

## Controllo del posizionamento di un link flessibile

La struttura commissionata presenta il seguente spazio degli stati:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-M_p g L \sin(x_1) - K(x_1 - x_3) - \rho(x_2 - x_4)}{J_p} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K(x_1 - x_3) + \rho(x_2 - x_4) + u}{I} \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Attraverso la linearizzazione, la quale consiste in una approssimazione del sistema di interesse, è possibile descrivere il comportamento del sistema non lineare attorno all'equilibrio nominale. Tale procedimento viene effettuato mediante l'uso di un particolare sistema lineare. Dalla linearizzazione si ottengono le matrici A, B, C, D utilizzate in seguito per calcolare la funzione di trasferimento relativa al progetto.

### FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D) = \frac{20000 * (15 + s)}{s^2 * (15 * s^2 + 550 * s + 8250)}$$

Dove  $sI$  è una matrice diagonale con autovalori  $s$  e la matrice  $(sI - A)^{-1}$  è calcolata utilizzando la matrice dei cofattori e il determinante.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{J(k+s(p+st))+t(k+ps)} \begin{pmatrix} \frac{Jts^2+Jps+pts+Jk}{s} & \frac{Jts^2+Jps+Jk}{s^2} & \frac{kt}{s} & \frac{kt+pst}{s^2} \\ -kt & \frac{Jts^2+Jps+Jk}{s} & kt & \frac{kt+pst}{s} \\ \frac{Jk}{s} & \frac{Jk+Jps}{s^2} & \frac{Jts^2+Jps+pts+kt}{s} & \frac{Jts^2+pts+kt}{s^2} \\ Jk & \frac{Jk+Jps}{s} & -Jk & \frac{Jts^2+pts+kt}{s} \end{pmatrix}$$

Fig. 0: nella figura  $t = I$  variabile del sistema

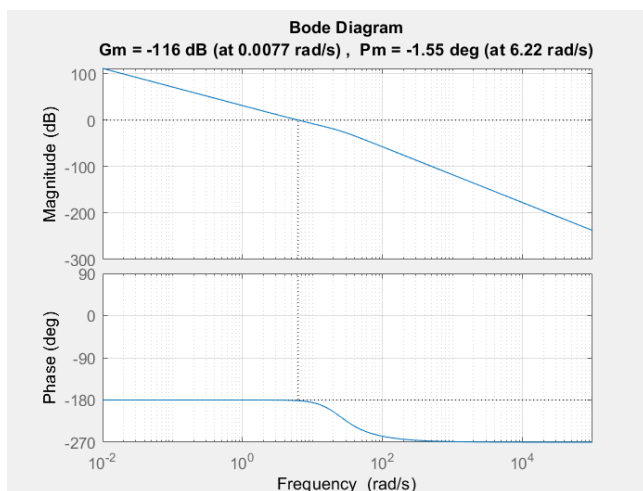


Fig. 1: diagramma di bode per la funzione di trasferimento

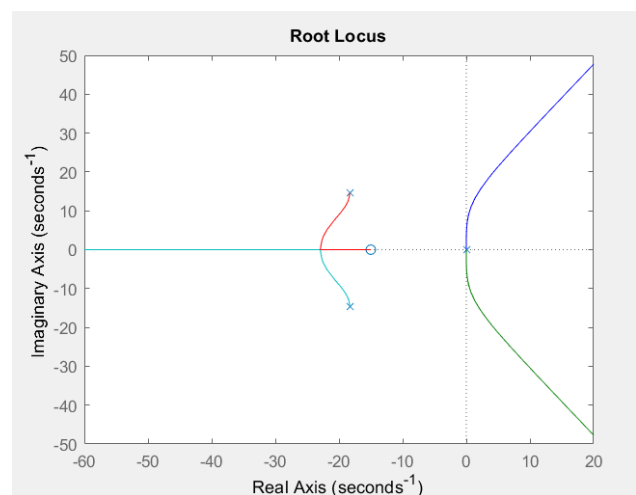
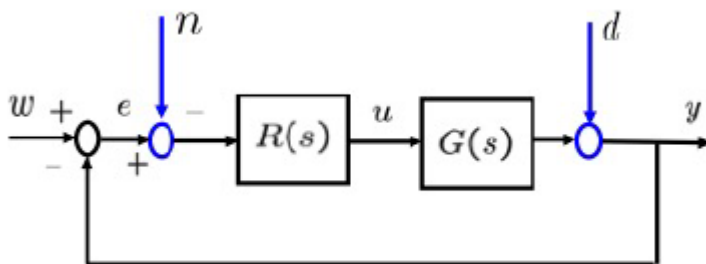


