Math. de L'ingénieur :

$\vee$: ou

$\wedge$: et

P : $\forall x$ on a $A(x)$.
non P : $\exists x$ / on a non $A(x)$.

P : $\exists x$ / on a $A(x)$.
non P : $\forall x$ on a non $A(x)$.

Et :
- si les 2 sont V : V
- si une de les 2 est fausses : F.

ou :
- V : si l'une des 2 est V.
- F : les 2 sont fausses.

$(P \Rightarrow q) \equiv$ non(P) ou q : Le principe de contre opposition.

non(P ou q) = non P et non q.
non(q et P) = non q ou non P.

(P et q) ou r $\equiv$ (P ou r) et (q ou r)
$((P \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (P \Rightarrow r)$: transivité

raisonnement par l'absurde :
$q \Rightarrow p$
supposons q est vrais et non q p est vrais
supposons par l'absurde que p est fausse

Relation Binaires

$\mathcal{R}$

- une relation binaire entre E et F est la données d'une partie G de $E \times F$, appelle graphe du cette relation.

  $x \mathcal{R} y$ ssi $(x, y) \in G$.

- Application d'un ensemble dans un autre :
  on appellé application de E dans F toute relation binaire de E dans F tq tout élément x de E est une relation avec unique $y \in F$.

  - fonction injective:

    $\forall x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

  - fonction surjective: كل واحد عنده antécédant.

    $\forall y \in F, \exists x \in E$ tq $f(x) = y$.

  - fonction bijective:

    injective et ~~bijective~~ surjective.

    $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tq $f(x) = y$.

si $card(E) = n$ et $card(F) = p$ et $f : E \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(x)$

surjective $\Rightarrow n \leq p$.

bijective $\Rightarrow n = p$.

si f est bijective alors $\exists f^{-1}$;

↳ application réciproque.

- Relation d'ordre :

  C'est une relation binaire qui vérifie les propriétés suivantes:

  - $\mathcal{R}$ est reflexive ($x \mathcal{R} x$)
  - $\mathcal{R}$ est transitive ($x \mathcal{R} y$ & $x \mathcal{R} z$, $y \mathcal{R} z$)
  - $\mathcal{R}$ est anti-symétrique ($x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Leftrightarrow x = y$)

• Partie Majorée, Partie Minorée ; Bornée :

- Soit A une Partie de E, on dit que A est Majorée dans E s'il existe $M \in E$ tq $\forall x \in A$, $x \leq M$.
  ↳ Majorant de A.
  → La borne supérieure de A est le plus petit Majorant noté $\sup(A)$
- On dit que A est minorée s'il existe $m \in E$ tq $\forall x \in A$ on a $m \leq x$.
  → La borne inférieure de A est plus grand des minorants de A notée $\mathrm{Inf}(A)$
- A est dite bornée si A est à la fois majorée et minorée dans $(E, \leq)$

• Relation d'équivalence sur un ensemble :

Soit E un ensemble. Une relation d'équivalence sur (un ensemble) E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E.

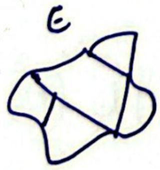
• Classe d'équivalence :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Soit $x \in E$;
classe d'équivalence de x, la partie de E notée $Cl(x)$, $\bar{x}$, $\hat{x}$, ...
ensemble de tous les éléments de E qui sont en relation avec x.

$$Cl(x) = \{x' \in E \,/\, x \mathcal{R} x'\} \subset E.$$

Prop :

- $Cl(x) = Cl(y)$ ssi $x\mathcal{R}y$.
- $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \{\emptyset\}$ ssi $Cl(x) = Cl(y)$
- Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forment une partition de E.



L'ensemble des classes d'équivalence est notée $E/\mathcal{R}$

$$E/\mathcal{R} = \{Cl(x) \,/\, x \in E\}.$$

• Propriétés Algébrique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$

$\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$

$-\bar{x} = \overline{-x}$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \sim \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

$g(x) = g(y)$

3 divise $x - y$

$x = y$ → injective

Résumé

théorie des ensembles:

- **Réunion,** $E \cup F$

  C-à-d: $x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E$ ou $x \in F$.

- **intersection,** $E \cap F$

  $x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E$ et $x \in F$.

Remarque, $\emptyset \cup E = E$ $\quad$ $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

$\emptyset \cap E = \emptyset$ $\quad$ $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$.

- **Partie complémentaire,:**

  complémentaire de A la partie de E : $C_E A$; formée tous les éléments de E qui n'appartient pas à A.

  $C_E A = \{x \in E / x \notin A\}$.

  $C_E(C_E A) = A$.

$\begin{cases} C_E A \text{ ou } C_E B \Leftrightarrow C_E A \subset C_E B \\ C_E A \cup B = C_E A \cap C_E B \end{cases}$

$\begin{cases} A \subset B \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{q} \\ \Leftrightarrow \text{non } p \Rightarrow \text{non } q \\ \Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A \end{cases}$

- **Différence symétrique,**

  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (intersection de A et B)

  ou $A \setminus B = \{x \in A \setminus x \notin B\}$.

  $\to (A \cup B) \setminus A \cap B$

  $A \Delta B = B \Delta A$

- **ensemble de Partie d'un ensemble:**

  $\mathcal{P}(E)$; $\mathcal{P}(E) = \{A / A \subset E\}$. ($2^n$, n)

  - $E = \{x_1, x_2\}$; $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$

- **Paritions d'un ensembles:**

  $\bigcup_{i \in P} A_i = E$; $A_j \cap A_i = \emptyset$

  $\{A, C_E A\}$ est une partion de E.

Produit cartésien de deux ensembles :

$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$