UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 14 – Tableau proposizionali

Docente: Pietro Cenciarelli

"Metodo" delle tavole di verità

$P \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

Indicare l'opzione corretta:

- [x] soddisfacibile
- [ ] insoddisfacibile
- [ ] valida

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \vee \neg P$	$P \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

?!
☹

$P \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

$P,\ \neg Q \vee \neg P$

$P,\ \neg Q$ ☺ $\qquad$ $P,\ \neg P$ ☹

$m(P) = T,$
$m(Q) = F$

☑ soddisfacibile

☐ insoddisfacibile

☐ valida

(*almeno una foglia verde*)

$P \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge Q$

$P,\ Q,\ \neg Q \vee \neg P$

$P,\ Q,\ \neg Q$ ☹ $\qquad$ $P,\ Q,\ \neg P$ ☹

☐ soddisfacibile — *almeno una foglia verde*

☑ insoddisfacibile — *nessuna foglia verde*

☐ valida

$P \wedge (Q \vee \neg R)$

$m(P) = F$ ☹

$P,\ Q \vee \neg R$

$m(P) = T,$ $m(Q) = T$	$P,\ Q$ ☺	$P,\ \neg R$ ☺	$m(P) = T,$ $m(R) = F$

☑ soddisfacibile	☐ insoddisfacibile	☐ valida
almeno una foglia verde	*nessuna foglia verde*	*tutte le foglie verdi* ?!

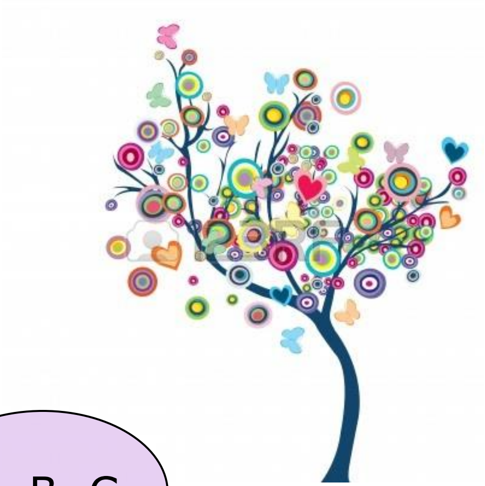
Una proposizione *A è valida* sse, per ogni m, m(A) = T

ovvero sse, per ogni m, m(¬A) = F

ovvero *sse ¬A è insoddisfacibile*

soddisfacibile	insoddisfacibile	valida
almeno una foglia verde	*nessuna foglia verde*	negata insoddisfacibile

