Adattività di griglia guidata da stimatori dell'errore

Simona Perotto

http://mox.polimi.it/it/progetti/adattivita.php3

Contenuti della lezione

- Utilità di uno stimatore dell'errore.
- Adattività di griglia: esempi di adattività di griglia in CFD.
- Passo 1: stimatori dell'errore:
  - Adattività basata sul controllo dell'errore d'interpolazione.
  - Adattività basata su stimatori a priori dell'errore.
  - Adattività basata su stimatori a posteriori dell'errore.
- Passo 2: tecniche di adattività.

Utilità di uno stimatore dell’errore

Step 1: problema applicativo d’interesse.

Step 2: modellazione con equazioni differenziali (leggi di conservazione, principi della fisica), di cui (solitamente) non si conosce la soluzione.

Step 3: approssimazione delle equazioni (differenze finite, elementi finiti, volumi finiti, etc.).

Step 4: simulazione numerica $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{soluzione numerica}}$.

Uno dei principali obiettivi del calcolo scientifico è proprio un controllo affidabile dell’errore legato alla procedura sintetizzata nei passi precedenti.

Possibili sorgenti di errore per la soluzione numerica:

- errori sui dati (errori di misura);
- errori di modello (fenomeni descritti solo parzialmente);
- errori di discretizzazione (legati all’approssimazione numerica);
- errori geometrici (linearizzazione dei bordi del dominio);
- errori di quadratura (approssimazione di integrali);
- errori di arrotondamento (aritmetica floating-point).

Il nostro interesse è rivolto all'errore di discretizzazione e ad un suo controllo opportuno.

L'errore di discretizzazione fornisce:

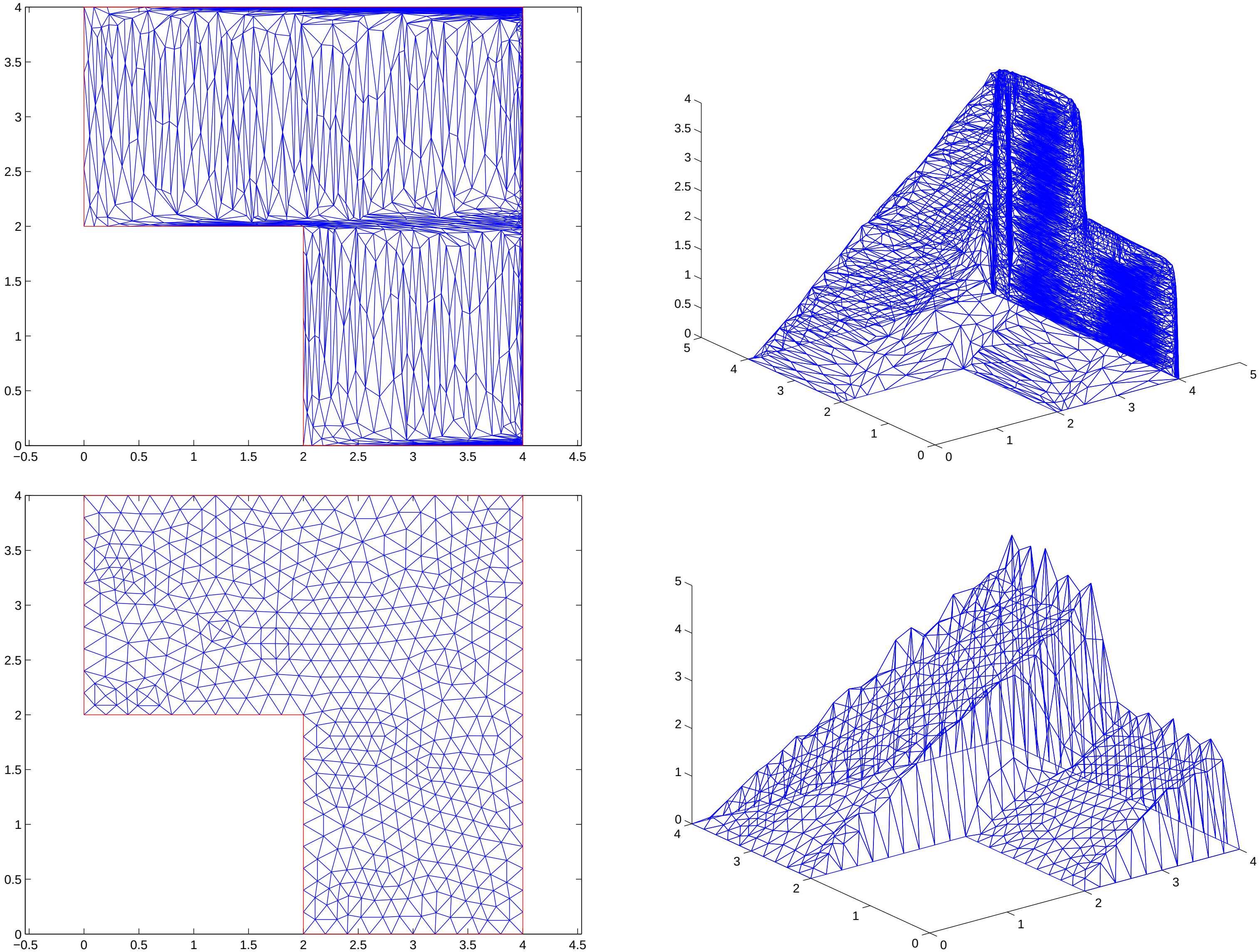
- una misura dell'affidabilità dell'approssimazione adottata (lower e upper bounds);
- uno strumento per guidare l'adattazione di griglia, ovvero per avere una griglia computazionale più adatta per il problema in esame.

$$\Uparrow$$

Riferimenti Bibliografici

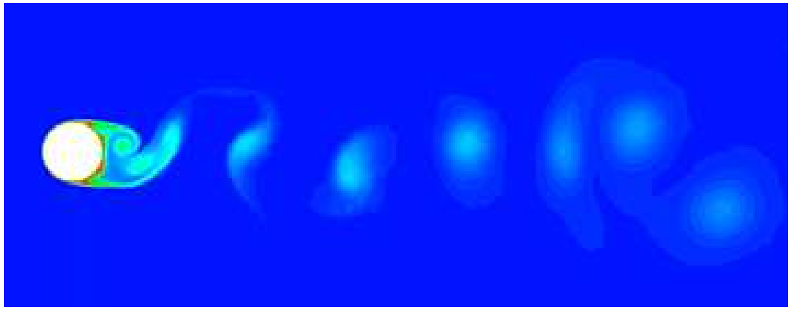
- R. Verfürth, *A Review of A-Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley & Teubner, 1996.
- M. Ainsworth, J.T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, Wiley-Interscience, 2000.
- K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Computational Differential Equations*, Cambridge University Press, 1996.

Adattività di griglia

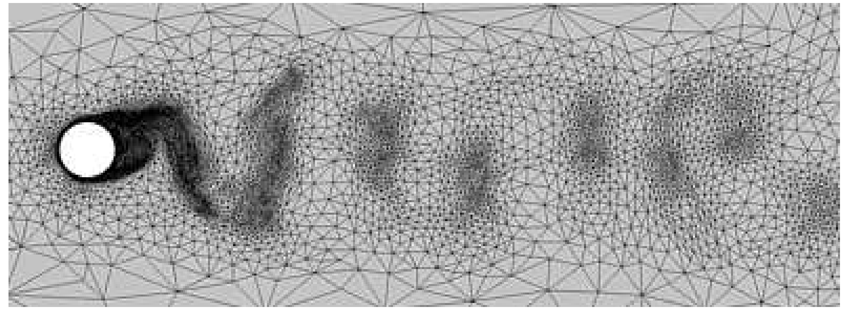


con e senza adattività

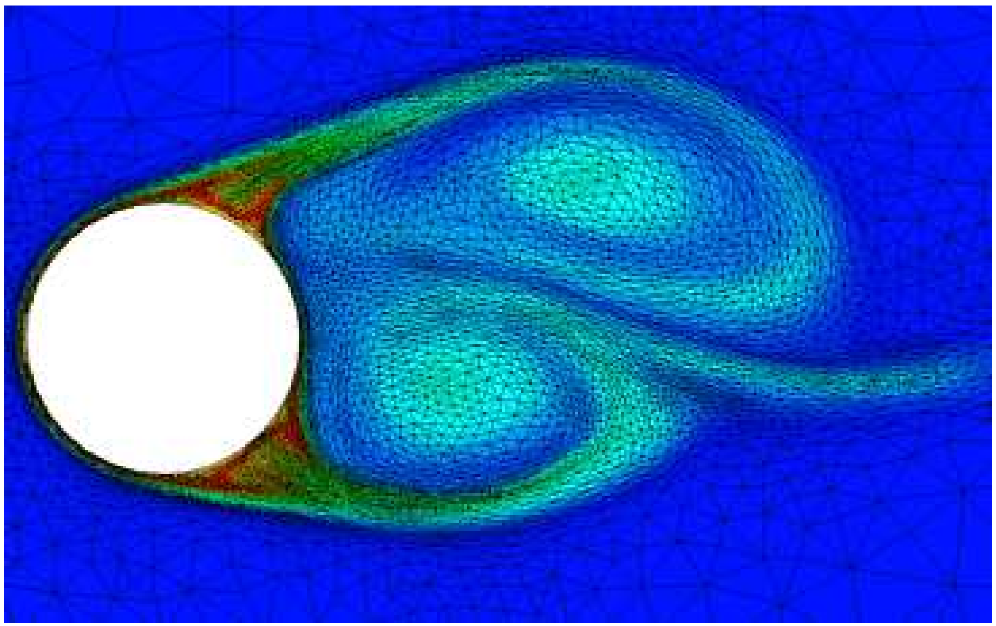
Adattività di griglia in CFD: flusso attorno ad un cilindro riscaldato



campo di temperatura



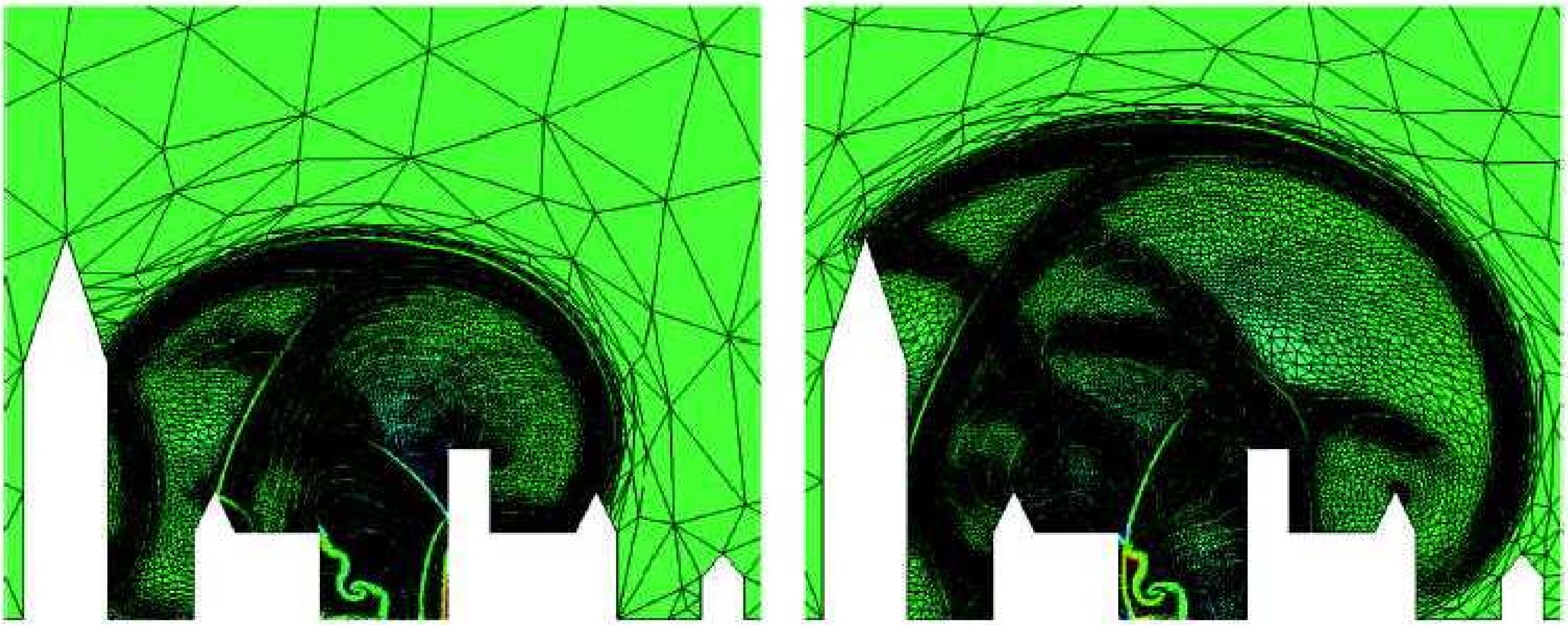
mesh adattata



campo di temperatura e mesh adattata sovrapposte

[*http://amcg.ese.ic.ac.uk/index.php?title=Mesh_Adaptivity*]

