UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

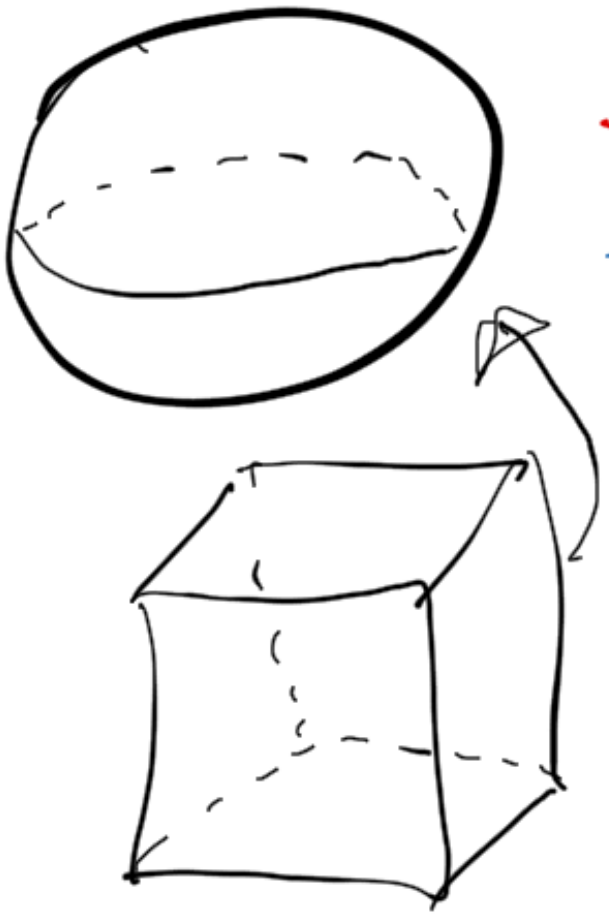
Probabilità

Marco Isopi

20. Il metodo probabilistico.

METODO PROBABILISTICO

- Combinatoria enumerativa
- Combinatoria estremale



90% rosso

10% blu

in modo tale che tutti i vertici del cubo devono essere di colore rosso

POSSO SEMPRE FARLO??

$r = 1, \ldots 8 \quad B_r = \{\text{il vertice } r \text{ è blu}\}$

$\{\text{almeno un vertice del cubo è blu}\} = \bigcup_{r=1}^{8} B_r \, ; \quad P\left(\bigcup_{r=1}^{8} B_r\right) \leq \sum_{r=1}^{8} P(B_r)$

$P\left(\bigcup_{r=1}^{8} B_r\right) \leq \frac{8}{10} < 1 \implies$

$\boxed{P(B_r) = \frac{1}{10}}$

$P(\text{tutti i vertici sono rossi}) \geq \frac{2}{10}$

X discreta (e finita)

ci sono ω : $X(\omega) > E(X)$

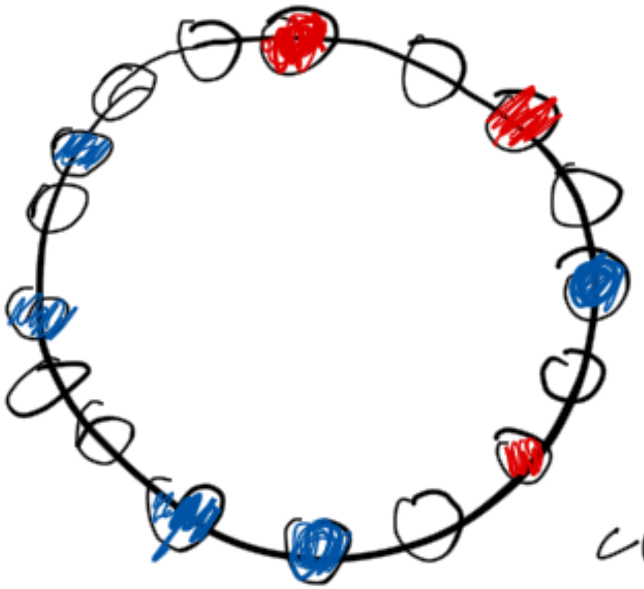
e altri t.c. $X(\omega) < E(X)$

se X non è costante

17 gettoni

12 blu

5 rossi



Per qualunque disposizione è possibile trovare 7 gettoni consecutivi t.c. almeno 3 sono rossi.

