Metodi matematici per l'Informatica - Eserciziario 2

(Nota: ciascun quiz può ammettere più di una risposta giusta)

1. Sia A l'insieme $\{\varnothing\}$. Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta per ogni relazione $R \subseteq A \times A$?

a) riflessiva
b) antiriflessiva
c) simmetrica
d) antisimmetrica
e) transitiva

2. Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta per ogni relazione $R \subseteq \varnothing \times \varnothing$?

a) riflessiva
b) antiriflessiva
c) simmetrica
d) antisimmetrica
e) transitiva

3. Sia A l'insieme $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\},\ldots\}$ e sia $R \subseteq \wp(A) \times \wp(A)$ la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \in B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?
a) riflessiva
b) antiriflessiva
c) simmetrica
d) antisimmetrica
e) transitiva

4. Sia A l'insieme $\varnothing \cup \wp(\varnothing) \cup \wp(\wp(\varnothing)) \cup \wp(\wp(\wp(\varnothing))) \cup \ldots$ e sia $R \subseteq A \times A$ la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \subseteq B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?
a) riflessiva
b) antiriflessiva
c) simmetrica
d) antisimmetrica
e) transitiva

5.

a) Definire, se esiste, una funzione sui numeri naturali che, se considerata come relazione, sia antiriflesiva e transitiva.
b) Definire due funzioni f e g sui numeri naturali, diverse dall'identità, la cui composizione sia una relazione di equivalenza.

6.

a) Definire, se esiste, una funzione monotona sui numeri naturali che, se considerata come relazione, sia antiriflesiva e simmetrica.
b) Definire, se esiste, una relazione di equivalenza sui numeri naturali, diversa dall'identità, che sia una funzione.

7.

a) Definire, se esiste, una funzione f non iniettiva e tale che $f = f \bullet f$.
b) Definire, se esiste, una funzione f non suriettiva e tale che $f = f \bullet f$.

8. Siano R e S due relazioni di equivalenza su un insieme A, tali che a R b implica a S b. Indicando con $[a]_R$ e $[a]_S$ le rispettive classi di equivalenza, per ogni $a \in A$, quale delle seguenti proposizioni è vera? Per ogni $a, b \in A$:

a) $[a]_R \subseteq [a]_S$
b) $[a]_S \subseteq [a]_R$
c) $[a]_S = [b]_S$ implica $[a]_R = [b]_R$
d) $[a]_R = [b]_R$ implica $[a]_S = [b]_S$

9. Siano R ed S relazioni di equivalenza su un insieme finito non vuoto, con rispettivamente n ed m classi di equivalenza. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

a) $R \cap S$ è sempre una relazione di equivalenza con al più $n + m$ classi di equivalenza
b) $R \cap S$ è sempre una relazione di equivalenza con al più $n \cdot m$ classi di equivalenza
c) $R \cap S$ non è necessariamente una relazione di equivalenza
d) $R \cup S$ è sempre una relazione di equivalenza con al più $n + m$ classi di equivalenza
e) $R \cup S$ è sempre una relazione di equivalenza con al più $n \cdot m$ classi di equivalenza
f) $R \cup S$ non è necessariamente una relazione di equivalenza

10. Siano R ed $S \subseteq A \times A$ due relazioni su uno stesso insieme A. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

a) $R \cap S$ è riflessiva se e solo se R ed S sono entrambe riflessive
b) $R \cup S$ è riflessiva se e solo se R ed S sono entrambe riflessive
c) $R \cap S$ è antiriflessiva se e solo se R ed S sono entrambe antiriflessive
d) $R \cup S$ è antiriflessiva se e solo se R ed S sono entrambe antiriflessive

11. Sia N l'insieme dei numeri naturali e $\emptyset$ l'insieme vuoto. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

a) Ogni funzione f: $N \rightarrow \emptyset$ è iniettiva
b) Ogni funzione f: $N \rightarrow \emptyset$ è non iniettiva

12. Siano R ed $S \subseteq A \times A$ due relazioni su uno stesso insieme A. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

a) $R \cap S$ è simmetrica se e solo se R ed S sono entrambe simmetriche
b) $R \cup S$ è simmetrica solo se R ed S sono entrambe simmetriche
c) $R \cap S$ è simmetrica se R ed S sono entrambe simmetriche
d) $R \cup S$ è simmetrica solo se R ed S sono entrambe simmetriche

