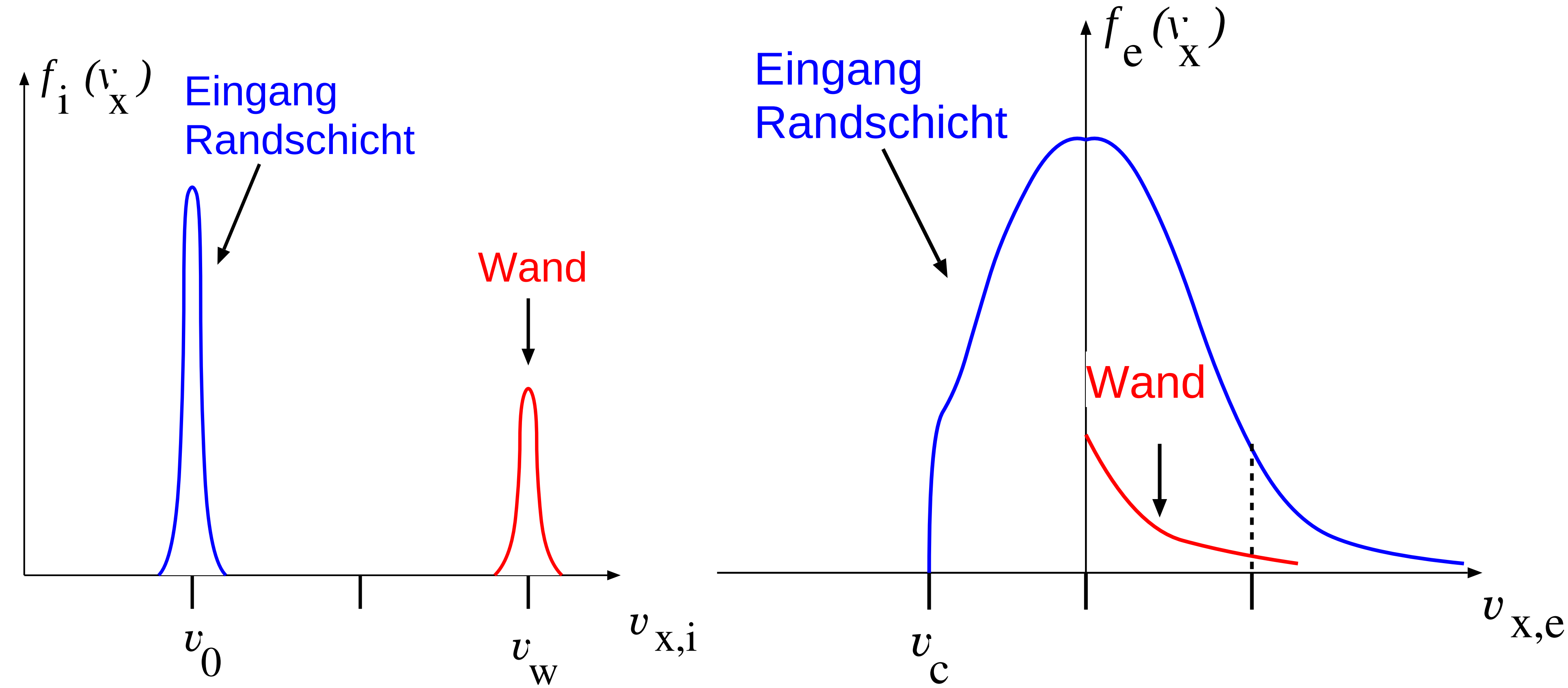
Die Plasma-Randschicht (2)



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Inhalt

- 1.Teil: Berechnung des Teilchenflusses durch die Randschicht

  $\Gamma_i = n v_0 = n c_s$ (Bohm-Kriterium)

