

# 기하학

201807042 이무현

# 목차

1. [기하학](#)
2. [선형대수학](#)
3. [주의점](#)
4. [math.h](#)
5. [점](#)
6. [직선](#)
7. [면, 도형, 다각형, 다면체](#)
8. [원](#)
9. [삼각함수](#)
10. [벡터](#)
11. [행렬](#)

# 목차

1. [점과 다각형의 상대 위치 검사](#)
2. [CCW](#)
3. [두 선분의 교차 검사](#)
4. [단순 폐쇄 경로 찾기](#)
5. [볼록 껍질 찾기](#)
6. [짐꾸러기 알고리즘](#)
7. [그레이엄 스캔](#)
8. 참조

# 기하학 (Geometry)

기하학 : 점, 직선, 곡선, 면, 부피 등 공간의 성질을 연구하는 수학 분야

계산 기하학 : 기하학에 관한 알고리즘을 다루는 컴퓨터과학의 한 분야

최소 볼록 집합, Line segment intersection, 보로노이 다이어그램 등

고전 기하학

피타고라스의 정리

유클리드 기하학

근대 기하학

해석 기하학

비유클리드 기하학

위상수학

현대 기하학

등

# 선형 대수학

대수학 : 일련의 공리들을 만족하는 수학적 구조들의 일반적인 성질을 연구하는 분야  
집합과 그 위에 정의된 연산에 대한 규칙을 연구하는 학문

$$f(x) = y$$

선형 대수학 : 벡터공간과 선형사상에 관한 대수학  
일차함수, 벡터, 행렬 등을 연구하는 학문이다.

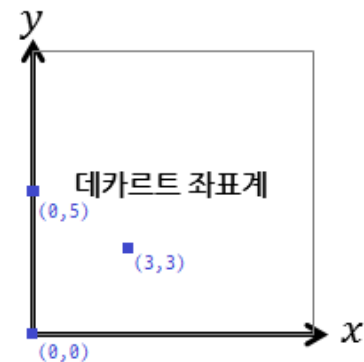
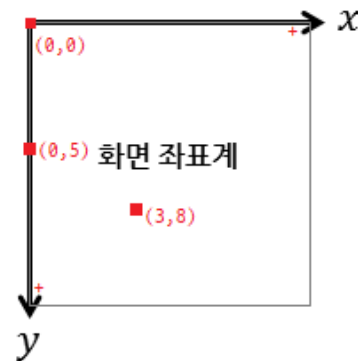
# 주의점

## 1. 좌표계

수학에서 사용하는 좌표계는 데카르트 좌표계로 좌측 하단을 원점으로 하는 좌표계를 갖는다.  
컴퓨터에서 사용하는 좌표계는 좌측 상단을 원점으로 하는 좌표계를 사용한다.

## 2. 좌표의 표현 방식

수학에서 좌표는  $(x, y)$  방식으로 표현한다.  
컴퓨터에서는 2차원 배열의 생성 구조때문에  $(y, x)$ 의 방식을 사용한다.  
두 방식을 혼용하게 되면 기준이 모호해지는 등 문제가 발생할 가능성이 커진다.  
(3차원은  $(z, y, x)$  와 같이 나타낸다.)



# 주의점

## 3. 퇴화 도형

일반 위치 : 도형들의 상대적 위치가 일반적인 경우  
퇴화 도형 : 일직선 상에 있는 세 개 이상의 점들  
서로 평행하거나 겹치는 직선 / 선분들  
넓이가 0인 다각형들  
다각형들의 변들이 서로 겹치는 경우

퇴화 도형의 경우 오류가 발생할 가능성이 크기 때문에 주의해야 한다.

## 4. 입력 값 제한

sqrt에 아주 작은 음수가 들어가는 경우

`sqrt( max( 0.0, x ) );` // 들어가는 값의 범위를 0.0 이상으로 제한한다.

acos, asin의 값에 -1 ~ +1 범위 이외의 값이 들어가는 경우

`acos(max( -1.0, min( 1.0, x ) ) )` // 들어가는 값의 범위를 -1.0 이상 1.0 이하로 제한한다.

# math.h

수학과 관련된 자주사용되는 함수를 저장한 라이브러리이다.

부동 소수점 (실수) 에서 연산이 이뤄진다.

모든 함수는 허용된 값의 범위가 존재하며 범위를 넘어가면 오류가 발생한다.

결과의 크기가 너무 크면 함수는 HUGE\_VAL 값을 리턴하며, errno가 ERANGE로 설정된다.

결과가 너무 작으면 0을 리턴한다.

## 함수

[기본 함수](#) (거듭제곱, 거듭제곱근, 올림, 내림, 절댓값, 나머지)

[삼각 함수](#) (사인, 코사인, 탄젠트, 아크 사인, 아크 코사인 등)

[지수, 대수 함수](#)

## [상수](#)



# math.h (기본함수)

보편적으로 많이 쓰이는 함수들이다.

거듭제곱, 거듭제곱근, 올림, 내림, 절댓값, 나머지에 대한 함수들이다.

| 반환형    | 함수    | 매개변수                   | 설명                            |
|--------|-------|------------------------|-------------------------------|
| double | pow   | ( double x, double y ) | $x^y$ 를 구한다.                  |
| double | sqrt  | ( double x )           | $\sqrt{x}$ 를 구한다.             |
| double | ceil  | ( double x )           | x보다 작지 않은 가장 작은 정수를 구한다. (올림) |
| double | floor | ( double x )           | x보다 크기 않은 가장 큰 정수를 구한다. (내림)  |
| double | fabs  | ( double x )           | x의 절댓값을 구한다.                  |
| double | fmod  | ( double x, double y ) | x를 y로 나눈 나머지를 구한다.            |

# math.h (삼각함수)

삼각함수에서 사용하는 함수들이다.

기본 삼각함수 뿐 아니라 역 삼각함수, 쌍곡선 함수까지도 지원한다.

| 반환형    | 함수    | 매개변수                   | 설명                                   |
|--------|-------|------------------------|--------------------------------------|
| 삼각함수   |       |                        |                                      |
| double | sin   | ( double x )           | 사인 x 를 구한다.                          |
| double | cos   | ( double x )           | 코사인 x 를 구한다.                         |
| double | tan   | ( double x )           | 탄젠트 x 를 구한다.                         |
| 역 삼각함수 |       |                        |                                      |
| double | asin  | ( double x )           | 아크 사인 x를 구한다.                        |
| double | acos  | ( double x )           | 아크 코사인 x를 구한다.                       |
| double | atan  | ( double x )           | 아크 탄젠트 x를 구한다. $(-\pi/2 \sim \pi/2)$ |
| double | atan2 | ( double x, double y ) | 아크 탄젠트 y/x를 구한다. $(-\pi \sim \pi)$   |
| 쌍곡선 함수 |       |                        |                                      |
| double | sinh  | ( double x )           | 하이퍼볼릭 사인 x를 구한다.                     |
| double | cosh  | ( double x )           | 하이퍼볼릭 코사인 x를 구한다.                    |

# math.h (지수, 대수 함수)

지수와 대수 연산에 필요한 함수들이다.

| 반환형    | 함수    | 매개변수                             | 설명  |
|--------|-------|----------------------------------|---|
| double | exp   | ( double x )                     | $e^x$ 를 구한다.  |
| double | frexp | ( double x, int * exp )          | 지수와 기수를 나눈다.<br>지수를 exp가 가리키는 변수에 저장하고 기수를 반환한다.        |
| double | ldexp | ( double x, int exp )            | $x * 2^{\text{exp}}$ 를 반환한다.                            |
| double | log   | ( double x )                     | $\log_e x$ 를 구한다.                                       |
| double | log10 | ( double x )                     | $\log_{10} x$ 를 구한다.                                    |
| double | modf  | ( double x,<br>double * inpart ) | 정수부와 소수부를 나눈다.<br>정수부를 inpart가 가리키는 변수에 저장하고 소수부를 반환한다. |

