magnetfeldes und Gradient der magnetischen Flußdichte führen zu einer Drift senkrecht zu $\vec{R}_c$ bzw. ∇B und $\vec{B}$.
- Die Driften senkrecht B sind i.a. unterschiedlich gerichtet für Elektronen und Ionen, d.h. sie führen zu einem Driftstrom.
  Ausnahme: $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift.

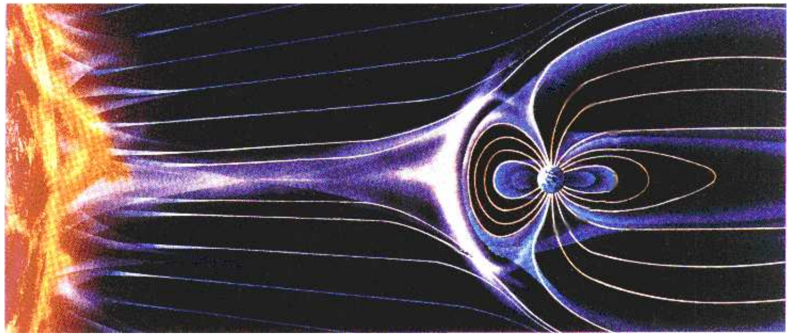
Zusammenfassung (2)

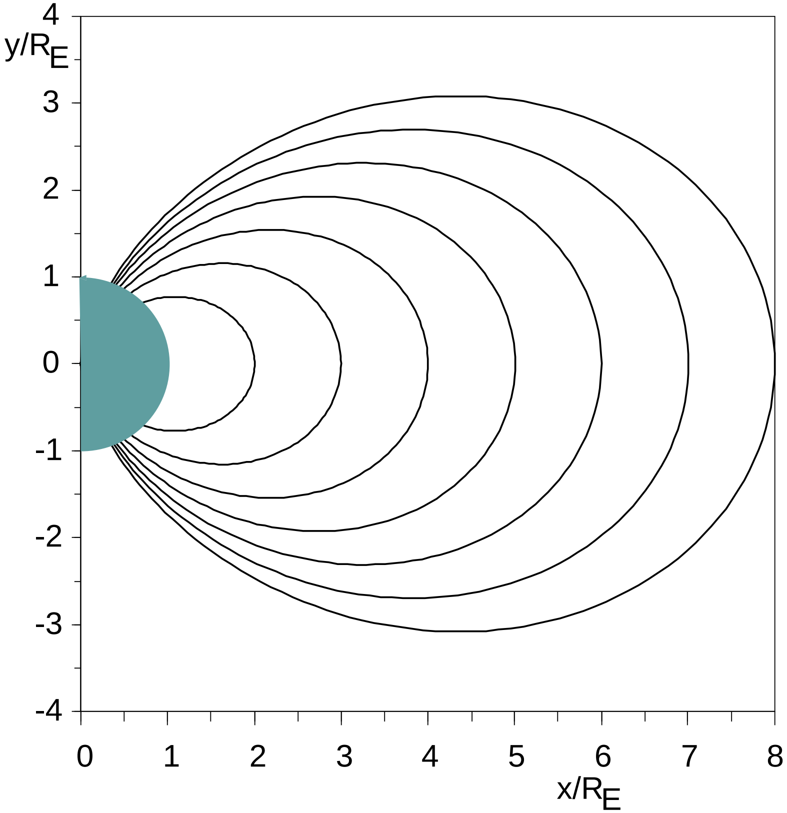
- Für kleine $r_L/(B/\nabla B)$ und $E = 0$ bleibt das magnetische Moment $\mu = W_\perp/B$ erhalten (“adiabatische Invariante”)

- Im inhomogenen Magnetfeld (“magnetischer Spiegel”) kehrt sich die Parallelbewegung um, falls ein Teilchen nicht über genügend Energie in der Parallelbewegung verfügt, um das magnetische Moment aufrechtzuerhalten.
  Kritisches Verhältnis von Parallel- zu Senkrechtgeschwindigkeit:
  $v\|/v_\perp = \sqrt{(B_m - B_0)/B_0}$

- Der *pitch*- Winkel $\alpha = \tan^{-1}(v_\perp/v_\|)$ bestimmt das Verhältnis aus magnetischem Feld am Start- und Umkehrpunkt: $\sin^2\alpha_1 = B_1/B_m$

Teilchenbewegung im Erdmagnetfeld





Magnetosphäre:
komplizierte Überlagerung aus
Erdmagnetfeld (Dynamo!)
und Sonnenwind.
Näherung: **Dipolfeld**

