UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

23. Basi

Richiami

- I fenomeni lineari sono descritti da spazi vettoriali e applicazioni lineari
- I sottospazi vettoriali possono essere parametrizzati in maniera ridondante o irridondante: la traduzione algebrica è data dalla dipendenza o indipendenza lineare
- Troppi vettori in K^n sono automaticamente linearmente dipendenti; vi sono applicazioni lineari invertibili tra K^m e K^n solo se $m = n$.
- Oggi: **Una riformulazione del concetto di generatori e di lineare indipendenza**
- **Basi (cioè sistemi di riferimento) di spazi vettoriali**

Elementi e applicazioni

Supponiamo di avere alcuni elementi $v_1, \ldots, v_n$ in uno spazio vettoriale V (su campo K). Che cosa possiamo farne? Delle combinazioni lineari!!!

Per ogni scelta di coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, possiamo costruire la corrispondente combinazione lineare

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Questo definisce un'applicazione $C : K^n \to V$ che associa alla n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la corrispondente combinazione lineare.

Quali sono le proprietà dell'applicazione C?

Un nuovo punto di vista

V spazio vettoriale sul campo K. $v_1, \ldots, v_n$ elementi di V.

$$C : K^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V.$$

- C è iniettiva se e solo se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti;
- C è suriettiva se e solo se $v_1, \ldots, v_n$ generano lo spazio vettoriale V;
- **C è lineare.**
  - $C(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) = C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + C(\beta_1, \ldots, \beta_n)$;
  - $C(\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n) = \lambda C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

In effetti, bisognerebbe scrivere $C_{v_1,\ldots,v_n}$ invece che C.

V spazio vettoriale sul campo K. $v_1, \ldots, v_n$ elementi di V.

$$C : K^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V.$$

Il caso interessante è quando C è sia iniettiva che suriettiva.

- Quando C è invertibile, $v_1, \ldots, v_n$ sono una base dello spazio vettoriale V.
- C è invertibile se e solo se è sia iniettiva che suriettiva;
- Dire che $v_1, \ldots, v_n$ sono una base di V è equivalente a richiedere che siano generatori di V linearmente indipendenti.

Se $v_1, \ldots, v_n$ sono una base di V, anche l'applicazione inversa $C^{-1} : V \to K^n$ è lineare. L'applicazione C^{-1} associa a ciascun elemento $v \in V$ l'unica n-upla di coefficienti che lo esprime come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

Coordinate in una base

V spazio vettoriale sul campo K. $v_1, \ldots, v_n$ elementi di V.

$$C : K^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V;$$
$$C^{-1} : V \ni v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n.$$

Se $v_1, \ldots, v_n$ sono una base di V, allora ogni $v \in V$ si esprime in modo unico come loro combinazione lineare. I coefficienti di tale combinazione lineare sono detti coordinate di v nella base $v_1, \ldots, v_n$.

L'applicazione lineare C^{-1} associa ad ogni vettore $v \in V$ le sue coordinate nella base $v_1, \ldots, v_n$.

Basi e dimensione

Ogni base $v_1, \ldots, v_n$ fornisce un'applicazione lineare invertibile $C_{v_1,\ldots,v_n} : K^n \to V$. E' coinvolto lo spazio vettoriale K^n, dove n è il numero di elementi della base.

Se $w_1, \ldots, w_m$ è un'altra base di V, allora ottengo un'altra applicazione lineare invertibile $C_{w_1,\ldots,w_m} : K^m \to V$. La composizione $C^{-1}_{v_1,\ldots,v_n} \circ C_{w_1,\ldots,w_m}$ è un'applicazione lineare invertibile $K^m \to K^n$.

Abbiamo già visto che questo è possibile solo se $m = n$. Pertanto, due basi (finite) diverse dello stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Poiché $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ è una base di K^n con esattamente n elementi, ogni base (finita) di K^n è costituita da esattamente n elementi.

Il numero di elementi di una base (finita) di V è detto dimensione di V.

Come trovo una base? - I

Se V è uno spazio vettoriale, $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti se nessuno di essi si scrive come combinazione lineare degli altri.

Una base è un insieme di vettori di V linearmente indipendenti, che sono anche dei generatori di V. Come facciamo a costruire una base di V?

- Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, **ma non generano** V, allora posso trovare $v \in V$ che non è loro combinazione lineare;
- in tal caso, anche $v_1, \ldots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti.
  - suppongo che $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta v = 0$
  - se $\beta = 0$, allora ho una relazione lineare tra $v_1, \ldots, v_n$ e quindi anche gli α_i sono tutti 0;
  - se $\beta \neq 0$, dividendo per β, posso esprimere v come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$, il che è escluso per scelta di v.

Come trovo una base? - II

In conclusione, se ho dei vettori linearmente indipendenti che non generano V, posso aggiungerne un altro in modo che rimangano linearmente indipendenti.

