INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA OMOGENEIZZAZIONE E ALL'ESPANSIONE ASINTOTICA A DUE-SCALE

S. MICHELETTI, 29/04/2020

Esempio: PROBLEMA ELLITTICO: TROVA $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$

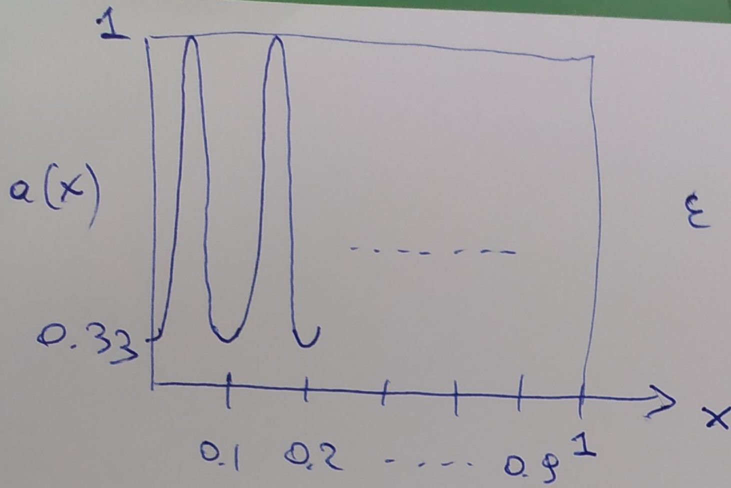
$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f & \text{in } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

	u_ε	$A(x)$
ELETTROSTATICA:	POTENZIALE ELETTRICO	COEFFICIENTE DIELETTRICO
MAGNETOSTATICA:	" MAGNETICO	PERMEABILITÀ MAGNETICA
TERMICA:	TEMPERATURA	CONDUCIBILITÀ TERMICA

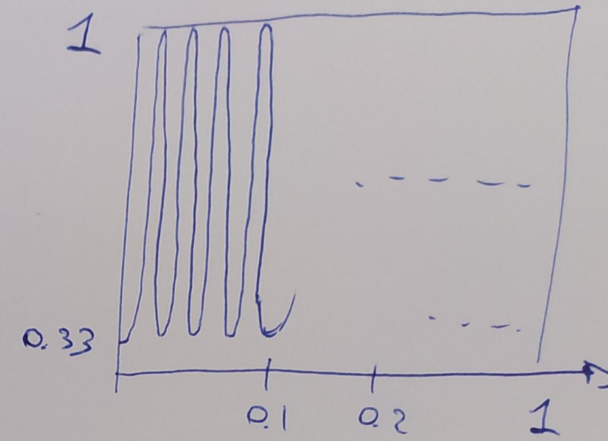
Esempio 1D:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right) = 1 & \text{in } (0,1) \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \end{cases}$$

