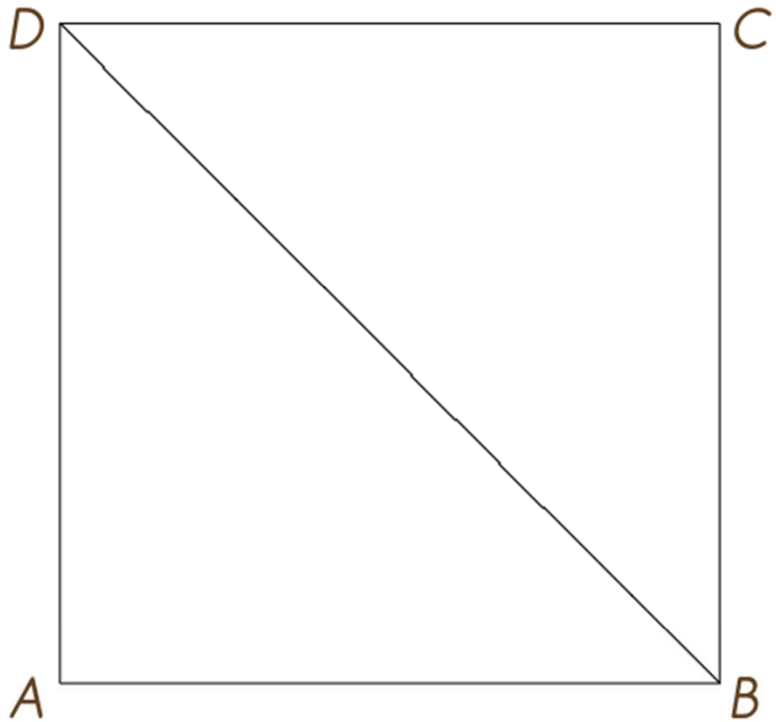
Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

