第2章作业 2203202 2022111189

李博文

1. 求解下列递归方程：

(1) $T(n)=5T(n/3)+n$，$T(1)=1$;

(2) $T(n)=2T(n/2)+n^{1/2}$，$T(n)=1$ 对$n<4$ 成立;

2. 斐波那契数列满足递归方程 $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$，其中 $F(0)=F(1)=1$。用数学归纳法证明：$F(n+2)>(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。

1. 1) 由Master定理. $a=5$. $b=3$. $f(n)=n$

$T(n)=5T(n/3)+n$. $T(1)=1$.

$\log_b a=\log_3 5>1$.

$\therefore T_n=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^{\log_3 5})$

2) 由Master定理

$T_n=2T(n/2)+n^{1/2}$. $T(n)=1$. $n<4$时

$a=2$. $b=2$ $f(n)=n^{1/2}$

$\log_b a=\log_2 2=1$. $f(n)=n^{\frac{1}{2}}=\Theta(n^{\log_b a})$.

$\therefore T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\cdot\log n)=\Theta(n^{1/2}\cdot\log n)$

2. 由题. 当$n=0,1,2$时

$F(2)=1$ $F(3)=2$ $F(4)=3$

当$n=0$时. 此式为 $F(2)\geq(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0$ 成立

当$n=1,2$时 此式成立.

设当$n=k$时此式成立. 即 $F(k+2)>(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$成立

当$n=k+1$时 有 $T(k+3)=F(k+2)+F(k+1)$.

则 $F(k+2)>(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$.

由斐那契数列性质 $F(k+1)>F(k)$ 在k对时成立

所以 $F(k+1)>(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}$

所以 $F(k+3)=F(k+2)+F(k+1)>(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}$

又$\because(\frac{1+\sqrt{5}}{2})>1$.

$\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}$

则 $F(k+3)>(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+1)$

$>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$1+\sqrt{}$

$F(k+3) > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \left(\frac{\text{[illegible]}}{2}\right)$

$F(k+3) > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$

$F(k+3) > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$

所当 $n=k+1$ 时成立.

所以 $F(n+2)$ 对于所有非负整数 n 成立.