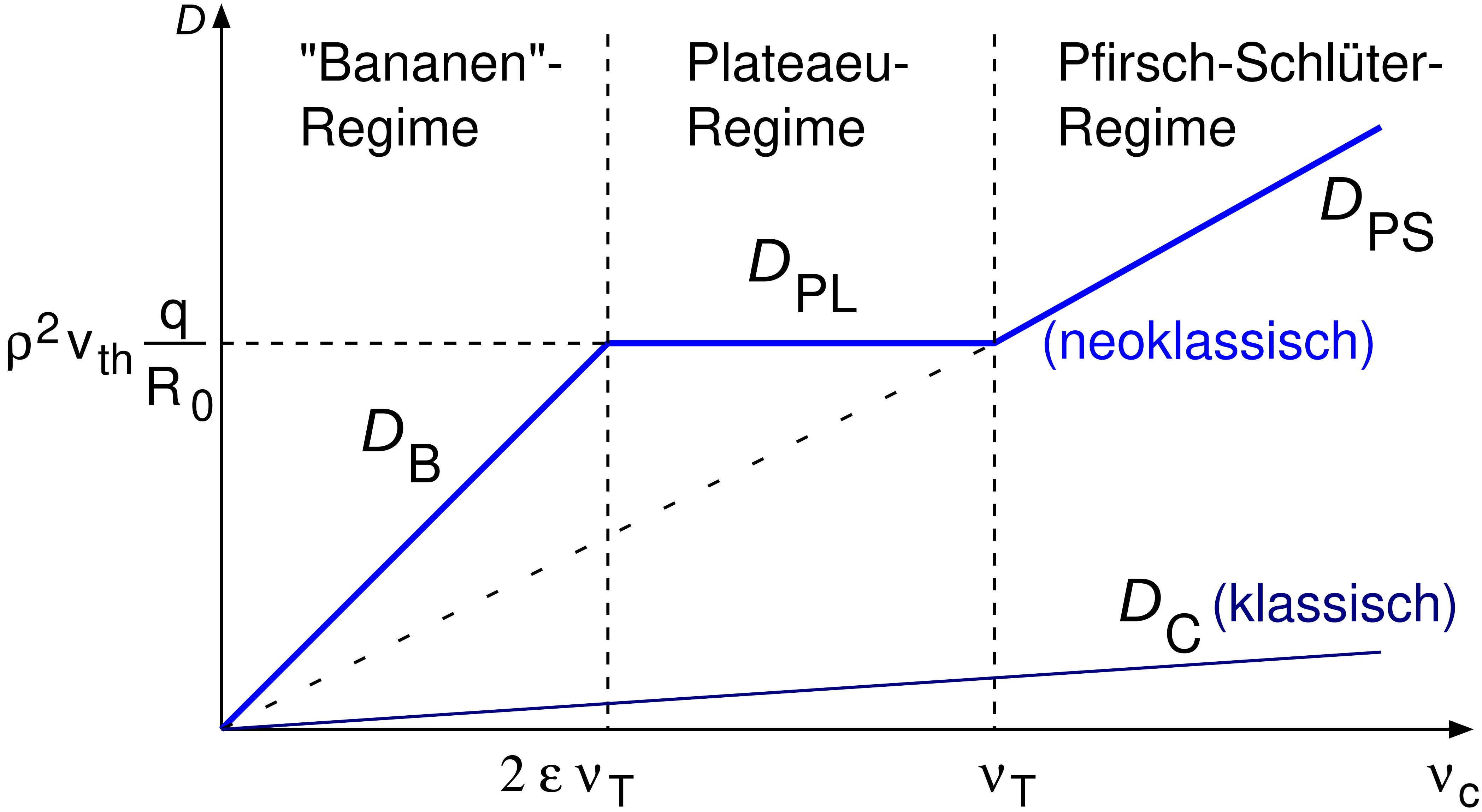
“Neoklassischer” Transport



Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

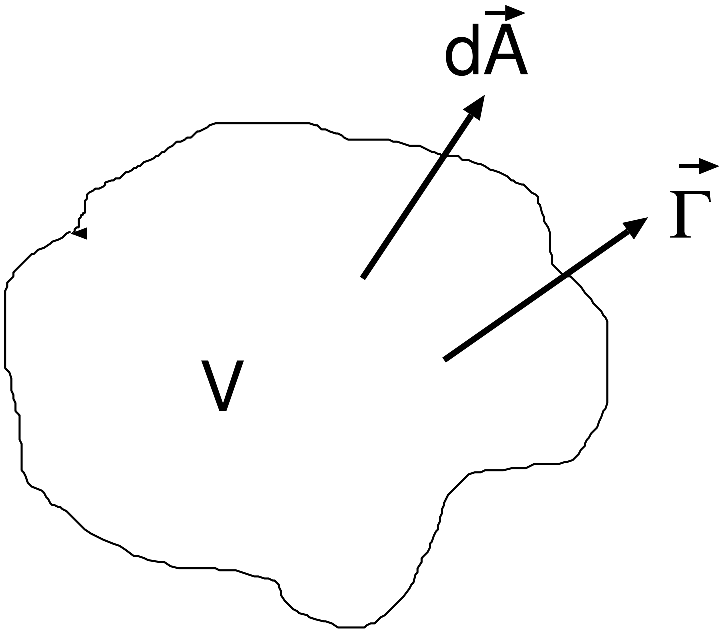
“Neoklassischer” Transport

- Was ist Diffusion?
- Diffusion $\perp B$ im *homogenen* Magnetfeld
  - Teilchenbild
  - Flüssigkeitsbild
- Diffusion $\perp B$ im *inhomogenen* Magnetfeld
  - “Pfirsch-Schlüter”-Transport
  - Transport durch gefangene Teilchen (“Bananen”-Transport)

Teilchentransport

Teilchenzahl N im Volumen V,
Teilchenflußdichte $\vec{\Gamma}$ durch Oberfläche A
(Normalenvektor $\vec{A}$)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\underbrace{\int_A \vec{\Gamma}\,\mathrm{d}\vec{A}}_{Abfluss} + \underbrace{\int_V S\,\mathrm{d}V}_{Volumenquellen}$$



Betrachte Teilchendichte n, wobei $N = \int n\,\mathrm{d}V$
