Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 8.1 – Cardinalità (parte I)

Docente: Pietro Cenciarelli

I numeri naturali

Giuseppe Peano
(1889)

- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)
- zero non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m
- se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in$ A e inoltre
  $n \in A$ implica succ (n) $\in$ A, allora $A = \mathcal{N}$

John von Neumann
(1923)

4 = succ (succ (succ (succ (zero))))

{{}{{}}{{}{{}}}{{}{{}}{{}{{}}}}}

I numeri come insiemi

(di insiemi di insiemi di insiemi…)

zero	{ }	
uno	{{ }}	ovvero: {zero}
due	{{ } {{}}}	ovvero: {zero, uno}
tre	{{ } {{}} {{} {{}}}}	…

⋮

ω	{zero, uno, due, tre, … , quarantadue, …}
$\omega + 1$	{zero, uno, due, tre, … , quarantadue, … , ω}

I numeri transfiniti

ω {zero, uno, due, tre, ...}

$\omega + 1$ {zero, uno, due, tre, ... , ω}

$\omega + 2$ {zero, uno, due, tre, ... , ω, $\omega + 1$}

$\vdots$

$\omega + \omega$ {zero, uno, due, tre, ... , ω, $\omega + 1$, ...}

$\vdots$

$\omega + \omega + \omega$ {zero, uno, due, tre, ... , ω, $\omega + 1$, ... , $\omega + \omega$, ...}

$\vdots$

Chi è più grande?

4 oppure 4 + 4? ☺

ω oppure ω + ω? ☹

Cardinalità

A si dice *equipotente* a B se esiste una biiezione A → B

L'equipotenza è una *relazione di equivalenza*

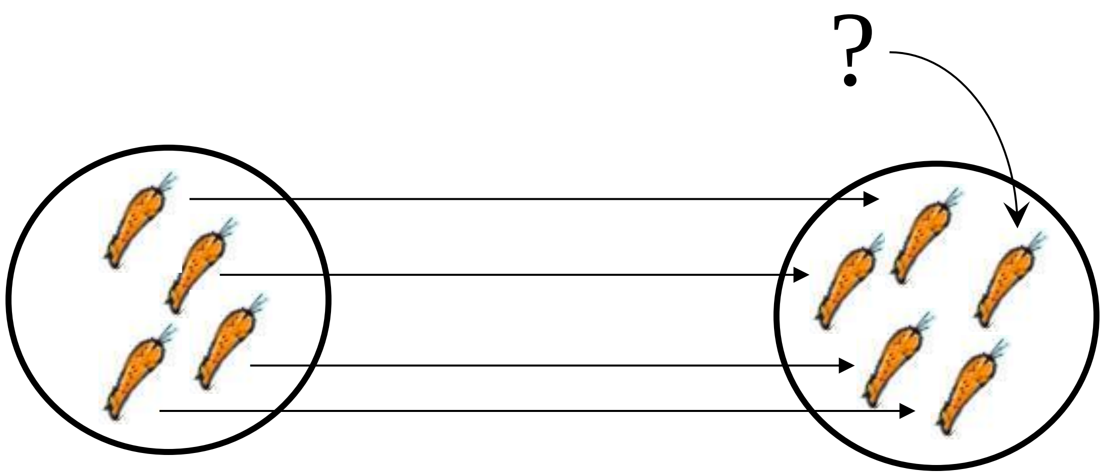
La *cardinalità* di un insieme A, indicata con |A|, è la classe di equipotenza di A

Definizione: |A| ≤ |B| sse esiste una *iniezione* A → B

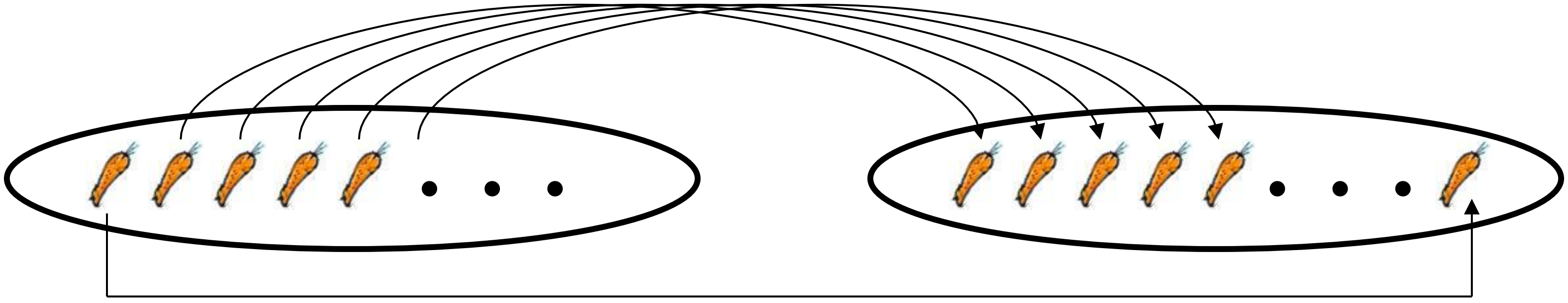
Teorema: se |A| ≤ |B| e |B| ≤ |A| allora |A| = |B|