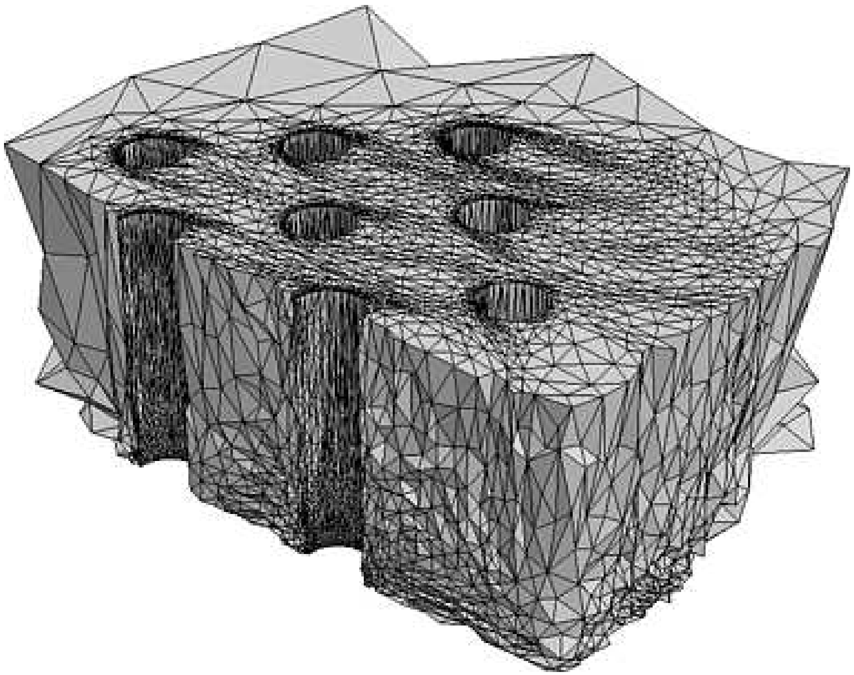
Adattività di griglia in CFD: propagazione di un'onda (esplosione)



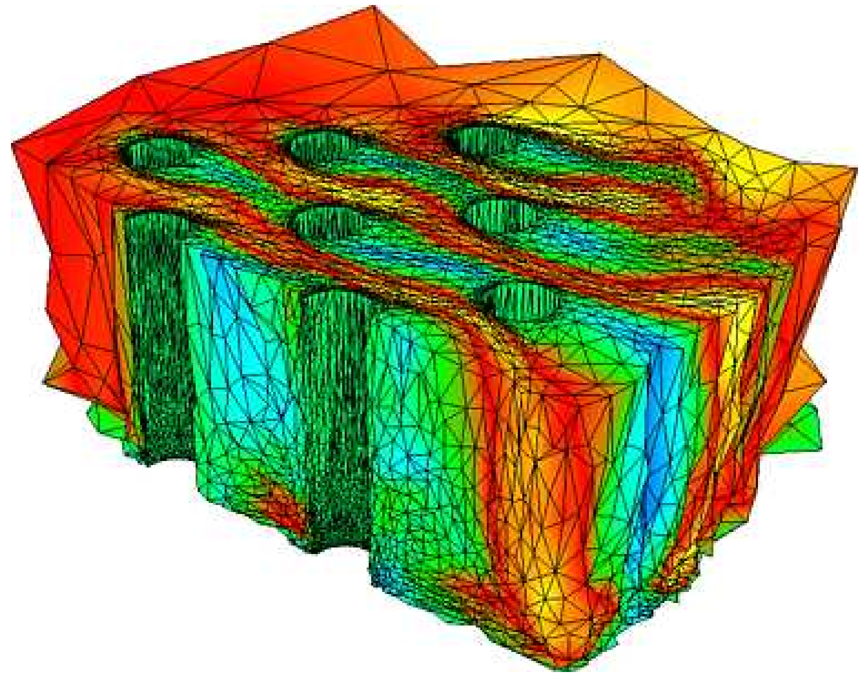
griglie anisotrope

[*F. Alauzet, P.J. Frey, B. Mohammadi, 2003*]

Adattività di griglia in CFD: flusso attorno ad un fascio di tubi



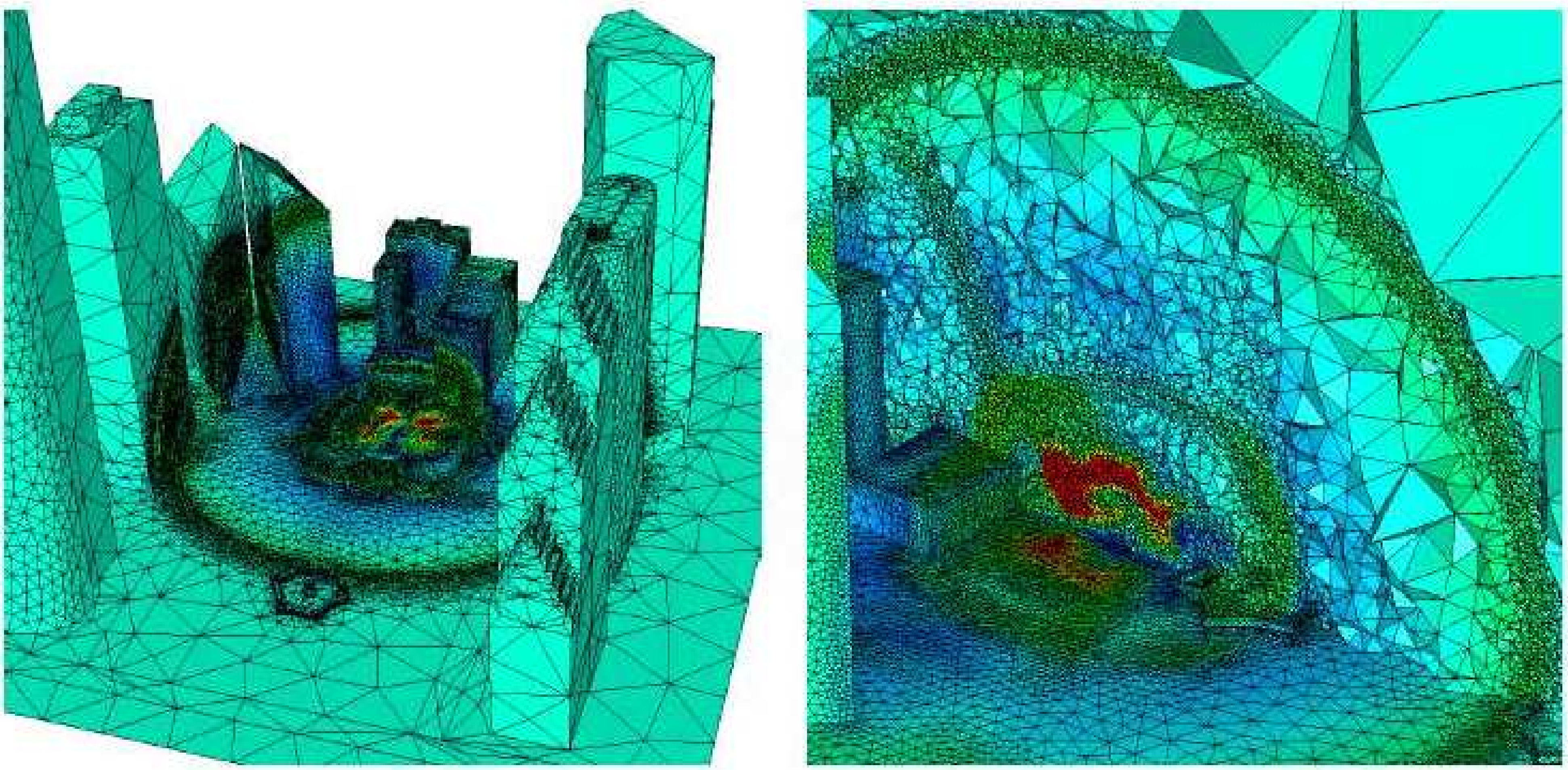
mesh adattata



componente u della velocità

[*http://amcg.ese.ic.ac.uk/index.php?title=Mesh_Adaptivity*]

Adattività di griglia in CFD: propagazione di un'onda (esplosione)



griglie isotrope

[*F. Alauzet, P.J. Frey, B. Mohammadi, 2003*]

Azzeramento

Consideriamo il problema differenziale modello (equazione di Poisson con condizioni al bordo miste): trovare $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su} \quad \Gamma_D \\ \partial_n u = g & \text{su} \quad \Gamma_N \end{cases} \qquad \text{(PM)}$$

con $\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u$ laplaciano di u; f e g funzioni assegnate; $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

Step 1. Formulazione debole: trovare $u \in V$, tale che

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) = (f, v) + (g, v)_{\Gamma_N} \qquad \forall v \in V, \qquad \text{(FD)}$$

con $V = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$; $(g, v)_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} g v \, ds$; $f \in L^2(\Omega)$; $g \in L^2(\Gamma_N)$.

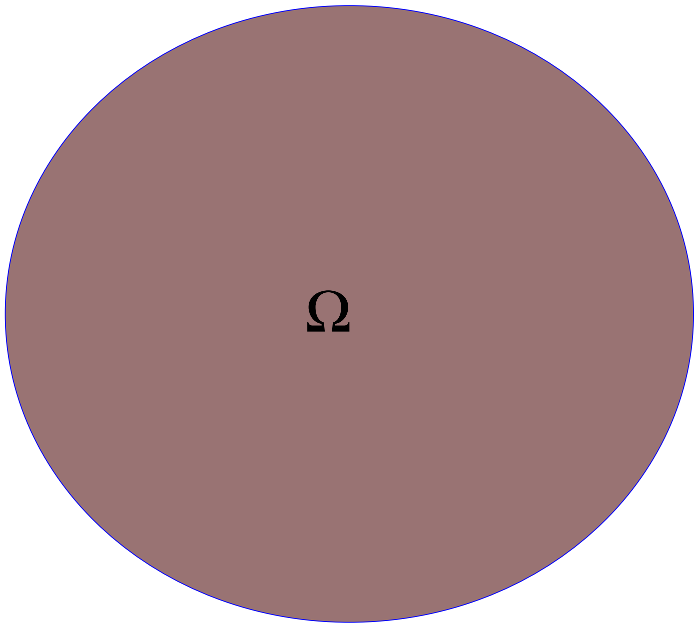
R1: funzioni a quadrato sommabile.

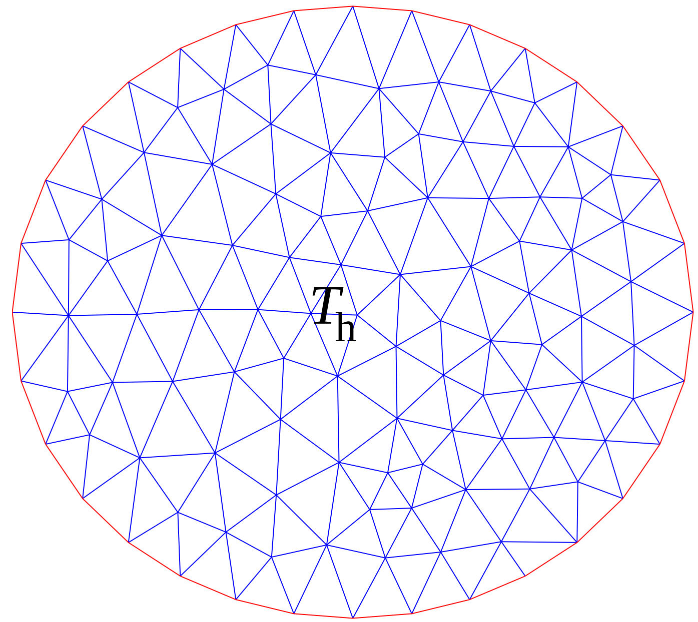
$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} < \infty\}$$

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \quad \text{t.c.} \quad \partial_x f, \partial_y f \in L^2(\Omega), \; f\big|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

La definizione si estende allo spazio $H^s(\Omega)$, con $s \geq 1$.

