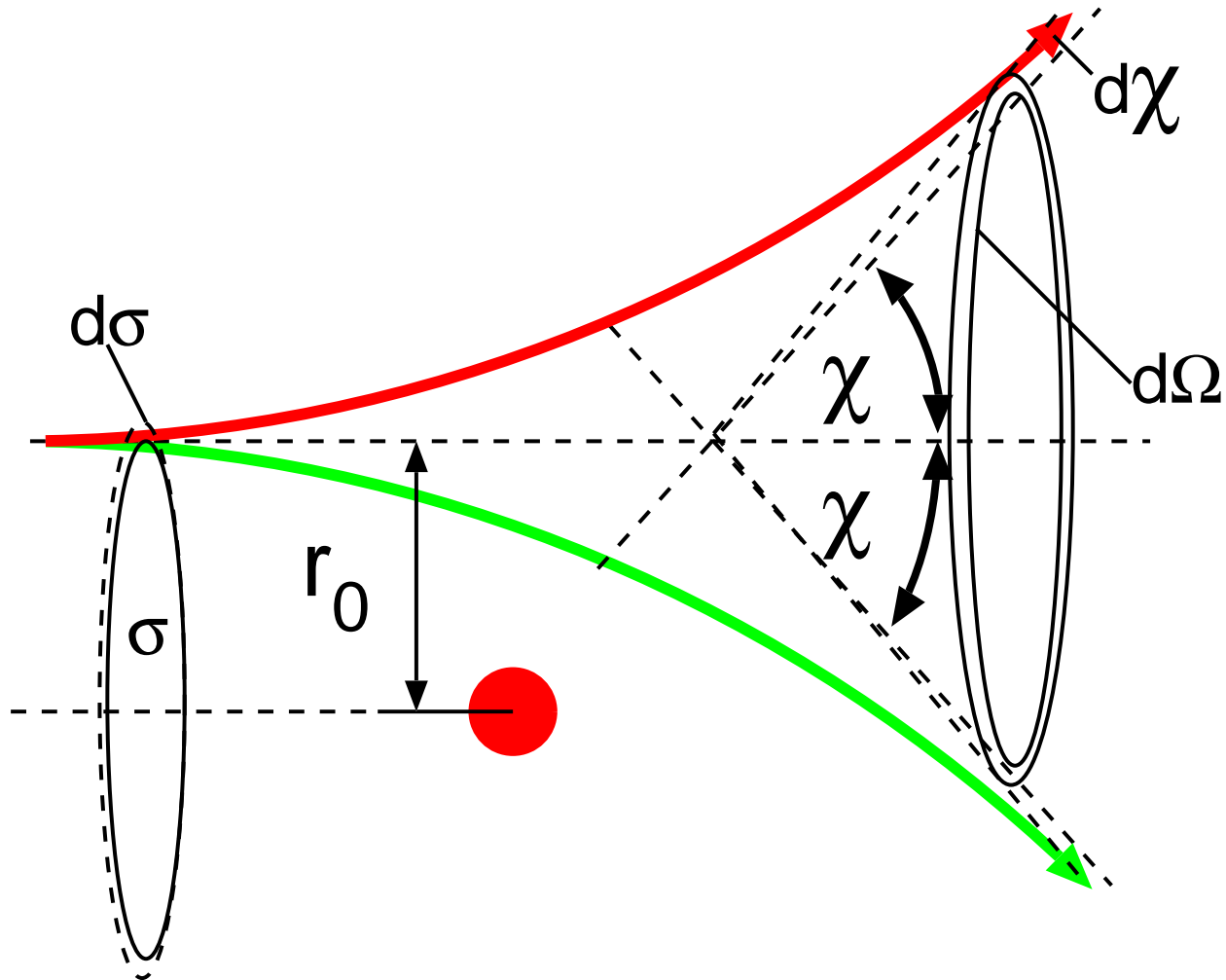


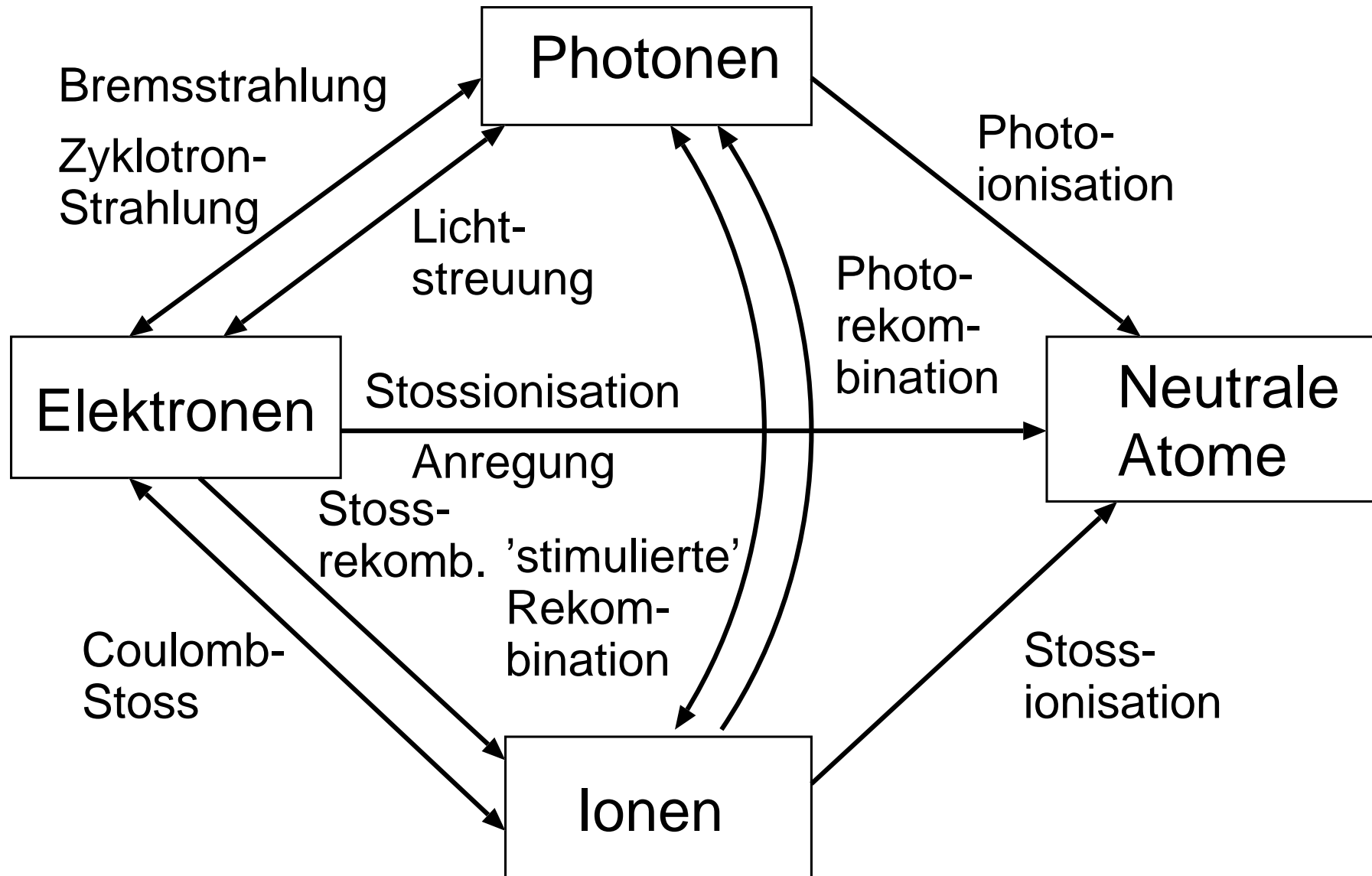
Einführung in die Plasmaphysik

Coulomb-Stöße



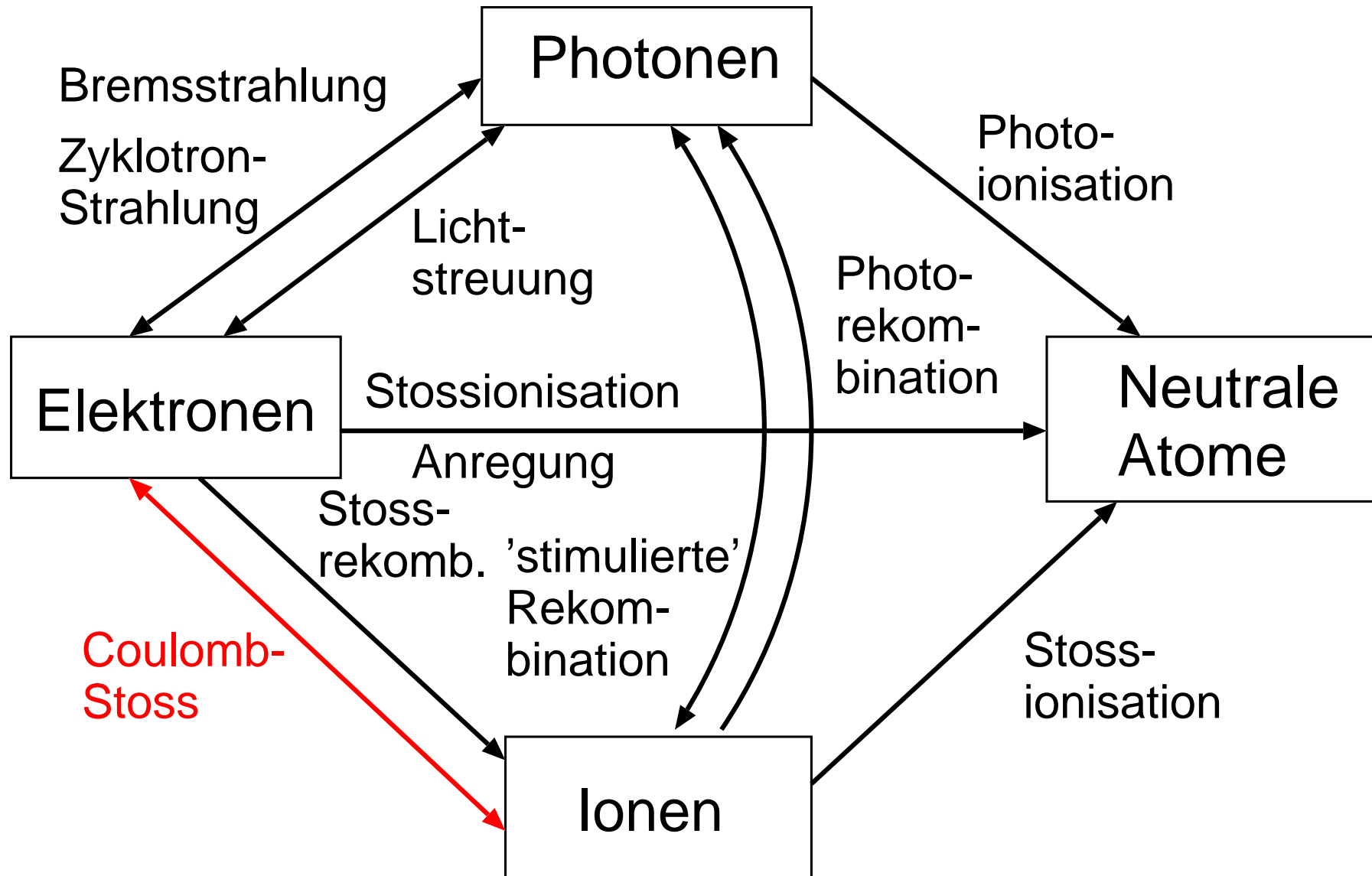
Elementare Wechselwirkungsprozesse

Wesentliche Beispiele, nach Edukten (Pfeile: Hauptwirkrichtung)



Elementare Wechselwirkungsprozesse

Wesentliche Beispiele, nach Edukten (Pfeile: Hauptwirkrichtung)



Elastische und inelastische Stöße

1. Inelastische Stöße *(inelastic collisions)*

Durch den Stoßprozess von Plasmateilchen wird kinetische Energie der Stoßpartner in innere Anregung umgewandelt.

Beispiele:

- Anregung von gebundenen Elektronen
- Ionisation von Atomen durch Stoß von Elektronen

2. Elastische Stöße *(elastic collisions)*

Gesamte kinetische Energie und Impuls bleiben beim Stoßprozess erhalten.