Mit Gauss'schem Satz :

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} = -\int_V \nabla \cdot \vec{\Gamma}\mathrm{d}V + \int_V S\mathrm{d}V$$

Das gilt für jedes (frei wählbare) Volumen V,
so daß die Integranden gleich sind.
$\rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma} = S$$

Populärer Ansatz für $\vec{\Gamma}$:

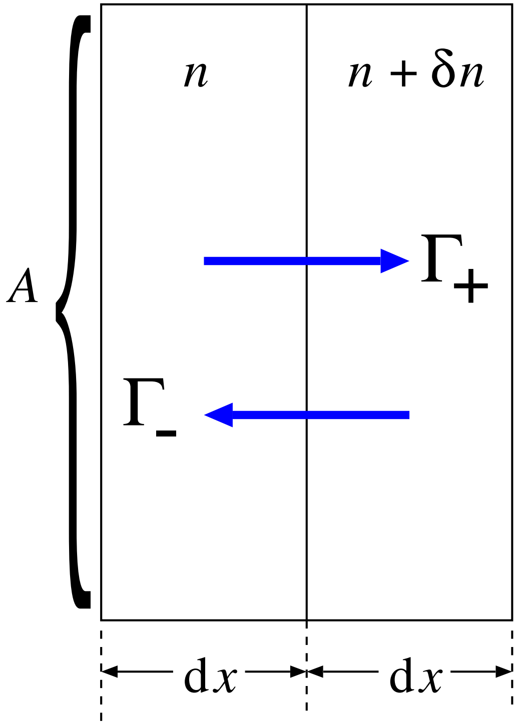
$$\vec{\Gamma} = \underbrace{-D\nabla n}_{Diffusion} + \underbrace{n\vec{v}}_{Teilchendrift}$$

Transportkoeffizienten (noch zu bestimmen):
D: Diffusionskonstante, Diffusivität
$\vec{v}$: Driftgeschwindigkeit

Diffusion (Teilchenbild)

“Random walk”

Ein Teilchen macht pro Zeitschritt dt einen Schritt der Weite dx. Dieser geht mit 50% Wahrscheinlichkeit nach links und mit 50% Wahrscheinlichkeit nach rechts.



