SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Rappresentazione dei numeri naturali

Prof. Daniele Gorla

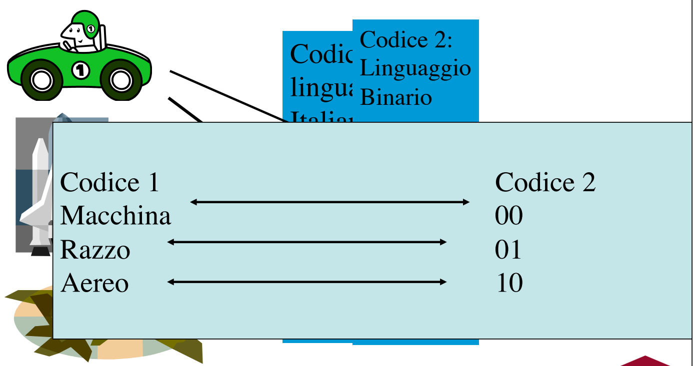
Rappresentazione dell'Informazione

I calcolatori elettronici sono macchine in grado di elaborare informazioni trasformandole in altre informazioni.

Nel mondo dell'informatica, intendiamo in modo più restrittivo per informazione *tutto ciò che può essere rappresentato tramite opportune sequenze di simboli in un alfabeto prefissato*.

Un *codice* C è un insieme di parole composte da simboli di un alfabeto Σ (detto *alfabeto di supporto* di C).

Esempi di codici



Codifica e decodifica

CODIFICA

La *codifica* di un insieme di informazioni I in un dato codice C è una funzione

$$f : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{C}$$

Esempio:

macchina $\rightarrow$ *00* *razzo* $\rightarrow$ *01* *aereo* $\rightarrow$ *10*

dove: I è un sottoinsieme di parole della lingua italiana
C è un sottoinsieme delle parole composte da 0 e 1

DECODIFICA

La *decodifica* di una informazione codificata in precedenza è una corrispondenza

$$g : \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{I}$$

(tipicamente, è la funzione inversa di f)

Esempio:

00 $\rightarrow$ *macchina* *01* $\rightarrow$ *razzo* *10* $\rightarrow$ *aereo*

Criteri di valutazione di una codifica

Economicità: sono considerate migliori rispetto a questa caratteristica le codifiche che utilizzano pochi simboli.

Semplicità di codifica e decodifica: è auspicabile poter trasformare un linguaggio da un codice all'altro in modo efficiente

Semplicità di elaborazione: sono preferibili le codifiche che consentono di eseguire le operazioni definite sui dati in modo agevole (ad esempio, sostituendo ai simboli arabi i simboli dei numeri romani, "saltano" il meccanismo del riporto e della posizionalità).

Sistemi posizionali

Un sistema numerico *posizionale* in base *b*, ovvero basato su un **alfabeto** Σ di *b* simboli distinti, consente di esprimere un qualsiasi numero naturale *N* di *m* cifre, mediante la formula

$$N = \sum_{i=0}^{m-1} c_i b^i, \quad c_i \in \Sigma$$

Ad esempio, nel sistema decimale (b=10, Σ=0,1,..9), la sequenza N_{10} = 254 esprime il numero

$$254_{10} = 200 + 50 + 4$$
$$= 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Similmente, in base 7 (b=7, Σ=0,1,..6), la stessa sequenza di cifre N_7 = 254 esprime il numero

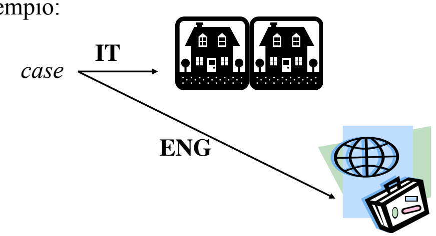
$$254_7 = 2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 \; (= 98+35+4 = 137)_{10}$$

Quindi ad esempio 10_{10} e 10_2 hanno significato **diverso** anche se le sequenze di simboli sono le stesse

(1 seguito da 0)!!

