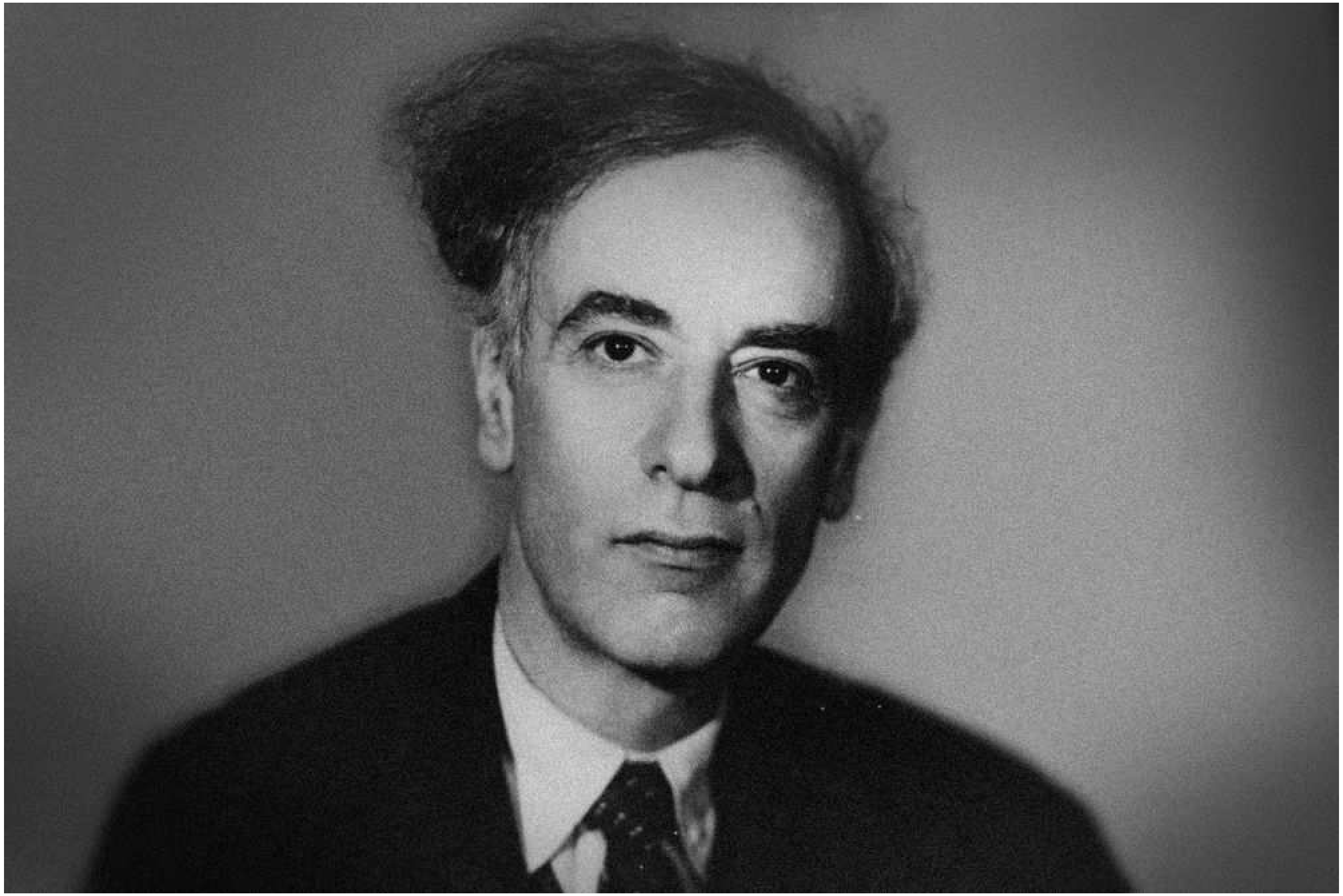
Landau-Dämpfung



Lev Davidowitsch Landau (1908 - 1968)

Wolfgang Suttrop, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Kinetische Beschreibung von Plasmen

- *Ausgangspunkt*: Vlasov-Gleichung (Anatoly Vlasov, 1938):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_v f = 0$$

- Ansatz ebener Wellen (Fourier-Moden, $\omega = f(k)$ reell) misslingt für

$$v = v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k}$$

  aufgrund einer Singularität in der Dispersionsrelation.