L'albero delle proposizioni

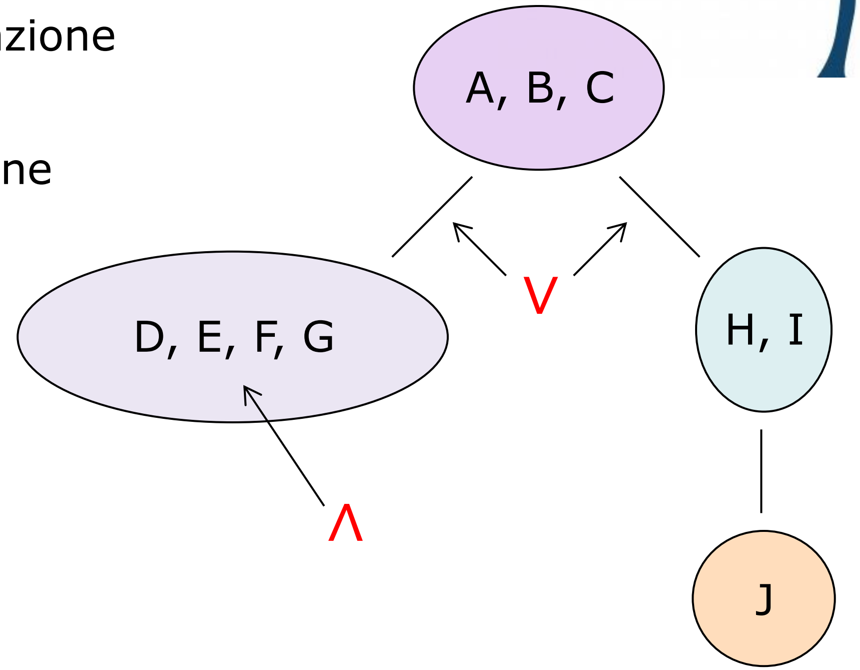


I nodi sono insiemi di proposizioni

Le proposizioni di ciascun nodo si intendono in congiunzione

I figli di un nodo si intendono in disgiunzione

…e dipendono dal padre secondo regole costruttive



L’albero delle proposizioni

I nodi sono insiemi di proposizioni

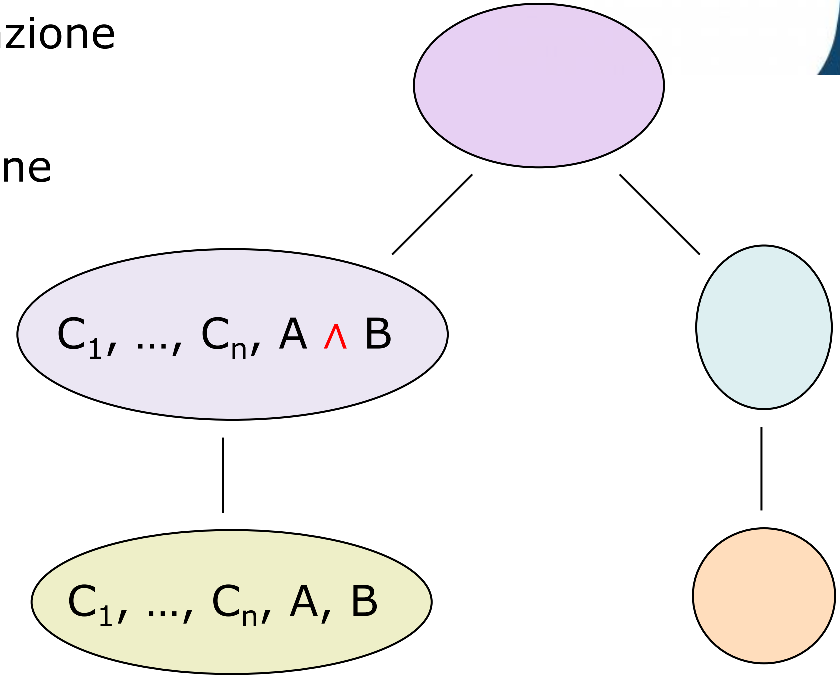
Le proposizioni di ciascun nodo si intendono in congiunzione

I figli di un nodo si intendono in disgiunzione

…e dipendono dal padre secondo regole costruttive

$$A \wedge B$$

$$A,\ B$$



L'albero delle proposizioni

I nodi sono insiemi di proposizioni

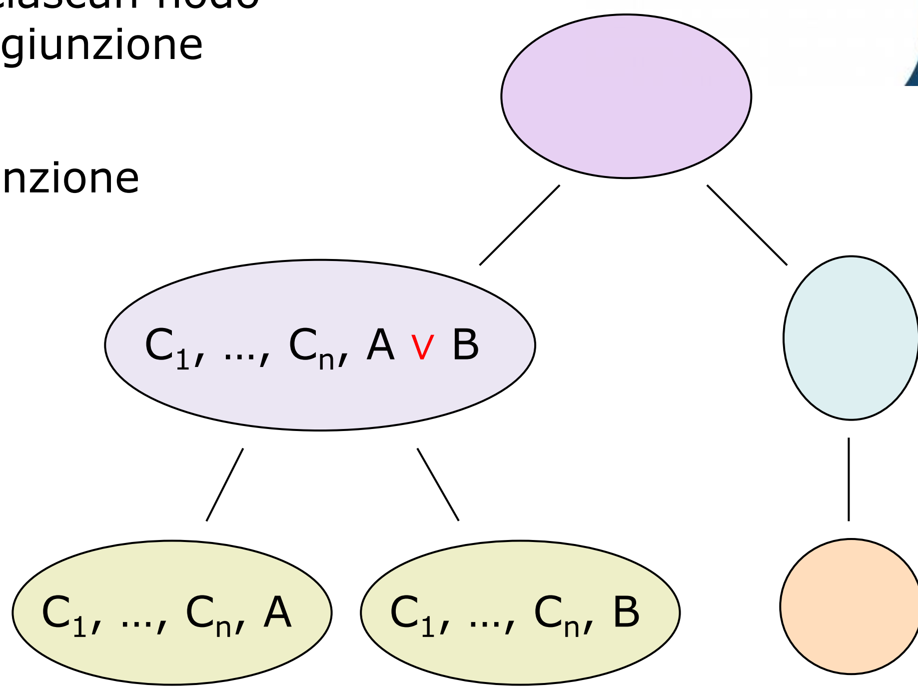
Le proposizioni di ciascun nodo si intendono in congiunzione