Betrachte *Teilchenensemble* in zwei benachbarten Volumina $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}x$.

$$\Gamma_+ = \frac{1}{2}\frac{N}{A\,\mathrm{d}t} = \frac{nA\,\mathrm{d}x}{A\,\mathrm{d}t}$$

$$\Gamma_- = \frac{1}{2}\frac{(n+\delta n)\,A\,\mathrm{d}x}{A\,\mathrm{d}t}$$

Nettofluss:

$$\Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\delta n = -\underbrace{\frac{(\mathrm{d}x)^2}{2\,\mathrm{d}t}}_{D}\;\underbrace{\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}}_{\nabla n}$$

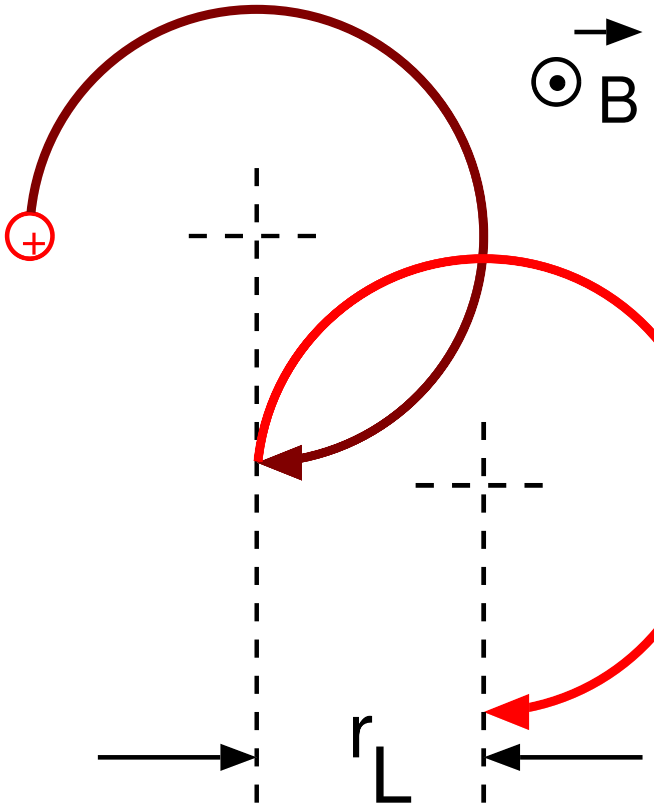
$\Rightarrow$ Diffusivität

$$D = \frac{(\mathrm{d}x)^2}{2\,\mathrm{d}t} = \frac{(\text{Schrittweite})^2}{2\times(\text{Schrittzeit})}$$

Diffusion $\perp B$ (Teilchenbild, $\vec{B} = \text{const}$)

Bei jedem 90°-Stoß ($\perp \vec{B}$) eines Teilchens wird das Gyrozentrum um $\sqrt{2}|r_L|$ versetzt.

In einer Raumrichtung ($\| \nabla n$) entspricht dies im Mittel einem Versatz von $|r_L|$.



Stoßweite: $\Delta x = r_L$ (Larmor-Radius)
Stoßzeit: $\Delta t = 1/\nu_c$ (inverse 90°-Stoßrate)

$\Rightarrow$ **"Klassischer" Diffusionskoeffizient** $\perp B$

$$D_c = \frac{1}{2} r_L^2 \nu_c$$

Driftgeschwindigkeit ($\perp \vec{E}, \perp \vec{B}$)

$$\vec{v} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Diffusion $\perp B$ (Flüssigkeitsbild)

Kraftgleichung (je Spezies):

$$mn\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = qn\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right) - \nabla p - mn\nu_c\vec{u}$$

(a) Koordinatenwahl $\vec{B}\|\vec{e}_z, \nabla n, \vec{E}\|\vec{e}_x$ (o.B.d.A.)

(b) Stationarität: $\partial u/\partial t = 0$

(c) dazu keine Advektion: $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = 0$

(d) Vereinfachend: $T = \text{const} \Rightarrow \nabla p = k_B T \nabla n$

Nach u-Komponenten auflösen.