Coulomb-Stöße zwischen geladenen Plasmateilchen

→ Thermalisierung, endlicher elektrischer Widerstand

Elektrischer Widerstand

Im neutralen Plasma tragen (meist) die Elektronen den elektrischen Strom

$$\vec{j} = -e n_e \vec{v}_e.$$

Kraft auf ein Elektron im elektrischen Feld:

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q\vec{E} - \underbrace{\frac{d}{dt}(m_e \vec{v}_e)}_{\text{Abbremskraft } \vec{R}}$$

Abbremsung erfolgt durch Ablenkung der Teilchenbahn durch Stöße.

In Richtung der Beschleunigung ($\parallel \vec{E}$):

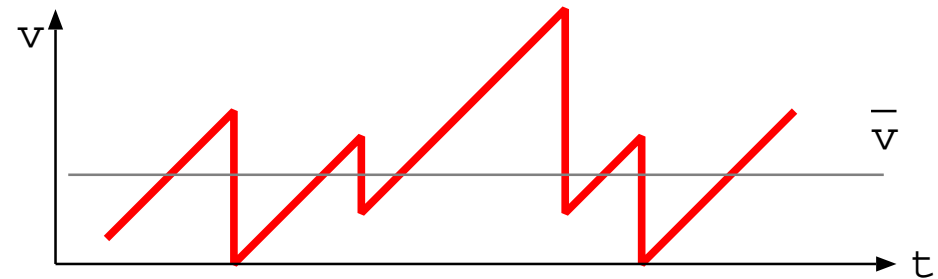
$$R = \underbrace{(m_e v_e)}_{\text{Impuls}} \underbrace{v_{90^\circ}}_{\text{Impulsverlust-Rate}}$$

v_{90° : “Effektive 90°-Stoßfrequenz”

Aufgabe: Berechne v_{90° für Coulomb-Stöße

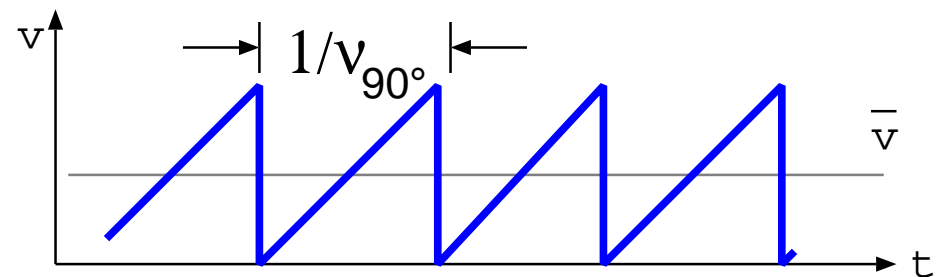
Realität:

Statistische Impulsänderung bei jedem Stoß



Modell:

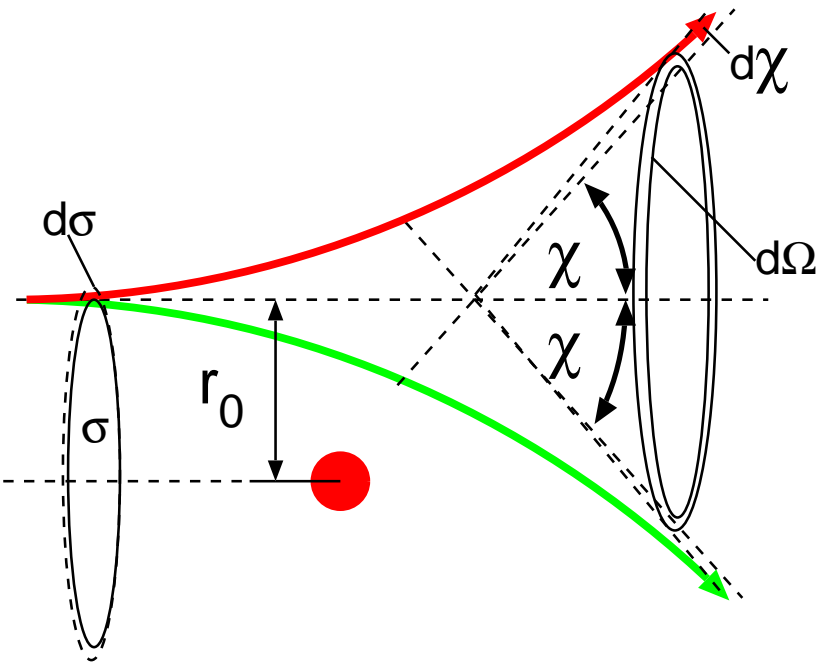
Vollständiger Impulsverlust je (90°)-Stoß



