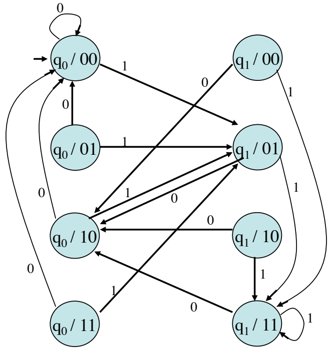
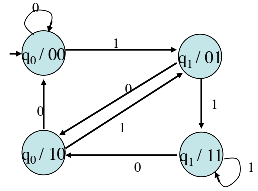
Minimizzazione di automi

Prof. Daniele Gorla

Due automi di Moore per esempio dei resti MOD 4



≠



????

Automa minimo

Def.: due automi (dello stesso tipo) sono *equivalenti* se, per ogni possibile sequenza di input, generano entrambi la stessa sequenza di output.

N.B.: i due automi di Moore precedenti sono equivalenti (a fronte dello stesso input danno stesso output), ma il primo è molto più complesso del secondo!

L'*automa minimo equivalente a M* è quell'automa equivalente a M ma con il minor numero possibile di stati (e transizioni)

N.B.: si può dimostrare che tale automa è *unico*, a meno di ridenominazioni degli stati

Come vedremo, un automa è un modello astratto di una rete sequenziale. Quindi, conviene minimizzare un automa, poiché un numero di stati minore implica una riduzione del numero di componenti di memoria nel circuito corrispondente.

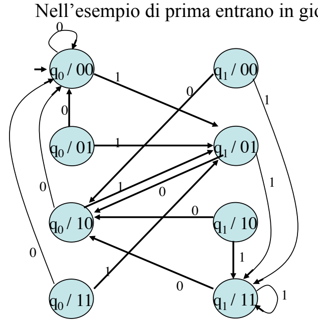
Problema: dato M, come trovare l'automa minimo ad esso equivalente?

Stati irraggiungibili

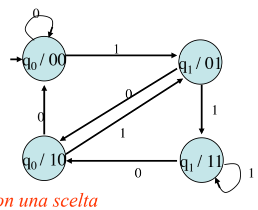
Il primo passo per la minimizzazione è la rimozione degli *stati irraggiungibili*, cioè quegli stati q tali che, per ogni sequenza di input $a_1 \ldots a_n$, si ha che

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \ldots \xrightarrow{a_n} q_n \neq q$$

Nell'esempio di prima entrano in gioco solo gli stati irraggiungibili:



=

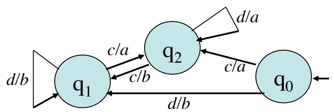


N.B.: con una scelta diversa dello stato iniziale, avrei avuto un automa minimo diverso

Stati indistinguibili (1)

…ma non basta eliminare gli stati irraggiungibili.

Es.:

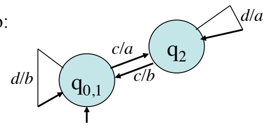


Gli stati q_0 e q_1 si comportano allo stesso modo: a fronte dello stesso carattere in input, danno lo stesso output e vanno nello stesso stato.

→ non ha senso avere q_0 e q_1 come stati distinti → LI FONDO

q_2, invece, si comporta diversamente e deve restare distinto

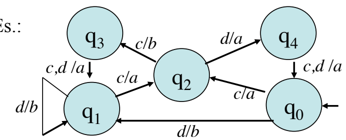
Automa minimo:



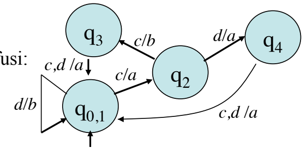
Stati indistinguibili (2)

…l'indistinguibilità è un'evoluzione di questa nozione.

Es.:

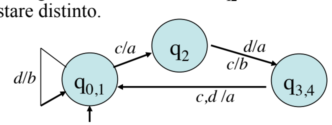


Gli stati q_0 e q_1 sono indistinguibili e vanno fusi:



Ciò rende anche q_3 e q_4 indistinguibili, che vanno fusi; q_2, invece, si comporta diversamente e deve restare distinto.

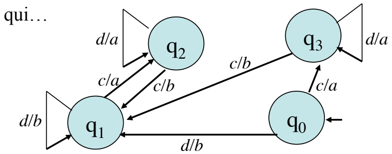
Automa minimo:



Stati indistinguibili (3)

…ma non finisce qui…

Es.:



Gli stati q_0 e q_1 a fronte dello stesso input danno lo stesso output, ma col carattere *c* non vanno nello stesso stato.

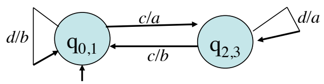
→ se q_2 e q_3 sono indistinguibili, anche q_0 e q_1 lo sono (vedi caso precedente)

Gli stati q_2 e q_3 a fronte dello stesso input danno lo stesso output, ma col carattere *d* non vanno nello stesso stato.

→ l'indistinguibilità di q_2 e q_3 dipende dall'indistinguibilità di q_2 e q_3

→ definendo indistinguibili come non distinguibili (vedi poi),posso fonderli

Automa minimo:

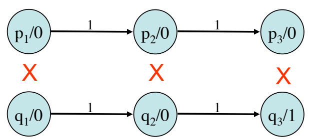


Distinguibilità (Moore)

In un automa di Moore due stati si dicono *distinguibili* se

1. gli output ad essi associati sono diversi, oppure
2. hanno una transizione uscente etichettata con lo stesso carattere che porta a stati distinguibili.