Benutze: $\omega_c = \frac{qB}{m}, \quad \tau \equiv 1/\nu_c$

x-Richtung ($\|\nabla n$):

$$u_x = \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2}\left(\frac{qE_x}{m\nu_c} - \frac{k_B T}{m\nu_c}\frac{\nabla n}{n}\right)$$

y-Richtung ($\perp \nabla n$):

$$u_y = \omega_c\tau\, u_x = \frac{\omega_c^2\tau^2}{1+\omega_c^2\tau^2}\left(\frac{E_x}{B} - \frac{k_B T}{qB}\frac{\nabla n}{n}\right)$$

Grenzfälle:

1. **Stoßfrei**, $\nu_c = 0$

Gyro-Orbit wird ungehindert durchlaufen

$\Rightarrow u_x = 0, D_\perp = 0$

keine Diffusion entlang des Dichtegradienten,

aber $u_y \neq 0$ ($E \times B$- und diamagnetische Driften)

2. **Stoßdominiert**, $\omega_c\tau = 0$

$\Rightarrow u_y = 0$, kein Transport $\perp \nabla n, \perp B$

Transport in x-Richtung wie ohne Magnetfeld

3. **Schwach stoßbehaftet**, $\omega_c\tau \gg 1, \nu_c > 0$

Viele Gyro-Orbits zwischen Stößen

$$u_x = \frac{\nu_c}{\omega_c^2}\frac{qE_x}{m} - \underbrace{\frac{\nu_c}{\omega_c^2}\frac{k_B T}{m}}_{D}\frac{\nabla n}{n}, \quad D \sim \frac{v_{\mathrm{th}}^2}{2\omega_c^2}\nu_c \sim \frac{1}{2}r_L^2\nu_c$$

“Neoklassischer” Transport

Frage: Wie verändert die Krümmungs- und grad-B Drift im Torus den Teilchentransport senkrecht zu den magnetischen Flächen (radialen Transport)?

— Die i.w. senkrechte Drift $v_D = (3/2)mv_{\mathrm{th}}^2/(eR_0B)$ hat eine Komponente senkrecht $\vec{B}$, aber auf lange Zeiten gesehen bewirkt sie (ohne Teilchenstöße) keinen radialen Transport, da die Driftbahnen im axisymmetrischen Torus in sich geschlossen sind.

— Die Anwesenheit von Stößen ändert das Bild: Durch die stochastische Ablenkung aus der Bahnkurve verlieren die Teilchen ihre “Information” über die Anfangsparameter der Bewegung (kinetische Energie und magnetisches Moment).

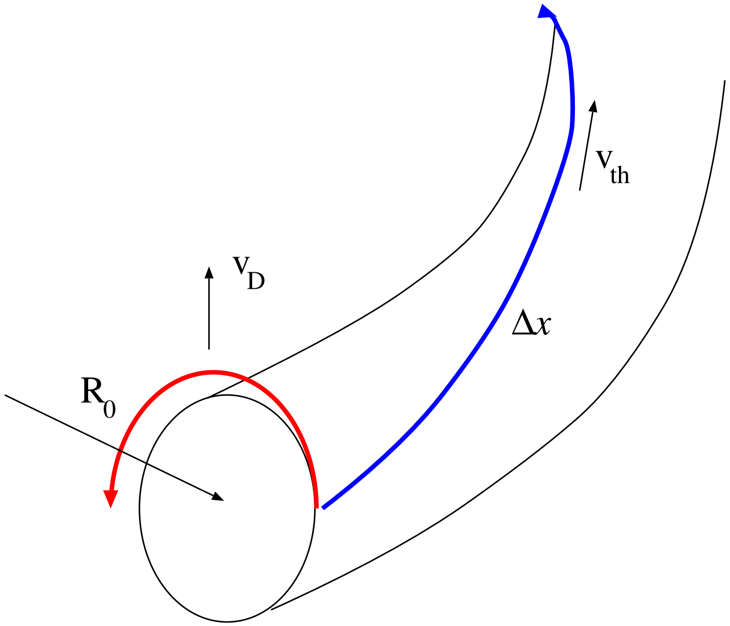
— Der radiale Versatz, und damit die Diffusivität hängt vom Typ der Bahnkurve ab:

Max. Auslenkung der Teilchenbahn $\perp \vec{B}$ q: Sicherheitsfaktor ($q \sim rB/R_0B_\theta$)

$B = const$	$r_L = v_{th}/\omega_c$		(Larmor-Radius)
Umlaufende Teilchen	$\Delta x_{\mathrm{uml}} = 2\frac{v_D}{v_\parallel}\frac{B}{B_\theta}r$	$\sim 3\,q\,r_L$	
Gefangene Teilchen	$\Delta x_{\mathrm{gef}} = 4\frac{v_D}{v}\frac{B}{B_\theta}\sqrt{R_0(r-x^*)}$	$\sim 6\,q\,r_L/\sqrt{\varepsilon}$	bei gleichem $v_\parallel/v_\perp$
Tief gefangene T.		$\sim 3\,q\,r_L/\sqrt{\varepsilon}$	bei $v_\parallel = 0$

Pfirsch-Schlüter-Transport

Betrachte Bewegung der Gyrozentren entlang Feldlinien, mit überlagerter vertikaler Drift.



