UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

3. Spazi di probabilità finiti

Esperimenti aleatori

Obiettivo della lezione: descrivere esperimenti che possono avere più esiti possibili
Useremo la teoria degli insiemi che abbiamo richiamato brevemente nella scorsa lezione
Ci concentreremo ancora sul caso più semplice:

lo spazio di probabilità S è un insieme finito

Vogliamo poter parlare della nozione intuitiva di *evento* usando un linguaggio sufficientemente formalizzato da no permettere ambiguità.

Esperimenti aleatori

Il caso più semplice è quello di evento elementare o atomico.

Esempio: moneta
Come spazio S scegliamo l'insieme $\{T, C\}$
Effettuando un singolo esperimento abbiamo due esiti possibili, testo o croce, T o C, i due elementi di S

Esempio: dado a sei facce
Come spazio S' scegliamo l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Effettuando un singolo esperimento abbiamo sei esiti possibili, i sei elementi di S'

Eventi

Ora che abbiamo più di due risultati possibili , come per i dado, ci rendiamo conto che vogliamo però poter trattare anche eventi più complessi

Per esempio: “esce un numero pari”

Per parlare di un evento come questo abbiamo bisogno di riferirci a **sottoinsiemi** dello spazio di probabilità *S*

“esce un numero pari”
corrisponde al sottoinsieme $\{2, 4, 6\}$

“esce un numero non più grande di 3”
corrisponde al sottoinsieme $\{1, 2, 3\}$

Eventi

Ricapitolando:

gli eventi elementari sono elementi di *S* lo spazio di probabilità

In generele un evento è invece un qualunque sottoinsieme di *S*

Vogliamo trattare tutti gli eventi sullo stesso piano

Quindi per coerenza è opportuno ampliare la nostra definizione di evento elementare

Invece di pensare a un evento elementare come a un elemento di *S*, lo penseremo come un *singoletto* ovvero un sottoinsieme composto da un solo elemento

"esce 4" ora diventa il sottoinsieme $\{4\}$

Eventi

Provvisti di questo linguaggio le operazioni logiche su eventi sono quindi riconducibili a operazioni insiemistiche

Vediamo degli esempi per il lancio del dado a sei facce

“esce un numero pari” **e** “esce un numero minore di 3”

$$\{2,4,6\} \cap \{1,2,3\} = \{2\}$$

“esce un numero pari” **o** “esce un numero minore di 3”

$$\{2,4,6\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4,6\}$$

non “esce un numero pari”

$$\{2,4,6\}^C = \{1,3,5\}$$

Eventi

Diamo un nome a due sottoinsiemi speciali di S

Il primo è S stesso che chiameremo evento certo

Il secondo è l'insieme vuoto $\emptyset$ che chiameremo evento impossibile

Naturalmente chiedere che si verifichino insieme l'evento A e l'evento certo, equivale a chiedere che si verifichi l'evento A,
nel linguaggio della teoria degli insiemi $A \cap S = A$.

Funzioni indicatrici

Un modo alternativo per descrivere le operazioni fra eventi è fare uso delle Funzioni indicatrici.

La funzione indicatrice dell'evento A è definita nel modo seguente

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

dove x è un elemento di S

A parole: I_A è una funzione che ha per argomento un elemento di S e vale 1 se tale elemento appartiene all'insieme A, 0 se non vi appartiene.

Altrimenti detto: I vale 1 se A si verifica, 0 se A non si verifica.

Funzioni indicatrici

Proprietà immediate delle funzioni indicatrici

$I_\emptyset(x) = 0$ per ogni x

$I_S(x) = 1$ per ogni x

$I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subseteq B$

Funzioni indicatrici

Le operazioni insiemistiche si riportano a normali operazioni algebriche fra funzioni indicatrici

Complementazione

$I_A + I_{A^c} = 1$

Intersezione

$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$

Unione

$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A \cdot I_B$