Step 2. Discretizzazione ad Elementi Finiti (EF): consideriamo una triangolazione $\mathcal{T}_h$ del dominio Ω:





Spazio degli elementi finiti (funzioni lineari a tratti):

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \ \text{ t.c. } v\big|_K \text{ è lineare}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \text{ e } v\big|_{\Gamma_D} = 0\} \subset V.$$

$\Longrightarrow$ trovare $u_h \in V_h$, tale che

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) + (g, v_h)_{\Gamma_N} \qquad \forall v_h \in V_h. \qquad \text{(FD2)}$$

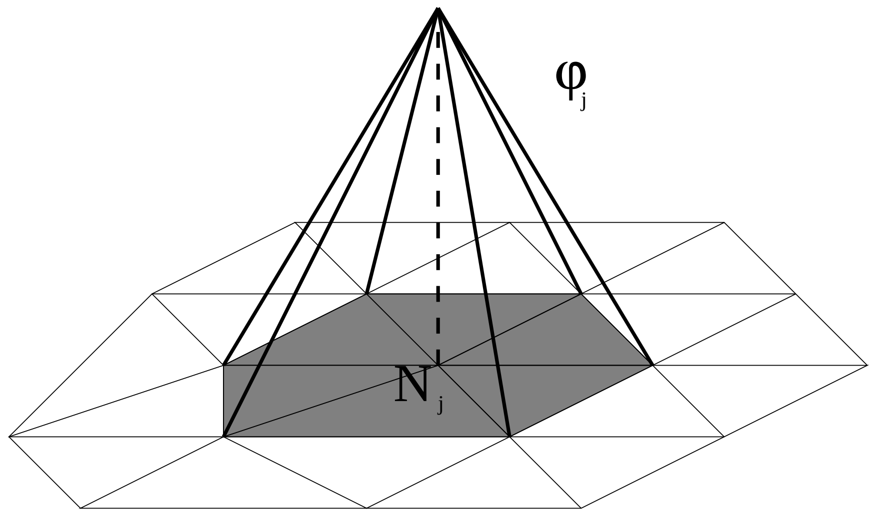
Osservazione: in alternativa alle funzioni lineari a tratti, potevano essere scelte funzioni di grado qualsiasi p.

Step 3. Definizione dell'errore di discretizzazione: $e_h = u - u_h$. Si può facilmente verificare che e_h soddisfa la seguente equazione

$$a(e_h, v_h) = (\mathrm{FD}) - (\mathrm{FD2}) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h, \qquad \text{(OG)}$$

nota come ortogonalità di Galerkin.

Step 4. Definizione di una base (lagrangiana) di V_h: $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h}$, con N_h numero dei nodi di $\mathcal{T}_h$ non appartenenti a Γ_D.



Step 3. Definizione dell'errore di discretizzazione: $e_h = u - u_h$. Si può facilmente verificare che e_h soddisfa la seguente equazione

$$a(e_h, v_h) = (\mathrm{FD}) - (\mathrm{FD2}) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h, \qquad \text{(OG)}$$

nota come ortogonalità di Galerkin.

Step 4. Definizione di una base (lagrangiana) di V_h: $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h}$, con N_h numero dei nodi di $\mathcal{T}_h$ non appartenenti a Γ_D.

Step 5. Scelto $v_h = \varphi_i$ in (FD2) ed espresso u_h in termini delle funzioni di base,

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(\mathbf{x}),$$

ci si riconduce alla risoluzione del sistema di equazioni lineari

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

con $\{A\}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \qquad \{\mathbf{u}\}_j = u_j = u_h(\mathbf{x}_j), \qquad \{\mathbf{b}\}_j = (f, \varphi_j) + (g, \varphi_j)_{\Gamma_N}.$

Adattività di Griglia $\Longleftarrow$ Stimatore dell'Errore + Strategie di adattazione

PASSO 1: stimatori dell'errore

Il punto di partenza delle procedure di adattività che considereremo è una stima dell'errore del tipo seguente

$$\|e_h\|_V \leq S = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

dove $\| \cdot \|_V$ denota una norma opportuna definita su V (tipicamente sarà la norma di $\mathrm{H}^1(\Omega)$ o di $\mathrm{L}^2(\Omega)$), S è lo stimatore (globale) dell'errore di discretizzazione, mentre η_K ne rappresenta il corrispondente stimatore locale.

R2: norma L^2 ed H^1.

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \qquad \forall v \in L^2(\Omega);$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

con ∇ operatore gradiente.

Adattività di Griglia $\Longleftarrow$ Stimatore dell’Errore + Strategie di adattazione

PASSO 1: stimatori dell’errore

Il punto di partenza delle procedure di adattività che considereremo è una stima dell’errore del tipo seguente

$$\|e_h\|_V \leq S = \Bigg(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \Bigg)^{1/2},$$

dove $\| \cdot \|_V$ denota una norma opportuna definita su V (tipicamente sarà la norma di $\mathrm{H}^1(\Omega)$ o di $\mathrm{L}^2(\Omega)$), S è lo stimatore (globale) dell’errore di discretizzazione, mentre η_K ne rappresenta il corrispondente stimatore locale.

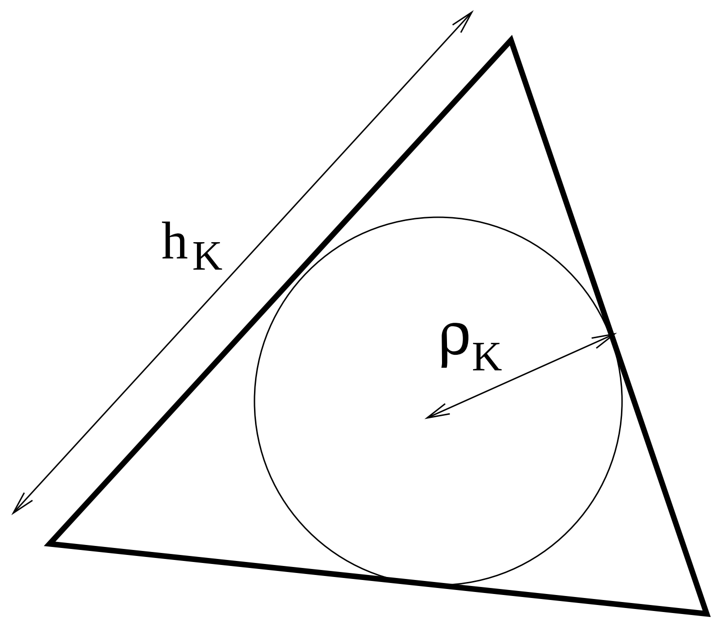
L’idea è di garantire che l’errore sia “vicino” a una certa tolleranza τ prefissata:

$$\|e_h\|_V \sim \tau.$$

Gli stimatori S possono essere distinti in:

- stimatori $\boxed{\text{a priori}}$: lo stimatore locale è funzione della soluzione esatta u (tipicamente di una sua derivata) e del diametro h_K dell'elemento K:

$$\eta_K = \eta_K(u; h_K) = h_K^\alpha \, \|u\big|_K\|_\beta$$



Gli stimatori S possono essere distinti in:

- stimatori $\boxed{\text{a priori}}$: lo stimatore locale è funzione della soluzione esatta u (tipicamente di una sua derivata) e del diametro h_K dell'elemento K:

$$\eta_K = \eta_K(u; h_K) = h_K^{\alpha} \, \|u\big|_K\|_{\beta}$$

Il problema è che u è incognita!! Tali stime forniscono delle informazioni di tipo qualitativo sull'errore commesso (analisi ordine di convergenza).

- stimatori $\boxed{\text{a posteriori}}$: lo stimatore locale è funzione della soluzione approssimata u_h e del diametro h_K dell'elemento K:

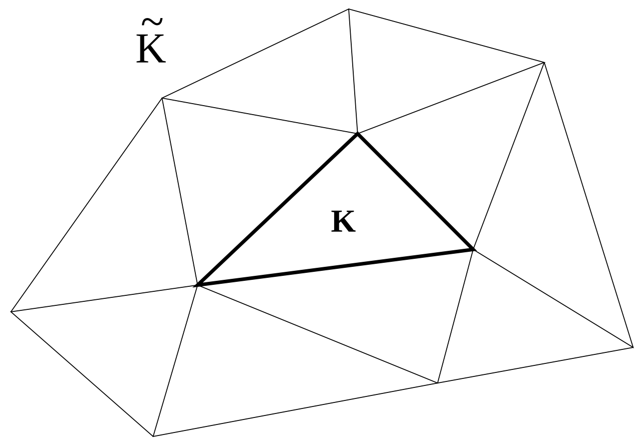
$$\eta_K = \eta_K(u_h; h_K) = h_K^{\gamma} \, \|\rho_h(u_h\big|_K)\|_{\delta}$$

Tali stime forniscono delle informazioni di tipo quantitativo sull'errore commesso. Ho una quantità ora calcolabile esplicitamente!!

Miglioramento della qualità dello stimatore variando localmente h_K (griglie non-uniformi) $\Longrightarrow$ h-adattività.

Proprietà di un stimatore dell'errore "credibile"

- $\boxed{\text{località}}$: calcolabile a partire da quantità dipendenti dal singolo elemento K o da un insieme ristretto $\widetilde{K}$ di elementi adiacenti a K :



patch di elementi

Proprietà di un stimatore dell'errore "credibile"

- $\boxed{\text{località}}$: calcolabile a partire da quantità dipendenti dal singolo elemento K o da un insieme ristretto $\widetilde{K}$ di elementi adiacenti a K :

- $\boxed{\text{affidabilità}}$: esiste una costante $C_1 \simeq 1$ tale che $C_1 \|e_h\|_V \leq S$. Questo garantisce che, se $S \leq \tau$, allora anche $\|e_h\|_V \leq \tau$.

  Osservazione: se C_1 fosse piccolo (ad esempio, $C_1 = 10^{-2}$), anche se $S \leq \tau$ (ad esempio, $S \leq \tau = 10^{-4}$), avrei $\|e_h\|_V \leq \dfrac{\tau}{C_1}$ (ovvero $\|e_h\|_V \leq 10^{-2}$) $\Longrightarrow$ non affidabile!!!

Proprietà di un stimatore dell'errore "credibile"

- $\boxed{\text{località}}$: calcolabile a partire da quantità dipendenti dal singolo elemento K o da un insieme ristretto $\widetilde{K}$ di elementi adiacenti a K :

- $\boxed{\text{affidabilità}}$: esiste una costante $C_1 \simeq 1$ tale che $C_1 \|e_h\|_V \leq S$. Questo garantisce che, se $S \leq \tau$, allora anche $\|e_h\|_V \leq \tau$.

- $\boxed{\text{efficienza}}$: esiste una costante $C_2 \simeq 1$ tale che $S \leq C_2 \|e_h\|_V$. Questo garantisce che, se $S \simeq \tau$, allora anche $\|e_h\|_V \simeq \tau$.

  Osservazione: se C_2 fosse grande (ad esempio, $C_2 = 100$), anche se $S \simeq \tau$ (ad esempio, $S \simeq \tau = 10^{-4}$), avrei $\|e_h\|_V \geq \dfrac{\tau}{C_2}$ (ovvero $\|e_h\|_V \geq 10^{-6}$), ovvero potrei trovare un errore in realtà ben più piccolo di quanto desiderato $\Longrightarrow$ non efficiente!!!

Proprietà di un stimatore dell'errore "credibile"

- $\boxed{\text{località}}$: calcolabile a partire da quantità dipendenti dal singolo elemento K o da un insieme ristretto $\widetilde{K}$ di elementi adiacenti a K :

- $\boxed{\text{affidabilità}}$: esiste una costante $C_1 \simeq 1$ tale che $C_1 \|e_h\|_V \leq S$. Questo garantisce che, se $S \leq \tau$, allora anche $\|e_h\|_V \leq \tau$.

- $\boxed{\text{efficienza}}$: esiste una costante $C_2 \simeq 1$ tale che $S \leq C_2 \|e_h\|_V$. Questo garantisce che, se $S \simeq \tau$, allora anche $\|e_h\|_V \simeq \tau$.

In genere solo alcune di queste proprietà son dimostrabili rigorosamente.

