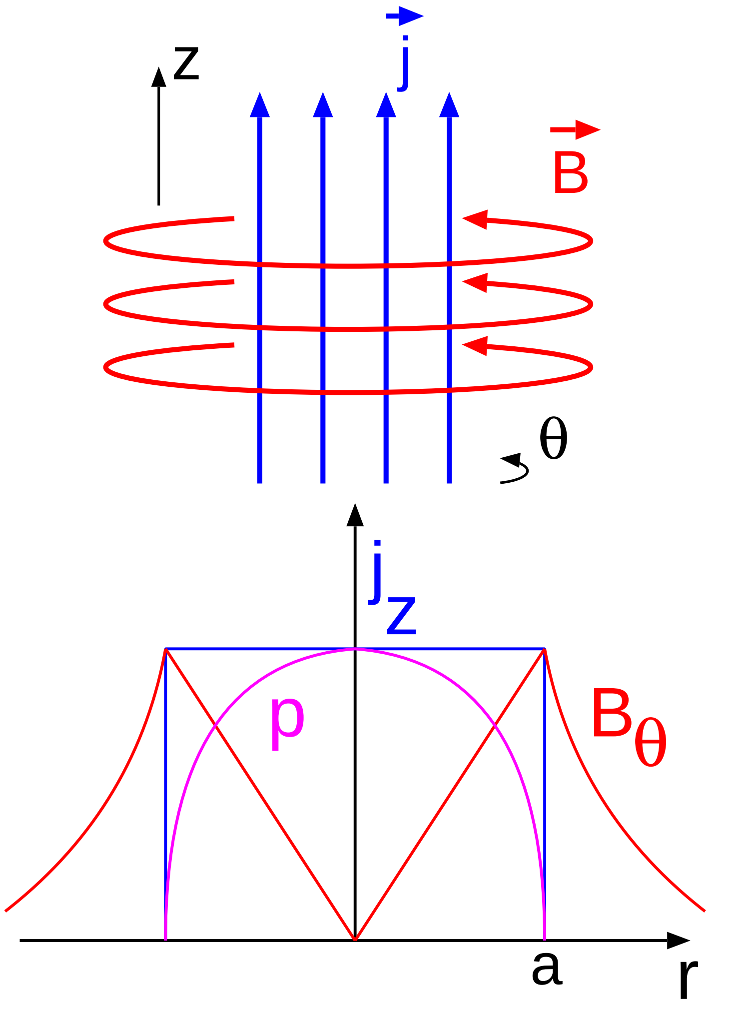
Magnetischer Einschluss



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Inhalt

- MHD-Kraftgleichgewicht
- Magnetische Flächen
- Gerade, “ein-dimensionale”, Kraft-Gleichgewichte
  - *z-pinch*
  - θ-*pinch*
  - *screw pinch*

MHD-Gleichungen

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0$$

Kraftgleichung:

$$m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (n\,\vec{u}) \;=\; m\,n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + mn\,(\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} \;=\; \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla \cdot \overline{\overline{P}}_0$$

Verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta_0 \vec{j}$$

Zustandsgleichung, z.B. adiabatisch mit z Freiheitsgraden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0, \quad \gamma = \frac{z+2}{z}$$

Maxwell-Gleichungen ($\vec{E}$ statisch, Ladungsneutralität):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \stackrel{!}{=} 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \vec{j}$$

(Stationäres) MHD-Kraftgleichgewicht

Vereinfachende Annahmen:

– Beobachter sieht stationären Zustand: $\partial/\partial t = 0$,

– Keine advektierte Massenströmung: $(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} = 0$

(aber i.a. $\vec{u} \neq 0$, d.h. lineare Strömung ohne Änderung erlaubt),

– Mittele über Längenskala $L \gg \lambda_D$, d.h. $\rho = 0$.

– Skalarer kinetischer Druck (isotrop, keine Scherkräfte)

MHD-Kraftgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\,\vec{u}) \;=\; m\,n\underbrace{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}}_{=0} + mn\underbrace{(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}}_{=0} \;=\; \underbrace{\rho\vec{E}}_{=0} + \vec{j}\times\vec{B} - \underbrace{\nabla\cdot\overline{\overline{P}}_0}_{=\nabla p}$$

d.h.

$$\nabla p \;=\; \vec{j}\times\vec{B} \;=\; -\nabla\cdot\overline{\overline{T}}$$

$\overline{\overline{T}}$: Magnetischer Drucktensor (s. nächste Folie)

Magnetischer Drucktensor

Betrachte $\vec{j} \times \vec{B}$-Term. Benutze:

1. Ampère'sches Gesetz: $\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B}$
2. Vektoridentität: $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla \vec{G}) + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})$

$$\vec{j} \times \vec{B} \quad = \quad -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) \quad = \quad -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B} \quad \equiv \quad -\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$$

Magnetischer Drucktensor:

$$\overline{\overline{T}} \equiv \underbrace{\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)}_{\text{isotroper Magnetfelddruck}} \overline{\overline{1}} \quad - \quad \underbrace{\left(\frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}\right)}_{\text{Zugspannung in } \vec{B}-\text{Richtung}}$$

Komponenten ($\vec{B} || z$-Richtung):

$$\overline{\overline{T}} \equiv \begin{pmatrix} B^2/2\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2/2\mu_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2/\mu_0 \end{pmatrix}$$

Plasma-“Beta”

Betrachte weiterhin stationären Fall, $E = 0$, isotroper kinetischer Druck p

Kraftgleichung:

$$0 \;=\; \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \;=\; -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\vec{B}\vec{B} \right)$$

Def.:

$$\beta \equiv \frac{p}{B^2/2\mu_0}$$

Grenzfälle:

- $\beta \ll 1$: Magnetfelddruck bestimmt Plasmabewegung
- $\beta \approx 1$ (und höher): kinetischer Druck bestimmt Plasmabewegung

Sonderfall: Kraftfreies Gleichgewicht

Ideales MHD-Gleichgewicht: $\nabla \cdot \left(\overline{\overline{T}} + \overline{\overline{P}} \right) = 0.$