- Lösung durch Lev Landau (J. Phys. (USSR) X (1) 25 (1946))

  Ansatz mit Laplace-Transformation:

  – Dämpfung als zusätzlicher Freiheitsgrad

  – Elegante Lösung der Dispersionsrelation

Elektrostatische Elektronenwellen

Betrachten Elektronen, $q = -e$, elektrostatisches Problem: $B, \dot{B} = 0, \vec{E} = -\nabla\phi$

Vlasov- und Poisson-Gleichungen für f und ϕ:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{e}{m} (\nabla\phi) \cdot \nabla_v f = 0, \qquad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[n_0 - \iiint_{-\infty}^{\infty} f \, \mathrm{d}^3 v \right]$$

Linearisieren (f_0, $\phi_0 = \text{const}$), Gleichungen für erste Ordnung (Index 1 weggelassen):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{e}{m} (\nabla\phi) \cdot \nabla_v f_0 = 0, \qquad \nabla^2\phi = \frac{e}{\varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} f \, \mathrm{d}^3 v$$

Fourier-Ansatz (Vlasov, J.Phys.USSR '45)

$\Phi, f \propto \exp(\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\,\omega t)$

Winkelfrequenz ω (reell) ($\rightarrow$ unendliche Lebensdauer der Welle)

Ansatz im Laplace-Raum (Landau, J. Phys. (USSR) X (1) 25 (1946))

$\Phi, f \propto \exp(\mathrm{i}kx + st)$, $s \equiv \gamma - \mathrm{i}\omega$ komplex

Realteil: Anwachsrate γ ($\rightarrow$ Störung kann anwachsen ($\gamma > 0$) oder gedämpft sein ($\gamma < 0$))

Laplace-Transformation

Definition : $\mathscr{L}(f(t)) = \tilde{f}(s) \equiv \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ Beachte : Untere Integrationsgrenze $t = 0$

Rechenregeln für die zeitliche Ableitung:

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \equiv \mathscr{L}\left(f'\right) = \int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = s\tilde{f}(s) - f(t=0)$$

Anfangswert bei $t = 0$ geht in die Zeitableitung der Laplace-Transformierten ein!

Ebenso, für die zweite Ableitung:

$$\mathscr{L}\left(f''\right) = s\left[s\tilde{f}(s) - f(t=0)\right] - f'(t=0)$$

Bemerkung:

Die räumliche Ableitung bleibt wie im Ansatz ebener Wellen:

$\mathscr{L}(\nabla f(\vec{r},t)) = \nabla\mathscr{L}(f(\vec{r},s)) \quad \rightarrow \mathrm{i}\vec{k}\,\tilde{f}(k,s)$

Laplace-Transformation der Vlasov- und Poisson-Gleichungen

$$s\tilde{f} - f(t=0) + ikv_z\tilde{f} + i\frac{e}{m}k\tilde{\phi}\,\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0, \qquad k^2\tilde{\phi} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}\,\mathrm{d}^3v$$

Vlasov-Gl. nach $\tilde{f}$ auflösen, in Poisson-Gleichung einsetzen:

$$k^2\tilde{\phi} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t=0)}{s+\mathrm{i}kv_z}\,\mathrm{d}^3v + \mathrm{i}\,\underbrace{\frac{e^2n_0}{\varepsilon_0 m}}_{\omega_p^2}k\tilde{\phi}\,\frac{1}{n_0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v_z}{s+\mathrm{i}kv_z}\,\mathrm{d}^3v$$

Mit der 1-D Verteilungsfunktion (wie zuvor): $F(v_z) \equiv \frac{1}{n_0}\iint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v})\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$

$$k^2\tilde{\phi} = -\frac{en_0}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t=0)}{s+\mathrm{i}kv_z}\,\mathrm{d}v_z + \mathrm{i}\,\omega_p^2 k\tilde{\phi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_0/\partial v_z}{s+\mathrm{i}kv_z}\,\mathrm{d}v_z$$

Weiterer Plan:

(a) Nach $\tilde{\phi}$ auflösen,

(b) Inverse Laplace-Transformation: $\tilde{\phi} \to \phi$,

(c) Dispersionsrelation finden

Lösung für $\tilde{\phi}$ (Laplace-Transformierte des Potenzials)

Um etwaige Singularitäten besser zu sehen, erweitern wir die Integranden mit $-\mathrm{i}/k$, d.h. $1/(s+\mathrm{i}kv_z) \to -(\mathrm{i}/k)\,/\,(v_z - \mathrm{i}s/k)$.