$$a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)}$$

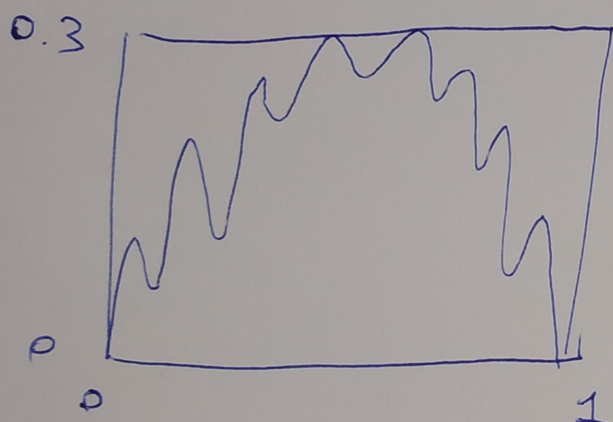


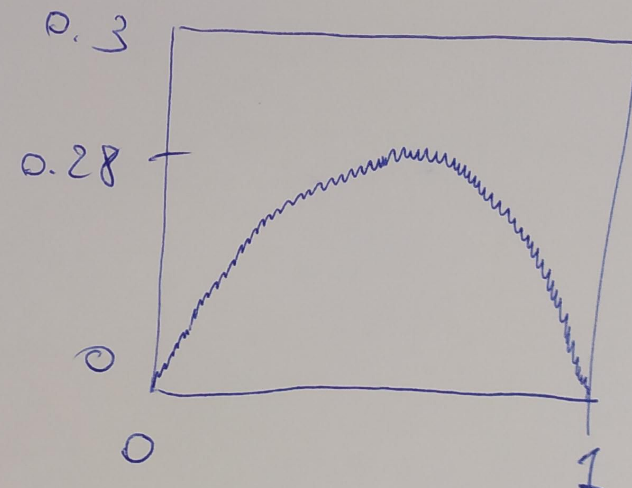
$\varepsilon = 10^{-1}$



$\varepsilon = 10^{-2}$

La soluzione è data da: $$u_\varepsilon(x) = x - x^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) + \frac{\varepsilon}{4\pi^2}\right)$$





u_ε È COSTITUITA DA UN PROFILO PARABOLICO, $x-x^2$, E DA OSCILLAZIONI CON AMPIEZZA $\mathcal{O}(\varepsilon)$, E SI HA CONVERGENZA UNIF.

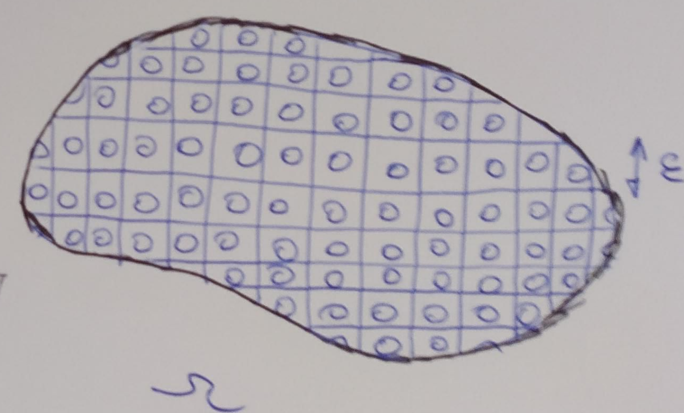
$$u_\varepsilon(x) \to x-x^2, \qquad \varepsilon \to 0$$

$\boxed{\text{IL PROFILO PARABOLICO È L'APPROSSIMAZIONE OMOGENEIZZATA DELLA SOLUZIONE } u_\varepsilon.}$

IN GENERALE, NEL CASO PERIODICO, SE $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u$, IN QUALCHE SENSO, CI CHIEDIAMO QUALE PROBLEMA RISOLVA LA SOLUZIONE LIMITE

$$Lu = g \ ?$$

L È L'OPERATORE OMOGENEIZZATO



APPLICAZIONI: MATERIALI COMPOSITI, MEZZI POROSI, METAMATERIALI, DISPOSITIVI FOTONICI....
↳ (AUXETICI....)

NOTAZIONE

$Y = (0,1)^d \subset \mathbb{R}^d$ CUBO UNITARIO

$A : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ Y- PERIODICA

$$A(x + k e_i) = A(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

$\{e_i\}_{i=1}^d$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^d$.

$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ É εY- PERIODICO ("DILATED FUNCTION")

$$A^\varepsilon(x + k\varepsilon e_i) = A\left(\frac{x + k\varepsilon e_i}{\varepsilon}\right) = A\left(\frac{x}{\varepsilon} + k e_i\right) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = A^\varepsilon(x)$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$L^2_\#(\cancel{Y}) = \{ v \in L^2(Y),\ v\ Y\text{-PERIODICA} \}$

$H^1_\#(Y) = \{ v \in L^2_\#(Y),\ \nabla v \in (L^2_\#(Y))^d \}$

SPAZI PERIODICI

IPOTESI FONDAMENTALE: SEPARAZIONE DELLE SCALE

(5)

x: VARIABILE LENTA

$y := \frac{x}{\varepsilon}$: " VELOCE

SONO TRATTATE COME INDIPENDENTI

NEL CASO PERIODICO: $A = A(y)$ UNIF. POSITIVO E LIMITATO

$$\exists\, \alpha, \beta > 0 \; : \quad \alpha |\xi|^2 \leq A(y)\xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2 \qquad \forall y \in Y, \; \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{\phi\}$$