Bekannt: Diffusivität $\|\vec{B}$

$$\Rightarrow D_{\|} = \frac{1}{2}\left(\Delta x_{\|}\right)^2 \nu_c = \frac{v_{\text{th}}^2}{2\nu_c}$$

mit $\Delta x_{\|} = v_{\text{th}}/\nu_c$ mittlere freie Weglänge.

Gesucht: Diffusivität $\perp \vec{B}$

Betrachte Teilchen, die gerade den maximalen Versatz schaffen:

$\| B$: $\Delta x_{\|} = L$ (Verbindungslänge)

Verbindungslänge für einen Umlauf entlang B:

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \frac{B}{B_\theta} r\mathrm{d}r \sim \frac{1}{2\pi}\int \frac{B_\phi}{B_\theta} r\mathrm{d}r = qR_0$$

wobei hier, wie im Tokamak, $B_\phi \gg B_\theta$ angenommen wurde.

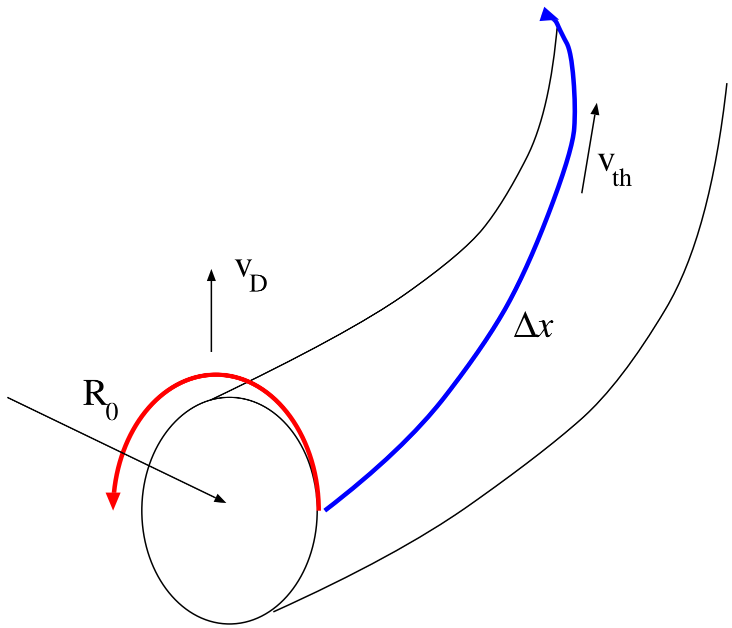
Die Größe q ist (ab jetzt) der *Sicherheitsfaktor*:

$$q = \frac{r}{R_0}\frac{B_\phi}{B_\theta}, \quad (\varepsilon \ll 1)$$

(Die Teilchen-Ladung heißt ab jetzt $\pm e$)

Pfirsch-Schlüter-Transport

Betrachte Bewegung der Gyrozentren entlang Feldlinien, mit überlagerter vertikaler Drift.



Bekannt: Diffusivität $\|\vec{B}$

$$\Rightarrow D_{\|} = \frac{1}{2}\left(\Delta x_{\|}\right)^2 \nu_c = \frac{v_{\text{th}}^2}{2\nu_c}$$

mit $\Delta x_{\|} = v_{\text{th}}/\nu_c$ mittlere freie Weglänge.

