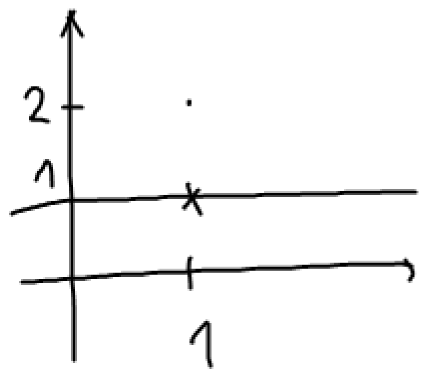
# Definizione di limite

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

**Definizione.**
Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Dato $\rho \in A$ diremo che $f$ ha **limite** $l$ per $x$ che tende a $\rho$ se

per ogni $J_l$ intorno di $l$
esiste $I_\rho$ intorno di $\rho$ tale che
$$f(x) \in J_l \quad \forall x \in \left(I_\rho \setminus \{\rho\}\right) \cap A$$




In tal caso scriveremo

$$\lim_{x \to \rho} f(x) = l \quad \text{oppure} \quad f(x) \longrightarrow l$$

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

# Definizioni "alternative"

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

**Formulazione 1.**

Oppure diremo che $\lim_{x \to \rho} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x : 0 < |x - \rho| < \delta$$

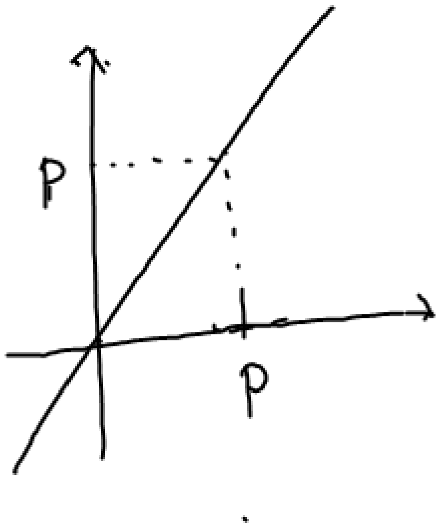
$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \qquad -\delta < x - p < \delta \quad x \neq p$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad p - \delta < x < \delta + p \quad x \neq p$$

# Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$y = f(x) = x$




$$\lim_{x \to p} x = p$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$|x-p| < \varepsilon \quad \forall \; 0 < |x-p| < \delta$

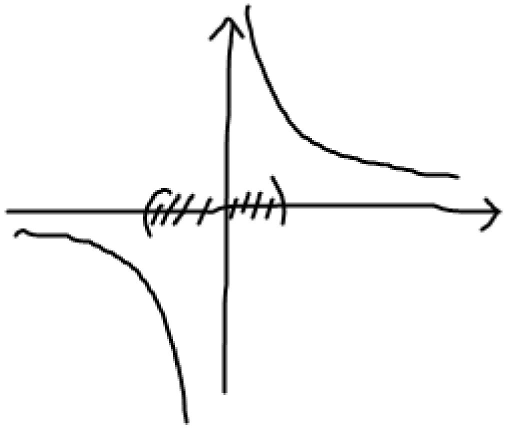
$-\varepsilon < x-p < \varepsilon \qquad \delta = \varepsilon$

$p-\varepsilon < x < p+\varepsilon$

$x \in J_p$

# Esempi

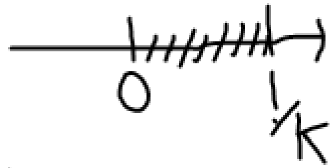
$$y = f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} = A$$



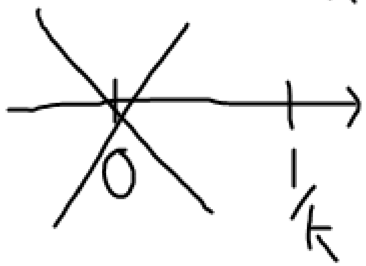
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ? \quad \cancel{+\infty}$$

$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta : \ \frac{1}{x} > K \quad \forall\, 0 < |x| < \delta$$

$x > 0 \longrightarrow x < \frac{1}{K}$



$x < 0 \longrightarrow x > \frac{1}{K}$



$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

# Limite destro e sinistro

UNITELMA SAPIENZA

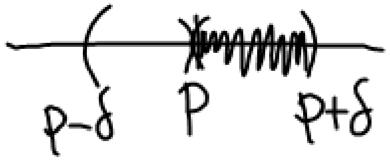
SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

**Definizione.**

Diremo che $\lim_{x \to \rho+} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \forall x : 0 < (x - \rho) < \delta$$

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p-\delta < x < p+\delta \\ x \neq p \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-\delta + p, p) \cup (p, p+\delta)$$



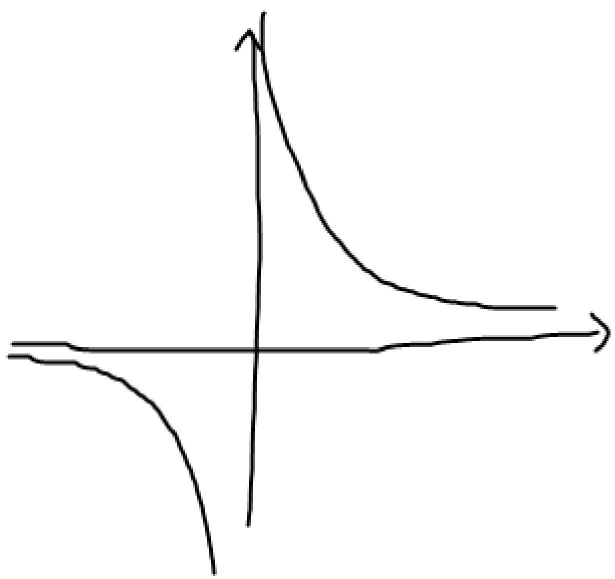

$$0 < x-p < \delta \Rightarrow p < x < p+\delta$$
$$\hookrightarrow x \in (p, p+\delta)$$

# Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$y = \frac{1}{x}$



$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\forall k > 0 \ \exists \delta = \frac{1}{k}$

t.c. $f(x) = \frac{1}{x} > k$

$\forall x \in (0, \frac{1}{k})$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$