Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Quinto Appello

Esercizio 1 [punti: 6]. Siano $X, Y \sim \mathrm{Bin}(2, 0.5)$ indipendenti e sia $Z = XY$.

- **[2 punti]** Dire che valori può assumere Z.
- **[2 punti]** Calcolare la funzione di distribuzione di Z.
- **[2 punti]** Determinare media e varianza di Z.

SOLUZIONE. Per definizione, Z prende valori nell'insieme $\{0, 1, 2, 4\}$ dei possibili risultati del prodotto di X ed Y (perché queste ultime variabili aleatorie possono assumere i valori $0, 1, 2$), e lo fa, rispettivamente, con probabilità

$$\begin{aligned} p_Z(0) &= p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(2,0) \\ &= p_X(0)\Big[p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2)\Big] + \Big[p_X(1) + p_X(2)\Big]p_Y(0) \\ &= p_X(0) + \Big[p_X(1) + p_X(2)\Big]p_Y(0) = \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}\,, \end{aligned}$$

$p_Z(1) = p_{X,Y}(1,1) = p_X(1)p_Y(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $p_Z(2) = p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) = 2p_X(1)p_Y(2) = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, e $p_Z(4) = p_{X,Y}(2,2) = p_X(2)p_Y(2) = p_X(2)^2 = \frac{1}{16}$, dove nei vari passaggi abbiamo indicato con $p_{X,Y}$ la densità congiunta, abbiamo usato il fatto che $p_{X,Y} = p_X p_Y$ per indipendenza, il fatto che X, Y sono scambiabili e distribuite come due binomiali di parametri $n = 2$ e $p = \frac{1}{2}$.

Di conseguenza, la funzione di distribuzione è data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0, \\ \frac{7}{16}\,, & \text{se } 0 \le x < 1, \\ \frac{11}{16}\,, & \text{se } 1 \le x < 2, \\ \frac{15}{16}\,, & \text{se } 2 \le x < 4, \\ 1\,, & \text{se } x \ge 4. \end{cases}$$

La media si può calcolare di conseguenza[1], con la definizione, ottenendo

$$\mathbb{E}[Z] = 0 \cdot p_Z(0) + 1 \cdot p_Z(1) + 2p_Z(2) + 4p_Z(4) = 0 \cdot \tfrac{7}{16} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4\tfrac{1}{16} = 1\,.$$

Per la varianza[2], abbiamo che

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{4} + 16\tfrac{1}{16} - 1 = \frac{5}{4}\,.$$

[1] In alternativa, si può usare l'indipendenza per ricavare $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot 1 = 1$, dove abbiamo anche usato che X e Y sono binomiali di parametri $n = 2$ e $p = 1/2$, ciascune di media $np = 1$.

[2] In alternativa, possiamo usare il fatto che X, Y sono i.i.d. e che, quindi, la varianza di Z si può calcolare usando la formula $\mathrm{Var}(XY) = (\mathrm{Var}(X))^2 + 2\mathbb{E}[X]^2\mathrm{Var}(X) = [np(1-p)]^2 + 2(np)^2 \cdot np(1-p) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Quinto Appello

Esercizio 2 [punti: 6]. Siano X, Y due v.a. discrete la cui distribuzione congiunta soddisfa

$$p_{X,Y}(m,n) = \frac{a^2}{2^{n+m}}\,, \qquad \text{per ogni } n,m \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}.$$

- **[2pt]** Determinare il valore del parametro $a > 0$.
- **[2pt]** Dire come sono distribuite le v.a. X ed Y, determinandone le densità discrete p_X, p_Y.
- **[2pt]** Dire se X e Y sono indipendenti, motivando la risposta.

Soluzione. Per la densità congiunta di probabilità $p_{X,Y}$ si ha

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} p_{X,Y}(m,n) = 1\,.$$

D'altro lato, per definizione si ha

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} p_{X,Y}(m,n) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2}{2^{n+m}} = a^2 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = a^2\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\Big)^2 = 4a^2\,.$$

Poiché $a > 0$, eguagliando si ricava $a = 1/2$.

Per calcolare le densità marginali, marginalizziamo la congiunta: si ha

$$p_X(m) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{X,Y}(m,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^2}{2^{n+m}} = \frac{a^2}{2^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{2a^2}{2^m} = \frac{1}{2^{m+1}}$$

e, analogamente,

$$p_Y(n) = \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

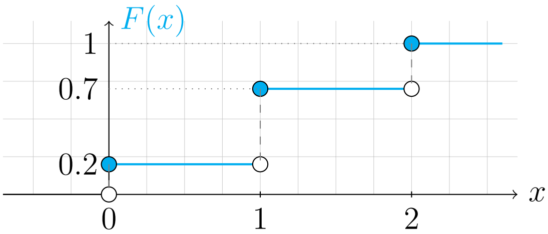
Dunque, X, Y sono indipendenti perché la congiunta si fattorizza nel prodotto delle marginali:

$$p_X(n)p_Y(m) = \frac{1}{2^{m+1}}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{4}{2^{n+m}} = \frac{a^2}{2^{n+m}} = p_{X,Y}(n,m)\,.$$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Quinto Appello

Esercizio 3 [punti: 6]. La funzione di distribuzione F della v.a. discreta X è come in figura.