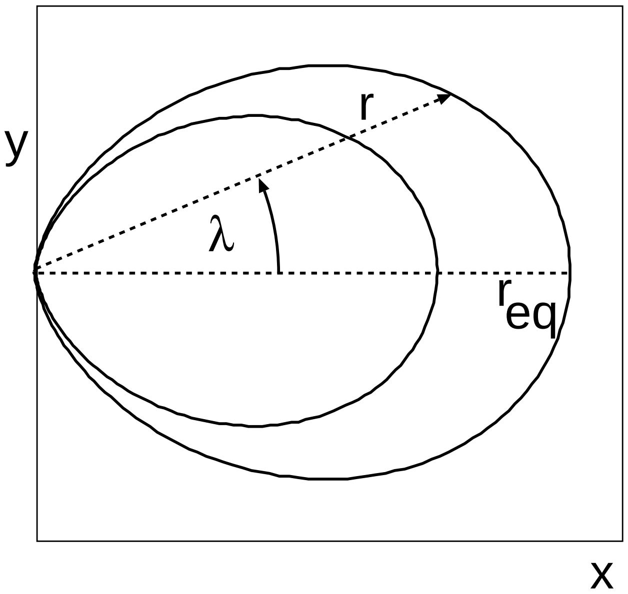
Dipolfeld

Vereinfachtes Modell für Erdmagnetfeld
(bis ca. 6 Erdradii $R_E = 6371$ km) Dipolmoment der Erde:

$$M_e = 8.05 \times 10^{22}\ \mathrm{Am}^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_e}{4\pi r^3}\left(-2\sin\lambda\hat{\vec{e}}_r + \cos\lambda\hat{\vec{e}}_\lambda\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 M_e}{4\pi r^3}\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}$$



Literatur: W. Baumjohann, R. A. Treumann: Basic space plasma physics

Gleichung für Feldlinien

Bedingung: Feldlinie tangential zu Wegelement entlang der Feldlinie

$$\frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\lambda} = \frac{B_r}{B_\lambda}$$

Dipolfeld einsetzen:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{2\sin\lambda}{\cos\lambda}\mathrm{d}\lambda = \frac{2\mathrm{d}(\cos\lambda)}{\cos\lambda}$$

Integration (Anfangsbedingung $r(\lambda = 0) = r_{\mathrm{eq}}$):

$$r = r_{\mathrm{eq}}\cos^2\lambda$$

Längenelement entlang Feldlinie: $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\lambda)^2$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} = r_{\mathrm{eq}}\cos\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}$$

L-Wert einer Feldlinie

L-Wert (L shell): $L \equiv r_{\mathrm{eq}}/R_E$

Benutze:

$B_E = \mu_0 M_E/(4\pi R_e^3)$ (Feld am Äquator bei $r = r_E$)

und $r = r_{\mathrm{eq}} \cos^2 \lambda$ (s.o.)

$$\Rightarrow \quad B(\lambda, L) = \frac{B_E}{L^3} \frac{\left(1 + 3\sin^2 \lambda\right)^{1/2}}{\cos^6 \lambda}$$

Breite λ_E, bei der Feldlinie Erdoberfläche schneidet:

$$\cos^2 \lambda_E = \frac{r_E}{r_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{L}$$