DAL LEMMA DI LAX-MILGRAM:

$f \in L^2(\Omega)$, $A(y)$ UNIF. POSITIVO E LIMITATO, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists!\, u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ E VALE LA STIMA

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \, , \quad C \text{ INDIPENDENTE DA } \varepsilon$$

METODO DELL'ESPANSIONE ASINTOTICA

(6)

(2) $$u_\varepsilon(x) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i u_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$ SERIE DI POTENZE IN ε CON COEFF. u_i

$u_i(x,y)$ Y-PERIODICI IN y (LOCALMENTE PERIODICI)

FORMALMENTE: $$u_\varepsilon(x) \simeq u_0(x,y)\Big|_{y = \frac{x}{\varepsilon}}$$

EURISTICA: NEL REGIME $\varepsilon \ll 1$, LA DIPENDENZA DA y DI u_0 É MEDIATA SULLA CELLA Y:

$$u_{omog.}(x) := \int_Y u_0(x,y)\,dy$$

QUESTO GIUSTIFICA L'ESPANSIONE (2), ALMENO EURISTICAMENTE.

PROSSIMO STEP: SOSTITUIRE LA (2) NELLA (1) E UGUAGLIARE I COEFFICIENTI DELLE VARIE POTENZE DI ε.

RISULTATI UTILI:

i) $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ LOCALM. PERIODICA

$$\nabla \psi(x, \tfrac{x}{\varepsilon}) = \nabla_x \psi(x,y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \psi(x,y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$$

ii) $\Phi = \Phi(x,y)$. LE DUE PROPRIETÀ SEGUENTI SONO EQUIVALENTI

ii.1) $\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \varepsilon > 0$

ii.2) $\Phi(x,y) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \ \forall y \in Y$

iii) $\nabla u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \nabla_y u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \left(\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i \right)(x, \frac{x}{\varepsilon})$

OVE $u_\varepsilon(x)$ È DEFINITA DALLA (2).

RISULTATO DELLA SOSTITUZIONE DI (2) IN (1):

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\left(A\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = & \boxed{-\frac{1}{\varepsilon^2}}\operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_0(x,y)\right)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& \boxed{-\frac{1}{\varepsilon}}\operatorname{div}_y\left(A(y)\left(\nabla_x u_0(x,y)+\nabla_y u_1(x,y)\right)\right)\Big|_{y=x/\varepsilon} \\
& \boxed{-\frac{1}{\varepsilon}}\operatorname{div}_x\left(A(y)\nabla_y u_0(x,y)\right)\Big|_{y=x/\varepsilon} \\
& \boxed{-\operatorname{div}_y}\left(A(y)\left(\nabla_x u_1(x,y)+\nabla_y u_2(x,y)\right)\right)\Big|_{y=x/\varepsilon} \\
& \boxed{-}\operatorname{div}_x\left(A(y)\left(\nabla_x u_0(x,y)+\nabla_y u_1(x,y)\right)\right)\Big|_{y=x/\varepsilon} \\
& \boxed{-\varepsilon}\operatorname{div}_y\left(A(y)\left(\nabla_x u_2(x,y)+\nabla_y u_3(x,y)\right)\right)\Big|_{y=x/\varepsilon} \\
& \boxed{-\varepsilon}\operatorname{div}_x\left(A(y)\left(\nabla_x u_1(x,y)+\nabla_y u_2(x,y)\right)\right)\Big|_{y=x/\varepsilon} \\
& - \dots
\end{aligned}
$$

Se $f = \mathcal{O}(1)$, UGUAGLIANDO I COEFFICIENTI DELLE DIVERSE POTENZE DI ε, SI OTTIENE UNA "CASCATA" DI EQUAZIONI:

