UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

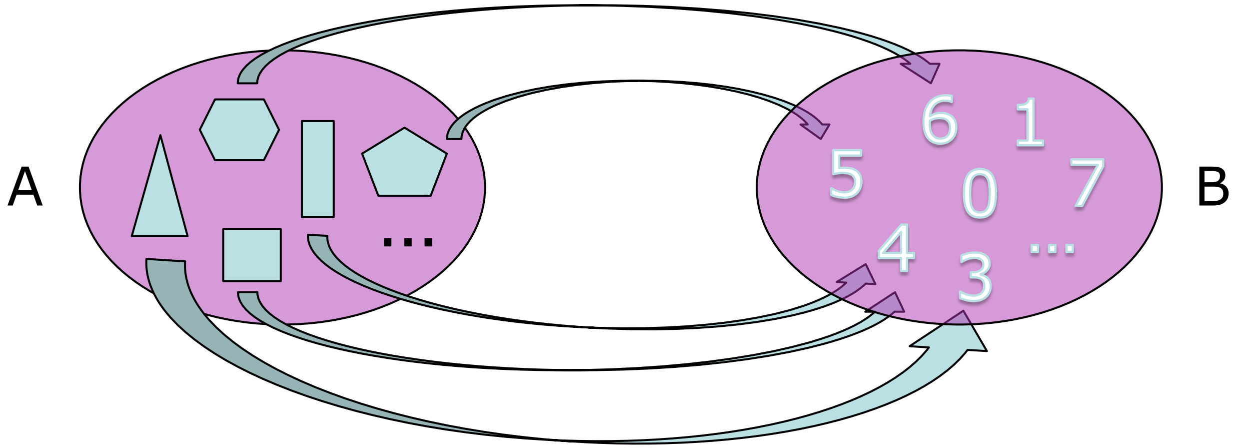
Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 5 – Funzioni

Docente: Pietro Cenciarelli

Funzioni

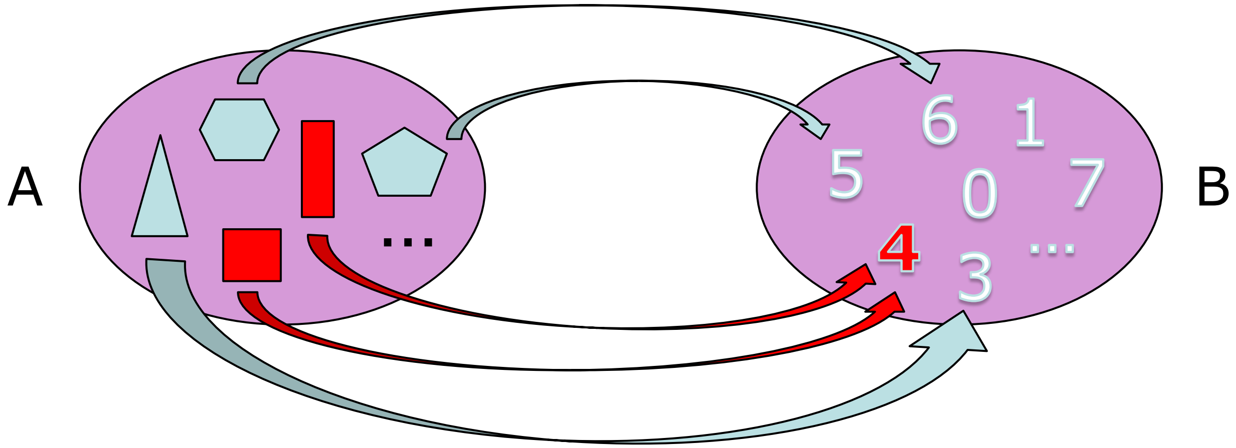
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



R = {(a,b) ∈ A X B : a ha b lati}

Funzioni

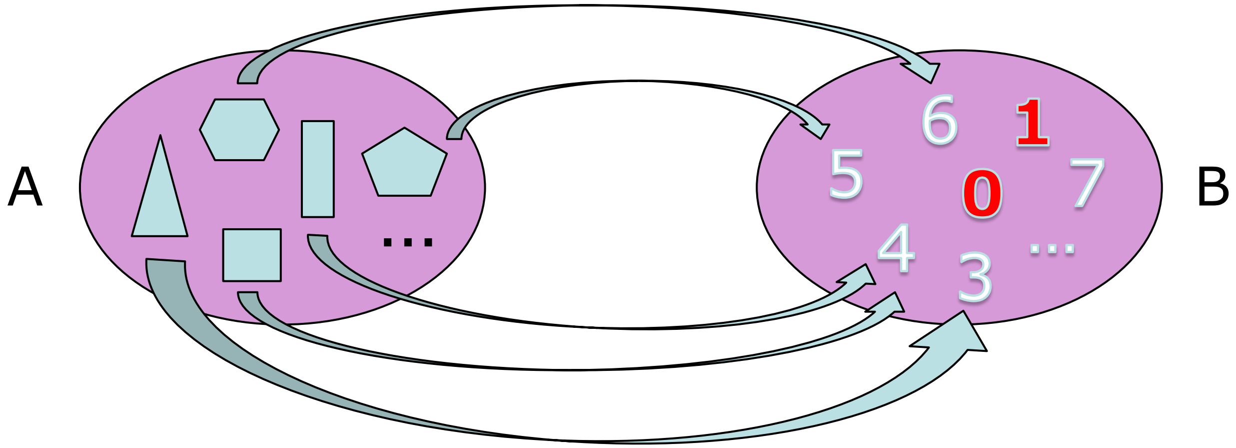
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione $R \subseteq A \times B$ tale che per ogni elemento $a \in A$ esiste uno ed un solo elemento $b \in B$ tale che a R b.