I figli di un nodo si intendono in disgiunzione

…e dipendono dal padre secondo regole costruttive

$$A \wedge B \quad\Rightarrow\quad A, B$$

$$A \vee B \quad\Rightarrow\quad A \mid B$$



UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

L'albero delle proposizioni

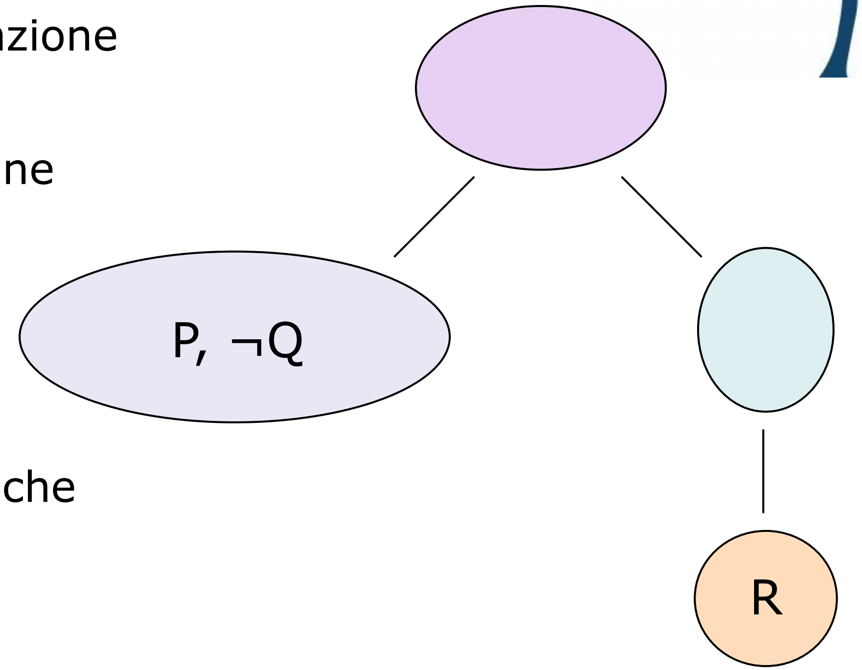
I nodi sono insiemi di proposizioni

Le proposizioni di ciascun nodo si intendono in congiunzione

I figli di un nodo si intendono in disgiunzione

…e dipendono dal padre secondo regole costruttive

nelle foglie compaiono solo proposizioni atomiche o negazioni di queste



L'albero delle proposizioni

I nodi sono insiemi di proposizioni

Le proposizioni di ciascun nodo si intendono in congiunzione

I figli di un nodo si intendono in disgiunzione

…e dipendono dal padre secondo regole costruttive

nelle foglie compaiono solo proposizioni atomiche o negazioni di queste

una foglia si dice *chiusa* se contiene falso oppure una prop'ne e la sua negazione