(conseguenza immediata del teorema di Cantor-Bernstein-Schroeder: *se esistono A → B e B → A iniettive, allora esiste A → B biiettiva*)

Chi è più grande?

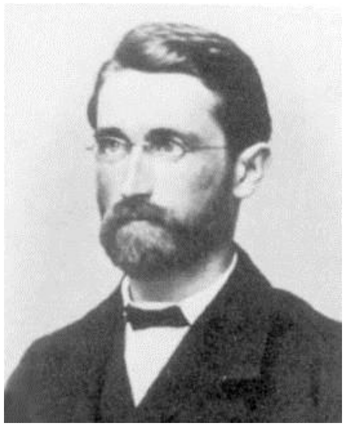


4 non è equipotente a 5



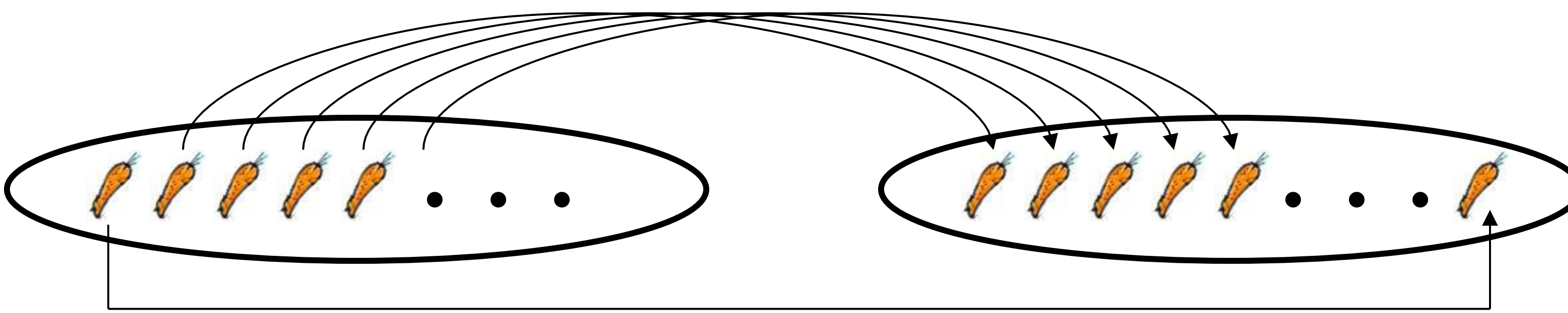
ω è equipotente a $\omega + 1$

Cosa è l'infinito ?



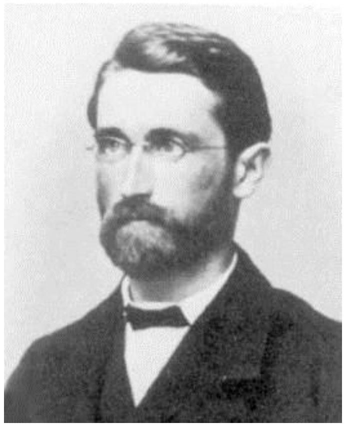
Richard Dedekind (1888)

"Un insieme si dice infinito se è equipotente ad una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito."



ω è equipotente a $\omega + 1$

Cosa è l'infinito ?