Bei kleinem $\beta \equiv p/(B^2/\mu_0) \ll 1$ ist kinetischer Druck vernachlässigbar

$\Rightarrow$ “kraftfreies” Gleichgewicht (zwischen magnetischen Zug- und Druckspannungen)

$$0 = \nabla \cdot \overline{\overline{P}} = -\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \vec{j} \times \vec{B}$$

d.h. $\vec{j} \| \vec{B}$

Ampère’sches Gesetz: $\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$

Mit $\mathrm{Div}(\mathrm{Rot}(\vec{B})) = 0$ und $\nabla \cdot \vec{B} = 0$:

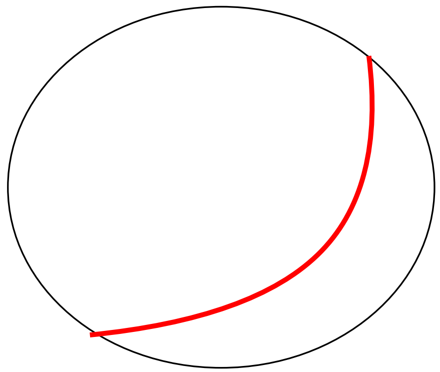
$$0 = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = \alpha \left(\nabla \cdot \vec{B} \right) + \vec{B} \cdot \nabla \alpha = \vec{B} \cdot \nabla \alpha = 0$$

d.h. $\vec{B}$ liegt in Flächen mit konstantem α. “**Magnetische Flächen**”

Magnetfeld-Flächen sind mehrfach zusammenhängend

Beweis (für $\beta \ll 1$): Betrachte Kurvenintegral entlang $C \| \vec{B}$

$$\oint_C \vec{B} \mathrm{d}\ell \neq 0$$



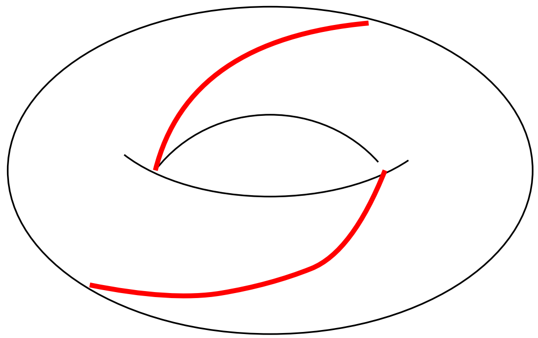
Kugel

Stokes'scher Satz

(einfach zusammenhängende Fläche S, berandet durch C)

$$\oint_C \vec{B} \mathrm{d}\ell = \int_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}A = \int_S \alpha \vec{B} \cdot \mathrm{d}A \neq 0$$

Sei S eine magnetische Fläche ($\alpha = \mathrm{const}$)



Torus

$$\int_S \alpha \vec{B} \cdot \mathrm{d}A = \alpha \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}A \neq 0$$

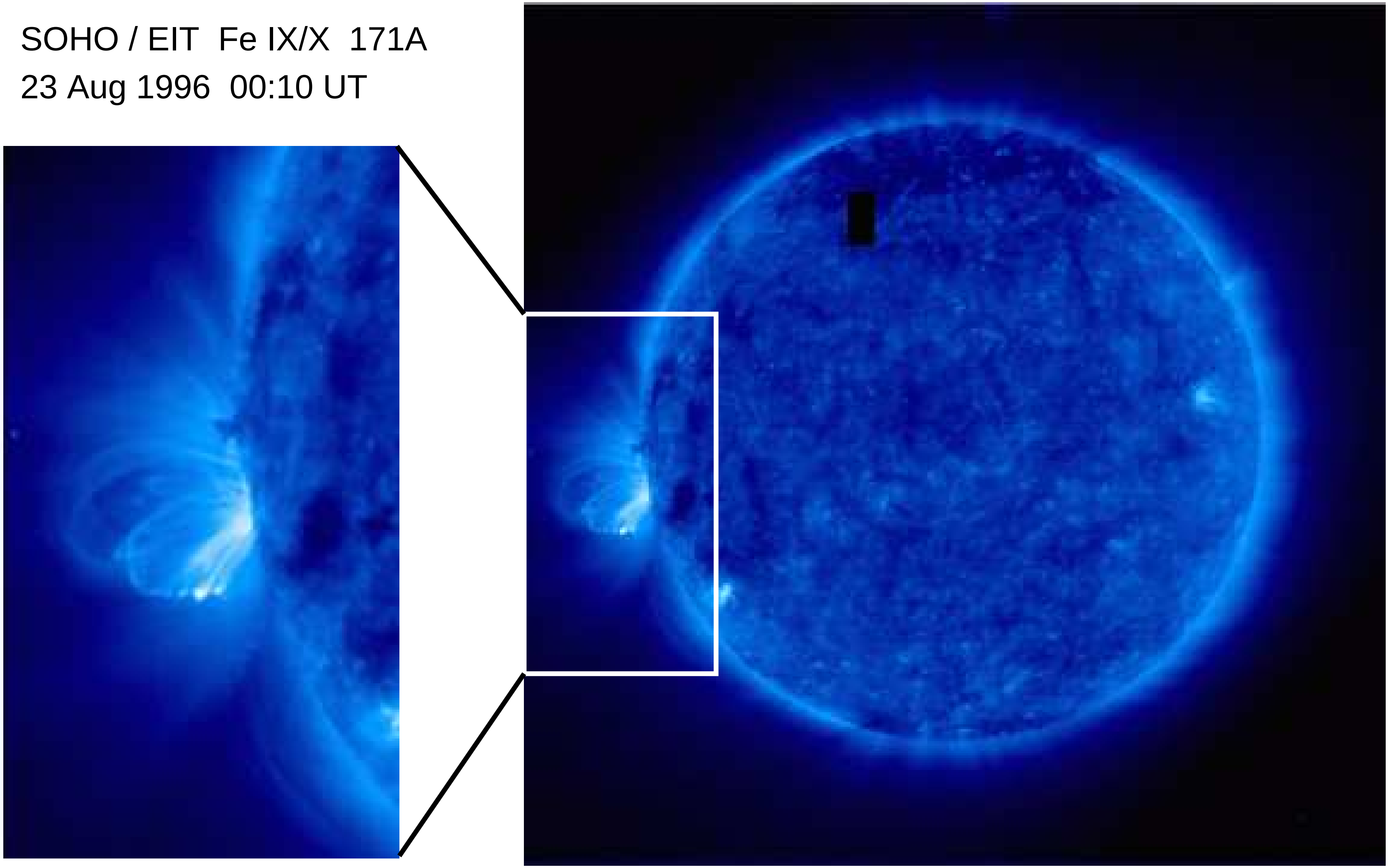
Da $\vec{B}$ aber in der Fläche liegt (senkrecht zur Flächennormalen)

