Algebra

Alessandro D'Andrea

33. Basi e coordinate in spazi vettoriali qualsiasi

Richiami

- Il concetto di base è definito in qualsiasi spazio vettoriale, non necessariamente in K^n
- Le basi servono a fornire coordinate di ogni vettore
- Se ogni vettore può essere individuate dalle sue coordinate, dovremmo essere in grado di descrivere le applicazioni lineari per mezzo di matrici
- Oggi: **Un esempio di applicazione lineare tra spazi vettoriali diversi da K^n**
- **Come si può associare una matrice a un'applicazione lineare in una situazione più generale di quella finora trattata**

Matrici in un nuovo contesto

La maggior parte degli esercizi visti finora vive negli spazi vettoriali K^n. Abbiamo visto singoli esempi di altri spazi vettoriali.

In questa lezione vi mostro un esempio di natura diversa, e vi racconto le difficoltà che si trovano nel descrivere un'applicazione lineare per mezzo di matrici.

Nelle prossime lezioni daremo delle istruzioni precise per associare matrici ad applicazioni lineari, e vedremo come il risultato dipende dalle scelte fatte. Affronteremo poi il cosiddetto *problema della diagonalizzabilità*.

Uno sp. vettoriale di dim. infinita

Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}$ delle successioni a valori reali. Il tipico elemento di $\mathcal{S}$ è una successione $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, dove ogni a_i è un elemento di $\mathbb{R}$.

Gli elementi a_i possono non seguire alcuna legge particolare, se non quella di essere i coefficienti di **a**.

L'insieme $\mathcal{S}$ possiede una naturale nozione di somma coefficiente per coefficiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \\
\mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots) \\
\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)
\end{aligned}$$

sappiamo anche come moltiplicare un elemento di $\mathcal{S}$ per un numero reale

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n, \dots)$$

Un operatore lineare su $\mathcal{S}$

Con queste operazioni, $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale reale, di dimensione infinita.

Possiamo considerare l'operatore di shift $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definito da

$$T(\mathbf{a}) = (a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots).$$

Ad esempio,

$$T(1, 2, 3, \dots) = (2, 3, 4, \dots).$$

Si vede, facilmente, che T è un'applicazione lineare. E' preferibile non cercare di associare una matrice ad un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione infinita.

Successioni di Fibonacci

Consideriamo ora il sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\mathcal{S}$ composto da tutte quelle successioni $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ tali che

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 \\ a_4 &= a_3 + a_2 \\ \dots \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

Appartengono, ad esempio, a $\mathcal{F}$ le successioni

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ &(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots) \\ &(3, -2, 1, -1, 0, -1, -1, \dots) \end{aligned}$$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ è un sottospazio

E' facile osservare che $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}$:

- $(0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}$;
- se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}$, allora $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{F}$;
  - Se $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ e $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$, allora $a_{n+2} + b_{n+2} = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n)$
- se $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; allora $\lambda\mathbf{a} \in \mathcal{F}$.
  - Se $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, allora $\lambda a_{n+2} = \lambda a_{n+1} + \lambda a_n$

Che dimensione ha $\mathcal{F}$?

Informalmente, la dimensione di uno spazio vettoriale è il numero minimo di parametri necessari a descriverne gli elementi (attraverso una parametrizzazione lineare).

In questo caso, se conosciamo i primi due coefficienti a_1, a_2 di un elemento $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$, conosciamo anche tutti gli altri!

Una base di $\mathcal{F}$

Se vogliamo fare le cose per bene, dobbiamo esibire una base di $\mathcal{F}$.

Le successioni

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$$
$$\mathbf{v} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

costituiscono una base di $\mathcal{F}$. In effetti:

- sono linearmente indipendenti;
  - Se $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora i suoi primi due coefficienti α, β devono annullarsi
- generano $\mathcal{F}$.
  - Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots) \in \mathcal{F}$, allora $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v}$ è anch'esso un elemento di $\mathcal{F}$, e i suoi primi due coefficienti coincidono con quelli di $\mathbf{a}$. Ma allora $\mathbf{a} = a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v}$.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{F}$ sembra di dimensione infinita, ma in realtà ha dimensione 2.