  Schallgeschwindigkeit: $c_s = (k_B T_e + \gamma k_B T_i)^{1/2}\, m_i^{-1/2}$

  Neutralität: $\Gamma_{e,w} = \Gamma_{i,w}$

  Kontinuität (Ionen): $\Gamma_{i,s} = \Gamma_{i,w}$

- 2. Teil (heute): Wärmefluß auf die Wand

Wärmefluss der Ionen

Die Ionen haben eine um den Betrag $u_{\mathrm{x,i}}$ (Flüssigkeitsgeschwindigkeit bzw. mittlere Geschwindigkeit) verschobene Maxwell-Verteilung:

$$f_i(\vec{v}, u_{\mathrm{x,i}}) = n_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\beta_i \left((v_x - u_{\mathrm{x,i}})^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right]$$

mit $\beta_i \equiv m_i/(2k_B T_i)$.

Der Teilchenfluss in x-Richtung war (letzte Vorlesung):

$$\Gamma_{\mathrm{i,x}} = n_i(x) < v_x >= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x \; f_i(\vec{v}, u_{\mathrm{x,i}})\; \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = n_i(x) u_{\mathrm{x,i}}(x)$$

Der Wärmefluss in x-Richtung ist:

$$q_{\mathrm{x,i}} = \frac{m_i n_i}{2} < v_x v^2 >= \frac{m_i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x \; \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) f_i(\vec{v}, u_{\mathrm{x,i}})\; \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

Nach Integration über y- und z-Richtung (Formeln s. Anhang):

$$q_{\mathrm{x,i}} = \frac{m_i n_i}{2} \frac{\beta_i^{3/2}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v_x^3 \frac{\pi}{\beta_i} + v_x \frac{\pi}{\beta_i^2}\right) \exp\left[-\beta_i \left(v_x - u_{\mathrm{x,i}}\right)^2\right]\; \mathrm{d}v_x$$

Wärmefluss der Ionen

Für die Integration über v_x ersetze $v_x - u_{\mathrm{x,i}} \equiv \hat{v}$. Die Integrationsgrenzen bleiben weiterhin im Unendlichen.

$$q_{\mathrm{x,i}} = \frac{m_i n_i}{2} \frac{\beta_i^{3/2}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\hat{v} + u_{\mathrm{x,i}})^3 \frac{\pi}{\beta_i} + (\hat{v} + u_{\mathrm{x,i}}) \frac{\pi}{\beta_i^2} \right) \exp\left[-\beta_i \hat{v}^2 \right] \, \mathrm{d}\hat{v}$$

wobei $(\hat{v} + u_{\mathrm{x,i}})^3 = \hat{v}^3 + 3\hat{v}^2 u_{\mathrm{x,i}} + 3\hat{v} u_{\mathrm{x,i}}^2 + u_{\mathrm{x,i}}^3$.
Die ungeraden Terme in $\hat{v}$ verschwinden bei der Integration und es bleibt:

$$q_{\mathrm{x,i}} = \frac{m_i n_i}{2} \frac{\beta_i^{3/2}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((3\,\hat{v}^2 u_{\mathrm{x,i}} + u_{\mathrm{x,i}}^3) \frac{\pi}{\beta_i} + u_{\mathrm{x,i}} \frac{\pi}{\beta_i^2} \right) \exp\left[-\beta_i \hat{v}^2 \right] \, \mathrm{d}\hat{v}$$

Integral über $\hat{v}$ mit den Formeln im Anhang:

$$q_{\mathrm{x,i}} = \frac{m_i n_i}{2} \frac{\beta_i^{3/2}}{\pi^{3/2}} u_{x,i} \left(\frac{3\pi^{3/2}}{2\beta_i^{5/2}} + \frac{\pi^{3/2}}{\beta_i^{3/2}} u_{\mathrm{x,i}}^2 + \frac{\pi^{3/2}}{\beta_i^{5/2}} \right) = \underbrace{n_i u_{x,i}}_{\Gamma_{\mathrm{x,i}}} \left(\frac{5}{2} k_B T_i + \frac{1}{2} m_i u_{\mathrm{x,i}}^2 \right)$$

Die mit dem Ionenfluss konvektierte Wärme ist $\frac{5}{2} k_B T_i$ mal der Teilchen-Strömung,
und nicht etwa $\frac{3}{2} k_B T_i$!
Hinzu kommt die kinetische Energie der Strömung, $\frac{1}{2} m_i u_{\mathrm{x,i}}^2$, die zur Wand hin anwächst!

