UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 9 – L'algebra dei sottoinsiemi - Reticoli

Docente: Pietro Cenciarelli

I numeri naturali

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$+ : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$

$0 \in \mathcal{N}$

$0 + n = n$ (elemento neutro)

$n + m = m + n$ (commutatività)

$n + (m + p) = (n + m) + p$ (associatività)

strutture algebriche: insiemi dotati di operazioni che soddisfano opportune proprietà o *assiomi* (*monoidi, gruppi, reticoli, anelli, campi…*)

$\mathcal{N}$ è un *monoide commutativo*

Algebre

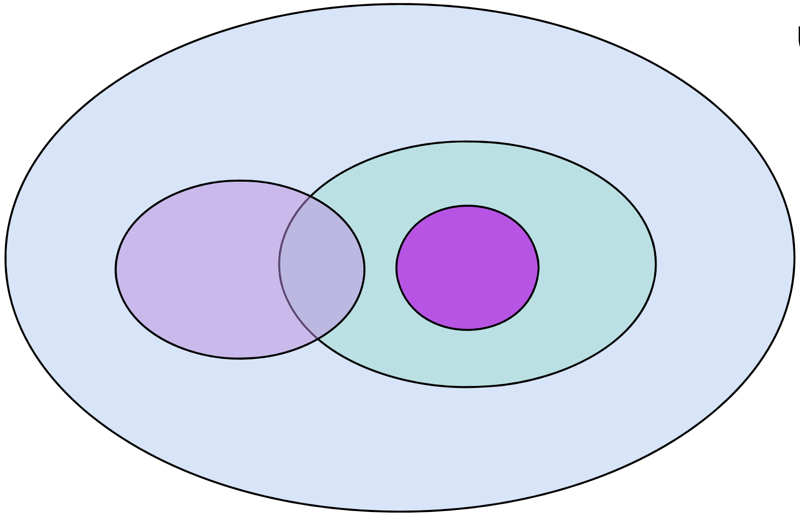
$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	$2^{\mathcal{N}} = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \ldots \{2, 7\}, \ldots\}$
$+ : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$	$\cup : 2^{\mathcal{N}} \times 2^{\mathcal{N}} \rightarrow 2^{\mathcal{N}}$
$0 \in \mathcal{N}$	$\{\} \in 2^{\mathcal{N}}$
$0 + n = n$	$\{\} \cup A = A$
$n + m = m + n$	$A \cup B = B \cup A$
$n + (m + p) = (n + m) + p$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

...

$2^{\mathcal{N}}$ è un *monoide commutativo*

... e anche molto di più!

Algebre



$2^{\mathcal{N}}$

$\cup : 2^{\mathcal{N}} \times 2^{\mathcal{N}} \rightarrow 2^{\mathcal{N}}$

A ⊆ B *sse* A ∪ B = B

⊆ è una relazione d'ordine

Algebre

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

A ≤ B *sse* A ∨ B = B

≤ è una relazione d'ordine?

A ≤ A se A ∨ A = A

A ∨ B = B ∨ A

$2^{\mathcal{N}}$

$\cup : 2^{\mathcal{N}} \times 2^{\mathcal{N}} \rightarrow 2^{\mathcal{N}}$

A ⊆ B *sse* A ∪ B = B

⊆ è una relazione d'ordine

- riflessiva
- antisimmetrica

se A ≤ B (ovvero A ∨ B = B) e B ≤ A (ovvero B ∨ A = A), allora...

B = A ∨ B = B ∨ A = A

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Algebre

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$A \leq B$ *sse* $A \vee B = B$

$\leq$ è una relazione d'ordine?

$A \vee A = A$

$A \vee B = B \vee A$

Se $A \leq B$ (ovvero $A \vee B = B$) e
$B \leq C$ (ovvero $B \vee C = C$) allora…
$A \vee C = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = B \vee C = C$

ovvero $A \leq C$

$2^{\mathcal{N}}$

$\cup : 2^{\mathcal{N}} \times 2^{\mathcal{N}} \to 2^{\mathcal{N}}$

$A \subseteq B$ *sse* $A \cup B = B$

$\subseteq$ è una relazione d'ordine

- riflessiva
- antisimmetrica
- transitiva

Algebre

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

A $\leq$ B *sse* A $\vee$ B = B

$\leq$ è una relazione d'ordine?

