Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 - \sin(x) = +\infty$$

$$\geq$$

$$x^2 - 1$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x\sqrt{1+x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \underbrace{(1+e^{-x})x^2}_{\geq\, 1 \cdot x^2} = +\infty$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{1 - \overbrace{2/x}^{\to 0}}{3 + \underbrace{1/x^2}_{\downarrow\, 0}} = \frac{1}{3}$$

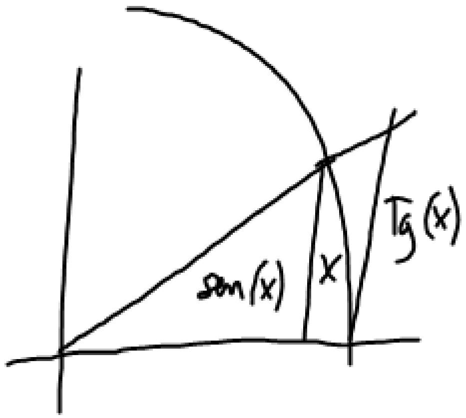
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{1 - 2/x}{1 + x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{x}{3 + 1/x^2} = -\infty$$

Limiti notevoli I

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$\text{sen}(x) \leq x \leq Tg(x)$$

$$1 \leq \frac{x}{\text{sen}(x)} \leq \frac{Tg(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{\substack{x\to -\pi \\ t\to 0}}\frac{\sin(x)}{(x+\pi)} \underset{x+\pi=t}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)\overset{-1}{\cos(\pi)} - \cancel{\overset{0}{\operatorname{sen}(\pi)}\cos(t)}}{t} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\downarrow\ 1/2}\cdot\underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}}_{\downarrow\ 1}\cdot\underbrace{x}_{\downarrow\ 0}\right] = 0$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{5x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{1 + x^2} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \cdot \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$e^{-2x} \to 0$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{4x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \ln(x^2) = -\infty$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\pi x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{e^{\pi x}-1}{\pi x}}_{\downarrow\, 1}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{x}+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{\mathrm{sen}(x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{e^{x}-1}{x}}_{\downarrow\, 1}+\underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\downarrow\, 1}\right]\underbrace{\frac{x}{\mathrm{sen}(x)}}_{\downarrow\, 1} = 2$$

Esempi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - e^{\pi x}}{2x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{e^x + 1} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} =$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\lim_{t\to-\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}_{\downarrow\, e}\right]^{-1}=\frac{1}{e}$$

$-x=t$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{L}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{L}{x}\right)^{\frac{x}{L}}\right]^{L}=e^{L}$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}=1$$

Esercizi

UNITELMA SAPIENZA SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\downarrow \, 1/2} \cdot \overbrace{x}^{0 \, \uparrow} \right] = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2} \underset{\uparrow \, -x^2 = t}{=} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{-t} = -1$$

Altri esercizi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=1$$

$$1=\frac{x}{x}=\frac{\ln(e^x)}{x}\le\frac{\ln(1+e^x)}{x}\le\frac{\ln(2e^x)}{x}=\frac{\ln(2)+x}{x}$$

$$\le 1+\frac{\ln(2)}{x}$$

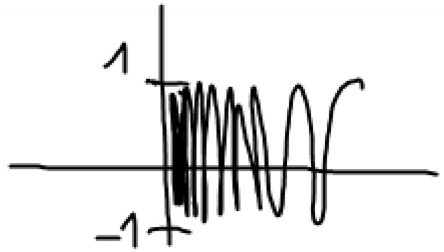
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}xe^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{+x^2}}=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2}=1$$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ 2

Esempi "negativi"

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$$



$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \to 0 \qquad \text{sen}\left(\frac{1}{x_k}\right) \longrightarrow 1$$

$$\text{sen}\left(\frac{1}{x_k}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1$$

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \to 0 \qquad \text{sen}\left(\frac{1}{\tilde{x}_k}\right) \longrightarrow -1$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\sin(e^x) = \nexists$$

$$\nexists \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x} = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(|x|)}{x} = \dfrac{\text{sen}(x)}{x} & x>0 \\[2ex] \dfrac{\text{sen}(-x)}{x} = -\dfrac{\text{sen}(x)}{x} & x<0 \end{cases}$$