UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

6. Calcolo combinatorio

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:
Come visto nella lezione precedente, calcolare la probabilità di un evento quando gli eventi elementari sono tutti equiprobabili, si riduce a contare gli elementi di un insieme. Lo scopo di questa lezione è iniziare a fornire alcune tecniche per contare.

Lo scopo del calcolo combinatorio è quello di determinare il numero dei modi in cui possono essere associati, secondo prefissate regole, gli elementi di uno stesso insieme o di più insiemi.

Al livello elementare che ci interessa, la combinatoria è più un'arte che una scienza. I principi generali sono pochissimi, ma è necessario cimentarsi con dei casi concreti per acquistare dimistichezza.

Prime domande

Vogliamo per esempio saper contare quante sono le targhe di tre simboli formate usando l'insieme {A, B, C, 1, 2}. Sicuramente si tratta di una domanda facile di cui vedremo fra breve la risposta.

Ma se ci sono delle restrizioni come dover usare simboli diversi o iniziare con una carattere alfabetico?

Le targhe sono sicuramente di meno, ma quante sono?

Il principio della moltiplicazione

Quante sono le targhe di tre simboli formate usando l'insieme $\{A, B, C, 1, 2\}$?

Immaginiamo di scegliere uno alla volta i simboli.

Abbiamo 5 scelte per il simbolo in prima posizione
5 scelte per il simbolo nella seconda posizione
e 5 scelte per il simbolo nella terza:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Quindi l'insieme delle targhe di tre simboli formate avendo a disposizione cinque caratteri ha cardinalità 5^3.

Il principio della moltiplicazione

Senza restrizioni l'insieme delle targhe di tre simboli formate avendo a disposizione cinque caratteri ha cardinalità 5^3.

Se chiediamo per esempio che nella prima e nella terza posizione devono esserci delle lettere e nella seconda un numero, le scelte possibili sono $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

Un altro tipo di vincolo che possiamo considerare è quello di poter utilizzare lo stesso simbolo una sola volta.

In questo caso abbiamo cinque scelte per la prima posizione, quattro per le seconda e tre per la terza. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Notiamo che avremmo potuto scegliere per primo quale simbolo mettere nella terza posizione o operare le scelte in qualunque altro ordine. Il risultato rimane lo stesso.

Permutazioni

Un caso particolare importante del problema di cui abbiamo prima dato un esempio è quello del contare le permutazioni di n oggetti, ovvero il numero di modi in cui possono essere ordinati n oggetti distinti.

Immaginiamo di avere n oggetti e n scatole.

Dobbiamo collocare ogni oggetto in una scatola diversa.

Quanti modi abbiamo di farlo?

Per la prima scatole ci sono n scelte, $n - 1$ per la seconda e così via, con una sola scelta per l'ultima.

Permutazioni

Abbiamo quindi $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ modi diversi per farlo.

Il prodotto $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ si indica con $n!$ (n fattoriale) e rappresenta il numero di *permutazioni* di n oggetti.

Ricordiamo che conviene porre per definizione $0! = 1$
e la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$.

Disposizioni

Se invece abbiamo $k < n$ scatole a disposizione, sempre col vincolo di un solo oggetto per scatola, possiamo sistemare solo k oggetti e necessariamente gli altri $n - k$ rimarranno fuori.

Sono le cosiddette *disposizioni* di k oggetti scelti fra n

Quanti modi abbiamo di farlo?

Per la prima scatole ci sono n scelte, $n - 1$ per la seconda e così via, con $n - k + 1$ scelte per la k-esima e l'ultima scatola.

Abbiamo quindi $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ modi diversi per farlo.

Disposizioni

Per formare una squadra di calcetto si distribuiscono a caso le maglie numerate da 1 a 5 a un gruppo di otto ragazzi.

Quante sono le squadre possibili se consideriamo diverse due squadre composte dagli stessi giocatori, ma con le maglie distribuite diversamente?

Il problema è equivalente a quello di contare le disposizioni di 5 oggetti scelti fra 8 (senza ripetizione).

Quindi il numero di squadre è $\frac{8!}{3!} = 6720$

Anagrammi

Un semplice problema combinatorio è quello degli anagrammi qui intesi come ordinamenti diversi di tutte le lettere contenute in una parola, senza richiedere che questa abbia necessariamente un significato.

Quanti anagrammi sono possibili per la parola “PONTE”?

Tutte le lettere di “PONTE” sono distinte, quindi la risposta è semplicemente $5! = 120$.

Anagrammi

Le cose si complicano un po' se ci sono lettere ripetute.

Quanti anagrammi sono possibili per la parola "GATTO"?

Un modo per contarli è pensare inizialmente le due "T" come distinte, p.e. una rossa e una blu. In questo caso gli anagrammi sono tanti quanti quelli dell'esempio precedente, ovvero 120.

Ma in realtà ogni anagramma in cui la T rossa precede la T blu è lo stesso in cui queste vengono scambiate di posto. Quindi gli anagrammi distinti sono $\frac{5!}{2!} = 60$.

Anagrammi

Analogamante la parola PARATA ha $\frac{6!}{3!} = 120$ anagrammi distinti.

Se le lettere ripetute sono più di una, ragioniamo allo stesso modo. Ogni gruppo di lettere ripetute può essere permutato al suo interno senza mutare la parola.

Quanti anagrammi sono possibili per la parola “PALLA”?

Qui le lettere ripetute sono due, quindi procedendo come prima troviamo che gli anagrammi distinti sono $\frac{5!}{2!2!} = 30$.

Esempi

Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Si eseguono 5 estrazioni rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.

Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle 5 estrazioni?

Quanti sono gli allineamenti in cui non compare il numero 20?

La risposta alla prima domanda è 20^5

Per la seconda domanda basta osservare che gli oggetti disponibili sono quelli contenuti in $\{1, ..., 19\}$ e pertanto la risposta sarà 19^5.

Esempi

Cosa cambia se le 5 estrazioni sono senza ripetizione?

Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle 5 estrazioni?

Quanti sono gli allineamenti in cui non compare il numero 20?

La risposta alla prima domanda è stavolta $\frac{20!}{15!}$.

Per la seconda domanda osserviamo di nuovo che gli oggetti disponibili sono quelli contenuti in $\{1, ..., 19\}$, ma adesso non possono essere ripetuti, quindi la risposta alla seconda domanda diventa $\frac{19!}{14!}$.