Osservazione 1: uno stimatore S si dice "robusto" se risulta essere al tempo stesso affidabile ed efficiente, ovvero se soddisfa la seguente relazione

$$C_1\|e_h\|_V \leq S \leq C_2\|e_h\|_V,$$

con $C_1,\, C_2 \simeq 1$.

Osservazione 2: le proprietà di affidabilità ed efficienza devono valere anche per lo stimatore locale η_K

$$C_3\|e_h\|_{V(\widetilde{K})} \leq \eta_K \leq C_4\|e_h\|_{V(\widetilde{K})} \quad \text{con} \quad C_3,\, C_4 \simeq 1,$$

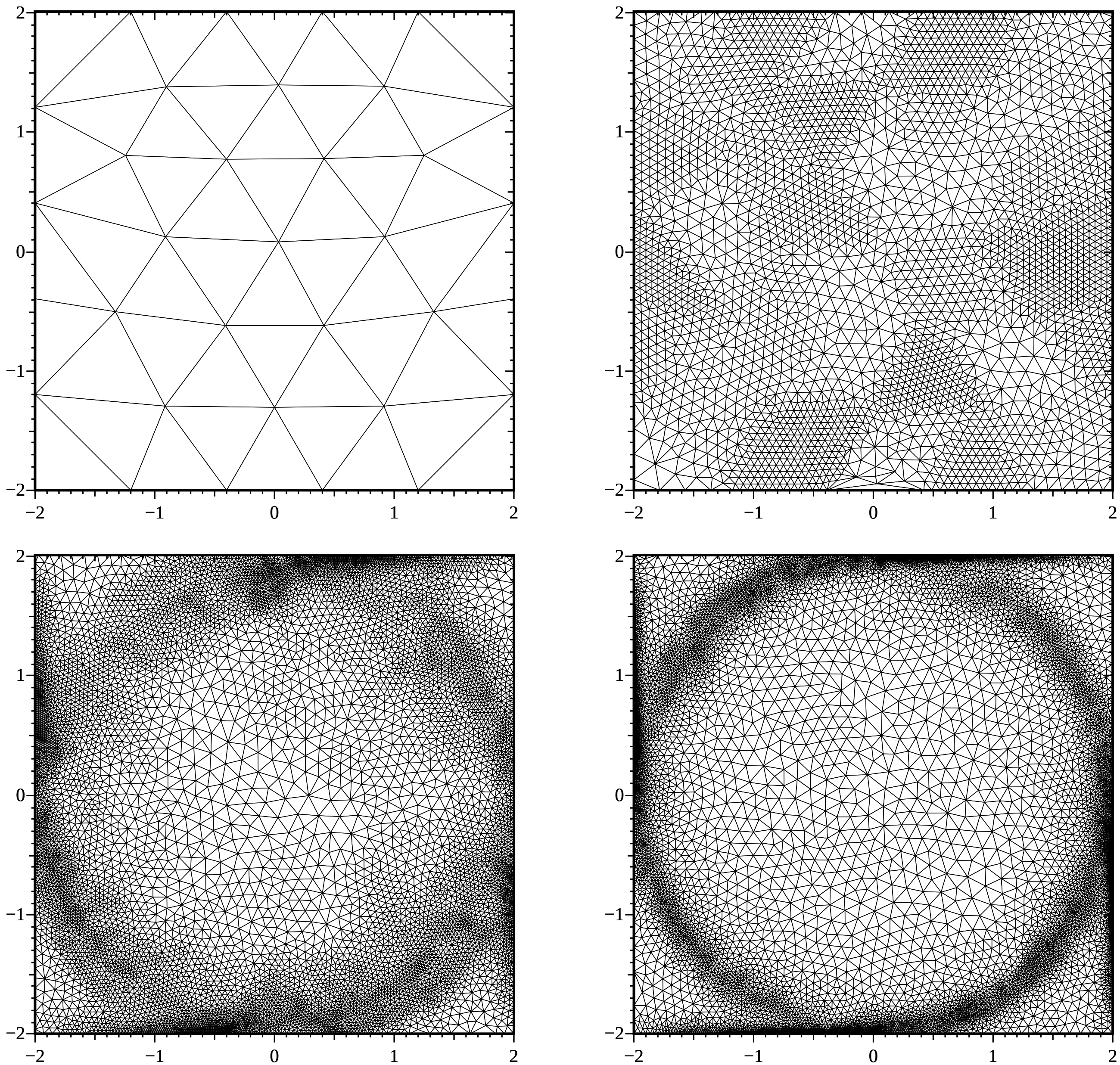
per la natura locale dello stimatore e in vista di un'adattività di griglia.

Osservazione 3: la quantità usata solitamente per misurare la "credibilità" di uno stimatore si chiama effectivity index:

$$I_{\text{eff}} = \frac{S}{\|e_h\|_V}.$$

Fornisce una misura della sovra(sotto)-stima di S rispetto al valore esatto $\|e_h\|_V$. Idealmente, si vorrebbe che $I_{\text{eff}} \simeq 1$ ($\Longleftrightarrow$ S affidabile ed efficiente).

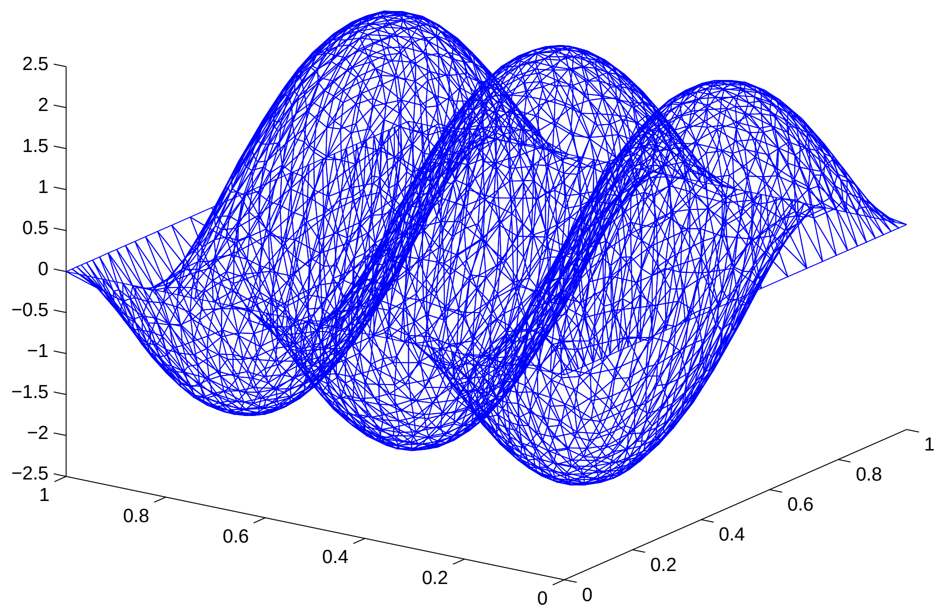
PASSO 2: strategie d'adattazione



PASSO 2: strategie d'adattazione

Avendo a disposizione una stima a priori o a posteriori dell'errore, si possono seguire diverse strategie per generare una griglia adattata:

- $\boxed{\text{economicità della griglia}}$: fissato un numero N di elementi, genero la griglia che minimizza l'errore (o, più precisamente, la sua stima S);

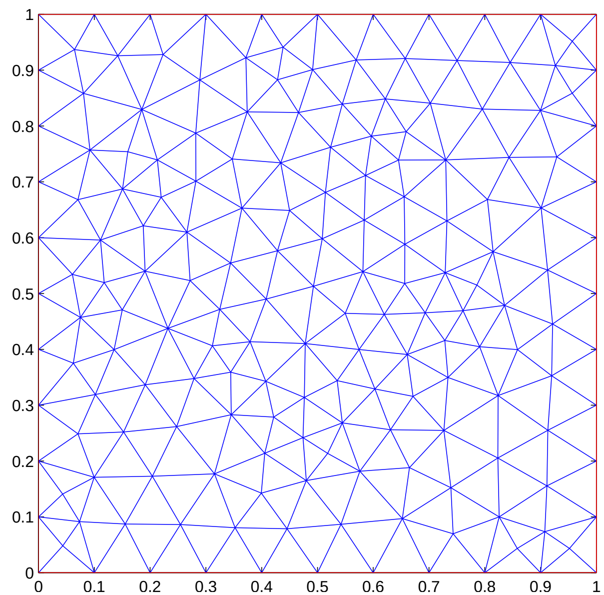


PASSO 2: strategie d'adattazione

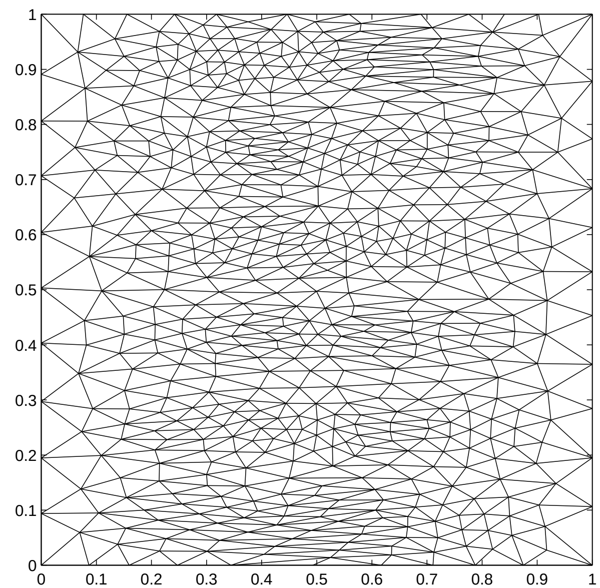
Avendo a disposizione una stima a priori o a posteriori dell'errore, si possono seguire diverse strategie per generare una griglia adattata:

- $\boxed{\text{economicità della griglia}}$: fissato un numero N di elementi, genero la griglia che minimizza l'errore (o, più precisamente, la sua stima S);

circa 300 elementi



errore=5.329e-01



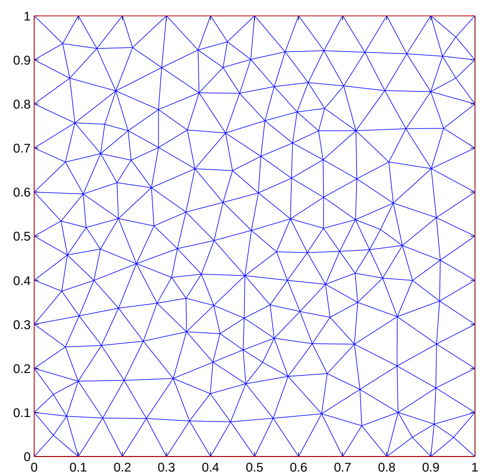
errore=2.556e-01

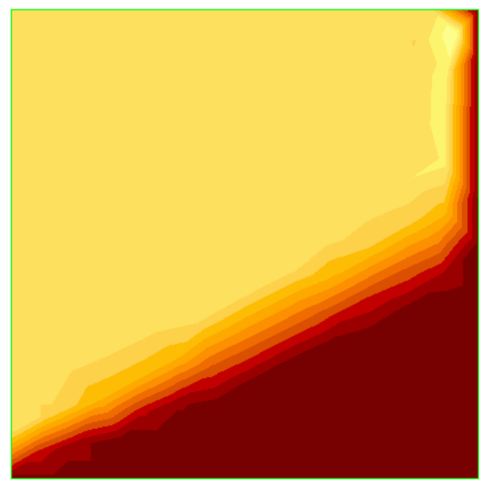
PASSO 2: strategie d'adattazione

Avendo a disposizione una stima a priori o a posteriori dell'errore, si possono seguire diverse strategie per generare una griglia adattata:

- $\boxed{\text{economicità della griglia}}$: fissato un numero N di elementi, genero la griglia che minimizza l'errore (o, più precisamente, la sua stima S);

- $\boxed{\text{controllo dell'errore}}$: fissata una tolleranza τ sull'errore di discretizzazione, genero la griglia con il minimo numero di elementi e per cui si abbia $S \simeq \tau$;