$$R = \{(a,b) \in A \times B : a \text{ ha } b \text{ lati}\}$$

Funzioni

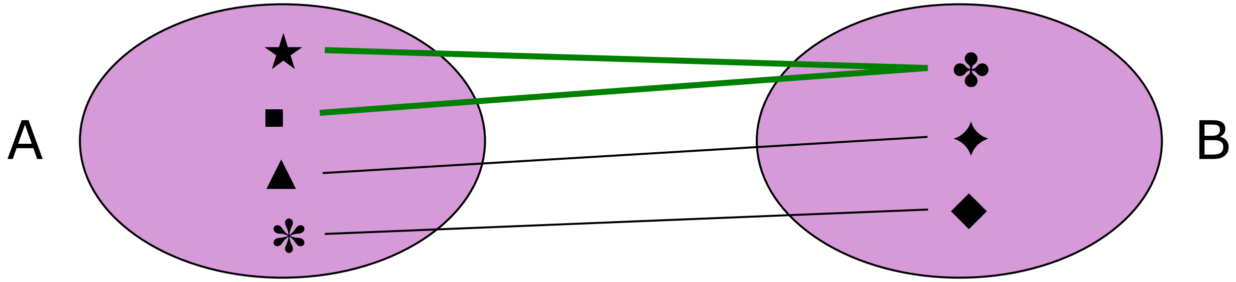
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



R = {(a,b) ∈ A X B : a ha b lati}

Funzioni

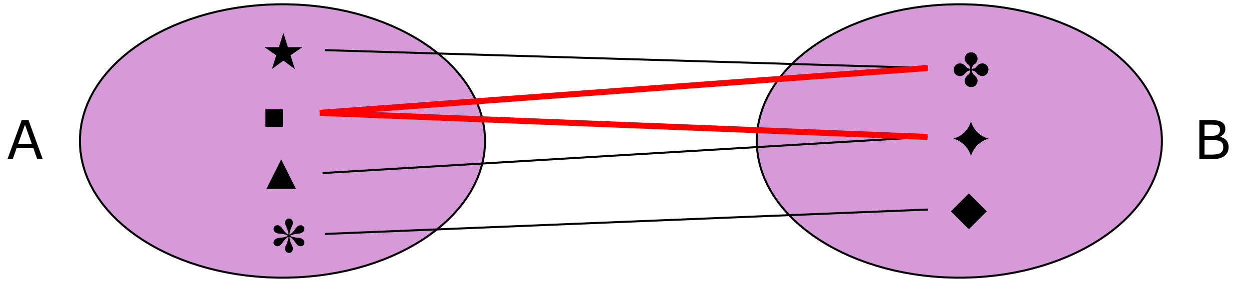
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



☺

Funzioni

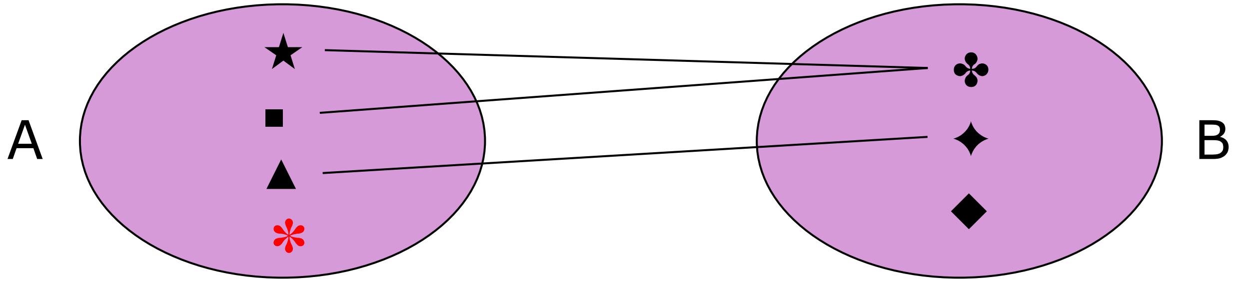
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



☹

Funzioni

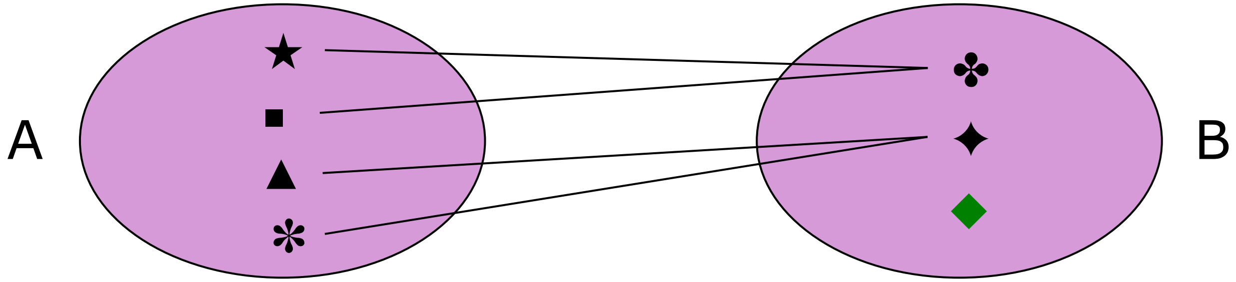
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



