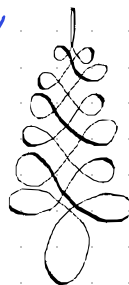
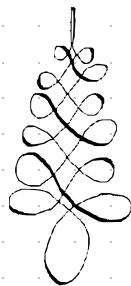


CALCOLO delle PROBABILITÀ

Insegnamento: Calcolo delle Probabilità

Corso di Laurea in Informatica erogato
preziosamente a distanza a.a. 2024/25



DOCENTE

Giovanni Frauzina

DOCENTE

_____ Giovanni Frauzina

TUTOR (WEBINAR)

_____ Giovanni Frauzina

DOCENTE

_____ Giovanni Frauzina

TUTOR (WEBINAR)

_____ Giovanni Frauzina

- LEZIONI (24 argomenti) : videoregistrate (Marco Isopi)

DOCENTE

Giovanni Frauzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Frauzina

- LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)
- FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Hostle)

DOCENTE

Giovanni Franzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Franzina

- LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)
- FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Hostle)
- WEBINAR (4+4): su Webex (Giovanni Franzina)

DOCENTE

Giovanni Franzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Franzina

- LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)
- FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Moodle)
- WEBINAR (4+4): su Webex (Giovanni Franzina)
- PROGRAMMA (Syllabus): su Moodle (Laura Di Giacomo)

DOCENTE

Giovanni Franzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Franzina

- LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)
- FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Moodle)
- WEBINAR (4+4): su Webex (Giovanni Franzina)
- PROGRAMMA (Syllabus): su Moodle (cfr. Syllabus)
- CONTATTI (email): giovanni.franzina@unitecmasapienza.it

DOCENTE

Giovanni Franzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Franzina

LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)

FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Moodle)

WEBINAR (4+4): su Webex (Giovanni Franzina)

PROGRAMMA (Syllabus): su Moodle (cfr. Syllabus)

CONTATTI (email): giovanni.franzina@unitecmasapienza.it

Materiale didattico:

• lezioni & webinar

• esercizi su Moodle

ESERCITARI

DOCENTE

Giovanni Franzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Franzina

- LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)
- FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Moodle)
- WEBINAR (4+4): su Webex (Giovanni Franzina)
- PROGRAMMA (Syllabus): su Moodle (cfr. Syllabus)
- CONTATTI (email): giovanni.franzina@unitecmasapienza.it

Materiale didattico:

- lezioni & webinar
- esercizi su Moodle
- Testi (esempio: Dai Pra - Caracciolo)

DOCENTE

Giovanni Franzina

TUTOR (WEBINAR)

Giovanni Franzina

- LEZIONI (24 argomenti): videoregistrate (Marco Isopi)
- FORUM (aperto agli studenti): già disponibile (Moodle)
- WEBINAR (4+4): su Webex (Giovanni Franzina)
- PROGRAMMA (Syllabus): su Moodle (cfr. Syllabus)
- CONTATTI (email): giovanni.franzina@unitepmasapienza.it

Materiale didattico:

- lezioni & webinar
- esercizi su Moodle
- Testi (esempio: Di Fra - Caracciolo)

COMBINATORIA

- Contare le permutazioni su k oggetti
- Contare i sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$.
- Contare i sottoinsiemi di h elementi di $\{1, \dots, k\}$.

COMBINATORIA

- Contare le funzioni $f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$
- Contare le funzioni INIETTIVE $f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

COMBINATORIA

- Contare le relazioni su $\{1, \dots, n\}$
- Contare quelle riflessive, quelle simmetriche, quelle riflessive e simmetriche.

COMBINATORIA

- Vengono eletti 2 rappresentanti per Scienze e 3 per Lettere. L'elettorato passivo consiste di 5 studenti di Scienze e 7 di Lettere. Quanti sono gli esiti possibili delle elezioni?
- Una classe di probabilità è formata da 6 studenti di informatica e 4 di ingegneria. All'esame, ciascuno ottiene un punteggio proprio, diverso da tutti gli altri.
 - Quante sono le classifiche possibili?
 - Se informatici e ingegneri si dividono a formare le rispettive due classifiche, quante sono invece le possibilità?

COMBINATORIA

- Contare le soluzioni intere positive dell'equazione $x + y = 5$.
- Gestendo un portafogli del valore di 20 kEur si decide di scegliere 4 investimenti in modo che ciascuno abbia un controvalore in unità di migliaia di €. Quante sono le strategie possibili? Quante diventano se non tutto il capitale deve essere investito?