312 elementi

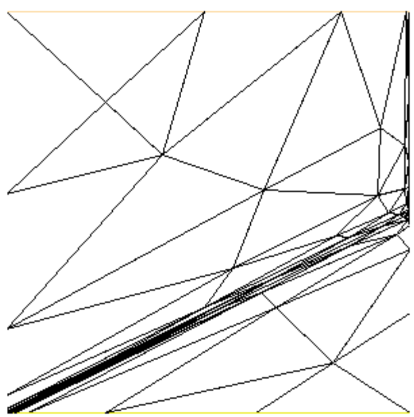
PASSO 2: strategie d'adattazione

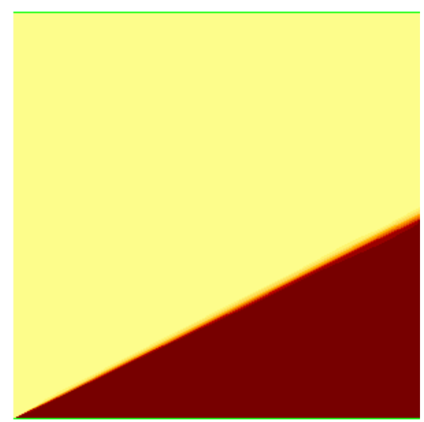
Avendo a disposizione una stima a priori o a posteriori dell'errore, si possono seguire diverse strategie per generare una griglia adattata:

- $\boxed{\text{economicità della griglia}}$: fissato un numero N di elementi, genero la griglia che minimizza l'errore (o, più precisamente, la sua stima S);

- $\boxed{\text{controllo dell'errore}}$: fissata una tolleranza τ sull'errore di discretizzazione, genero la griglia con il minimo numero di elementi e per cui si abbia $S \simeq \tau$;

$$\tau = 10^{-1}$$





64 elementi

PASSO 2: strategie d'adattazione

Avendo a disposizione una stima a priori o a posteriori dell'errore, si possono seguire diverse strategie per generare una griglia adattata:

- economicità della griglia : fissato un numero N di elementi, genero la griglia che minimizza l'errore (o, più precisamente, la sua stima S);
- controllo dell'errore : fissata una tolleranza τ sull'errore di discretizzazione, genero la griglia con il minimo numero di elementi e per cui si abbia $S \simeq \tau$;

☞ equidistribuzione dell'errore : fissato un numero N di elementi (o, alternativamente, una tolleranza τ sull'errore di discretizzazione), genero una griglia tale per cui $\eta_K = \dfrac{\tau}{\sqrt{N}} =$ costante.

Tali strategie non sono in generale equivalenti.

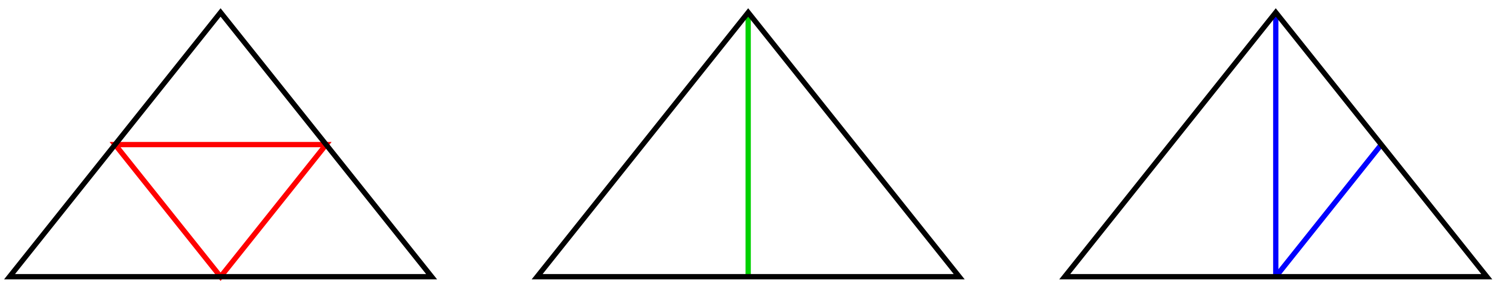
Tecniche di adattività

Dato uno stimatore locale η_K si può adottare una delle seguenti tecniche:

- $\boxed{\text{Raffinamento}}$: si stima l'errore su una griglia di tentativo e si suddividono gli elementi per i quali η_K risulta superiore rispetto ad una certa soglia prefissata. Si raffinano, ad esempio, gli elementi K per i quali si ha

$$\eta_K \geq \frac{C\,\tau}{\sqrt{N_h}},$$

con τ tolleranza totale.



red-refinement green-refinement blue-refinement

Tecniche di adattività

Dato uno stimatore locale η_K si può adottare una delle seguenti tecniche:

- $\boxed{\text{Raffinamento}}$: si stima l'errore su una griglia di tentativo e si suddividono gli elementi per i quali η_K risulta superiore rispetto ad una certa soglia prefissata. Si raffinano, ad esempio, gli elementi K per i quali si ha

$$\eta_K \geq \frac{C\,\tau}{\sqrt{N_h}},$$

  con τ tolleranza totale.

- $\boxed{\text{Deraffinamento}}$: viene eliminato un nodo di griglia qualora η_K sia inferiore ad una soglia prefissata in tutti gli elementi K a cui tale nodo appartiene. Il test da verificare può essere, per esempio,

$$\eta_K < \frac{C\,\tau}{\sqrt{N_h}},$$

  con τ tolleranza totale.

- Queste due tecniche soddisfano il criterio di equidistribuzione dell'errore: cercano di ottenere cioè una griglia su cui η_K sia costante su ogni elemento K.

Le librerie di adattività correntemente implementate nei codici ad elementi finiti utilizzano algoritmi di tipo differente per adattare una griglia:

remeshing : data la spaziatura (metrica) ottimale, la griglia è rigenerata ex-novo.

Vantaggi: semplice implementazione se si ha un generatore di griglia che permetta di controllare in modo fine la spaziatura. Oggigiorno esistono algorimi di generazione molto rapidi.

Svantaggi: occorre "estrarre" da η_K la densità ottimale. In 3D e per geometrie complesse questo passo può essere molto oneroso.

raffinamento : la griglia viene raffinata ad ogni passo di adattività.

Vantaggi: esistono algoritmi di raffinamento che garantiscono la regolarità della griglia adattata. Non richiede di "estrarre" dalla stima una densità ottimale.

Svantaggi: i gradi di libertà possono solo aumentare!!!!!

modifica locale : la griglia viene modificata attraverso delle operazioni locali: movimento, aggiunta od eliminazione di nodi, scambio delle diagonali (2D), scambio facce-lati (3D),etc.

Vantaggi: permette un controllo fine della qualità della griglia.

Svantaggi: implementazione complessa.

Dietro le quinte ... stimatori dell'errore

Adattività basata sul controllo dell'errore d'interpolazione

Partiamo da un problema semplice: data una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sufficientemente regolare, ed una griglia $\mathcal{T}_h$ su Ω, ci proponiamo di utilizzare l'adattività di griglia al fine di controllare l'errore tra u e il suo interpolante lineare a tratti $\Pi_h(u) \in V_h$.

R3: operatore d'interpolazione di Lagrange: $\Pi_h : C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_h$, t.c.

$$\Pi_h(u)(\mathbf{x}_j) = u(\mathbf{x}_j), \qquad \forall j = 1, \ldots, N_h.$$

N.B. u deve necessariamente essere una funzione continua.

Si può dimostrare che valgono le seguenti stime locali (d'interpolazione):

$$\|u - \Pi_h(u)\|_{L^2(K)} \leq c_1^* h_K^2 |u|_{H^2(K)},$$

$$\|u - \Pi_h(u)\|_{H^1(K)} \leq c_3^* h_K |u|_{H^2(K)}.$$

Saranno queste che interverranno, eventualmente, nella derivazione di uno stimatore data la proprietà di località dello stimatore.

Dietro le quinte ... stimatori dell'errore

Adattività basata sul controllo dell'errore d'interpolazione

Partiamo da un problema semplice: data una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, sufficientemente regolare, ed una griglia $\mathcal{T}_h$ su Ω, ci proponiamo di utilizzare l'adattività di griglia al fine di controllare l'errore tra u e il suo interpolante lineare a tratti $\Pi_h(u) \in V_h$.

Caso monodimensionale. Sia $u \in \mathrm{H}^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ una funzione assegnata, con $\Omega = (0, L)$. Indicata con $\mathcal{T}_h = \{x_i\}_{i=0}^{N_h}$ una partizione dell'intervallo Ω, sia $\Pi_h(u)$ l'interpolata lineare a tratti di u e $u - \Pi_h(u)$ il corrispondente errore d'interpolazione.

Per la norma $\mathrm{L}^2(\Omega)$ di tale errore vale la seguente stima:

$$\|u - \Pi_h(u)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C \sum_{k=0}^{N_h-1} h_k^4 \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \frac{d^2u}{dx^2} \right|^2 dx}_{|u|^2_{H^2(K)}}, \qquad (1)$$

con $C = 1/64$ ed $h_k = (x_{k+1} - x_k)$ ampiezza del $(k+1)$-esimo intervallo. Notiamo che tale stima è nella forma cercata, con $\eta_K = \eta_K^{\Pi_h} = h_K^2 |u|_{\mathrm{H}^2(K)}$ e $K = [x_k, x_{k+1}]$.

Ricordiamo ora le definizioni di spaziatura $\mathcal{H}_{\mathcal{T}_h}$ e densità di griglia $\mathcal{D}_{\mathcal{T}_h}$:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}_h}(x) = \begin{cases} h_k, & x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = 0, \ldots N_h - 1, \\ h_{N_h-1}, & x = L, \end{cases} \qquad \mathcal{D}_{\mathcal{T}_h}(x) = \frac{1}{\mathcal{H}_{\mathcal{T}_h}(x)}$$

Possiamo così riscrivere la disuguaglianza (1) nella forma equivalente:

$$\|u - \Pi_h(u)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C \int_0^L [\mathcal{H}_{\mathcal{T}_h}(x)]^4 \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|^2 d\Omega = C \int_0^L [\mathcal{D}_{\mathcal{T}_h}(x)]^{-4} \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|^2 d\Omega.$$

Obiettivo : fissato un numero N di elementi di griglia, vogliamo trovare la densità di griglia $\mathcal{D}(\neq \mathcal{D}_{\mathcal{T}_h})$ che minimizza la stima dell'errore d'interpolazione

$$\|u - \Pi_h u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C \int_0^L [\mathcal{D}(x)]^{-4} \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|^2 d\Omega,$$

con $\left[\int_0^L \mathcal{D}(x)\, d\Omega\right] = N.$ Si tratta di un problema di minimizzazione vincolata.

Applicando tecniche elementari di calcolo variazionale, il problema diventa: cercare $\mathcal{D}$ tale che

$$\int_0^L [\mathcal{D}(x)]^{-5} \left| \frac{d^2u}{dx^2}(x) \right|^2 \delta\mathcal{D}(x)\, d\Omega = 0,$$

per ogni variazione di densità di griglia $\delta\mathcal{D}$, tale che $\displaystyle\int_\Omega \delta\mathcal{D}(x)\, d\Omega = 0$.

La soluzione di tale problema fornisce la densità di griglia ottimale rispetto alla norma $\mathrm{L}^2(\Omega)$:

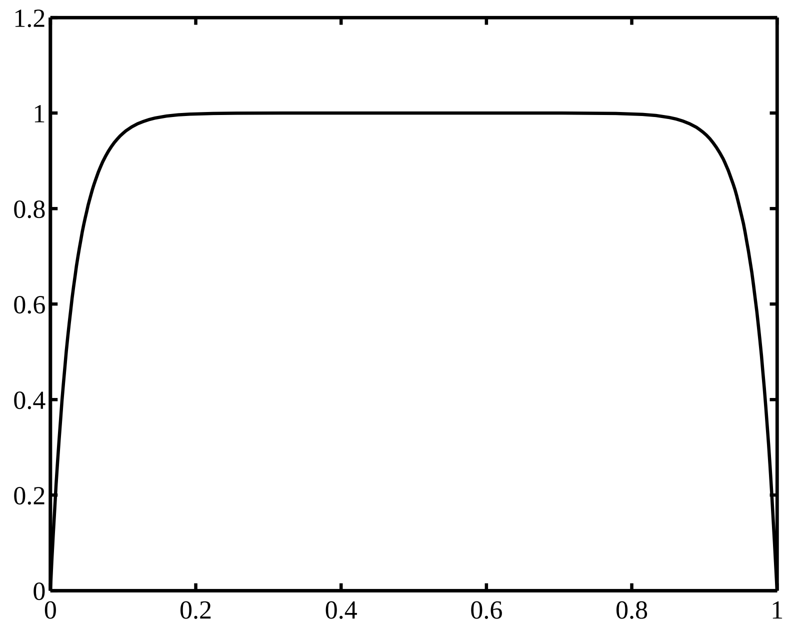
$$\mathcal{D}(x) = \kappa \left| \frac{d^2u}{dx^2}(x) \right|^{\frac{2}{5}}, \quad \text{con} \quad \kappa = \frac{N}{\displaystyle\int_0^L \left| \frac{d^2u}{dx^2}(x) \right|^{\frac{2}{5}} d\Omega}.$$

Un'analisi analoga si può ripetere facendo riferimento alla norma $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dell'errore d'interpolazione.