☹

Funzioni

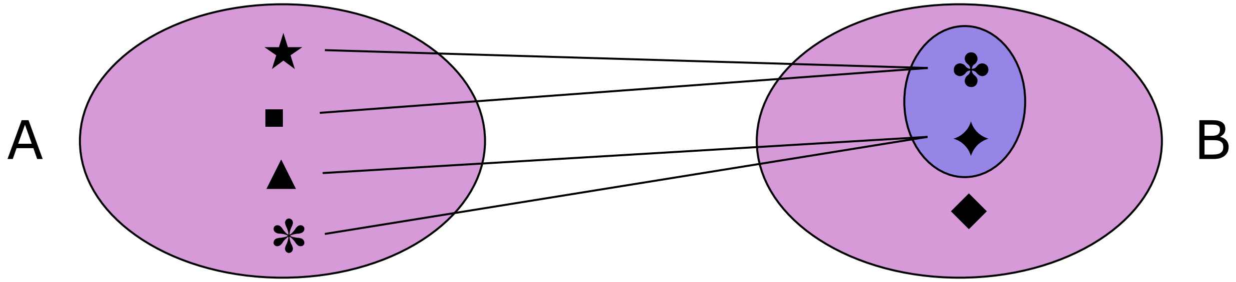
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



☺

Funzioni

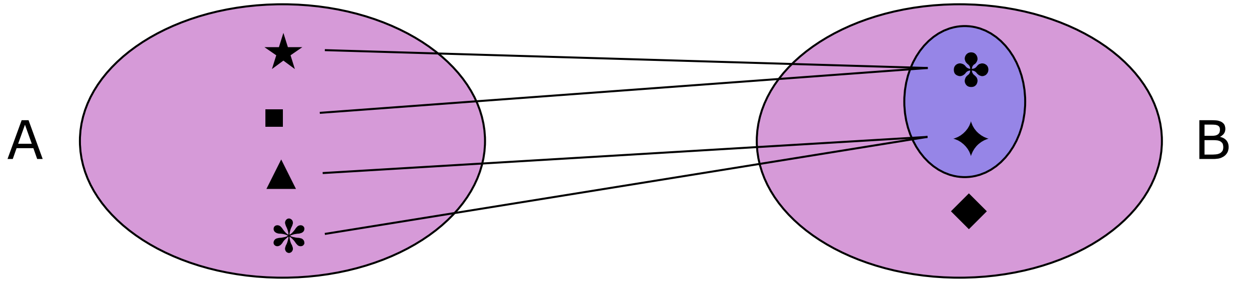
Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.



- Per indicare una funzione usiamo in generale le lettere minuscole f, g, h… anzichè R
- Scriviamo f: A → B anziché f ⊆ A X B
- Scriviamo f(a) = b anziché (a,b) ∈ f
- A e B si chiamano rispettivamente *dominio* e *codominio* della funzione
- L'insieme delle b tali che f(a) = b, per qualche a, si chiama *immagine* di f

Funzioni

Una *funzione* da un insieme A a un insieme B è un a relazione R ⊆ A X B tale che per ogni elemento a ∈ A esiste uno ed un solo elemento b ∈ B tale che a R b.

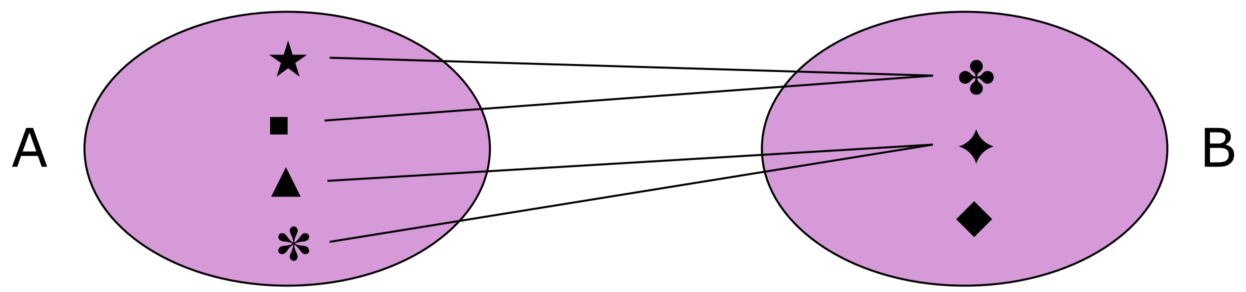


Nota: la composizione di due funzioni f: A → B e g: B → C è ancora una funzione g ∘ f: A → C, e (g ∘ f) (a) = g (f (a)).

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Proprietà delle funzioni

Una funzione f: A → B si dice *iniettiva* se, per ogni a e a' in A, f(a) = f(a') implica a = a'.