# math.h (상수)

자주 사용하는 상수, 연산 결과에 대해 저장 되어있다.

| 이름        | 설명                               | 이름         | 설명               |
|-----------|----------------------------------|------------|------------------|
| HUGE_VAL  | 계산 결과가 너무 커 오버플로우가 나면 이 값을 반환한다. |            |                  |
| M_E       | 자연상수 $e$                         | M_PI       | 원주율 $\pi$        |
| M_LOG2E   | $\log_2 e$                       | M_PI_2     | $\pi / 2$        |
| M_LOG10E  | $\log_{10} e$                    | M_PI_4     | $\pi / 4$        |
| M_LN2     | $\log_e 2$                       | M_1_PI     | $1 / \pi$        |
| M_LN10    | $\log_e 10$                      | M_2_PI     | $2 / \pi$        |
| M_SQRT2   | $\sqrt{2}$                       | M_2_SQRTPI | $2 / \sqrt{\pi}$ |
| M_1_SQRT2 | $1 / \sqrt{2}$                   |            |                  |

# 점

점 : 크기가 없고 위치만 있는 도형

유클리드 기하학의 점 : 점은 넓이가 없는 위치이다.

## 1. 변수로 표현하기

```
int x;    // x 좌표
```

```
int y;    // y 좌표
```

// 사용할 때마다 변수를 생성 해야하며, 관리가 어렵다.

## 2. 구조체(Class)로 표현하기

```
struct point{
```

```
    int x;    // x 좌표
```

```
    int y;    // y 좌표
```

```
}
```

```
point p1 = {1,2};
```

// 보다 직관적으로 사용 가능하다.

# 점

## 3. pair<> STL로 표현하기

```
pair< int , int > point(1,2);
```

```
point = pair< int, int >{ 1 , 2 };
```

```
point.first = 1;
```

```
point.second = 2;
```

```
// 선언 할 필요가 없다, 관리가 용이하다
```

```
// 직관성이 다소 떨어진다.
```

# 직선

직선 : 두 사이를 가장 짧은 거리로 연결한 선

유클리드 기하학의 직선 : 폭이 없는 길이,  
고르게 놓여있는 점 위에 있는 선

직선 방정식

1. 기울기가  $m$ 이고  $y$ 절편이  $n$ 인 직선의 방정식

$$y = m \cdot x + n$$

2. 기울기가  $m$ 이고, 점  $(x_1, y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식

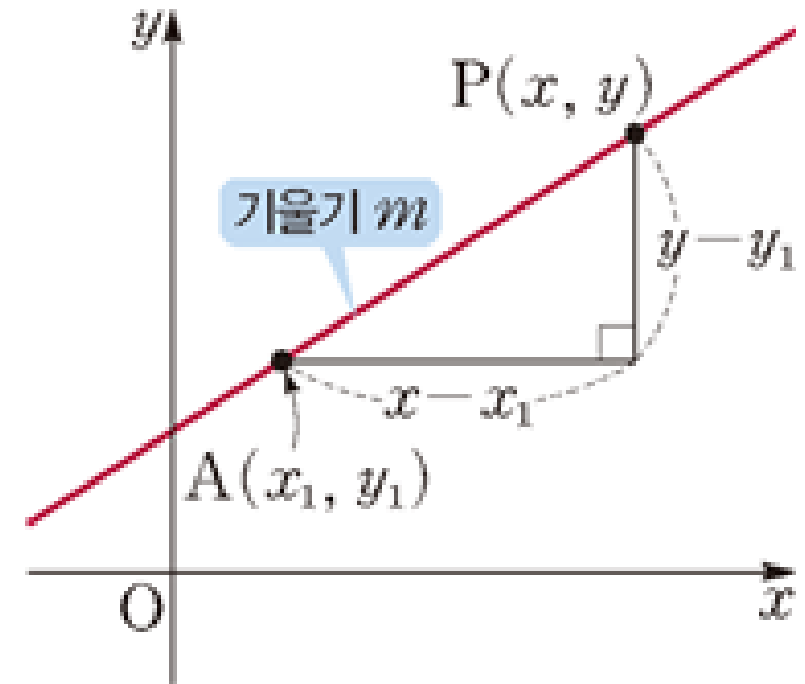
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

두 점의 기울기를 구하는 공식

$$\text{기울기} = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

두 점을 지나는 직선의 방정식

$$(y - y_1) = ((y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)) * (x - x_1)$$



# 직선

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식 (a ≠ 0, b ≠ 0 일 때)

$$x/a + y/b = 1$$

직선을 다음과 같이 나타내었을 때 조건에 따라 직선이 해당 형태를 나타낸다.

$$ax + by + c = 0$$

a ≠ 0, b ≠ 0 일 때

기울기 :  $-a / b$     절편 :  $-c / b$

a ≠ 0, b = 0 일 때

y축에 평행한 직선

a = 0, b ≠ 0 일 때

x축에 평행한 직선



# 두 점사이의 거리

피타고라스 정리에 따라

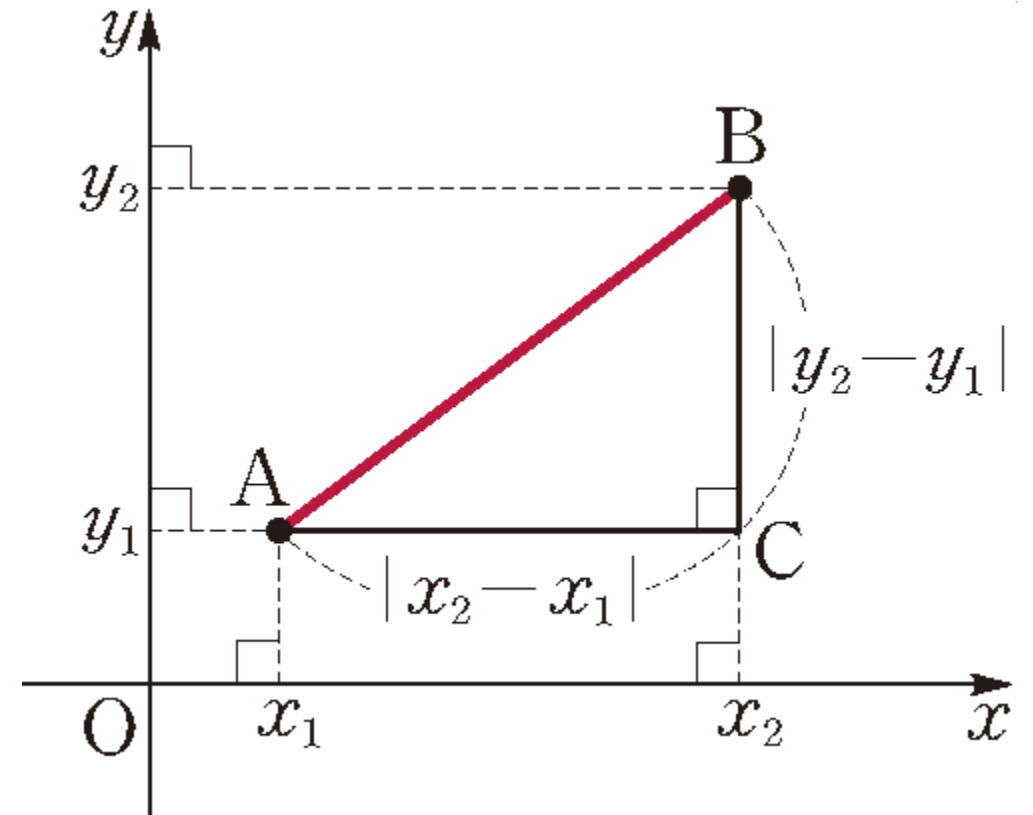
직선 AB의 길이 =  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