Esempio di adattività 1D

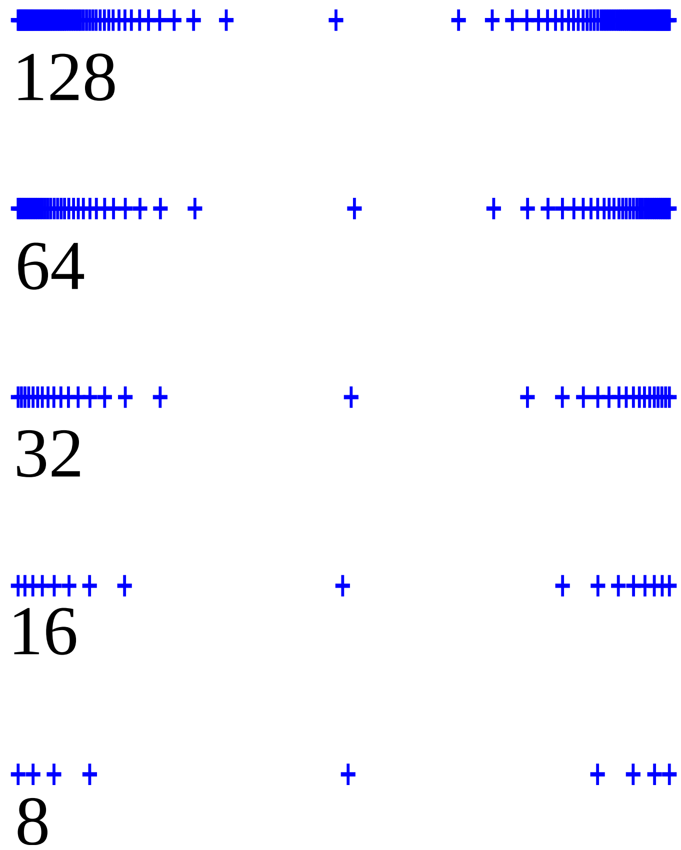
Consideriamo la funzione

$$u(x) = 1 - \cosh(\beta x) + \frac{\cosh(\beta) - 1}{\sinh(\beta)} \sinh(\beta x), \quad \text{con} \quad \beta = \sqrt{10^3} \quad \text{e} \quad x \in (0, 1).$$



Tale funzione presenta uno strato limite in corrispondenza di $x = 0$ e di $x = 1$.
È evidente che per avere un'interpolazione accurata è opportuno addensare i nodi agli estremi dell'intervallo $(0, 1)$.

Seguendo la procedura precedentemente illustrata si ottengono le seguenti griglie ottimali rispetto alla norma $\mathrm{L}^2(0,1)$, fissato un numero N_h di intervalli pari a 8 16, 32, 64 e 128.

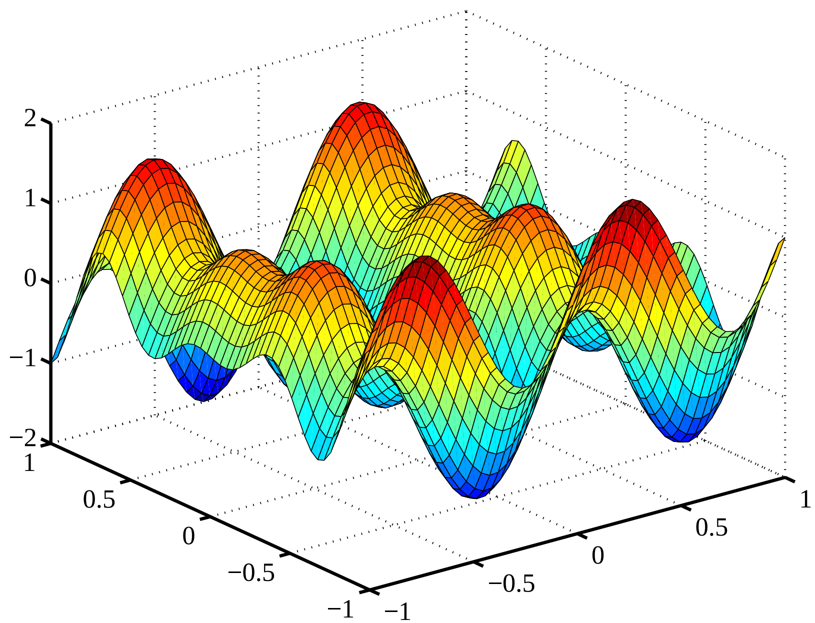


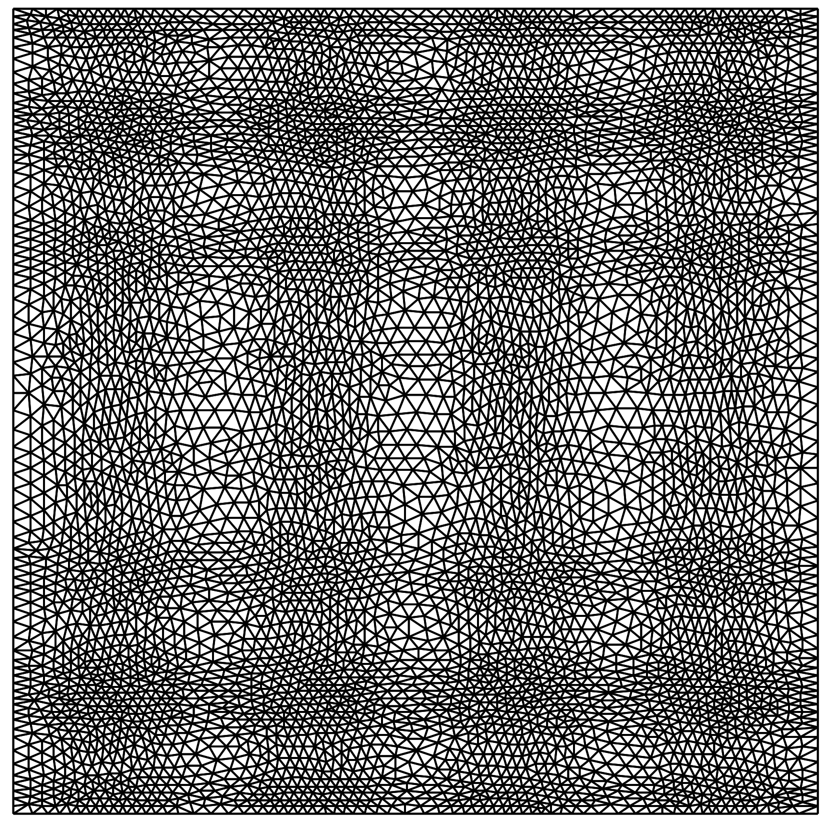
N_h	griglia ottimale rispetto alla norma $\mathrm{L}^2(0,1)$	griglia ottimale rispetto alla norma $\mathrm{H}^1(0,1)$	griglia uniforme
8	0.0178	0.0302	0.144
128	2.16×10^{-4}	7.73×10^{-2}	1.1×10^{-3}

Estensione a più dimensioni

La tecnica di adattività di griglia precedente può essere estesa al caso multidimensionale con le dovute complicazioni computazionali (concetto di metrica). In tal caso si controlla il diametro h_K degli elementi.

Consideriamo la funzione $u(x, y) = \sin(2\pi x) + y\cos(3\pi y)$ su $\Omega = (-1, 1)^2$. La griglia ottimale derivante dal controllo dell'errore d'interpolazione rispetto alla norma $\mathrm{L}^2(\Omega)$ risulta essere:





Adattività basata su stimatori a priori dell’errore

Le metodologie di adattività per il controllo dell’errore d’interpolazione possono essere estese al caso in cui si voglia controllare direttamente l’errore di discretizzazione. Per ogni $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, si dimostra infatti che vale la seguente stima per e_h:

$$\|e_h\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C \sum_{k=0}^{N_h-1} h_k^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|^2 dx.$$

Osservazione: a differenza di prima u è ora incognita. La sua derivata dovrà essere approssimata opportunamente a partire, ad esempio, da u_h.

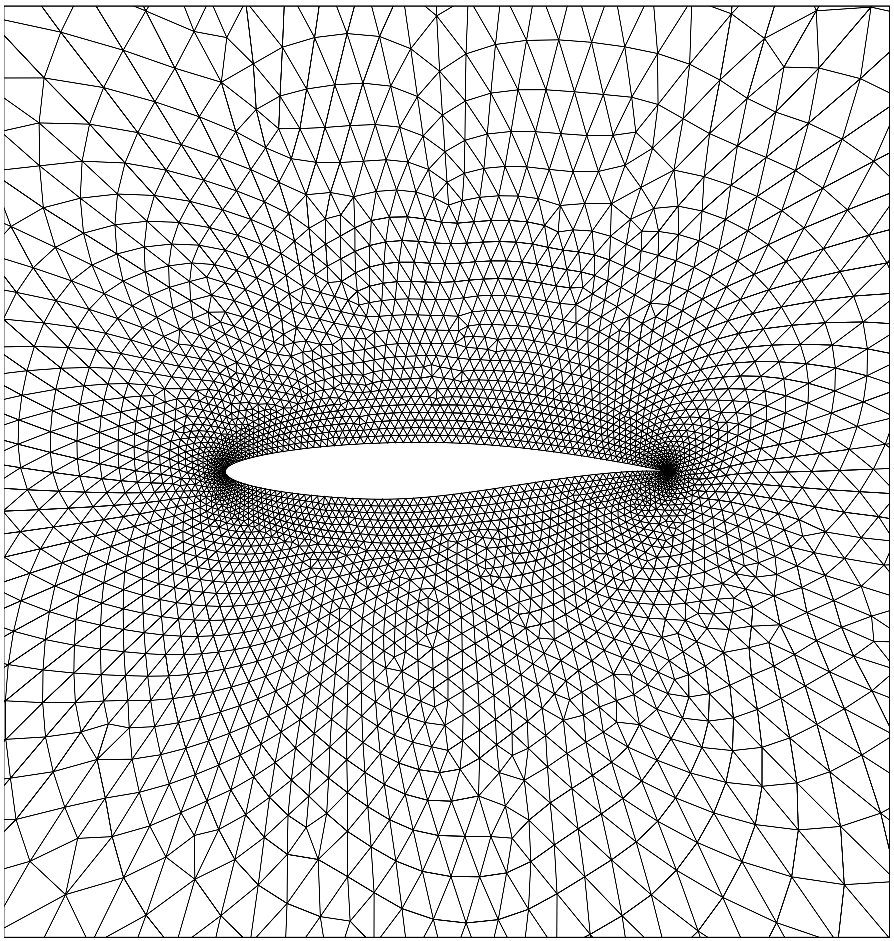
Si può, ad esempio:

- calcolare una soluzione approssimata su una griglia sufficientemente fine, usando tale approssimazione per stimare la derivata seconda di u.
- ricorrere ad un’opportuna ricostruzione della derivata seconda di u (*vedi Lezione sugli stimatori recovery-based*).

Queste procedure introducono inevitabilmente delle ulteriori approssimazioni difficilmente controllabili. Nonostante ciò, le tecniche adattative basate sulle stime a priori sono spesso utilizzate nella pratica ingegneristica perchè di semplice implementazione, anche in presenza di problemi complessi.

