UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

06. Successioni per ricorrenza

Interessi bancari I

Supponiamo di avere a che fare con una banca ideale,

Interessi bancari I

Supponiamo di avere a che fare con una banca ideale, partendo da un certo capitale

$$C_0 = c_0$$

Interessi bancari I

Supponiamo di avere a che fare con una banca ideale, partendo da un certo capitale

$$C_0 = c_0$$

con spese s e tasso di interesse j

$$C_{n+1} - C_n = jC_n - s$$

Interessi bancari I

Supponiamo di avere a che fare con una banca ideale, partendo da un certo capitale

$$C_0 = c_0$$

con spese s e tasso di interesse j

$$C_{n+1} - C_n = jC_n - s$$

da cui

$$C_{n+1} = (1 + j)C_n - s$$

Successioni per ricorrenza I

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del primo a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+1} = rA_n + d \\ A_0 = a_0 \end{cases}$$

Successioni per ricorrenza I

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del primo a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+1} = rA_n + d \\ A_0 = a_0 \end{cases}$$

Proviamo a cercare una soluzione della seguente forma

$$A_{n+1} = cr^{n+1} + k$$

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$cr^{n+1} + k = r\left(cr^n + k\right) + d$$

Successioni per ricorrenza I

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$cr^{n+1} + k = r\left(cr^n + k\right) + d$$

invece il dato iniziale ci fornisce la seconda relazione

$$A_0 = a_0$$

Successioni per ricorrenza I

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$cr^{n+1} + k = r\left(cr^n + k\right) + d$$

invece il dato iniziale ci fornisce la seconda relazione

$$A_0 = a_0 = c + k$$

Successioni per ricorrenza I

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$cr^{n+1} + k = r\,(cr^n + k) + d$$

invece il dato iniziale ci fornisce la seconda relazione

$$A_0 = a_0 = c + k$$

e risolvendo il sistema ottieniamo

$$A_{n+1} = \left(a_0 - \frac{d}{1-r}\right) r^{n+1} + \frac{d}{1-r}$$

Interessi bancari II

Il nostro modello degli interessi bancari era

$$\begin{cases} C_{n+1} = (1 + j)C_n - s \\ C_0 = c_0 \end{cases}$$

Interessi bancari II

Il nostro modello degli interessi bancari era

$$\begin{cases} C_{n+1} = (1+j)C_n - s \\ C_0 = c_0 \end{cases}$$

e la sua soluzione risulta

$$C_n = \left(c_0 - \frac{s}{j}\right) j^n + \frac{s}{j}$$

Successioni per ricorrenza II

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+2} = rA_{n+1} + dA_n + s \\ A_0 = a \qquad A_1 = b \end{cases}$$

Successioni per ricorrenza II

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+2} = rA_{n+1} + dA_n + s \\ A_0 = a \qquad A_1 = b \end{cases}$$

scriviamo esplicitamente alcuni termini della successione

$$A_0 = a \qquad A_1 = b$$

Successioni per ricorrenza II

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+2} = rA_{n+1} + dA_n + s \\ A_0 = a \qquad A_1 = b \end{cases}$$

scriviamo esplicitamente alcuni termini della successione

$$A_0 = a \qquad A_1 = b$$
$$A_2 = rA_1 + dA_0 + s$$

Successioni per ricorrenza II

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+2} = rA_{n+1} + dA_n + s \\ A_0 = a \qquad A_1 = b \end{cases}$$

scriviamo esplicitamente alcuni termini della successione

$$A_0 = a \qquad A_1 = b$$
$$A_2 = rA_1 + dA_0 + s = rb + da + s$$
$$A_3 = rA_2 + dA_1 + s$$

Successioni per ricorrenza II

Adottiamo nuovamente la strategia iniziale e cerchiamo una soluzione nella forma

$$A_n = c\lambda^n + \mu$$

sostituendo nell'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} + \mu = r\left(c\lambda^{n+1} + \mu\right) + d\left(c\lambda^n + \mu\right) + s$$

Adottiamo nuovamente la strategia iniziale e cerchiamo una soluzione nella forma

$$A_n = c\lambda^n + \mu$$

sostituendo nell'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} + \mu = r\left(c\lambda^{n+1} + \mu\right) + d\left(c\lambda^n + \mu\right) + s$$

da cui abbiamo subito che

$$\mu = \frac{s}{1 - r - d}$$

Successioni per ricorrenza II

Tornando all'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} = rc\lambda^{n+1} + dc\lambda^n$$