A $\vee$ A = A

A $\vee$ B = B $\vee$ A

A $\vee$ (B $\vee$ C) = (A $\vee$ B) $\vee$ C

$2^{\mathcal{N}}$

$\cup : 2^{\mathcal{N}} \times 2^{\mathcal{N}} \to 2^{\mathcal{N}}$

A $\subseteq$ B *sse* A $\cup$ B = B

$\subseteq$ è una relazione d'ordine

A $\cup$ B = *sup* {A, B} ovvero:

1) A, B $\subseteq$ A $\cup$ B e inoltre
2) se A $\subseteq$ C e B $\subseteq$ C allora
   A $\cup$ B $\subseteq$ C

1) A $\vee$ (A $\vee$ B) = (A $\vee$ A) $\vee$ B = A $\vee$ B, ovvero: A $\leq$ A $\vee$ B

2) … analogamente.

Semireticoli

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$A \vee A = A$

$A \vee B = B \vee A$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$\mathcal{A}$

$\leq$ è una relazione d'ordine

esiste il *sup* $\{A, B\}$ $\forall$ $A, B \in \mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}, \vee) \underset{A \vee B = \sup\{A, B\}}{\overset{A \leq B \text{ sse } A \vee B = B}{\rightleftarrows}} (\mathcal{A}, \leq)$$

Semireticoli

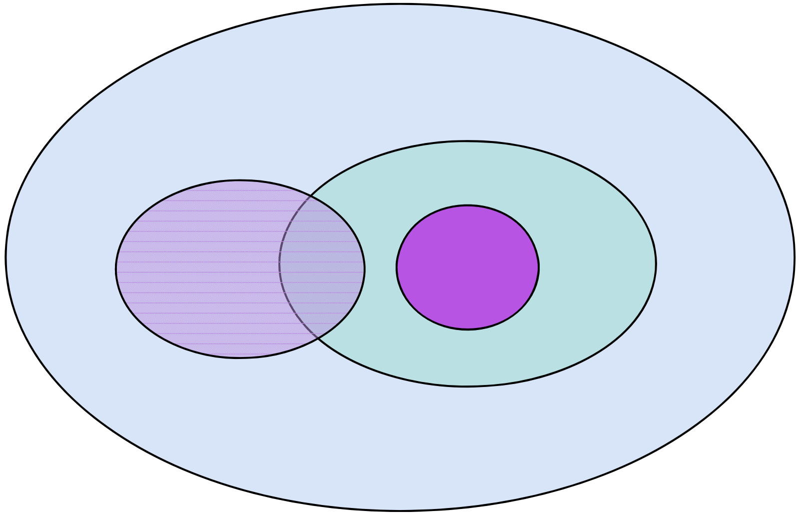
$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$A \vee A = A$

$A \vee B = B \vee A$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$



$A \leq_{\vee} B$ *sse* $A \vee B = B$

$A \subseteq B$ *sse* $A \cup B = B$

$A \leq_{\wedge} B$ *sse* $A \wedge B = A$

$A \subseteq B$ *sse* $A \cap B = A$

$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Semireticoli

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$	$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$
$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

$A \leq_{\vee} B$ *sse* $A \vee B = B$	$A \subseteq B$ *sse* $A \cup B = B$
$A \leq_{\wedge} B$ *sse* $A \wedge B = A$	$A \subseteq B$ *sse* $A \cap B = A$

$$\leq_{\vee} \stackrel{?}{=} \leq_{\wedge}$$

Semireticoli

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$A \vee A = A$

$A \vee B = B \vee A$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$A \wedge A = A$

$A \wedge B = B \wedge A$

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

$A \leq_{\vee} B$ *sse* $A \vee B = B$

$A \leq_{\wedge} B$ *sse* $A \wedge B = A$

$\leq_{\vee} \overset{?}{=} \leq_{\wedge}$

$A \leq_{\vee} B \Leftrightarrow A \leq_{\wedge} B$

$A \wedge B = A \wedge (A \vee B) = A$

...

Reticoli

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$A \vee A = A$

$A \vee B = B \vee A$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \vee (A \wedge B) = A$

$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$A \wedge A = A$

$A \wedge B = B \wedge A$

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

$A \wedge (A \vee B) = A$

Reticoli distributivi

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$		associativa
$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$	commutativa
$A \vee (A \wedge B) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$	assorbimento
$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$	idempotenza
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$		distributiva
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$		?

Reticoli distributivi

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee (A \wedge C)) \vee (B \wedge C)$$

$$= A \vee ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$$

$$= A \vee ((A \vee B) \wedge C)$$

$$= ((A \vee B) \wedge A) \vee ((A \vee B) \wedge C)$$

$$= (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ distributiva

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ☺

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Reticoli distributivi

$\mathcal{A}$

$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$		associativa
$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$		
$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$	commutativa
$A \vee (A \wedge B) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$	assorbimento
$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$	idempotenza
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$		distributiva
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$		☺