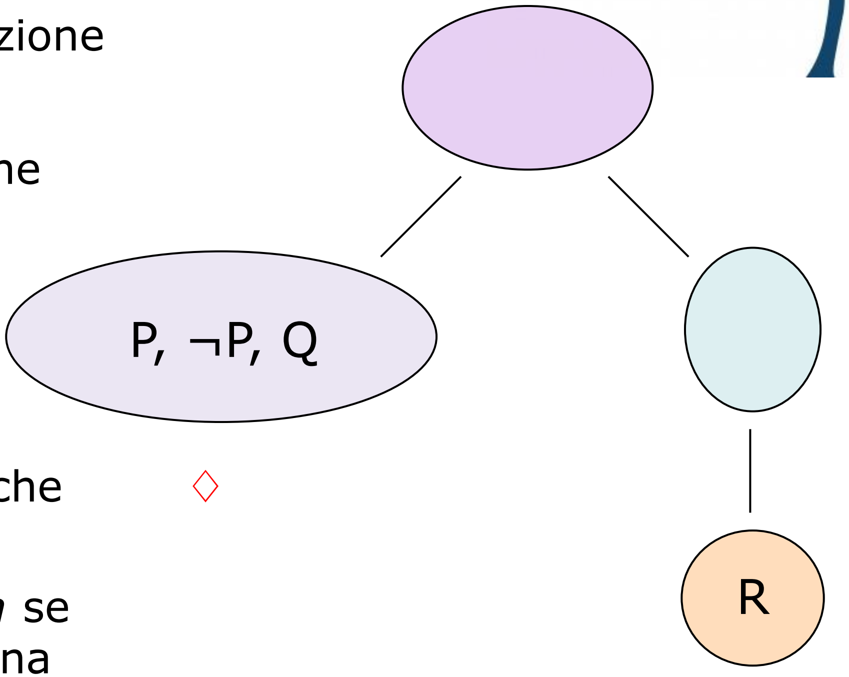


Tableau semantici

per la logica proposizionale

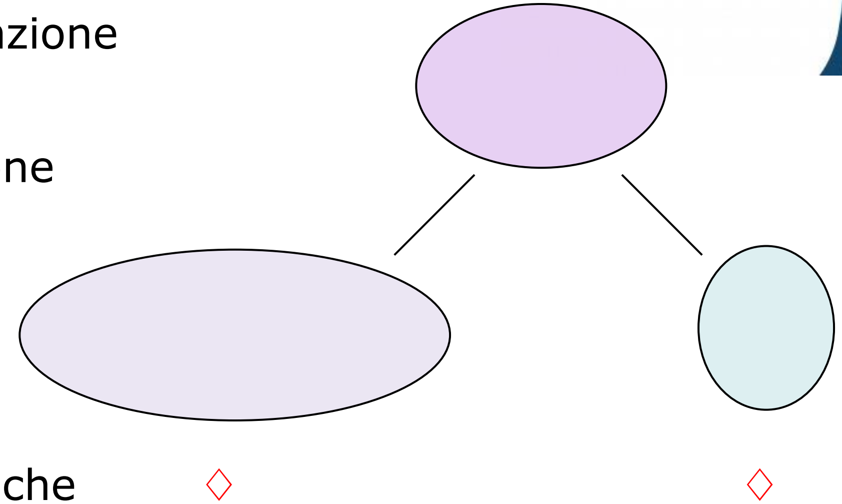
I nodi sono insiemi di proposizioni

Le proposizioni di ciascun nodo si intendono in congiunzione

I figli di un nodo si intendono in disgiunzione

…e dipendono dal padre secondo regole costruttive

nelle foglie compaiono solo proposizioni atomiche o negazioni di queste



una foglia si dice *chiusa* se contiene falso oppure una prop'ne e la sua negazione

Un albero si dice *chiuso* se tutte le sue foglie sono chiuse.

Tableau proposizionali

(le regole)

$$\begin{array}{c} A \land B \\ | \\ A, B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & A \lor B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

A partire da queste si possono derivare tutte le altre:

$$A \rightarrow B \quad \equiv \begin{array}{ccc} & \neg A \lor B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

Tableau proposizionali

(le regole)

$$\begin{tikzcd} A \land B \arrow[d, dash] \\ A, B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \lor B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ A & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \neg\neg A \arrow[d, dash] \\ A \end{tikzcd}$$

A partire da queste si possono derivare tutte le altre:

$$\begin{tikzcd} & A \rightarrow B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \neg A & & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \neg(A \rightarrow B) &\equiv \neg(\neg A \lor B) \\ &\equiv \neg\neg A \land \neg B \\ &\equiv A \land \neg B \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} A \land \neg B \arrow[d, dash] \\ A, \neg B \end{tikzcd}$$

Tableau proposizionali

(le regole)

