UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

07. Le funzioni elementari

Cos'è una funzione

Definizione.

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme non vuoto

Cos'è una funzione

Definizione.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathbb{R}$

Cos'è una funzione

Definizione.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ diremo che la coppia (f, A) è una **funzione** a valori reali.

Definizione.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ diremo che la coppia (f, A) è una **funzione** a valori reali.

A è il **dominio** della funzione.

Cos'è una funzione

Definizione.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere un **unico** elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ diremo che la coppia (f, A) è una **funzione** a valori reali.

A è il **dominio** della funzione.

$f(A) = \{y : y = f(x) \quad \forall x \in A\}$ è l'**immagine** di f.

Proprietà delle funzioni

Definizione.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice

Definizione.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice

i. **crescente** se $f(x) > f(y)$ per ogni $x < y$

Proprietà delle funzioni

Definizione.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice

i. **crescente** se $f(x) > f(y)$ per ogni $x < y$

ii. **non decrescente** se $f(x) \geq f(y)$ per ogni $x < y$

Proprietà delle funzioni

Definizione.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice

i. **crescente** se $f(x) > f(y)$ per ogni $x < y$

ii. **non decrescente** se $f(x) \geq f(y)$ per ogni $x < y$

iii. **non crescente** se $f(x) \leq f(y)$ per ogni $x < y$

Proprietà delle funzioni

Definizione.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice

i. **crescente** se $f(x) > f(y)$ per ogni $x < y$

ii. **non decrescente** se $f(x) \geq f(y)$ per ogni $x < y$

iii. **non crescente** se $f(x) \leq f(y)$ per ogni $x < y$

iv. **decrescente** se $f(x) < f(y)$ per ogni $x < y$

Definizione.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

Proprietà delle funzioni

Definizione.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **simmetrico** (rispetto all'origine) se $x \in A$ implica $-x \in A$.

Definizione.
Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **simmetrico** (rispetto all'origine) se $x \in A$ implica $-x \in A$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico, si dice

Definizione.
Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **simmetrico** (rispetto all'origine) se $x \in A$ implica $-x \in A$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico, si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in A$.

Definizione.
Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **simmetrico** (rispetto all'origine) se $x \in A$ implica $-x \in A$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico, si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in A$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico, si dice

Definizione.
Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **simmetrico** (rispetto all'origine) se $x \in A$ implica $-x \in A$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico, si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in A$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico, si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in A$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Definizione.

Una funzione $f : A \to J \subseteq \mathbb{R}$, si dice **invertibile**

Definizione.
Una funzione $f : A \to J \subseteq \mathbb{R}$, si dice **invertibile** se per ogni $y \in J$ esiste un unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Definizione.
Una funzione $f : A \to J \subseteq \mathbb{R}$, si dice **invertibile** se per ogni $y \in J$ esiste un unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Quindi possiamo definire $f^{-1} : J \to A$ con legge

$$x = f^{-1}(y)$$

Definizione.
Una funzione $f : A \to J \subseteq \mathbb{R}$, si dice **invertibile** se per ogni $y \in J$ esiste un unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Quindi possiamo definire $f^{-1} : J \to A$ con legge

$$x = f^{-1}(y)$$

Osservazione.
Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ strettamente monotona è invertibile.

Potenze

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

Potenze

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

i. se n è pari, allora f è pari, $x^n \geq 0$ ($x^n = 0$ solo se $x = 0$) ed è crescente su $(0, +\infty)$

Potenze

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

i. se n è pari, allora f è pari, $x^n \geq 0$ ($x^n = 0$ solo se $x = 0$) ed è crescente su $(0, +\infty)$

ii. se n è dispari, allora f è dispari, $x^n > 0$ se e solo se $x > 0$ ed è crescente su $\mathbb{R}$

Radici

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, allora

Radici

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, allora

i. se n è pari, esiste $f^{-1}(x) = x^{1/n}$, per $x \geq 0$

Radici

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, allora

i. se n è pari, esiste $f^{-1}(x) = x^{1/n}$, per $x \geq 0$

ii. se n è dispari, esiste $f^{-1}(x) = x^{1/n}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre la funzione è dispari

Radici

Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$, allora

i. se n è pari, esiste $f^{-1}(x) = x^{1/n}$, per $x \geq 0$

ii. se n è dispari, esiste $f^{-1}(x) = x^{1/n}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre la funzione è dispari

Si ricordi che

$$\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Sia $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e consideriamo la funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