13. Sia N l'insieme dei numeri naturali e $\emptyset$ l'insieme vuoto. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

a) Ogni funzione f: $\emptyset \rightarrow N$ è iniettiva
b) Ogni funzione f: $N \rightarrow \emptyset$ è invertibile

14. Siano R ed S due relazioni, rispettivamente d'ordine e di equivalenza, definite sui numeri naturali. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

a) $R \cup S$ è sempre una relazione di equivalenza
b) $R \cap S$ è sempre una relazione d'ordine
c) 42 $(R \cap S)$ 37 non è mai vero, comunque si scelgano R ed S
d) $R \cap S$ è sempre una funzione iniettiva

15. Siano R ed S due relazioni, rispettivamente d'ordine e di equivalenza, definite sui numeri naturali. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

a) $R \cap S$ è sempre una relazione di equivalenza
b) $R \cup S$ è sempre una relazione d'ordine
c) R ed S possono essere scelti in modo che 42 $(R \cap S)$ 37
d) $R \cap S$ è sempre una funzione suriettiva

16. Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione su un insieme A. Indichiamo con dom (R) il seguente insieme:

$$\text{dom}(R) = \{a \in A : \text{esiste } a' \in A \text{ tale che } (a, a') \in R\}.$$

Quale delle seguenti proposizioni è vera?

a) Se R è sia simmetrica che antisimmetrica, allora R è anche transitiva
b) Se R è sia riflessiva che antiriflessiva allora dom (R) = $\emptyset$
c) Se R è sia riflessiva che antiriflessiva allora A = $\emptyset$
d) Se R è sia riflessiva che simmetrica, allora R è anche transitiva se A = $\emptyset$
e) Se R è sia simmetrica che transitiva, allora R è anche riflessiva se dom (R) = A

17. Indichiamo con A* l'insieme di tutte le sequenze *finite* di elementi di un insieme A (compresa la sequenza *vuota*). Quale delle seguenti proposizioni è vera?

a) Se A ≠ $\emptyset$, allora non può esistere una funzione suriettiva f: A → A*
b) Non può esistere una funzione suriettiva f: A → A*
c) Se A ≠ $\emptyset$, allora non può esistere una funzione iniettiva g: A* → A
d) Non può esistere una funzione iniettiva g: A* → A
e) Se A ha la potenza del numerabile, allora esiste una funzione biiettiva h: A → A*

18. Siano f : A → B e g : B → C due funzioni. Selezionare le affermazioni corrette:

a) se f è non iniettiva allora g · f _e non iniettiva
b) se g è non iniettiva allora g · f è non iniettiva
c) se g · f è non suriettiva allora f è non suriettiva
d) se g · f è non suriettiva allora g è non suriettiva

19. Sia $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ una partizione di un insieme A e sia R la relazione su $\mathcal{P}$ (A) definita come segue: X R Y se e solo se, per ogni i=1…4, $X \cap A_i \neq \emptyset$ implica $Y \cap A_i \neq \emptyset$. Sia S la relazione definita come segue: X S Y se e solo se X R Y e Y R X. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

a) R è una relazione d'ordine
b) S una relazione di equivalenza con più di 20 classi di equivalenza
c) S una relazione di equivalenza con meno di 15 classi di equivalenza
d) S non è una relazione di equivalenza

20. Sia A un insieme e sia f : P (A) → P (A) la funzione che associa ad ogni sottoinsieme di A il suo complemento. Quali delle seguenti proprietà è soddisfatta da f ?

a) f è una relazione antiriflessiva, qualunque sia l'insieme A
b) f è una relazione simmetrica, qualunque sia l'insieme A
c) f è invertibile ed è identica alla sua inversa, qualunque sia l'insieme A
d) se a $\subseteq$ b allora f(a) $\subseteq$ f(b)

Risposte

1. c) d) e)
2. a) b) c) d) e)
3. b) d)
4. a) d) e)
5. a) non esiste; b) f = $\{(0,1), (1,0), (2,3), (3,2)\ldots\}$ e g la sua inversa. La composizione è l'identità.
6. a) non esiste; b) non esiste
7. a) f(n) = il più piccolo numero primo maggiore o uguale a n; b) come a)
8. a) d)
9. b) f)
10. a) d)
11. a) b)
12. c)
13. a) b)
14. b)
15. c)
16. a) b) c) d) e)
17. e)
18. a)
19. nessuna
20. b) c)