Esempio di applicazione del metodo di Newton

March 18, 2021

1 Problema modello

Consideriamo il problema modello in forma forte

$$\begin{cases} -\Delta u + u^4 & = & f \text{ in } \Omega \\ u & = & 0 \text{ su } \partial\Omega. \end{cases}$$

La forma debole è: trova $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u^4 v) dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

che può essere riscritto come

$$F(u) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u^4 v) dx - \int_\Omega f v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Linearizzando con Newton, si ha: dato $u^{(0)}$, risolvi

$$\begin{cases} F'(u^{(k)})\delta u = -F(u^{(k)}), \quad k \geq 0 \\ u^{(k+1)} = u^{(k)} + \delta u, \end{cases}$$

dove $F'(\psi)\varphi = \frac{\partial F}{\partial u}(\psi)\varphi$ rappresenta la derivata di Fréchet di F, valutata in ψ e applicata a δu. Nel caso considerato, questo diventa: dato $u^{(k)}$, per $k \geq 0$ risolvi per $\delta u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\nabla \delta u \cdot \nabla v + 4(u^{(k)})^3 \delta u \, v) dx \\ \displaystyle = -\left(\int_\Omega (\nabla u^{(k)} \cdot \nabla v + (u^{(k)})^4 v) dx - \int_\Omega f v dx \right) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u^{(k+1)} = u^{(k)} + \delta u. \end{cases}$$

Per comodità ho usato la stessa variabile δu per tutte le iterazioni. Il criterio di arresto sarà poi basato su $||\delta u|| < TOL$, dove la norma è, ad esempio, quella di $L^2(\Omega)$.