Sia $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e consideriamo la funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

i. se $a > 1$, allora f è crescente su $\mathbb{R}$

Esponenziali

Sia $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e consideriamo la funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

i. se $a > 1$, allora f è crescente su $\mathbb{R}$

ii. se $a \in (0,1)$, allora f è decrescente su $\mathbb{R}$

Sia $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e consideriamo la funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

i. se $a > 1$, allora f è crescente su $\mathbb{R}$

ii. se $a \in (0,1)$, allora f è decrescente su $\mathbb{R}$

Si ricordi che

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

Logaritmi

La funzione inversa di una funzione esponenziale è una funzione **logaritmo**

Logaritmi

La funzione inversa di una funzione esponenziale è una funzione **logaritmo**

$$a^x = y \qquad \text{se e solo se} \qquad \log_a(y) = x$$

Logaritmi

La funzione inversa di una funzione esponenziale è una funzione **logaritmo**

$$a^x = y \qquad \text{se e solo se} \qquad \log_a(y) = x$$

Osservazione.
La funzione $\log_a(x)$ è strettamente monotona, dello stesso tipo della funzione a^x.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

La funzione inversa di una funzione esponenziale è una funzione **logaritmo**

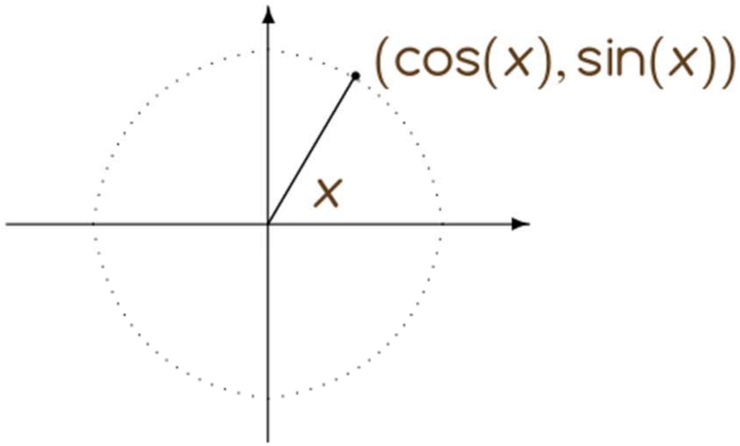
$$a^x = y \qquad \text{se e solo se} \qquad \log_a(y) = x$$

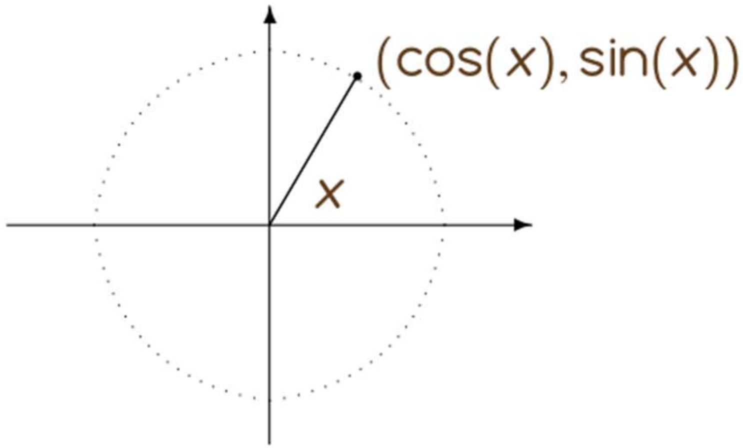
Osservazione.
La funzione $\log_a(x)$ è strettamente monotona, dello stesso tipo della funzione a^x.

Si ricordi che

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$
$$k \log_a(x) = \log_a(x^k)$$
$$\log_e(x) = \ln(x)$$

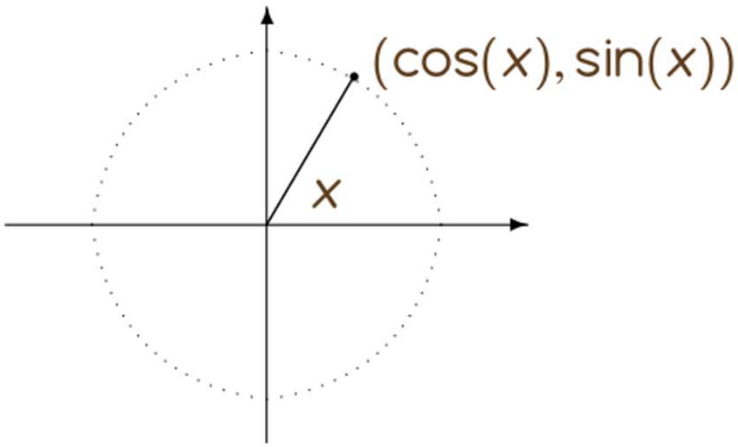
Funzioni trigonometriche





$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad -1 \leq \cos(x), \sin(x) \leq 1$$