$\tilde{\phi}(k,s)$ ergibt sich als Quotient einer Zählerfunktion $Z(k,s)$ und einer Nennerfunktion $N(k,s)$:

$$\tilde{\phi} = \frac{Z(k,s)}{N(k,s)}$$

mit:

$$Z(k,s) = \mathrm{i}\frac{en_0}{\varepsilon}\frac{1}{k^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t=0)}{v_z - \mathrm{i}s/k}\,\mathrm{d}v_z$$

und:

$$N(k,s) = 1 \;-\; \frac{\omega_p^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0/\partial v_z}{v_z - \mathrm{i}s/k}\,\mathrm{d}v_z$$

Haben nun <u>zwei</u> mögliche Singularitäten:

$$\text{(a)}\;\; N = 0, \qquad \text{(b)}\;\; v_z = \mathrm{i}\frac{s}{k} = \frac{\mathrm{i}\gamma + \omega}{k}$$

Wie wir gleich sehen werden, *erleichtert* dies unser Vorhaben statt es zu verunmöglichen!

Inverse Laplace-Transformation

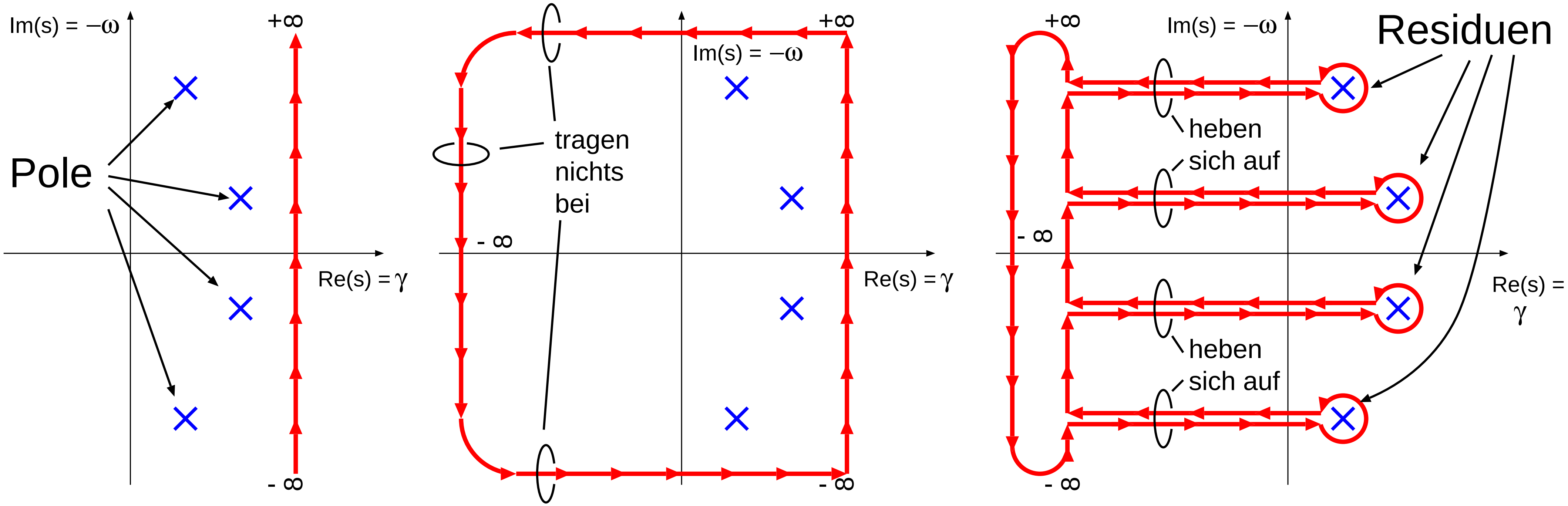
$$\phi(k,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\phi}(k,s)\, e^{st}\, ds$$

Der Integrationspfad in der komplexen s-Ebene kann beliebig gewählt werden, solange er "rechts von allen Polen" verläuft ($\gamma > \gamma_p$ für alle Pole p).