Fig. 2: luogo delle radici per la funzione di trasferimento

Il regolatore del sistema viene progettato seguendo le specifiche date:

- 1) Errore a regime nullo con riferimento a gradino con ampiezza  $w(t) = W1(t)$ ;
- 2) Margine di fase  $M_f \geq 45^\circ$  per garantire una certa robustezza del sistema;
- 3) Sovraelongazione percentuale al massimo dell'1%;
- 4) Tempo di assestamento al 5% di 0,5;
- 5) Abbattimento sul disturbo in uscita  $n(t)$  di almeno 30 volte.

Il controllo sulle specifiche viene effettuato dal regolatore, il quale viene progettato mediante l'utilizzo di due componenti posti in serie (regolatore statico e dinamico) che si occupano di soddisfare le specifiche statiche e dinamiche.



## REGOLATORE STATICO

Il regolatore statico si occupa di risolvere le prestazioni a regime esaurito ( $t \rightarrow \infty$ ). Dalle specifiche date consideriamo un errore a regime nullo con riferimento a gradino. Questo implica  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  con  $e(t) = w(t) - y(t)$  dove  $y(t)$  rappresenta la posizione angolare dell'estremità non attuata. Risolvendo l'equazione si ottiene

$$e_\infty = W * \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = 0 \text{ se e solo se } g > 0.$$

Tale condizione è verificata se  $L(s)$  presenta almeno un polo nell'origine. Nel nostro sistema tale condizione è già verificata in quanto  $G(s)$  presenta due poli nell'origine.

## REGOLATORE DINAMICO

Il regolatore dinamico deve permettere alla funzione  $G_d(s) = G(s)R_d(s)$ , dove  $R_d(s)$  rappresenta il regolatore dinamico da progettare, di rispettare le specifiche dinamiche riportate precedentemente.

Dalla specifica sulla sovraelongazione  $S\% \leq 1\%$  dove  $S\% = 100e^{\frac{-\pi xi}{\sqrt{1-xi^2}}}$  si ottiene:

$$xi = 0.826085054613957$$

Dal valore appena trovato si può risalire al margine di fase della funzione  $M_f \geq 100 * xi$

$$M_f \geq 82.608505461395710^\circ$$

Il valore dato nelle specifiche ( $M_f \geq 45^\circ$ ) è meno stringente rispetto a quello trovato, sarà dunque quest'ultimo ad essere utilizzato come valore significativo.

Infine, dalla specifica sul tempo di assestamento al 5% minore di 0.5 è possibile ottenere la pulsazione naturale del sistema:

$$w_n = \frac{300}{Ta_{5\%} * M_f} = 7.263174618 \frac{rad}{s}$$

Grazie a ciò si calcola l'intervallo di frequenze in cui è possibile posizionare la frequenza critica. Tale intervallo è dato da  $w_n$  come lower bound e  $w_{cmax}$  (da specifiche) come upper bound.

$$7.263174618 \frac{rad}{s} \leq w_c \leq 100 \frac{rad}{s}$$

Le restrizioni appena trovate permettono di fornire un grafo delle zone di attraversamento proibite.