$$\vec{B} \cdot \mathrm{d}A = 0$$

Widerspruch, d.h. $\vec{B}$ liegt auf *mehrfach* zusammenhängender Fläche (z.B. Torus, "Flußröhren"), nicht auf *einfach* zusammenhängender Fläche (Kugel).

Flussröhren in Sonnenkorona - vor Protuberanz

SOHO / EIT Fe IX/X 171A
23 Aug 1996 00:10 UT

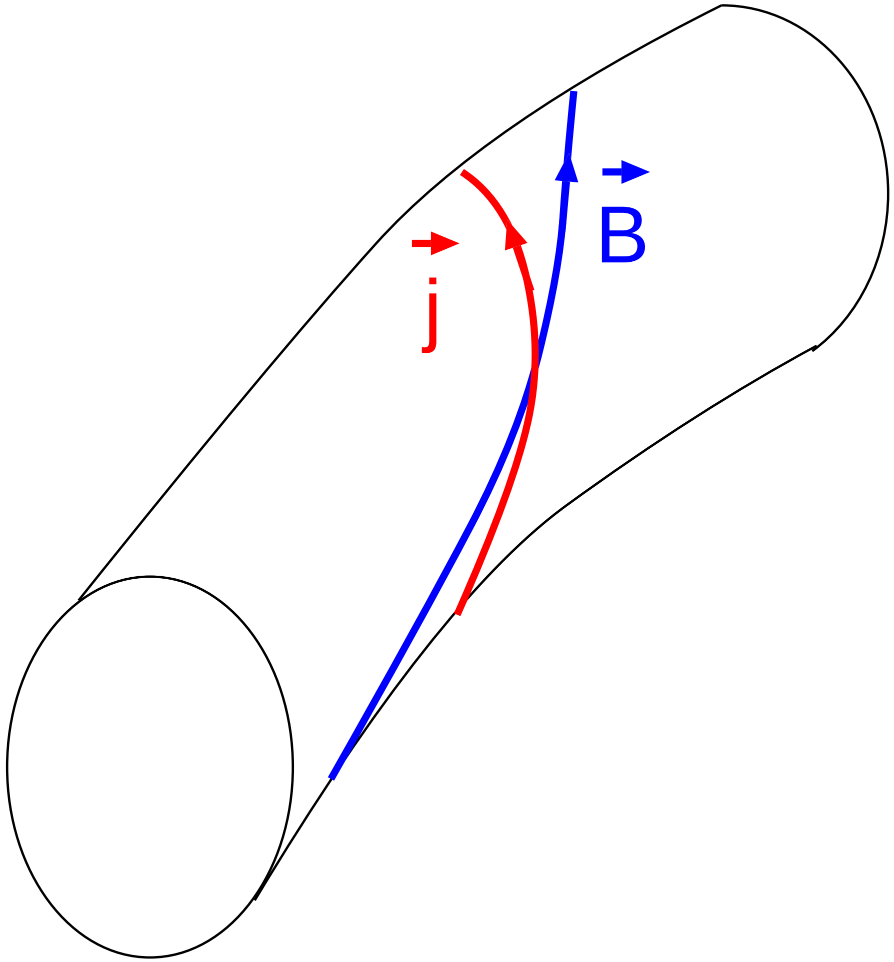


Quelle: `http://sohowww.nascom.nasa.gov`

Magnetische Flächen (endliches Beta)

Kraftgleichgewicht:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$$



Skalarprodukt mit $\vec{B}$ bzw. $\vec{j}$:

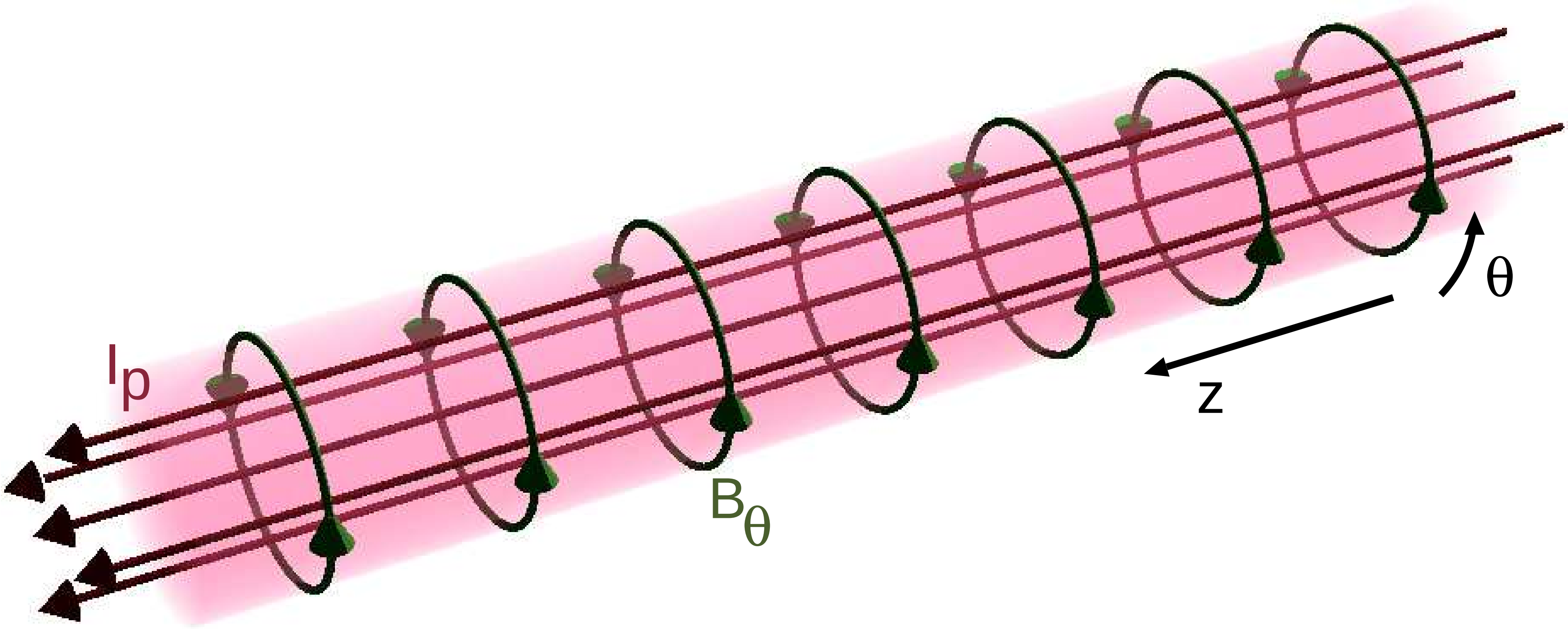
$$\nabla p \cdot \vec{B} = (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla p \cdot \vec{j} = (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{j} = 0$$