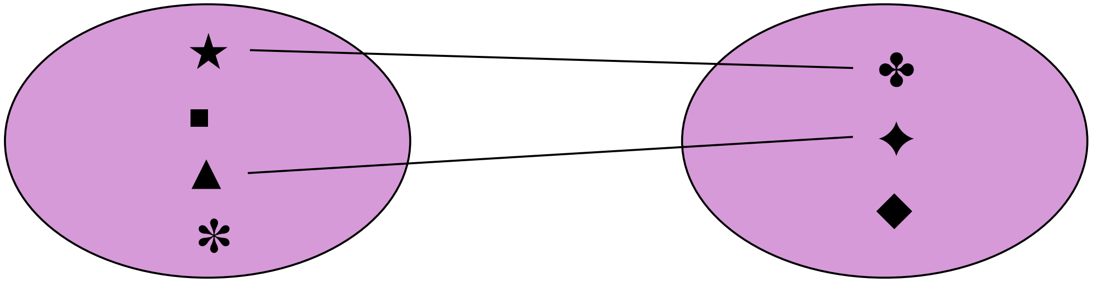


☹

Proprietà delle funzioni

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice *iniettiva* se, per ogni a e a' in A, $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$

A



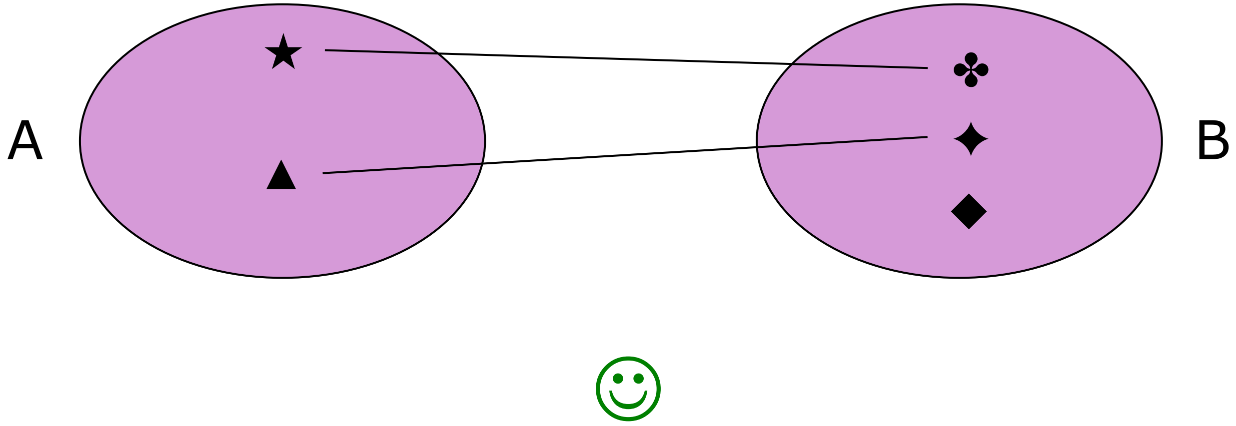
B

☹

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

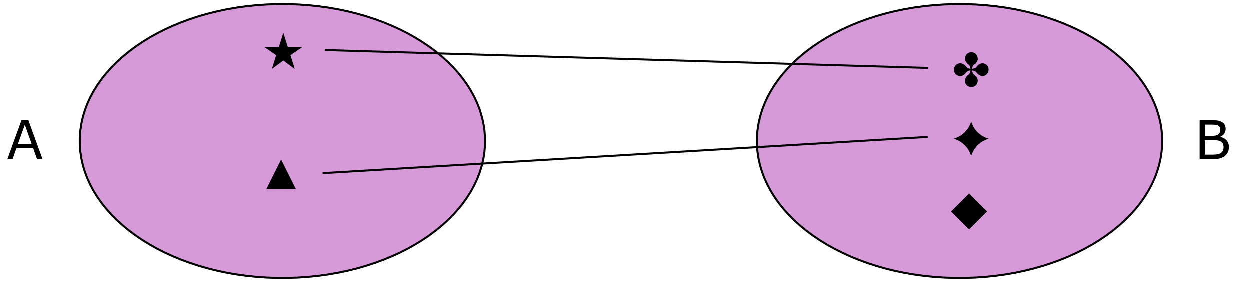
Proprietà delle funzioni

Una funzione f: A → B si dice *iniettiva* se, per ogni a e a' in A, f(a) = f(a') implica a = a'



Proprietà delle funzioni

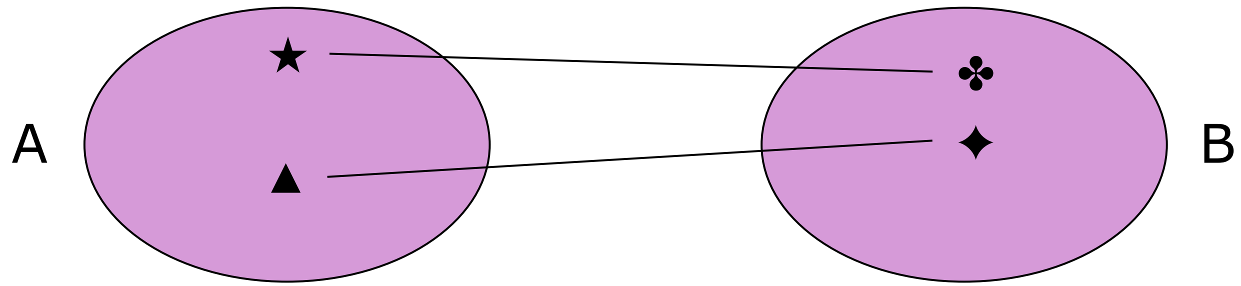
Una funzione f: A → B si dice *suriettiva* se, per ogni b in B esiste un a in A tale che f(a) = b.