Beweis: Tom Apostol, Mathematical Analysis, Chapter 15, Theorems 15-34

Drei Integrationspfade ("Konturen") mit gleichem Resultat:

Eigentliche Vorschrift — Geschlossener Pfad — Summe über Residuen

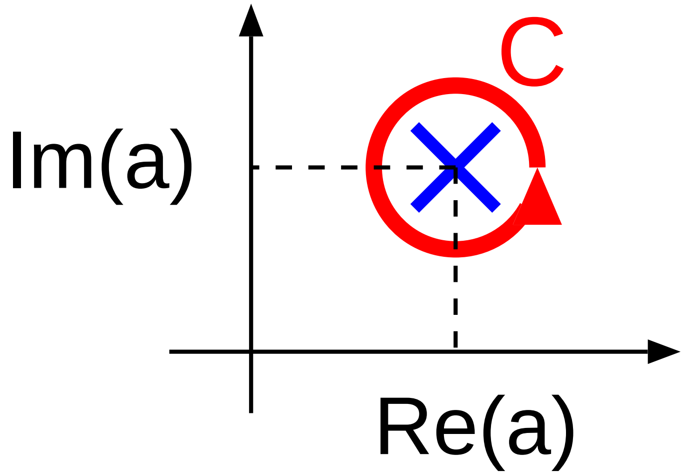


Das Pfad-Integral vereinfacht sich zur Summe über die Residuen!

Integralformel von Cauchy

Sei $f(z)$ stetig, ableitbar (entwickelbar)
C eine enge Kontour um a
Dann ist das Residuum:

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \underbrace{2\pi\mathrm{i}\, f(a)}_{\equiv \mathrm{Res}[f(a),a]}$$



Das Kontour-Integral zur inversen Laplace-Transformation ist die Summe der Residuen i:

$$\phi(k,t) = \sum_i \mathrm{e}^{s_i t}\ \mathrm{Res}\left[\tilde{\phi}(k,s_i),\ s_i\right]$$

Wir hatten: $\tilde{\phi} = Z/N$; die Pole von $\tilde{\phi}$ sind die Nullstellen von N:

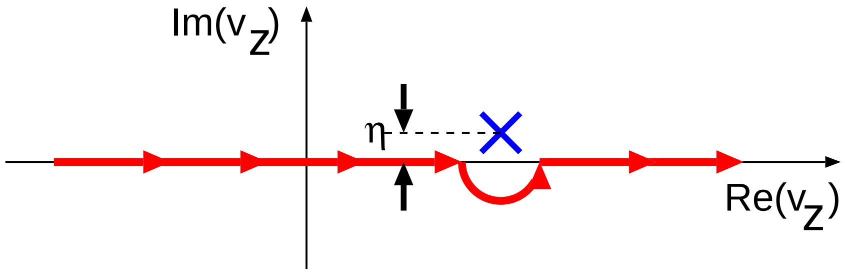
$$N(k,s) = 1\ -\ \frac{\omega_p^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0/\partial v_z}{v_z - \mathrm{i}s/k}\,\mathrm{d}v_z$$

Um diese zu bestimmen, müssen wir noch das Integral (R.S., 2. Term) lösen, wenn möglich mit der gleichen Methode.

Integration über die Geschwindigkeit

$$s = \gamma - \mathrm{i}\omega \qquad \Rightarrow \qquad N(k,s) = 1 \; - \; \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0/\partial v_z}{v_z - \omega/k - \mathrm{i}\gamma/k} \, \mathrm{d}v_z$$

Beschränken uns hier auf den Grenzfall kleiner Wachstumsrate $|\gamma| < |\omega|$
$\Rightarrow$ Pol liegt nahe beim Integrationspfad.



Plemelj-Dirac-Formel:

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - a \pm \mathrm{i}\eta} \mathrm{d}x \; = \; P\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} \mathrm{d}x\right] \mp \underbrace{\mathrm{i}\pi f(a)}_{''\text{Halbes}'' \text{ Residuum}}$$

mit:

$$P[\;\;] \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} \mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} \mathrm{d}x\right]$$

Vorgehen:

– Berechne $N(k, -\mathrm{i}\omega)$, d.h. für $\gamma = 0$, aus P-D-Formel

– Entwickle $N(k,s)$ für kleine γ um $N(k,-\mathrm{i}\omega)$ $\quad \Rightarrow$ Linearisierte Näherung für γ

Entwicklung der Dispersionsfunktion nach $\mathrm{i}\gamma$ (in 1. Ordnung)

$$N(k,s) \;=\; N_{\mathrm{r}}(k,-\mathrm{i}\omega) \;+\; \mathrm{i}N_{\mathrm{i}}(k,-\mathrm{i}\omega) \;+\; \mathrm{i}\gamma\left(\frac{\partial N}{\partial(\mathrm{i}\gamma)}\right)_{\gamma=0}$$