Stoß im $1/r$ -Zentralpotenzial (klassische Mechanik)

Kraft zum/vom Streu-Zentrum:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



r_0 : Stoßparameter

χ : Ablenkwinkel

$d\Omega$: Differentieller Raumwinkel

σ : Wirkungsquerschnitt

Zusammenhang $r_0 \leftrightarrow \chi$

(z.B. H. Goldstein, Klass. Mechanik, Kap. 3.7)

$$\tan(\chi/2) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 r_0}$$

Sonderfall: Stoßparameter für $\chi = 90^\circ$ -Stoß

$$r_{0,\perp} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

Differenzieller Wirkungsquerschnitt
(Rutherford-Streuformel):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}$$

$d\sigma$: Querschnittsfläche für Ablenkung in das
Raumwinkel-Element $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$

Abbremsung durch Coulomb-Stöße (1)

Wenn es nur 90°-Stöße gäbe ...

Stoßfrequenz (an $n_i = n/Z$ Ionen):

$$v_{90^\circ} = n_i \sigma_{90^\circ} v \sim n_i v \pi r_{0,\perp}^2 = \frac{nZe^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}$$

⇒ Abbremskraft:

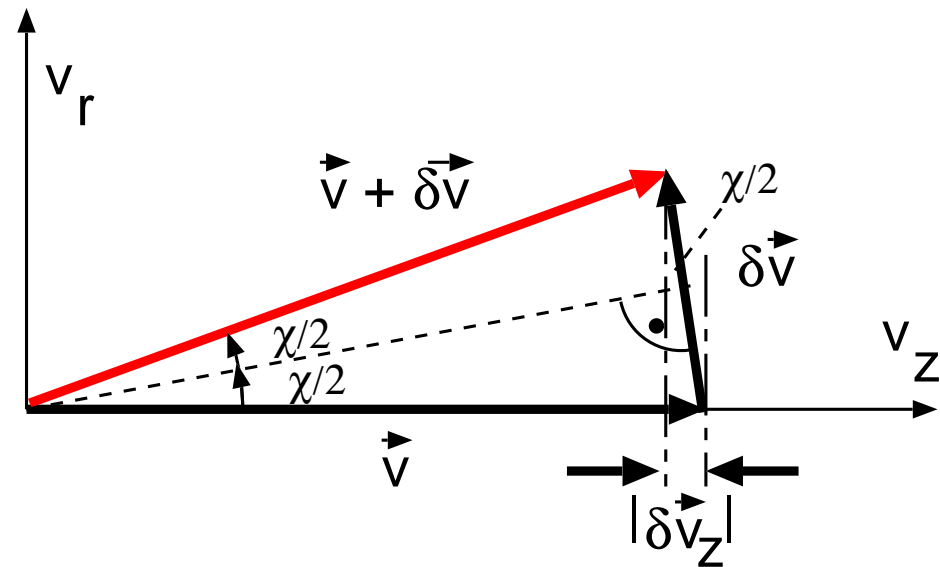
$$R = \frac{d(mv)}{dt} = (mv) v_{90^\circ} = \frac{nZe^4}{16\pi\epsilon_0^2 m v^2}$$

Tatsächlich dominieren aber akkumulierte Kleinwinkelstöße die Abbremsung!

$$(r_0 \geq r_{0,\perp}, \quad \chi < \frac{\pi}{2})$$

Stoßkinetik bei beliebiger Ablenkung

Berechne den Geschwindigkeitsverlust in Ausbreitungsrichtung für geg. Streuwinkel



Betrag der Geschwindigkeitsänderung:

$$|\delta v| = 2 v \sin \chi/2$$

dto. in z -Richtung:

$$|\delta v_z| = |\delta v| \sin \chi/2 = 2 v \sin^2 \chi/2$$

Abbremsung durch Coulomb-Stöße (2)