☹

Proprietà delle funzioni

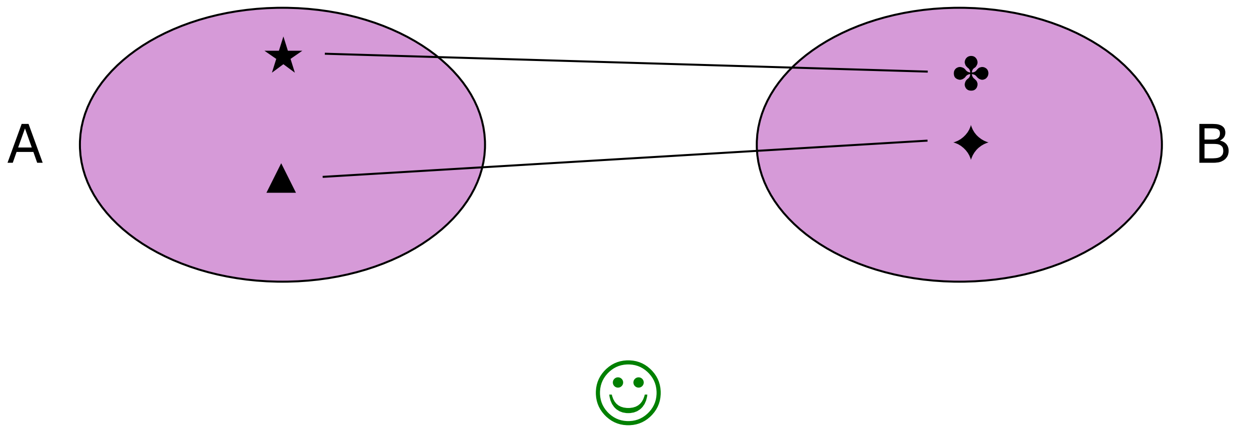
Una funzione f: A → B si dice *suriettiva* se, per ogni b in B esiste un a in A tale che f(a) = b.



☺

Proprietà delle funzioni

Una funzione *iniettiva* e *suriettiva* si dice *biiettiva* o anche *corrispondenza biunivoca* (in inglese *one-to-one*, uno a uno).



A si dice *equipotente* a B se esiste una biiezione $A \rightarrow B$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Proprietà delle funzioni

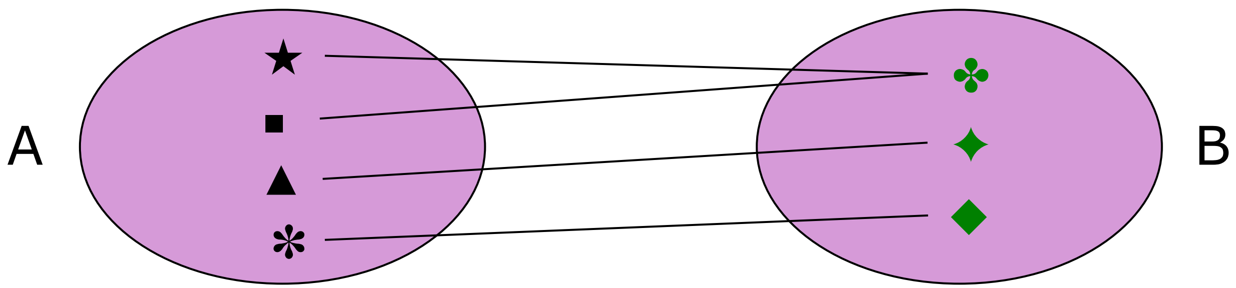
La composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva.

La composizione di due funzioni suriettive è una funzione suriettiva.

La composizione di due funzioni biiettive è una funzione biiettiva.

L'equipotenza è una relazione di equivalenza.

Proprietà delle funzioni

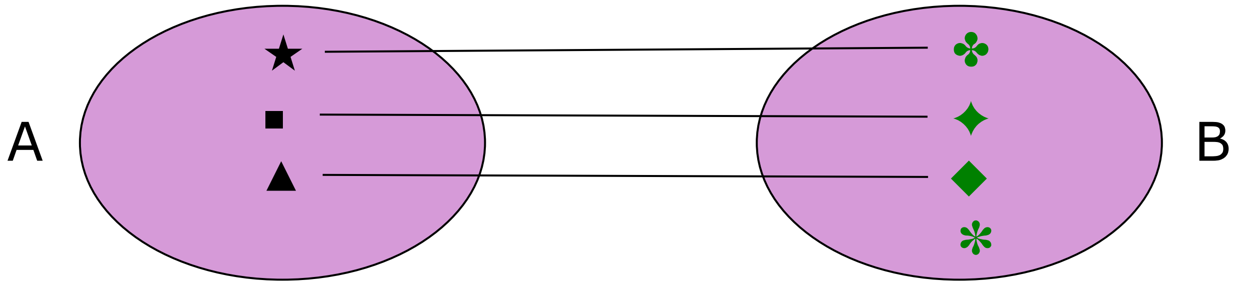


{(★, ✤), (■, ✤), (▲, ✦), (✻, ◆)} : A → B

{(✤, ★), (✤, ■), (✦, ▲), (◆, ✻)} ⊆ B X A

Invertendo l'ordine delle coppie di una funzione *non iniettiva* si ottiene una relazione che *non è una funzione*.

