UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

19. Il prodotto righe per colonne

Richiami

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Sappiamo risolvere i sistemi di equazioni lineari
- Molti fenomeni possiedono proprietà lineari
- I fenomeni lineari sono rappresentabili per mezzo di matrici
- Le matrici danno una descrizione compatta delle applicazioni lineari
- Oggi: **La composizione di applicazioni lineari è lineare**
- **Come calcolare la matrice associata alla composizione di applicazioni lineari**
- **Formule di addizione per seno e coseno**

Applicazioni lineari

Iniziamo con un breve riassunto delle cose che sappiamo.

Siamo interessati alle applicazioni $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ che soddisfino le ipotesi di linearità:

$$T(\lambda x) = \lambda T(x), \qquad T(x + y) = T(x) + T(y).$$

Qui $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$ sono m-uple di numeri reali, mentre λ è un singolo numero reale.

Abbiamo visto in alcuni esempi che T è determinata dal valore che assume sugli argomenti $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1)$.

In effetti,

$$T(x_1, \ldots, x_m) = x_1 T(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_m T(0, \ldots, 0, 1).$$

Matrici

$$T(x_1, \dots, x_m) = x_1 T(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_m T(0, \dots, 0, 1).$$

Dal momento che i valori $T(1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 0, 1)$ sono così importanti, decidiamo di memorizzarli in una matrice, scrivendoli lungo le sue colonne. Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è lineare e soddisfa

$$T(1, 0, 0) = (6, 2), \qquad T(0, 1, 0) = (3, 5), \qquad T(0, 0, 1) = (2, -4),$$

associeremo a T la matrice

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Uso delle matrici - I

Se

$$T(1,0,0) = (6,2), \qquad T(0,1,0) = (3,5), \qquad T(0,0,1) = (2,-4),$$

allora

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_1(6,2) + x_2(3,5) + x_3(2,-4) \\ &= (6x_1, 2x_1) + (3x_2, 5x_2) + (2x_3, -4x_3) \\ &= (6x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 5x_2 - 4x_3). \end{aligned}$$

Si vede che x_1 è moltiplicato sempre per numeri verdi, x_2 per numeri blu e x_3 per numeri marroni. Questo fenomeno si istituzionalizza nel prodotto righe per colonne, che dovete pensare come un sistema mnemonico per ricordare come utilizzare l'informazione contenuta nella matrice associata a T.

Uso delle matrici - II

Il conto che ci ha permesso di scrivere

$$T(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 5x_2 - 4x_3)$$

si ricorda osservando che in

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

ho moltiplicato le righe della prima matrice con l'unica colonna della seconda.

E' bene che vi fidiate di questo modo di fare conti, e che diventi automatico.

Un esempio facile - I

Uno degli esempi classici di applicazione lineare è l'identità che associa ad ogni n-upla di numeri reali se stessa:

$$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{Id}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Poiché Id non fa niente, è automaticamente lineare. In effetti

$$\mathrm{Id}(x + y) = x + y = \mathrm{Id}(x) + \mathrm{Id}(y), \qquad \mathrm{Id}(\lambda x) = \lambda x = \lambda\, \mathrm{Id}(x).$$

Allora all'applicazione identità, come a ogni altra applicazione lineare, deve corrispondere una matrice che ne descriva completamente il comportamento.

Questa matrice si ottiene scrivendo sulle colonne le immagini che Id assume su $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$.

Un esempio facile - II

In parole povere, la matrice associata all'applicazione identità è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è detta matrice identità. Tutti i suoi coefficienti sono 0, tranne quelli sulla diagonale principale, che sono tutti 1.

Verifichiamo che la cosa funzioni, nel caso di Id : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. In effetti,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

e quindi $\mathrm{Id}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$.

Composizione di appl. lineari

Se abbiamo due applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$, $S : \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^c$, allora la composizione $S \circ T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^c$ è sempre lineare.