$\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_0(x,y)\right) = 0 & y \in Y \\ y \mapsto u_0(x,y) & Y\text{-PERIODICA} \end{cases}$$

x È UN PARAMETRO, IN QUESTO CASO, E LA PDE È IN y.

u_0 RISULTA ESSERE INDIPENDENTE DA y:

MOLTIPLICHIAMO PER u_0 E INTEGRIAMO IN Y:

$$\int_Y A(y)\nabla_y u_0(x,y)\cdot\nabla_y u_0(x,y)\,dy - \int_{\partial Y} A(y)\nabla_y u_0(x,y)\cdot n(y)\,d\sigma(y) = 0$$

$A(\cdot)$ E $u_0(x,\cdot)$ SONO PERIODICHE, $n(y)$ ASSUME VALORI OPPOSTI SU FACCE OPPOSTE DI ∂Y, COSÌ CHE

$$\int_{\partial Y} A(y)\nabla_y u_0(x,y)\cdot n(y)\,d\sigma(y) = 0$$

L'IPOTESI DI COERCIVITÀ DI $A(y)$ IMPLICA CHE

$$\alpha \, \| \nabla_y u_0(x,\cdot) \|^2_{L^2(Y)} \leq \int_Y A(y) \nabla_y u_0(x,y) \cdot \nabla_y u_0(x,y) \, dy = 0$$

SI HA QUINDI CHE $\boxed{u_0(x,y) \equiv u_0(x)}$

$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_y u_1(x,y) \right) = \mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_x u_0(x) \right) & y \in Y \\ y \mapsto u_1(x,y) & Y\text{- PERIODICA} \end{cases}$$

È UNA EQUAZIONE PER $u_1(x,y)$ IN FUNZIONE DI $u_0(x)$. PER LINEARITÀ:

$$(*) \qquad u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{d} w_i(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)$$

SEPARAZIONE DELLE SCALE (LENTA E VELOCE)

OVE LE FUNZIONI $w_i(y)$, PER OGNI $i \in \{1, \dots, d\}$ RISOLVONO (11)

I COSIDDETTI "PROBLEMI CELLA"

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_y w_i(y)\right) = \mathrm{div}_y\left(A(y)e_i\right), & y \in Y \\ y \mapsto w_i(y) & Y\text{-PERIODICA} \end{cases}$$

$\{w_i(y)\}$ SONO DETTE LE "SOLUZIONI CELLA".

$\mathcal{O}(1)$
$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_2(x,y)\right) = \mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_x u_1(x,y)\right) & y \in Y \\ \qquad + \mathrm{div}_x\left(A(y)\left(\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right)\right) + f(x) & \\ y \mapsto u_2(x,y) & Y\text{-PERIODICA} \end{cases}$$

RISOLUBILITÀ DEI PROBLEMI DIFFERENZIALI SU Y.

$A(y)$ UNIF. ~~...~~ DEFINITO POSITIVO E LIMITATO, $g \in L^2(Y)$.

$\exists! \; v \in H^1_{PER}(Y)/\mathbb{R}$:

$$(3) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}_y \left(A(y) \nabla_y v(y) \right) = g(y) & \text{in } Y \\ y \mapsto v(y) & Y-\text{PERIODICA} \end{cases}$$

SE E SOLO SE $g(y)$ SODDISFA LA CONDIZIONE DI COMPATIBILITÀ

$$\int_Y g(y)\,dy = 0$$

(ALTERNATIVA DI FREDHOLM)

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE: NORMA SU $H^1_{PER}(Y)$:

$$\|v\|_{H^1_{PER}(Y)} = \|\nabla_y v\|_{L^2(Y)}$$

(3) È EQUIVALENTE A UN PROB. VARIAZIONALE SU $H^1_{PER}(Y)$

$$a(v,w) = \ell(w) \qquad \forall w \in H^1_{PER}(Y)$$

CON $\quad a(v,w) := \int_Y A(y)\nabla_y v(y) \cdot \nabla_y w(y)\,dy$

$\quad \ell(w) := \int_Y g(y)\,w(y)\,dy$

- LAX-MILGRAM $\Rightarrow$ $a(\cdot,\cdot)$ É COERCIVA (✓)

  $\ell(\cdot)$ É LIMITATO

$$|\ell(w)| \leq \|w - \langle w \rangle\|_{L^2(Y)} \|g\|_{L^2(Y)} \leq C \|\nabla_y w\|_{L^2(Y)} \|g\|_{L^2(Y)}$$

OVE $\langle w \rangle = \int_Y w(y)\,dy$ e SI É SUPPOSTO $\langle g \rangle = 0$.