Successioni per ricorrenza II

Tornando all'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} = rc\lambda^{n+1} + dc\lambda^n$$

semplificando troviamo che λ deve risolvere l'equazione

$$\lambda^2 - r\lambda - d = 0$$

Successioni per ricorrenza II

Tornando all'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} = rc\lambda^{n+1} + dc\lambda^n$$

semplificando troviamo che λ deve risolvere l'equazione

$$\lambda^2 - r\lambda - d = 0 \quad \text{cioè} \quad \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(r \pm \sqrt{r^2 - 4d}\right)$$

Successioni per ricorrenza II

Tornando all'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} = rc\lambda^{n+1} + dc\lambda^{n}$$

semplificando troviamo che λ deve risolvere l'equazione

$$\lambda^2 - r\lambda - d = 0 \quad \text{cioè} \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(r \pm \sqrt{r^2 - 4d}\right)$$

quindi

$$A_n = c_1\lambda_+^n + c_2\lambda_-^n + \frac{s}{1 - r - d}$$

Successioni per ricorrenza II

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Adesso possiamo utilizzare i dati iniziali, infatti

$$A_0 = c_1 + c_2 + \frac{s}{1 - r - d} = a$$

Adesso possiamo utilizzare i dati iniziali, infatti

$$A_0 = c_1 + c_2 + \frac{s}{1-r-d} = a$$
$$A_1 = c_1\lambda_+ + c_2\lambda_- + \frac{s}{1-r-d} = b$$

Adesso possiamo utilizzare i dati iniziali, infatti

$$A_0 = c_1 + c_2 + \frac{s}{1-r-d} = a$$
$$A_1 = c_1\lambda_+ + c_2\lambda_- + \frac{s}{1-r-d} = b$$

ora dobbiamo risolvere un ultimo sistema algebrico per identificare i coefficienti c_1 e c_2,

Successioni per ricorrenza II

Adesso possiamo utilizzare i dati iniziali, infatti

$$A_0 = c_1 + c_2 + \frac{s}{1-r-d} = a$$
$$A_1 = c_1\lambda_+ + c_2\lambda_- + \frac{s}{1-r-d} = b$$

ora dobbiamo risolvere un ultimo sistema algebrico per identificare i coefficienti c_1 e c_2, da cui

$$A_n = \left(\frac{b-a\lambda_-}{\lambda_+-\lambda_-} + \frac{s(\lambda_- - 1)}{(\lambda_+-\lambda_-)(1-r-d)}\right)\lambda_+^n + \left(\frac{a\lambda_+-b}{\lambda_+-\lambda_-} + \frac{s(1-\lambda_+)}{(\lambda_+-\lambda_-)(1-r-d)}\right)\lambda_-^n$$

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1,

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1, 2,

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1, 2, 3,

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1, 2, 3, 5,

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1, 2, 3, 5, 8,

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55 \ \dots$$

è descritta dalla seguente legge

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ \end{cases}$$

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55 \; \ldots$$

è descritta dalla seguente legge

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55 \ \ldots$$

è descritta dalla seguente legge

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

dai conti precedenti abbiamo che

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

L'algoritmo di Erone

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) \\ X_0 = 2 \end{cases}$$

i. $X_n > 0$ e $X_n^2 \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

L'algoritmo di Erone

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) \\ X_0 = 2 \end{cases}$$

i. $X_n > 0$ e $X_n^2 \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

ii. X_n è non crescente

L'algoritmo di Erone

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) \\ X_0 = 2 \end{cases}$$

i. $X_n > 0$ e $X_n^2 \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
ii. X_n è non crescente
iii. allora $X_n \longrightarrow L$

L'algoritmo di Erone

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) \\ X_0 = 2 \end{cases}$$

i. $X_n > 0$ e $X_n^2 \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
ii. X_n è non crescente
iii. allora $X_n \longrightarrow L$
iv. infine

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \qquad \text{da cui} \qquad L = \sqrt{2}$$

Protagonisti

Leonardo Pisano Fibonacci

1170 - 1250