$\Rightarrow \vec{B} \perp \nabla p, \qquad \vec{j} \perp \nabla p.$

$\vec{B}$, $\vec{j}$ liegen in Flächen gleichen Drucks.

Einfachste Konfiguration: Linearer z-Pinch

Willard H Bennet, Phys. Rev. **45** (1934) 890, “Magnetically self-focusing streams” (of fast electrons)



Zylindrische Koordinaten: $j_z, B_\theta, \mathrm{d}p/\mathrm{d}r$

Ein Profil kann frei gewählt werden, z.B. die Stromdichte $j(r)$

$\Rightarrow B_\theta(r)$ (Ampère’sches Gesetz)

$\Rightarrow \mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ (Kraftgleichgewicht) $\quad p(r)$ durch Integration mit Randbedingung, z.B. $p(a) = 0$

Magnetisches Feld im z-Pinch

Ampère'sches Gesetz in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) = \mu_0 j_0$$

Wähle z.B. konstante Stromdichte:

$$j_z = \text{const} = j_0 = \frac{I_p}{\pi a^2}, \quad (r < a)$$

Integrieren:

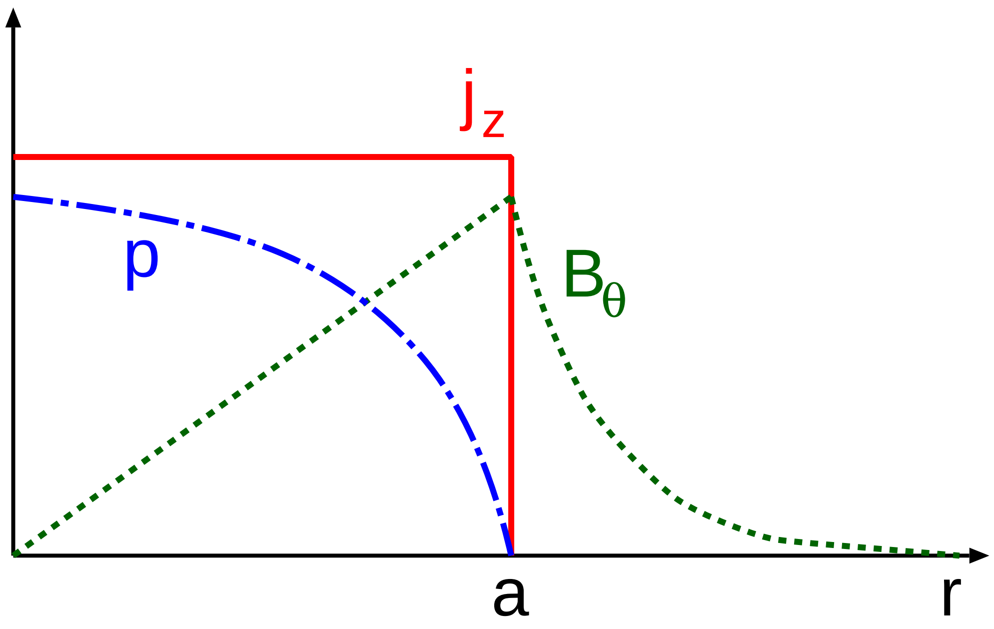
$$B_\theta \;=\; \frac{\mu_0}{r}\int_0^r r' j_z \mathrm{d}r' \;=\; \frac{\mu_0}{r} j_0 \frac{r^2}{2} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi} I_p \frac{r}{a^2}, \qquad (r \leq a)$$

Aussenbereich ($j_z = 0$):

$$B_\theta \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi} I_p \frac{1}{r}, \qquad (r > a)$$

Radiale Kraftbilanz im z-Pinch

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -j_z B_\theta = -\frac{I_p}{\pi a^2}\frac{\mu_0 I_p}{2\pi a^2} r$$



Randbedingung:

$p(a) = 0 \quad (T(a) = 0, n(a) = 0)$:

$$p(r) = \frac{\mu_0 I_p^2}{4\pi^2 a^2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \qquad (r \leq a)$$

und

$$p(r) = 0 \qquad (r > a)$$

Berechne β:

