Quadrati, lati e diagonali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Per assurdo supponiamo che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{con} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

$p_1 = 2$

allora abbiamo

$$\sqrt{2}q = p$$

da cui

$$\cancel{2q^2 = p^2}$$

$$p^2 = p_1^{2m_1} \cdot p_2^{2m_2} \cdot \ldots \cdot p_N^{2m_N} = 2^{2m_1} \text{—}$$

$$q^2 = q_1^{2m_1} \cdot q_2^{2m_2} \cdot \ldots \cdot q_k^{2m_k}$$

$$2q^2 = \begin{cases} 2\, q_1^{2m_1} \cdot \ldots \cdot q_k^{2m_k} \\ 2^{2m_1+1} \cdot q_2^{2m_2} \cdot \ldots \cdot q_k^{2m_k} \end{cases}$$

Assioma di Archimede

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

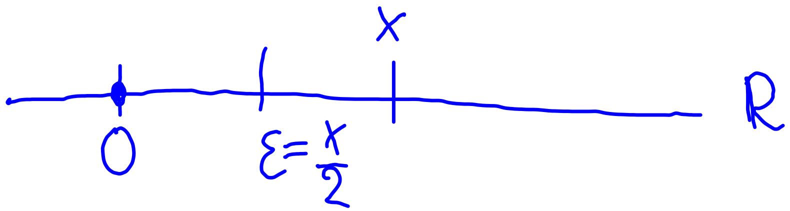
Assioma di Archimede.
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$k > a$$

Osservazione. Se x è un numero reale tale che

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad \boxed{x < \varepsilon} \text{ per ogni } \varepsilon > 0$$

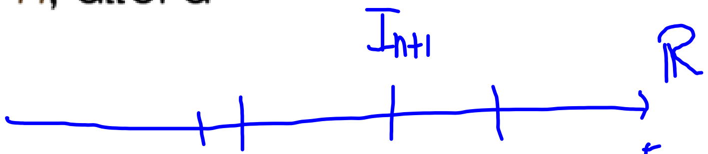
allora $x = 0$.



Principio di Cantor

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Principio degli intervalli incapsulati (Cantor).
Sia $\{I_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una collezione di intervalli non vuoti, chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni indice n, allora



$$I_n = [a_n, b_n] = \{a_n \leq x \leq b_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

Principio di Cantor

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$\mathbb{R}$ è completo

Principio degli intervalli incapsulati (Cantor).
Sia $\{I_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una collezione di intervalli non vuoti, chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni indice n, allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

$$I_n = \left[\sqrt{2} - \varepsilon_n, \sqrt{2} + \varepsilon_n\right]$$

$\sqrt{2} - \varepsilon_n$ $\quad p \quad$ $\sqrt{2} + \varepsilon_n$

$\sqrt{2}$

$$\frac{1}{n} = \varepsilon_n > 0$$

$$\bigcap I_n \neq \emptyset \qquad 0 < d = |p - \sqrt{2}| < \frac{1}{n} \quad \forall n$$

$$\{\sqrt{2}\}$$

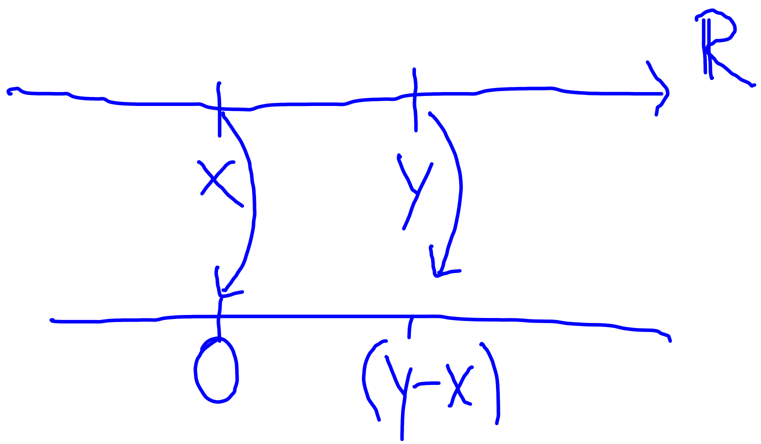
$$\Rightarrow n < \frac{1}{d} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \therefore$$

Ordinamento e distanza

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Ordinamento tra punti della retta.

$x \leq y$ se e solo se $y - x \geq 0$



Ordinamento e distanza

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Ordinamento tra punti della retta.

$$x \leq y \quad \text{se e solo se} \quad y - x \geq 0$$

Distanza tra punti della retta.

$$d(x, y) = |x - y| = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

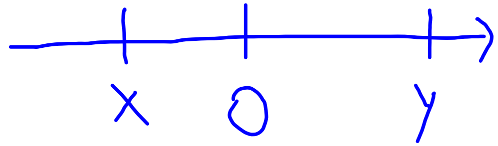
Si ricordi che $|x| = \max\{x, -x\}$.