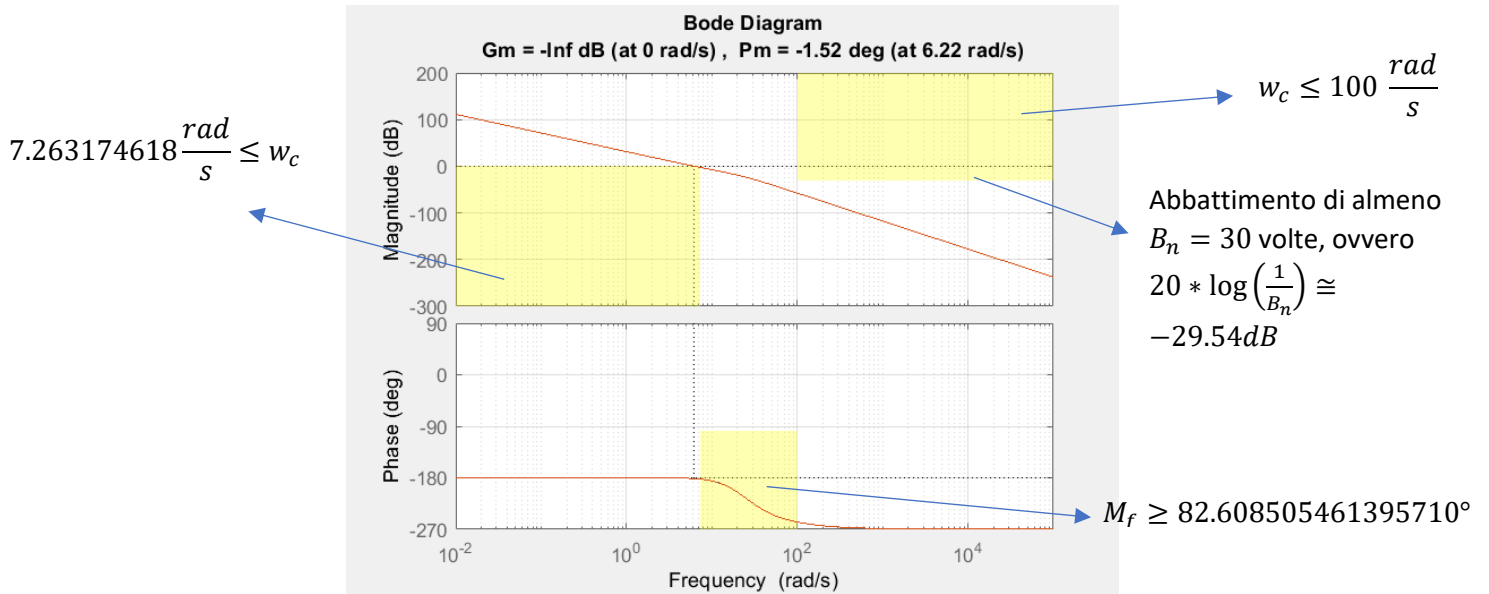


Fig. 3: diagramma di bode per la funzione di trasferimento con annesse zone proibite

Nell'intervallo delle pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento  $w_c$  non esistono pulsazioni in cui la fase rispetta il vincolo sul margine, ci troviamo dunque nello scenario di tipo B. Poiché, come dimostrato in precedenza, è necessario un solo polo nell'origine per rispettare le prestazioni statiche, abbiamo sviluppato il regolatore dinamico eliminando un polo nell'origine (così da alzare di  $\pi/2$  la fase) e cancellando i poli complessi coniugati. Abbiamo infine aggiunto tre poli in modo da rispettare il vincolo di realizzabilità del regolatore, per cui il grado relativo di  $R(s)$  deve essere maggiore o uguale a 0.

$$R_d(s) = \frac{s * (s^2 + 36.67 * s + 550)}{(s + 41)^3}$$

La cancellazione dei poli complessi coniugati può portare ad una minore robustezza del sistema. Tale tematica viene discussa successivamente.