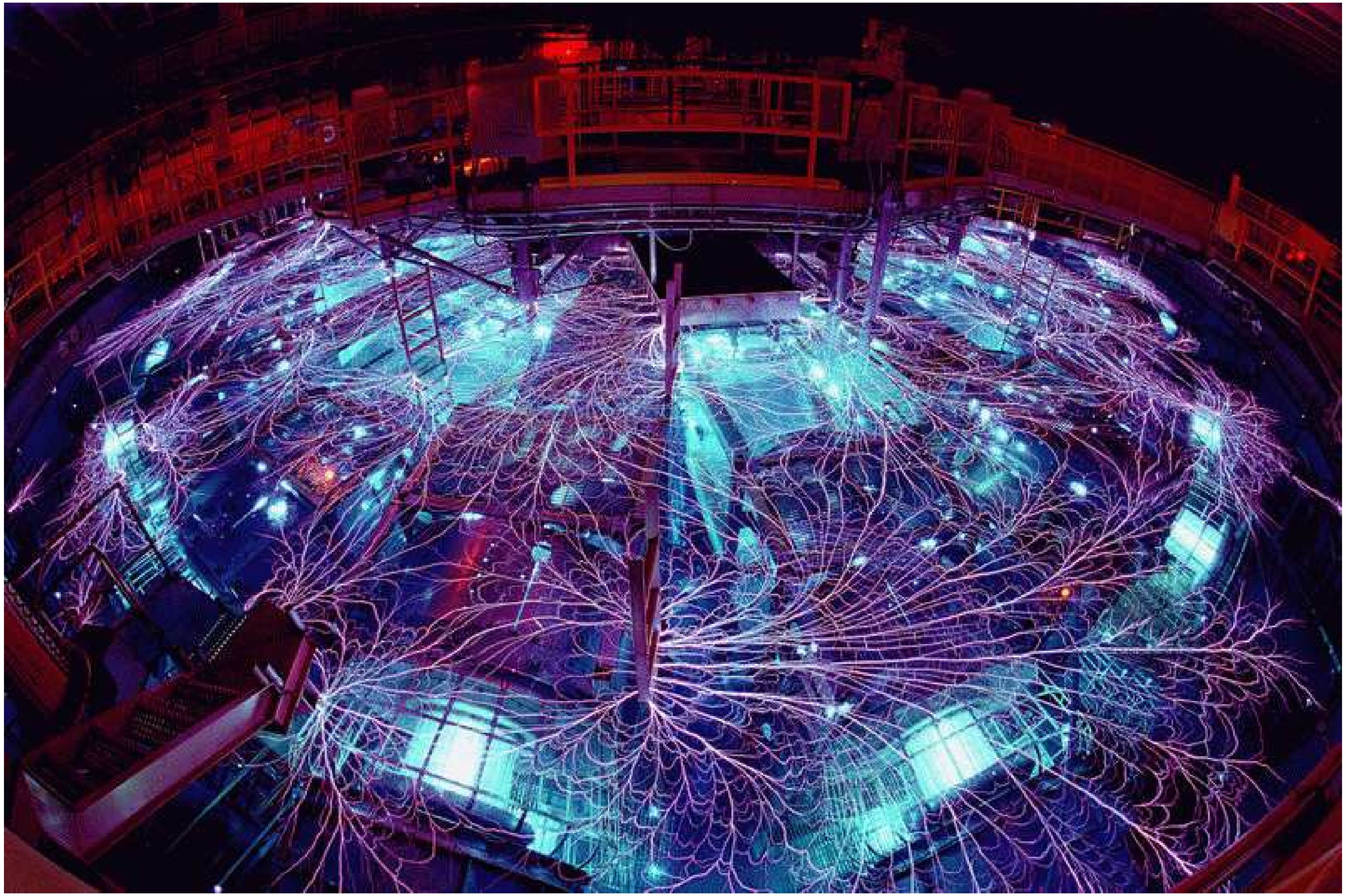
$$\beta = \beta_\theta = \frac{2\mu_0 < p >}{B_\theta^2(a)} = 1$$

(allgemeines Resultat für den $z-$pinch, unabhängig vom Druckprofil)

"Z machine"

Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, U.S.A.

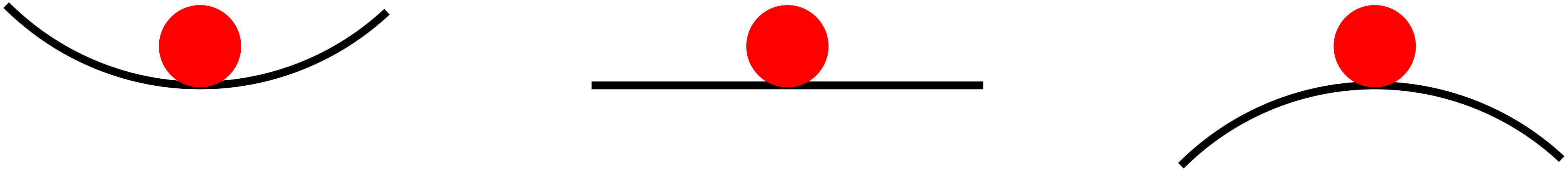
20 MA Wolframdraht-Implosion, starke Röntgen-Lichtquelle



Quelle: `http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Zmachine.jpg`, `http://zpinch.sandia.gov/`

Ist der *z*-Pinch *stabil*?

Kraft-Gleichgewichte können sein:



stabil indifferent labil (instabil)

Potenzielle Energie W.

