UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

01. Numeri, numeri, numeri...

I numeri naturali

Cominciamo con l'insieme dei numeri **naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

I numeri naturali

Cominciamo con l'insieme dei numeri **naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. 0 è un numero naturale

Cominciamo con l'insieme dei numeri **naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. 0 è un numero naturale

ii. la **somma** di due numeri naturali è un numero naturale $n + m = m + n \in \mathbb{N}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

I numeri naturali

Cominciamo con l'insieme dei numeri **naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

i. 0 è un numero naturale

ii. la **somma** di due numeri naturali è un numero naturale $n + m = m + n \in \mathbb{N}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

iii. $n + 0 = 0 + n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

I numeri interi

L'insieme dei numeri **interi** è

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

I numeri interi

L'insieme dei numeri **interi** è

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ però $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

I numeri interi

L'insieme dei numeri **interi** è

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ però $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

ii. la **somma algebrica** di due numeri interi è un numero intero $n \pm m = m \pm n \in \mathbb{Z}$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

I numeri interi

L'insieme dei numeri **interi** è

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

i. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ però $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

ii. la **somma algebrica** di due numeri interi è un numero intero $n \pm m = m \pm n \in \mathbb{Z}$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

iii. per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste un unico intero $-n$ tale che $n + (-n) = 0$

I numeri razionali

Il seguente è l'insieme dei numeri **razionali**

$$\mathbb{Q} = \left\{ a = \frac{m}{n} : \forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a+0=a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a+(-a)=0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a+0=a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a+(-a)=0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $\exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a+0=a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a+(-a)=0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0,\ \exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0,\ \exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma
x. se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$, $\forall c$

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $\exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma
x. se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$, $\forall c$
xi. se $a \leq b$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$, $\forall c \geq 0$

Principio di induzione.

Sia $\{\mathscr{P}(n), n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni, se

Principio di induzione.

Sia $\{\mathscr{P}(n), n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni, se

i. $\mathscr{P}(0)$ è vera

Principio di induzione.

Sia $\{\mathscr{P}(n), n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni, se

i. $\mathscr{P}(0)$ è vera

ii. $\mathscr{P}(n)$ implica $\mathscr{P}(n+1)$

Principio di induzione.
Sia $\{\mathscr{P}(n), n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni, se

i. $\mathscr{P}(0)$ è vera
ii. $\mathscr{P}(n)$ implica $\mathscr{P}(n+1)$

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Principio di induzione.

Sia $\{\mathscr{P}(n), n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni, se

i. $\mathscr{P}(0)$ è vera

ii. $\mathscr{P}(n)$ implica $\mathscr{P}(n+1)$

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Principio del buon ordinamento.

Ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto ha minimo.

L'induzione

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Prima verifichiamo che sia vera la prima proposizione della famiglia

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Prima verifichiamo che sia vera la prima proposizione della famiglia

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1=\frac{1(1+1)}{2}$$

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Supponiamo che sia vera $\mathscr{P}(n)$ allora

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=$$

L'induzione

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Supponiamo che sia vera $\mathscr{P}(n)$ allora

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=$$

L'induzione

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Supponiamo che sia vera $\mathscr{P}(n)$ allora

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h$$

L'induzione

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h$$

poi l'**ipotesi induttiva**

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h)$$

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h$$

poi l'ipotesi induttiva

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h)$$

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h$$

poi l'**ipotesi induttiva**

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h)$$

$$= 1+(n+1)h+nh^2$$

L'induzione

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h$$

poi l'**ipotesi induttiva**

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h)$$

$$= 1+(n+1)h + nh^2 \geq 1+(n+1)h$$

Protagonisti

Giuseppe Peano

1858-1932