UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

08. Ancora sulle funzioni

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ diremo che la coppia (f, A) è una **funzione** a valori reali.

La funzione

Definizione.
Sia $A \subseteq \mathrm{IR}$ un insieme non vuoto e $f : A \to \mathrm{IR}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathrm{IR}$ diremo che la coppia (f, A) è una **funzione** a valori reali.

Inoltre diremo che A è il **dominio** della funzione.

La funzione

Definizione.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ diremo che la coppia (f, A) è una **funzione** a valori reali.

Inoltre diremo che A è il **dominio** della funzione.

E che $f(A) = \{y : y = f(x) \quad \forall x \in A\}$ è l'**immagine** di f.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, diremo che f è **iniettiva** se

$$x \neq y \qquad \text{implica} \qquad f(x) \neq f(y)$$

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, diremo che f è **iniettiva** se

$$x \neq y \qquad \text{implica} \qquad f(x) \neq f(y)$$

Definizione.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, diremo che f è **suriettiva** se

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \exists x \in A \qquad \text{tale che} \qquad y = f(x)$$

Funzioni invertibili

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, diremo che f è **invertibile** se

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \exists! x \in A \qquad \text{tale che} \qquad y = f(x)$$

Funzioni invertibili

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, diremo che f è **invertibile** se

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \exists! x \in A \qquad \text{tale che} \qquad y = f(x)$$

Osservazione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, se "restringiamo" una funzione f iniettiva al suo insieme immagine otteniamo una funzione invertibile

$$f : A \longrightarrow f(A) \qquad f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$

Un esempio

Funzioni monotone

Osservazione.
Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona, ristretta alla sua immagine, è una funzione invertibile

$$f : A \longrightarrow f(A) \qquad \text{allora esiste} \qquad f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$

Osservazione.
Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona, ristretta alla sua immagine, è una funzione invertibile

$$f : A \longrightarrow f(A) \qquad \text{allora esiste} \qquad f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$

Si noti che

$$f(x) > f(y) \qquad \text{se e solo se} \qquad x > y$$

Osservazione.
Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona, ristretta alla sua immagine, è una funzione invertibile

$$f : A \longrightarrow f(A) \qquad \text{allora esiste} \qquad f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$

Si noti che

$$f(x) > f(y) \qquad \text{se e solo se} \qquad x > y$$

$$f(x) > f(y) \qquad \text{se e solo se} \qquad f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(f(y))$$

Osservazione.

Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona, ristretta alla sua immagine, è una funzione invertibile

$$f : A \longrightarrow f(A) \qquad \text{allora esiste} \qquad f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$

Si noti che

$$f(x) > f(y) \qquad \text{se e solo se} \qquad x > y$$

$$f(x) > f(y) \qquad \text{se e solo se} \qquad f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(f(y))$$

da cui

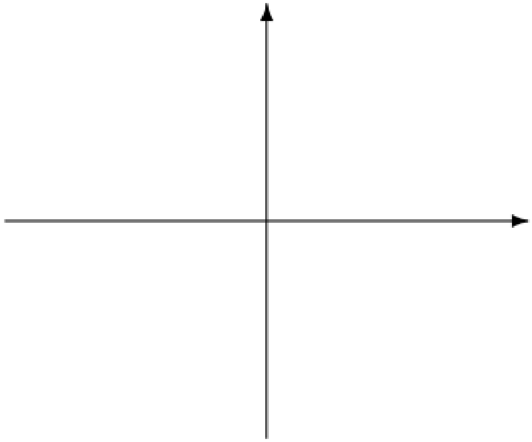
$$w > z \qquad \text{se e solo se} \qquad f^{-1}(w) > f^{-1}(z)$$

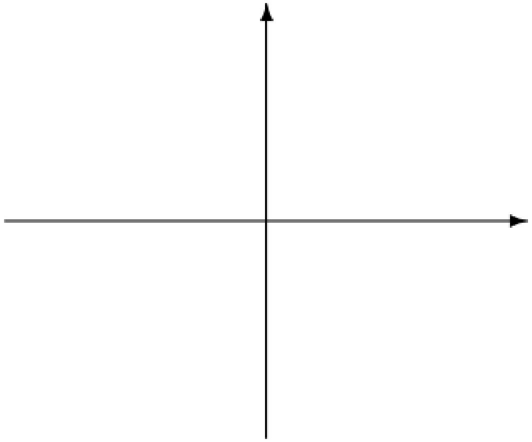
Un esempio

$$y = f(x) = e^x + x$$

Un esempio

$$y = f(x) = e^x + x$$





$$y = f^{-1}(x) = ?$$

Definizione.

