UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

22. Spazi numerabili.

$\cancel{|S| < \infty}$ S è numerabile

$S \longleftrightarrow \mathbb{N}$ $(S = \mathbb{N})$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underline{P(A \cap B)}$

$|A| = +\infty$

$A_1, A_2, \ldots \subseteq S$

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

se $|S|$ ci sono al massimo $2^{|S|}$ insiemi distinti in $A_1, A_2 \ldots$

$A_1, A_2 \dots\dots$ $\quad (A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j)$

- successione di insiemi si dice <u>crescente</u> se

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

- successione di insiemi si dice <u>decrescente</u>

se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots\dots$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

continuità della probabilità

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

vale se $A_n \nearrow A$ oppure $A_n \searrow A$

f è continua in x se $\forall\, x_n \to x$

$$f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

$A_1, A_2 \ldots\ldots \qquad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad B_n$ succ. crescente

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

indipendenza di eventi

$A_1, A_2 \ldots\ldots$ sono indip. se tutte le sottofamiglie finite sono famiglie di eventi indipendenti ovvero

se $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) =$

$= P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots P(A_{i_k})$

$\forall$ famiglia <u>finita</u> di indici $i_1 \ldots i_k$

$C_1, C_2 \ldots$ indipendenti

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) ; \quad D_n := \bigcap_{i=1}^{n} C_i \quad D_n \searrow$$

$$D_{n+1} \subseteq D_n$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} D_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(D_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} P(C_i) =$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} P(C_n)$$

Probabilità totale

Partizione di S

$A_1, A_2 \ldots\ldots$ è una partizione di S

se $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$ e

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B \mid A_n) P(A_n)$$

Valore atteso

$$E(X) = \sum_x x P(X=x)$$

le serie non sempre convergono

- variabili aleatorie positive

$P(X \geq 0) = 1$ $\quad \sum_x x P(X=x)$ è una

serie a termini positivi

1) converge $\quad$ 2) $= +\infty$

se X è positivo

$E(X)$ è un numero

$E(X) = +\infty$

$X: \quad P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)} \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = 1$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

$$P(X=k) = c\,\frac{1}{|k|\cdot|k+1|+1} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$c = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|k(k+1)|+1}\right)^{-1}$$

$$E(X) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,\frac{1}{|k|\cdot|k+1|+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{1}{|k(k+1)|+1} = +\infty; \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} k\,\frac{1}{|k(k+1)|+1} = -\infty$$

$E(X)$ non esiste

$$X^+ = \max(X, 0) \,; \quad X^- = -\min(X, 0)$$

$$X = X^+ - X^- \qquad |X| = X^+ + X^-$$

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$$

1) $E(X^+)$ e $E(X^-) < \infty$

$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$

2) $E(X^+) = +\infty$, $E(X^-) < \infty$

$E(X) = +\infty$

3) $E(X^+) < \infty$, $E(X^-) = +\infty$

$E(X) = -\infty$

4) $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$

$E(X)$ non esiste

Attesa condizionata

se esiste $E(X)$ allora

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X|A_n)P(A_n)$$

dove $\{A_n\}$ è una partizione

$$E(X \mid Y=y)$$

$$E(X) = \sum_y E(X \mid Y=y) P(Y=y)$$

anche se $E(X \mid Y=y) < \infty \quad \forall y$

$E(X)$ potrebbe comunque essere $+\infty$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

se le attese esistono

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)$$

non è sempre vera

se le X_i sono tutte positive
allora possiamo scambiare
E e Σ anche per somme
infinite
<u>in generale</u> NON possiamo