UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

34. Applicazioni lineari e matrici

Richiami

- Le applicazioni lineari tra spazi K^n si descrivono attraverso matrici
- L'uso delle matrici traduce l'esistenza, o la scelta, di una base preferita (quella *canonica*)
- A volte, il contesto non fornisce una base preferita, o ne suggerisce più di una
- Oggi: **Matrice associata ad un'applicazione lineare in basi diverse**
- **Cambiamenti di base e cambiamenti di coordinate**
- **Il problema della diagonalizzazione**

Matrici

Abbiamo incontrato un modo nuovo di associare una matrice ad un'applicazione lineare. Gli ingredienti sono:

- Due K-spazi vettoriali (di dimensione finita) U, V
- Un'applicazione K-lineare $F : U \to V$
- Una base $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ dello spazio vettoriale U
- Una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dello spazio vettoriale V

La matrice $[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ ha sulla sua i-esima colonna le coordinate di $F(u_i)$ nella base $\mathcal{V}$.

Notazione: le coordinate di $v \in V$ rispetto ad una base $\mathcal{V}$ di V, **scritte in colonna**, si indicano con $[v]_{\mathcal{V}}$.

A volte, per motivi psicologici, aggiungo delle barrette verticali per indicare che le coordinate sono scritte in colonna. Allora:

$$[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [F(u_1)]_{\mathcal{V}} & [F(u_2)]_{\mathcal{V}} & \ldots & [F(u_m)]_{\mathcal{V}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Come si usano le matrici?

$$[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [F(u_1)]_{\mathcal{V}} & [F(u_2)]_{\mathcal{V}} & \dots & [F(u_m)]_{\mathcal{V}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

La matrice $[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ soddisfa

$$[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ [F(u_1)]_{\mathcal{V}} \\ | \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , \quad [F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ [F(u_m)]_{\mathcal{V}} \\ | \end{pmatrix}.$$

In altre parole,

$$[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}[u_1]_{\mathcal{U}} = [F(u_1)]_{\mathcal{V}}, \quad \dots \quad , \quad [F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}[u_m]_{\mathcal{U}} = [F(u_m)]_{\mathcal{V}}.$$

Sfruttando la linearità, si ottiene $[F]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}[u]_{\mathcal{U}} = [F(u)]_{\mathcal{V}}$.

Cambiamenti di base

Se $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V, l'applicazione che associa a ciascun elemento $v \in V$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{V}$ non è altro che

$$C_{\mathcal{V}}^{-1} = C_{v_1,\ldots,v_n}^{-1} : V \to K^n.$$

Pertanto

$$[v]_{\mathcal{V}} = C_{\mathcal{V}}^{-1}(v),$$

tranne che per il fatto che scriviamo le coordinate in colonna.

Se ho un'altra base $\mathcal{V}'$ dello stesso spazio vettoriale V, come faccio a tradurre le coordinate di un vettore dalla prima base nella seconda?

$$[v]_{\mathcal{V}} \quad \rightsquigarrow \quad [v]_{\mathcal{V}'}$$

E' facile, basta applicare $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}$!!! $\qquad [\mathrm{Id}]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}[v]_{\mathcal{V}} = [\mathrm{Id}(v)]_{\mathcal{V}'} = [v]_{\mathcal{V}'};$

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'} = C_{\mathcal{V}'}^{-1} \circ C_{\mathcal{V}}.$$

Composizione

Supponiamo di avere tre spazi vettoriali U, V, W e due applicazioni lineari $T : U \to V$, $S : V \to W$.

Abbiamo scelto anche una base $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ in ciascuno degli spazi vettoriali. Allora

$$
\begin{aligned}
[S \circ T]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} [u]_{\mathcal{U}} = [S(T(u))]_{\mathcal{W}} = [S]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} [T(u)]_{\mathcal{V}} &= [S]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \; ([T]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} [u]_{\mathcal{U}}) \\
&= ([S]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} [T]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}) \; [u]_{\mathcal{U}}.
\end{aligned}
$$

Pertanto,

$$[S \circ T]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} = [S]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} [T]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}.$$

In altre parole, se le basi sono tutte compatibili, la matrice associata alla composizione $S \circ T$ è il prodotto righe per colonne delle matrici associate rispettivamente a S e a T.