Qual è la matrice di T?

L'applicazione lineare di shift $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ manda elementi di $\mathcal{F}$ in elementi di $\mathcal{F}$. La restrizione di T a $\mathcal{F}$ è un'applicazione lineare da uno spazio di dimensione 2 in se stesso.

Come faccio a descriverla con una matrice?

Ricordate che nel caso di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la matrice associata ad F si ottiene scrivendo per colonna i valori $F(1,0)$ e $F(0,1)$.

- Perché proprio $F(1,0)$ e $F(0,1)$?
- Se i valori non sono elementi di $\mathbb{R}^n$, ma di uno spazio vettoriale qualsiasi, che scrivo nelle colonne?

Dobbiamo scegliere delle basi!

- Perché proprio $F(1,0)$ e $F(0,1)$?
- Se i valori non sono elementi di $\mathbb{R}^n$, ma di uno spazio vettoriale qualsiasi, che scrivo nelle colonne?

Scegliamo $(1,0)$ e $(0,1)$ perché è una base di $\mathbb{R}^2$ su cui è facile mettersi d'accordo. Potremmo scegliere una qualsiasi altra base e, a patto di comunicare quale base si sia scelta, conoscere i valori che F assume sugli elementi di tale base permetterebbe comunque di ricostruire F su ogni altro elemento.

Se i valori appartengono a uno spazio vettoriale che non è un $\mathbb{R}^n$, ho bisogno di una procedura che traduca gli elementi dello spazio vettoriale in termini numerici. Conosciamo già una tale procedura: è quella di calcolare le coordinate di un vettore in una base prescritta.

Ingredienti

In conclusione, per scrivere la matrice associata ad $F : U \to V$ lineare, abbiamo bisogno di:

- una base di U, sulla quale calcolare l'azione di F
- una base di V, per tradurre i vettori di V in termini numerici

Scriviamo per bene le istruzioni. Abbiamo

- due spazi vettoriali di dimensione finita U, V
- un'applicazione lineare $F : U \to V$
- una base $u_1, \ldots, u_m$ di U
- una base $v_1, \ldots, v_n$ di V

Ricetta

Ingredienti:

- due spazi vettoriali di dimensione finita U, V
- un'applicazione lineare $F : U \to V$
- una base $u_1, \ldots, u_m$ di U
- una base $v_1, \ldots, v_n$ di V

Produciamo una matrice nel seguente modo:

- Calcoliamo $F(u_1), \ldots, F(u_m)$, che sono elementi di V.
- Esprimiamo ciascun $F(u_j) \in V$ come combinazione lineare della base $v_1, \ldots, v_n$ dello spazio vettoriale V:
$$F(u_j) = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{nj}v_n.$$
- Scriviamo i numeri $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$ nella j-esima colonna della matrice.

In questo modo, otteniamo una matrice $n \times m$.

Matrice associata ad F

La matrice si indica con il simbolo $[F]_{v_1,\dots,v_n}^{u_1,\dots,u_m}$ per ricordare la sua dipendenza dalla scelta delle due basi. Se abbiamo dato un nome alle due basi, ad esempio se

$$\mathcal{B} : u_1, \dots, u_m$$
$$\mathcal{C} : v_1, \dots, v_n$$

possiamo allora usare la notazione più snella $[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Facciamo un esempio: se $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{E}_m : (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$
$$\mathcal{E}_n : (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

sono basi diverse!

allora la matrice $n \times m$ $\qquad [F]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} = [F]$
è la matrice che abbiamo finora associato all'applicazione lineare F!!!

Un esempio

Vediamo un esempio esplicito, e torniamo all'applicazione di shift T definita sullo spazio vettoriale $\mathcal{F}$ una cui base era data da

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$$
$$\mathbf{v} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Si vede subito che $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, mentre $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Per associare a $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ una matrice, dobbiamo scegliere una base dello spazio vettoriale di partenza e una dello spazio vettoriale di arrivo. Si tratta dello stesso spazio vettoriale, e siamo autorizzati a scegliere la stessa base $\mathcal{B} : \mathbf{u}, \mathbf{v}$. Allora

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Impareremo, nelle prossime lezioni, a comprendere e utilizzare anche queste matrici.