COMBINATORIA

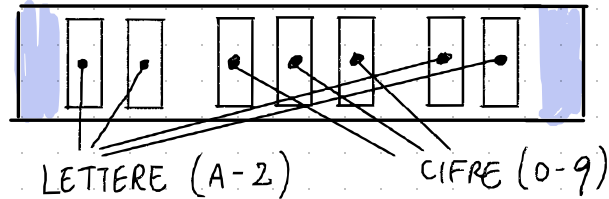
- Sia $k \in \{2, \dots, n-1\}$. Quante coppie di numeri (distinti) estratti da $\{1, \dots, n\}$ esistono tali che un numero della coppia sia $< k$ e l'altro sia $> k$?
- In quanti modi può essere mescolato un mazzo di m carte mantenendo consecutive la prima e la seconda carta?

permutare le $m-2$ carte rimanenti, cioè $(m-2)!$

Quindi i modi possibili in totale sono $(m-1) \cdot (m-2)! = (m-1)!$

ESTRAZIONI

- Quante sono le targhe automobilistiche possibili?



- In quante nessuna lettera compare più di una volta?
- Quanti sono gli anagrammi di ANAGRAMMA?
- Si ordina un insieme di n antenne delle quali m sono difettose, in modo tale che non ci siano mai due antenne difettose consecutive. In quanti modi si può farlo?

SPAZI CAMPIONARI EQUIPROBABILI

- Un'urna contiene 10 palline di cui 5 nere, 3 rosse e 2 blu. Si estraggono 5 palline senza reinserimento. Con quale probabilità 3 palline hanno lo stesso colore e le altre due sono dei due colori rimanenti?
- Tornando a casa al buio si cerca la chiave del portone da un mazzo di n chiavi. Qual è la probabilità di aprire la porta al k -esimo tentativo, ipotizzando che ogni volta si peschi la chiave a caso (senza scartare quelle dei tentativi precedenti)?

SPAZI CAMPIONARI EQUIPROBABILI

- Un cassetto contiene 10 calzini (singoli) di cui 4 verdi, 2 gialli, 2 rosa e 1 blu. Al buio vengono estratti 3 calzini. Qual è la probabilità
 - di estrarre un paio di calzini gialli?
 - di estrarre un paio di calzini rosa?
 - di estrarre un paio di calzini blu?
 - di estrarre un paio di calzini verdi?
 - di estrarre un paio di calzini non spaiati?
- Da un mazzo di 52 carte da poker si estraggono tre carte. Con quale probabilità
 - fra le tre carte c'è almeno un asso
 - le tre carte sono dello stesso seme
 - non si formi nessuna coppia (due carte dello stesso numero/figura).

SPAZI CAMPIONARI EQUIPROBABILI

- Un mazzo di 52 carte da Poker è mescolato e diviso in due mazzetti da 26 carte ciascuno. Qual è la probabilità che il primo mazzetto abbia lo stesso numero di carte nere (\spadesuit, \clubsuit) e rosse (\heartsuit, \diamondsuit)?
- Un giocatore di Poker riceve 5 carte estratte da un mazzo da 52. Con quale probabilità il giocatore si è visto servito:
 - una coppia
 - una doppia coppia
 - un tris
 - una scala
 - un full
 - un poker

SPAZI CAMPIONARI EQUIPROBABILI

- Una lotteria emette n biglietti dei quali k sono vincenti. Un giocatore ne acquista m . Con quale probabilità vince?
- Si lanciano 6 dadi. Con quale probabilità tutti e 6 i dadi fanno uscire un numero dispari?
- Al centro di una tavolata di k persone, una scatola contiene k paia di posate (forchetta e coltello). Un cameriere estrae alla cieca le posate, distribuendole a due a due a tutti e k i commensali. Qual è la probabilità che ogni commensale riceva forchetta e coltello?

SPAZI CAMPIONARI EQUIPROBABILI

- Un'urna contiene n palline di cui r rosse e b blu. Supponiamo che $b < r$.
 - Descrivere lo spazio campionario relativo allo scenario di k estrazioni successive senza reinmissione (con $k \leq b$)
 - Descrivere lo spazio campionario relativo allo scenario di k estrazioni successive con reinmissione (con $k \leq b$)
 - Per $1 \leq m \leq k$, calcolare nei due scenari la probabilità che le prime m palline siano rosse e la $(m+1)$ -esima sia blu.