Abbremskraft für Stöße mit $\chi = \chi_{\min} \dots \pi$:

$$R = \Sigma_{\text{alle Teilchen}} \left(\frac{d(mv)}{dt} \right) = m \int_{\chi=\chi_{\min}}^{\pi} \delta v_z \frac{d\dot{N}}{d\sigma} d\sigma$$

Teilchenstrom in Element $d\sigma$ (bzw. $d\Omega$):

$$\dot{N}d\sigma = nvd\sigma = nv \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{Rutherford}} d\Omega$$

Einsetzen: Rutherford, $d\Omega(\chi)$, δv_z

$$R = \frac{nZe^4}{16\pi\epsilon_0^2mv^2} \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \frac{\sin\chi}{\sin^2\chi/2} d\chi$$

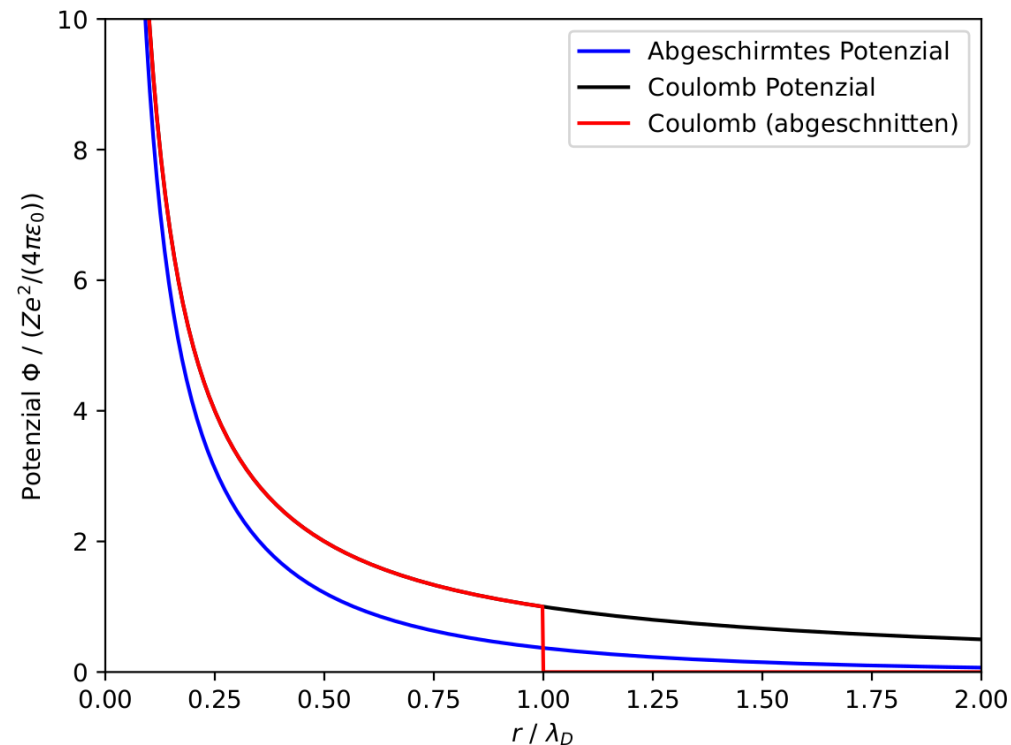
Integraltafel:

$$R = \frac{nZe^4}{4\pi\epsilon_0^2mv^2} \left[\underbrace{\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \ln\left(\sin\frac{\chi_{\min}}{2}\right) \right]$$

Abbremskraft $R \rightarrow +\infty$ für $\lim \chi_{\min} \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow \infty$, “Kleinstwinkel”-Stöße)

Coulomb-Stöße im abgeschirmten Potenzial

Als *Modell-Näherung* kann die Divergenz von σ , R_z behandelt werden, in dem das Coulomb-Potenzial bei $r_0 \geq \lambda_D$ gleich Null gesetzt wird und für Stöße mit $r_0 < \lambda_D$ unabgeschirmt beibehalten wird.



Da normalerweise der 90° -Stoßparameter $r_{0,\perp} \ll \lambda_D$, werden Kleinwinkelstöße nicht unterdrückt.