코드

```
sqrt(pow(x2 - x1, 2) + pow(y2 - y1, 2))
```

원점과 한 점의 거리

$\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$



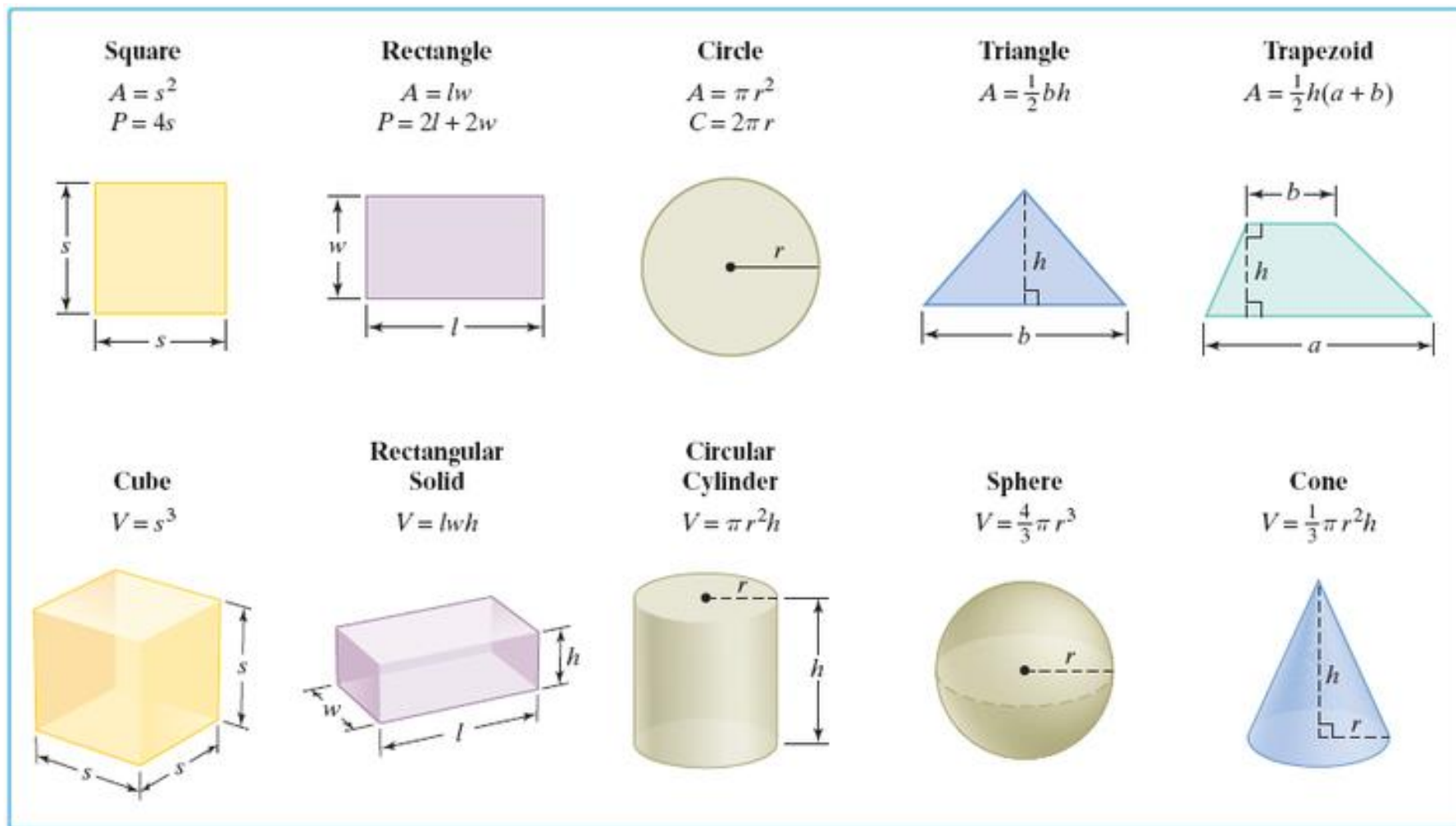
# 면, 도형, 다각형, 다면체

면은 길이와 폭을 갖고 있다.

면의 끝은 선으로 이루어져 있다.

도형은 경계를 갖고 있는 것이다.

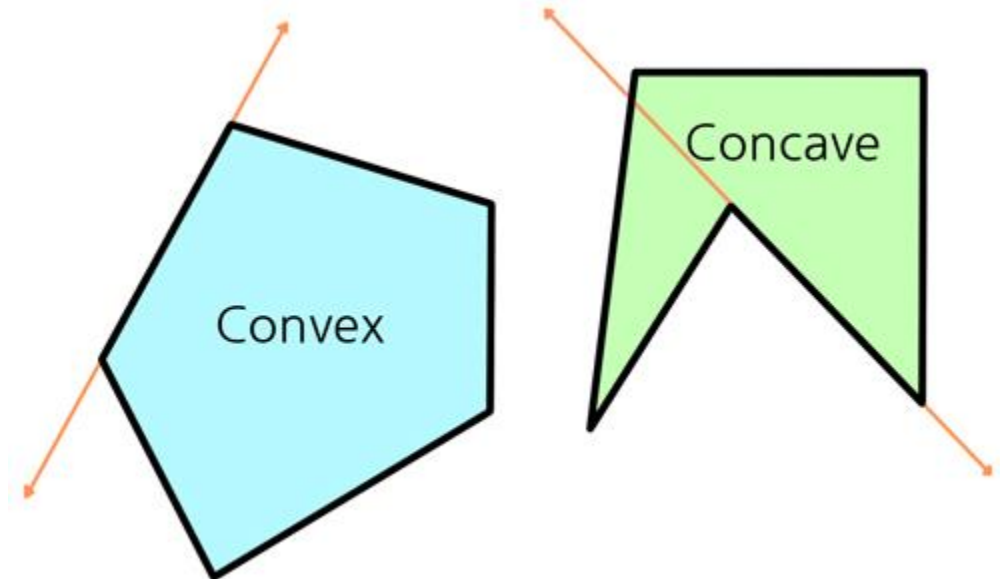
다각형은 직선으로 이루어진 것이다.



# 다각형

- 다각형 : 점들의 집합  
이웃한 점들은 직선으로 연결되고, 처음과 마지막 점을 직선으로 연결한 닫힌 모양의 도형
- 볼록 다각형 : 모든 내각이 180도 미만인 다각형  
두 볼록 다각형의 교집합은 항상 볼록 다각형이다.
- 오목 다각형 : 180가 넘는 내각을 갖는 다각형
- 단순 다각형 : 연속한 두 변 이외에는 어느 두 변도 교차하지 않는 다각형  
경계가 스스로 교차하지 않는 다각형

다각형 클리핑 알고리즘,  
볼록 껍질 알고리즘,  
회전하는 캘리퍼스 알고리즘



# 원

원 : 한 점으로부터 가장자리까지의 거리가 일정한 도형

중점 : 원의 중심에 있는 기준이 되는 점

반지름  $r$  : 중점으로 부터 한 점까지의 거리

지름 : 원의 한 점으로부터 중점을 지나가는 선분의 길이

원주율 : 원의 둘레와 지름의 비 ( $\pi = 3.14$  M\_PI 에 정의되어 있음)

원주 : 원의 둘레

원주 공식

$$2 * M\_PI * r$$

원 넓이 공식

$$M\_PI * \text{pow}(r, 2) \quad || \quad M\_PI * r * r$$

부채꼴 호의 길이와 넓이

$$\text{호의 길이 } l = \text{원주} * x / 360 \quad \quad \quad \text{넓이} = \text{넓이} * x / 360 = 1/2 * r * l$$

# 원 방정식

중심이  $a, b$ 이고, 반지름의 길이가  $r$ 인 원의 방정식

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

직선과 원의 관계

중점과 수선의 거리 또는 판별식을 통해 판정이 가능하다.

