Ricordiamo preliminarmente che data un'applicazione $g : A \to B$

– $g(a)$ è detta *l'mmagine di a mediante g*. Chiaramente $g(a) \in B$; si dice anche che g *manda a in $g(a)$* e, se $b = g(a)$, allora si scrive anche $a \mapsto b$ (sottoindendo g).

– Per ogni scelta di b in B rimane definito l'insieme (eventualmente vuoto) denotato con $g^{-1}(b)$ e costituito da tutti gli elementi di A mandati in b da g. Tale insieme è detto *la controimmagine o pre-immagine o immagine inversa di b*. Tale insieme è pertanto il sottoinsieme di A descritto da $g^{-1}(b) = \{a \in A \mid g(a) = b\}$. Si osservi che $g^{-1}(b) = \emptyset$ quando b non è "un valore assunto da g su A";

– $\mathrm{Im}g$ denota l'*immagine di A tramite g*—anche detta l'*immagine di g*– cioè l'insieme $\mathrm{Im}g = \{g(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

– L'applicazione $g : A \to B$ è *suriettiva* se $\mathrm{Im}g = B$ ed è *iniettiva* se la controimmagine di ogni elemento b o è vuota oppure è costituita da un solo elemento[1].

Esercizio 1. Convincervi che la definizione di iniettività data sopra coincide con la più familiare definizione: *$g : A \to B$ è iniettiva se $\forall a,\ a' \in A$, da $g(a) = g(a')$ segue $a = a'$.*

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$. Un'applicazione $f : V \to W$ è un'*applicazione lineare* (detta anche *omomorfismo di spazi vettoriali*) se per ogni scelta di $u,\ v \in V$ e per ogni scelta di $\lambda \in \mathbb{R}$ le due seguenti proprietà sono soddisfatte:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ cioè, brevemente, *l'immagine della somma è la somma delle immagini*;

2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ cioè, brevemente, *l'immagine di un multiplo è multipla dell'immagine.*

Esercizio 2. Convincervi che le due precedenti proprietà equivalgono alla proprietà

$$(\star)\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v),\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \forall u,\ v \in V$$

cioè, brevemente, *l'immagine di combinazioni lineari è combinazione lineare di immagini.* Convircervi inoltre che la precedente vale per ogni combinazione lineare di un numero finito di vettori: $f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i f(v_i)$.

Esercizio 3. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Per esempio, se $m = n = 2$ e $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, allora $f_A(x) = A\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Dimostrare che f_A è lineare.

La controimmagine del vettore 0_W (vettore nullo di W) è detta *nucleo di f* ed è denotato con $\ker f$.

[1] gli insiemi costtituiti da un solo elemento sono detti *singoletti*

Esercizio 4.
(**a**) Interpretare il nucleo dell'applicazione lineare f_A scritta sopra come un insieme che ben conoscete. Lo conoscete davvero bene.
(**b**) Dimostrare che un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker f = \{O_V\}$, dove O_V è il vettore nullo di V. Che cosa significa questo per l'applicazione f_A?
(**c**) Dimostrare che $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V e che $\mathrm{Im} f$ è un sottospazio vettoriale di W.
(**e**) Descrivere l'immagine dell'applicazione f_A e describvere una base di tale immagine.
(**d**) Dimostrare che se f è iniettiva, allora f manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti e dunque f manda sottospazi in sottospazi della stessa dimensione.

La dimensione di $\ker f$ è detta talora *difetto di* f, mantre la dimensione di $\mathrm{Im} f$ è detta *rango* di f.

Esercizio 5. Che cos'è il rango di f_A? L'applicazione f_A è definita nell'esercizio 3.

Esercizio 6. Sia ora V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Sappiamo che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$ e che i coefficienti della combinazione lieare si dicono le *coordinate di* v *rispetto a* $\mathcal{B}$. Sia $f_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione che manda ogni vettore $v \in V$ nel vettore delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$—in altre parole $f_{\mathcal{B}}(v)$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono ordinatamente i coefficienti dell'unica combinazione lineare che esprime v rispetto $\mathcal{B}$—. Dimostrare che
(**a**) $f_{\mathcal{B}}$ è lineare.
(**b**) f_B è iniettiva e suriettiva[2].

Come conseguenza deduciamo che tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione n sono isomorfi ad $\mathbb{R}^n$.

Le applicazioni lineari si costruiscono facilmente data una base dello spazio di partenza.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale con base (v_1, v_2, v_3) e sia W un altro spazio vettoriale. Siano w, w' e w'' arbitrari elementi di W (non necessariamente distinti eventualmente dipendenti). Dire in ciascuno dei seguenti casi se esiste un'applicazione lineare $f : V :\to W$ soddisfacente le richieste; nel caso in cui un'applicazione soddisfacente le richieste esista, stabilire se ne esiste un'altra ed esibirne almeno una.

