UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

12. Teoremi sulle funzioni continue

L'algoritmo di bisezione

Introduciamo lo strumento fondamentale di questa lezione e consideriamo un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$

L'algoritmo di bisezione

Introduciamo lo strumento fondamentale di questa lezione e consideriamo un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$

il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

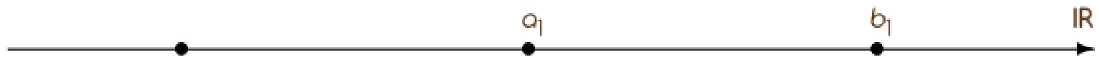
L'algoritmo di bisezione

Introduciamo lo strumento fondamentale di questa lezione e consideriamo un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$

il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

e scegliamo una delle due metà risultanti per proseguire, per esempio $I_1 = [P, b_0] = [a_1, b_1]$.

Adesso possiamo ripetere il ragionamento partendo, però, dall'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$



L'algoritmo di bisezione

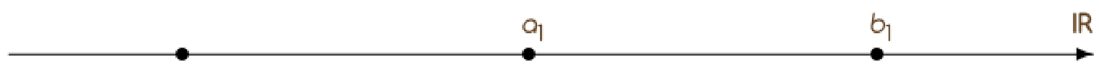
Adesso possiamo ripetere il ragionamento partendo, però, dall'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$

il punto medio dell'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ è il punto

$$P = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

L'algoritmo di bisezione

Adesso possiamo ripetere il ragionamento partendo, però, dall'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$



il punto medio dell'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ è il punto

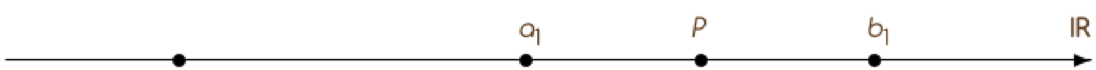
$$P = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

L'algoritmo di bisezione

Adesso possiamo ripetere il ragionamento partendo, però, dall'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$

il punto medio dell'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ è il punto

$$P = \frac{a_1 + b_1}{2}$$



e poniamo $I_2 = [a_1, P]$ o $[P, b_1]$...

L'algoritmo di bisezione

Il ragionamento descritto produce una successione di intervalli o, se preferite, due successioni di estremi...

Il ragionamento descritto produce una successione di intervalli o, se preferite, due successioni di estremi...

$$I_0 = [a_0, b_0] \qquad P = (a_0 + b_0)/2$$
$$I_1 = [a_1, b_1] \qquad P = (a_1 + b_1)/2$$

Il ragionamento descritto produce una successione di intervalli o, se preferite, due successioni di estremi...

$$
\begin{aligned}
I_0 &= [a_0, b_0] \qquad & P &= (a_0 + b_0)/2 \\
I_1 &= [a_1, b_1] \qquad & P &= (a_1 + b_1)/2 \\
I_2 &= [a_2, b_2] \qquad & P &= (a_2 + b_2)/2
\end{aligned}
$$

L'algoritmo di bisezione

Il ragionamento descritto produce una successione di intervalli o, se preferite, due successioni di estremi...

$$
\begin{aligned}
I_0 &= [a_0, b_0] & \qquad P &= (a_0 + b_0)/2 \\
I_1 &= [a_1, b_1] & \qquad P &= (a_1 + b_1)/2 \\
I_2 &= [a_2, b_2] & \qquad P &= (a_2 + b_2)/2 \\
I_3 &= [a_3, b_3] & \qquad P &= (a_3 + b_3)/2 \\
I_4 &= [a_4, b_4] & \qquad P &= (a_4 + b_4)/2
\end{aligned}
$$

L'algoritmo di bisezione

Stimiamo la lunghezza degli intervalli, cioè la distanza degli estremi, al variare dell'indice

$$|I_0| = (b_0 - a_0) = L$$

L'algoritmo di bisezione

Stimiamo la lunghezza degli intervalli, cioè la distanza degli estremi, al variare dell'indice

$$|I_0| = (b_0 - a_0) = L$$

$$|I_1| = (b_1 - a_1) = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Stimiamo la lunghezza degli intervalli, cioè la distanza degli estremi, al variare dell'indice

$$|I_0| = (b_0 - a_0) = L$$

$$|I_1| = (b_1 - a_1) = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2}$$

$$|I_2| = (b_2 - a_2) = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Stimiamo la lunghezza degli intervalli, cioè la distanza degli estremi, al variare dell'indice

$$|I_0| = (b_0 - a_0) = L$$

$$|I_1| = (b_1 - a_1) = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2}$$

$$|I_2| = (b_2 - a_2) = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}\frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2^2}$$

L'algoritmo di bisezione

Stimiamo la lunghezza degli intervalli, cioè la distanza degli estremi, al variare dell'indice

$$|I_0| = (b_0 - a_0) = L$$

$$|I_1| = (b_1 - a_1) = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2}$$

$$|I_2| = (b_2 - a_2) = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}\frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$|I_n| = (b_n - a_n) = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{L}{2^n} \longrightarrow 0$$

per n che diverge.

L'algoritmo di bisezione

Il principio di Cantor garantisce che

$$\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$$

L'algoritmo di bisezione

Il principio di Cantor garantisce che

$$\bigcap_{n\geq 0} I_n \neq \emptyset$$

siccome la lunghezza degli intervalli è infinitesima (principio di Archimede), vale

$$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{x_0\}$$

L'algoritmo di bisezione

Il principio di Cantor garantisce che

$$\bigcap_{n\geq 0} I_n \neq \emptyset$$

siccome la lunghezza degli intervalli è infinitesima (principio di Archimede), vale

$$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{x_0\}$$

quindi l'algoritmo di bisezione seleziona un unico punto, le cui proprietà dipendono dal criterio di **scelta** della successione di intervalli!

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che f è una funzione **continua** nel punto $x_0 \in A$ se

Definizione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che f è una funzione **continua** nel punto $x_0 \in A$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$$

Definizione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che f è una funzione **continua** nel punto $x_0 \in A$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$$

tale che

$$\text{se} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{allora} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Il teorema dei valori intermedi

Teorema dei valori intermedi. Supponiamo di avere una funzione $f : A \longrightarrow \mathrm{I\!R}$, con $A = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato, allora

Teorema dei valori intermedi. Supponiamo di avere una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato, allora

$$\forall \xi \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] < 0$$

Teorema dei valori intermedi. Supponiamo di avere una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato, allora

$$\forall \xi \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] < 0$$

esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \xi$.

Un corollario

Teorema di esistenza degli zeri. Supponiamo di avere una funzione continua f, definita su un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$, tale che

Un corollario

Teorema di esistenza degli zeri. Supponiamo di avere una funzione continua f, definita su un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$, tale che

$$f(a)f(b) < 0$$

Un corollario

Teorema di esistenza degli zeri. Supponiamo di avere una funzione continua f, definita su un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$, tale che

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

Un esempio

Teorema di Weierstrass. Supponiamo di avere una funzione **continua** f, definita su un **intervallo chiuso e limitato** $I = [a, b]$,

Il teorema di Weierstrass

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema di Weierstrass. Supponiamo di avere una funzione **continua** f, definita su un **intervallo chiuso e limitato** $I = [a, b]$, allora esistono due punti $x_M, x_m \in [a, b]$ tale che

$$f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Un esempio

Protagonisti

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

1815 - 1897