Bisogna **interpretare** una stringa di simboli, una volta che ci venga detto il codice utilizzato per generarla (*decodifica*)

Esempio:



	Base 2	Base 3	Base 4	Base 5	...	Base 8	...	Base 10	...	Base 16
	0000	000	00	00		00		00		0
	0001	001	01	01		01		01		1
	0010	002	02	02		02		02		2
	0011	010	03	03		03		03		3
	0100	011	10	04		04		04		4
	0101	012	11	10		05		05		5
	0110	020	12	11		06		06		6
N_b	0111	021	13	12		07		07		7
	1000	022	20	13		10		08		8
	1001	100	21	14		11		09		9
	1010	101	22	20		12		10		A
	1011	102	23	21		13		11		B
	1100	110	30	22		14		12		C
	1101	111	31	23		15		13		D
	1110	112	32	24		16		14		E
	1111	120	33	30		17		15		F

Codice binario

Codice binario: un codice costituito dai soli simboli 0 ed 1.
Quindi, b=2 e Σ ={0,1}
I simboli 0 ed 1 prendono il nome di *bit*, una contrazione per *binary digit*.

Perchè il codice binario?
- *George Boole* dimostrò come la logica possa essere ridotta ad un sistema algebrico molto semplice che utilizza solo un codice binario.
- Il codice binario fu trovato particolarmente utile nella *teoria della commutazione* (Claude Shannon) per descrivere il comportamento dei circuiti digitali (1=acceso, 0=spento).

Ogni tipo di informazione può essere codificata con un codice binario.
- Cominciamo con i numeri: i codici saranno **diversi** a seconda che si vogliano rappresentare numeri naturali, interi, razionali, …
- Si possono poi rappresentare parole (sequenze di caratteri dell'alfabeto – codici ASCII e UNICODE), immagini, suoni, …

Rappresentazione binaria di numeri naturali

Un **numero naturale** N in base 2 di n bit può essere rappresentato mediante la formula:

$$N_2 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 2^i,\ c_i \in \{0,1\}$$

Il bit c_0 viene detto LSB (*less signifying bit*) mentre $c_{n\text{-}1}$ viene detto MSB (*most signifying bit*).

Esempio: $111001_2 = 1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$

Cambiamento di base per i numeri naturali

Problema: convertire un numero N espresso in base a (N_a) in un numero N' espresso in base b (N'_b)

Conversione di base: metodo polinomiale

Si usa l'espressione

$$N_a = \sum_{i=0}^{n-1} c_i a^i,\ c_i \in \{0,\dots,a-1\}$$

Si esprime il numero N_a come un polinomio, **usando i numeri dell'alfabeto *b*** nel polinomio

Si valuta il polinomio **usando l'aritmetica in base *b***

Esempio (da base 2 a base 10):

$$111001_2 = (1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0)_{10}$$
$$= (32+16+8+0+0+1)_{10} = 57_{10}$$

Metodo polinomiale

Difficile da usare se la base di arrivo (b) non è 10 (bisogna lavorare nell'aritmetica modulo b!!)

Esempio (da base 7 a base 3):
$3602_7 = (10\cdot21^3 + 20\cdot21^2 + 0\cdot21^1 + 2\cdot21^0)_3$

SERVE UN ALTRO METODO!!!

Teorema della divisione euclidea

Per ogni $D,d \in \mathbf{N}$, esiste un'unica coppia $q,r \in \mathbf{N}$ t.c.

$$\underbrace{D}_{\text{dividendo}} = \underbrace{q}_{\text{quoziente}}\cdot\underbrace{d}_{\text{divisore}} + \underbrace{r}_{\text{resto}}, \quad \text{con } 0 \leq r < d$$

Notazionalmente, $q = D \text{ div } d$
$r = D \text{ mod } d$

Per esempio, $7 \text{ div } 3 = 2$
$7 \text{ mod } 3 = 1$

$$N = c_0 + c_1{\cdot}b^1 + c_2{\cdot}b^2 + c_3{\cdot}b^3 + \ldots + c_{n-2}{\cdot}b^{n-2} + c_{n-1}{\cdot}b^{n-1}$$
$$= \underbrace{c_0}_{\text{resto}} + \underbrace{b}_{\text{divisore}}\cdot\underbrace{(c_1 + c_2{\cdot}b^1 + c_3{\cdot}b^2 + \ldots + c_{n-2}{\cdot}b^{n-3} + c_{n-1}{\cdot}b^{n-2})}_{\text{quoziente}}$$

dividendo

da cui
$N \text{ mod } b = c_0$
$N \text{ div } b = c_1 + c_2{\cdot}b^1 + c_3{\cdot}b^2 + \ldots + c_{n-2}{\cdot}b^{n-3} + c_{n-1}{\cdot}b^{n-2} = N^{(1)}$

