

ALGEBRA

Scheda di esercizi n.1.

Congruenze, Teorema Cinese del Resto, Teorema di Eulero–Fermat.

Gli esercizi proposti sono tratti dalle schede di esercizi della Professoressa Claudia Malvenuto e dal Testo: *Giulio Campanella*, APPUNTI DI ALGEBRA 1, Duecento esercizi svolti, 2010, *Edizioni Nuova Cultura*.

Esercizio 1. Dimostrare che $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{6}$.

Esercizio 2. Siano a e b due interi. Dimostrare che $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ implica $a \equiv 0 \pmod{3}$ e $b \equiv 0 \pmod{3}$.

Esercizio 3. In $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ denotiamo con a una delle classi di 5, 21, 34, 45. Si dica se a è o meno invertibile in $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. In caso affermativo, se ne determini l'inverso, altrimenti si trovi una classe b tale che $ba = 0$.

Esercizio 4. Risolvere la congruenza $121X \equiv 22 \pmod{33}$ esibendo la totalità delle soluzioni a due a due incongrue $\pmod{33}$.

Esercizio 5. Discutere la compatibilità del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 8 \pmod{9} \\ 2X \equiv 6 \pmod{15} \end{cases}.$$

Esercizio 6. Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod{5} \\ X \equiv 1 \pmod{3} \\ X \equiv 6 \pmod{14} \\ X \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}.$$

Esercizio 7. Determinare, se esistono, i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali è compatibile il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 6425X \equiv 7 \pmod{12} \\ 8614X \equiv 3 \pmod{7} \\ 3X \equiv a \pmod{8} \end{cases}.$$

Esercizio 8. Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{Z}$ per i quali è compatibile il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} aX \equiv 3 \pmod{5} \\ 3X \equiv b \pmod{8} \end{cases}.$$

Esercizio 9. Determinare, se esiste, il minimo intero positivo n tale che 7123^n abbia come ultima cifra 1.

Esercizio 10. È assegnato il numero naturale $n = 133^{42}$.

- (i) Calcolare le ultime due cifre di n .
- (ii) Calcolare le ultime tre cifre di n .