Richard Dedekind (1888)

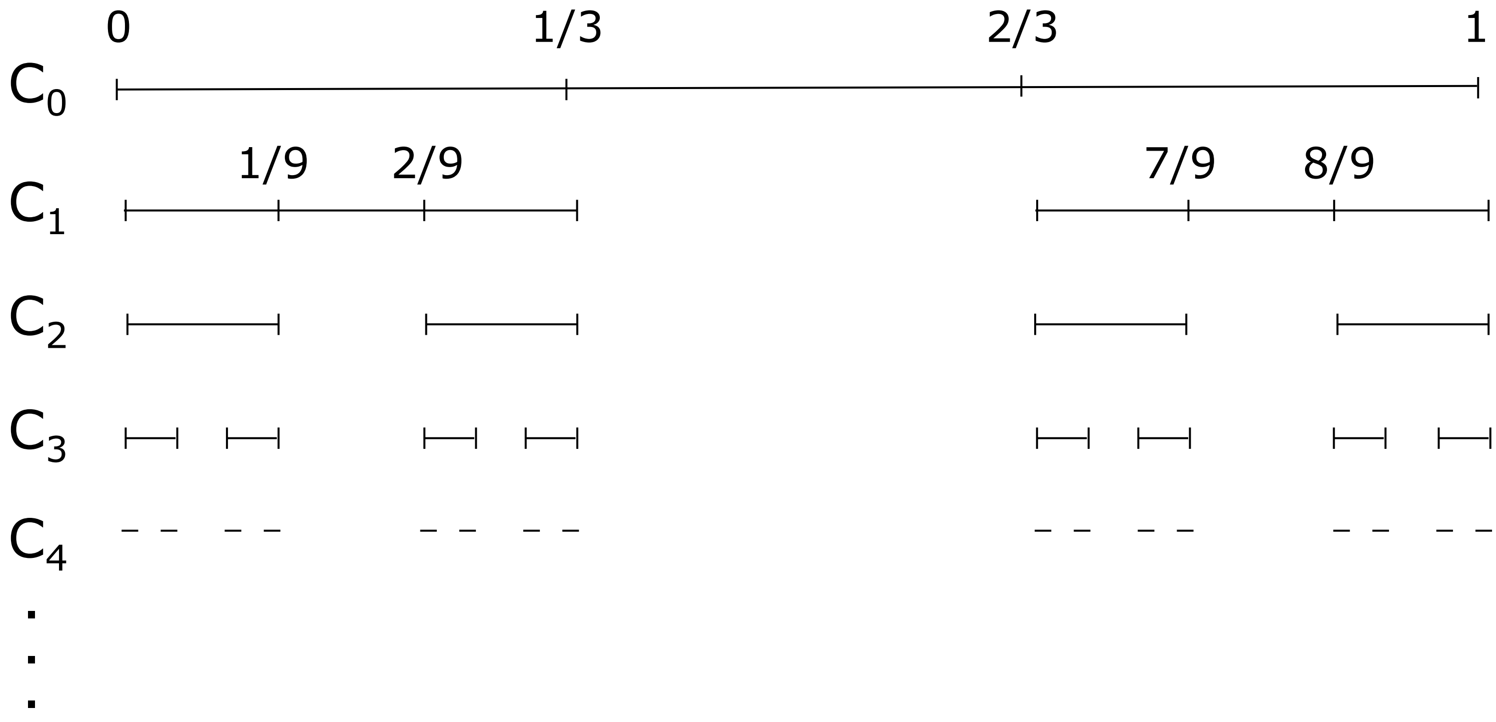
"Un insieme si dice infinito se è equipotente ad una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito."

Altro esempio:

l'intervallo chiuso [0, 1]

