UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

13. Risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Richiami

- Aritmetica modulare
- Teoria dei gruppi e sue conseguenze sull'aritmetica modulare
- Applicazioni crittografiche
- **Seconda parte del corso: algebra lineare**
- Oggi: **tecniche per risolvere sistemi di equazioni lineari**

Sistemi di equazioni lineari

La seconda parte del corso riguarda i fenomeni lineari. Il linguaggio della linearità permette di descrivere una grande varietà di fenomeni geometrici, combinatori, dinamici.

I fenomeni lineari sono tutti descritti da equazioni di primo grado. Dobbiamo quindi imparare a risolvere le equazioni di primo grado, anche quando sono tante, o coinvolgono più di una variabile.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Metodi di risoluzione - I

Per risolvere un sistema di equazioni lineari come

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

in generale si usa una delle equazioni per ricavare una variabile in termini delle altre, e poi si sostituisce tale espressione nelle altre equazioni.

Ad esempio, possiamo ricavare $x = 1 - 2y + z$ dalla prima equazione, e sostituire al posto di x tale espressione sia nella seconda che nella terza equazione

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3(1 - 2y + z) + 2y + z = 7 \\ (1 - 2y + z) - y + z = 2 \end{cases}$$

Metodi di risoluzione - II

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Si può procedere anche in altro modo: se sommiamo le equazioni membro a membro, dopo averle magari moltiplicate per degli opportuni numeri (reali), è possibile che alcune delle incognite scompaiano e che questo ci porti ad informazioni dirette sulla soluzione.

Se ad esempio moltiplichiamo le tre equazioni date per $3, -1, 4$ rispettivamente

$$\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 3 \\ -3x - 2y - z = -7 \\ 4x - 4y + 4z = 8 \end{cases}$$

e poi sommiamo membro a membro otteniamo $4x = 4$, che ci fornisce subito $x = 1$.

Il metodo di eliminazione

Il cosiddetto metodo di eliminazione di Gauss formalizza la prima tecnica che abbiamo visto in un procedimento algoritmico.

Si risolve il sistema eseguendo delle manipolazioni su(i coefficienti de)lle equazioni. Si mostra facilmente che tali manipolazioni non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema. La forma finale del sistema fornisce informazioni dirette sull'insieme di soluzioni.

Più avanti vedremo anche come procedere in generale per applicare la seconda tecnica risolutiva. Questo richiederà l'introduzione di un nuovo concetto: il determinante.

Manipolazioni invertibili - I

Abbiamo bisogno di trovare un elenco di possibili manipolazioni da effettuare sulle equazioni di un sistema lineare con le seguenti proprietà:

- Nessuna delle manipolazioni cambia l'insieme delle soluzioni del sistema
- Le manipolazioni, opportunamente eseguite, trasformano il sistema di partenza in un altro di soluzione più rapida (o addirittura immediata)
- Possibilmente, la sequenza di manipolazioni da eseguire non deve dipendere dall'abilità del risolutore, ma deve procedere secondo uno schema prefissato (algoritmo)

Manipolazioni invertibili - II

Conosciamo già almeno due manipolazioni che non cambiano l'insieme delle soluzioni di un'equazione, o di un sistema di equazioni.

- Scambiare di posto (= permutare) le equazioni
- Moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero invertibile

E' evidente che tali manipolazioni producono sistemi equivalenti, ma non ci aiutano minimamente a risolvere il sistema.

Manipolazioni invertibili - III

Il terzo tipo di manipolazione che vediamo produce un effetto equivalente a ricavare una delle incognite in termini delle altre e sostituire l'espressione ottenuta nelle rimanenti equazioni.

Si basa su una semplice osservazione: se due equazioni

$$\begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \end{cases}$$

sono entrambe vere, sommandole membro a membro si ottiene un'equazione

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2$$

che continua ad essere vera. L'equazione ottenuta è conseguenza delle due precedenti. **Attenzione! L'equazione ottenuta può essere vera anche quando le due precedenti sono false!!!**

Ad esempio, quando $x = 1$ entrambe le affermazioni

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

sono vere, e di conseguenza l'equazione $x^2 + 2x = 3$ che si ottiene sommandole membro a membro è ancora un'affermazione vera.

Tuttavia, quest'ultima equazione è valida anche quando $x = -3$, mentre nessuna delle due equazioni di partenza è soddisfatta da $x = -3$.

Sostituire due equazioni con l'equazione ottenuta sommandole membro a membro non è una manipolazione invertibile! Ogni soluzione delle due equazioni di partenza è ancora soluzione dell'equazione somma, ma il viceversa è generalmente falso.

Manipolazioni invertibili - V

E' sufficiente apportare una semplice modifica alla manipolazione precedente per renderla invertibile. Consideriamo i due sistemi

$$\begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \end{cases}$$

E' chiaro che entrambe le equazioni del secondo sistema sono conseguenze delle equazioni del primo sistema.
Tuttavia, anche le equazioni del primo sistema sono conseguenze di quelle del secondo! In effetti, la seconda equazione del primo sistema si ottiene sottraendo membro a membro la prima equazione del secondo sistema dalla seconda equazione.

In altre parole, le equazioni del primo sistema sono entrambe soddisfatte esattamente quando le equazioni del secondo sistema sono entrambe soddisfatte. I due sistemi **hanno lo stesso insieme di soluzioni: sono equivalenti**.

Manipolazioni invertibili - VI

Abbiamo ora tutto ciò che ci serve per risolvere un sistema di equazioni lineari. Le manipolazioni invertibili che abbiamo a disposizione sono:

- Scambiare di posto (= permutare) le equazioni
- Moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero invertibile
- Sostituire una delle equazioni con quella che si ottiene sommandole un'altra equazione

e quelle che si ottengono come loro combinazione. Ad esempio, possiamo raddoppiare una delle equazioni, sommarla ad un'altra, e poi dimezzare l'equazione raddoppiata. L'effetto netto sarà quello di

- Sostituire una delle equazioni con quella che si ottiene sommandole un multiplo di un'altra equazione

Vediamo queste manipolazioni all'opera su un esempio.

Un esempio - I

Partiamo dall'ormai familiare sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Vogliamo applicare le nostre manipolazioni invertibili per ottenere dei sistemi equivalenti a questo, ma di risoluzione più semplice. Il nostro obiettivo è quello di sommare (o sottrarre) ad alcune equazioni multipli di altre in modo che le incognite presenti in ciascuna equazione diventino sempre meno.

Ad esempio, sottraendo alla seconda equazione la prima moltiplicata per 3, la x scomparirà dall'equazione così ottenuta. Proviamo:

Un esempio - II

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -4y + 4z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -4y + 4z = 4 \\ \quad -3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \qquad y - z = -1 \\ \quad -3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Un esempio - III

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ora procediamo a ritroso per togliere z dalle equazioni precedenti.

Un esempio - IV

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\quad y - z = -1 \\ \quad\quad\quad\quad z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\quad y \quad\quad = 1 \\ \quad\quad\quad\quad z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y \quad\quad = 3 \\ \quad\quad y \quad\quad = 1 \\ \quad\quad\quad\quad z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad\quad = 1 \\ \quad\quad y \quad\quad = 1 \\ \quad\quad\quad\quad z = 2 \end{cases}$$

Un esempio - V

L'ultimo sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

è equivalente a quello di partenza

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

ma è particolarmente semplice da risolvere!!!

Nelle prossime lezioni cercheremo di comprendere in che modo questa procedura si adatti ad ogni sistema di equazioni lineari.