Spiegel- *(bounce-)* Bewegung

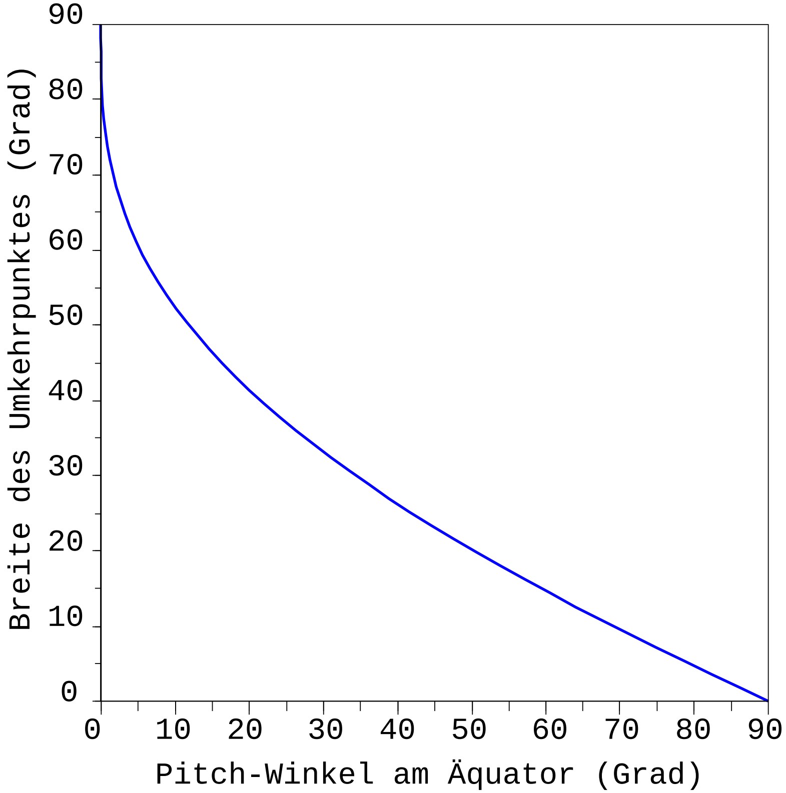
Auf welche Breite kommt ein Teilchen, das am Äquator startet ?

Kritischer Pitch-Winkel
(in der Äquatorialebene)
für gefangene Teilchen

$$\sin^2 \alpha_{\mathrm{eq}} = \frac{B_{\mathrm{eq}}}{B_m}$$

$$= \frac{\cos^6 \lambda_m}{\left(1 + 3\sin^2 \lambda_m\right)^{1/2}}$$

Unabhängig von L!



Bounce-Periode

Wie lange dauert ein voller Umlauf eines gefangenen Teilchens?

$4\times$ Äquatorialebene (eq) - nördlicher/südlicher Spiegelpunkt (m)

$$\tau_b = 4\int_{eq}^{m} \frac{\mathrm{d}s}{v_\parallel} = 4\int_0^{\lambda_m} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\lambda v_\parallel}$$

Wiederum: $v_\parallel = v\left[1-\left(B/B_{eq}\right)\sin^2\alpha_{eq}\right]^{1/2}$

$$\tau_b = 4\frac{r_{eq}}{v}\int_0^{\lambda_m}\cos\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}\left[1-\sin^2\alpha_{eq}\frac{\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}}{\cos^6\lambda}\right]^{-1/2}$$

Numerische Lösung des Integrals

$$\tau_b \approx 4\frac{r_{eq}}{v}\left(1.30-0.56\sin\alpha_{eq}\right) \approx \ L\ \underbrace{\frac{R_E}{(W/m)^{1/2}}}_{(1)}\underbrace{(3.7-1.6\sin\alpha_{eq})}_{(2)}$$

Beispiel: $W = 1$ keV, $\alpha_{eq} = 30^0 \rightarrow (2) = 2.9$

Elektronen $(1)\approx 0.4$ s, Protonen $(1)\approx 20.5$ s

Verlustkegel

Wie groß ist der *pitch*-Winkelbereich, in dem Teilchen die Erdoberfläche erreichen können?

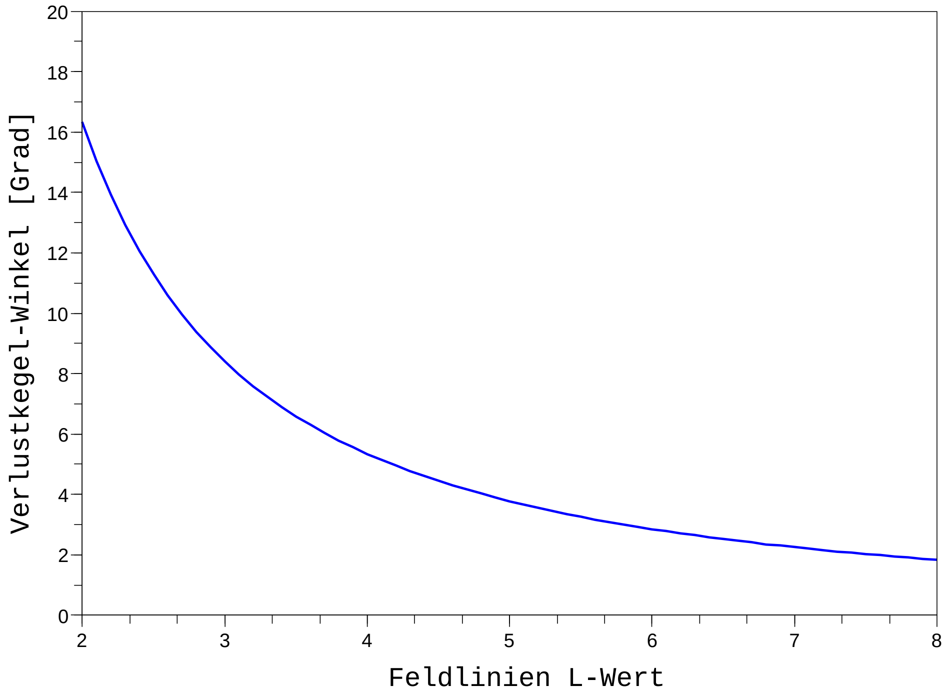
(Tatsächlich rekombinieren sie schon durch Stöße in ≈ 100 km Höhe).

