UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

29. Il metodo di Cramer

Richiami

- Il determinante misura la lineare indipendenza delle righe e delle colonne di una matrice quadrata
- Il determinante può essere calcolato ricorsivamente per mezzo dello sviluppo di Laplace
- Oggi: **Due metodi di calcolo della matrice inversa**
- **Il metodo di Cramer per la risoluzione di (alcuni) sistemi di equazioni lineari**

Applicazioni e matrici invertibili

Se un'applicazione $T : K^m \to K^n$ è invertibile, allora $m = n$.

Se $T : K^n \to K^n$ è invertibile, e T^{-1} è la sua inversa, allora $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_{K^n}$.

In termini di matrici associate, $[T][T^{-1}] = [T^{-1}][T] = \mathrm{Id}_n$. Le matrici $[T]$ e $[T^{-1}]$ sono matrici inverse.

- Data una matrice invertibile M, come si trova la sua inversa?
    - Calcolo della matrice inversa con l'eliminazione di Gauss
    - Calcolo della matrice inversa con l'uso dei determinanti

NB: un'applicazione lineare $K^n \to K^n$ è invertibile se e solo se è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se le sue colonne sono linearmente indipendenti se e solo se le sue righe sono generatori di K^n. Questo accade esattamente quando il suo determinante è $\neq 0$.
Le matrici invertibili sono quelle non singolari.

Calcolo della matrice inversa - I

Abbiamo una matrice $n \times n$ non singolare M e vogliamo trovare la sua inversa $N = M^{-1}$.

Dobbiamo imporre $MN = \mathrm{Id}_n$. Il prodotto righe per colonne si fa moltiplicando M per ciascuna colonna di N: i risultati sono le colonne di Id_n.

Pertanto, la prima colonna di N è la soluzione del sistema di equazioni lineari

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo della matrice inversa - II

Indichiamo con m_{ij} il coefficiente di riga i e colonna j della matrice M. Risolvere l'equazione

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

significa risolvere il sistema

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + \ldots + m_{1n}x_n = 1 \\ m_{21}x_1 + \ldots + m_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ m_{n1}x_1 + \ldots + m_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Calcolo della matrice inversa - III

Il sistema

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + \ldots + m_{1n}x_n = 1 \\ m_{21}x_1 + \ldots + m_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ m_{n1}x_1 + \ldots + m_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

si risolve applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} & 1 \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

Le altre colonne della matrice N inversa di M si trovano risolvendo i sistemi che hanno per termini noti le altre colonne della matrice identità.

Calcolo della matrice inversa - III

Questo può essere fatto in una singola eliminazione di Gauss.

E' sufficiente scrivere a fianco alla matrice M la matrice identità e applicare il procedimento di eliminazione.

Poiché la matrice M è invertibile, al termine dell'eliminazione avrà n pivot e sarà quindi la matrice identità. Sul lato destro potremo leggere la soluzione dei sistemi che i cui coefficienti sono quelli della matrice M, e i cui termini noti sono ciascuna delle colonne della matrice identità.

Nella metà destra della matrice al termine dell'eliminazione sarà quindi leggibile la matrice inversa di M.

Un esempio - I

Come esempio, calcoliamo l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{il cui determinante è } -7.$$

Procedendo con l'eliminazione di Gauss sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

Un esempio - II

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & -5/7 & 4/7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 13/7 & 15/7 & -12/7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & -5/7 & 4/7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \color{red}{-1/7} & \color{red}{1/7} & \color{red}{2/7} \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \color{red}{-2/7} & \color{red}{-5/7} & \color{red}{4/7} \end{pmatrix}$$

Un modo alternativo - I

Esiste un altro modo di calcolare l'inversa di una matrice (invertibile) data. Vi spiego prima come si procede, e poi perché il procedimento funzioni.