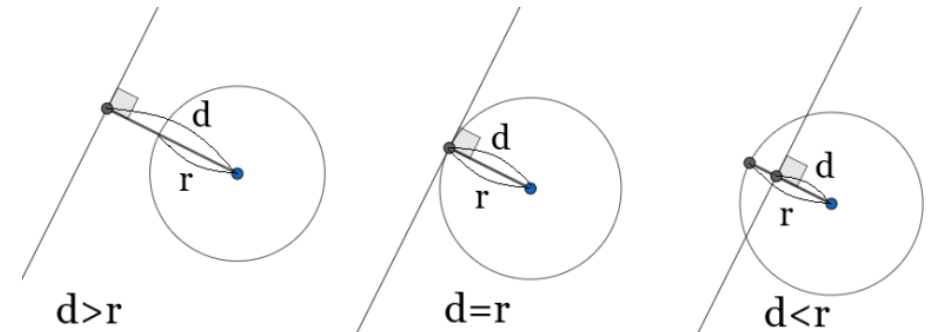
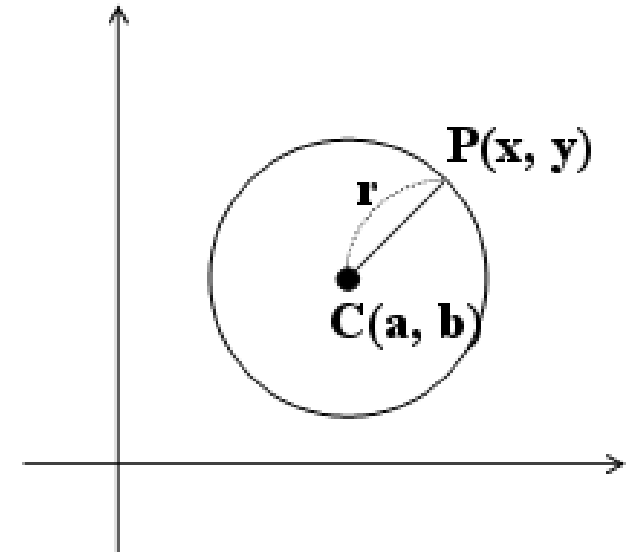
1. 만나지 않는다.  $D < 0$  허근
2. 접한다.  $D = 0$  중근
3. 두 점에서 만난다.  $D > 0$  서로 다른 두 실근

판별식을 이용한 방식

판별식  $D: b^2 - 4ac$  ( $ax^2 + bx + c = 0$ )

$y = -ax + n$  으로 정의 한 후 원 방정식에 대입한다.

이후 판별식에 넣어 확인한다.



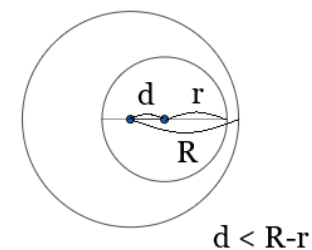
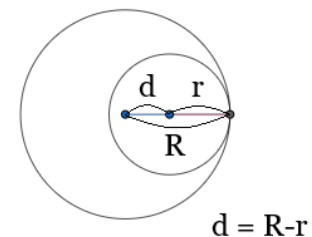
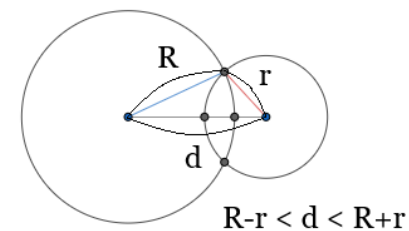
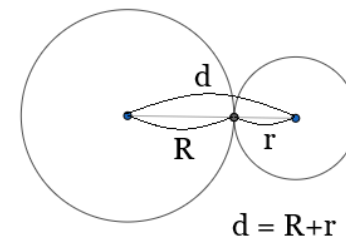
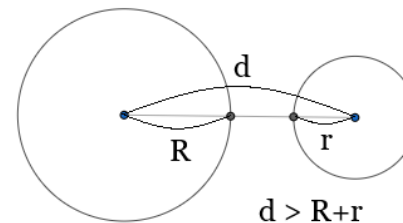
# 원과 원의 관계

두 점의 중점과 반지름의 합의 관계로 파악한다.

1. 외부에 있다.
2. 외접한다.
3. 두 점에서 만난다.
4. 내접한다.
5. 내부에 있다.

세 점을 지나는 원의 방정식

$x^2 + y^2 + a * x + b * y + c = 0$  형태로 바꾼 후 연립 방정식



# 접선의 방정식

원의 중심과 접점을 이은 반지름은 접선과 수직이다

수직인 선분의 기울기의 곱은 -1이다.

기울기를 알 때

$y = mx + n$  의 식에 기울기를 대입한 후 원의 방정식에 대입한다.

판별식이 0이 되는  $x, y$  값을 찾는다. (이 때 결과값은 두가지 경우가 나온다.)

접점을 알 때

두 직선이 수직이면 기울기의 곱 = -1 이라는 것을 이용한다.

원에서 접점 기울기 =  $(y - b) / (x - a)$

접선의 기울기 =  $-(x - a) / (y - b)$

접선의 방정식 =  $y - y_1 = ((x_1 - a) / (y_1 - b)) * (x - x_1)$

=  $(x_1 - a) * (x - a) + (y_1 - b) * (y - b) = r^2$

# 삼각함수

삼각비 : 직각삼각형에서 두 변에 대한 길이의 비를 나타내는 것

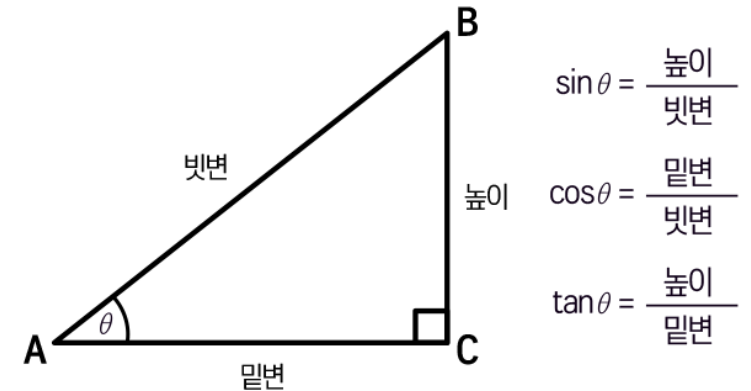
삼각 함수 : 직각 삼각형에 대하여 일정한 비의 관계를 함수로 나타낸 것

$\sin\theta$  :  $y / r$

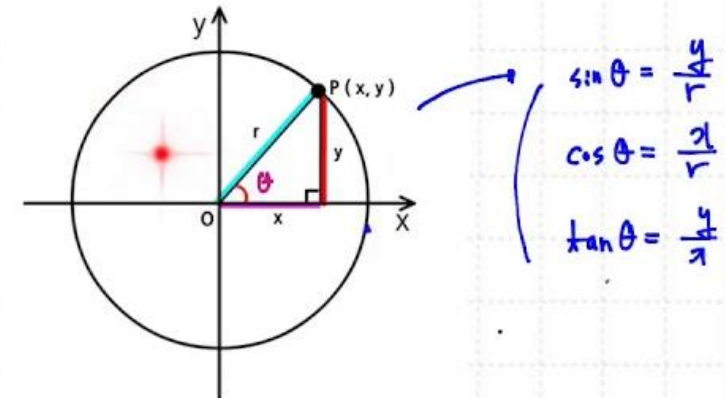
$\cos\theta$  :  $x / r$

$\tan\theta$  :  $y / x$

사용처 : 거리 측정, 측량, 음악, 파동  
거리 길이, 주기적인 변화에 사용한다.



