(Da file FMP_homogenization) CAP 3.1 + "ARTICLE_ Tailoring Materials ..."

$u=[u_1,u_2]^T$

$\sigma_{ij}=\sum_{k,e} E_{ijke}\,\varepsilon_{ke}$ $\quad \varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla^T u)$

in 2d $E=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix}$ in 3d $E=E\,\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix}$

(for orthotropic materials, isotropic in each plane of symmetry..)

~ macroscopic mean value of E (~ micro)

$$E^H_{ijke}=\frac{1}{|Y|}\int_Y \sum_{p,q} E_{ijpq}\,(\underbrace{\varepsilon^{0,ke}_{pq}}_{\text{fixed strain field}}-\varepsilon^{*,ke}_{pq})$$

~ neglecting microscale fluctuation

solution of

$$(1)\quad \int_Y E_{ijpq}\,\varepsilon^{*,ke}_{pq}\,\varepsilon_{ij}(v)=\int_Y E_{ijpq}\,\varepsilon^{0,ke}_{pq}\,\varepsilon_{ij}(v)\ \forall v\in V$$

↳ in 2d servivano 3 test strain field, in 3d 6

$$=\cancel{\frac{1}{|Y|}\int_Y\sum E_{pqrs}}\ \frac{1}{|Y|}\int_Y\sum_{p,q}\sum_{r,s}(\varepsilon^{0,ij}_{rs}-\varepsilon^{*,ij}_{rs})(\varepsilon^{0,ke}_{pq}-\varepsilon^{*,ke}_{pq})=$$

$\sigma_{ij}=\sum_{k,e} E_{ijke}\,\varepsilon_{ke}$

$$\boxed{=\frac{1}{|Y|}\int_Y\sum_{p,q}(\sigma^{0,ij}_{pq}-\sigma^{*,ij}_{pq})(\varepsilon^{0,ke}_{pq}-\varepsilon^{*,ke}_{pq})}\quad(2)$$

$$\mathcal{L}=\sum_{ijke}(E^H_{ijke}(\rho)-E^W_{ijke})^2$$

E^W_{ijke} → requested stiffness matrix

↳ semplicemente le formule (1)-(2) di prima sono moltiplicate per ρ^P (densità)

Nello specifico in case1.edp il funzionale da minimizzare riguarda solo la componente

$$\frac{E_{1122}}{E/1-\nu^2}=\nu \rightarrow \nu^*=-1 \text{ (target)}$$

$\min_{\rho\in L^\infty(Y)} \mathcal{L}(\rho)$ where $(1)_{\rho^P}$ - $(2)_{\rho^P}$ are satisfied
+ constraints (periodicity on the boundary, ...
volume $\int_Y \rho\, dY \le \alpha|Y|$
$\rho_{min}\le\rho\le 1$)

→ ? LA FORMULAZIONE DIPENDE MOLTO DALLA SCELTA DI $\mathcal{L}(=Y)$ e dei CONSTRAINTS

(Codice case1.edp ⇝ cosa cambiare per estenderlo da 2d a 3d)

riga 77 → epsilon (ε)
ma lo scrive diversamente da SdC dove $\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$
qua
↳ $\varepsilon=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21}\end{Bmatrix}$

riga 78 $\sigma=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{21}\end{Bmatrix}$ con utilizzo M, L forse scambiato boh...)

($\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$ solo con qst, altrimenti si possono esplicitare i termini uno ad uno senza sfruttare la simmetria) →

in 3d

$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{32}\end{Bmatrix}$ $\quad\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{21}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{32}\end{Bmatrix}$

al posto di riga 63-64

$L=\frac{E*nu}{(1+nu)(1-2*nu)}$

$M=\frac{E}{2(1+nu)}$

↳ corrisponderebbero a $L=\lambda$, $M=\mu$

~~[...]~~
epsilon(u,v,w) = [dx(u), dy(v), dz(w),
0.5(dy(u)+dx(v)), 0.5(dy(u)+dx(v)),
0.5(dz(u)+dx(w)), 0.5(dz(u)+dx(w)),
0.5(dy(w)+dz(v)), 0.5(dy(w)+dz(v))]

sigma(u,v,w) = [L*div(u,v,w)+2M dx(u),
L div(u,v,w) +2M dy(v),
L div(u,v,w) +2M dz(w),
M(dx(v)+dy(u)), M(dx(v)+dy(u)),
M(dz(u)+dx(w)), M(dz(u)+dx(w)),
M(dz(v)+dy(w)), M(dz(v)+dy(w))]

// Funzionale J

righe 94 – 107 corrisponde a risolvere (1) $\longrightarrow$ Trova $U^* \rightsquigarrow \varepsilon^*$ (a cui corrisponde)
in particolare W = densità ρ
q, r, s potenze di ρ ($\sim \rho^p$)

$\begin{bmatrix} U10ij \\ U20ij \end{bmatrix} \rightarrow$ spostamenti che corrispondono a $\varepsilon^0_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i, l=j \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

da ridefinire per 3d

(es $\begin{bmatrix} U1011 \\ U2011 \end{bmatrix} = [x, 0] \rightarrow \varepsilon = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$)

(6 strain field (scritti a mano altrove, qua esempio)

es $\begin{bmatrix} U1011 \\ U2011 \\ U3011 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varepsilon = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{bmatrix} U1012 \\ U2012 \\ U3012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y/2 \\ x/2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varepsilon = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$)

righe 109 – 113 corrisponde a (2) $\sim$ determina E^H_{ijkl}
utilizza ε^* trovate ai pb precedenti $\sim$ epsilon(U1 star ij, U2 star ij)
$\varepsilon^{0ij} \sim$ epsilon(U10ij, U20ij)
(quello che sarebbe stato un prodotto tensoriale $\sigma : \varepsilon$ è un prodotto scalare, torna con le sommatorie ben specificate prima)

se il target è quello precedente:
(2d) eta1122 = 1. $= \cancel{\ldots} \ \dfrac{E}{1-r^2}$
riga 70 $\rightarrow$ per semplificare il problema forse?
E1122 star = −1 (= r)

$$J = \frac{1}{2} \underbrace{\text{eta1122}}_{\text{NON CHIARO A COSA SERVA}} \Big(\underbrace{\frac{E1122}{E1111}}_{\hat{v}} - \text{E1122 star} \Big)^2$$

$\hat{v}$ (calcolato col funzionale, dato dal rapporto delle 2 componenti)

in 3d si potrebbe fare
E1122 star = −1 ($\equiv r$)

$$\frac{E1122}{E1111} = \frac{r}{1-r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\frac{E1122}{E1111}}{1 + \frac{E1122}{E1111}}$$

$$J = \frac{1}{2} \ ?\ (\hat{r} - \text{E1122 star})^2$$

(prima c'era eta1122 ...)