Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

---

# Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

---

**Esercizio 1 [punti: 4].** Un allenatore di calcio stima che un certo giocatore, tutte le volte che viene schierato in campo, ha il 20% di probabilità di segnare almeno un gol, indipendentemente da ciò che è accaduto o accadrà nelle altre partite. Quante partite deve programmare di fargli giocare per avere a priori una probabilità almeno del 90% che il giocatore vada a segno almeno una volta?

---

SOLUZIONE. Calcoliamo, in funzione del numero $n$ di partite giocate, la probabilità che il giocatore non segni mai. Per ipotesi, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, gli eventi

$$E_j = \Big\{\text{il giocatore non segna durante la } j\text{-esima partita}\Big\}$$

sono indipendenti e si verificano con probabilità $\Pr(E_j) = 1 - 0.2 = 0.8$. Quindi,

$$\Pr\left(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n\right) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2) \cdot \ldots \cdot \Pr(E_n) = (1 - 0.2)^n = 0.8^n \,.$$

Affinché superi il 90% la probabilità che il giocatore sia andato a segno almeno una volta avendo giocato $n$ partite, occorre che la probabilità appena calcolata non ecceda il 10%, cioè $(8/10)^n \leq 1/10$, ovvero $n \geq \ln(10)/(\ln(10) - \ln(8)) = 10.318...$, il che si verifica se e solo se $n \geq 11$. Quindi, la risposta è che l'allenatore, a priori, deve fargli giocare 11 partite. $\square$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

---

## Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

---

**Esercizio 2 [punti: 5].** Si considerano due urne: inizialmente,

1. la prima contiene 3 palline bianche e 3 palline rosse;
2. la seconda contiene 2 palline verdi e 3 palline bianche.

Due persone compiono le seguenti operazioni:

- la prima persona estrae una pallina dalla prima urna e la inserisce nella seconda;
- la seconda persona estrae una pallina dalla seconda urna.

Qual è la probabilità che le due palline estratte siano di colori diversi?

---

SOLUZIONE. Calcoliamo la probabilità dell'evento complementare: che le due palline estratte siano dello stesso colore. Introduciamo gli eventi definiti, per $i \in \{1, 2\}$, da

$$B_i = \Big\{\text{la } i\text{-esima è bianca}\Big\}, \quad R_i = \Big\{\text{la } i\text{-esima è rossa}\Big\}.$$

Allora l'evento complementare è $(B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)$. Siccome $B_1 \cap B_2$ e $R_1 \cap R_2$ sono incompatibili, la probabilità di tale evento è data da

$$\Pr(B_1 \cap B_2) + \Pr(R_1 \cap R_2) = \Pr(B_2|B_1)\Pr(B_1) + \Pr(R_2|R_1)\Pr(R_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{12}.$$

In conclusione, la probabilità che le due palline estratte siano di colori diversi è $1 - \frac{5}{12} = 7/12$. □

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

## Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

**Esercizio 3 [punti: 4].** Per diagnosticare una malattia, si applica un test. Se il paziente è effettivamente malato, il test dà un risultato positivo nel 96% dei casi. Ma può succedere che il risultato del test sia positivo anche se il paziente è sano, con una probabilità del 2%. Sapendo che, in media, lo 0,05 % dei pazienti è malato, calcolare la probabilità che un paziente sia malato dato che il suo test è risultato positivo.

---

Soluzione. Detti $P, M, S$ gli eventi che si verificano, rispettivamente, se il paziente è *positivo al test*, *malato*, *sano*, per il Teorema di Bayes e per il Teorema delle probabilità totali si ha

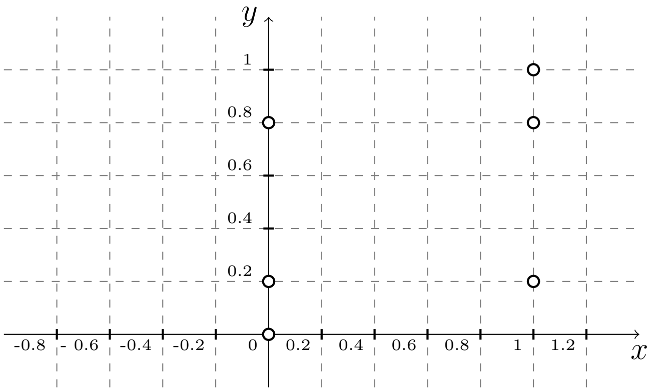
$$\Pr(M|P) = \frac{\Pr(P|M)\Pr(M)}{\Pr(P)} = \frac{\Pr(P|M)\Pr(M)}{\Pr(P|M)\Pr(M) + \Pr(P|S)\Pr(S)} = \frac{0.96\cdot 0.0005}{0.96\cdot 0.0005+0.02\cdot 0.9995} \approx 2.3\%$$

dove la percentuale è approssimata alla sua prima cifra decimale. □

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

# Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

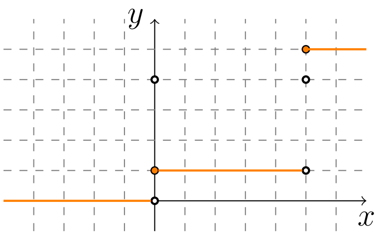
**Esercizio 4 [punti: 8].** Disegnare il grafico della funzione di distribuzione $F$ di una v.a. discreta $X$ su uno spazio di probabilità finito, in modo che il grafico contenga almeno due dei pallini:




- **[2pt]** Che tipo di variabile aleatoria discreta è $X$ (Bernoulli, Binomiale, Poisson…)?
- **[3pt]** Calcolare media e varianza della somma $S$ di 25 v.a. indipendenti distribuite come $X$.
- **[3pt]** Dare una stima della probabilità con cui $S$ si discosta di più di 4 dalla propria media.