Realteil, aus Plemelj-Dirac-Formel, und mit partieller Integration:

$$N_r(k,-\mathrm{i}\omega) \;=\; 1 - P\left[\frac{\omega_p^2}{k^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0}{(v_z-\omega/k)^2}\,\mathrm{d}v_z\right]$$

Imaginärteil, aus Plemelj-Dirac-Formel:

$$N_i(k,-\mathrm{i}\omega) \;=\; \mathrm{i}\pi\,\frac{\omega_p^2}{k^2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial v_z}\right)_{v_z=\omega/k}$$

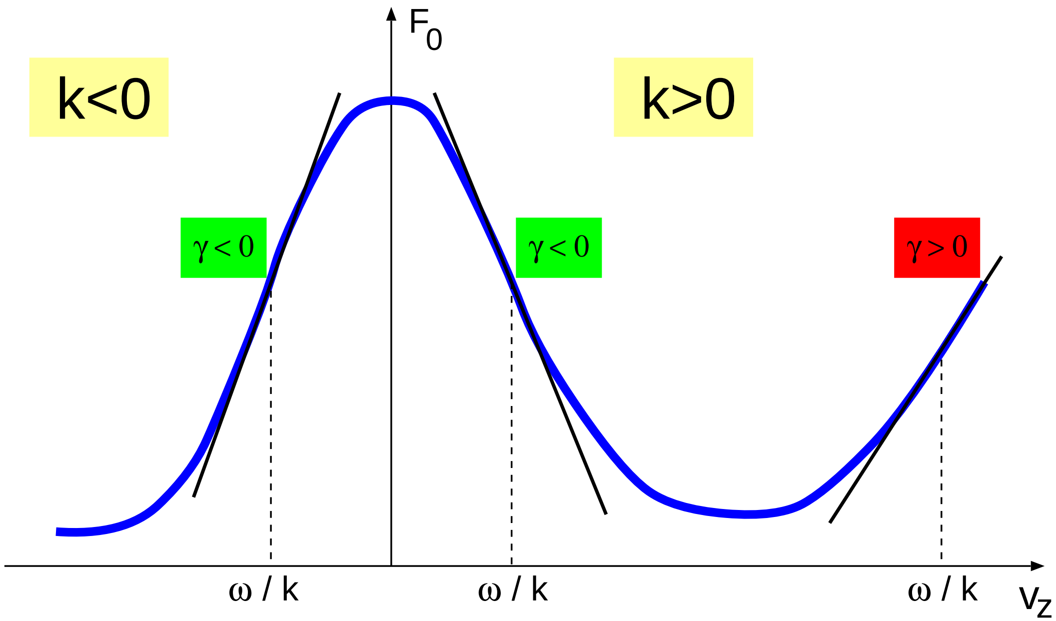
Erste Ableitung nach $\mathrm{i}\gamma$, mit partieller Integration:

$$\frac{\partial N}{\partial(\mathrm{i}\gamma)} \;=\; \frac{\partial N}{\partial\omega} \;=\; -\frac{\omega_p^2}{k^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_0/\partial v_z}{(v_z-\omega/k-\mathrm{i}\gamma/k)^2}\,\mathrm{d}v_z \;=\; 2\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0}{\left(1-\frac{v_z k}{\omega}+\mathrm{i}\frac{\gamma}{\omega}\right)^3}\,\mathrm{d}v_z$$

N.B.: Für $\gamma = 0$ ist $\partial N/\partial(\mathrm{i}\gamma)$ rein reell und hat das Vorzeichen von k

Linearisierte Anwachsrate

$$\gamma = -\frac{N_\mathrm{i}}{(\partial N/\partial\omega)_{\gamma=0}} = \pi\,\frac{k}{|k|}\,\frac{\omega_p^2}{k^2|\partial N/\partial\omega|_{\gamma=0}}\left(\frac{\partial F_0}{\partial v_z}\right)_{v_z=\omega/k}$$



— Die Welle wird gedämpft ($\gamma < 0$) für monoton mit $|v|$ abfallende Verteilungsfunktion:

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_z}\,\frac{k}{|k|} < 0$$

— Andererseits kann die Welle verstärkt werden ($\gamma > 0$) wenn die Verteilungsfunktion ein lokales Minimum hat (z.B. Teilchenstrahl)