Iterando
$N^{(1)} \text{ mod } b = c_1$
$N^{(1)} \text{ div } b = c_2 + c_3{\cdot}b^1 + \ldots + c_{n-2}{\cdot}b^{n-4} + c_{n-1}{\cdot}b^{n-3} = N^{(2)}$
$N^{(2)} \text{ mod } b = c_2$
$N^{(2)} \text{ div } b = c_3 + \ldots + c_{n-2}{\cdot}b^{n-5} + c_{n-1}{\cdot}b^{n-4} = N^{(3)}$
…

Finché arrivo ad $N^{(n-1)} = c_{n-1}$ e allora avrò
$N^{(n-1)} \text{ mod } b = c_{n-1}$
$N^{(n-1)} \text{ div } b = 0$

Conversione di base: metodo delle divisioni iterate

Convertire N_a in base b

1. Dividi ripetutamente N_a per b_a
   (N.B.: ***b*** **va espresso in base** ***a*** **e la divisione va fatta in base** ***a***)
2. I resti delle divisioni convertiti in base b danno le cifre, dalla meno significativa alla più significativa, di N_a espresso in base b.

Esempio: 657_{10} in base 4
657 : 4 = 164 resto 1
164 : 4 = 41 resto 0
41 : 4 = 10 resto 1
10 : 4 = 2 resto 2
2 : 4 = 0 resto 2
Quindi, $657_{10} = 22101_4$

Esempio (da base 10 a base 16)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Dividere 317_{10} per 16_{10}
(in base 16, le cifre sono 0,1,…,9,A,B,…,F)

1) 317 : 16

$Q=19_{10}$, $r=13_{10}$

$13_{10}=D_{16}$ (LSD)

2) 19 : 16

$Q=1_{10}$, $r=3_{10}$

$3_{10}=3_{16}$

3) 1 : 16

$Q=0_{10}$, $r=1_{10}$

$1_{10}=1_{16}$ (MSD)

Quindi

$317_{10}=13D_{16}$

N.B.: nell'algoritmo sopra descritto, la divisione va eseguita in base a (cioè nella base del numero di partenza). Se a≠10, questo è complicato.

Esempio (basi di partenza e arrivo diverse da 10)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Convertire 102202_3 in base 5
Tre strade :

a) eseguire ripetutamente 102202_3 **:** 12_3
N.B.: divisione con aritmetica in base 3 → **<u>DIFFICILE!</u>**

b) Applicare il metodo polinomiale a 102202_3
N.B.: prodotti e somme con aritmetica in base 5 → **<u>DIFFICILE!</u>**

c) convertire 102202_3 in base 10 (metodo polinomiale) e poi convertire il risultato in base 5 (divisioni iterate)
- $102202_3 = 3^5 + 2\cdot3^3 + 2\cdot3^2 + 2 = 317_{10}$
- 317:5 = 63 resto 2
  63:5 = 12 resto 3
  12:5 = 2 resto 2
  2:5 = 0 resto 2

Quindi, $102202_3 = 2232_5$

Conversioni da base *a* a base a^k

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

<u>Prop.:</u> nell'aritmetica in base *a* si ha che

$$c_{n-1} \dots c_1\, c_0 \ \bmod a^k = c_{k-1} \dots c_0$$
$$c_{n-1} \dots c_1\, c_0 \ \operatorname{div} a^k = c_{n-1} \dots c_k$$

Esempio ($a = 10$ e $k = 2$): 453_{10} mod 100 = 53
453_{10} div 100 = 4 (essendo $100 = 10^2$)

Quindi, se $b = a^k$ e $N_a = c_{n-1} \dots c_1\, c_0$, allora il numero in base b è
$(c_{n-1} \dots c_{hk})_b \dots (c_{3k-1} \dots c_{2k})_b\, (c_{2k-1} \dots c_k)_b\, (c_{k-1} \dots c_0)_b$

Caso specifico: *Conversione da base 2 a base 2^k*
Considera i bit a *k*-ple partendo dal meno significativo e traducile in base 2^k

<u>Esempio:</u> convertire 1000111101 da base 2 a base 4 (= 2^2)
$(10\ 00\ 11\ 11\ 01)_2 = (2\ 0\ 3\ 3\ 1)_4$

Esempio

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Convertire 101001101101 da base 2 a base 8 e 16
OSS: $8=2^3$ e $16=2^4$

Prima conversione: dividi in triple e converti
$(101\ 001\ 101\ 101)_2 \rightarrow (5\ 1\ 5\ 5)_8$
Seconda conversione: dividi in quadruple e converti
$(1010\ \ 0110\ \ 1101)_2 \rightarrow (A\ 6\ D)_{16}$

OSS: nel dividere in gruppi da *k* bit, il gruppo più significativo potrebbe avere meno di *k* bit (se la stringa di partenza non ha lunghezza pari a un multiplo di *k*); in tal caso vanno aggiunti degli zeri

Es: 1001101101 da base 2 a base 8: 001 001 101 101

Conversioni da base b^k a base b

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Similmente, se $a = b^k$ e $N_a = c_{n-1} \dots c_1\, c_0$, allora il numero in base b è

$$(c_{n-1})_b \dots (c_2)_b\, (c_1)_b\, (c_0)_b$$

dove ogni c_i è convertita in base b usando k cifre.