## 02. 삼각함수





# 각도

60분법 : 원을 360으로 나눠 표현하는 방법  
단위 : 도  $^{\circ}$

호도법 : 길이 비율에 따라 각도를 표현하는 방법  
 $\theta : 360^{\circ} = r : 2\pi r$   
단위 : 라디안 rad

$$1^{\circ} = \pi / 180 \text{ rad}$$

$$180^{\circ} = \pi \text{ rad}$$

$$360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}$$

# 선분의 각도 계산

두 점의 좌표가 주어 졌을 때 상대적인 각도를 측정하는 방법이다.  
두 점의 가로 세로 길이를 알기 때문에 각도를 도출해 낼 수 있다.

$$\tan \Theta = Ry / Rx$$

$$\Theta = \tan^{-1} ( Ry / Rx )$$

$$\Theta = \text{atan}( Ry / Rx )$$

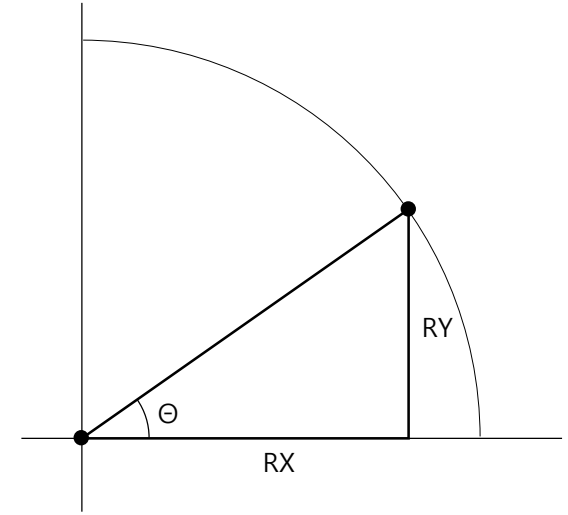
$$\Theta = \text{atan2}( Ry , Rx )$$

결론 : 중심각은 역탄젠트를 활용하여 구한다.

$$\text{atan}( Ry / Rx ) \quad // -\pi/2 \sim \pi/2$$

$$\text{atan2}( Ry , Rx ) \quad // -\pi \sim \pi$$

$$\text{mod}( \text{atan2}( Ry, Rx ) + M\_2\_PI, M\_2\_PI ); \quad // 0 \sim 2\pi$$



# 벡터

벡터 : 크기와 방향을 가지는 물리량 (  $a$  또는  $Va$  와 같이 표기 )

스칼라 : 크기만 가지고 있는 물리량 (  $|a|$  또는  $|Va|$  와 같이 표기 )

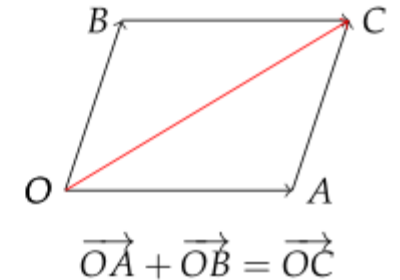
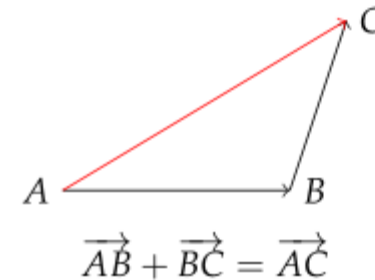
단위 벡터 : 크기가 1인 벡터

역 벡터 : 벡터에 대해 방향이 반대이고 길이 또는 크기가 같은 벡터

$Va(x_1, y_1), Vb(x_2, y_2)$

덧셈  $Va + Vb = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

곱셈  $Va * n = (x_1 * n, y_1 * n)$



사용처 : 물체의 운동 방향, 사이각 계산

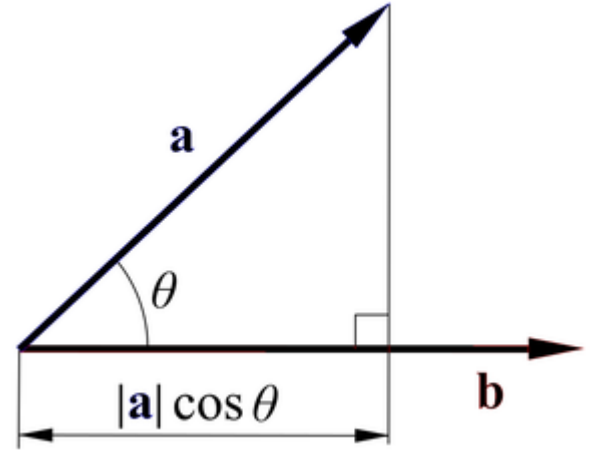
# 벡터 내적

벡터에서 방향이 일치하는 만큼만 곱하는 방식이다.

벡터를 곱하는 방법 중 하나이다.

결과값은 스칼라 값이 나온다.

$$\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{V}_b = x_1 * x_2 + y_1 * y_2 = |\mathbf{V}_a| * |\mathbf{V}_b| * \cos \theta$$



# 벡터 내적

벡터의 사이각 구하기

$$\text{angle} = \text{acos}((a \cdot b) / (|a| * |b|))$$

$$\text{angle} = \min(\text{angle}, M\_PI - \text{angle})$$

// 값이 두 경우로 나온다.

// 두 값 중 작은 값으로 나온다.

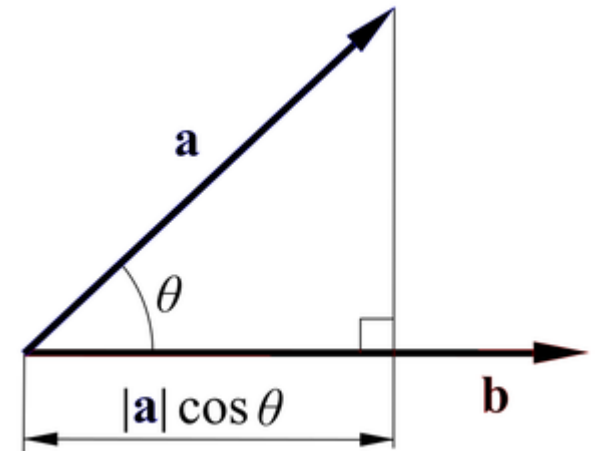
벡터의 직각 여부 확인하기.

두 벡터의 내적이 0이라면 항상 직각이다.

$a \cdot b$  가 0이라면 항상 직각이다.

벡터의 사영

$$|a| \cos \theta = (a \cdot b) / |b|$$



# 벡터 외적

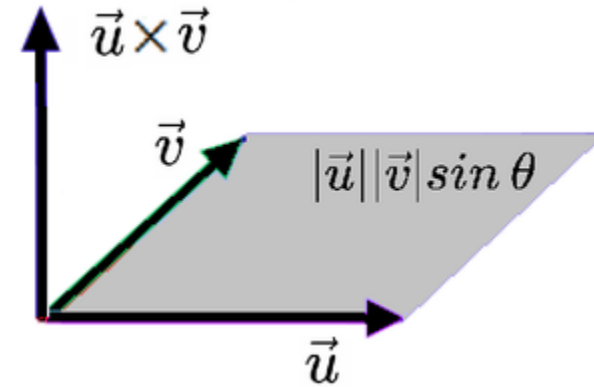
두 벡터가 이루는 정사각형의 넓이를 구하는 방법이다.

벡터를 곱하는 방법 중 하나이다.

결과값은 벡터이다.

3차원 벡터에서 정의된다. (z축을 0으로 계산하여 2차원에서 사용한다.)

오른손 법칙을 따른다.



벡터 외적의 결과값은 a벡터와 b벡터가 만드는 평행 사변형의 넓이이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a * \mathbf{V}_b &= ( (y_1 * z_2 - z_1 * y_2), (z_1 * x_2 - x_1 * z_2), (x_1 * y_2 - y_1 * x_2) ) \\ &= |\mathbf{V}_a| * |\mathbf{V}_b| * \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\text{2차원의 결과값} = ( 0, 0, (x_1 * y_2 - y_1 * x_2) )$$

외적 값을 절반으로 나누면 두 벡터가 만드는 삼각형의 크기를 계산 할 수 있다.