Beispiel: Hochfrequente Wellen

Vgl. letzte Vorlesung: $x \equiv v_z k/\omega \ll 1$

$\rightarrow$ Reihenentwicklung: $(1-x)^{-3} \sim 1 + 3x + 6x^2 + \ldots,$ so dass

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \omega}\right)_{\gamma=0} = 2\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 + 3\left(\frac{v_z k}{\omega}\right) + 6\left(\frac{v_z k}{\omega}\right)^2 + \ldots\right] F_0(v_z)\, \mathrm{d}v_z$$

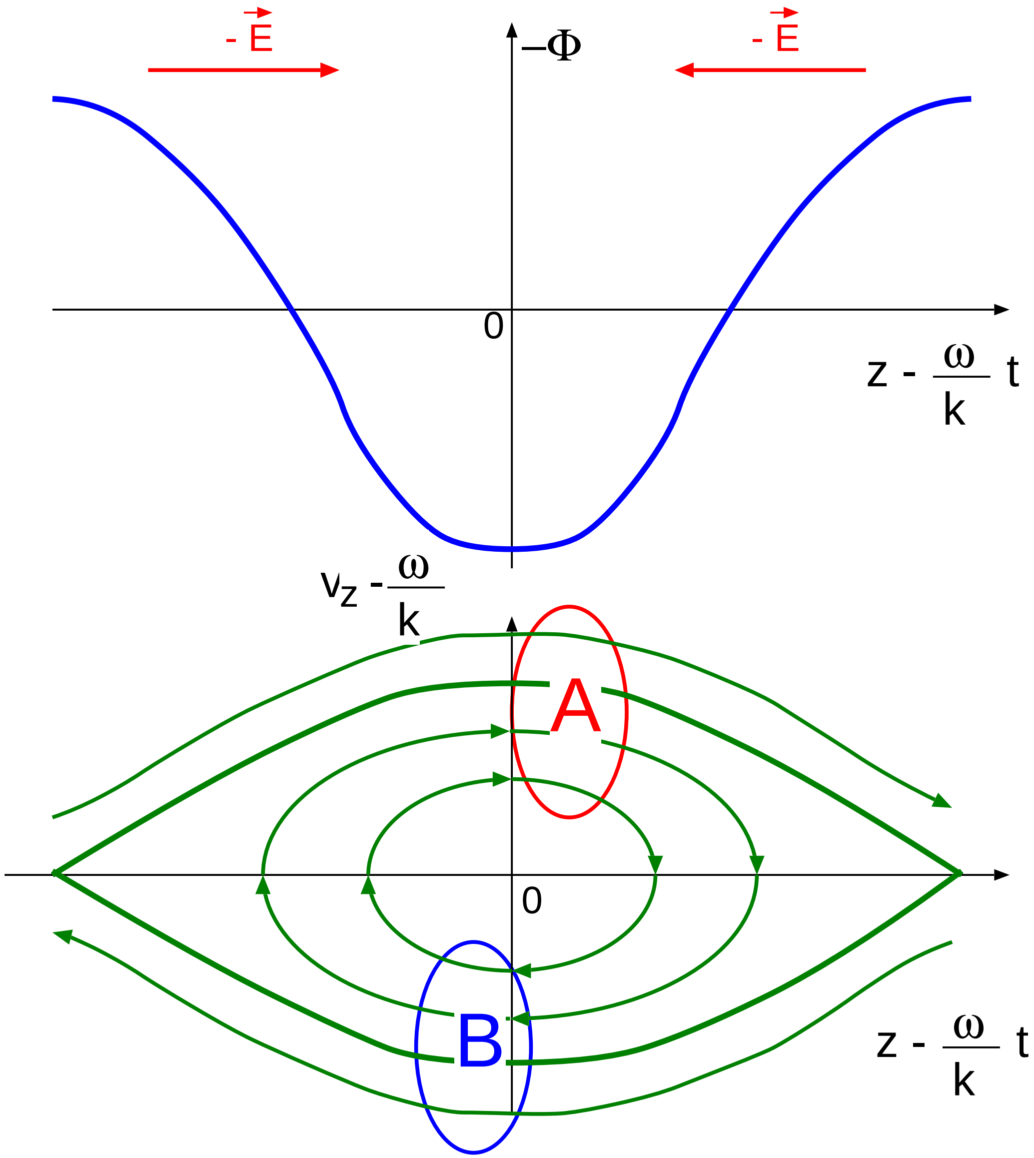
Wiederum entfällt der lineare Term wg. gerader Symmetrie des Integranden.