Bei $r_{0,\max} = \lambda_D$ ist die Ablenkung χ_{\min} :

$$\tan(\chi_{\min}/2) = \frac{r_{0,\perp}}{r_{0,\max}} = \frac{r_{0,\perp}}{\lambda_D}$$

Wg. $r_{0,\perp} \ll \lambda_D$: $\tan(\chi/2) \approx \sin(\chi/2) \approx \chi/2$

→ Abbremskraft:

$$R = \frac{nZe^4}{4\pi\epsilon_0^2 m v^2} \ln \Lambda$$

$\ln \Lambda = \ln(\lambda_D/r_{0,\perp})$ “Coulomb-Logarithmus”

→ Effektive 90° -Stoßfrequenz:

$$\nu_{90^\circ} = \frac{R}{m v} = \frac{nZe^4}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3} \ln \Lambda$$

Höher um Faktor $4 \ln \Lambda$ im Vergleich zu reinen 90° -Stößen (s.o.)!

Thermische Geschwindigkeitsverteilung

Bei einer Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen muss über diese gemittelt werden.

Für eine Maxwell-Verteilung ($m_e \overline{v^2}/2 = (3/2) k_B T_e$):

$$v_{ei} = \frac{nZe^4}{64\epsilon_0^2(2\pi m_e)^{1/2}(k_B T_e)^{3/2}} \ln \Lambda; \quad \ln \Lambda = \ln 12\pi n_e \lambda_D^3$$

Herleitung: Stroth, Kap. 8.3; Gurnett/Bhattarchjee, Kap. 11

Der Coulomb-Logarithmus $\ln \Lambda$ variiert relativ schwach

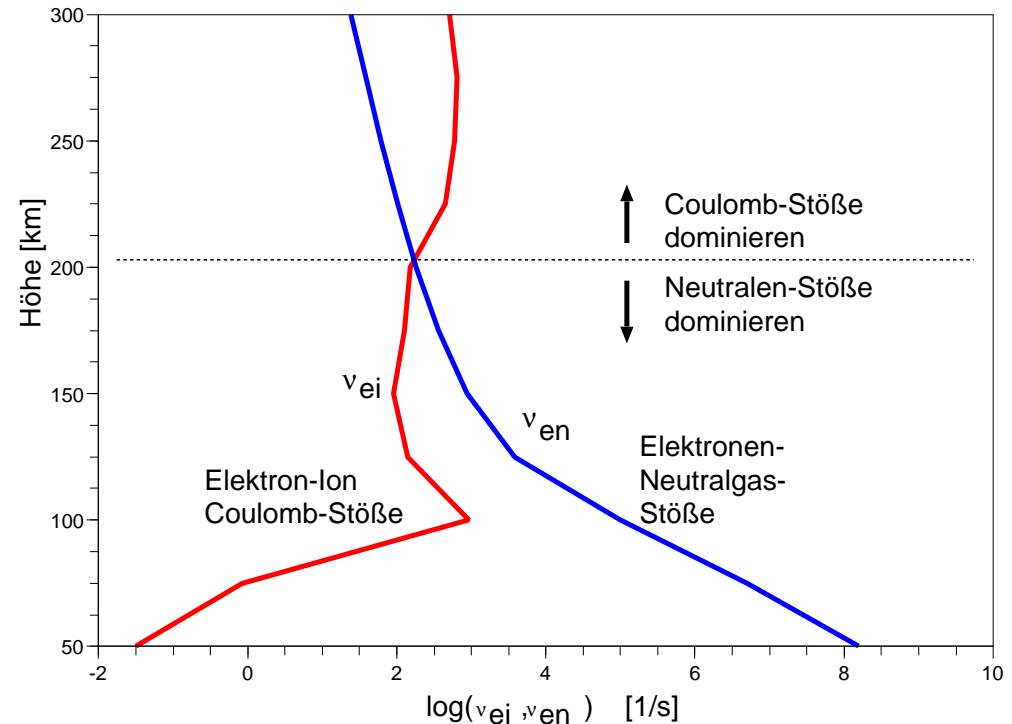
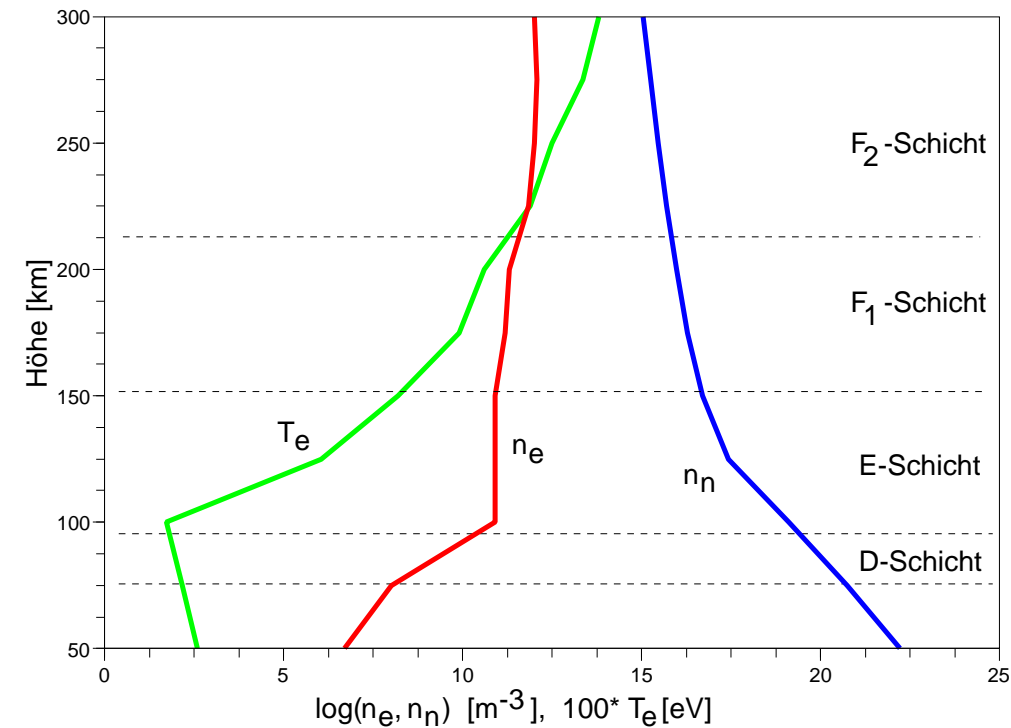
(d.h. ist nicht sehr empfindlich auf die Abschneidebedingung für χ_{\min})