Teilchenfluss der Elektronen an der Wand

Elektronen, die die Wand erreichen, rekombinieren dort. Wenn die Sekundäremission durch einströmende Ionen vernachlässigbar ist, gibt es an der Wand keine ins Plasma rückströmende Elektronen.

Elektronen-Verteilungsfunktion an der Wand ("halbe" Maxwell-Verteilung):

$$f_e(\vec{v}) = n_{e,w} \left(\frac{\beta_e}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\beta_e(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right] \quad (v_x \geq 0); \qquad f_e(\vec{v}) = 0 \quad (v_x < 0)$$

mit $\beta_e \equiv m_e/(2k_B T_e)$.
Elektronen-Teilchenfluss auf die Wand (mit den Formeln im Anhang):

$$\Gamma_{e,w} = n_{\mathrm{e,w}} < v_x >= n_{\mathrm{e,w}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{v_x=0}^{+\infty} v_x f(\vec{v}) \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = n_{\mathrm{e,w}} \left(\frac{\beta_e^{3/2}}{\pi^{3/2}}\right) \left(\frac{\pi}{\beta}\right) \left(\frac{1}{2\beta}\right)$$

$$\Gamma_{e,w} \;=\; n_{\mathrm{e,w}} \, \frac{1}{2\pi^{1/2}\beta^{1/2}}$$

Wärmefluss der Elektronen

Wie zuvor,

$$q_{\mathrm{e,w}} = \frac{m_e n_{\mathrm{e,w}}}{2} < v_x v^2 >= \frac{m_e n_{\mathrm{e,w}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{v_x=0}^{+\infty} v_x \, \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) f_e(\vec{v}) \, \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

Nach Integration in y- und z-Richtung

$$q_{\mathrm{e,w}} = \frac{m_e n_{\mathrm{e,w}}}{2} \frac{\beta_e^{3/2}}{\pi^{3/2}} \int_{v_x=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{\beta_e} v_x^3 + \frac{\pi}{\beta_e^2} v_x \right) \exp\left[-\beta_e v_x^2\right] \, \mathrm{d}v_x$$

Für die “halb-Maxwell’sche” Elektronenverteilung zählen beide ungeraden Terme in v_x:

$$q_{\mathrm{e,w}} \; = \; \frac{m_e n_{\mathrm{e,w}}}{2} \frac{\beta_e^{3/2}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2\beta_e^3} + \frac{\pi}{2\beta_e^3} \right) \; = \; n_{\mathrm{e,w}} \frac{m_e}{2\pi^{1/2} \beta_e^{3/2}} \; = \; \frac{m_e}{\beta_e} \, n_{\mathrm{e,w}} \, \frac{1}{2\pi^{1/2} \beta_e^{1/2}} \; = \; 2k_B T_e \, \Gamma_{\mathrm{e,w}}$$

