Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

Esercizio 1 [punti: 6]. Durante un esame, il docente seleziona a caso uno studente verificando che non stia usando il cellulare. Le selezioni successive sono indipendenti, e finché non viene scoperta un'irregolarità gli studenti non vengono rimossi dal gruppo. Se per uno studente scelto a caso la probabilità che stia usando il cellulare è $p = 0.2$, quante ripetizioni n della verifica servono affinché sia minore di 0.1 la probabilità che occorrano n controlli per riscontrare la prima irregolarità?

Soluzione. L'evento di cui va calcolata in funzione di n la probabilità è $E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap \mathscr{C}(E_n)$ dove per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ abbiamo indicato con E_i l'evento "non vengono riscontrate regolarità" e $\mathscr{C}(E_n)$ è il complementare di E_n. Poiché i controlli sono indipendenti, tale evento ha probabilità

$$\mathbb{P}(E_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(E_{n-1}) \cdot \big(1 - \mathbb{P}(E_n)\big) = (1-p)^{n-1} p \,.$$

Affinché tale probabilità sia < 0.1 occorre che

$$n - 1 > \frac{-\log(10p)}{\log(1-p)} = \frac{\log(0.5)}{\log(0.8)} = 3.1062\ldots \qquad \text{perché } p = 0.2,$$

e questo avviene se $n \geq 5$. $\square$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

Esercizio 2 [punti: 6]. Dati due eventi A, B in uno spazio di probabilità $(\mathcal{S}, \mathbb{P})$, supponiamo che

- con probabilità 0.55 si verifichi almeno uno dei due;
- con probabilità 0.05 si verifichino entrambi;
- $\mathbb{P}(A) = 5 \cdot \mathbb{P}(B)$.

Calcolare le probabilità $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$. Usare il risultato per dire se gli eventi A, B sono indipendenti.

Soluzione. Per ipotesi

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = 0.55 + 0.5 = 0.6$$

e

$$\mathbb{P}(A) - 5 \cdot \mathbb{P}(B) = 0\,.$$

Quindi, per sottrazione, $\mathbb{P}(B) = 0.1$.

Di conseguenza, gli eventi A e B hanno probabilità, rispettivamente, 0.5 e 0.1. Inoltre, essi sono indipendenti perché

$$0.5 \cdot 0.1 = 0.05 = \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

□

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: ______________

Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

Esercizio 3 [punti: 8]. Lanciando una moneta, guadagno 2€ con "testa" e perdo 1€ con "croce". Supporre che la moneta non sia truccata e indicare con X il guadagno in un lancio.

- **[2 pt]** Determinare densità discreta p_X, valor medio $\mathbb{E}[X]$ e varianza $\mathrm{Var}(X)$ di X.
- **[2 pt]** Date $X_1, \ldots, X_N \sim X$ indipendenti, determinare la varianza $\overline{\sigma}_N^2$ della media empirica

$$\overline{X}_N = \frac{X_1 + \ldots + X_N}{N}\,.$$

- **[4 pt]** Trovare N abbastanza grande affinché $0.40 < \overline{X}_N < 0.60$ con più del 75% di probabilità.

Soluzione.

- La v.a. X prende i due valori 2 e -1 con probabilità $p_X(2) = p_X(-1) = 0.5$. Il suo valor medio quindi è $\mathbb{E}[X] = (1/2) \cdot (2 - 1) = 0.5$ e, analogamente, si ha $\mathbb{E}[X^2] = 0.5(4 + 1) = 5/2$; quindi la varianza è $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 9/4$.
- Si ha

$$\overline{\sigma}_N^2 = \mathrm{Var}(\overline{X}_N) = \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_N)\,.$$

Poiché le $X_1, \ldots, X_N$ sono i.i.d. e distribuite come X,

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_N) = N\mathrm{Var}(X) = \frac{9}{4}N\,.$$

Quindi

$$\overline{\sigma}_N^2 = \frac{9}{4N}\,.$$

- Equivalentemente, cerchiamo una stima dal basso di N sotto la condizione che

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_N - 0.5| \geq 0.1) \leq \tfrac{1}{4}\,.$$

Il lato destro della disuguaglianza è $0.25 = 1/k^2$ per $k = 2$. L'evento $|\overline{X}_N - 0.5| \geq 0.1$ è più raro dell'evento $|\overline{X}_N - 0.5| \geq k\overline{\sigma}_N$ purché $k\overline{\sigma}_N \leq 0.1$ cioè

$$\frac{3}{2\sqrt{N}} = \overline{\sigma}_N \leq \frac{1}{10k} = \frac{5}{100}\,,$$

il che avviene per $N > 900$. In questi casi possiamo dunque dire che

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_N - 0.5| \geq 0.1) \leq \mathbb{P}(|\overline{X}_N - 0.5| \geq k\overline{\sigma}_N) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza è quella di Chebyshev. Quindi, se $N > 900$ allora $0.4 < \overline{X}_N < 0.6$ con più del 75% di probabilità. $\square$

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

Esercizio 4 [punti: 6]. In un'università, un corso di "sistemi complessi" è seguito da n studenti di Informatica ed n studenti di Fisica. Il docente seleziona a caso un gruppo di $3k$ studenti (con $3k \leq n$) per un progetto speciale. Ogni gruppo di $3k$ studenti ha uguale probabilità di essere scelto.