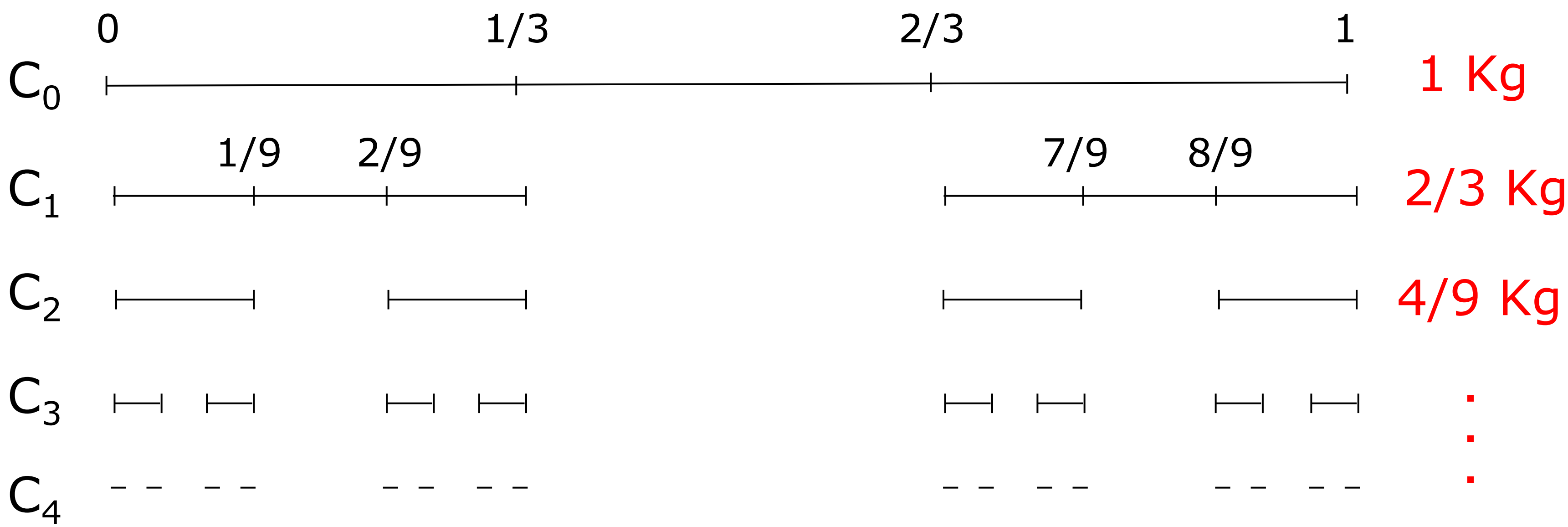
la polvere di Cantor…

La polvere di Cantor



$C = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap \ldots$

Quanto pesa la polvere di Cantor?



⋮

C

abbiamo tolto: 1/3 + 2/9 + 4/27 … = 1/3 (1 + 2/3 + 4/9 …)

$$= 1/3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Quanto pesa la polvere di Cantor ?

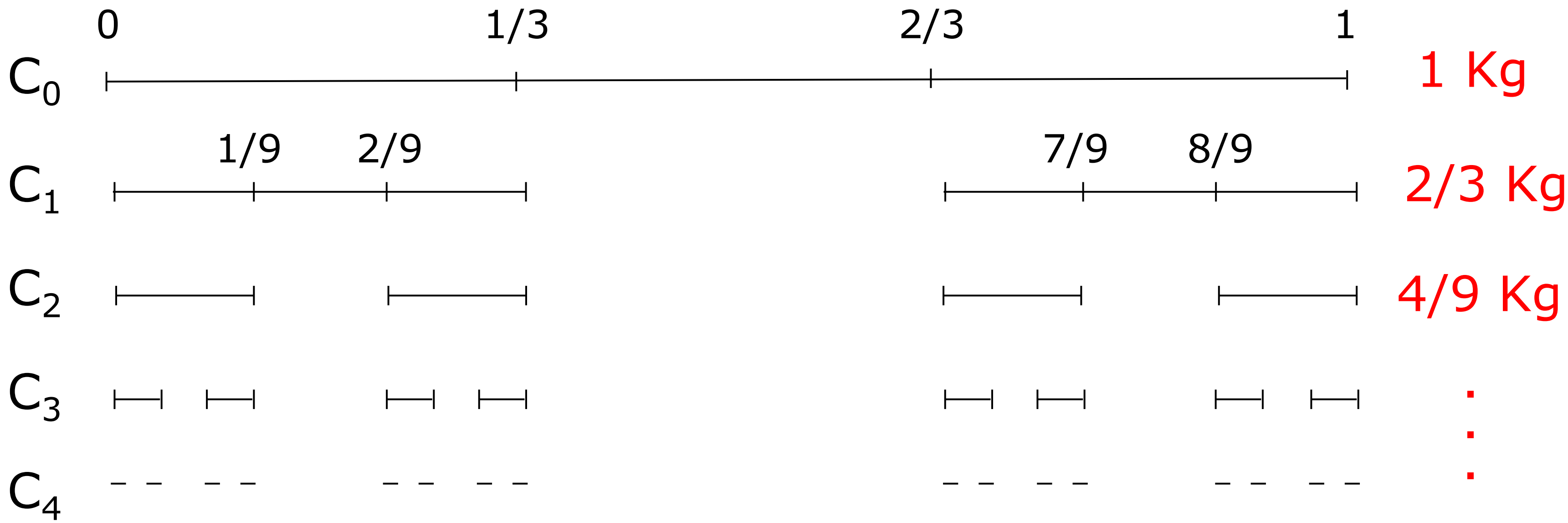
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(dimostrare per induzione!)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{(quando } |x| < 1\text{)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

Quanto pesa la polvere di Cantor ?