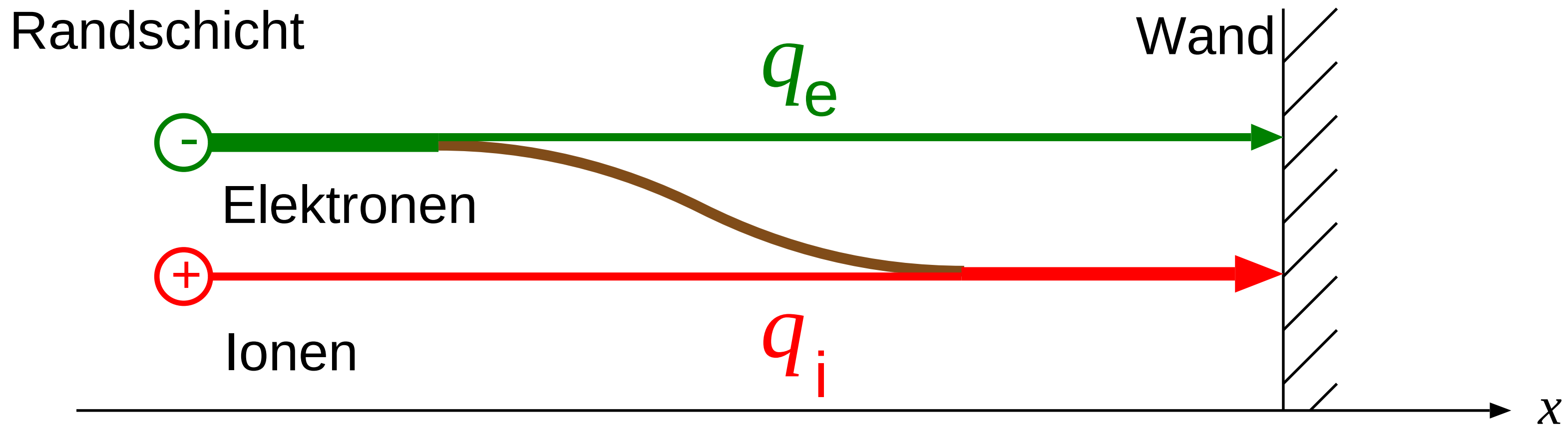
An der Wand: $\Gamma_{\mathrm{e,w}} = \Gamma_{\mathrm{x,i}} = n \, c_s$ (Neutralität)

$$q_{\mathrm{e,w}} = 2k_B T_e \, n \, c_s$$

Am Randschichteingang: Die zur Wand gelangenden Elektronen haben eine um $|eU_w|$ höhere kinetische Energie. Die reflektierten Elektronen tragen zum Wärmefluss nicht bei, so dass:

$$q_{\mathrm{e,s}} \; = \; q_{\mathrm{e,w}} + |eU_w| \, \Gamma_{\mathrm{e,w}} \; = \; \left(2k_B T_e + |eU_w|\right) \, n \, c_s$$

Energieübertrag Elektronen → Ionen



Die elektrostatische Randschicht bewirkt einen Übertrag des Wärmeflusses von den Elektronen zu den Ionen:

Wärmefluss	Randschichteingang	Wand
Elektronen	$(2k_BT_e + \lvert eU_w\rvert)\, nc_s$	$2k_BT_e\, nc_s$
Ionen	$(\frac{5}{2}k_BT_i + \frac{1}{2}n_im_ic_s^2)\, nc_s$	$(\frac{5}{2}k_BT_i + \frac{1}{2}n_im_ic_s^2 + \lvert eU_w\rvert)\, nc_s$

Da $|eU_w| \geq 3k_BT_e > 2k_BT_e$, überwiegt an der Wand stets und weitaus der Ionenwärmefluss.

Diese Wärmeleistung wird aber zu einem großen Teil von den Elektronen im Plasma erbracht!

Der Randschicht-Übertragungsfaktor

Def. γ_s so dass $q = q_e + q_i = \gamma_s k_B T_e n c_s$ (nicht verwechseln mit Adiabatenkoeffizient γ)

Naiv könnte man meinen: $q = \frac{3}{2}(k_B T_e + k_B T_i) n c_s$, so dass $\gamma_s = \frac{3}{2} \dots 3$ (für $T_i/T_e = 0 \dots 1$)

In Wirklichkeit ist die Gesamtleistung:

$$q = \left(2k_B T_e + |eU_w| + \frac{5}{2}k_B T_i + \frac{1}{2}n_i m_i c_s^2\right) n c_s$$

$$= \left(\frac{5}{2}k_B T_e + |eU_w| + \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\gamma\right] k_B T_i\right) n c_s$$

Der Randschicht-Übertragungsfaktor γ_s (engl. *sheath transmission factor*) beträgt