- **[2 pt]** Quanti sono i gruppi di $3k$ studenti che è possibile formare?
- **[2 pt]** Con che probabilità il gruppo selezionato contiene almeno uno studente di Fisica?
- **[2 pt]** Con che probabilità il gruppo contiene $2k$ studenti di Informatica e k di Fisica?

Soluzione.

- Per definizione di coefficiente binomiale, ce ne sono
$$\binom{2n}{3k} .$$
- Con probabilità
$$1 - \frac{\binom{n}{3k}}{\binom{2n}{3k}} .$$
- Ci sono $\binom{n}{2k}$ modi di scegliere i $2k$ informatici e $\binom{n}{k}$ modi di scegliere i k fisici. Essendo scelte indipendenti, la probabilità richiesta è
$$\frac{\binom{n}{2k} \cdot \binom{n}{k}}{\binom{2n}{3k}} .$$

□

Nome e Cognome: ______________________________ Matricola: _______________

Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

Esercizio 5 [punti: 6]. In una gara di cucina, è richiesto di preparare in un tempo assegnato un piatto scelto lanciando un dado a tre facce non truccato da un menu di tre ricette (M_1, M_2 e M_3). Dalle statistiche passate si conoscono le probabilità di completare il piatto entro il tempo limite (sono, rispettivamente, 0.2, 0.4 e 0.6). Sapendo che un concorrente ha completato il piatto entro il tempo limite, calcolare la probabilità che abbia seguito la ricetta M_1.

Soluzione.

Indichiamo con S l'evento in cui il tentativo di preparare il piatto scelto entro il tempo limite ha successo. Allora per ipotesi sappiamo che la probabilità condizionata $\mathbb{P}(S|M_1)$ vale $\frac{2}{10}$. Inoltre per il Teorema di Bayes

$$\mathbb{P}(M_1|S) = \frac{\mathbb{P}(S|M_1) \cdot \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\mathbb{P}(S)} .$$

Inoltre, dato che per ipotesi $\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(M_2) = \mathbb{P}(M_3) = \frac{1}{3}$, per il Teorema delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(S|M_2)\mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(S|M_3)\mathbb{P}(M_3) = \frac{0.2 + 0.4 + 0.6}{3} = \frac{12}{30} .$$

In conclusione la probabilità richiesta è $\mathbb{P}(M_1|S) = 1/6$. $\square$

Nome e Cognome: ____________________ Matricola: ____________

Calcolo delle probabilità - Secondo Appello

Esercizio 6 [8 punti]. Per ogni singola pratica gestita, una compagnia assicurativa effettua n controlli automatici indipendenti (su dati anagrafici, fatture, coperture, ...), ciascuno dei quali ha una probabilità p di riscontrare un errore, indipendentemente dagli altri. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di errori in una pratica scelta a caso e supporre che *il numero di errori rilevati, per ogni singola pratica, sia mediamente pari a* 1, cioè $\mathbb{E}[X] = 1$. Scegliere un modello probabilistico per X, e calcolare la probabilità $\mathbb{P}(X > 2)$ che ci siano più di 2 errori in una pratica scelta a caso,

- **[4 pt]** supponendo che ogni pratica sia sottoposta a $n = 20$ controlli;
- **[4 pt]** supponendo che il numero di controlli n sia ignoto.

Spiegare la scelta del modello probabilistico che si utilizza in ciascuno dei due casi.

Soluzione.

- Una binomiale $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ di parametri n e p può modellare il numero di successi in n ripetizioni indipendenti dell'esperimento bernoulliano in cui si ha successo se è riscontrato un errore durante il controllo, il che si verifica con probabilità p. Siccome in questo modo $\mathbb{E}[X] = np$ e per ipotesi questa quantità vale 1, abbiamo $p = 1/n = 0.05$. Così abbiamo che

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \bigg|_{p=0.05} = 0.0755...$$

- Poiché $\mathrm{Bin}(n, p) \to \mathrm{Poisson}(\lambda)$ se $np \sim \lambda$ per $n \to \infty$, la distribuzione di Poisson è un buon candidato per modellare il numero di successi in un numero grande di ripetizioni indipendenti di un esperimento Bernoulliano con probabilità di successo relativamente piccola. Inoltre se $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ allora $\mathbb{E}[X] = \lambda$ e noi sappiamo che il numero atteso di "successi" è 1, quindi occorre scegliere $\lambda = 1$. Con questo modello

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \bigg|_{\lambda=1} = 0.0803...$$

$\square$