*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2019/2020 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 03/7/2020

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Si determinino gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_9$.

(**b**) Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 4444^{445} \pmod 5 \\ X \equiv 5555^{556} \pmod 6 \end{cases}.$$

(**c**) Siano a e b due interi positivi tale che $a+b$ sia un numero primo. Dimostrare che a e b sono coprimi.

Esercizio 2.

(**a**) Discutere la compatibilità e il tipo di infinità delle eventuali soluzioni del seguente sistema lineare reale, k essendo un parametro reale.

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 \\ kx + 2z = 4 \\ 2x + 4z = 8 \end{cases} .$$

(**b**) Siano V uno spazio vettoriale con base (v_1, v_2, v_3). Sia $u = v_1 + v_3$. Si determini un vettore $w \in V$ tale che (v_1, u, w) sia una base di V ed il vettore $v_1 + v_2 + v_3$ abbia coordinate $(0, 1, 1)$ rispetto ad una tale base .

(**c**) Discutere la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_4$, $f(e_4) = 0$, essendo (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.

(**a**) Sia $C_9 = \{1, a, a^2, \ldots, a^8\}$ il gruppo ciclico di ordine 9. Si calcoli l'ordine (periodo) dell'elemento a^{87} e si indichino i generatori del sottogruppo $\langle a^{87} \rangle$.

(**b**) In S_5 si risolva la equazione : $\alpha = \beta\tau$ dove dove $\alpha = (3, 1, 2, 4)$ e $\beta = (3, 4)(2, 5)$.

(**c**) Si consideri l'insieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \ | a \neq 0, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sottoinieme dell'insieme delle matrici quadrate reali di ordine 2. Si verifichi che rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne, G è un gruppo.