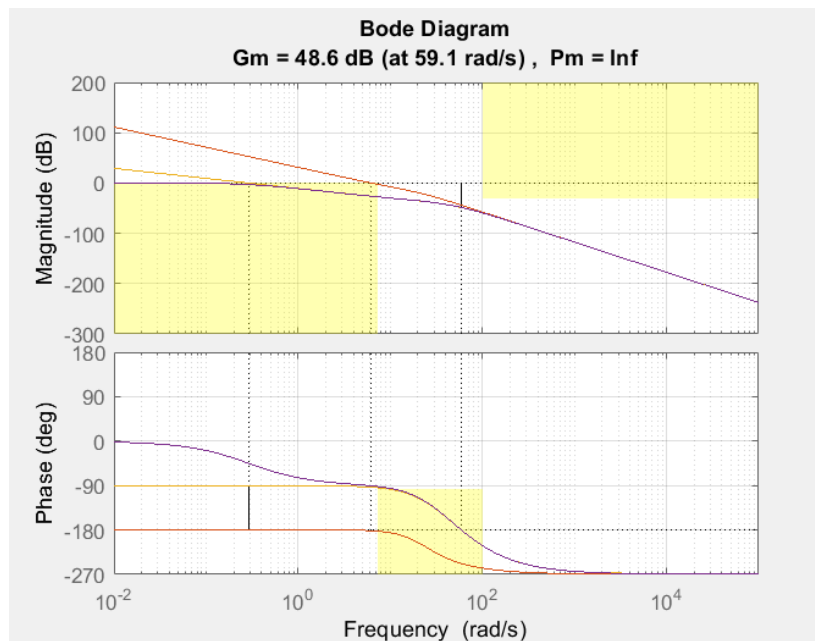


Fig. 4: diagramma di bode per  $G_d(s) = G(s) * R_d(s)$

In questo modo ci siamo ricondotti ad uno scenario di tipo A, possiamo dunque modificare il guadagno per avere la pulsazione di attraversamento nell'intervallo valido.