Sia $f : A \longrightarrow I$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni a valori reali,

Funzioni composte

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow I$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni a valori reali, allora possiamo costruire la funzione **composta**

Funzioni composte

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow I$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni a valori reali, allora possiamo costruire la funzione **composta**

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\longrightarrow I \longrightarrow J \\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Funzioni composte

Osservazione.
Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni strettamente monotone,

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Osservazione.
Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni strettamente monotone, allora la loro composizione è una funzione strettamente monotona.

Funzioni composte

Osservazione.
Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni strettamente monotone, allora la loro composizione è una funzione strettamente monotona.

Supponiamo che f sia crescente e g decrescente, allora

$$x > y \qquad \text{implica} \qquad f(x) > f(y)$$

Osservazione.
Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni strettamente monotone, allora la loro composizione è una funzione strettamente monotona.

Supponiamo che f sia crescente e g decrescente, allora

$$x > y \qquad \text{implica} \qquad f(x) > f(y)$$

$$f(x) > f(y) \qquad \text{implica} \qquad g(f(x)) < g(f(y))$$

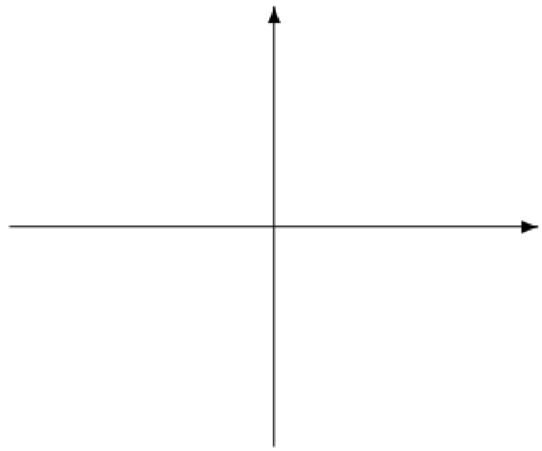
cioè $g \circ f$ è decrescente.

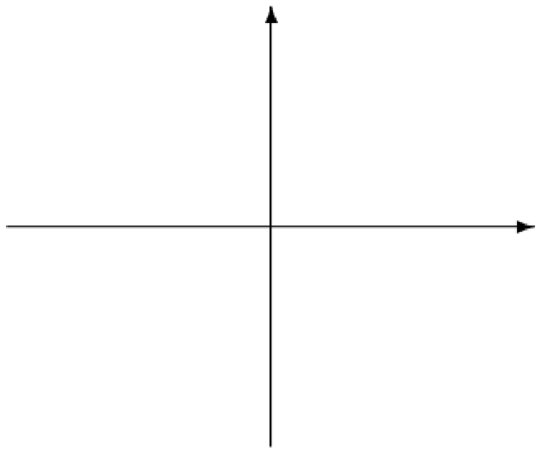
Un esempio

Siano $f(x) = -x^2$ e $g(x) = e^x$, la loro composizione è la funzione $y = e^{-x^2}$

Un esempio

Siano $f(x) = -x^2$ e $g(x) = e^x$, la loro composizione è la funzione $y = e^{-x^2}$