Linearisierte Wachstumsrate, mit weiterer Reihenentwicklung $(1+x)^{-1} = 1 - x \pm \ldots$

$$\gamma = -\frac{N_i}{(\partial N/\partial \omega)_{\gamma=0}} = \frac{\pi}{2}\frac{\omega^3}{k^2}\left[1 - 3\frac{k^2}{\omega} < v_z^2 >\right]\left(\frac{\partial F_0}{\partial v_z}\right)_{v_z=\omega/k}$$

Physikalische Ursache der (linearen) Dämpfung

In mit $v_{ph} = \omega/k$ mitbewegten Koordinaten:



Beginne mit räumlich gleichverteilter Elektronendichte. Potenzialtrog $(-\phi)$ beeinflusst Elektronen in der Nähe von $v_z = \omega/k$.

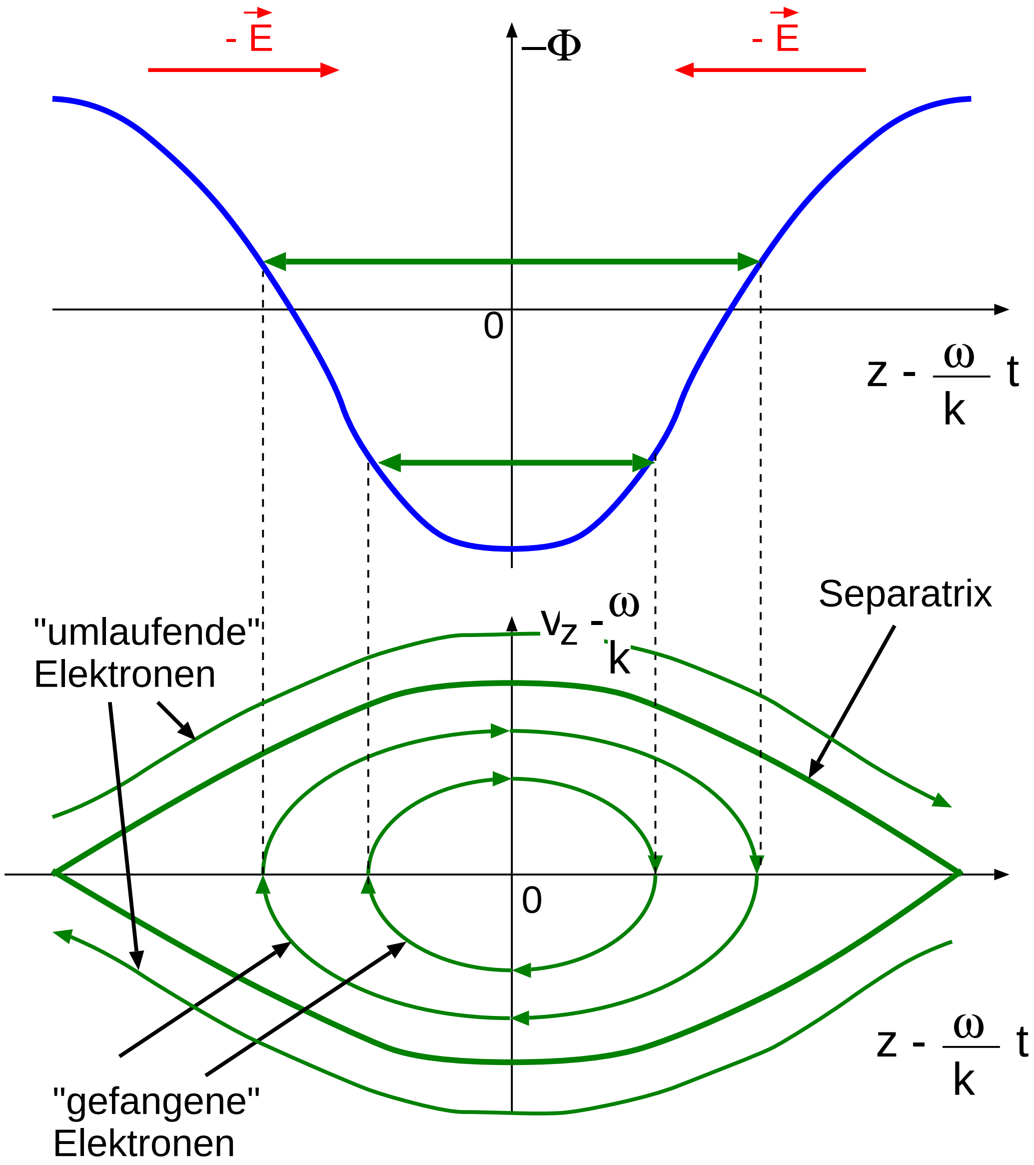
(A) $v_z > \omega/k$:
– Kinetische Energie $\propto v_z^2$ sinkt,
$\Rightarrow$ Energieübertrag in das elektrische Feld