Proprietà delle funzioni

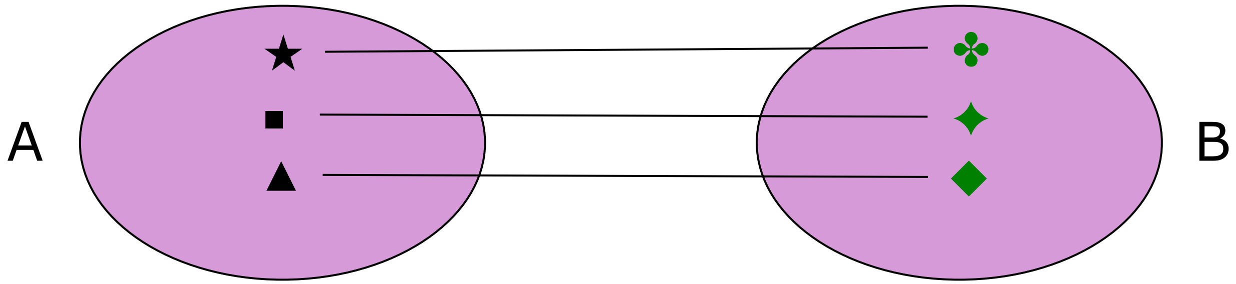


{(★, ✤), (■, ✦), (▲, ◆)} : A → B

{(✤, ★), (✦, ■), (◆, ▲)} ⊆ B X A

Invertendo l'ordine delle coppie di una funzione *non suriettiva* si ottiene una relazione che *non è una funzione*.

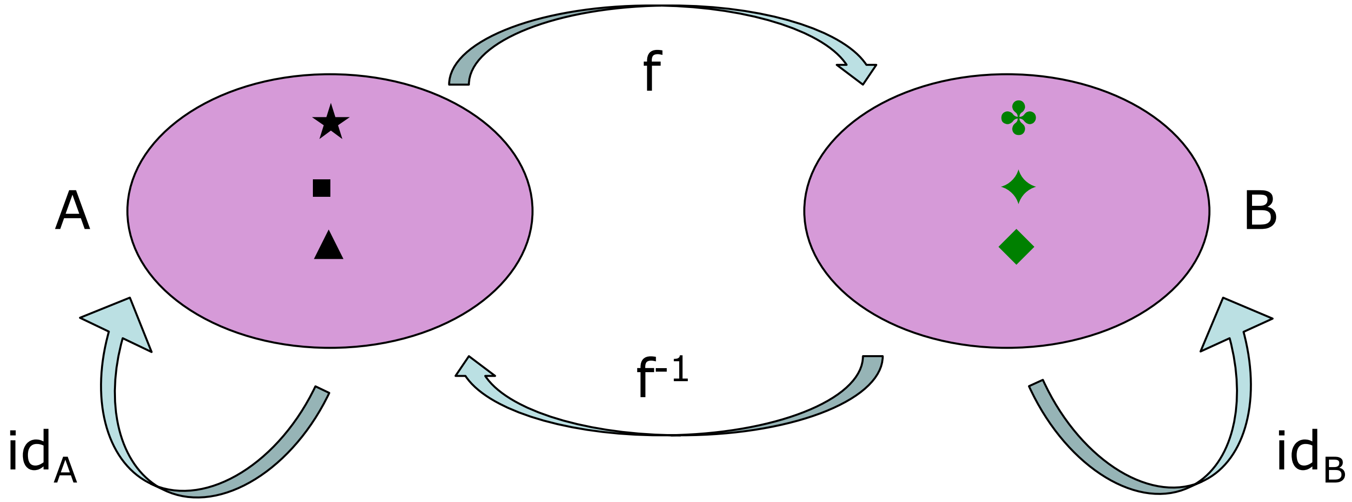
Proprietà delle funzioni



Una funzione $f : A \rightarrow B$ è biiettiva *se e solo se* invertendo l'ordine delle sue coppie si ottiene ancora una funzione. Tale funzione si chiama *inversa* di f e si indica con $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Nota: $f^{-1} \circ f\ (a) = a$ e $f \circ f^{-1}\ b = b$.