# 벡터 외적

## 면적 계산

외적의 절대값은  $V_a, V_b$ 를 두 변으로 하는 평행 사변형의 넓이이다.

따라서 외적값을 절반으로 나누면 두 벡터를 선분으로 하는 삼각형의 넓이가 나온다.

$$\text{삼각형의 넓이} = |V_a * V_b| / 2$$

## 두 벡터의 방향 판별

외적 결과값의 부호에 따라 방향성을 알 수 있다.

오른손 법칙에 따라

양수 :  $V_b$ 가  $V_a$ 의 반시계 방향에 있음

음수 :  $V_b$ 가  $V_a$ 의 시계 방향에 있음

# 선분과 선분의 교차

한 직선에 평행한 두 선분이 있을 때 선분들의 관계는 넷 중 하나이다.

1. 서로 겹치지 않음
2. 한 점에서 닿음
3. 겹쳐짐
4. 한 선분이 다른 선분 안에 포함 됨

선분 AB에 대하여 선분 CD의 교차관계

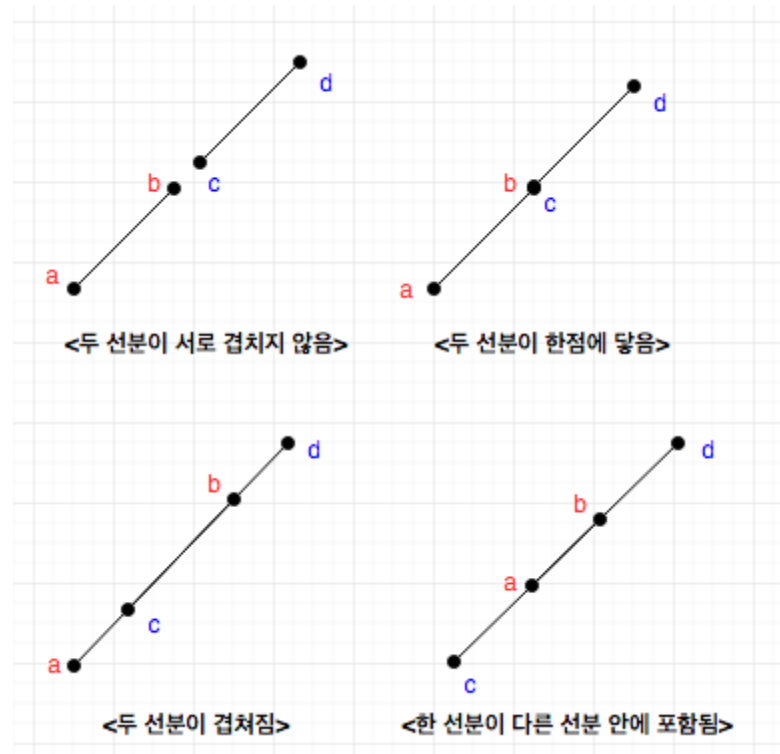
$A < C < B$  또는  $A < D < B$  라면 교차한다.

단  $A < B$  이고,  $C < D$  이며,  $\text{CCW}(A, B, C) \neq 0$  일 때

$A < B$  이고  $C < D$  일 때 다음 경우를 먼저 걸러야 한다.

$\text{if}(\text{ccw}(a, b, c) \neq 0 \parallel b < c \parallel d < a) \text{ return false;}$

polar 메소드도 존재 하지만 시간이 오래걸린다.





# 행렬

수 또는 다항식 등을 직사각형 모양으로 배열한 것

행 : 가로줄 Row

열 : 세로줄 Column

차원 : 행렬의 크기로 행의 개수 \* 열의 개수로 나타냄  $m \times n$ 차원 행렬

행벡터 : 행렬이 하나의 행으로 구성되어 있는 경우

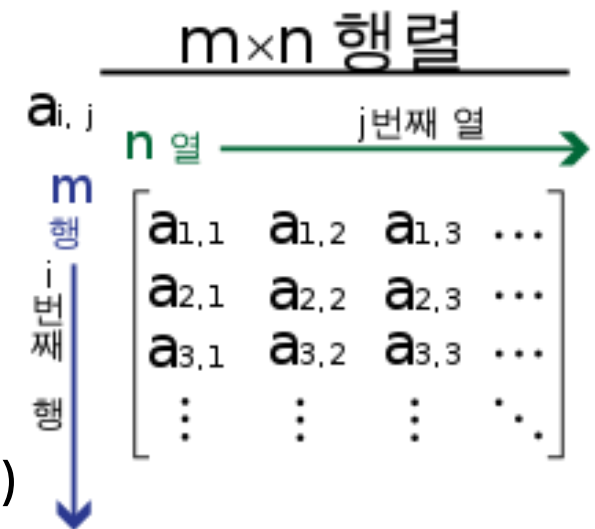
열벡터 : 행렬이 하나의 열로 구성되어있는 경우

상등 : 두 행렬의 모든 원소가 같다면 상등한다 라고 표현한다.

영행렬 : 행렬의 모든 원소가 0으로 이뤄진 경우

전치행렬 : 원래의 행렬의 행과 열을 바꾼 행렬

사용처 : 방정식 계산, 모델링(현상 수식화), 암호화, 그래픽 처리(이미지 변환)



# 행렬

$$\text{행렬 } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{행렬 } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{덧셈} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{곱셈} \quad K * A = \begin{pmatrix} K*a_1 & K*a_2 \\ K*a_3 & K*a_4 \end{pmatrix}$$

# 행렬의 곱

## 행렬 곱

행렬을 곱하기위해선 A행렬의 열의 수와 B 행렬의 행의 수가 같을 때 행렬 곱 AB가 정의 될 수 있다.

교환 법칙 : 다음 두 경우를 제외하고 일반적으로 성립하지 않음

단위행렬과의 교환 법칙

스칼라 곱의 교환 법칙

결합법칙 : 성립함

분배법칙 : 성립함

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$AB = (a_1 * b_1 \ a_2 * b_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 * b_1 + a_2 * b_3 & a_1 * b_2 + a_2 * b_4 \\ a_3 * b_1 + a_4 * b_3 & a_3 * b_2 + a_4 * b_4 \end{pmatrix}$$

# 목차

1. [점과 다각형의 상대 위치 검사](#)
2. [CCW](#)
3. [두 선분의 교차 검사](#)
4. [단순 폐쇄 경로 찾기](#)
5. [볼록 껍질 찾기](#)
6. [짐꾸러기 알고리즘](#)
7. [그레이엄 스캔](#)
8. 참조

# 점과 다각형의 상대 위치 검사

다각형과 한 점이 주어질 때 점이 다각형의 내부에 있는지 외부에 있는지 확인하는 방법

점에 한 방향으로 반직선을 긋는다.

해당 반직선이 다각형과 만나는 점의 개수에 따라 결과를 판별할 수 있다.

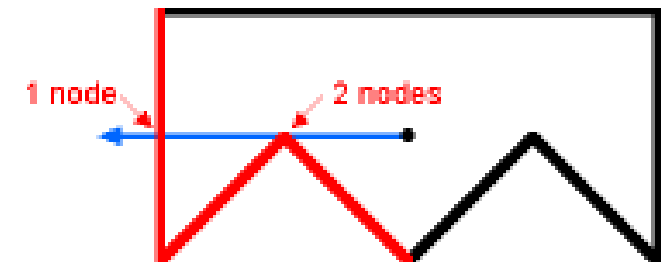
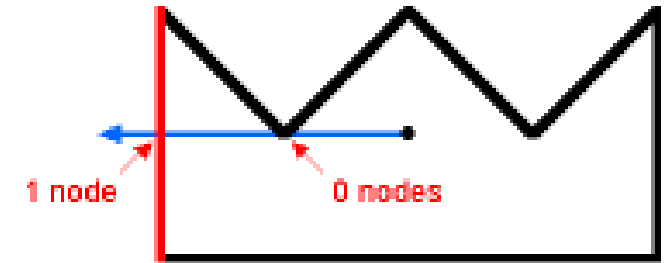
홀수 : 다각형의 내부에 있는 점이다.