Questo fornisce una strategia per trovare una base di uno spazio vettoriale V: parto dall'insieme vuoto (che è sicuramente linearmente indipendente), e aggiungo di volta in volta un vettore, mantenendo l'insieme linearmente indipendente. Quando ottengo un insieme di vettori che genera V, ho trovato una base.

Ci sono due problemi (il primo è serio!) in questo procedimento

- Cosa succede se, continuando ad aggiungere elementi, non ottengo mai un insieme di generatori?
- Se il procedimento termina, ottengo una base finita, e so che due basi finite possiedono lo stesso numero di elementi. E' possibile che V abbia una base finita, ma il procedimento qualche volta non termini? **No**, ma va dimostrato.

Dimensione finita - I

Un'applicazione lineare $T : K^m \to K^n$ non può essere iniettiva se $m > n$.

Sia V uno spazio vettoriale, e $v_1, \dots, v_n$ una sua base. Se m è maggiore di n, è possibile trovare m elementi $w_1, \dots, w_m$ che siano linearmente indipendenti? Ho applicazioni

$$\begin{aligned} C_{w_1,\dots,w_m} &: K^m \to V \\ C_{v_1,\dots,v_n} &: K^n \to V, \end{aligned}$$

entrambe lineari. La seconda è invertibile, dal momento che $v_1, \dots, v_n$ formano una base. Se $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti, allora $C_{w_1,\dots,w_m}$ è iniettiva.

In tal caso, la composizione $C^{-1}_{v_1,\dots,v_n} \circ C_{w_1,\dots,w_m} : K^m \to K^n$ è composizione di applicazioni lineari iniettive, ed è quindi anch'essa iniettiva. Ma questo è impossibile, poiché $m > n$!

Dimensione finita - II

Se V ha una base composta da n elementi, ogni insieme linearmente indipendente di elementi di V ha al più n elementi.

Supponiamo che V abbia una base con n elementi, e torniamo alla procedura che abbiamo descritto prima per produrre una base

Parto da un insieme linearmente indipendente di V; finché non ottengo un insieme di generatori, posso continuare ad aggiungere vettori mantenendo la condizione di indipendenza lineare. Se non ottengo mai un insieme di generatori, posso continuare ad aggiungere vettori illimitatamente.

Dimensione finita - III

Se V ha una base composta da n elementi, ogni insieme linearmente indipendente di elementi di V ha al più n elementi.

Tuttavia, se supero n vettori, questi non possono essere linearmente indipendenti! Di conseguenza, prima o poi i miei vettori linearmente indipendenti dovranno generare tutto V. In quel momento, avrò ottenuto una base.

Ricapitolando, se V ha una base composta da n elementi:

- Ogni insieme linearmente indipendente è composto da al più n elementi
- Ogni insieme linearmente indipendente si completa ad una base
- Ogni insieme linearmente indipendente con esattamente n elementi è una base
- Ogni base è finita, e possiede esattamente n elementi
- Il numero di elementi di una base non dipende dalla scelta della base: $\dim V = n$

Dimensione infinita

Purtroppo, esistono spazi vettoriali con basi infinite. Un esempio facile da spiegare è quello dei polinomi a coefficienti reali.

L'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi è uno spazio vettoriale: i polinomi si possono sommare e sottrarre tra loro, e si possono moltiplicare per numeri reali.

Gli elementi $1, x, x^2, \ldots x^n$ sono linearmente indipendenti: la combinazione lineare $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ è il polinomio nullo se e solo se i coefficienti sono tutti nulli.

L'insieme $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ possiede $n + 1$ elementi ed è linearmente indipendente. Al variare di n ottengo insiemi linearmente indipendenti con sempre più elementi. Se $\mathbb{R}[x]$ avesse una base finita, questo non sarebbe possibile.

In effetti, $\{1, x, x^2, \ldots\}$ è una base infinita di $\mathbb{R}[x]$.

Riepilogo

- L'indipendenza lineare è una proprietà di insiemi piccoli: meno elementi ho, più è facile che siano linearmente indipendenti
- Se uno spazio vettoriale ha una base con n elementi, gli insiemi linearmente indipendenti hanno al più n elementi
- Se ho due basi di V, e una è finita, allora è finita anche l'altra e hanno lo stesso numero di elementi (la dimensione di V). $\dim K^n = n$
- Ogni insieme linearmente indipendente si completa ad una base
- Se $\dim V = n$, allora n elementi linearmente indipendenti sono automaticamente una base.
- Prossima lezione: essere generatori è una proprietà di insiemi grandi: più elementi ho, più è facile che generino
- Se $\dim V = n$, allora gli insiemi di generatori hanno almeno n elementi
- Da ogni insieme di generatori si estrae una base
- Se $\dim V = n$, un insieme di n generatori di V è automaticamente una base