$\exists!$ in $H^1_{PER}(Y)/\mathbb{R}$ SEGUONO DAL LEMMA DI LAX-MILGRAM.

— — — — — — —

SI VERIFICA CHE, PER I PROBLEMI $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$, $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ e $\{\omega_i\}_{i=1}^{d}$, LA CONDIZIONE È SODDISFATTA.

PER IL PROBLEMA $\mathcal{O}(1)$, SI HA CHE LA CONDIZIONE $\langle g \rangle = 0$ FORNISCE IL PROBLEMA OMOGENEIZZATO.

L'INTEGRAZIONE SU Y DEL TERMINE NOTO DÀ:

$$\int_Y g(y)\,dy = \underbrace{\int_Y \operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_x u_1(x,y)\right)dy}_{I_1} + \underbrace{\int_Y \operatorname{div}_x\left(A(y)\left(\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right)\right)dy}_{I_2}$$

$$+ \underbrace{\int_Y f(x)\,dy}_{I_3} = I_1 + I_2 + I_3.$$

- $A(\cdot)$ e $u_1(x,\cdot)$ Y-PERIODICI $\Rightarrow I_1 = 0$
- f INDIPENDENTE DA y $\Rightarrow I_3 = f(x)$
- DOBBIAMO QUINDI IMPORRE CHE $-I_2 = I_3$, CHE EQUIVALE A:

15

$$-\mathrm{div}_x \int_Y \Big(A(y)\big(\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big)\Big)\,dy = f(x), \quad x \in \Omega$$

SOSTITUENDO AD $u_1(x,y)$ LA FORMA SEPARATA $(*)$, PRODUCE UNA EQUAZIONE DEL SECOND'ORDINE PER $u_0(x)$:

$$-\mathrm{div}_x \int_Y \Big(A(y)\big(\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big)\Big)\,dy \,.$$

$$= -\mathrm{div}_x \int_Y \Big(A(y)\Big(\nabla_x u_0(x) + \sum_{k=1}^{d} \nabla_y \omega_k(y)\, \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x)\Big)\Big)\,dy$$

$$= -\mathrm{div}_x \big(A^* \nabla_x u_0(x)\big),$$

OVE A^* È LA MATRICE COSTANTE OMOGENEIZZATA, TALE CHE

$$A^* \xi = \int_Y A(y)\Big(\xi + \sum_{k=1}^{d} \xi_k \nabla_y \omega_k(y)\Big)\,dy \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

GLI ELEMENTI DI A^* SONO DATI DA:

$$A^*_{ij} = \int_Y A(y)\left(e_j + \nabla_y \omega_j(y)\right)\cdot e_i \, dy \quad , \quad i,j \in \{1,\dots,d\}. \tag{4}$$

O ALTERNATIVAMENTE DA

$$A^*_{ij} = \int_Y A(y)\left(e_j + \nabla_y \omega_j(y)\right)\cdot\left(e_i + \nabla_y \omega_i(y)\right) dy$$

PROPRIETÀ DI A^*

- A^* NON DIPENDE DA Ω, DA f E DALLE CONDIZIONI AL BORDO SU $\partial\Omega$
- A^* PUÒ ESSERE ANISOTROPO ANCHE SE A È ISOTROPO
- A^* È UNIFORM. DEFINITO POSITIVO: $A^*\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$, $\alpha > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d/\{0\}$
- A SIMMETRICO $\Rightarrow$ A^* È SIMMETRICO

RIASSUMIAMO I RISULTATI PRINCIPALI

- $u_\varepsilon(x) \simeq u_0(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \omega_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x)$, OVE $u_0(x)$ È LA APPROSSIMAZIONE OMOGENEIZZATA CHE RISOLVE IL PROBLEMA

