| V/F | Es. 1 | Es. 2 | Voto |
|---|---|---|---|
| /12 | /10 | /10 | /32 |

*Sapienza* Università di Roma, Corso di Laurea in Informatica - canale telematico (a.a. 2022/2023)

**Prova scritta di Calcolo Differenziale - 10 Febbraio 2023**

**Nome e Cognome (in stampatello):**

**Numero matricola:**

**NOTA BENE:** devono essere riconsegnati soltanto i fogli contenenti i testi degli esercizi. È vietato usare testi, appunti e strumenti elettronici di ogni tipo. Ogni affermazione negli esercizi a risposta aperta deve essere motivata dettagliatamente! È possibile utilizzare anche il retro dei fogli per inserire i calcoli.
Il tempo a disposizione per la prova è di 2h.

## Domande V/F

NOTA BENE: +1 risposta esatta, -0.5 risposta sbagliata, 0 risposta assente

**1.** Sia data la successione numerica reale

$$a_n = (-1)^n \frac{3n^2}{n+1}$$

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| **1A** | $a_n$ è infinitesima | V | **F** |
| **1B** | la successione $b_n = (-1)^n a_n$ non ammette limite finito per $n \longrightarrow \infty$ | **V** | F |
| **1C** | la successione $c_n = (a_n)^2$ è limitata | V | **F** |
| **1D** | $a_n$ è decrescente | V | **F** |

**2.** Sia data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| **2A** | $f$ ammette asintoti orizzontali | **V** | F |
| **2B** | $f$ non ammette punti né di massimo né di minimo relativi | **V** | F |
| **2C** | $f$ è decrescente nel suo dominio | V | **F** |
| **2D** | l'insieme immagine di $f$ è tutto $\mathbb{R}$ | V | **F** |

**3.** Sia

$$f(x) = x^4 - 4x - 1.$$

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| **3A** | L'insieme immagine di $f$ è l'insieme $[-1, +\infty)$. | V | **F** |
| **3B** | La funzione $f$ è invertibile | V | **F** |
| **3C** | La funzione $f$ ha esattamente tre zeri reali. | V | **F** |
| **3D** | $f$ è convessa in tutto il suo dominio | **V** | F |

**Esercizio 1** Sia $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 1 & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ be^{x-1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

dove $a$ e $b$ sono parametri reali.

(1) Calcolare i valori di $a$ e $b$ affinché $f$ sia continua e derivabile.

*Deve essere $a = b$, imponendo che il limite destro e sinistro di $f$ intorno ad $x = 1$ coincidano. Aggiungendo la condizione che derivata destra e sinistra di $f$ in $x = 1$ coincidano, si trova $a = b = 1$.*

**Si ponga nel resto dell'esercizio $a = b = 1$.**

(2) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti e relativi di $f$.
*Il pezzo esponenziale è sempre strettamente crescente. Il ramo polinomiale (una parabola) ammette il suo minimo in $x = 1/2$. Allora $f$ ha un minimo locale e assoluto in $x = \frac{1}{2}$ e due massimi locali negli estremi del dominio. Il massimo assoluto è $f(-2)$.*

(3) Calcolare l'insieme immagine di $f$.
*Continuando con l'analisi avviata al punto precedente si ha che $Imf = [\frac{3}{4}, 7]$.*

(4) Quanti zeri ammette $f$?
*Il minimo assoluto di $f$ è assunto per $x = \frac{1}{2}$ ed è positivo. Allora $f$ non ammette zeri.*

(5) Calcolare il polinomio di MacLaurin di $f$ di grado 2.
*Siccome 0 cade nel ramo parabolico e lì $f$ è già di tipo polinomiale, si ha che $P(x) = x^2 - x + 1$*

**Esercizio 2**
Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$$

In particolare: determinarne il dominio, eventuali simmetrie, studiarne il segno, studiare i limiti agli estremi del dominio, determinare eventuali asintoti, studiarne la continuità, derivabilità e la monotonia, determinarne eventuali punti di massimo e minimo (locali e/o assoluti). <u>Si tralasci lo studio della derivata seconda.</u> Tracciare un grafico qualitativo di $f$.

*La funzione ha come derivata prima*

$$f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$$

*La funzione è continua e derivabile nel suo dominio che è l'insieme* $(0,e) \cup (e,+\infty)$. *La funzione non ha massimi relativi né assoluti, è sempre crescente negli intervalli su cui è definita (ma non globalmente crescente nel suo dominio). A destra di* $x = 0$ *la funzione tende a* $-1$ *con tangente verticale. Ha l'asintoto orizzontale* $y = 0$ *è l'asintoto verticale* $x = e$.