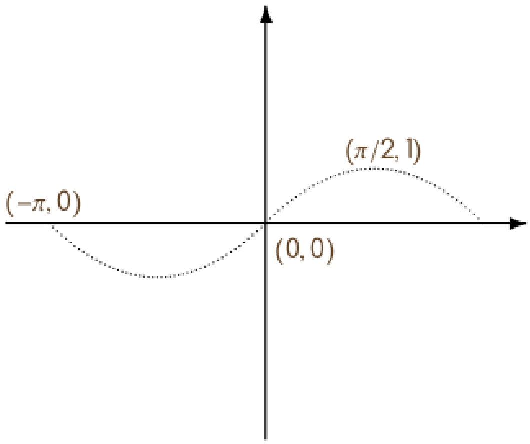


La funzione seno

Studiamo $y = \sin(x)$

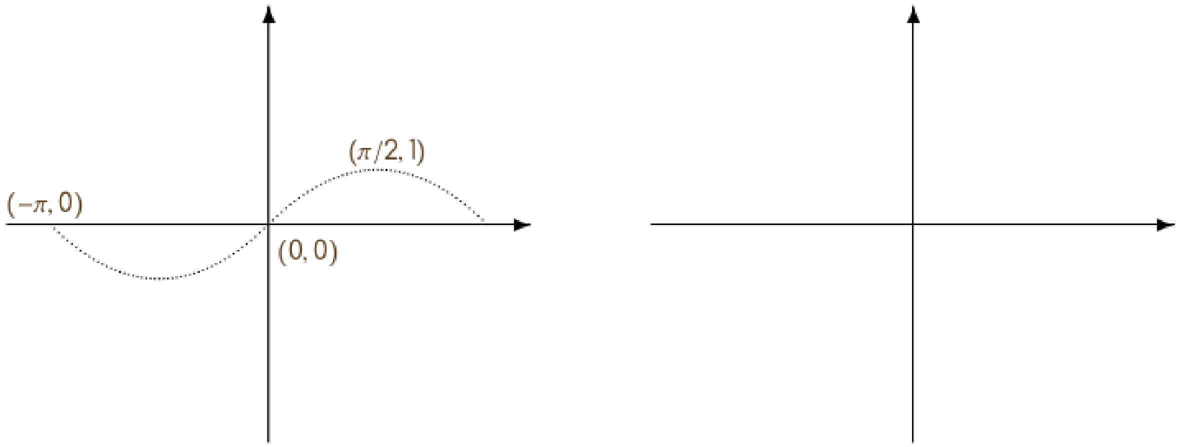
La funzione seno

Studiamo $y = \sin(x)$



La funzione seno

Studiamo $y = \sin(x)$



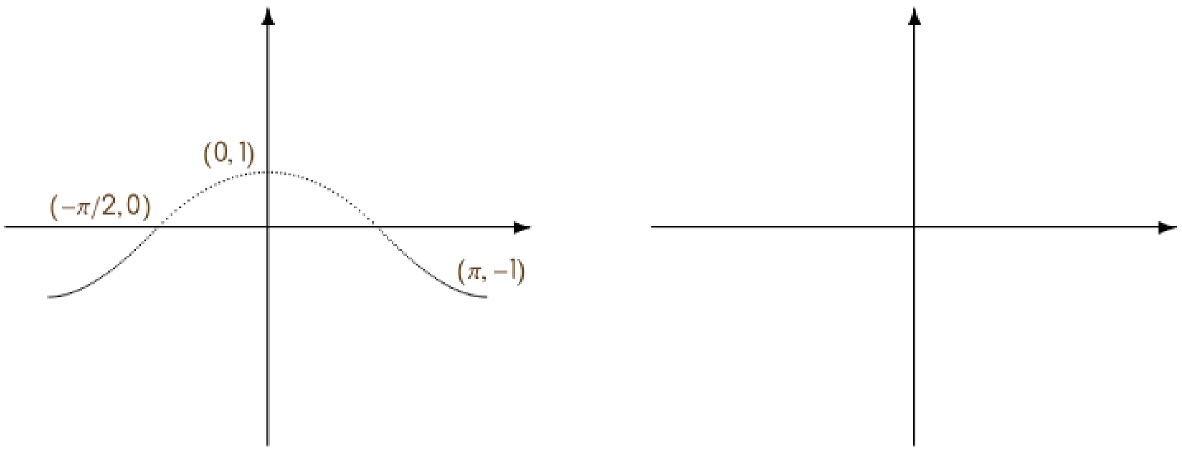
Si noti che $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ solo se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e che $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ solo per $x \in (-1, 1)$.

La funzione coseno

Studiamo $y = \cos(x)$

La funzione coseno

Studiamo $y = \cos(x)$



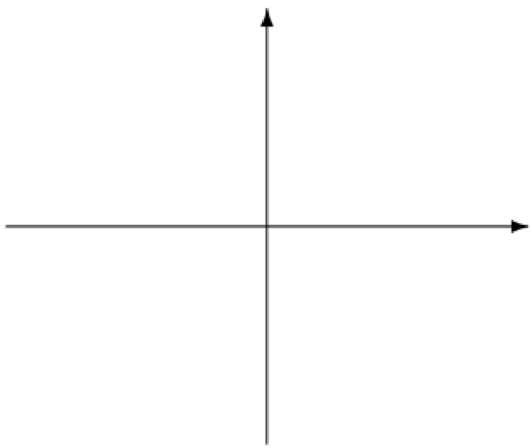
Si noti che $f^{-1}(f(x)) = x$ solo se $x \in (0, \pi)$ e che $f(f^{-1}(x)) = x$ solo per $x \in (-1, 1)$.

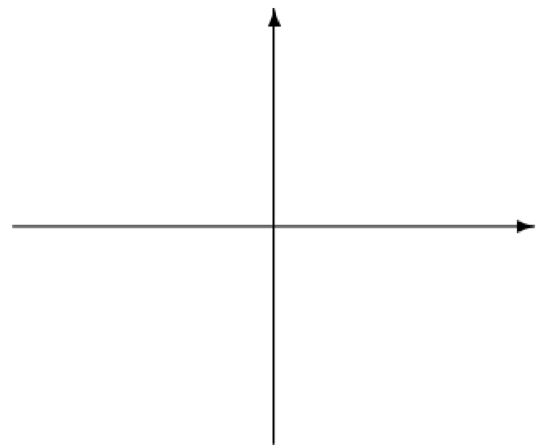
La funzione tangente

Studiamo $y = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

La funzione tangente

Studiamo $y = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$





Si noti che $f^{-1}(f(x)) = x$ solo se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e che $f(f^{-1}(x)) = x$ solo per $x \in \mathbb{R}$!

Protagonisti

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1646 - 1716

Leonhard Euler

1707 - 1783