$$\sin^2 \alpha_l = \frac{B_{\text{eq}}}{B_m}$$

$$= \frac{\cos^6 \lambda_m}{\left(1 + 3\sin^2 \lambda_m\right)^{1/2}}$$

Mit $\cos^2 \lambda_E = L^{-1}$:

$$\sin^2 \alpha_l = \left(4L^6 - 3L^5\right)^{-1/2}$$



Driftbewegung

Driftwinkeländerung während einer *bounce*-Periode:

$$\Delta\Psi = 4\int_0^{\lambda_m} \frac{v_d}{r\cos\lambda}\frac{\mathrm{d}s}{v_\parallel}$$

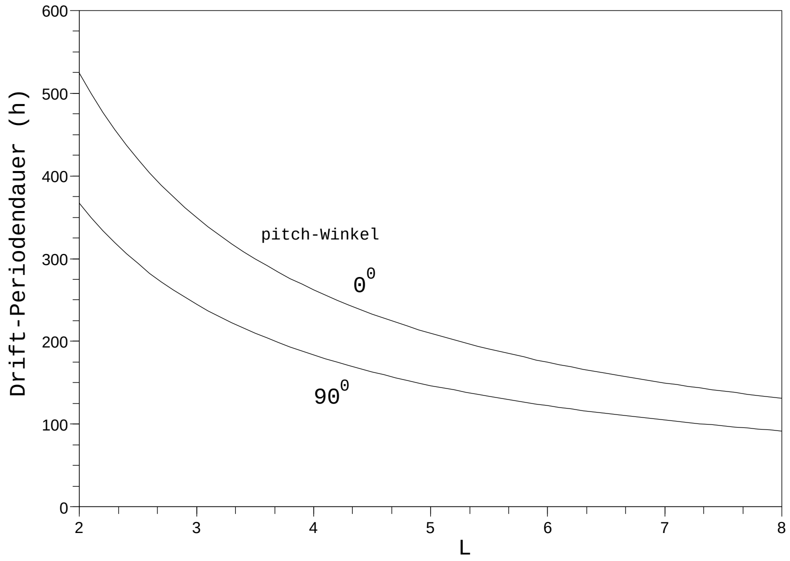
Gemittelte Winkelgeschwindigkeit:

$$2\pi\langle\Omega_d\rangle = \Delta\Psi/\tau_b$$

Driftperiode (Näherungslösung):

$$\langle\tau_d\rangle = \langle\Omega_d\rangle^{-1} = \frac{\pi q B_E R_E^2}{2LW}\left(0.35 + 0.15\sin\alpha_{\mathrm{eq}}\right)^{-1}$$

Beipiel: $W = 1$ keV, $< \tau_d > \approx$ Tage



Zusammenfassung (3)

- Das Erdmagnetfeld lässt sich (für kleine Radien $< 6R_E$) durch ein Dipolfeld annähern.

- Der Feldlinienradius wird durch $L = R_{\mathrm{eq}}/R_E$ parametrisiert.

- Die Periodendauer der Bewegung im magnetischen Spiegel (Sekunden für Elektronen, Sekunden bis Minuten für Ionen) ist proportional zu L und hängt schwach von α ab.
  Die geographische Breite des Umkehrpunkts hängt nur von α und nicht von L ab.
  Der kritische Wert α für Teilchenverlust nahe der Erdoberfläche sinkt mit steigendem L.

- Durch das inhomogene Feld ergibt sich eine Driftbewegung (Westwärts für Ionen, ostwärts für Elektronen) mit Periodendauern von Tagen.

- Zur Behandlung des Driftstromes müssen weitere Effekte (elektrische Felder, endliche Leitfähigkeit) berücksichtigt werden.