$K = 1, \dots 17$ $\quad I_K = \begin{cases} 1 & \text{se rosso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

R_K = # gettoni rossi nelle posizioni da $K+1$ a $K+7$

$$R_K = \sum_{j=1}^{7} I_{K+j} = I_{K+1} + I_{K+2} + \dots + I_{K+7}$$

$K \sim$ unif $\{1, \dots 17\}$

$$E(R_K) = \frac{1}{17} \sum_{k=1}^{17} I_{k+1} + I_{k+2} + \cdots I_{k+7}$$

$+ \bmod p.e \quad I_{21} = I_4$

$$= \sum_{j=1}^{17} \frac{7}{17} I_j = \frac{7}{17} \sum_{j=1}^{17} I_j = \frac{7}{17} \cdot 5$$

$$= \frac{35}{17} > 2 \Rightarrow P(R_K > 2) > 0$$

$$\Rightarrow P(R_K \geq 3) > 0$$

$$G = (V, E) \; ; \quad W \subset V, \; e \in E$$

$$I_W(e) = \begin{cases} 1 & W \overset{e}{\longleftrightarrow} W^c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$$

per qualunque grafo G, $\exists \, W \subset V$ t.c.

$$N_W \geq \frac{1}{2} |E|$$

$$G = (V, E) \, ; \quad W \subset V, \, e \in E$$

$$I_W(e) = \begin{cases} 1 & W \xleftrightarrow{e} W^c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$$

per qualunque grafo G, $\exists \, W \subset V$ t.c.

$$N_W \geq \frac{1}{2} |E|$$

CAMMINO HAMILTONIANO

Trovare un C.A. è un problema
NP-COMPLETO

TORNEO : n partecipanti, $n \geq 3$

girone all'italiana: tutti giocono con tutti

partite giocate $\binom{n}{2}$

Cammino hamiltoniano in un torneo di n giocatori è una sequenza di giocatori $i_1\, i_2\, i_3 \dots i_n$ tale che i_1 batte i_2, i_2 batte i_3 .... i_{n-1} batte i_n

Come posso organizzare i risultati delle partite in modo di avere il maggior numero possibile di cammini hamiltoniani?

3 giocatori $\quad i_1 > i_2$, $i_1 > i_3$

$i_2 > i_3$! $\longrightarrow$ $i_1\, i_2\, i_3$

$i_3 > i_2$ $\longrightarrow$ $i_1\, i_3\, i_2$

---

ognuno gioca due partite e ne vince una

$i_1 > i_2$, $i_2 > i_3$, $i_3 > i_1$

$i_1\, i_2\, i_3$, $i_2\, i_3\, i_1$, $i_3\, i_1\, i_2$

se $n=3$ ci sono al max 3 C. A.

Teo: con n giocatori esiste un esito del torneo che fornisce più di $\frac{n!}{2^{n-1}}$ cammini hamiltoniani.

S = tutti gli esiti possibili

$|S| = 2^{\binom{n}{2}}$ $\quad s \in S$

$f: S \to \mathbb{N}$ $\quad f(s) = \#$C.A. nell'esito s

$$\max_{s \in S} f(s) \geq \frac{n!}{2^{n-1}}$$

ogni partita è decisa dal lancio di una moneta equa $\Longrightarrow$ tutti gli esiti $s \in S$ sono equiprobabili e $P(s) = 2^{-\binom{n}{2}}$ $\forall s$

$T \in S$; $f(T)$ è una v.a.

$E(f(T))$

ci sono $n!$ permutazione degli n giocatori. $j = 1 \ldots n!$

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ è un c. a.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(T) = \sum_j X_j \; ; \; E(f(T)) = \sum_j E(X_j)$$

$P(\text{una permutazione sia hamiltoniana}) =$

$$(2^{n-1})^{-1} \Longrightarrow E(X_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$E(f(T)) = n!\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$f(T)$ <u>non</u> è cost.