SPAZI CAMPIONARI EQUIPROBABILI

- In una stanza ci sono k persone. Quanto deve essere grande k affinché la probabilità che almeno due compiano gli anni lo stesso giorno superi il 50%? E quanto deve essere grande affinché superi il 95%? Per semplicità, ipotizziamo esistano $N=365$ date di compleanno possibili (ignorando gli anni bisestili)

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

- Siano A, B, C eventi. Esprimere insiemeisticamente
 - "si verifica solo A "
 - "sia A che B si verificano, ma non C "
 - "almeno uno fra gli eventi A, B, C si verifica"
 - "si verificano almeno due degli eventi A, B, C "
 - "nessuno dei tre eventi A, B, C avviene"
 - "avviene al più uno fra i tre eventi A, B, C "
 - "si verificano al massimo due degli eventi A, B, C "
 - "esattamente due degli eventi A, B, C hanno luogo"

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

- Semplificare le espressioni insiemistiche

$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \quad (\text{con } B^c \text{ si indica il complementare})$$

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$$

$$(A \cup B) \cap (B \cup C)$$

- Si ripete un esperimento aleatorio per N volte. Per ogni evento E nello spazio dei campioni Ω si indica $m(E)$ il numero di volte che l'evento E si è verificato, e si pone

$$f(E) = \frac{m(E)}{N}.$$

Dimostrare che f soddisfa gli assiomi di probabilità.

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

- Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che la somma sia 9?
- Si estraggono a caso due palline da un'urna che ne contiene 7 arancioni e 4 verdi. Qual è la probabilità che le palline estratte siano dello stesso colore?
- Una classe di probabilità con 20 studenti di informatica e 20 di ingegneria viene divisa in coppie. Qual è la probabilità che ogni coppia consista di due studenti iscritti allo stesso corso di laurea?

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

- Siano A, B eventi di probabilità, rispettivamente, pari almeno a $0,9$ e $0,8$. Dimostrare che si verificano entrambi con probabilità almeno del 70% .
- Sia f_n il numero di modi di lanciare una moneta in modo che non esca mai testa per due volte consecutive. Mostrare che $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, per $n \geq 2$, dove $f_0 = 1$ e $f_1 = 2$. Esprimere in termini di f_n la Prob che dopo n lanci non sia mai uscito testa per due volte consecutive.

CONDIZIONAMENTI & INDIPENDENZA

- Si lancia per due volte consecutive una moneta non truccata. Descrivere matematicamente lo spazio campionario. Dire qual è la probabilità che esca entrambe le volte testa condizionata al fatto che esca testa al primo lancio.
- Un'urna contiene 20 palline di cui 10 celesti, 5 verdi e 5 arancioni. Una persona ne estrae una e ci informa che non è verde. Qual è la probabilità che sia celeste?

CONDIZIONAMENTI & INDIPENDENZA

- Si effettuano due estrazioni successive, con reinserimento, da un'urna contenente 5 palline rosse e 5 palline nere. Qual è la probabilità di ottenere due palline rosse, condizionata al fatto che almeno una delle due sia rossa?
- Quattro giocatori (detti Alice, Bob, Charlie, Donald) giocano la prima mano di scopone scientifico; hanno ricevuto 10 carte ciascuno da un mazzo di 40, e le 4 rimanenti sono visibili sul tavolo. Alice e Charlie, barando, comunicano fra di loro stabilendo di avere i 7 di spade e denari. Qual è la probabilità che Bob abbia i 7 di coppe e bastoni?

CONDIZIONAMENTI & INDIPENDENZA

- Uno studente valuta se seguire un corso di architettura e uno di geometria discreta. La sua stima della probabilità di superare l'esame è $\frac{1}{2}$ nel caso di architettura e solo $\frac{1}{3}$ per l'altro corso. Se decide quale corso seguire lanciando una moneta, qual è la probabilità che al termine del semestre abbia superato l'esame di geometria discreta?
- Da un'urna contenente 12 palline verdi e 8 arancioni si effettuano due estrazioni successive, senza reimmissione. Supponendo che, a ogni estrazione, ogni singola pallina può essere estratta con uguale probabilità, qual è la probabilità che entrambe le palline siano verdi?

CONDIZIONAMENTI & INDIPENDENZA

- Una confezione contiene 20 dispositivi, dei quali 8 sono guasti (non funzionano per nulla), 7 sono difettosi (inizialmente funzionano ma poi si guastano) e 5 sono funzionanti. Qual è la probabilità che un dispositivo estratto dalla confezione funzioni correttamente se inizialmente funziona?
- L'insegnante di matematica della 3^aH annuncia di aver chiesto il trasferimento a un'altra scuola comunicando anche che, in caso di risposta negativa, si avvarrà comunque della sua facoltà di farsi assegnare provvisoriamente a un altro istituto. La domanda di trasferimento sarà accettata con una probabilità del 75%. In quel caso, l'insegnante inviato dal Ministero potrebbe a sua volta richiedere l'assegnazione provvisoria ad altra scuola, con probabilità del 50%. Qual è la probabilità che la 3^aH rimanga senza insegnante di matematica?