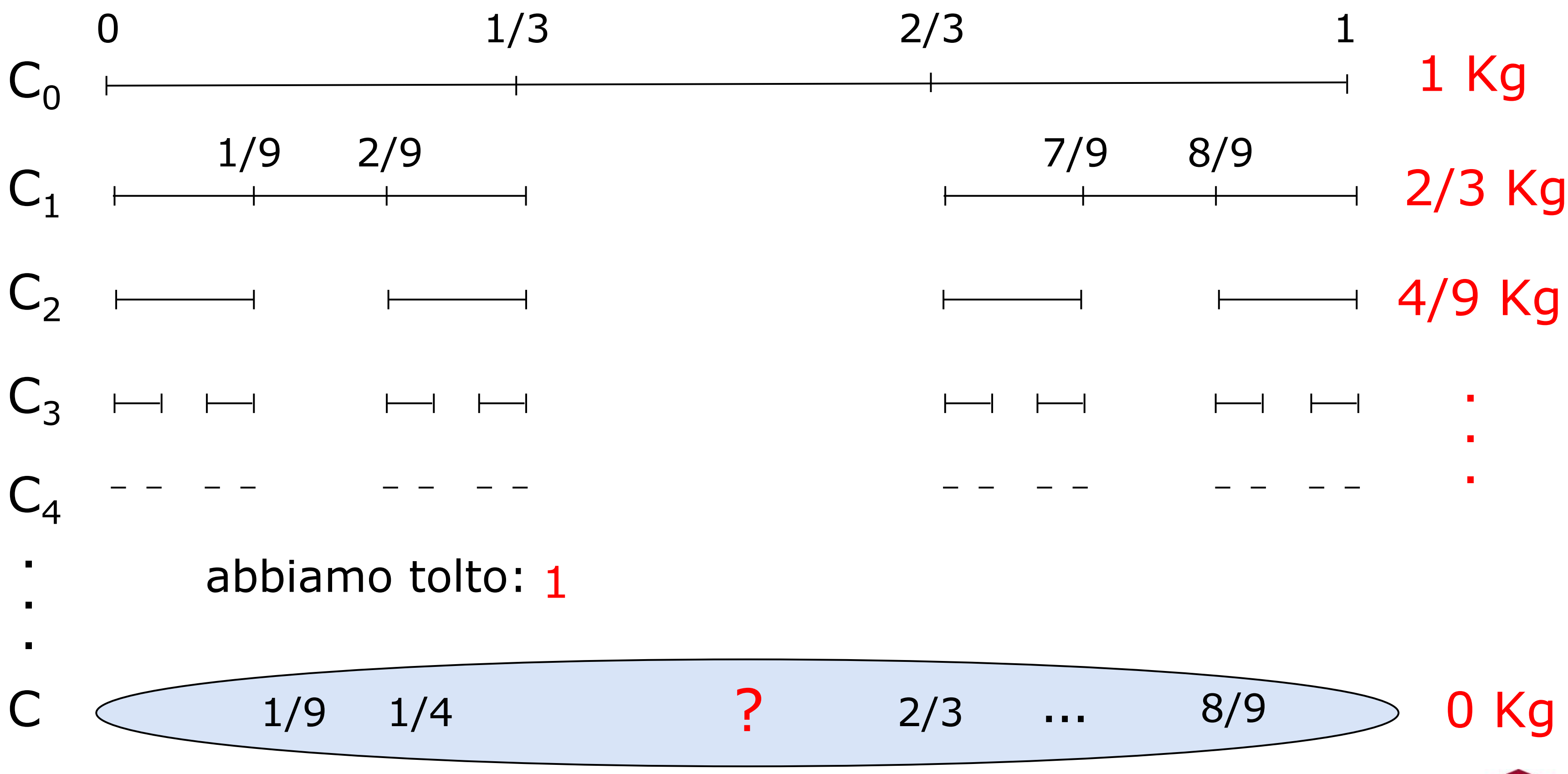


abbiamo tolto: 1/3 + 2/9 + 4/27 … = 1/3 (1 + 2/3 + 4/9 …)

