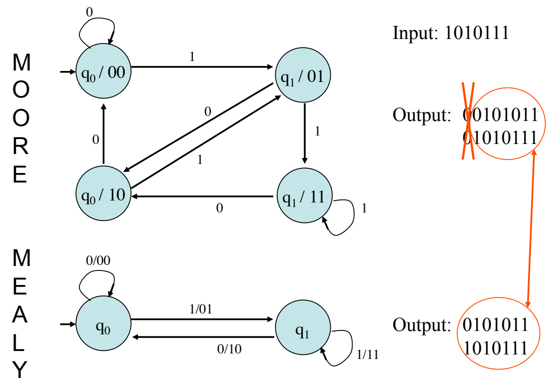
Equivalenza dei modelli di Mealy e Moore

Prof. Daniele Gorla

Moore vs Mealy nell'esempio dei resti MOD 4



Equivalenza tra automi

Vogliamo considerare equivalenti due automi in base al loro comportamento, astraendo quindi da come sono definiti.

Approccio *"a scatola nera"*: l'unico modo per studiare gli automi è facendo esperimenti:

- due automi NON sono equivalenti se riesco a trovare una sequenza di input che nei due automi genera output diversi
- altrimenti sono equivalenti.

Def.: due automi (dello stesso tipo) sono *equivalenti* se, per ogni possibile sequenza di input, generano entrambi la stessa sequenza di output.

Def.: due automi (di tipo diverso) sono *equivalenti* se, per ogni possibile sequenza di input, generano sequenze di output che differiscono esclusivamente per il primo carattere nell'output dell'automa di Moore.

Dimostrazioni per induzione

Problema: per dimostrare un'equivalenza devo considerare *tutte* le possibili sequenze di input

Quante sono? Anche assumendo l'alfabeto di input più piccolo possibile ($|\Sigma|$=1, per esempio $\Sigma = \{a\}$), ho *infinite* sequenze possibili:

ε, *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, …

La sequenza vuota, cioè senza alcun carattere

Un modo per dimostrare una proprietà P(-) su tutte queste stringhe σ è usando il *principio di induzione*:

- **Passo base:** dimostra P(ε)
- **Passo induttivo:** assumendo vera P(σ) per ogni σ lunga *n*, dimostra P(σ'), per una generica σ' lunga *n*+1
  (N.B.: *n* è generico!)

Così dimostro P(σ) per ogni σ!!

0. P(σ), per $|\sigma| = 0$, è dimostrata: P(ε) è dimostrata nel caso base
1. P(σ), per $|\sigma| = 1$, si dimostra usando il punto 0 e il passo induttivo
2. P(σ), per $|\sigma| = 2$, si dimostra usando il punto 1 e il passo induttivo

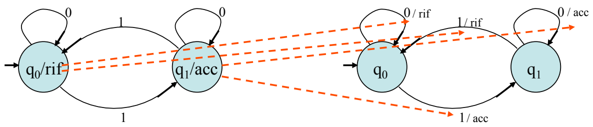
…

Da Moore a Mealy

Teor.: Sia $M_1 = (Q,\Sigma,\Delta,q_0,\delta,\lambda)$ un automa di Moore; allora esiste un automa di Mealy ad esso equivalente.

Dim. Sia $M_2 = (Q, \Sigma,\Delta,q_0,\delta,\lambda')$, dove $\lambda'(q,a) = \lambda(\delta(q,a))$.
Cioè, in M_2 assegno ad ogni transizione l'output associato allo stato di arrivo in M_1.

Es.(automa che accetta tutte e sole le stringhe con un numero dispari di 1):



Resta da dimostrare che M_1 ed M_2 sono equivalenti.

Equivalenza Moore/Mealy

Sia σ una sequenza di input; dimostriamo, per induzione sulla lunghezza di σ (cioè, sul numero di caratteri in essa presenti), che

$$M_1(\sigma) = c_0\, M_2(\sigma)$$

dove $c_0 = \lambda(q_0)$.

con $M(\sigma)$ denoto l'output di M con input σ

Base ($\sigma = \varepsilon$): per definizione, $M_1(\varepsilon) = c_0$ e $M_2(\varepsilon) = \varepsilon$.
La tesi segue dal fatto che $c_0\, \varepsilon = c_0$.