0 또는 짝수 : 다각형의 외부에 있는 점이다.

점으로 판단하는 것 이 아닌 선분으로 판단 하기 때문에

다음과 같은 경우에도 올바르게 판별이 가능하다.

양쪽으로 판별하여 양쪽 모두 0 또는 짝수인 경우에만 외부에 있는 점이다.



# CCW ( Counter ClockWise)

평면 위에 놓여진 세 점의 방향 관계를 구하는 알고리즘

벡터의 외적을 이용하여 세 점의 방향성을 구한다.

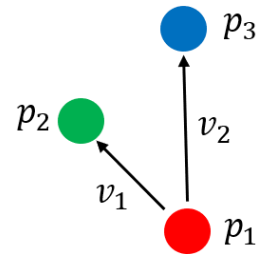
A점을 기준으로 두고 AB 벡터 \* AC 벡터 를 구한다.

결과값에 따른 방향성

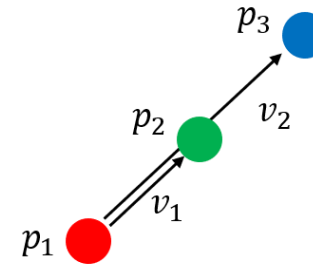
$CCW() < 0$  : 시계방향

$CCW() = 0$  : 일직선

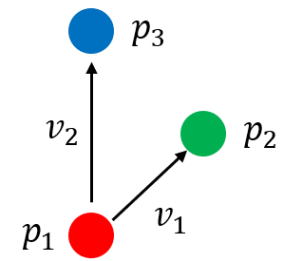
$CCW() > 0$  : 반시계 방향



시계 방향 (음수)



일직선 (0)



반시계방향 (양수)

# CCW 코드

// p1 p2 벡터 \* p1 p2 벡터

//  $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)$

```
int ccw(pair<int, int> p1, pair<int, int> p2, pair<int, int> p3){  
    int op  =  p1.first * p2.second + p2.first * p3.second + p3.first * p1.second;  
    op      -= (p1.second * p2.first + p2.second * p3.first + p3.second * p1.first);  
  
    if ( op > 0 )           return 1;  
    else if ( op == 0 )     return 0;  
    else                   return -1;  
}
```

# 두 선분의 교차 검사

A,B,C,D 점 에서 선분 AB , 선분 CD가 주어질 때 두 점이 교차하는지를 판단하는 방법이다.

[CCW](#) 알고리즘을 사용하여 이를 판단한다.

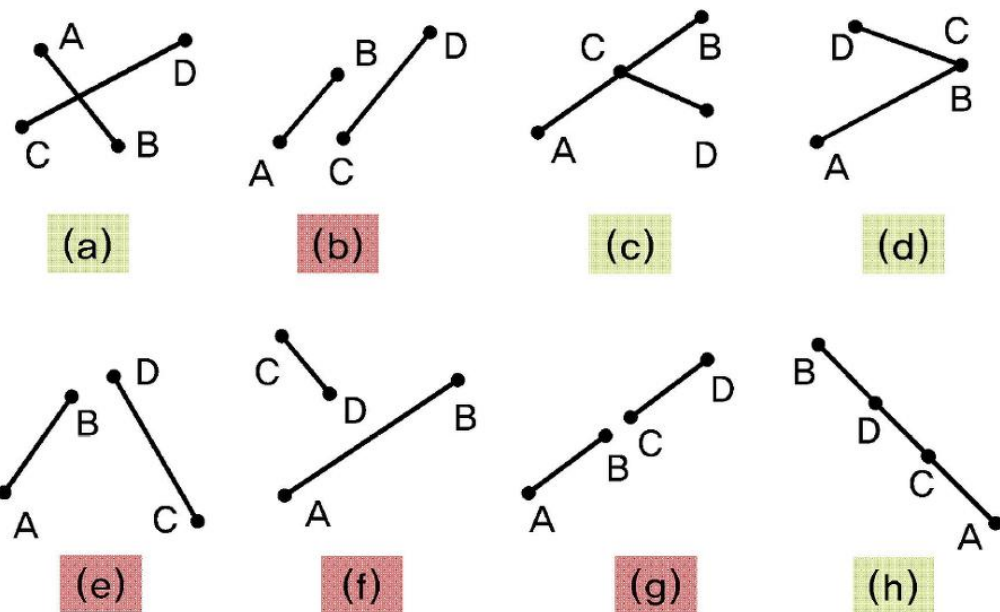
선분 AB에 대하여 C, D 점이 각각 좌측 우측에 하나씩 있어야 한다.

따라서 CCW 값을 곱하여 음수가 되면 교차한다 할 수 있다.

위의 조건을 만족하더라도 선분 CD에 대하여 점A, 점B가 만족하지 않는 경우가 있다.

따라서 선분 CD에 대하여 A, B점을 한번 더 검사한다.

이 값이 각각 음수라면 두 선분은 교차한다.





## 두 선분의 교차 검사

```
bool is_cross(point A, point B, point C, point D){  
  
    int ta = ccw ( A, B, C ) * ccw ( A, B, D );  
           // 선분 AB에 대하여 점 C, 점 D 가 각각 좌 우측에 배치되어 있는지 확인  
    int tb = ccw ( C, D, A ) * ccw ( C, D, B );  
           // 선분 CD에 대하여 점 A, 점 B 가 각각 좌 우측에 배치되어 있는지 확인  
  
    return (ta < 0 && tb < 0 )  
           // 두 결과값이 모두 음수라면 서로 교차한다.  
}
```

# 단순 폐쇄 경로 찾기

N개의 점이 주어졌을 때 이 점들을 모두 경유하고 출발점에 되돌아오는 교차하지 않는 경로를 찾는 알고리즘

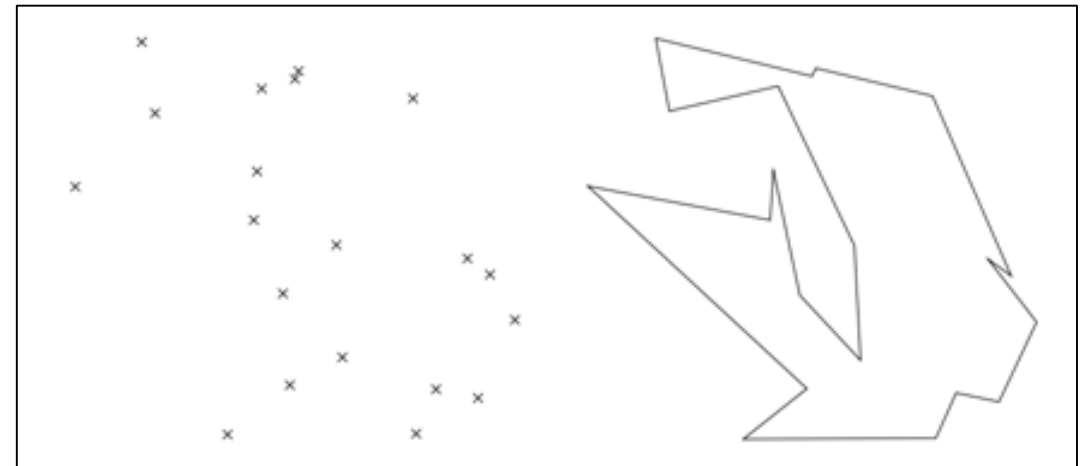
단순 다각형 : 연속한 두 번 이외에는 어느 두 번도 교차하지 않는 다각형

경계가 스스로 교차하지 않는 다각형

단순 폐쇄 경로에 의해 만들어지는 다각형은 단순 다각형이다.