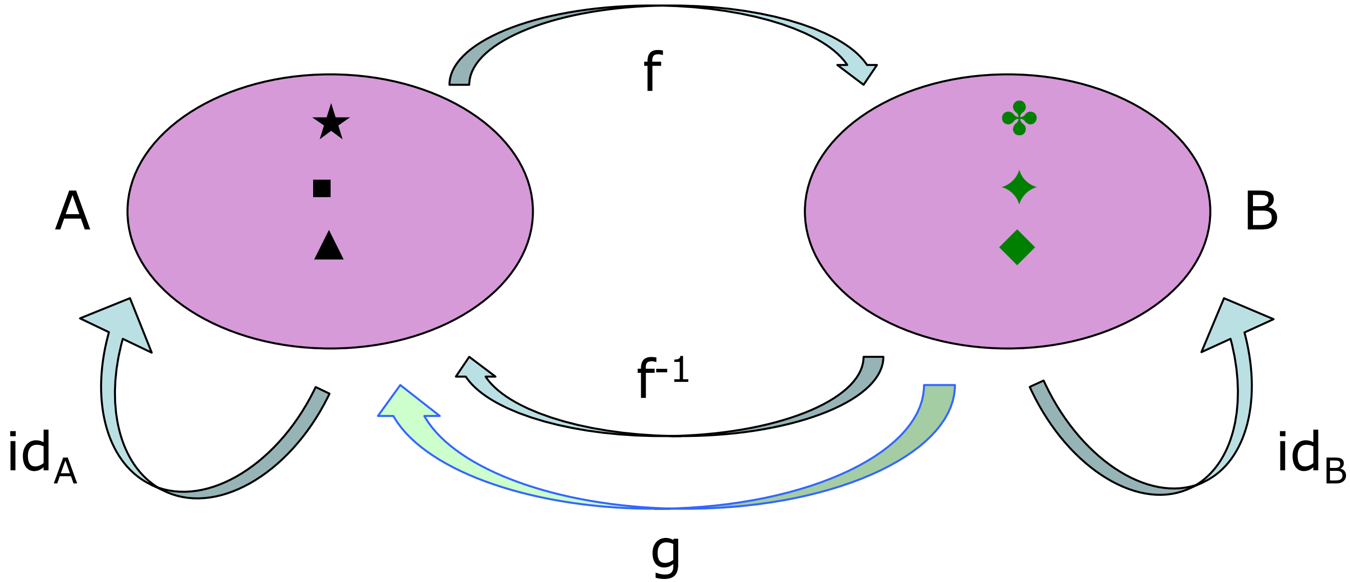
La funzione inversa



$f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.

Nota: $f^{-1} \circ f\ (a) = a$ e $f \circ f^{-1}\ b = b$.

La funzione inversa

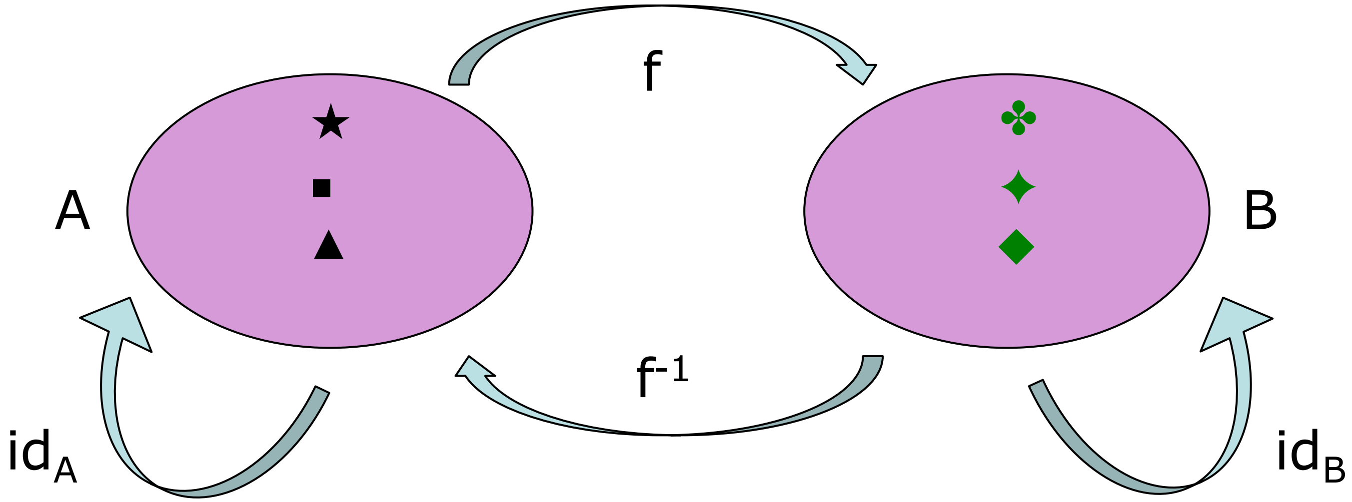


$f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.

$g = g \circ id_B = g \circ f \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$

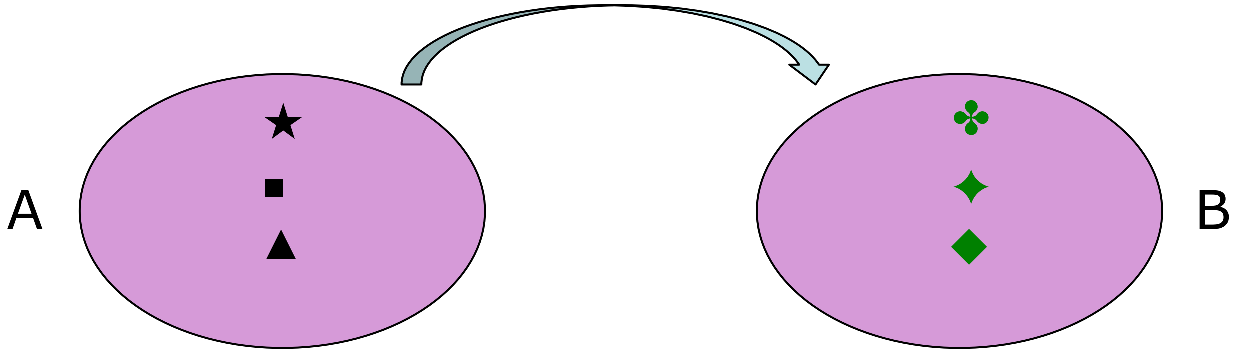
L'inversa è unica!

La funzione inversa



$f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.

Attenzione: $f^{-1} \circ f = id_A$ da solo non garantisce che f sia invertibile!



Due insiemi finiti A e B per i quali una funzione biiettiva A $\rightarrow$ B hanno lo stesso numero di elementi.

