UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

36. Criteri di diagonalizzabilità

Richiami

- Le applicazioni lineari $T : V \to V$ sono più facilmente descrivibili in una base che le diagonalizza
- Una base diagonalizzante è composta da autovettori
- Per determinare gli autovettori di T, si cercano prima gli autovalori — calcolando le radici del polinomio caratteristico $\det(T - x\,\mathrm{Id})$ — e poi si trova l'autospazio $\ker(T - \lambda\,\mathrm{Id})$, relativo a ciascun autovalore $\lambda \in K$, risolvendo un sistema di equazioni lineari.
- Oggi: **Se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è pari a** $\dim V$**, allora** T **è diagonalizzabile**
- **In tal caso, una base diagonalizzante si trova facendo l'unione delle basi, comunque scelte, degli autospazi**

Autovettori

Se $v \in V$ è un autovettore di un'applicazione lineare $T : V \to V$, può esserlo rispetto a due autovalori diversi? No!

$$T(v) = \lambda v, T(v) = \mu v \implies \lambda v = \mu v \implies (\lambda - \mu)v = 0 \implies v = 0.$$

Allo stesso modo, se v, w sono autovettori relativi ad autovalori $\lambda \neq \mu$, devono essere linearmente indipendenti. In effetti, se $\alpha v + \beta w = 0$, allora applicando T si ottiene

$$0 = T(0) = T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) = \alpha\lambda v + \beta\mu w.$$

Invece, moltiplicando per λ, si ottiene $\alpha\lambda v + \beta\lambda w = 0$.

Sottraendo, si ha $\beta(\lambda - \mu)w = 0$, da cui $\beta w = 0$, e quindi anche $\alpha v = 0$. Poiché v, w sono entrambi diversi da zero (sono autovettori!), allora $\alpha = \beta = 0$.

Il ragionamento è un po' farraginoso. Rendiamolo più pulito!

Indipendenza degli autospazi - I

Scegliamo elementi $v_1, \ldots, v_n$ con la proprietà che $T(v_i) = \lambda_i v_i$, con i λ_i tutti diversi. In altre parole, stiamo scegliendo n elementi, ciascuno da un autospazio diverso.

Attenzione: i vettori v_i non sono necessariamente autovettori, perché possono essere 0.

Vogliamo dimostrare la seguente osservazione centrale:

Proposizione

Se $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$, allora i v_i sono tutti nulli.

Indipendenza degli autospazi - II

Proposizione

Se i vettori v_i appartengono ad autospazi distinti di T, e $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$, allora i v_i sono tutti nulli.

La dimostrazione è facile e si fa per induzione su n. La base dell'induzione $n = 1$ è ovvia.

Se $n > 1$, applicando T si ottiene $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, mentre moltiplicando per λ_n si ottiene $\lambda_n v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Sottraendo, si ha

$$(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0.$$

Ciascuno degli $n - 1$ addendi sta in un autospazio diverso. Possiamo applicare l'ipotesi induttiva, e ottenere

$$(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 = 0, \ldots, (\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0.$$

Poiché $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$, si ottiene $v_1 = 0, v_2 = 0, \ldots, v_{n-1} = 0$. Allora anche $v_n = 0$ perché la somma di tutti i v_i era nulla.

Indipendenza di autovettori - I

Situazione: V è uno spazio vettoriale, $T : V \to V$ è un'applicazione lineare, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ sono autovalori distinti di T.

Scelgo una base di ciascun autospazio:

$$
\begin{aligned}
v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{d_1}^1 &\text{ base di } V^{\lambda_1} = \ker(T - \lambda_1 \,\mathrm{Id}) \\
v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{d_2}^2 &\text{ base di } V^{\lambda_2} = \ker(T - \lambda_2 \,\mathrm{Id}) \\
&\ldots\ldots \\
v_1^n, v_2^n, \ldots, v_{d_n}^n &\text{ base di } V^{\lambda_n} = \ker(T - \lambda_n \,\mathrm{Id})
\end{aligned}
$$

Voglio mostrare che

$$
v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{d_1}^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{d_2}^2, \ldots, v_1^n, v_2^n, \ldots, v_{d_n}^n
$$

sono linearmente indipendenti.

Indipendenza di autovettori - II

Voglio mostrare che

$$v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{d_1}^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{d_2}^2, \ldots, v_1^n, v_2^n, \ldots, v_{d_n}^n$$

sono linearmente indipendenti.