$$R_s(s) = 24$$

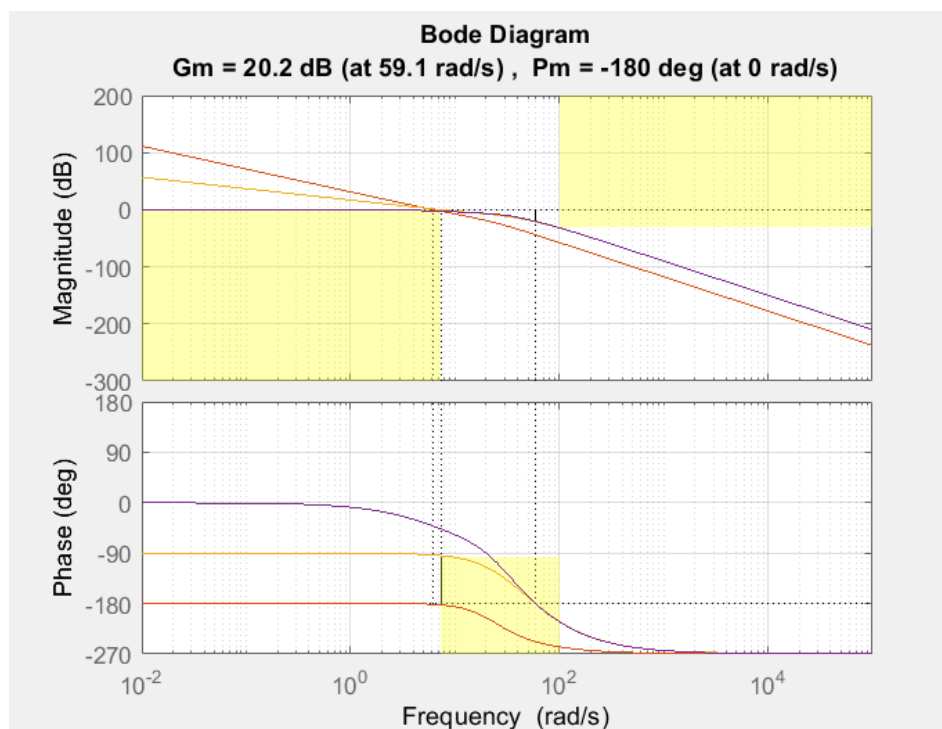


Fig. 5: diagramma di bode per  $G_s(s) = G(s) * R_d(s) * R_s(s)$

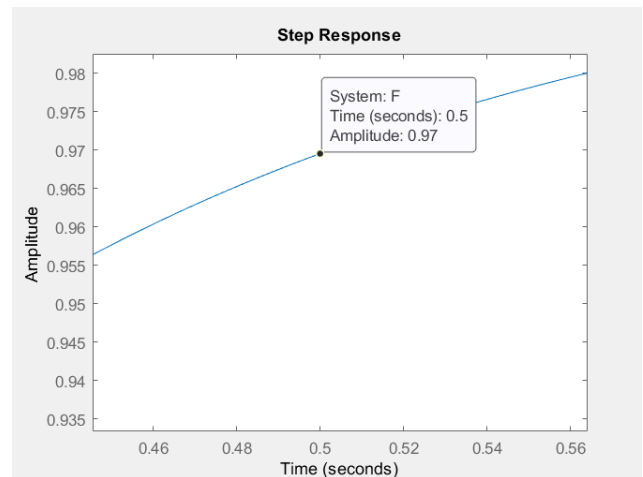
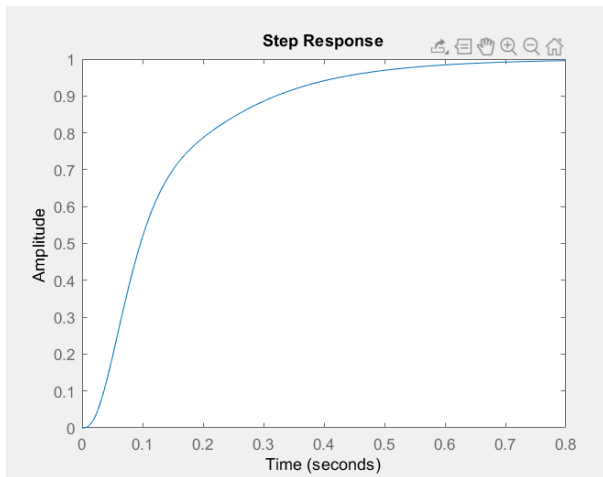