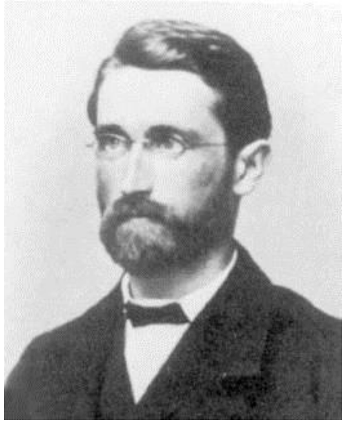
…e se sono infiniti?!

Qual è il *numero* di elementi di un insieme infinito?

"Infinito" è un *numero*?   (cosa è un numero?)

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

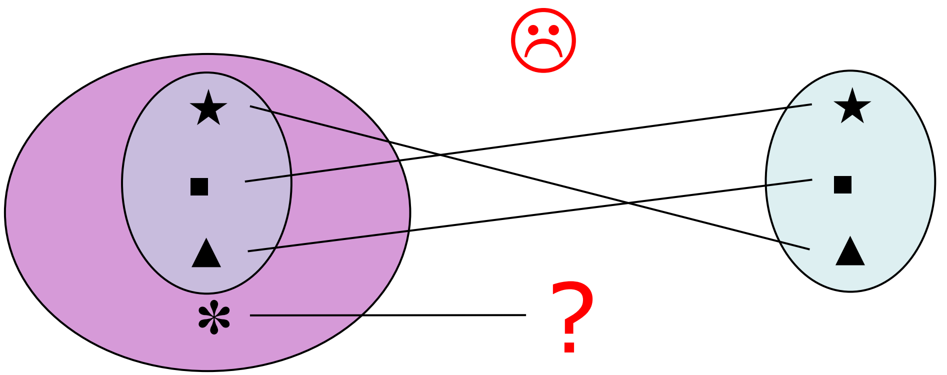
Cosa vuol dire essere infinito?



Richard Dedekind (1888)

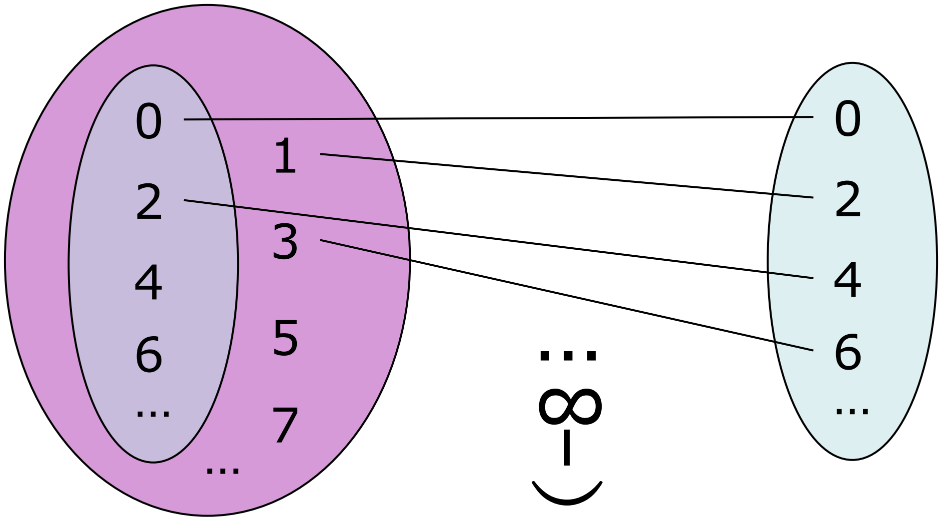
Un insieme si dice infinito se è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito.

Cosa vuol dire essere infinito?



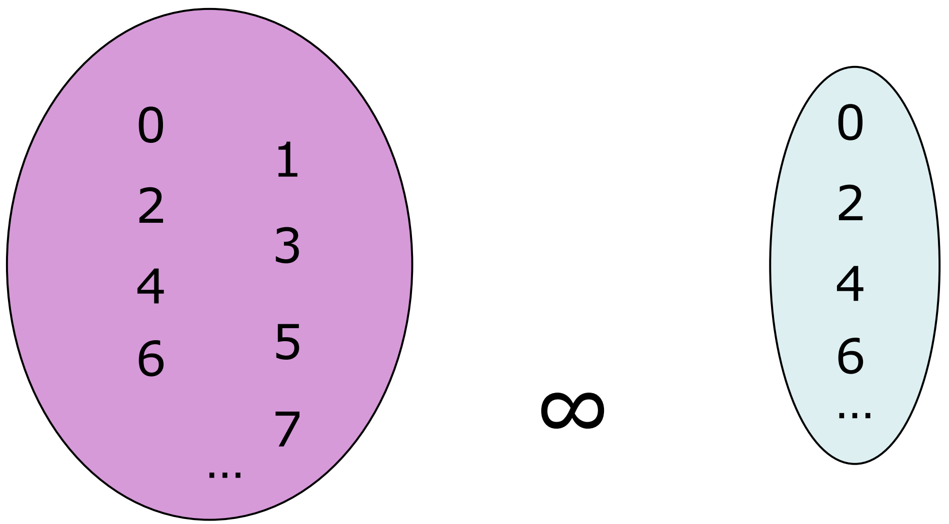
Un insieme si dice infinito se è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito.

Cosa vuol dire essere infinito?



Un insieme si dice infinito se è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito.

Cosa vuol dire essere infinito?



Dunque l'insieme dei numeri naturali è *equipotente* al suo sottoinsieme che contiene solo i numeri pari.

Ma… *tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti?*

No!

(to be continued…)