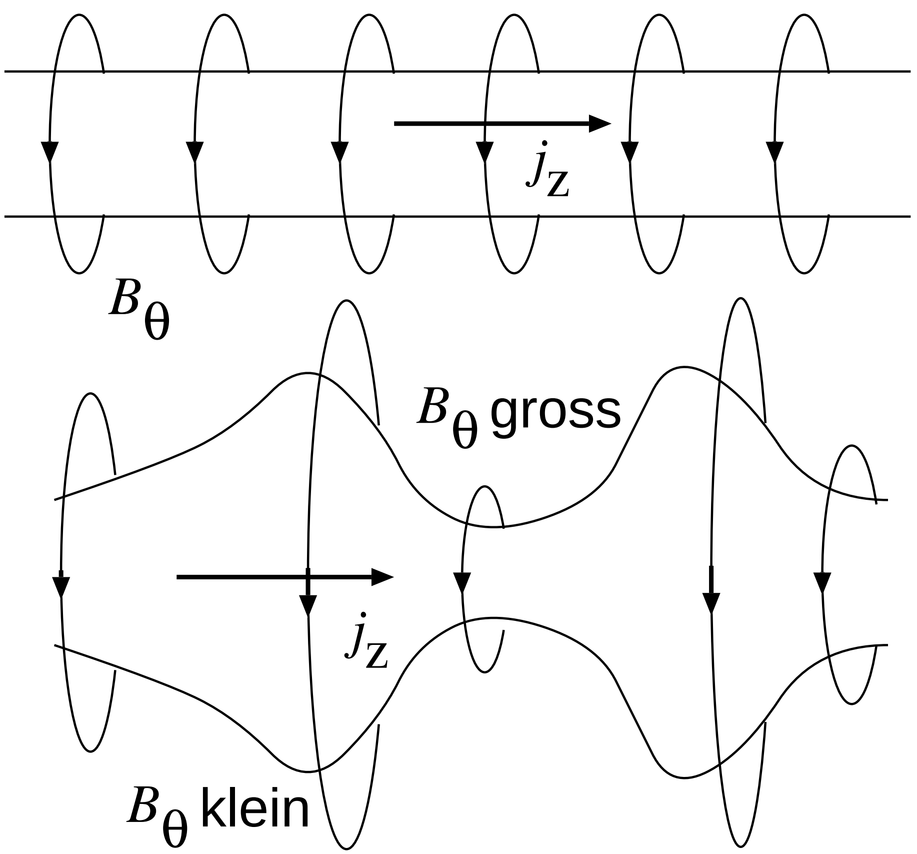
Kraftgleichgewicht: $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\xi = F_{\mathrm{net}} = 0$

Stabilität: $\mathrm{d}^2W/\mathrm{d}\xi^2 > 0$

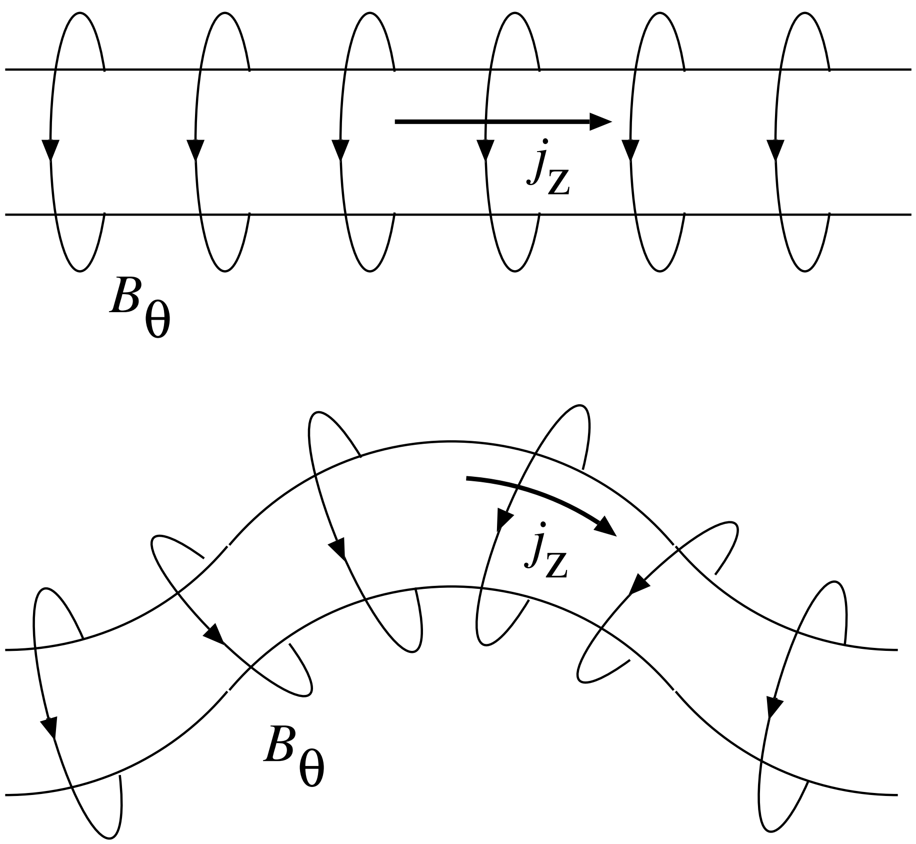
Instabilität: $\mathrm{d}^2W/\mathrm{d}\xi^2 < 0$

Pinch-Instabilität

Sausage (Würstchen-) Instabilität



Kink (Knick-) Instabilität



Ursache: Steigender Magnetfelddruck $B_\theta^2/2\mu_0$ findet keinen Gegendruck

- kinetischer (hydrostatischer) Druck bleibt konstant
- keine weitere rücktreibende Kraft