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^* \nabla u_0(x)\right) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

CON A^* LA "CONDUCIBILITÀ" COSTANTE OMOGENEIZZATA CON ELEMENTI

$$A^*_{ij} = \int_Y A(y)\left(e_j + \nabla_j \omega_j(y)\right) \cdot e_i \, dy, \qquad i,j \in \{1, \dots, d\}.$$

- LE FUNZIONI $\omega_j(y)$ SONO DETTE FUNZIONI CELLA E RISOLVONO

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y\left(A(y) \nabla_y \omega_i(y)\right) = \operatorname{div}_y\left(A(y) e_i\right) & y \in Y, \quad i \in \{1, \dots, d\} \\ y \mapsto \omega_i(y) & Y\text{-PERIODICA} \end{cases}$$

✓ VERIFICHIAMO CHE $u_0(x) = 0$ SU $\partial\Omega$.

DALLA (2), VALUTATA SUL BORDO, SI HA CHE

$$0 = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \qquad x \in \partial\Omega.$$

QUESTA PROPRIETÀ VALE ANCHE CHE $\varepsilon \to 0$ E QUINDI, ALMENO FORMALMENTE,

$$u_0(x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega.$$

✓ VERIFICHIAMO CHE A^* SIA DEFINITO POSITIVO. MOLTIPLICHIAMO PER $w_i(y)$ IL PROBLEMA CELLA PER $w_j(y)$ E INTEGRIAMO SU Y:

$$\int_Y A(y)\left(\nabla_y w_j(y) + e_j\right) \cdot \nabla_y w_i(y)\, dy = 0$$

SOMMANDO QUESTA QUANTITÀ (NULLA) A QUELLA IN (4) DÀ:

$$A^*_{ij} = \int_Y A(y)\left(e_j + \nabla_y w_j(y)\right) \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i(y)\right) dy \quad , \; i,j \in \{1, \dots, d\}$$

DA QUESTA RELAZIONE, SI HA CHE

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) \left(\xi + \nabla_y w_\xi (y) \right) \cdot \left(\xi + \nabla_y w_\xi (y) \right) dy$$

OVE $\quad w_\xi (y) := \sum_{k=1}^{d} w_k(y) \xi_k$.

LA COERCIVITÀ DI $A(\cdot)$ IMPLICA CHE

$$A^* \xi \cdot \xi \geq \alpha \int_Y |\xi + \nabla_y w_\xi (y)|^2 dy = \alpha \underbrace{\int_Y |\nabla_y w_\xi (y)|^2 dy}_{\geq 0} + \alpha \int_Y |\xi|^2 dy$$

$$+ 2\alpha \underbrace{\int_Y \xi \cdot \nabla_y w_\xi (y) dy}_{= 0 \text{ PERCHÉ } w_\xi \text{ È PERIODICA}}$$

$$\geq \alpha |\xi|^2 .$$

INOLTRE SE $A^* \xi \cdot \xi = 0 \implies \xi + \nabla_y w_\xi (y) = 0 \quad \forall y \in Y$

$\implies w_\xi (y) = C - \xi \cdot y \quad$ PER QUALCHE COSTANTE C

QUINDI $w_\xi(y)$ È AFFINE IN y, MA QUESTO CONTRADDICE LA PERIODICITÀ (20)

DI $w_\xi(y)$ TRANNE CHE PER $\xi = 0$.

PROBLEMA 1D

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon}{dx}(x)\right) = f(x) & \text{in } (a,b) \\ u_\varepsilon(a) = u_\varepsilon(b) = 0 & , (a,b) \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

$a(y)$ 1-PERIODICO, POSITIVO E LIMITATO

LA SOLUZIONE CELLA È DATA DA $w(y) = C - y + a^* \int_0^y \frac{d\tau}{a(\tau)}$ PER QUALCHE C.

INOLTRE $a^* = \left(\int_0^1 \frac{dy}{a(y)}\right)^{-1}$ COINCIDE CON LA MEDIA ARMONICA DI $a(y)$.