02. I numeri reali

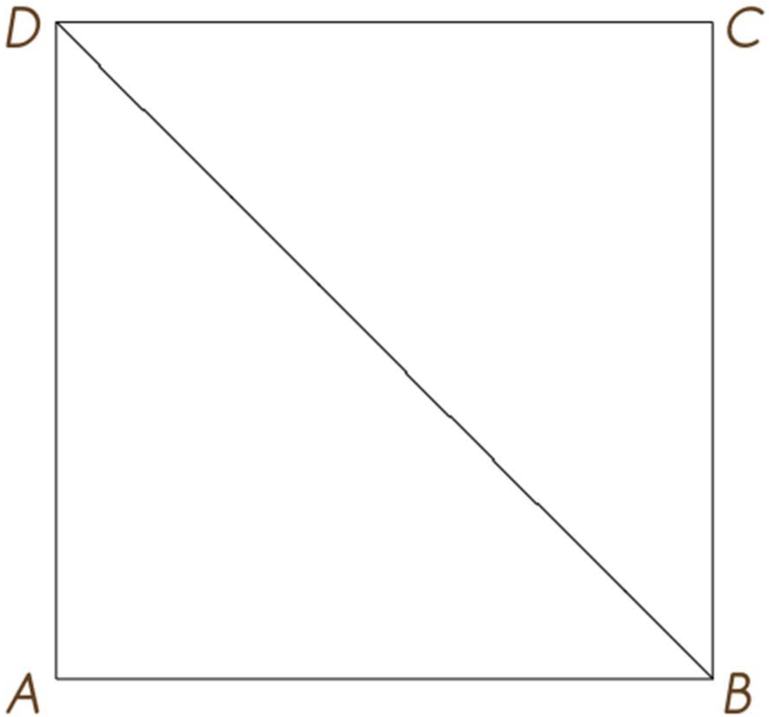
Quadrati, lati e diagonali



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}$$

Quadrati, lati e diagonali

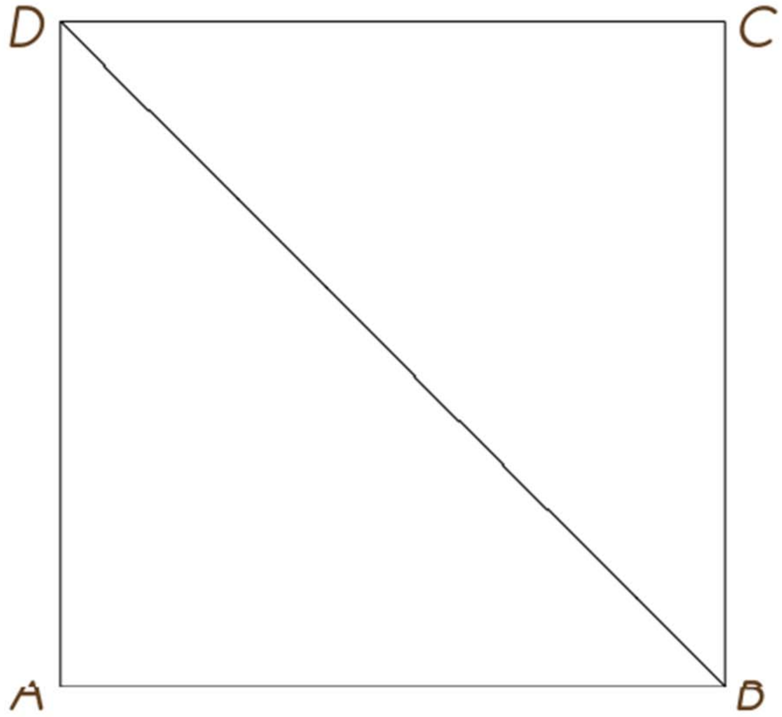


$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2$$

Quadrati, lati e diagonali



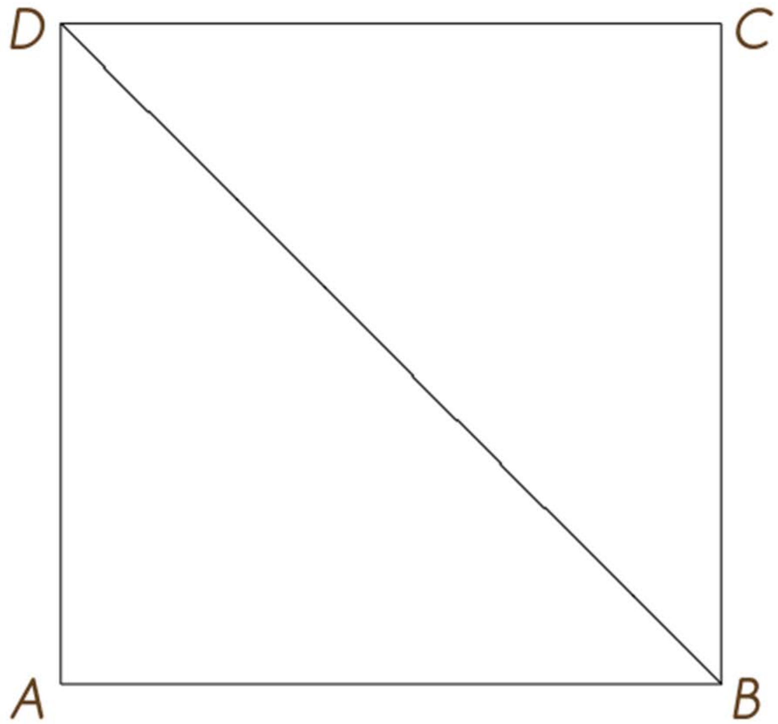
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2$$

$$\overline{BD} = \sqrt{2}$$

Quadrati, lati e diagonali



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2$$

$$\overline{BD} = \sqrt{2}$$

$x^2 - 2 = 0$ se e solo se $x = \pm\sqrt{2}$

Quadrati, lati e diagonali

Per assurdo supponiamo che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{con} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Per assurdo supponiamo che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{con} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

allora abbiamo

$$\sqrt{2}q = p$$

Per assurdo supponiamo che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{con} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

allora abbiamo

$$\sqrt{2}q = p$$

da cui

$$2q^2 = p^2$$

Assiomi dei reali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
iv. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!(-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
viii. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists!(1/a) \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma
x. se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$, $\forall c$
xi. se $a \leq b$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$, $\forall c \geq 0$