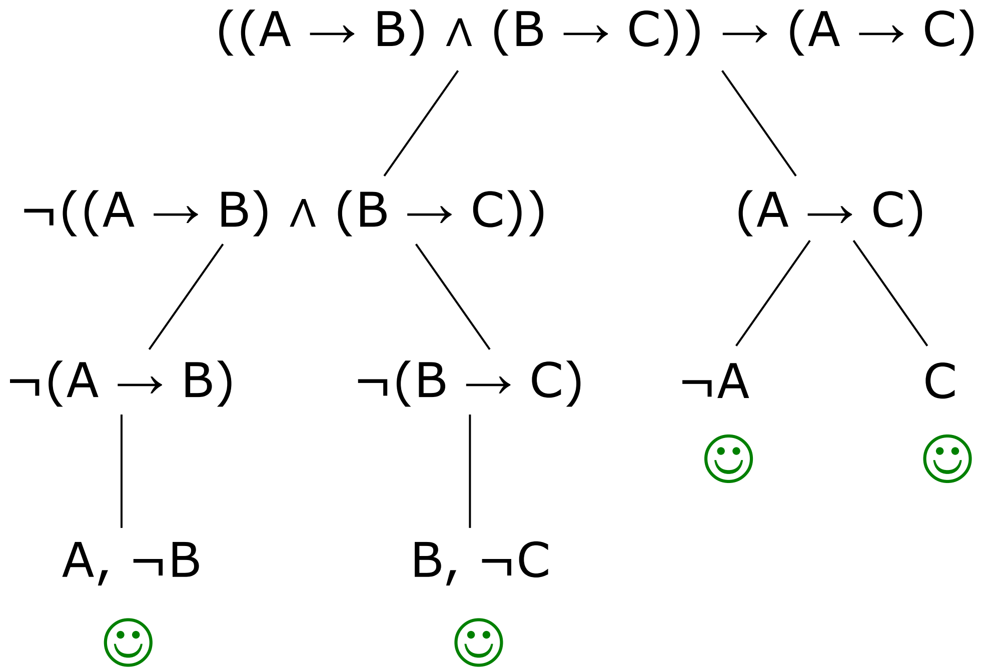
α

$$\frac{A \wedge B}{A,\ B} \qquad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{A,\ \neg B} \qquad \frac{\neg\neg A}{A} \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A,\ \neg B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B,\ B \rightarrow A}$$

β

$$\frac{A \vee B}{A \mid B} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B} \qquad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B} \qquad \frac{\neg(A \leftrightarrow B)}{\neg(A \rightarrow B),\ \neg(B \rightarrow A)}$$

Tableau proposizionali



$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ è soddisfacibile

è anche *valida*?

Metodo dei tableau proposizionali

$$\neg(((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C), \neg(A \rightarrow C)$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg(A \rightarrow C)$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A, \neg C$$

$$A \rightarrow B, \neg B, A, \neg C \qquad A \rightarrow B, C, A, \neg C$$

$$\diamondsuit$$

$$\neg A, \neg B, A, \neg C \qquad B, \neg B, C, A, \neg C$$

$$\diamondsuit \qquad \diamondsuit$$

è anche *valida*? *Sì!*

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodo dei tableau proposizionali

nota filosofica

Immanuel Kant
1724 - 1804

"Prolegomeni ad ogni metafisica futura che voglia presentarsi come scienza" (1783)

il metodo analitico inizia da un dato e lo scompone per scoprire le basi della sua possibilità

il metodo sintetico procede in maniera opposta: mette assieme i principi del dato per verificarne la possibilità.

il metodo dei tableau è analitico

il metodo delle tavole di verità è sintetico

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Metodo dei tableau proposizionali

correttezza e completezza

$$B = P \wedge (Q \rightarrow R)$$

$$\begin{array}{ccc} & P,\ Q \rightarrow R & \\ \swarrow & & \searrow \\ P,\ \neg Q & & P,\ R \end{array}$$

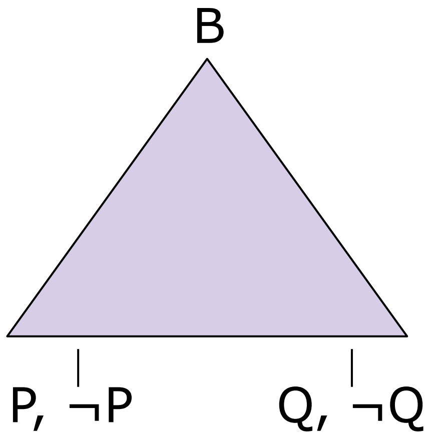
$\wedge$ $\qquad$ $\vee$

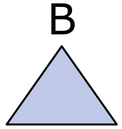
$$\phi_B = (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$$

m soddisfa B se e solo se soddisfa ϕ_B

Metodo dei tableau proposizionali

correttezza e completezza





chiuso se e solo se ϕ_B insoddisfacibile

m soddisfa B se e solo se soddisfa ϕ_B

Metodo dei tableau proposizionali

correttezza e completezza

A *valida* $\rightleftarrows$ $\neg A$ chiuso

$\neg A$ insoddisfacibile $\Leftrightarrow$ $\phi_{\neg A}$ insoddisfacibile

B

chiuso se e solo se ϕ_B insoddisfacibile

m soddisfa B se e solo se soddisfa ϕ_B

Metodo dei tableau proposizionali

correttezza e completezza