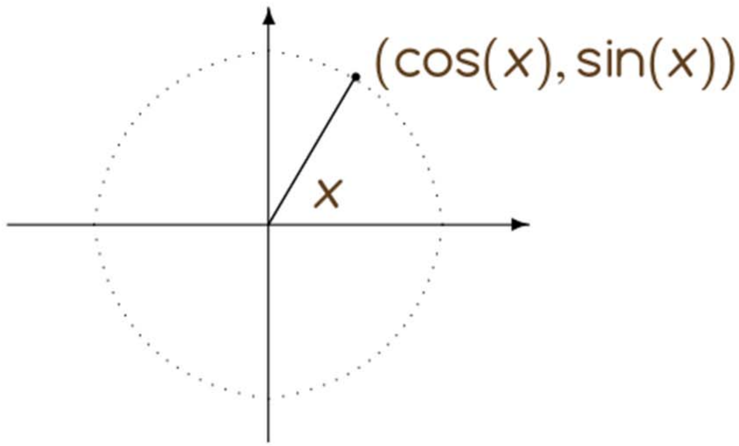
Funzioni trigonometriche



$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad -1 \leq \cos(x), \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Funzioni trigonometriche

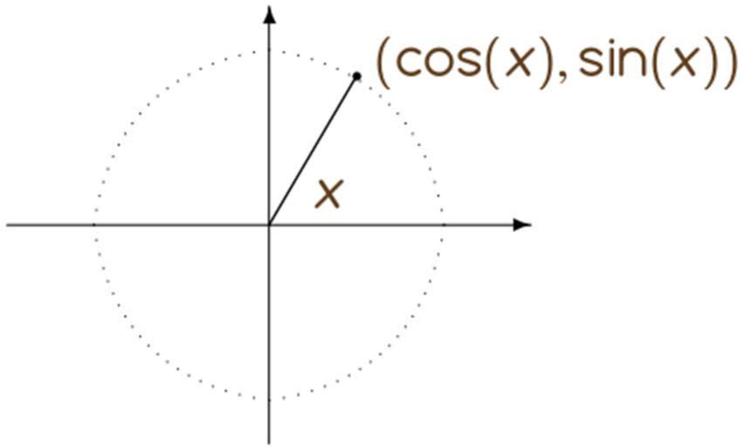


$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad -1 \leq \cos(x), \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x) \qquad \sin(x) = -\sin(-x)$$

Funzioni trigonometriche



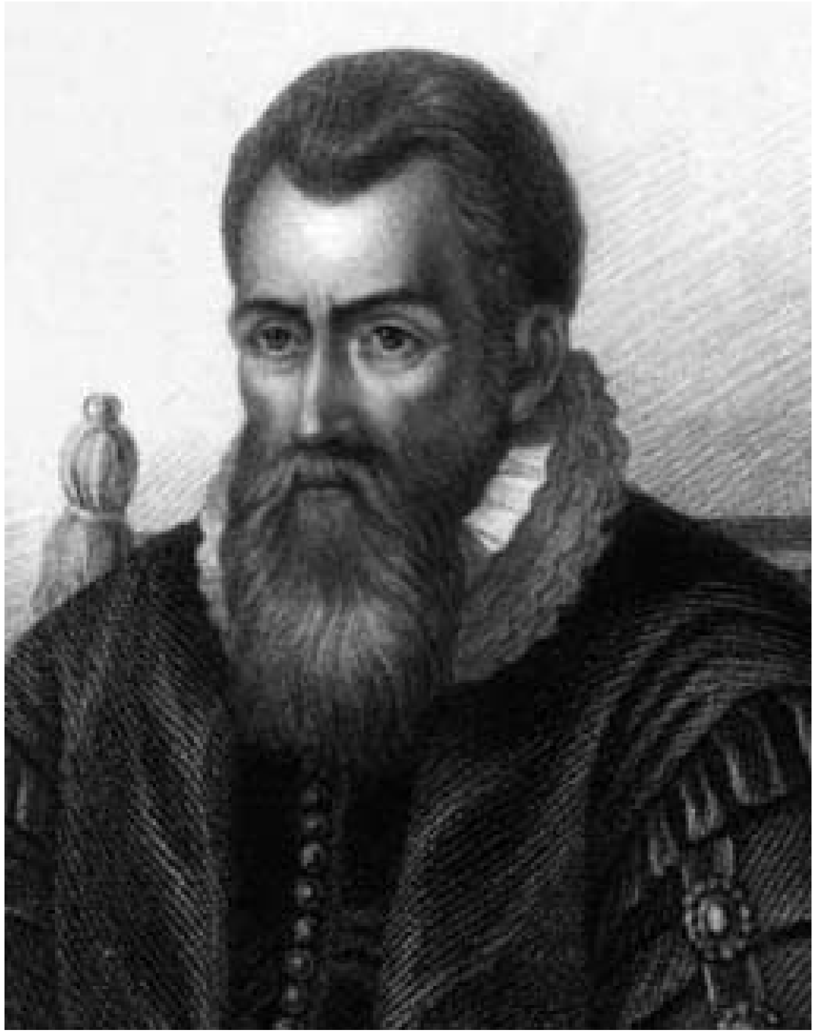
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad -1 \leq \cos(x), \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x) \qquad \sin(x) = -\sin(-x)$$

$$|\sin(x)| \leq |x| \qquad 1 - |x| \leq \cos(x) \leq 1$$

Protagonisti



John Napier

1550 - 1617