1. 임의의 기준점을 잡는다.
2. 각각의 점까지의 각도를 구한다.
3. 오름차순으로 정렬한다.
4. 각 점을 오름차순으로 잇는다.

기준점에 따라 다각형의 모양이 달라진다.



예시 문제 : 단순 다각형 <https://www.acmicpc.net/problem/3679>

# 블록 껍질 찾기

유한한 점의 집합  $X$ 에 대해 그 점을 모두 포함하는 가장 작은 볼록 다각형을 볼록 껍질 이라 한다.

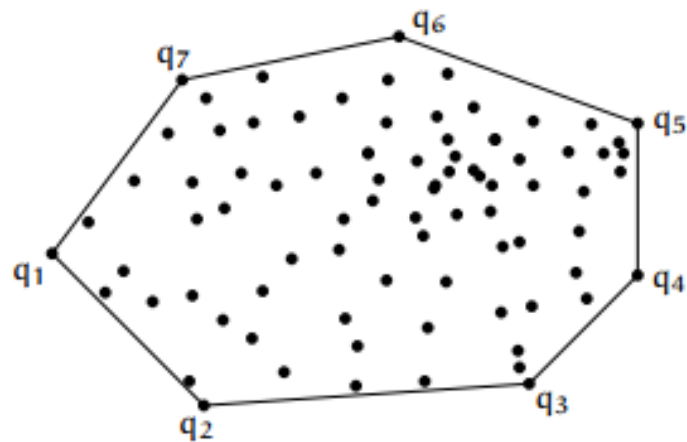
해당 문제를 풀 수 있는 알고리즘으로는

선물 포장 알고리즘, 그레이엄 스캔, 퀵 쉘, 분할 정복, 모노톤 체인, 점진적 볼록 껍질 알고리즘 등이 있다.

알고리즘에 따라 복잡도가 크게 달라진다.



(a) Input.



(b) Output.

# 짐꾸러기 알고리즘

선물 포장 알고리즘, 자비스 행진 알고리즘 이라고도 한다.

<https://www.youtube.com/watch?v=ZnTiWclznEQ>

CCW를 사용한다.

$O(nh)$  ( $h$ : 블록껍질을 이루는 점의 개수) 입력값의 영향을 많이받는 알고리즘이다.

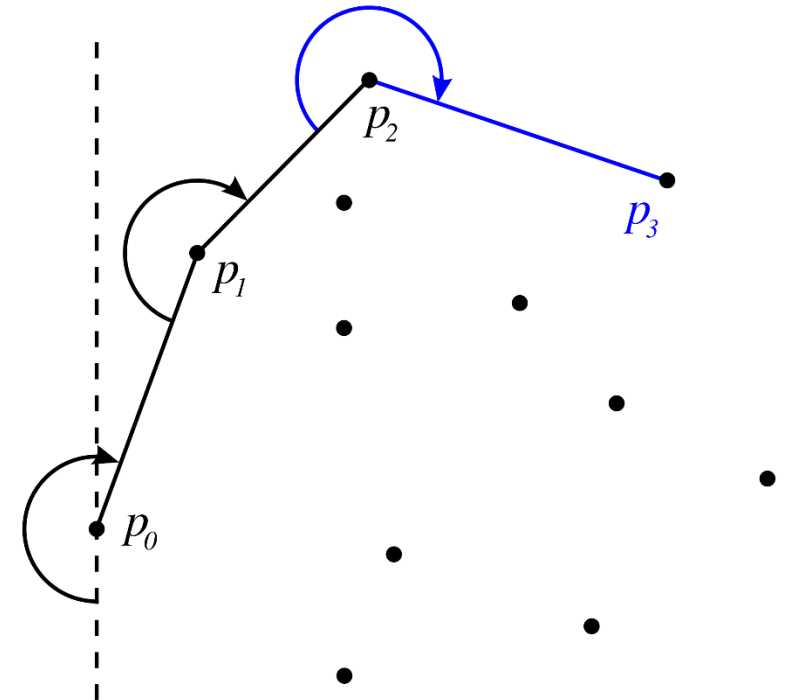
기준점에 대하여 모든 점의 각도를 계산하여 가장 큰 각도를 갖고 있는 점을 결과에 집어넣는 알고리즘이다 .

기준점을 잡는다.

기준점으로부터 모든 점에 대한 각도를 조사한다.

가장 큰 또는 가장 작은 값을 결과에 집어 넣는다.

다음 점이 기준점 이면 알고리즘을 종료한다.



# 그레이엄 스캔 (그라함 스캔)

$O(N \log N)$ 의 시간 복잡도를 갖는 볼록 껍질 알고리즘이다.  
CCW, 스택을 이용한다.

<https://www.youtube.com/watch?v=Ps1idzOx6LA>

x값 또는 y값이 가장 작은 점을 기준으로 잡는다.  
기준점에서 모든 점에 대한 각도를 측정한다.  
각도를 기준으로 오름차순 정렬한다.(반 시계방향으로 선을 정렬)

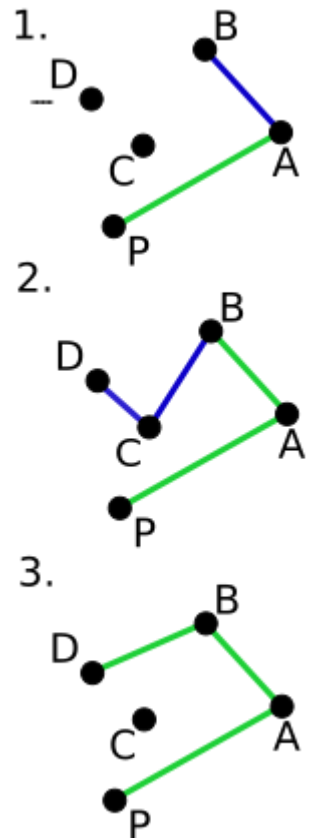
0번 점과 1번 점을 스택에 넣는다.

가장 최근의 두 점을 기준으로 다음 점이 선분의 좌측인지 우측인지 판별한다.

좌측 또는 선분 위에 있는 경우 : 스택에 해당 점을 집어 넣는다.

우측에 있는 경우 : 스택에서 pop 연산을 한다.

모든 점을 판별한 경우 알고리즘이 종료된다.



# 참조

## 벡터

- <https://owlyr.tistory.com/8>
- <https://hellogaon.tistory.com/37>
- <https://nsgg.tistory.com/85>
- <https://devhwan.tech/53>

## IBM math.h 문서

- <https://www.ibm.com/docs/ko/i/7.4?topic=files-mathh>

## 동명대학교 조미경 교수님의 ppt

- <http://cfs12.tistory.com/original/24/tistory/2008/10/13/19/53/48f328b5cb9d0>

## 삼각함수의 실생활 응용 사례

- [https://easytoread.tistory.com/entry/%EC%82%BC%EA%B0%81%ED%95%A8%EC%88%98-%EC%8B%A4%EC%83%9D%ED%99%9C-%ED%99%9C%EC%9A%A9-%EC%82%AC%EB%A1%80#GPS%EC%9D%98\\_%EC%9C%84%EC%B9%98\\_%EA%B3%84%EC%82%B0](https://easytoread.tistory.com/entry/%EC%82%BC%EA%B0%81%ED%95%A8%EC%88%98-%EC%8B%A4%EC%83%9D%ED%99%9C-%ED%99%9C%EC%9A%A9-%EC%82%AC%EB%A1%80#GPS%EC%9D%98_%EC%9C%84%EC%B9%98_%EA%B3%84%EC%82%B0)