- **[3 punti]** Dire che valori può assumere X.
- **[3 punti]** Determinarne media e varianza.

SOLUZIONE. Dal grafico della funzione di distribuzione F_X di X si evince che X prende valori nell'insieme $\{0, 1, 2\}$ e che la sua densità discreta di probabilità è

$$p_X(0) = \frac{2}{10}\,,\ p_X(1) = \frac{1}{2}\,,\ p_X(2) = \frac{3}{10}\,.$$

Quindi,

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \tfrac{2}{10} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{3}{10} = \tfrac{11}{10}\,.$$

Inoltre, $\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{17}{10}$ e, quindi,

$$\mathrm{Var}(X) = \tfrac{17}{10} - \left(\tfrac{11}{10}\right)^2 = \tfrac{170-121}{100} = \tfrac{49}{100}\,.$$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Quinto Appello

Esercizio 4 [punti: 8]. Un atleta deve completare un allenamento scegliendo fra tre percorsi: $\wp_1$, $\wp_2$ e $\wp_3$. Il percorso scelto deve essere completato entro un tempo prefissato. Dalle esperienze precedenti si sa che le probabilità dell'evento $E =$ "completare il percorso entro il tempo stabilito" sono, rispettivamente, date da $\mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_1) = 0.2$, $\mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_2) = 0.5$ e $\mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_3) = 0.3$ a seconda che il percorso scelto $\mathscr{C}$ sia stato $\wp_1$, $\wp_2$ o $\wp_3$. Sapendo che l'atleta ha completato il percorso entro il tempo previsto, calcolare la probabilità $\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1)$ che abbia scelto il percorso $\wp_1$.

Soluzione. Per calcolare la probabilità condizionata $\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1|E)$ applichiamo il Teorema di Bayes esprimendola come la frazione

$$\frac{\mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_1)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1)}{\mathbb{P}(E)}\,.$$

Facciamo l'ipotesi che i tre percorsi siano, a priori, scelti con uguale probabilità:

$$\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_i) = \tfrac{1}{3}\,,\ \text{per } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Conosciamo i fattori al numeratore e, col teorema delle probabilità totali, troviamo il denominatore:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_1)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1) + \mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_2)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_2) + \mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_3)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_3)\,.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1|E) &= \frac{\mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_1)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1)}{\mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_1)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_1) + \mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_2)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_2) + \mathbb{P}(E|\mathscr{C} = \wp_3)\mathbb{P}(\mathscr{C} = \wp_3)} \\ &= \frac{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{10}\,.\end{aligned}$$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Quinto Appello

Esercizio 5 [punti: 6]. Un'urna contiene 10 palline rosse e 5 palline bianche. Si estraggono 4 palline senza reinserimento. Sia X il numero di palline rosse estratte.

- **[3 punti]** Trovare la distribuzione di X.
- **[3 punti]** Dire quanto valgono $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Soluzione. Modelliamo X con un'ipergeometrica di parametri $n = 15$ (numero totale di palline nell'urna), $p = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ (frazione di palline rosse sul totale, inizialmente) e $k = 4$ (numero di palline estratte, simultaneamente, dall'urna). Pertanto

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{15}{4}}, \qquad \text{per } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Trattandosi di ipergeometrica, si ha

$$\mathbb{E}[X] = kp = \frac{8}{3}$$

per la media e, per quanto riguarda la varianza, abbiamo

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{k(n-k)np(1-p)}{n(n-1)} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 10 \cdot (1 - 2/3)}{15 \cdot 14} = \frac{44}{63}.$$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Quinto Appello

Esercizio 6 [punti: 6]. Sia X il numero di successi in 100 lanci consecutivi indipendenti di una moneta non truccata.

- **[3 pt.]** Calcolare media e varianza di X.
- **[3 pt.]** Dare un limite superiore alla probabilità che X differisca dalla sua media di almeno 20.

Soluzione. Modelliamo X con una binomiale di parametri $n = 100$ (ripetizioni indipendenti dell'esperimento bernoulliano di parametro p) e $p = 1/2$ (perché le due facce della moneta escono per ipotesi con uguale probabilità). Quindi $\mathbb{E}[X] = np = 50$ e $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 25$.
Inoltre, posto $\mu = \mathbb{E}[X] = 50$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 5$ e $\lambda = 4$, si ha

$$\mathbb{P}(|X - 50| > 20) = \mathbb{P}(|X - \mu| > \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{16}$$

per la disuguaglianza di Chebyschev.