— mindestens (Wasserstoff $|eU_w| \sim 3k_B T_e$, kalte Ionen $T_i = 0$): $\gamma_s \sim 5.5$

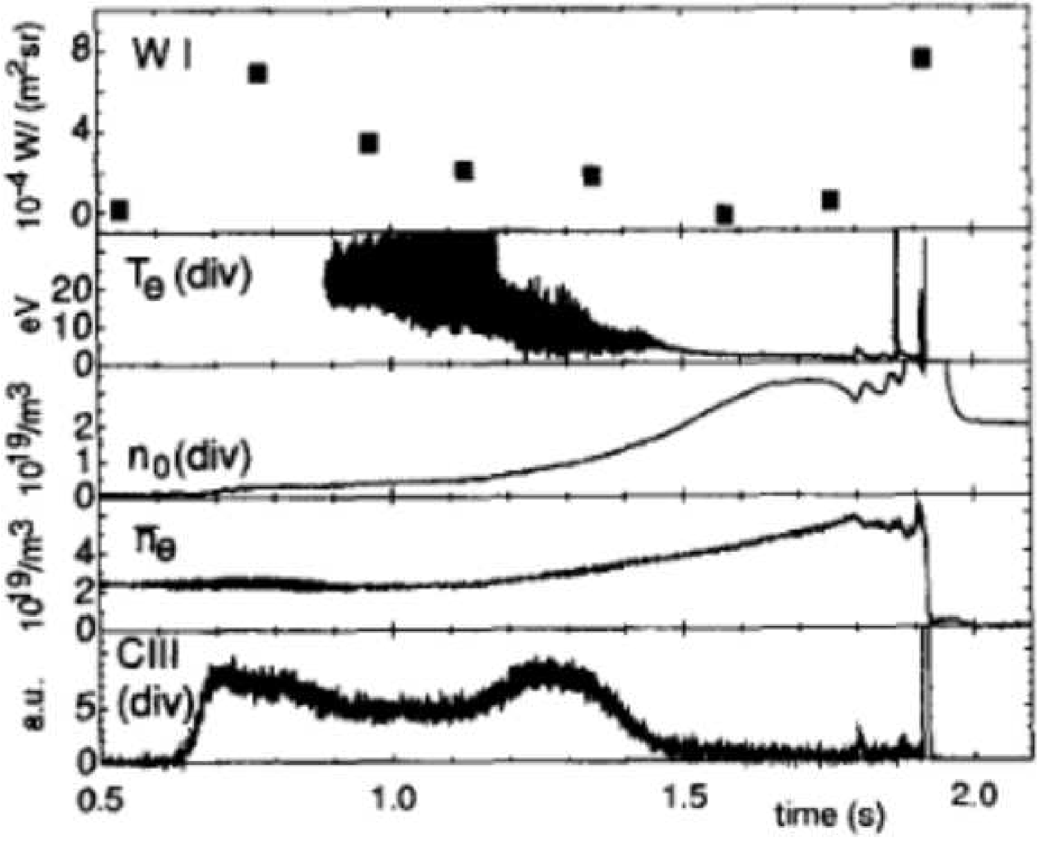
— für $T_e = T_i$ (ebenfalls Wasserstoff, $\gamma = 5/3$): $\gamma_s \sim 8 + \frac{\gamma}{2} \sim 8.8$

Für manche Anwendungen ist ein solch effektiver Energieübertrag in die Ionen günstig, z.B. Ionenätzen, wobei mit schweren Ionen sowohl ein hohes γ_s (wg. U_w) als auch ein effektiver Impulsübertrag auf das Target verbunden ist.

Im Fusionsplasma jedoch erhöht dies die Erosion der Wand und ist unerwünscht. Die beste Lösung ist es, T_e am Randschichteingang möglichst klein zu halten.