Es.:



In: ε, Out_{p3}: 0, Out_{q3}: 1

In: 1, Out_{p2}: 00, Out_{q2}: 01

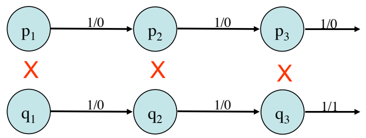
In: 11, Out_{p1}: 000, Out_{q1}: 001

Distinguibilità (Mealy)

In un automa di Mealy due stati si dicono *distinguibili* se hanno una transizione uscente etichettata con lo stesso carattere ma che

1. restituisce output diversi, oppure
2. porta a stati distinguibili.

Es.:



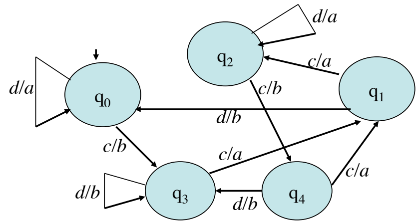
In: 1, Out_{p3}: 0, Out_{q3}: 1

In: 11, Out_{p2}: 00, Out_{q2}: 01

In: 111, Out_{p1}: 000, Out_{q1}: 001

Algoritmo per l'automa minimo (passo 0: stati irraggiungibili)

Rimuovi tutti gli stati irraggiungibili



In questo esempio non ci sono stati irraggiungibili partendo da q_0!

Algoritmo per l'automa minimo (passo 1: tabella triangolare)

Considera tutte le coppie di stati, per vedere se sono distinguibili o meno.

q0					
q1					
q2					
q3					
q4					
	q0	q1	q2	q3	q4

Inutile perché già considero la coppia simmetrica nella parte inferiore

Inutile perché sicuramente non distinguibili

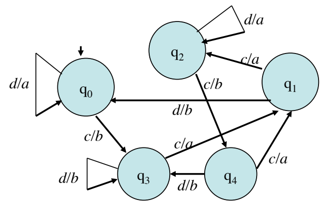
Ciò che resta è una tabella triangolare inferiore in cui mettere il risultato del confronto di ogni coppia di stati che possono essere distinguibili.

Algoritmo per l'automa minimo (passo 2: distinguibilità immediata)

Marcatura delle celle: Condizione 1 di distinguibilità

Si esaminano una dopo l'altra tutte le celle di tale tabella e si guarda la coppia di stati ad esse associati; nella cella metti una X se la condizione è verificata (stati con output diversi – per Moore – o stati con una transizione uscente con stesso input ma output diverso – per Mealy)

q1	X			
q2		X		
q3	X		X	
q4	X		X	
	q0	q1	q2	q3



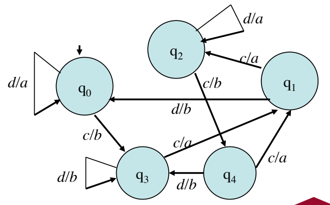
Algoritmo per l'automa minimo (passo 3: distinguibilità propagata)

Marcatura delle celle: Condizione 2 di distinguibilità

Si esaminano una dopo l'altra tutte le celle non ancora marcate e si guarda la coppia di stati ad esse associati; nella cella metti

- una X se a fronte dello stesso input vai in una coppia già marcata con X;
- una O se, per ogni possibile input, o vai nello stesso stato o in coppie di stati già marcati con O o nella coppia in questione;
- se nessuna delle due condizioni è verificata, segna nella cella tutte le coppie di stati non marcate con O e diverse dalla coppia in questione in cui arrivi con lo stesso input.

q1	X			
q2	(3,4)	X		
q3	X	X	X	
q4	X	X	X	O
	q0	q1	q2	q3



Algoritmo per l'automa minimo (passo 4: riempimento della tabella)

Inserisci una marcatura per ogni coppia

Per tutte le celle che contengono (almeno) una coppia di stati, verifica se tali stati sono stati marcati

- se sono stati marcati con una X, marca la cella corrente con una X;
- se sono stati marcati con una O, cancella la coppia dalla cella;
- altrimenti lascia la coppia nella cella.

Se alla fine la cella risulta vuota, marcala con O.

Itera questo passo finchè ogni cella è marcata o con X o con O.

q1	X			
q2	(3,4) O	X		
q3	X	X	X	
q4	X	X	X	O
	q0	q1	q2	q3

Algoritmo per l'automa minimo (passo 5: automa minimo)

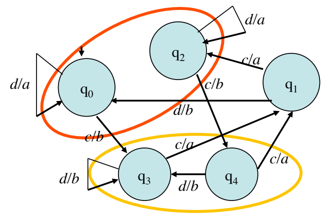
Al termine dell'algoritmo, TUTTE le coppie di stati equivalenti saranno marcate con O; quindi, se (q,q') e (q',q'') sono marcate con O, allora anche (q,q'') è marcata con O!

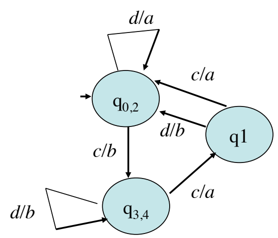
Dalla tabella triangolare si ottengono le *classi di indistinguibilità* (o di equivalenza): due stati sono nella stessa classe se e solo se la coppia ad essi associata è marcata con O nella tabella.

L'automa minimo ha

- come stati le classi di indistinguibilità;
- come stato iniziale la classe che contiene lo stato iniziale;
- come funzione di transizione la funzione ottenuta mettendo
  (classe(q) , *a*) → classe(q') per ogni (q,*a*) → q' ∈ δ
- come funzione di output la funzione ottenuta mettendo
  - alla classe di q l'output di q (Moore)
  - alla transizione (classe(q),*a*) → classe(q') l'output di (q,*a*) → q' (Mealy)

Esempio





q1	X			
q2	O	X		
q3	X	X	X	
q4	X	X	X	O
	Q0	q1	q2	q3