Gesucht: Diffusivität $\perp \vec{B}$

Betrachte Teilchen, die gerade den maximalen Versatz schaffen:

$\| B$: $\Delta x_{\|} = qR_0$ (Verbindungslänge)

$\perp B$: $\Delta x_{\perp} = \Delta t v_D$ (radiale Drift zwischen Stößen)

Stoßzeit = Umlaufzeit:

$$\Delta t = \frac{(\Delta x_{\|})^2}{2D_{\|}} = q^2 R_0^2 \frac{\nu_c}{v_{\text{th}}^2}$$

Damit ist die Diffusivität $\perp \vec{B}$:

$$D_{\text{PS}} = \frac{v_D^2 \tau^2}{2\Delta t} = \frac{9}{8}\frac{r_L^2 v_{\text{th}}^2}{R_0^2} q^2 R_0^2 \frac{\nu_c}{2 v_{\text{th}}^2} \approx \frac{1}{2} r_L^2 q^2 \nu_c$$

Dies ist um den Faktor $q^2 \sim (rB)^2/(R_0 B_\theta)^2$ höher als die klassische Diffusivität D_c !

(Plasmarand Tokamaks: $q^2 \sim (3-5)^2$)

Besonderheiten gefangener ("Bananen"-) Teilchen

- Der Bahnversatz ist um den Faktor $\sim (1\dots 2)/\sqrt{\varepsilon}$ höher als für umlaufende Teilchen, solange die gefangenen Teilchen ihre Bananenbahn durchlaufen können.
- Die effektive Stoßfrequenz ν_{eff} ist um den Faktor $1/(2\varepsilon)$ höher als für umlaufende Teilchen
- Nur die gefangenen Teilchen (Anteil $f_{\text{gef}} = \sqrt{2\varepsilon}$) tragen zum "Bananen"-Transport bei.

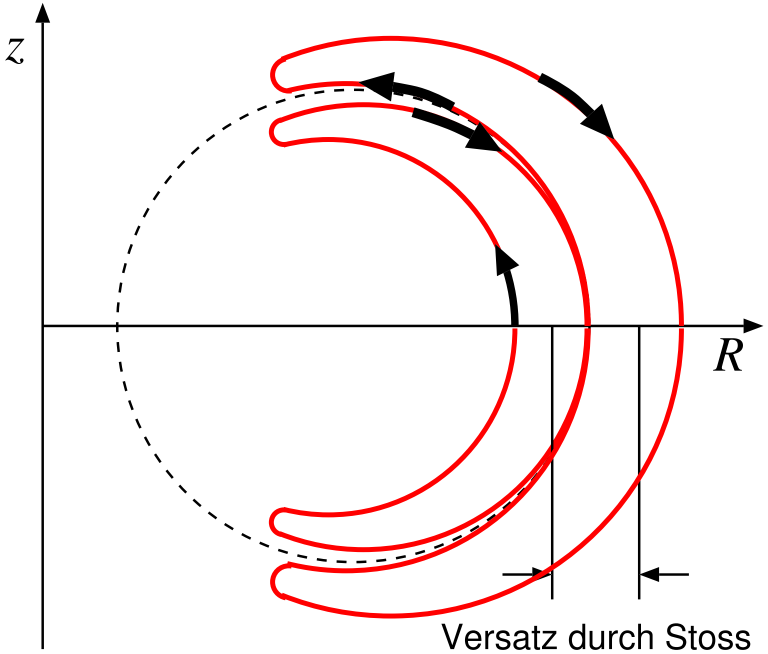
"Bananen"-Diffusionskoeffizient $\perp B$ (tief gefangene Teilchen, $v_\| \to 0$)

$$D_B = \frac{1}{2} f_{\text{gef}} \, (\Delta x_{\text{gef}})^2 \, \nu_{\text{eff}} \; = \; \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}\, \frac{9q^2 r_L^2}{\varepsilon} \frac{\nu_c}{2\varepsilon} \; = \; \frac{9}{4}\varepsilon^{-3/2} q^2 r_L^2 \nu_c \; \sim \; \frac{9}{2}\varepsilon^{-3/2} q^2 D_c$$