Fig. 6: risposta al gradino di  $F = \frac{G_e(s)}{1+G_e(s)}$

Dalla risposta al gradino è possibile verificare il rispetto della specifica sul tempo di assestamento del 5% a 0.5 in quanto  $0.95 \leq y(t) \leq 1.05$ .

Tramite Simulink abbiamo verificato l'abbattimento di 30 volte del disturbo e abbiamo notato che l'uscita oscilla all'interno del range consentito dall'abbattimento:

$$\left[ W * 1(t) - \frac{A_n}{B_n}, W * 1(t) + \frac{A_n}{B_n} \right]$$

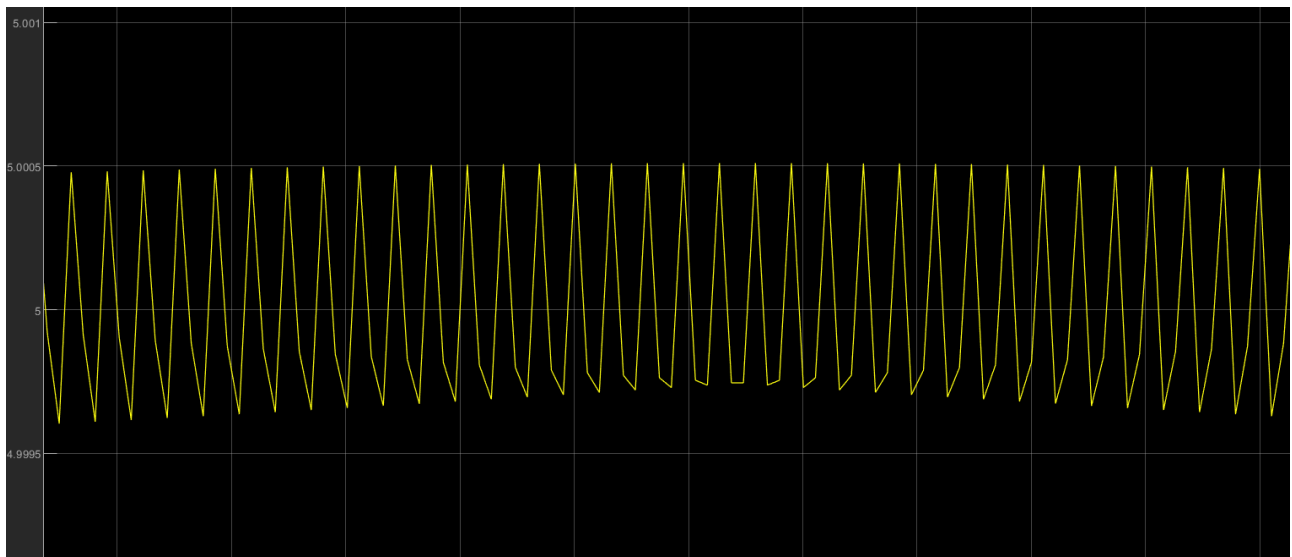


Fig. 7: uscita del sistema con disturbo

## DISCUSSIONE SULLA STABILITÀ DEL SISTEMA:

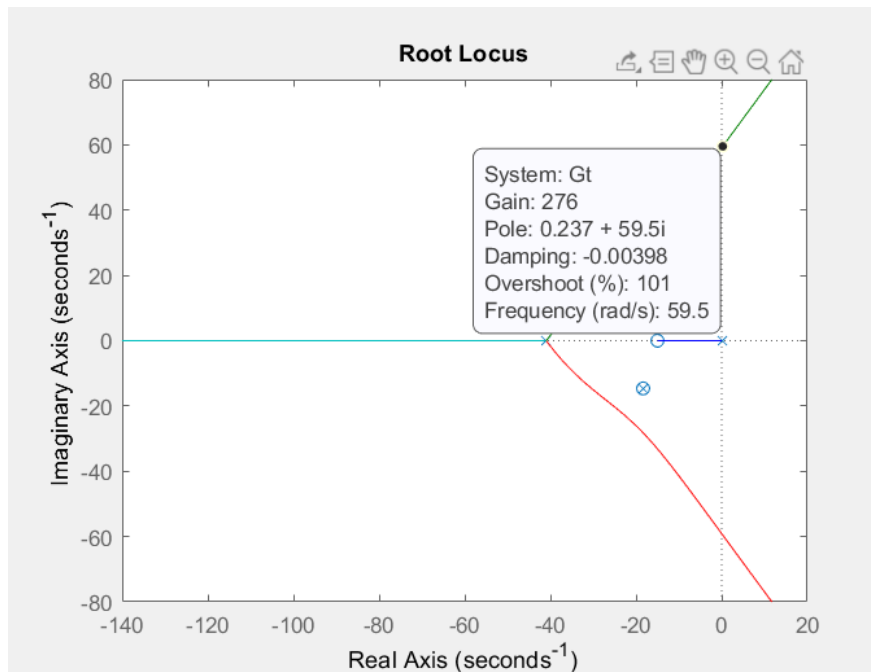


Fig. 8: luogo delle radici per  $G_d(s) = G(s) * R_d(s)$

Dal luogo delle radici del sistema si nota che è possibile alzare il guadagno fino a 276 senza rendere instabile il sistema.

Instabilità generata dalla cancellazione dei poli complessi coniugati:

La cancellazione dei poli complessi coniugati risulta asintoticamente stabile perché poli a parte reale negativa. La robustezza rimane incerta e da verificare sperimentalmente in quanto la cancellazione dei poli complessi coniugati potrebbe non essere completa portando ad una deformazione del grafico di fase e ampiezza nell'intorno delle pulsazioni di cancellazione. Si studia quindi in un intorno di valori verificandone la precisione con due esempi riguardo la precisione.

```
R_d = ((s*(s^2 + 35*s + 550))/((s+41)^3));
Gt=G*R_d*R_s;
```



```
R_z = ((s*(s^2 + 36.665*s + 549.8))/((s+41)^3));
R_d = ((s*(s^2 + 36.67*s + 550))/((s+41)^3));
```