Cambiamenti di base

La regola appena vista per la composizione, ci fornisce anche uno strumento rapido per scrivere la matrice associata ad un'applicazione lineare $T : U \to V$ rispetto ad una scelta di basi una volta che la conosciamo rispetto ad un'altra scelta di basi.

Se U, V sono spazi vettoriali, e $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ sono basi di U, mentre $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ sono basi di V, allora

$$[T]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'} = [\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id}]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} [T]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}.$$

E' importante notare che $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \mathrm{Id}$, e quindi le matrici $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}, [\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}$ sono una l'inversa dell'altra. Si scrive allora anche

$$[T]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} \, [T]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \, ([\mathrm{Id}]_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}})^{-1}.$$

Un caso particolare - I

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare, e sappiamo qual è la matrice $[T]$ associata a T nel modo usuale utilizzato finora.

Se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^m$ e $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, come possiamo trovare la matrice $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?

Se $\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n$ sono le basi canoniche di $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ rispettivamente, sappiamo già che

$$[T] = [T]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}.$$

Ma allora

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n} \; [T]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} \; [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n} \; [T] \; [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{B}}.$$

Un caso particolare - II

Facciamo i conti più in dettaglio e cerchiamo di capire come sia fatta la matrice $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_m}$.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$, allora

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad [v_m]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ma $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_m}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{E}_m}$ e quindi le colonne della matrice $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_m}$ sono le coordinate di $v_1, \ldots, v_m$ nella base $\mathcal{E}_m$. In altre parole,

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_m} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Un caso particolare - III

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n}\ [T]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}\ [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n}\ [T]\ [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{B}}.$$

In conclusione, se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ sono basi di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, allora

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{-1} \cdot [T] \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Un esempio - I

L'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{(1,-1),(2,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, calcolare $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Innanzitutto, $\mathcal{B}$ è una base, in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0.$$

In secondo luogo, ricordiamo che

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} \; [F]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2} \; [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2} \; [F] \; [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}}.$$

Un esempio - II

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}\ [F]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}\ [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}\ [F]\ [\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}}.$$

Allora,

$$\begin{aligned}
[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per terminare il conto abbiamo bisogno di calcolare una matrice inversa.

Un esempio - III

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice inversa con il metodo della matrice aggiunta, ricordando che il determinante della matrice da invertire è 1, e quindi non dobbiamo dividere.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione,

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice è diagonale, e l'azione di F è ora facile da comprendere.

L'idea della diagonalizzazione

- Se sappiamo trovare una base in cui un'applicazione lineare data ha matrice diagonale, l'azione dell'applicazione è facile da descrivere
- A volte, l'azione di un'applicazione lineare è descritta geometricamente in modo facile (= diagonale) in una certa base, ma non sappiamo in quale
- Altre volte, l'azione di un'applicazione lineare è descritta geometricamente in modo facile (= diagonale) in una base nota, ma abbiamo bisogno di fare i conti in una base diversa
- Come è fatta una base diagonalizzante?

Nelle prossime lezioni

- Come si trova una base diagonalizzante?
- Tutte le applicazioni lineari sono diagonalizzabili?

Autovettori

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V. Che cosa possiamo dell'applicazione lineare $T : V \to V$ se la matrice $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale?

Sappiamo che $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$. D'altronde, poiché $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale, allora

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

e quindi, $[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [\lambda_i v_i]_{\mathcal{B}}$. Poiché due vettori coincidono esattamente quando hanno le stesse coordinate,

- $T(v_1) = \lambda_1 v_1, T(v_2) = \lambda_2 v_2, \ldots, T(v_n) = \lambda_n v_n$

Un vettore che viene mandato da T in un multiplo di se stesso è detto autovettore di T.