---

Soluzione.




- Con la scelta fatta, $X$ è una bernoulliana di parametro $p = 0.8$.
- Essendo $S$ la somma di 25 copie $X_1, \ldots, X_{25}$ di $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, si ha

$$\mu = \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{25}] = 25p = 20\,.$$

Essendo tali v.a. indipendenti per ipotesi, si ha poi che

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_{25}] = 25p(1-p) = 4\,.$$

- La disuguaglianza di Chebyshev implica che

$$\Pr(|S - 20| \geq 2k) = \Pr(|S - \mu| \geq \sigma k) \leq \frac{1}{k^2}$$

per ogni $k > 1$. Quindi, scegliendo $k = 2$, si vede che $|S - 20| \geq 4$ con probabilità alpiù del 25%. □

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

# Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

**Esercizio 5 [punti: 6].** Siano $X, Y$ due v.a. discrete la cui distribuzione congiunta soddisfa

$$p_{X,Y}(n,m) = \frac{a^2}{n!m!}, \qquad \text{per ogni } (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

- **[2pt]** Determinare il valore del parametro $a > 0$.
- **[2pt]** Dire come sono distribuite le v.a. $X$ ed $Y$, determinandone le densità discrete $p_X$, $p_Y$.
- **[2pt]** Dire se $X$ e $Y$ sono indipendenti, motivando la risposta.

---

SOLUZIONE.

- Si deve avere che
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} p_{X,Y}(n,m) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^2}{n!m!} = 1\,.$$
D'altro canto, si ha che
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^2}{n!m!} = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = a^2 \cdot e \cdot e\,,$$
e $a > 0$. Quindi $a = e^{-1}$.
- Marginalizzando,
$$p_X(n) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{X,Y}(n,m) = \frac{1}{n!} \cdot e^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{e^{-1}}{n!}$$
e, analogamente, $p_Y(m) = e^{-1}/m!$. Quindi $X$ ed $Y$ sono due v.a. di Poisson di parametro 1.
- Sì, $X \perp\!\!\!\perp Y$, perché la distribuzione congiunta si fattorizza nel prodotto delle marginali. $\square$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: ______________

---

## Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

---

**Esercizio 6 [punti: 6].** Si lancia una moneta non truccata per tre volte di seguito. Indichiamo con $X$ il numero di "testa" nei primi due lanci e con $Y$ il numero di "croce" negli ultimi due lanci.

- **[2pt]** Fornire in forma di tabella la distribuzione congiunta $p_{X,Y}$.
- **[2pt]** Determinare le marginali $p_X$ e $p_Y$.
- **[2pt]** Calcolare $\mathrm{Cov}(X, Y)$. $X$ e $Y$ sono indipendenti?

---

SOLUZIONE.

- Sia $X$ che $Y$ sono binomiali di parametri 2 e 1/2, e la loro distribuzione congiunta è data da

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 |

- Per ottenere la marginale sinistra $p_X$, sommiamo il contenuto delle righe:

$$p_X(0) = \tfrac{1}{4}\,,\ p_X(1) = \tfrac{1}{2}\,,\ p_X(2) = \tfrac{1}{4}\,.$$

  Analogamente, per ottenere la marginale destra $p_Y$, sommiamo quello delle colonne:

$$p_Y(0) = \tfrac{1}{4}\,,\ p_Y(1) = \tfrac{1}{2}\,,\ p_Y(2) = \tfrac{1}{4}\,.$$

  Come osservato in partenza, $X, Y$ sono equidistribuite, con $X, Y \sim \mathrm{Bin}(2, 1/2)$.

- Abbiamo $XY = 0$ se $X = 0$ oppure $Y = 0$. Inoltre, $p_{X,Y}(2, 2) = 0$. Quindi,

$$\mathbb{E}[XY] = 2p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(1, 1) + 2p_{X,Y}(2, 1) = \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} = \tfrac{3}{4}\,.$$

  Essendo $X, Y \sim \mathrm{Bin}(2, 1/2)$, abbiamo $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 1$. Pertanto

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \tfrac{3}{4} - 1 = -\tfrac{1}{4}\,.$$

  In particolare il risultato è diverso da zero, quindi $X \not\perp\!\!\!\perp Y$. Questo si poteva dedurre anche in altri modi: ad esempio, $p_{X|Y}(2|2) = \Pr(X = 2 \mid Y = 2) = 0 \neq \frac{1}{4} = \Pr(X = 2) = p_X(2)$. $\square$