UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

21. Sviluppi polinomiali

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

siccome $\sin(0) = 0$ e $e^0 = 1$ possiamo scrivere che

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

siccome $\sin(0) = 0$ e $e^0 = 1$ possiamo scrivere che

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{e^x - e^0}$$

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

siccome $\sin(0) = 0$ e $e^0 = 1$ possiamo scrivere che

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{e^x - e^0} = \frac{\dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}}{\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}}$$

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

siccome $\sin(0) = 0$ e $e^0 = 1$ possiamo scrivere che

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{e^x - e^0} = \frac{\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}}$$

da cui segue

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

siccome $\sin(0) = 0$ e $e^0 = 1$ possiamo scrivere che

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{e^x - e^0} = \frac{\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}}$$

da cui segue

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\lim \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}}{\lim \frac{e^x - e^0}{x - 0}}$$

Un esempio

Consideriamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

siccome $\sin(0) = 0$ e $e^0 = 1$ possiamo scrivere che

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{e^x - e^0} = \frac{\dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}}{\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}}$$

da cui segue

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\lim \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}}{\lim \dfrac{e^x - e^0}{x - 0}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(x)}{e^x} = 1$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Teorema.
Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e $x_0 \in (a, b)$ tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (oppure $\pm\infty$).

Formule di de L'Hôpital

Teorema.

Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e $x_0 \in (a, b)$ tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (oppure $\pm\infty$).
Se esiste il limite

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Formule di de L'Hôpital

Teorema.
Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e $x_0 \in (a, b)$ tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (oppure $\pm\infty$).
Se esiste il limite

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

allora

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Esempi

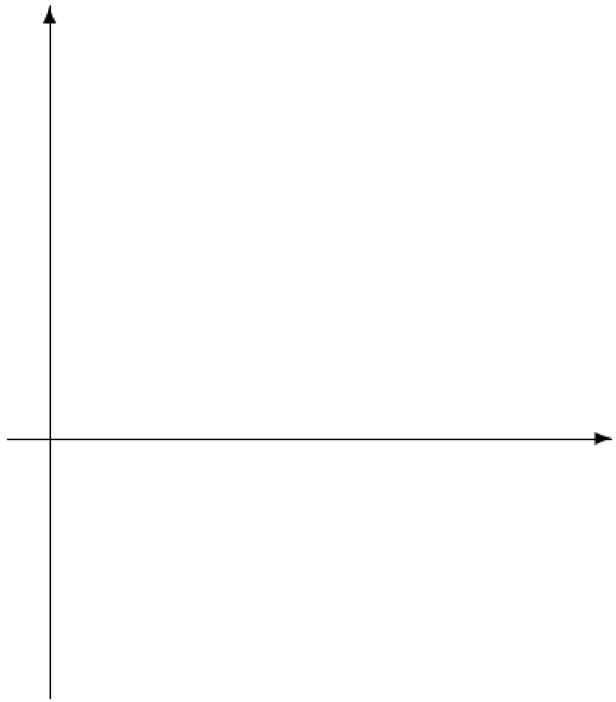
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2} =$$