(B) $v_z < \omega/k$:
– Kinetische Energie $\propto v_z^2$ steigt,
$\Rightarrow$ Energieentnahme aus dem Feld

Wenn Phasenraumdichte mit steigendem v_z abnimmt, dann gibt es mehr Teilchen Typ (b) als Typ (a)
$\Rightarrow$ Welle wird im Saldo gedämpft (Amplitude des Potenzials nimmt ab)

Nichtlinearer Verlauf der Dämpfung

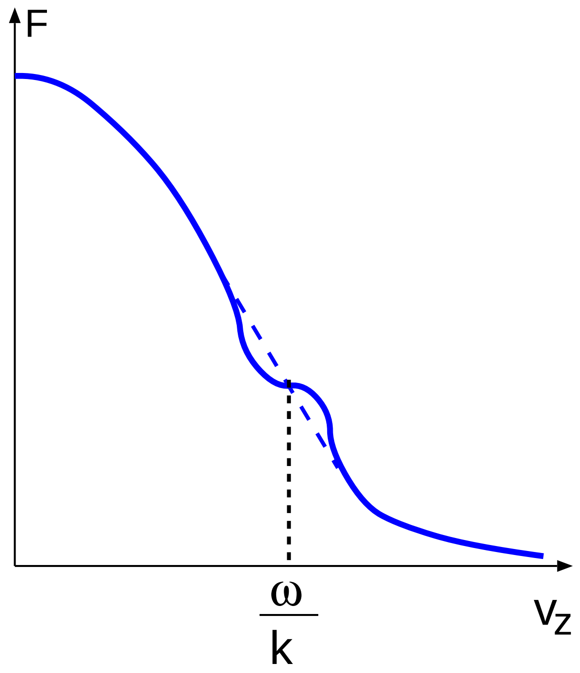
In mit $v_{\mathrm{ph}} = \omega/k$ mitbewegten Koordinaten:



Ein Teil der Elektronen sind im Potenzialtrog gefangen. Sie oszillieren mit unterschiedlicher Frequenz um das $(-\phi)$-Minimum herum (*phase mixing*).

$\Rightarrow$ Abflachung der Phasenraumdichte

$\Rightarrow$ Reduktion der Dämpfungsrate



Zusammenfassung: Landau-Dämpfung

- Wir betrachten ein einfaches eindimensionales kinetisches Plasmamodell
  - elektrostatisch, $E(x) = -\partial\phi(x)/\partial x$, (Magnetfeld $B = 0$)
  - bewegliche Elektronen, unbewegliche Ionen (konstanter positiver Ladungshintergund)
- Ansatz für Potenzial und Verteilungsfunktion im Laplace-Raum ($s \equiv \gamma - \mathrm{i}\omega$): $\phi(k,\omega,\gamma), f(k,\omega,\gamma) \propto \exp(\mathrm{i}k + \gamma t - \mathrm{i}\omega t)$
- Der eine Anwachsrate γ enthaltene Ansatz umgeht die Singularität bei $v = v_{\mathrm{ph}} = \omega/k$ einer ungedämpften ebenen Welle (Fourier-Ansatz)
- Für eine mit $|v|$ abfallende Verteilungsfunktion (z.B. Maxwell-Verteilung) ist generell $\gamma < 0$, d.h. die elektrostatische Welle wird durch Energieübertrag an die Teilchen gedämpft.
- Eine mit $|v|$ ansteigende Verteilungsfunktion kann (im Prinzip) Energie an das Feld abgeben und damit zu $\gamma > 0$ (Anwachsen der Welle) führen. (Dieser Fall wurde hier nicht weiter untersucht)