RICONSIDERIAMO IL PROBLEMA DA CUI SIAMO PARTITI, CON

$a(y) = \dfrac{1}{2+\cos(2\pi y)}$. IL CALCOLO DI a^* FORNISCE

$a^* = \left(\int_0^1 (2+\cos(2\pi y))\, dy\right)^{-1} = \frac{1}{2}$ E L'EQUAZIONE OMOGENEIZZATA DIVENTA

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 2 & \text{in } (0,1) \\ u_0(0) = u_0(1) = 0 \end{cases}$$

CHE HA SOLUZIONE $u_0(x) = x - x^2$!

GIUSTIFICAZIONE MATEMATICA DELL'OMOGENEIZZAZIONE

1) IL METODO DELLA FUNZIONE TEST OSCILLANTE (ENERGY METHOD DI TARTAR)

2) LA CONVERGENZA A DUE-SCALE : SOLO NEL CASO PERIODICO

---

1) NON RICHIEDE IPOTESI GEOMETRICHE SUL COMPORTAMENTO ~~[illegible]~~ DEI COEFF. DELLA PDE, QUINDI NON RICHIEDE PERIODICITÀ, STAZIONARIETÀ O ERGODICITÀ. NEL CASO PERIODICO È UN PÒ PIÙ SEMPLICE.

LAX-MILGRAM $\Rightarrow$ (1) $\exists!\ u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$: $\|u_\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$

$\Rightarrow \{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ È LIMITATA IN $H^1_0(\Omega)$ $\Rightarrow$ A MENO DI UNA SOTTOSUCC. CONVERGE DEBOLMENTE AD UN LIMITE, $u \in H^1_0(\Omega)$. SI DIMOSTRA POI CHE QUESTA SOLUZIONE LIMITE RISOLVE

$$\text{(HOM)} \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^* \nabla u(x)\right) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

CON A^* DATO DALLE PRECEDENTI RELAZIONI.

FORMA DEBOLE DI (HOM):

$$\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi\in H^1_0(\Omega) \tag{5}$$

PROBLEMA: $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ e $\nabla u_\varepsilon(x)$ CONVERGONO DEBOLMENTE IN $L^2(\Omega)$ MA IL LORO PRODOTTO NON NECESSARIAMENTE CONVERGE.

IDEA: RIMPIAZZIAMO $\varphi(x)$ CON $\varphi_\varepsilon(x)$ (LA COSIDDETTA TEST FUNCTION OSCILLANTE) DEBOLM. CONVERGENTE, TALE CHE IL TERMINE DI SINISTRA DELLA (5) SI POSSA CONTARE AL LIMITE.

QUESTO FENOMENO È UN ESEMPIO DELLA TEORIA DELLA COMPATTEZZA COMPENSATA DI MURAT E TARTAR.

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \varepsilon\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,\omega_i^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$ OVE LE $\omega_i^*(y)$ RISOLVONO IL PROBLEMA CELLA DUALE

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\left(A^T(y)\left(e_i+\nabla_y\omega_i^*(y)\right)\right)=0 & \text{in } Y\\ y\mapsto\omega_i^*(y) & Y\text{- PERIODICA}\end{cases}$$

23

2) È DOVUTA A NGUETSENG e ALLAIRE.

NOTAZIONE:

- $C^\infty_\#(Y)$ SPAZIO DELLE FUNZIONI INFINITAM. DIFFERENZ. IN $\mathbb{R}^d$ PERIODICHE DI PERIODO Y
- $C_\#(Y)$ SPAZIO DI BANACH DELLE FUNZIONI CONTINUE e Y-PERIODICHE.
- $D(\Omega; C^\infty_\#(Y))$ SPAZIO DELLE FUNZIONI INFINITAMENTE "SMOOTH" E A SUPPORTO COMPATTO IN Ω A VALORI IN $C^\infty_\#(Y)$.

DEFINIZIONE: $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in L^2(\Omega)$ "TWO-SCALE CONVERGES" AL LIMITE $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ SE, PER OGNI $\varphi(x,y) \in D(\Omega, C^\infty_\#(Y))$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega \int_Y u_0(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy$$

DIVISO PER $|Y|$ SE NON 1.