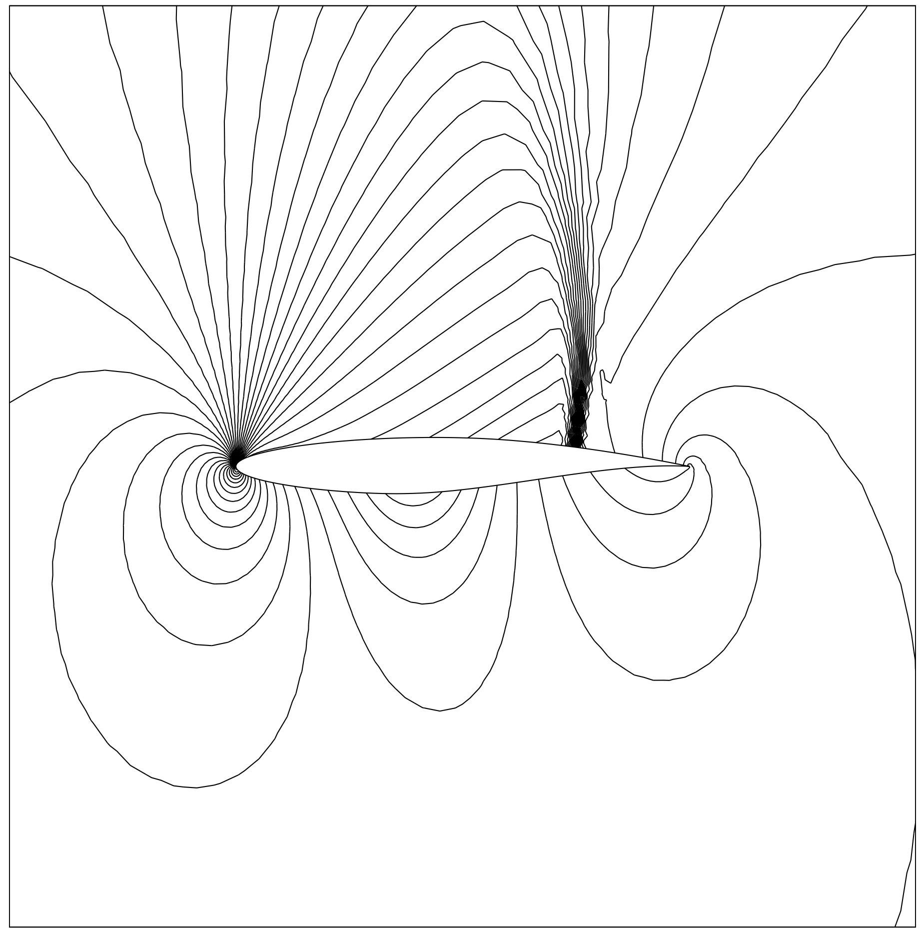
Mesh Adaption

Mesh1 RAE 2822
Box from (-0.50, -1.00) to (1.50, 1.00)



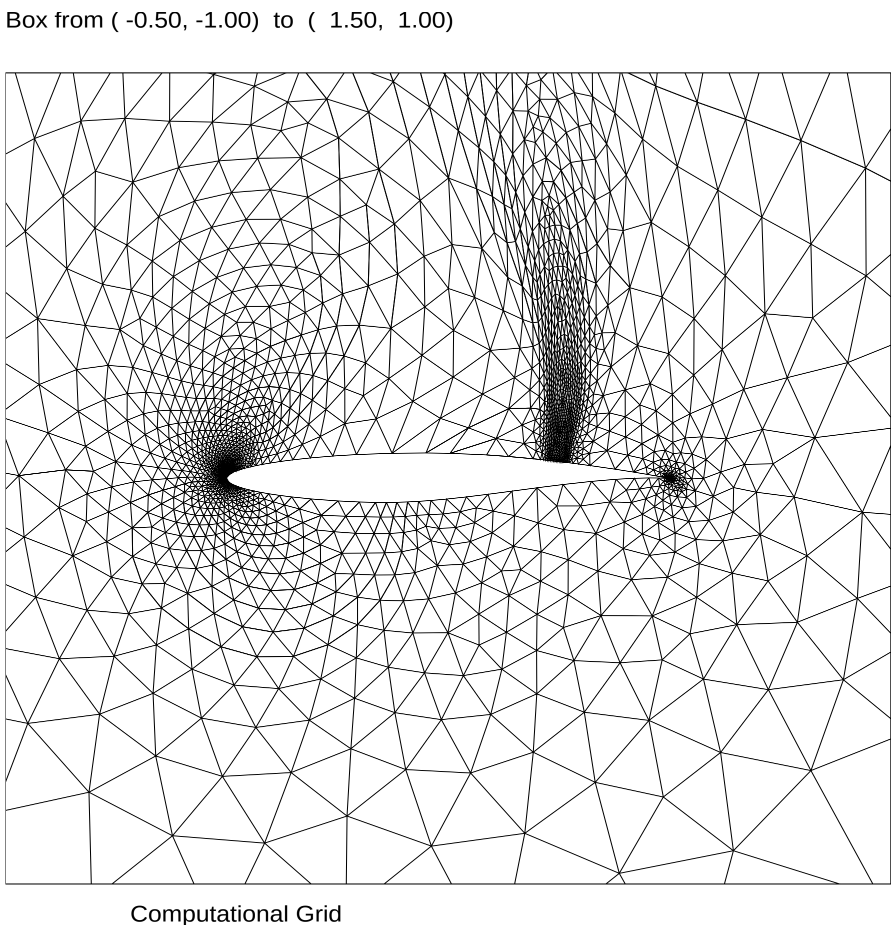
Computational Grid

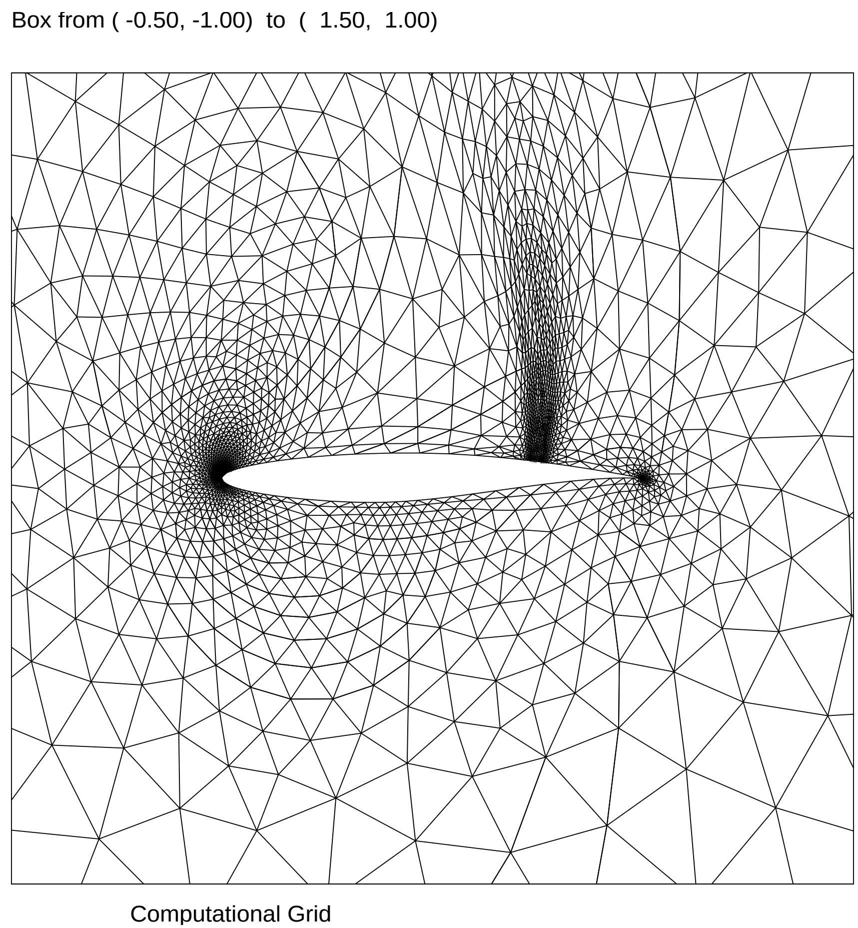
Mesh1
Box from (-0.50, -1.00) to (1.50, 1.00)
Pressure From 0.400 To 1.500 In 40 steps.



Mesh and solution (pressure distribution) used for sensor test.

Spacing Control on Boundary





Mesh Adapted Using Pressure

Adapted mesh: Pressure + B.C.

Adattività basata su stimatori a posteriori dell'errore: stimatori residuali

Per semplicità associamo al problema modello (PM) condizioni al bordo di Dirichlet omogenee ($\Gamma_N = \emptyset$):

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{(PM)}$$

Derivazione di uno stimatore a posteriori, di tipo residuale, rispetto alla norma $\mathrm{H}^1(\Omega)$:

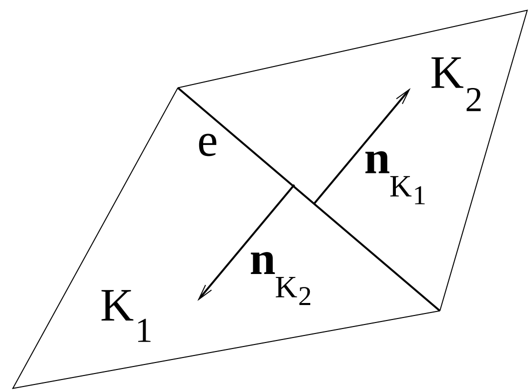
$$a(e_h, v) \stackrel{\text{(OG)}}{=} a(e_h, v - v_h) \stackrel{\text{(FD)}}{=} (f, v - v_h) - a(u_h, v - v_h)$$

$$\stackrel{\text{(IPP)}}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ (f + \Delta u_h, v - v_h)_K - (\partial_n u_h, v - v_h)_{\partial K} \big\}.$$

Definiamo:

- il residuo interno associato all'elemento K : $r_K = (f + \Delta u_h)\big|_K$. Misura quanto bene (male) la soluzione discreta u_h soddisfa (PM);

- il salto della derivata normale di u_h attraverso il generico lato e della triangolazione $\mathcal{T}_h$: $[\partial_n u_h]_e = \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_{K_1} + \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_{K_2}$



adottando inoltre la convenzione secondo cui $[\partial_n u_h]_e = 0$ se e è un lato di bordo e $[\partial_n u]_{\partial K} = \sum_{e\in\partial K} [\partial_n u_h]_e$.

Osservazione: la soluzione u ha salto nullo.

- residuo di bordo:

$$R_K = \begin{cases} 0.5\,[\partial_n u_h]_e & \text{se } e \in \partial K \backslash \partial\Omega \\ 0 & \text{se } e \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dove il fattore 0.5 tiene conto del fatto che ogni lato è condiviso da 2 triangoli.

Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
|a(e_h, v)| &= \Big| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ (r_K, v - v_h)_K - (R_K, v - v_h)_{\partial K} \big\} \Big| \\
&\leq
\end{aligned}
$$

R4: disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $\forall\ f, g \in L^2(\Omega)$

$$
\Big| \int_\Omega f g \, d\mathbf{x} \Big| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \, \|g\|_{L^2(\Omega)}
$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} |a(e_h, v)| &= \Big| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ (r_K, v - v_h)_K - (R_K, v - v_h)_{\partial K} \big\} \Big| \\ \text{(CS)} \quad &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ \|r_K\|_K \|v - v_h\|_K + \|R_K\|_{\partial K} \|v - v_h\|_{\partial K} \big\} \end{aligned}$$

R5: operatore d'interpolazione di Clément: $I_h : H^1(\Omega) \longrightarrow V_h$, t.c.

$$I_h(u)(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} (P_j u)(\mathbf{x}_j)\, \varphi_j, \qquad \forall u \in H^1(\Omega),$$

con P_j operatore di proiezione locale L^2 su un opportuno patch di elementi associato al nodo $\mathbf{x}_j$.

N.B. u deve non necessariamente essere una funzione continua.

Valgono le seguenti stime locali (d'interpolazione): $\forall u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u - I_h(u)\|_K \leq c_1\, h_K |u|_{H^1(\widetilde{K})}, \qquad \|u - I_h(u)\|_{\partial K} \leq c_2\, h_K^{1/2} \|u\|_{H^1(\widetilde{K})}$$

con $\widetilde{K}$ patch di elementi associato a K e $|u|_{H^1(\widetilde{K})} = \|\nabla u\|_{L^2(\widetilde{K})}$.