$\rightarrow$ beschleunigte Störung

Beobachtung der *sausage*-Instabilität

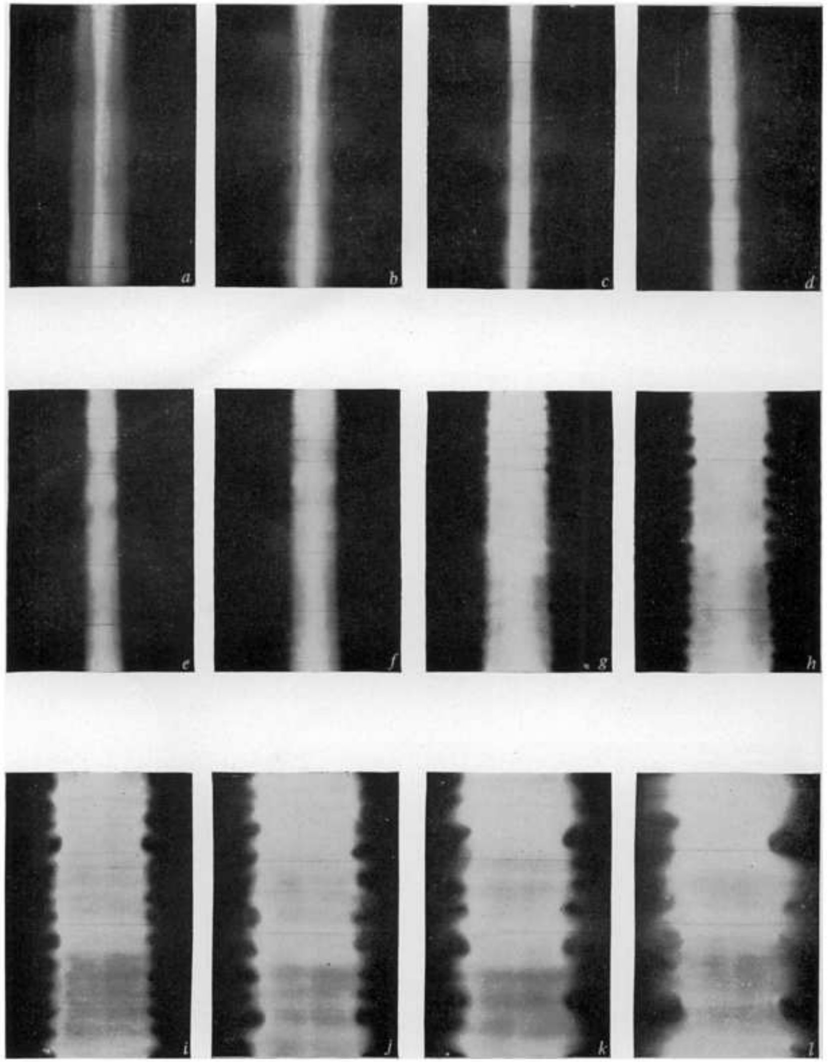


FIGURE 2. Kerr cell photographs (0·4 μs exposure) of a condenser discharge in argon. Circuit capacity 1940 μF; condenser voltage 2·5 kV. Circuit inductance 150 nH; gas pressure. 1000 μ. The discharge tube diameter is equal to the width of the individual frames.

(*a*) t = 18·2 μs	(*b*) t = 19·4 μs	(*c*) t = 21·0 μs	(*d*) t = 21·8 μs
(*e*) t = 22·5 μs	(*f*) t = 23·6 μs	(*g*) t = 24·3 μs	(*h*) t = 26·0 μs
(*i*) t = 27·2 μs	(*j*) t = 29·5 μs	(*k*) t = 31·3 μs	(*l*) t = 34·0 μs

F L Curzon *et al*, Proc. Roy. Soc. A **257** (1960) 386

Schnelle Aufnahmen mit Kerr-Zelle (elektro-optische Polarisationsdrehung) zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren.

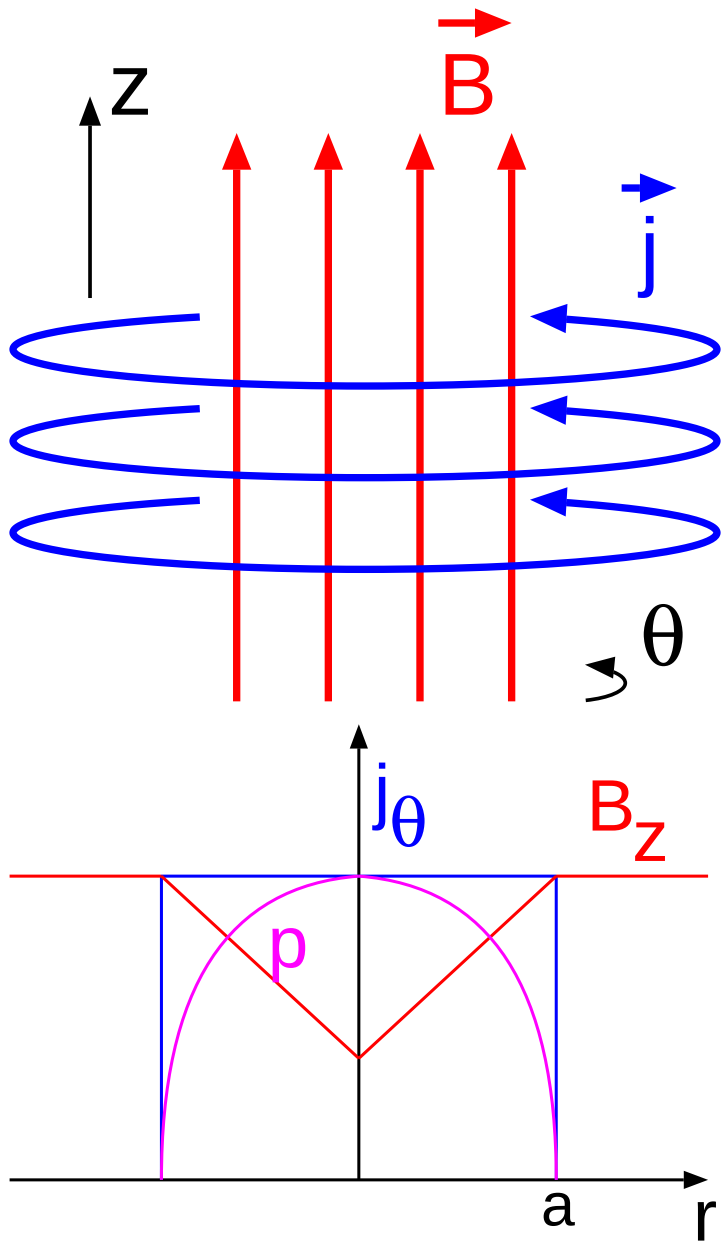
Theta- (θ-) pinch

Rein axiales Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z(r))$,
interner und/oder externer azimuthaler Strom j_θ.
Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0}\right) = 0$$

D.h. $p + B_z^2/2\mu_0 = const. = B_0^2/2\mu_0$
$\rightarrow$ Erfordert Vakuumfeld $B_0 > (2\mu_0 p_{\max})^{1/2}$, d.h.