Esempi

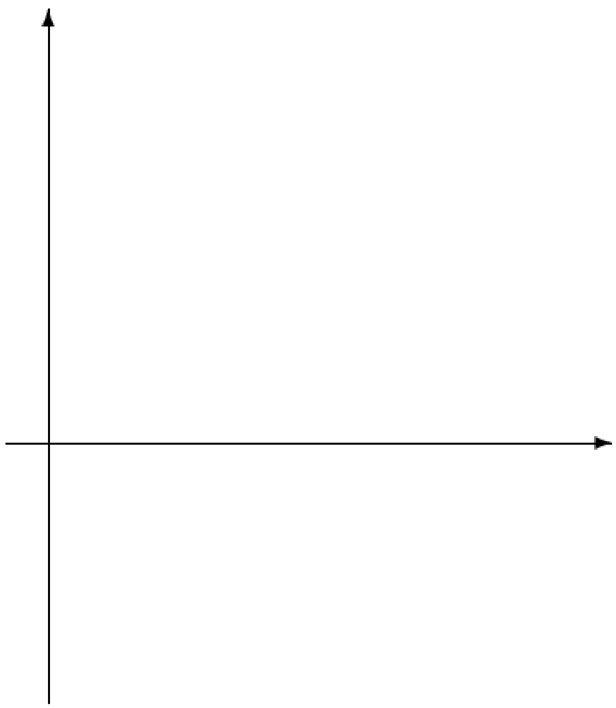
$$f(x) = x\ln(x)$$



Esempi

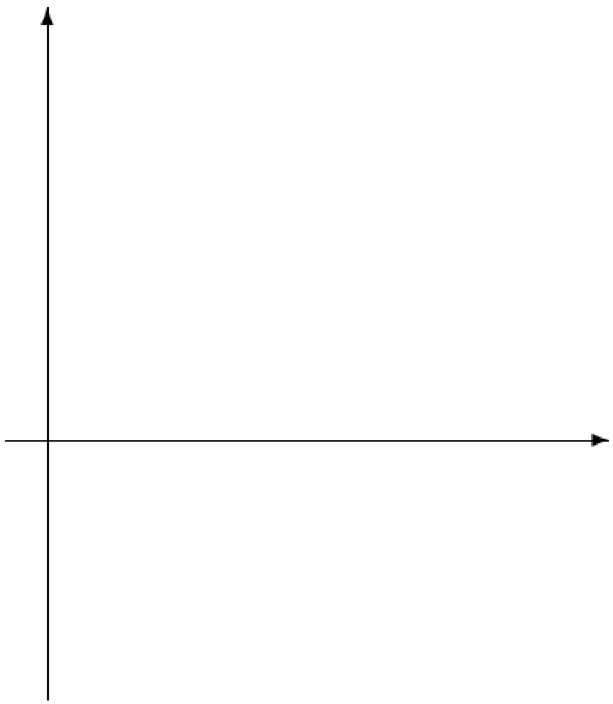
$$f(x) = x\ln(x)$$

$$D = (0, +\infty)$$



Esempi

$$f(x) = x\ln(x)$$

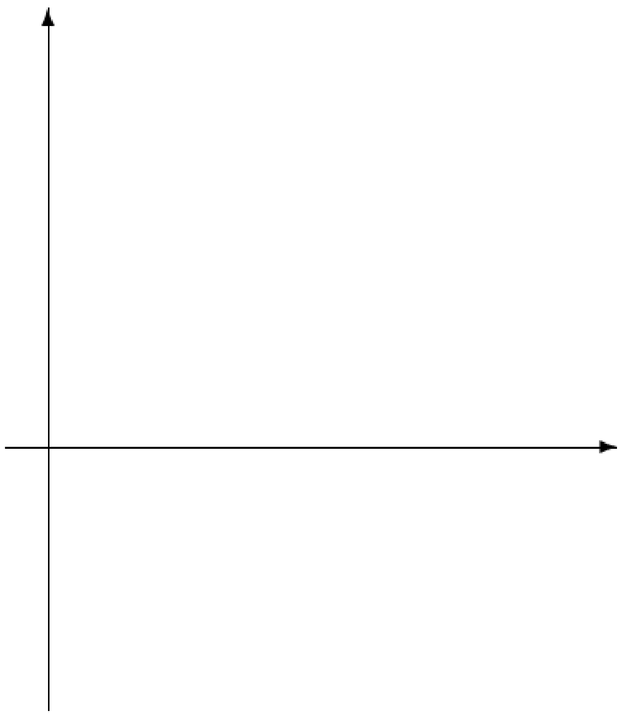


$$D = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\ln(x) = +\infty$$

Esempi

$$f(x) = x\ln(x)$$



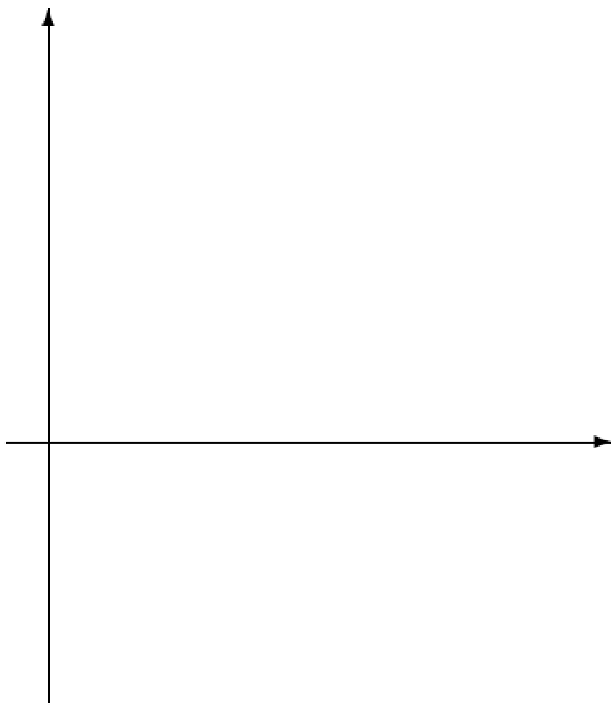
$$D = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x\ln(x) = 0$$

Esempi

$$f(x) = x\ln(x)$$



$$D = (0, +\infty)$$

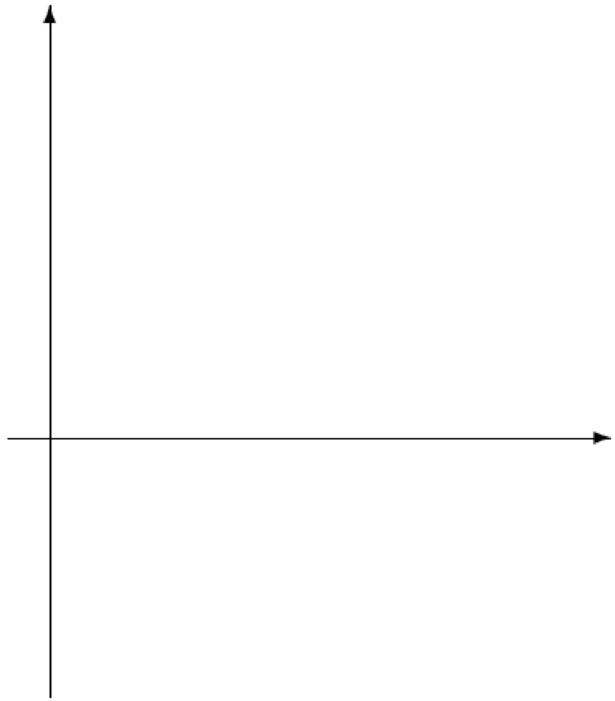
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x\ln(x) = 0$$

$f'(x) = 1 + \ln(x) > 0$ sse $x > 1/e$

Esempi

$$f(x) = x \ln(x)$$



$$D = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$f'(x) = 1 + \ln(x) > 0$ sse $x > 1/e$

$$f''(x) = 1/x > 0$$

Usando la formula di de L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(x_0)$$

Usando la formula di de L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(x_0)$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = o(x - x_0) \longrightarrow 0$$

Usando la formula di de L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(x_0)$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = o(x - x_0) \longrightarrow 0$$

oppure

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

questo significa che la **migliore approssimazione** lineare è la retta tangente!

Approssimazioni polinomiali

Cercando un'approssimazione quadratica otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{(x - x_0)^2}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Cercando un'**approssimazione quadratica** otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{(x - x_0)^2}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

quindi possiamo scrivere che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Il polinomio di Taylor

Iterando il ragionamento possiamo ricavare la miglior approssimazione polinomiale, cioè il **polinomio di Taylor**

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Alcuni sviluppi

$e^x =$

$\sin(x) =$

$\cos(x) =$

Approssimazioni polinomiali

$$\ln(1+x) =$$

$$\sqrt{1+x} =$$

$$e^{-x^2} =$$

Esercizi

Approssimare e

Approssimare $\ln(2)$

Protagonisti

Brook Taylor

1685 - 1731