Abbiamo dunque

$$
\begin{array}{rcl}
|a(e_h, v)| & = & \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (r_K, v - v_h)_K - (R_K, v - v_h)_{\partial K} \right\} \right| \\
\text{(CS)} & \leq & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \|v - v_h\|_K + \|R_K\|_{\partial K} \|v - v_h\|_{\partial K} \right\} \\
v_h = I_h(v) & \leq & C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K \, |v|_{H^1(\widetilde{K})} + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \, \|v\|_{H^1(\widetilde{K})} \right\} \\
 & \leq & C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \right\} \|v\|_{H^1(\widetilde{K})}
\end{array}
$$

Scelto infine $v = e_h$,

$$
\|e_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq |a(e_h, e_h)| \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \right\} \|e_h\|_{H^1(\widetilde{K})}
$$

Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
|a(e_h, v)| \quad &= \quad \Big| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ (r_K, v - v_h)_K - (R_K, v - v_h)_{\partial K} \big\} \Big| \\
\text{(CS)} \quad &\leq \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ \|r_K\|_K \|v - v_h\|_K + \|R_K\|_{\partial K} \|v - v_h\|_{\partial K} \big\} \\
v_h = I_h(v) \quad &\leq \quad C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ \|r_K\|_K \, h_K \, |v|_{H^1(\widetilde{K})} + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \, \|v\|_{H^1(\widetilde{K})} \big\} \\
&\leq \quad C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \big\} \, \|v\|_{H^1(\widetilde{K})}
\end{aligned}
$$

Scelto infine $v = e_h$,

$$
\|e_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq |a(e_h, e_h)| \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \big\} \, \|e_h\|_{H^1(\widetilde{K})}
$$

R6: disuguaglianza di Cauchy-Schwarz discreta: dati $a_j, b_j \in \mathbb{R}$,

$$
\sum_j a_j \, b_j \leq \Big(\sum_j a_j^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_j b_j^2 \Big)^{1/2}
$$

Abbiamo dunque

$$
\begin{array}{rcl}
|a(e_h, v)| & = & \left| \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (r_K, v - v_h)_K - (R_K, v - v_h)_{\partial K} \right\} \right| \\
\text{(CS)} & \leq & \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \|v - v_h\|_K + \|R_K\|_{\partial K} \|v - v_h\|_{\partial K} \right\} \\
v_h = I_h(v) & \leq & C \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K \, |v|_{H^1(\widetilde{K})} + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \, \|v\|_{H^1(\widetilde{K})} \right\} \\
 & \leq & C \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \right\} \|v\|_{H^1(\widetilde{K})}
\end{array}
$$

Scelto infine $v = e_h$,

$$
\begin{array}{rcl}
\|e_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq |a(e_h, e_h)| & \leq & C \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \right\} \|e_h\|_{H^1(\widetilde{K})} \\
 & \leq & C \left(\displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2(u_h; h_K) \right)^{1/2} \left(\displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|e_h\|^2_{H^1(\widetilde{K})} \right)^{1/2},
\end{array}
$$

con $\eta_K(u_h; h_K)$ stimatore locale dato

$$
\eta_K(u_h; h_K) = h_K \, \|r_K\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \, \|R_K\|_{\partial K}.
$$

Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
|a(e_h, v)| \quad &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (r_K, v - v_h)_K - (R_K, v - v_h)_{\partial K} \right\} \right| \\
\text{(CS)} \quad &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \|v - v_h\|_K + \|R_K\|_{\partial K} \|v - v_h\|_{\partial K} \right\} \\
v_h = I_h(v) \quad &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K \, |v|_{H^1(\widetilde{K})} + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \, \|v\|_{H^1(\widetilde{K})} \right\} \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \right\} \|v\|_{H^1(\widetilde{K})}
\end{aligned}
$$

Scelto infine $v = e_h$,

$$
\begin{aligned}
\|e_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq |a(e_h, e_h)| \quad &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|r_K\|_K \, h_K + \|R_K\|_{\partial K} \, h_K^{1/2} \right\} \|e_h\|_{H^1(\widetilde{K})} \\
&\leq C \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2(u_h; h_K) \Big)^{1/2} \|e_h\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

con $\eta_K(u_h; h_K)$ stimatore locale dato

$$
\eta_K(u_h; h_K) = h_K \, \|r_K\|_{\mathrm{L}^2(K)} + h_K^{1/2} \, \|R_K\|_{\partial K}.
$$

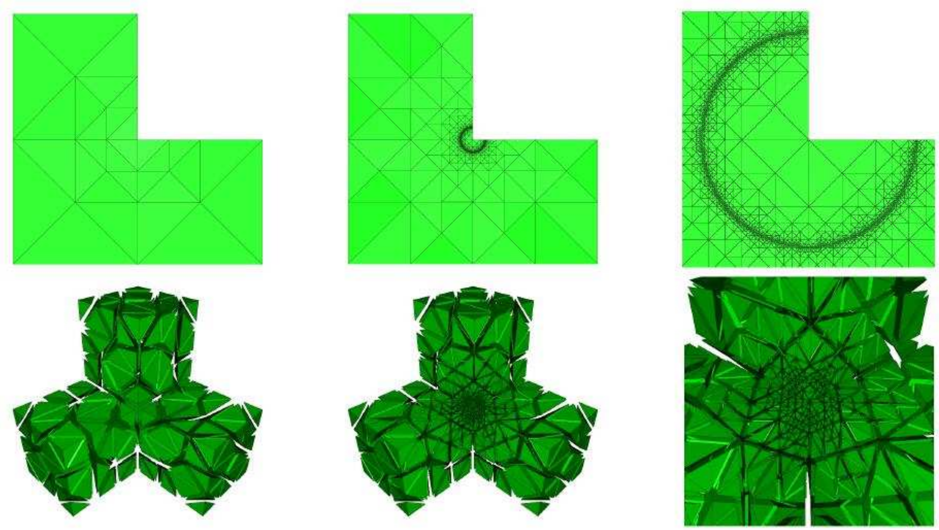
$$\Downarrow$$

stima a posteriori residuale per la norma H^1 dell'errore di discretizzazione:

$$\boxed{\|e_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq S = C\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2(u_h;h_K)\Big)^{1/2}}$$

con $\eta_K(u_h;h_K) = h_K\,\|r_K\|_{\mathrm{L}^2(K)} + h_K^{1/2}\,\|R_K\|_{\partial K}$.

- Stimatori a posteriori di tipo residuale possono essere facilmente estesi a problemi più generali (completati con condizioni al bordo generiche) ed utilizzati per guidare una strategia di adattività di griglia.



[*M. Holst, N. Baker, F. Wang, 1999*]

$$\Downarrow$$

stima a posteriori residuale per la norma H^1 dell'errore di discretizzazione:

$$\boxed{\|e_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq S = C\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2(u_h; h_K)\Big)^{1/2}}$$

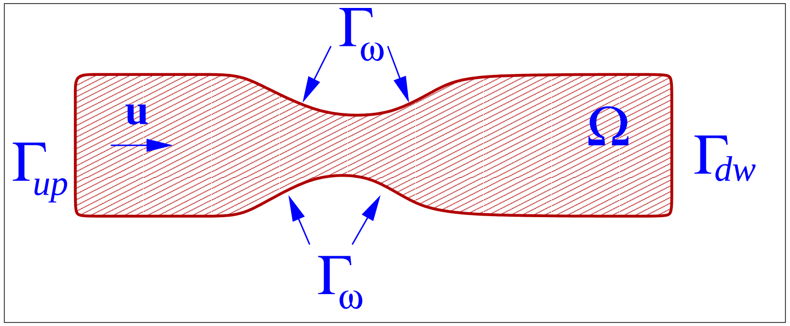
con $\eta_K(u_h; h_K) = h_K\, \|r_K\|_{\mathrm{L}^2(K)} + h_K^{1/2}\, \|R_K\|_{\partial K}$.

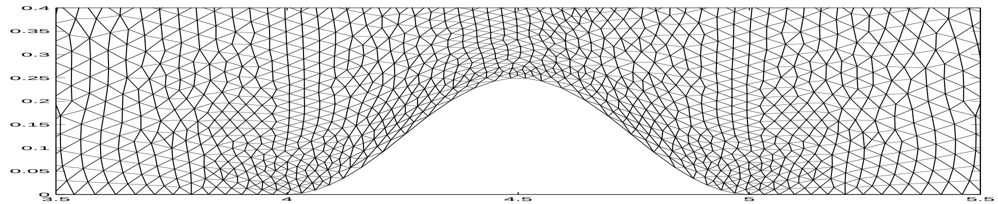
- Stimatori a posteriori di tipo residuale possono essere facilmente estesi a problemi più generali (completati con condizioni al bordo generiche) ed utilizzati per guidare una strategia di adattività di griglia.

- Si può dimostrare che lo stimatore S è affidabile ed efficiente.

- I risultati teorici forniti sono validi se tutti gli integrali della formulazione ad elementi finiti vengono calcolati esattamente. In caso contrario bisognerebbe tenere conto anche degli errori introdotti da eventuali quadrature numeriche.

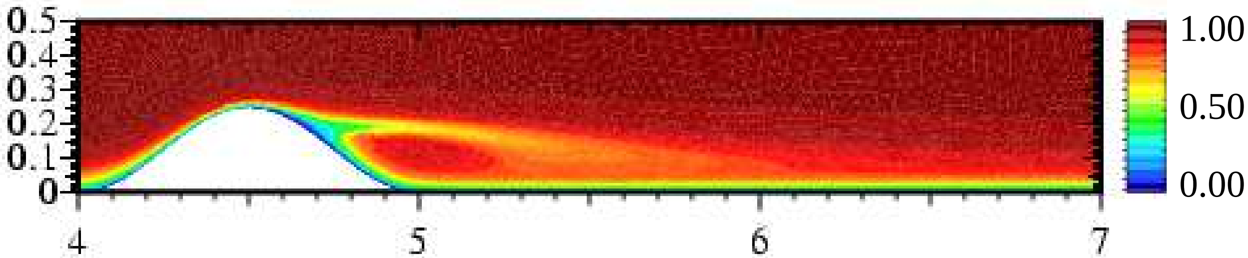
Un esempio dall'emodinamica



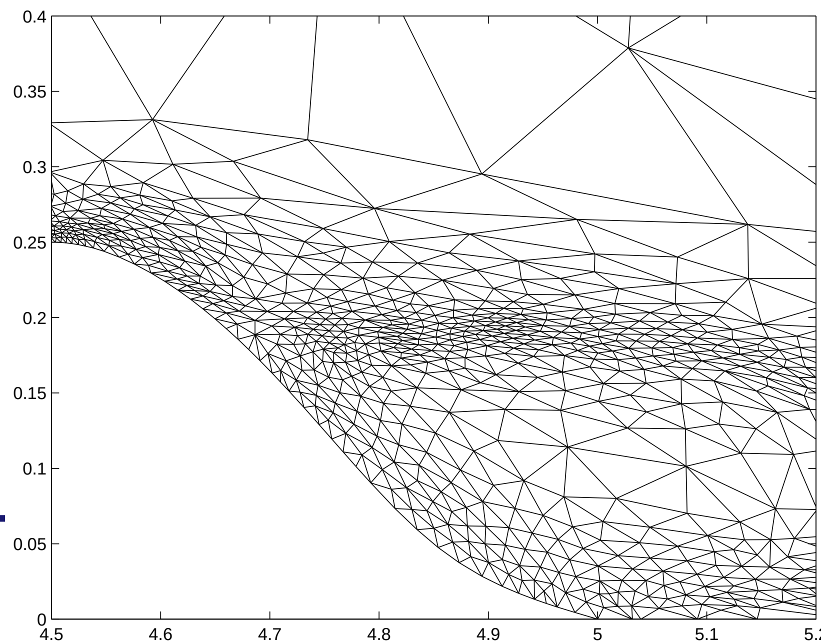


stenosi arteriosa

griglia iniziale



concentrazione di un soluto



Adattività basata su stimatori a posteriori dell’errore: altre tecniche

Esistono tecniche di adattività basate su stimatori a posteriori differenti:

- metodi basati sul controllo di un funzionale dell’errore. Sono tecniche con cui è possibile adattare la griglia per minimizzare non l’errore di discretizzazione ma un dato funzionale dell’errore (per esempio il coefficiente di portanza in problemi di fluidodinamica, valori puntuali, flussi attraverso porzioni di dominio, etc.) (*si rimanda alla lezione sugli stimatori goal-oriented*);

- metodi basati sulla ricostruzione del gradiente. Molto usati nella pratica ingegneristica perchè computazionalmente economici (*si rimanda alla lezione sugli stimatori di tipo recovery-based*).

- tecniche basate sulla risoluzione di problemi locali. Si basano sul fatto che $a(e_h, v) = (f, v) - a(u_h, v)$ e quindi un’indicazione dell’errore locale può essere ottenuta risolvendo tale problema su opportuni patch di elementi che circondano i vertici della griglia. Bisogna fare attenzione alle condizioni al contorno da imporre al problema locale ed alla scelta degli spazi discreti utilizzati per risolverlo.