C

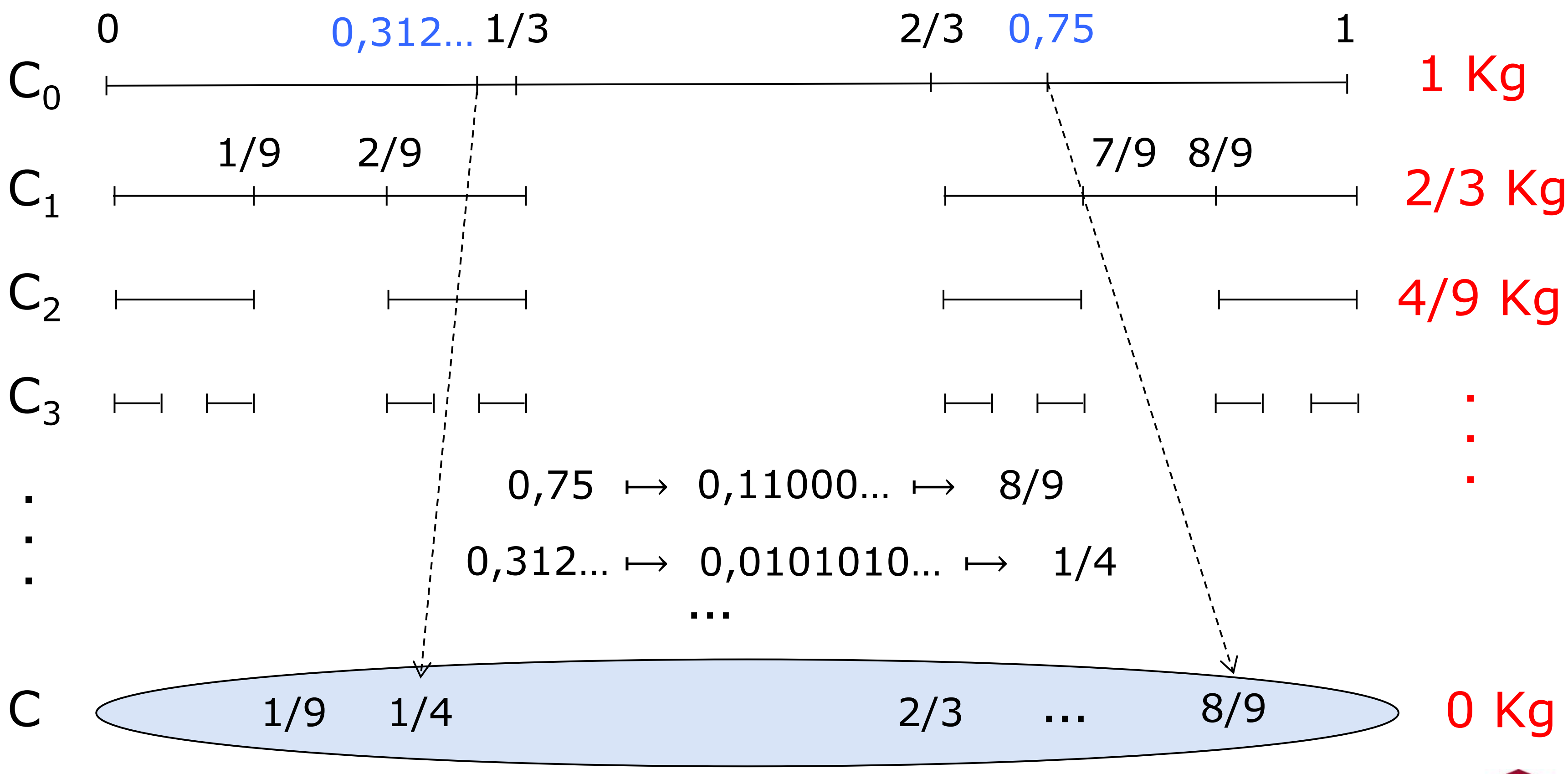
$$= 1/3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1/3 \cdot 3 = 1$$

Quanto pesa la polvere di Cantor ?



UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Quanti granelli ha ?



Quanti granelli ha ?

0 1

C_0 1 Kg

iniettiva!

$|[0,1]| \leq |C|$

$C \subseteq [0,1]$ implica $|C| \leq |[0,1]|$

$|C| = |[0,1]|$

C 0 Kg

Cosa è l'infinito ?

Richard Dedekind (1888)

"Un insieme si dice infinito se è equipotente ad una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito."

David Hilbert (1862 – 1943)

"Immaginiamo un albergo con infinite stanze..."

(to be continued…)