## SIMULINK SISTEMA LINEARE

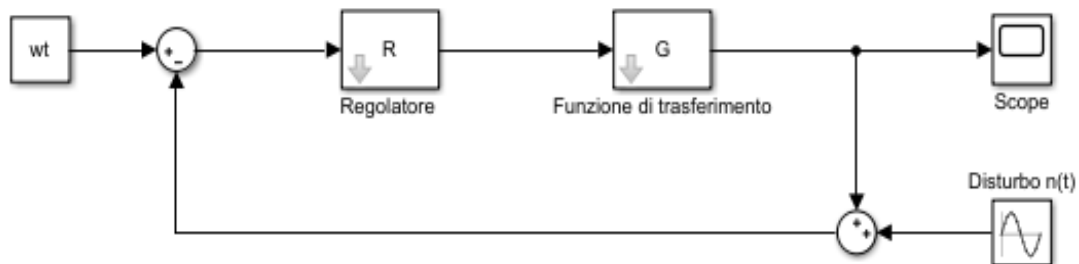


Fig. 9: rappresentazione del sistema lineare

## PUNTO OPZIONALE: SISTEMA DI CONTROLLO PER IL SISTEMA NON LINEARE

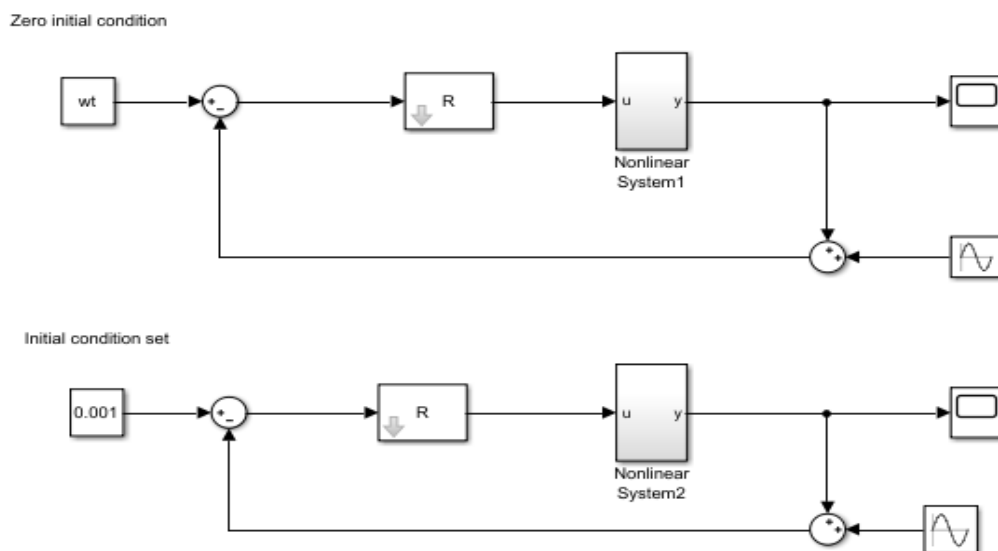


Fig. 10: sistema di controllo non lineare

Abbiamo utilizzato lo stesso sistema di controllo nel caso non lineare e lo abbiamo testato con diverse variazioni sull'ingresso e sul disturbo. Si nota che il sistema non lineare produce un'uscita che rispetta tutti i vincoli assegnati a meno del tempo di assestamento.



Fig. 11: uscita sistema non lineare con ingresso  $w(t)$

## PUNTO OPZIONALE SECONDA PARTE

Nel sistema iniziale è stata ricalcolata la frequenza minima per ottenere un sistema stabile con un tempo di assestamento di 0.25 al 5% ma con cambiamenti del regolatore attuale la funzione non rispetta le specifiche nella step response. È quindi necessario la riprogettazione di un nuovo regolatore.

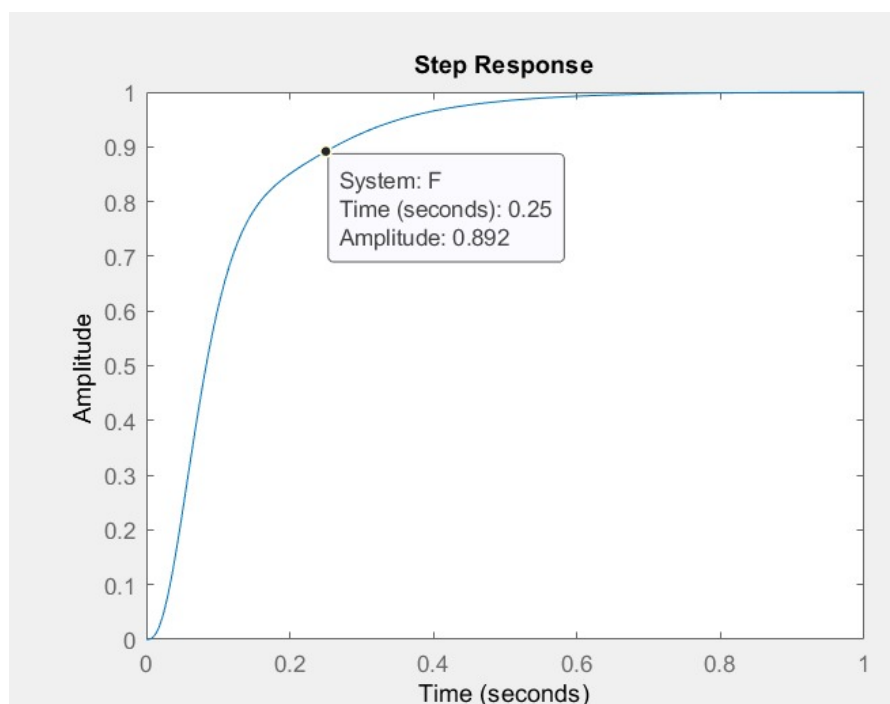


Fig. 12: step response con  $T_{a5} = 0.25$