(**a**) $f(v_1) = w$, $f(v_2) = w''$ e $f(v_1 + v_2) = w' + 2w''$;
(**b**) $f(v_1) = w$, $f(2v_1) = 2w, f(v_3) = w$;
(**c**) $f(v_1) = w$, $f(v_2) = w$, $f(w_3) = w$;
(**d**) $f(v_1) = w$, $f(v_2) = w'$, $f(w_3) = w''$;

[2] un omorfismo di spazi vettoriali sia iniettivo che suriettivo si dice *isomorfismo di spazi vettoriali*. Un isomorfismo di uno spazio in se stesso, si dice *automorfismo*.

(e) $f(v_1) = 0_W$, $f(v_2) = 0_W$, $f(w_3) = 0_W$;

Una volta risolto l'esercizio si comprende il seguente fatto. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V e siano $w_1, \ldots, w_n$ arbitrari vettori di uno spazio vettoriale W. Esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tale unica applicazione si costruisce come segue: il valore di f è già assegnato per ipotesi sui vettori di una base; il valore di f su un qualsiasi altro vettore v di V è definito mediante la regola

$$f(v) = x_1 w_1 + \ldots x_n w_n$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}_V$. Tale risultato generalizza il fatto seguente: *dato un punto P del piano, esite un'unica retta ℓ per l'origine passante per il punto dato. Se le coordinate di P sono x e y, le coordinate di ogni altro punto di ℓ sono date da λx e λy, per un certo λ di $\mathbb{R}$.*

Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ e W un altro spazio vettoriale spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_W = (w_1, \ldots, w_m)$. Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Allora, per la linearità di f, per ogni $v \in V$ con coordinate $\binom{x_1}{x_n}$, rispetto a $\mathcal{B}_V$, risulta $f(v) = f(\sum_j x_j v_j) = \sum_j x_j f(v_j)$ e cioé

$$f(v) = \sum_j x_j f(v_j) \tag{1}$$

D'altra parte, per ogni $j = 1, \ldots, n$, il vettore $f(v_j)$ appartiene a W e dunque possiede coordinate ripetto alla base $\mathcal{B}_W$. Sia

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

il vettore delle coordinate di $f(v_j)$ rispetto a $\mathcal{B}_W$. Ciò significa precisamente che:

$$f(v_j) = \sum_i a_{i,j} w_i$$

sicché sostituendo tale espressione nella (1) e raggruppando, si ottiene

$$f(v) = (\sum_j a_{1,j} x_j) w_1 + (\sum_j a_{2,j} x_j) w_2 + \ldots (\sum_j a_{m,j} x_j) w_m.$$

La precedente esrpime $f(v)$ come combinatione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_W$ e sicoome B_W è una base, i coefficienti di tale combinazione sono le coordinate di $f(v)$ rispetto $\mathcal{B}_W$. Scrivendo il vettore delle coordinate per colonna

$$\begin{pmatrix} \sum_j a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{m,j} x_j \end{pmatrix}$$

riconosciamo tale vettore come il prodotto Ax, dove x è il vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}_V$ mentre A è la matrice le cui colonne sono le coordinate delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}_V$ (i vettori $f(v_j)$, $j = 1, \dots, n$) rispetto alla base $\mathcal{B}_W$. La matrice A così costruita si chiama *matrice indotta da f rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$*. Essa ha la proprietà di rappresentare f rispetto alle basi date secondo la regola

se v ha coordinate x rispetto a $\mathcal{B}_V$ allora $f(v)$ ha coordinate Ax, rispetto a $\mathcal{B}_W$.

Esercizio 8. Scrivere la matrice di f rispetto a basi canoniche in ciascuno dei seguenti casi

(**a**) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx$ dove B è una matrice con m righe ed m colonne.

(**b**) $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto NM$ dove N è la matrice $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

(**c**) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ dove Tr denota la traccia di M (somma elementi diagonali).

Siano $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_V^*$ due basi di un medesimo spazio vettoriale e sia $\mathrm{id} : V \to V$, $v \mapsto v$ l'applicazione identica. La matrice che rappresenta id rispetto alle basi date si chiama *matrice del cambiamento di base.*

Esercizio 9. Descrivere tutte le applicazioni lineari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Le proprietà della matrice che rappresenta un'applicazione lineare sono molto potenti e utili. Si ha:

- difetto di f=dimensione di ker$f = \dim\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.
- rango di f=dimensione Imf=rango(A).
- f invertibile$\Leftrightarrow$ f iniettiva e suriettiva$\Leftrightarrow$ A invertibile.
- $\ker f = \langle v_1, \dots, v_t\rangle \Leftrightarrow x_1, \dots, x_t$ soluzioni linearmnete indipendenti del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, dove $x_1, \dots, x_t$ sono i vettori delle coordinate di $v :_1, \dots, v_t$.
- $\mathrm{Im} f = \langle f(v_{i_1}), \dots, f(v_{i_s})\rangle \Leftrightarrow y_1, \dots, y_t$ colonne linearmnete indipendenti di A, dove $y_1, \dots, y_s$ sono i vettori delle coordinate di $f(v_{i_1}), \dots, f(v_{i_s})$.

Vale inoltre il Teorema della dimensione: Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e V abbia dimensione n. Allora

$$n = dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f.$$

Esercizio 10. Dimostrare che

(**a**) se $\dim W \geq n + 1$, allora f non può essere suriettiva.

(**b**) se $\dim W \leq n - 1$, allora f non può essere iniettiva.