Assioma di Archimede

Assioma di Archimede.
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$k > a$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Assioma di Archimede.
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$k > a$$

Osservazione. Se x è un numero reale tale che

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad x < \varepsilon \text{ per ogni } \varepsilon > 0$$

allora $x = 0$.

Principio degli intervalli incapsulati (Cantor).
Sia $\{I_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una collezione di intervalli non vuoti, chiusi e limitati di $\mathbb{R}$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Principio degli intervalli incapsulati (Cantor).
Sia $\{I_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una collezione di intervalli non vuoti, chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni indice n, allora

Principio di Cantor

Principio degli intervalli incapsulati (Cantor).
Sia $\{I_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una collezione di intervalli non vuoti, chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni indice n, allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

Ordinamento tra punti della retta.

$$x \leq y \quad \text{se e solo se} \quad y - x \geq 0$$

Ordinamento tra punti della retta.

$$x \leq y \quad \text{se e solo se} \quad y - x \geq 0$$

Distanza tra punti della retta.

$$d(x, y) = |x - y| = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Ordinamento tra punti della retta.

$$x \leq y \quad \text{se e solo se} \quad y - x \geq 0$$

Distanza tra punti della retta.

$$d(x, y) = |x - y| = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

Si ricordi che $|x| = \max\{x, -x\}$.

Disuguaglianza triangolare.
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale che

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

Intervalli chiusi e aperti

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Intervalli chiusi e aperti

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Intervalli chiusi e aperti

$$(a,b)=\{x\in \mathbb{R} : a<x<b\}$$

$$[a,b)=\{x\in \mathbb{R} : a\leq x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\in \mathbb{R} : a<x\leq b\}$$

$$[a,b]=\{x\in \mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$$

Insiemi limitati e non

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Insiemi limitati e non

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Definizione. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $|x| \leq M$.

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto chiameremo **maggiorante** di A un elemento $\Lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\Lambda \geq a$ per ogni $a \in A$.

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto chiameremo **maggiorante** di A un elemento $\Lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\Lambda \geq a$ per ogni $a \in A$.

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto chiameremo **minorante** di A un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda \leq a$ per ogni $a \in A$.

Estremi

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$

Estremi

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato chiameremo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti, tale numero reale verrà indicato $\inf(A)$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato chiameremo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti, tale numero reale verrà indicato $\inf(A)$

Osservazione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato e sia $\inf(A)$ il suo estremo inferiore, allora

Estremi

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato chiameremo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti, tale numero reale verrà indicato $\inf(A)$

Osservazione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato e sia $\inf(A)$ il suo estremo inferiore, allora

$$\forall a \in A \quad a \geq \inf(A)$$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato chiameremo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti, tale numero reale verrà indicato $\inf(A)$

Osservazione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato e sia $\inf(A)$ il suo estremo inferiore, allora

$$\forall a \in A \quad a \geq \inf(A)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : a_\varepsilon < \inf(A) + \varepsilon$$

Estremi

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato se $\sup(A) \in A$ allora chiameremo tale numero reale **massimo** di A e lo indicheremo con $\max(A)$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato se $\sup(A) \in A$ allora chiameremo tale numero reale **massimo** di A e lo indicheremo con $\max(A)$.

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato se $\inf(A) \in A$ allora chiameremo tale numero reale **minimo** di A e lo indicheremo con $\min(A)$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Teorema. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|a - q| < \varepsilon$$

Protagonisti

Archimede di Siracusa

287-212 a.C.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

1845 - 1918

Julius Wilhelm Richard Dedekind

1831 - 1916