Esempio 1: Convertire 8315_9 in base 3
Essendo $9 = 3^2$, converto ogni cifra del numero dato in base 9 con due cifre in base 3:

$$8\ 3\ 1\ 5\ _9 = 22\ 10\ 01\ 12\ _3$$

Esempio 2: Convertire $8D3A_{16}$ in base 2
Essendo $16 = 2^4$, converto ogni cifra del numero dato in base 16 con quattro bit:

$$8\ D\ 3\ A\ _{16} = 1000\ 1101\ 0011\ 1010\ _2$$

Per convincervi dell'esattezza del metodo, fate le conversioni inverse come spiegato nei lucidi precedenti!

21

Conversione di base: Riassunto

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

- Il metodo polinomiale è facile se la base di arrivo è 10
- Il metodo delle divisioni iterate è facile se la base di partenza è 10
- Se né la base di partenza né quella di arrivo è 10:

Soluzione generale:
- Converto N_a in base 10 col metodo polinomiale
- Converto il numero ottenuto in base b col metodo delle divisioni iterate

Se la base di arrivo è potenza della base di partenza ($b = a^k$):
- Converto in base b k-ple di cifre, dalla meno alla più significativa, di N_a
- Le cifre così ottenute danno le cifre, dalla meno alla più significativa, del numero rappresentato in base b

Se la base di partenza è potenza della base di arrivo ($a = b^k$):
- Converto in base b ogni cifra di N_a usando k cifre (di base b)

Numero di sequenze binarie

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Avendo a disposizione n bit, quante diverse sequenze posso creare?

1 bit:	0	,	1	→ 2 sequenze
2 bit:	00,01	,	10,11	→ 4 sequenze
3 bit:	000,001,010,011,		100,101,110,111	→ 8 sequenze
4 bit:	…		…	→ 16 sequenze

…

Ad ogni passo raddoppio le sequenze del passo precedente

n bit: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2}_{n} = 2^n$ sequenze

23

Intervallo di Rappresentazione

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Quindi, con n bit, rappresentiamo 2^n numeri: $\{0,\dots,2^n-1\}$

Infatti, il numero più piccolo che possiamo rappresentare è

$$\underbrace{0 \dots 0}_{n} = \underbrace{0 + \dots + 0}_{n} = 0$$

mentre il numero più grande che possiamo rappresentare è

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \qquad \text{(è la serie geometrica!)}$$

24

Lunghezza della rappresentazione

Di quanti bit abbiamo bisogno per rappresentare un numero N_2?
Risposta: dobbiamo trovare il più piccolo $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$N < 2^n$$

OSS: $\log_b k$ è l'esponente che bisogna dare alla base (b) per ottenere l'argomento (k), cioè

$$k = b^{\log_b k}$$

Quindi, ponendo $k = N$ e $b = 2$, la soluzione di $N = 2^n$ è $n = \log_2 N$
N.B.: in generale, n è un numero irrazionale. Siccome voglio un naturale e non voglio l'uguaglianza esatta, prendo $\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$

Esempi: $N = 57$: $\log_2 N = 5{,}8328\ldots$
quindi ho bisogno di 5+1 bit (infatti $57_{10} = 111001_2$)
$N = 64$: $\log_2 N = 6$
quindi ho bisogno di 6+1 bit (infatti $64_{10} = 1000000_2$)

25

Lunghezza di parole di codice

Per semplicità, gli elaboratori lavorano su parole di codice di lunghezza fissata, tipicamente, potenze di 2 bit:

- 8 bit = *byte*
- 16 bit = *half-word*
- 32 bit = *word*
- 64 bit = *long word*

Sia k la lunghezza della parola di codice adottata:

- se un numero è rappresentabile con esattamente k bit, siamo a posto
- se un numero è rappresentabile con meno di k bit (diciamo n), dobbiamo inserire in testa k-n zeri (non significativi)
- se un numero, per essere rappresentato, richiede più di k bit?
  Si considerano solo i k bit meno significativi del numero
  → situazione di errore detta *overflow*

26