Data una matrice $n \times n$ invertibile $A = (a_{ij})$, si calcola prima la matrice dei complementi algebrici

$$\begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & \dots & (-1)^{n+1}|A_{1n}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & \dots & (-1)^{n}|A_{2n}| \\ \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & \dots & \dots & |A_{nn}| \end{pmatrix}.$$

Il suo termine di posto i, j è il determinante della matrice A_{ij} che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, moltiplicato per il segno $(-1)^{i+j}$, che crea una scacchiera di segni $+$ e $-$.

A questo punto, trasponete la matrice dei complementi algebrici, dividete tutto per $\det A$, e avrete ottenuto l'inversa di A. Vediamolo in un esempio.

Un modo alternativo - II

Calcoliamo l'inversa della matrice già usata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per scrivere la matrice dei complementi algebrici, calcoliamo i determinanti delle matrici che si ottengono da A rimuovendo la i-esima riga e la j-esima colonna, scrivendo il risultato al posto i, j:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & -7 & -5 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

e poi aggiungiamo i segni:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -1 & -7 & 5 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Un modo alternativo - III

Ora prendiamo la trasposta

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -1 & -7 & 5 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -7 & -7 & 7 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

e dividiamo per $\det A = -7$:

$$\begin{pmatrix} -1/7 & 1/7 & 2/7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2/7 & -5/7 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Questa è la nostra inversa!

Perché funziona? - I

Per convincersi che si è trovata la matrice inversa a quella di partenza, basta moltiplicare le due matrici e osservare che si ottiene l'identità.

Intanto, sulla diagonale principale si ottengono tutti 1. In effetti, l'elemento di posto j, j si ottiene calcolando

$$\frac{1}{\det A}\left(a_{j1} \cdot (-1)^{j+1}|A_{j1}| + a_{j2} \cdot (-1)^{j+2}|A_{j2}| + \ldots + a_{jn} \cdot (-1)^{j+n}|A_{jn}|\right) .$$

La quantità tra parentesi è lo sviluppo di Laplace di $\det A$ lungo la j-esima riga, e quindi si ottiene $\det(A)/\det(A) = 1$.

Perché funziona? - II

Fuori dalla diagonale, il discorso è lievemente più delicato.

L'espressione che calcola il coefficiente al posto i, j del prodotto delle due matrici si ottiene calcolando

$$\frac{1}{\det A}\left(a_{i1} \cdot (-1)^{j+1}|A_{j1}| + a_{i2} \cdot (-1)^{j+2}|A_{j2}| + \ldots + a_{in} \cdot (-1)^{j+n}|A_{jn}|\right),$$

e dovreste essere in grado di convincervi che l'espressione tra parentesi calcola lo sviluppo di Laplace lungo la j-esima riga della matrice che si ottiene da A ricopiando sulla j-esima riga la i-esima riga.

Ma tale matrice ha due righe uguali, e quindi il suo determinante è 0.

Il metodo di Cramer - I

Per concludere questa lezione, vediamo come si può risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite per mezzo dei determinanti. Questa procedura si chiama *metodo di Cramer* ed è applicabile ai soli sistemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

nei quali il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sia diverso da 0. In questo caso, la matrice A ha rango n , e quindi il sistema ha soluzione (unica) per ogni scelta dei termini noti.

Il metodo di Cramer - II

Sappiamo già che la soluzione esiste, ed è univocamente determinata dalla scelta dei termini noti.

Se tale soluzione è $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, questo vuol dire che

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proviamo a calcolare il determinante della matrice che si ottiene sostituendo, alla prima colonna della matrice A, la colonna dei termini noti.

Il metodo di Cramer - III

Vogliamo calcolare

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ricordate che il determinante è separatamente lineare nelle colonne, e che la prima colonna è combinazione lineare esplicita delle colonne della matrice A. Si ottiene l'espressione:

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

nella quale tutti gli addendi tranne il primo si annullano.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Ricapitolando:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Il metodo di Cramer - V

L'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{quando} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

è data da

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \ldots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$