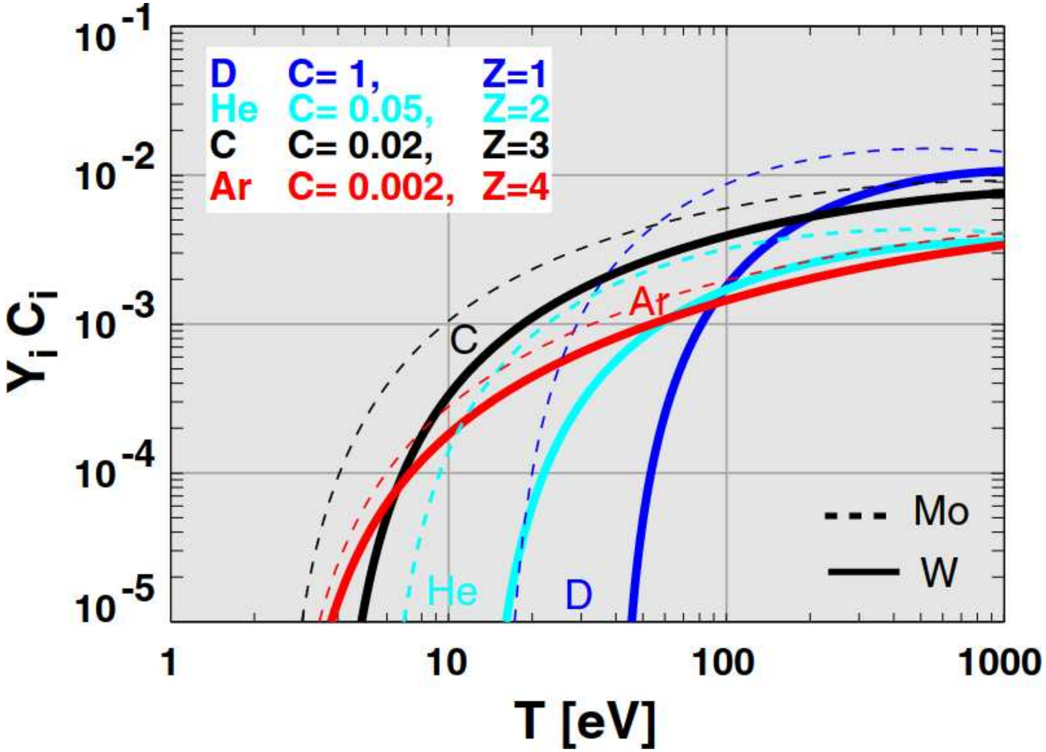
Erosion von der Wand

Beobachtung in ASDEX Upgrade:
Bei sinkender T_e am Randschicht-Eingang sinkt der Zufluss von Wolfram ins Plasma
(gemessen durch neutrales Wolfram, WI)



R. Neu, Journal of Nuclear Materials **241-243** (1997) 678

Erosionsausbeute von Wolfram (W) und Molybdän (Mo) als Funktion von $T = T_e = T_i$ für verschiedene Verunreinigungsspezies
(die bei kleinem T_e dominieren!)



A. Kallenbach, Plasma Phys. Control. Fusion **47** (2005) B207

Zusammenfassung: Wärmetransport in der Randschicht

- In der stoßfreien Plasmarandschicht findet der Wärmetransport durch Konvektion der durch die Elektronen und Ionen getragenen Bewegungsenergie statt, d.h. der Wärmefluss ist an den Teilchenfluss gekoppelt. (Im Unterschied zur Wärmeleitung durch Stöße)
- Ionen werden in der Plasmarandschicht durch das elektrische Potenzial beschleunigt. Dadurch nehmen sie kinetische Energie auf, die von den Elektronen eingetragen wird.
- Insgesamt verstärkt die elektrostatische Randschicht den Wärmefluss, und dieser wird vornehmlich durch die Ionen auf die Wand gebracht.

Anhang: Formelsammlung

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi^{1/2}}{2\beta^{1/2}}$$

$$\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\beta}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi^{1/2}}{4\beta^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\beta x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\beta^2}$$