	Teilchendichte (m^{-3})	Elektronen- temperatur (eV)	$\ln \Lambda$
Gasentladungen	10^{17}	2	9.1
Fusionsexperiment	10^{19}	100	13.7
Fusionsreaktor	10^{21}	10^4	16
Laser-Plasma	10^{27}	10^3	6.8

Vergleich: Stoßraten in der Ionosphäre

Angenommene Dichte- und
Temperatur- Höhenprofile ($T_n = 300$ K)

Stöße mit Neutralgas dominieren
(unter ≈ 200 km Höhe)



Neutralgasdichte-Modell: <https://en.wikipedia.org/wiki/NRLMSISE-00> und Links darin

Zusammenfassung

- In vielen (auch teilweise ionisierten) Plasmen dominieren (elastische) Coulomb-Stöße. Wir haben Stöße von Elektronen an ruhenden Ionen betrachtet (Lorentz-Näherung). Es dominieren Kleinwinkel-Stöße.
- Coulomb-Stöße führen zum Impulsaustausch von geladenen Teilchen:
 - elektrischer Widerstand
 - Abbremsung von schnellen Teilchenstrahlen
 - Thermalisierung der Geschwindigkeitsverteilung
- Ohne Abschirmung durch bewegliche Ladungsträger divergieren für das Coulomb-Potenzial der totale Wirkungsquerschnitt und die Abbremskraft auf Testteilchen!
- Endliche Abbremskraft und elektrischer Widerstand ergeben sich im abgeschirmten Potenzial. Der Effekt von kumulativen Kleinwinklstößen wird beschrieben durch einen zusätzlichen Faktor in der “effektiven” 90°-Stoßfrequenz, den Coulomb-Logarithmus, $\ln \Lambda = \ln \lambda_D / r_0$ (r_0 : Stoßparameter für 90° Ablenkung).