Questo è facile da verificare: la linearità di T ed S ci dice che

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y), \qquad & T(\lambda x) &= \lambda T(x), \\ S(x+y) &= S(x) + S(y), \qquad & S(\lambda x) &= \lambda S(x). \end{aligned}$$

Ora dobbiamo solamente ricordare che $(S \circ T)(x) = S(T(x))$. Otteniamo

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x+y) &= S(T(x+y)) = S(T(x) + T(y)) \\ &= S(T(x)) + S(T(y)) \\ &= (S \circ T)(x) + (S \circ T)(y); \\ (S \circ T)(\lambda x) &= S(T(\lambda x)) = S(\lambda T(x)) = \lambda S(T(x)) \\ &= \lambda (S \circ T)(x). \end{aligned}$$

Composizione e matrici - I

Se $T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ e $S : \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^c$ sono applicazioni lineari, possiamo scriverne le matrici corrispondenti.

Abbiamo appena visto che anche la composizione $S \circ T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^c$ è un'applicazione lineare. Esiste un modo di scriverne la matrice a partire dalle matrici associate a T e ad S?

In altre parole: posso calcolare il valore assunto da $S \circ T$ su $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ utilizzando solamente le matrici associate a T e ad S? Certamente sì!

Ad esempio, $(S \circ T)(1, 0, \dots, 0) = S(T(1, 0, \dots, 0))$ e $T(1, 0, \dots, 0)$ si ottiene semplicemente leggendo la prima colonna della matrice associata a T.

Composizione e matrici - II

Vediamo tutto in un esempio. Consideriamo due applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che abbiano rispettivamente matrici

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad [S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $(S \circ T)(1,0,0)$, devo calcolare $S(T(1,0,0))$, cioè $S(1,2)$.

Il valore $S(1,2)$ si trova moltiplicando la matrice di S per la colonna $(1,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e quindi $(S \circ T)(1,0,0) = (3,-6,4)$.

Composizione e matrici - III

I valori $(S \circ T)(0,1,0)$ e $(S \circ T)(0,0,1)$ si trovano alla stessa maniera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot (-3) - 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi $(S \circ T)(0,1,0) = (6,-12,8), (S \circ T)(0,0,1) = (2,-15,-1)$.

In conclusione, la matrice associata a $S \circ T$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -6 & -12 & -15 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ricapitoliamo: per calcolare la matrice associata alla composizione $S \circ T$, abbiamo moltiplicato la matrice di S per ciascuna delle colonne della matrice T.

La matrice associata a $S \circ T$ è quella che ha per colonne ciascuno di tali risultati:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -6 & -12 & -15 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa procedura si chiama prodotto righe per colonne di matrici, e abbiamo appena mostrato che la matrice associata alla composizione $S \circ T$ è il prodotto righe per colonne della matrice associata a S con la matrice associata a T.

Esempi - I

Per capire meglio, proviamo a calcolare alcuni prodotti righe per colonne per verificare che tutto torni.

Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare già considerata, di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

e $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'identità, la composizione $T \circ \mathrm{Id}$ deve coincidere con T.

In effetti, calcolando il prodotto righe per colonne, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esempi - II

Se $R_\alpha, R_{-\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ indicano gli operatori di rotazione attorno all'origine di angolo α e $-\alpha$ rispettivamente, allora la loro composizione è l'identità. In effetti, le matrici associate ai due operatori sono

$$[R_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad [R_{-\alpha}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Moltiplicandole, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix},$$

cioè l'identità!

Esempi - III

Componendo la rotazione (del piano di centro l'origine e) di angolo α con la rotazione di angolo β, si deve ottenere la rotazione di angolo $\alpha + \beta$. In termini di prodotto righe per colonne delle matrici corrispondenti, si deve avere

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Calcolando il prodotto a primo membro, e confrontando, si ottiene:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Il prodotto righe per colonne di matrici conosce quindi le formule di addizione delle funzioni seno e coseno.

Le appl. lineari sono “lineari”

Concludo la lezione con un’osservazione: se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un’applicazione lineare, e la sua matrice è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

si ottiene, svolgendo i conti, che

$$T(x_1, \dots, x_m) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m).$$

Le espressioni che calcolano T sono quindi di primo grado negli argomenti e senza termine noto; in altre parole, T si esprime per mezzo di espressioni lineari.

Si vede facilmente che è vero anche il viceversa: ogni applicazione che si calcola per mezzo di espressioni di primo grado senza termine noto è necessariamente lineare.