Disuguaglianza triangolare

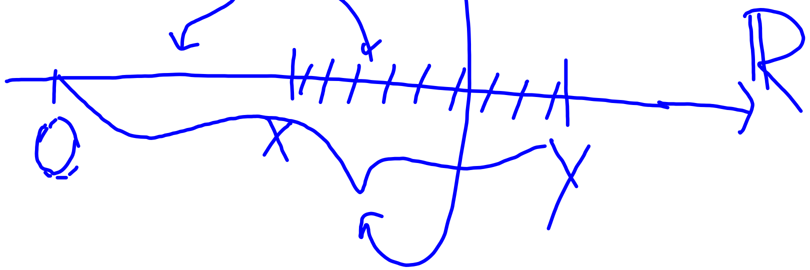
UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Disuguaglianza triangolare.
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale che

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$



$|x-y| = |x|+|y|$



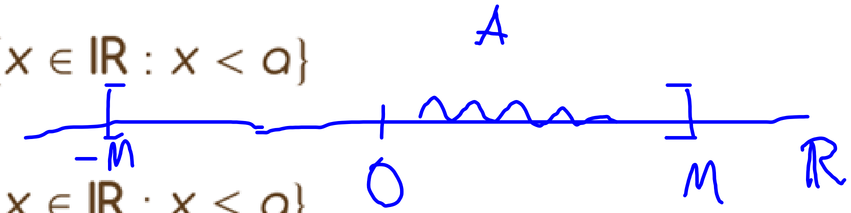
Insiemi limitati e non

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$



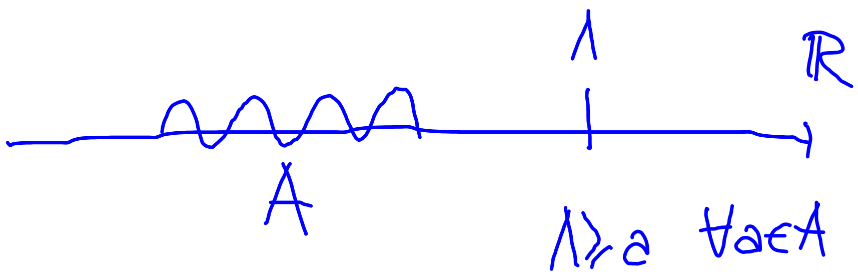
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Definizione. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $|x| \leq M$.

Estremi

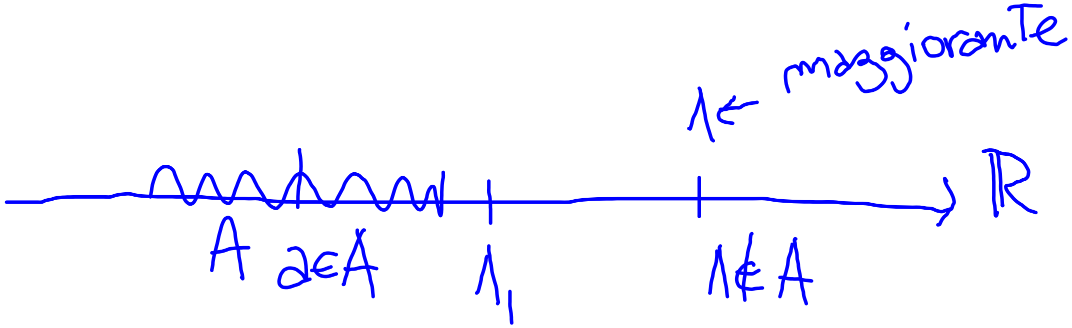
Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto chiameremo **maggiorante** di A un elemento $\Lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\Lambda \geq a$ per ogni $a \in A$.



Estremi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$



Estremi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato chiameremo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti, tale numero reale verrà indicato $\sup(A)$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato chiameremo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti, tale numero reale verrà indicato $\inf(A)$

Osservazione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato e sia $\inf(A)$ il suo estremo inferiore, allora

$a \leq \sup(A)$

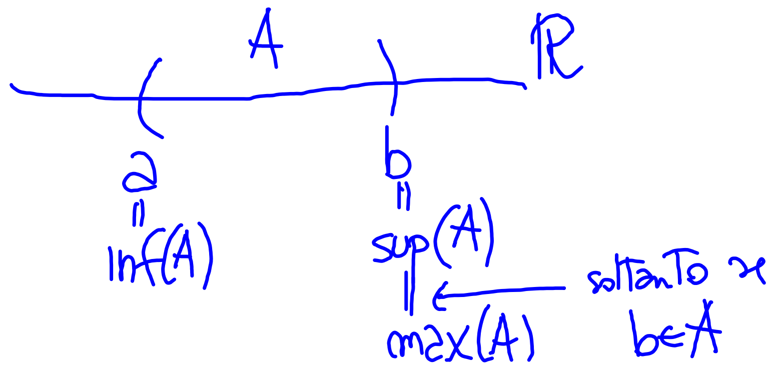
$$\forall a \in A \quad a \geq \inf(A)$$

Estremi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato se $\sup(A) \in A$ allora chiameremo tale numero reale **massimo** di A e lo indicheremo con $\max(A)$.



Estremi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

se A non è superiormente limitato $\Rightarrow \sup(A) = +\infty$

se A non è inferiormente limitato $\Rightarrow \inf(A) = -\infty$

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato se $\sup(A) \in A$ allora chiameremo tale numero reale **massimo** di A e lo indicheremo con $\max(A)$.

Definizione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato se $\inf(A) \in A$ allora chiameremo tale numero reale **minimo** di A e lo indicheremo con $\min(A)$.

Reali, razionali e numeri macchina...

UNITELMA SAPIENZA SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Teorema. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|a - q| < \varepsilon$$