$$0 \leq \beta \equiv p/(B^2/2\mu_0) \leq 1$$

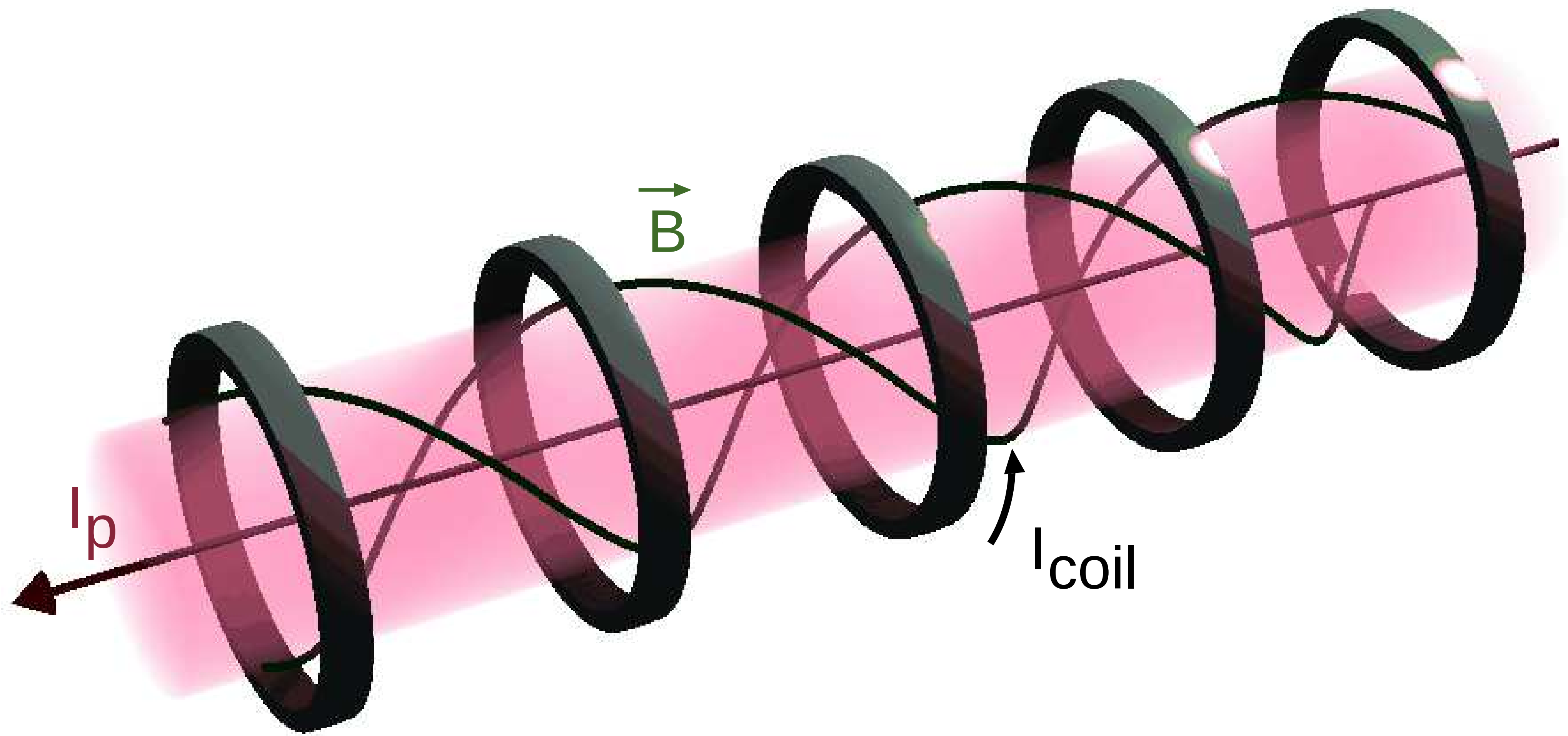


Stromdichte (Ampère'sches Gesetz):

$$j_\theta = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}$$

Der *screw pinch*

$= \; z - pinch \; + $ Zusätzliches axiales Führungsfeld: $\Rightarrow$ Erhöhte Stabilität.



Der *screw pinch*

Verallgemeinerung von z- und θ-pinch: $\vec{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r))$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

Anders geschrieben:

$$p^{*\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta}{\mu_0 r}\left(rB_\theta\right)'$$

Formal gelten Lösungen des z-pinch, jedoch $p \to p^*$ (beinhaltet Axialfelddruck)

Ohne Beweis:

$$\beta_\theta^* = \beta_\theta + \frac{\langle B_z^2\rangle - B_z^2(a)}{B_\theta^2(a)} = 1$$

Im Unterschied zum z-Pinch ist $\beta_\theta \neq 1$ möglich:

- $\beta_\theta > 1$: $\langle B_z^2\rangle < B_z^2(a)$ B_z steigt nach außen: Diamagnetismus
- $\beta_\theta < 1$: $\langle B_z^2\rangle > B_z^2(a)$ B_z fällt nach außen ab: Paramagnetismus

Zusammenfassung

- Stationäre Plasmakonfigurationen ergeben sich durch Kraftgleichgewicht zwischen Plasmadruck und Magnetfelddruck (Expansion) und Magnetfeldspannung (Kompression)

- Im "kraftfreien" Gleichgewicht ist der Plasmadruck vernachlässigber klein und Druck- und Zugspannungen des Magnetfelds alleine gleichen einander aus. Die Magnetfeld-Topologie ist zwei- oder mehrfach zusammenhängend - "Flußröhren". I.a. sind die Magnetfeldlinien mit unterschiedlicher Steigung je nach Radius verschraubt.

- Im Kraftgleichgewicht mit endlichen Druck ($\nabla p \neq 0$) liegen $\vec{j}$ und $\vec{B}$ ebenfalls auf Flußröhren, Flächen konstanten Drucks.

- Einfache (1-D) Grenzfälle mit Zylindersymmetrie sind:
  – der z-Pinch ($B_z = 0,\ \beta_\theta = 1,$ universell instabil),
  – der θ-Pinch ($B_\theta = 0,\ \beta \leq 1$) und
  – der screw pinch ($B_\theta \neq 0,\ B_z \neq 0$)