# Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

## 10. Il calcolo dei limiti

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f+g$ diverge a $\pm\infty$

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f + g$ diverge a $\pm\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ diverge a $\mp\infty$, allora $f - g$ diverge a $\pm\infty$

# Forme determinate I

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $p$ (o a $p^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f+g$ diverge a $\pm\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ diverge a $\mp\infty$, allora $f-g$ diverge a $\pm\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ tende a $L$, allora $f \pm g$ diverge a $\pm\infty$

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f+g$ diverge a $\pm\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ diverge a $\mp\infty$, allora $f-g$ diverge a $\pm\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ tende a $L$, allora $f \pm g$ diverge a $\pm\infty$
- se $f$ tende a $L$ e $g$ diverge a $\pm\infty$, allora $f-g$ diverge a $\mp\infty$

# Esempi



$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x + \sqrt{x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 - \sin(x) =$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $p$ (o a $p^{\pm}$), allora abbiamo che

# Forme determinate II



**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f \cdot g$ diverge a $+\infty$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

**Proposizione.**
Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f \cdot g$ diverge a $+\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ diverge a $\mp\infty$, allora $f \cdot g$ diverge a $-\infty$

**Proposizione.**

Siano $f$ e $g$ due funzioni aventi limite per $x$ che tende a $\rho$ (o a $\rho^{\pm}$), allora abbiamo che

- se $f$ e $g$ divergono entrambe a $\pm\infty$, allora $f \cdot g$ diverge a $+\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ diverge a $\mp\infty$, allora $f \cdot g$ diverge a $-\infty$
- se $f$ diverge a $\pm\infty$ e $g$ tende a $L > 0$, allora $f \cdot g$ a $\pm\infty$

## Esempi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x\sqrt{1 + x^2} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (1 + e^{-x})x^2 =$$

Sono forme indeterminate tutte le espressioni del tipo

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0\cdot\pm\infty \qquad \frac{0^{\pm}}{0^{\pm}} \qquad \pm\infty + \mp\infty \qquad 1^{\pm\infty} \qquad \ldots$$

## Esempi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 + 1} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x^4} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{3x^2 + 1} =$$

# Limiti notevoli I



$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

# Limiti notevoli I

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

# Esempi



$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\pi} \frac{\sin(x)}{(x+\pi)} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} =$$

# Limiti notevoli II



$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

# Limiti notevoli II

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

# Esempi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{5x^2} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{1 + x^2} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} =$$

# Limiti notevoli III

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

# Limiti notevoli III



$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

# Esempi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{4x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \ln(x^2) =$$

# Limiti notevoli IV



$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

# Limiti notevoli IV

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

# Esempi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - e^{\pi x}}{2x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{e^{x} + 1} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin(x)} =$$

# Limiti notevoli V

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

# Limiti notevoli V

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

# Esempi



$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{L}{x}\right)^x =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x =$$

# Esercizi

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^x =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} =$$

## Altri esercizi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-x^2} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} =$$

## Esempi “negativi”



$$\lim_{x\longrightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \sin(e^{x}) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x} =$$

# Protagonisti

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

1805 - 1859