Induzione (tesi vera per σ lunga n caratteri, da dim. per σ lunga n+1):
Se σ è lunga n+1 caratteri, allora $\sigma = \sigma' a$, per qualche $a \in \Sigma$; quindi, σ' è lunga n. Per ipotesi induttiva, $M_1(\sigma') = c_0\, M_2(\sigma')$.

Per come funzionano gli automi, $M_1(\sigma) = M_1(\sigma')\, c$, dove $c = \lambda(\delta(q,a))$ e q è lo stato in cui si trova M_1 dopo aver letto σ'.

Similmente, $M_2(\sigma) = M_2(\sigma')\, c$, visto che M_2 si trova in q dopo aver letto σ' (la funzione di transizione è la stessa di M_1) e, per definizione di M_2, $\lambda'(q,a) = \lambda(\delta(q,a)) = c$.
Quindi, $M_1(\sigma) = M_1(\sigma')\, c = c_0\, M_2(\sigma')\, c = c_0\, M_2(\sigma)$.

C.V.D.

Da Mealy a Moore

Teor.: Sia $M_1 = (Q,\Sigma,\Delta,q_0,\delta,\lambda)$ un automa di Mealy; allora esiste un automa di Moore ad esso equivalente.

Dim. Sia $M_2 = (Q\times\Delta,\Sigma,\Delta,(q_0,b),\delta',\lambda')$, dove

- b è un qualsiasi carattere di Δ
- $\delta'(\,(q,c)\,,\, a) = (\,\delta(q,a), \lambda(q,a)\,)$
- $\lambda'(\,(q,c)\,) = c$

OSS.: le transizioni di M_2 sono determinate solo dal primo elemento della coppia e dal valore dell'input!

Per induzione, si dimostra di nuovo che M_1 ed M_2 sono equivalenti.

Equivalenza Mealy/Moore

Sia σ una sequenza di input; per induzione sulla lunghezza di σ dimostriamo che

$$M_2(\sigma) = b\, M_1(\sigma)$$

dove (q_0,b) è lo stato iniziale in M_2.

Base ($\sigma = \varepsilon$): per definizione, $M_2(\varepsilon) = b$ e $M_1(\varepsilon) = \varepsilon$.

Induzione (tesi vera per σ lunga n caratteri, da dim. per σ lunga n+1):
Se σ è lunga n+1 caratteri, allora $\sigma = \sigma' a$, per qualche $a \in \Sigma$; quindi, σ' è lunga n. Per ipotesi induttiva, $M_2(\sigma') = b\, M_1(\sigma')$.

Per come funzionano gli automi, $M_1(\sigma) = M_1(\sigma')\, c$, dove $c = \lambda(q,a)$ e q è lo stato in cui si trova M_1 dopo aver letto σ'.

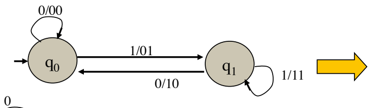
Similmente, $M_2(\sigma) = M_2(\sigma')\, c$, visto che M_2 si trova in q dopo aver letto σ' (per l'osservazione precedente, la funzione di transizione non dipende dai caratteri di output) e, per definizione di M_2, $\lambda'(\delta'(q,a)) = \lambda(q,a) = c$.

Quindi, $M_2(\sigma) = M_2(\sigma')\, c = b\, M_1(\sigma')\, c = b\, M_1(\sigma)$.

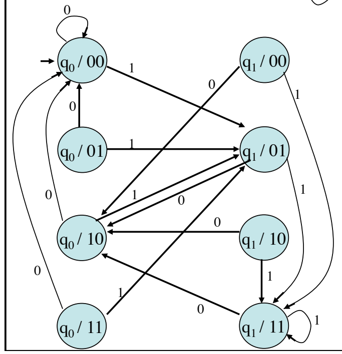
C.V.D.

Da Mealy a Moore: esempio dei resti MOD 4

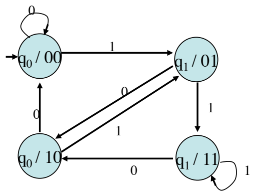
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica



$Q = \{q_0, q_1\}$ $\Delta = \{00, 01, 10, 11\}$



≠



????