Prendiamo una combinazione lineare nulla, e mostriamo che tutti i coefficienti sono nulli. Se abbiamo

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 v_1^1 + \alpha_2 v_2^1 + \ldots + \alpha_{d_1} v_{d_1}^1) \\ &+(\beta_1 v_1^2 + \beta_2 v_2^2 + \ldots + \beta_{d_2} v_{d_2}^2) + \ldots \\ &+(\gamma_1 v_1^n + \gamma_2 v_2^n + \ldots + \gamma_{d_n} v_{d_n}^n) = 0, \end{aligned}$$

ciascun termine tra parentesi appartiene ad un autospazio diverso, e quindi deve annullarsi. $\leftarrow$ per il fatto che abbiamo dimostrato prima!!!

Ma allora, ad esempio, $\alpha_1 v_1^1 + \alpha_2 v_2^1 + \ldots + \alpha_{d_1} v_{d_1}^1 = 0$, e quindi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}$ sono tutti 0. Ripetendo lo stesso ragionamento per tutti gli addendi tra parentesi, si vede che i coefficienti sono tutti nulli.

Basi di autovettori - I

Ricapitoliamo:

- Una base diagonalizzante per $T : V \to V$ è costituita da autovettori di T
- Se prendo alcuni elementi di una base, rimangono linearmente indipendenti; pertanto, quegli autovettori di una base diagonalizzante, che stanno in uno stesso autospazio, sono linearmente indipendenti
- Il massimo numero di autovettori linearmente indipendenti che posso prendere in ciascun autospazio è pari alla molteplicità geometrica di quell'autovalore, cioè alla dimensione dell'autospazio

Basi di autovettori - II

- La molteplicità geometrica di ciascun autovalore è minore o uguale alla corrispondente molteplicità algebrica
- La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è minore o uguale a dim V
- **Scegliendo una base di vettori in ciascun autospazio e mettendo insieme, ottengo dei vettori linearmente indipendenti**, e il loro numero è uguale alla somma delle molteplicità geometriche, che è minore o uguale della somma delle molteplicità algebriche, che è minore o uguale di dim V
- L'unico modo di (sperare di) esibire una base diagonalizzante per T è di scegliere una base in ciascun autospazio e mettere insieme tutti i vettori. Se la somma delle molteplicità geometriche è dim V, ho ottenuto una base diagonalizzante
- Se la somma delle molteplicità geometriche è minore di dim V, non esistono basi diagonalizzanti!!!

Basi di autovettori - III

V è uno spazio vettoriale di dimensione finita.

- Un'applicazione lineare $T : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se **la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a** dim V.
- Se la molteplicità geometrica di anche solo un autovalore è inferiore alla corrispondente molteplicità algebrica, T non è diagonalizzabile.
- Se $K = \mathbb{C}$, T è diagonalizzabile se e solo se **ciascuna molteplicità geometrica coincide con la corrispondente molteplicità algebrica**.

Vediamo alcuni esempi.

Esempi - I

L'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico è

$$p_T(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1,$$

che non ha radici reali.

La somma delle molteplicità geometriche è $0 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Esempi - II

L'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico è ancora $x^2 + 1$. Le soluzioni di $x^2 + 1 = 0$ sono $x = \pm i$, che hanno entrambe molteplicità algebrica 1. Poiché

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda) \geq 1$$

vale per ogni autovalore, sia i che $-i$ hanno molteplicità geometrica 1. La somma delle molteplicità geometriche è $1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{C}^2$.

In generale, se ho $n = \dim V$ autovalori tutti di molt. algebrica 1, l'applicazione lineare $T : V \to V$ è automaticamente diagonalizzabile.

L'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico è

$$p_T(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)(1-x)+1 = x^2-4x+4 = (x-2)^2.$$

L'unica soluzione di $(x-2)^2 = 0$ è $x = 2$, che ha molteplicità algebrica 2.

Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 2, cioè la dimensione di $\ker(T - 2\,\mathrm{Id})$.

Esempi - IV

L'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\ker(T - 2\,\mathrm{Id})$, procediamo con l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango è 1, quindi la dimensione dell'autospazio è $2 - 1 = 1$. La molteplicità geometrica vale 1, mentre quella algebrica vale 2. L'applicazione non è diagonalizzabile.

Per la cronaca, l'autospazio è la retta $\langle (1, -1) \rangle$.

Conclusione

Il corso è terminato.

Aggiungerò qualche approfondimento alle lezioni registrate finora, per dare delle applicazioni e spiegare per quale motivo il linguaggio dell'algebra lineare sia concretamente utile.

Buon lavoro!