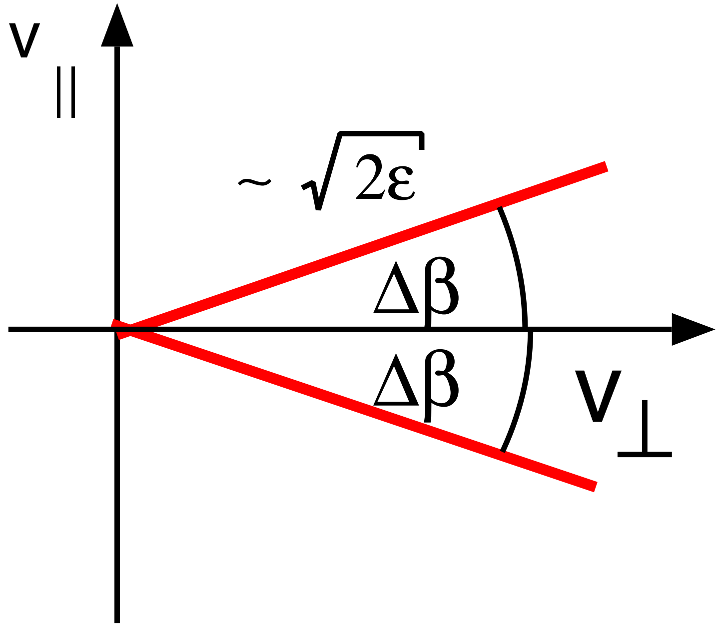
"Effektive" Stoßfrequenz ν_{eff}

Für $B = \mathrm{const}$ führen 90°-Stöße zum Verlust des Impulses (in der ursprünglichen Bewegungsrichtung).
Die zugehörige Stoßfrequenz ist ν_c (per Definition).

Für gefangene Teilchen genügen kleinere Stoßwinkel! Umkehr der (kleinen) Geschw. $v_{\|}$ führt bereits zum maximalen Bahnversatz:



Im Mittel entspricht Bahnumkehr dem Pitchwinkelunterschied $\Delta\beta = \sqrt{2\varepsilon}$:



Bei Annahme von "random walk"-Diffusion ($\Delta\beta \propto (\Delta t)^{1/2}$) kann die Rate für den Versatz um $\Delta\beta$ abgeschätzt werden:

$$\nu_{\mathrm{eff}} \sim \nu_c \frac{1}{(\Delta\beta)^2} \sim \frac{\nu_c}{2\varepsilon}$$

Kollisionalität (Stössigkeit)

Bis zu welcher Stoßfrequenz können Teilchen ihre Bananenbahn durchlaufen?
— und unterliegen der Bananendiffusion?

Def. **Transitfrequenz**: $\nu_T = v_\parallel / L$ ($L = qR_0$: Verbindungslänge)

Def. **Kollisionalität** (“Stößigkeit”)

$$\nu^* = \frac{\nu_{\text{eff}}}{\nu_T} = \frac{\nu_{\text{c}}}{2\varepsilon\nu_T} = \frac{\nu_{\text{c}}\, q R_0}{2\varepsilon v_\parallel}$$

Nahe der Grenze gefangener und umlaufender Teilchen, d.h. $v_\parallel / v \approx v_\parallel / v_\perp = \sqrt{2\varepsilon}$:

$$\nu^* \;\sim\; \frac{q\, R_0\, \nu_c}{(2\varepsilon)^{3/2}\, v_{\text{th}}}$$

Bedeutung von ν^*:

$\nu^* \ll 1$: Driftbahnen können zwischen Stößen meist komplett durchlaufen werden,

$\nu^* \gg 1$: Driftbahnen werden durch Stöße meist vor Vollendung unterbrochen

Drei "neoklassische" Kollisionalitäts-Regimes

(a) **Pfirsch-Schlüter-Regime**
(stark stoßbehaftet)

$$\frac{\nu_c}{\nu_T > 1}$$

Alle Teilchen, auch umlaufende, erfahren Stöße bevor sie ihre Driftbahnen vollenden können.

(b) **"Bananen"-Regime** (stoßarm)

$$\nu^* = \frac{\nu_{\mathrm{eff}}}{\nu_T} < 1$$

Alle Teilchen (auch gefangene) durchlaufen ihre Driftbahnen (meist) komplett zwischen Stößen

(c) **"Plateau"-Regime** (dazwischen)

$$\nu^* > 1, \quad \frac{\nu_c}{\nu_T} < 1$$

Umlaufende Teilchen durchlaufen ihre Bahnen, gefangene (aufgrund ihrer höheren eff. Stoßfrequenz) nicht.

In allen Fällen ist der Bahnversatz bei Stößen größer als der Gyroradius, da die Teilchen zwischen Stössen ja weiterhin von der magnetischen Fläche wegdriften.
Der so entstehende "neoklassische" Transport übersteigt daher den "klassischen" Transport durch Versatz um max. einen Gyroradius.

Zusammenfassung: Neoklassischer Transport

Diffusionskoeffizient als Funktion der Stoßfrequenz: