Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: ______________

Calcolo delle probabilità - Primo Appello

Esercizio 1. Siano $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ indipendenti e sia $U = X/(X+Y)$.

- Dire che valori può assumere U.
- Determinare la densità di probabilità di U.

Soluzione. Considerata l'uguaglianza degli eventi

$$\{U \le u\} \;= \{X \le u(X+Y)\} \;= \{X \le \tfrac{u}{1-u} Y\}\,,$$

la probabilità che $U \le u$ è data da

$$\iint_E f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

dove il dominio di intergrazione è $E = \{(x,y)\colon x \le \frac{u}{1-u} y\}$. Poiché X, Y sono indipendenti, la densità congiunta $f_{X,Y}$ è data dal prodotto

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}\,, & \text{se } x, y > 0, \\ 0\,, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato che X, Y sono esponenziali di parametro 1. Quindi

$$\begin{aligned} \Pr\{U \le u\} &= \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=0}^{\frac{u}{1-u}y} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \\ &= \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y} \int_{x=0}^{\frac{u}{1-u}y} e^{-x}\, dx\, dy \\ &= \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}\Big(1 - e^{-\frac{u}{1-u}y}\Big)\, dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-u}y}\, dy = 1 - (1-u) = u\,. \end{aligned}$$

Essendo $u \in (0,1)$ arbitrario, U è distribuita uniformemente sull'intervallo $(0,1)$. □

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Primo Appello

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di distribuzione $F : \mathbb{R} \to (0,1)$ continua, strettamente crescente e suriettiva. Qual è la densità di probabilità di $F(X)$?

Soluzione. Per ipotesi, F è invertibile e la sua inversa $G : (0,1) \to \mathbb{R}$ è crescente. Perciò, dato $y \in (0,1)$, si ha $F(X) \leq y$ se e soltanto se $X \leq G(y)$ e, quindi,

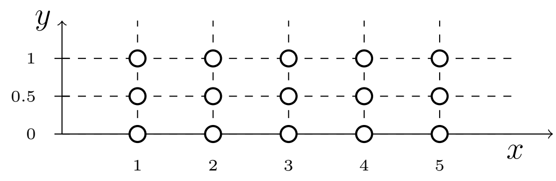
$$\Pr\{F(X) \leq y\} = \Pr\{X \leq G(y)\} = F(G(y)) = y\,.$$

Pertanto, $F(X)$ è distribuita uniformemente sull'intervallo $(0,1)$. $\square$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: ______________

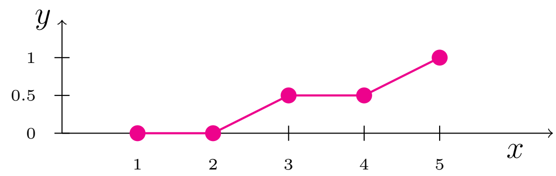
Calcolo delle probabilità - Primo Appello

Esercizio 3. Annerire 5 dei pallini in figura e unirli in modo che compaia il grafico della funzione di distribuzione F di una variabile aleatoria X.



- Calcolare la probabilità che $2 \leq X \leq 4$.
- Calcolare media e varianza di X.

Soluzione. Per essere ammissibile, la scelta dei pallini deve generare il grafico di una funzione crescente e continua da destra, come ad esempio il seguente:



Con questa scelta, le risposte giuste sono le seguenti:

- $\Pr\{2 \leq X \leq 4\} = F(4) - F(2) = 0.5$.
- per il calcolo della media e della varianza, si osserva che la densità di probabilità di X è pari a 0.5 sugli intervalli $(2,3)$ e $(4,5)$, e vale zero altrove. Quindi

$$\mathbb{E}[X] = 0.5 \times \int_2^3 x\,dx + 0.5 \times \int_4^5 x\,dx = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0.5 \times \int_2^3 x^2\,dx + 0.5 \times \int_4^5 x^2\,dx = \frac{19}{6} + \frac{61}{6} = \frac{40}{3},$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{40}{3} - \frac{49}{4} = \frac{13}{12}.$$

□

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Primo Appello

Esercizio 4. Un venditore riceve un lotto di orologi. Sa che questo lotto può provenire o dalla fabbrica A o dalla fabbrica B. In media, la fabbrica A e la fabbrica B producono, rispettivamente, un orologio difettoso ogni 50 e uno ogni 100.

- Il venditore sta per testare un primo orologio. Qual è la probabilità che funzioni?
- Il venditore testa un primo orologio: funziona. Qual è la probabilità che il secondo orologio testato sia difettoso?

SOLUZIONE. Siano A, B gli eventi *"il lotto proviene dalla fabbrica A"* e *"il lotto proviene dalla fabbrica B"*. Ignorando la provenienza del lotto, ipotizziamo che $\Pr(A)=\Pr(B)=\frac{1}{2}$.

- La probabilità richiesta è quella dell'evento F_1 che il primo orologio prelevato dal lotto in arrivo funzioni. In base al teorema delle probabilità totali essa vale

$$\begin{aligned}\Pr(F_1) &= \Pr(F_1|A)\Pr(A) + \Pr(F_1|B)\Pr(B) \\ &= \Pr(F_1|A)\cdot\tfrac{1}{2} + \Pr(F_1|B)\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{49}{50}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{99}{100}\cdot\tfrac{1}{2} = 0.985\,.\end{aligned}$$

- L'evento per cui il *secondo orologio è difettoso* è indicato con D_2 e ci interessa calcolare la probabilità condizionata

$$\Pr(D_2|F_1) = \frac{\Pr(F_1 \cap D_2)}{\Pr(F_1)}\,.$$

Per quanto sopra, il denominatore vale 0.985. Al numeratore, si ha

$$\begin{aligned}\Pr(F_1 \cap D_2) &= \Pr(F_1 \cap D_2|A)\Pr(A) + \Pr(F_1 \cap D_2|B)\Pr(B) \\ &= \Pr(F_1 \cap D_2|A)\cdot\tfrac{1}{2} + \Pr(F_1 \cap D_2|B)\cdot\tfrac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Qui, il valore delle probabilità condizionate dipende dalle ipotesi. Ipotizzando una seconda estrazione senza reinserimento, detto N il numero di orologi del lotto, si ha

$$\Pr(F_1 \cap D_2|A) = \tfrac{49}{50}\cdot\tfrac{\frac{1}{50}N}{N-1} \qquad \Pr(F_1 \cap D_2|B) = \tfrac{99}{100}\cdot\tfrac{\frac{1}{100}N}{N-1}\,,$$

mentre, ipotizzando che avvenga con reinserimento, si ha

$$\Pr(F_1 \cap D_2|A) = \tfrac{49}{50}\cdot\tfrac{1}{50} \qquad \Pr(F_1 \cap D_2|B) = \tfrac{99}{100}\cdot\tfrac{1}{100}\,.$$

Quindi, con la seconda ipotesi la risposta è 0.01475 e con la prima è $0.01475\cdot\frac{N}{N-1}$. □

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: ______________

Calcolo delle probabilità - Primo Appello

Esercizio 5. Un'urna contiene 1 pallina verde, 1 pallina bianca e 1 pallina rossa. Se ne estraggono $n \geq 3$ palline consecutivamente, con reinserimento.

- Qual è la probabilità di estrarre almeno una pallina di ogni colore?
- Qual è la probabilità che la prima e l'ultima siano dello stesso colore?

Soluzione. Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ indichiamo V_i, B_i e R_i, rispettivamente, gli eventi

$$\{\text{l'}i\text{-esima estratta è verde}\}, \{\text{l'}i\text{-esima estratta è bianca}\}, \{\text{l'}i\text{-esima estratta è rossa}\}.$$

- L'evento complementare a quello che ci interessa è

$$\begin{aligned}\{\text{almeno una di ogni colore}\}^c &= \{\text{mai verdi}\} \cup \{\text{mai bianche}\} \cup \{\text{mai rosse}\} \\ &= (V_1^c \cap \ldots \cap V_n^c) \cup (B_1^c \cap \ldots \cap B_n^c) \cup (R_1^c \cap \ldots \cap R_n^c) =: E \cup F \cup G\,.\end{aligned}$$

  - Essendo estrazioni indipendenti, $G = R_1^c \cap \ldots \cap R_n^c$ si verifica con probabilità

  $$\Pr(G) = \Pr(R_1^c) \cdot \ldots \cdot \Pr(R_n^c) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

  e tale è anche la probabilità di $F = B_1^c \cap \ldots \cap B_n^c$ e di $E = V_1^c \cap \ldots \cap V_n^c$.
  - Poiché $E \cap F = R_1 \cap \ldots \cap R_n$, per indipendenza si ha

  $$\Pr(E \cap F) = \Pr(R_1) \cdot \ldots \cdot \Pr(R_n) = 3^{-n}\,,$$

  e altrettanta è la probabilità di $F \cap G$ e $E \cap G$.
  - Poiché $E \cap F \cap G = \varnothing$, tale evento ha probabilità nulla.

  Per la formula di inclusione-esclusione, dunque, l'evento $\{\text{almeno una di ogni colore}\}^c$ ha probabilità

$$\begin{aligned}\Pr(E \cup F \cup G) &= \Pr(E) + \Pr(F) + \Pr(G) \\ &\qquad - \Pr(E \cap F) - \Pr(E \cap G) - \Pr(F \cap G) + \Pr(E \cap F \cap G) \\ &= 3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^n - 3 \cdot 3^{-n} + 0 = (2^n - 1)3^{1-n}\,,\end{aligned}$$

  e la probabilità di estrarre una pallina di ogni colore è quindi $1 - (2^n - 1)3^{1-n}$.

- Esistono 3 modi di scegliere un colore in comune fra la prima e l'ultima; per ciascuno, esistono 3^{n-2} esiti per le $n-2$ estrazioni intermedie. In totale i casi favorevoli sono dunque 3^{n-1}. Essendoci 3^n esiti possibili in tutto, la probabilità richiesta è $1/3$. $\square$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Primo Appello

Esercizio 6. Una fabbrica ogni giorno produce $n = 10$ componenti per strumenti medici di precisione. Ogni componente ha una probabilità $p = 0.05$ di essere difettoso, indipendentemente dagli altri. Per la riparazione dei componenti difettosi, la fabbrica si rivolge a un fornitore di servizi esterno: il costo per riparare un singolo componente difettoso è di $a = 20$ euro; inoltre, c'è una commissione fissa di $b = 30$ euro che la fabbrica deve pagare ogni giorno, indipendentemente dal numero di componenti difettosi.

- Che distribuzione segue il numero X di componenti difettosi prodotti in un giorno?
- Qual è la media del costo totale atteso?

Soluzione.

- Per definizione, X è distribuita come una binomiale di parametri 10 e 0.05, cioè

$$\Pr(X = k) = \binom{10}{k} 0.05^k 0.95^{10-k}, \qquad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, 10\}.$$

- Poiché $X \sim \mathrm{Bin}(10, 0.05)$, si ha $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot 0.05 = 0.5$. Dunque, per linearità,

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b = 20 \cdot 0.5 + 30 = 40$$

è il costo totale atteso. $\square$