TEOREMA: DA OGNI SUCCESSIONE LIMITATA u_ε in $L^2(\Omega)$ SI PUÒ ESTRARRE UNA SOTTOSUCCESSIONE, ED ESISTE UN LIMITE $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ TALE CHE LA SOTTOSUCCESSIONE "TWO-SCALE CONVERGES" A u_0.

ESEMPI DI TWO-SCALE CONVERGENCE:

1) $u_\varepsilon \to u$ FORTEMENTE IN $L^2(\Omega) \Longrightarrow u_\varepsilon$ TWO-SCALE CONV. A u

2) DATA $u_0(x,y)$ SMOOTH E Y-PERIODICA, $u_\varepsilon(x) := u_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$ TWO-SCALE CONV. A $u_0(x,y)$

3) CON LA STESSA $u_0(x,y)$, $v_\varepsilon(x) := u_0(x, \frac{x}{\varepsilon^2})$ HA LO STESSO TWO-SCALE LIMITE E WEAK-L^2 LIMITE, CIOÈ $\int_Y u_0(x,y)\,dy$.

4) $u_\varepsilon(x) := u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$ CON $u_i(x,y)$ SMOOTH E Y-PERIODICHE IN y, TWO-SCALE CONVERGE A $u_0(x,y)$.

TEORIA GENERALE DELL'OMOGENEIZZAZIONE (NESSUNA IPOTESI GEOMETRICA)

- G- O H- CONVERGENZA (DE GIORGI E SPAGNOLO, MURAT E TARTAR ...)
- TEORIA STOCASTICA (KOZLOV, DAL MASO E MODICA, ...)
- TEORIA VARIAZIONALE (Γ-CONVERGENZA DI DE GIORGI ...)

ALTRE APPLICAZIONI

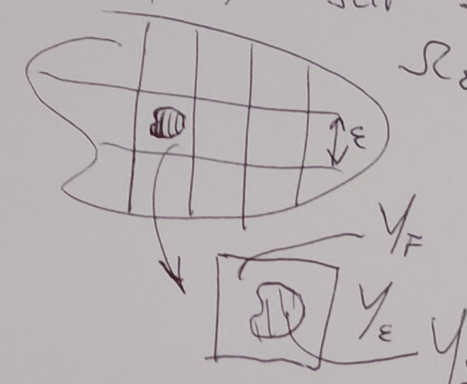
1) LEGGE DI DARCY IN MEZZI POROSI.

FLUIDO INCOMPRIMIBILE E VISCOSO DESCRITTO DALLE EQUAZIONI DI STOKES IN UN MEZZO POROSO PERIODICO CON CONDIZIONI NO-SLIP SULLA SUPERFICIE DEI PORI

$$\begin{cases} \nabla p_\varepsilon - \varepsilon^2 \mu \Delta u_\varepsilon = f & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

μ: VISCOSITÀ

Ω_ε: DIPENDE DA ε !



Ω_ε = DOMINIO FLUIDO

OMOGENEIZZAZIONE:

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{\mu} A(f(x) - \nabla p(x)) & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} u(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) \cdot n = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

A sdp: $A_{ij} = \int_{Y_F} \nabla w_i \cdot \nabla w_j \, dy$

TENSORE DI PERMEABILITÀ

$$\begin{cases} \nabla q_i - \Delta w_i = e_i & \text{in } Y_F \\ \operatorname{div} w_i = 0 & \text{in } Y_F \\ w_i = 0 & \text{in } Y_S \\ y \mapsto q_i, w_i & Y\text{-PERIODICHE} \end{cases}$$

PROB. CELLA

$\{e_i\}_{i=1}^d$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^d$

CONVERGENZA

$p_\varepsilon \to p$ FORTEM. IN $L^2(\Omega)$

$\left(\tilde{u}_\varepsilon(x) - \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_i(x)\right) \to 0$

FORTEM. IN $\left(L^2(\Omega)\right)^d$