Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 7 – Induzione (esercitazione)

Docente: Pietro Cenciarelli

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Il principio di induzione

se P è un predicato su $\mathcal{N}$ tale che vale P(0) e inoltre P(n) implica P(n+1), allora *per ogni* n vale P(n)

$$\frac{P(0) \qquad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n.\ P(n)}$$

Esercizio 1

$$\forall n \in N, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \text{ per } a \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1 = \frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} \qquad ✔$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} + \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$= \frac{a^{n+1}(1 - a) + (1 - a^{n+1})}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} \qquad ✔$$

Esercizio 2

$\forall n \geq 1$, $n^3 + 5n$ è multiplo di 6

Perché $n \geq 1$?

Per $n = 0$ si ha: n3 + 5n = 0, ma 0 è *multiplo* di 6?

In genere non lo si considera tale (altrimenti, ad esempio, il *mcm* di due numeri sarebbe sempre 0).

Dunque vogliamo che l'induzione parta da 1!

Stiamo violando
$$\frac{P(0) \qquad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n.\ P(n)}$$
?

Esercizio 2

$$\forall n \geq 7.\ P(n)$$

…no!

Supponiamo di voler dimostrare che $P(n)$ vale per ogni $n \geq 7$

Consideriamo la proprietà $Q(n)$: *vale $P(n + 7)$*

Dimostrare $\forall n.\ Q(n)$ vuol dire dimostrare $\forall n.\ P(n + 7)$ ovvero, dato che $n \in \{0, 1, \ldots\}$, dimostrare $\forall m \geq 7.\ P(m)$, cioè il nostro obiettivo!

Come dimostriamo $\forall n.\ Q(n)$? Per induzione!

Notiamo che: $P(7) = Q(0)$ e inoltre che, se $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per qualunque $n \geq 7$, allora $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ per qualunque n; e dunque…

Esercizio 2

$$\forall n \geq 7.\ P(n)$$

$$\cfrac{\cfrac{P(7)}{Q(0)} \qquad \cfrac{(n \geq 7 \land P(n)) \Rightarrow P(n+1)}{Q(n) \Rightarrow Q(n+1)}}{\cfrac{\forall n.\ Q(n)}{\forall n \geq 7.\ P(n)}}$$

...ovvero: *iniziare l'induzione da 7 è legale!*

Esercizio 2

$\forall n \geq 1,\ n^3 + 5n$ è multiplo di 6

$1^3 + 5 \cdot 1 = 6$ è multiplo di 6 ✔

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$

$$= (n^3 + 5n) + 6 + 3n(n+1)$$

$n^3 + 5n$ è multiplo di 6 per ipotesi induttiva

6 è ovviamente multiplo di 6

$3n(n + 1)$ è multiplo di 6 perché $n(n+1)$
è certamente multiplo di 2 ✔

Esercizio 3

$$\forall n \geq 3, \; n^2 \geq 2n + 1$$

Vero per $n = 3$ ✔

$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$> (2n + 1) + 2n + 1$ (per ipotesi induttiva)

$> 2n + 2 + 1$ (perché $n \geq 3$, e dunque $2n > 2$)

$\geq 2(n + 1) + 1$ ✔

Esercizio 4

$$\forall n \in N, \quad |A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Se $|A| = 0$ allora $A = \{\}$ e $|\mathcal{P}(A)| = |\{\{\}\}| = 1$ ✔

Se $|A| = n+1$, allora esiste almeno un elemento $a \in A$;
indichiamo con B l'insieme $A - \{a\}$. Chiaramente $|B| = n$.
La funzione $f: \mathcal{P}(B) \rightarrow \{X \subseteq A : a \in X\}$ tale che $f(Y) = Y \cup \{a\}$
è una biiezione e dunque $|\mathcal{P}(B)| = |\{X \subseteq A : a \in X\}|$. Allora:

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B) \cup \{X \subseteq A : a \in X\}|$$

$$= |\mathcal{P}(B)| + |\{X \subseteq A : a \in X\}| \quad \text{(perché disgiunti)}$$

$$= 2^n + 2^n \quad \text{(per ipotesi induttiva)} = 2^{n+1}$$ ✔

Alberi binari

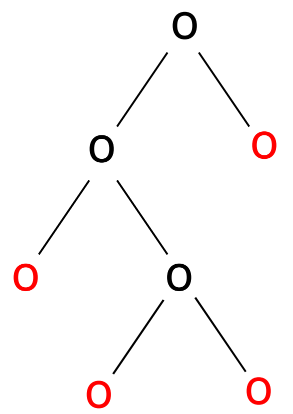
Definizione:

- o è un albero binario atomico detto *foglia*;

- dati due alberi binari t_1 e t_2, la coppia ordinata (t1, t2) è un albero binario; t1 è detto *sottoalbero sinistro*, t2 *sottoalbero destro*;

- nient’altro è un albero binario.

Rappresentiamo gli alberi binari come grafi come mostrato nel seguente esempio; l’albero ((o, (o, o)), o) corrisponde al grafo: Quest’albero ha 7 *nodi*, di cui 4 foglie. Indichiamo con N_t e F_t rispettivamente l’insieme dei nodi e delle foglie di un albero t.



Esercizio 5

$\forall n \geq 1, \forall t\ |F_t| = n \Rightarrow |N_t| = 2n - 1$

Se $|F_t| = 1$ allora $t = o$ e $|N_t| = 1 = 2 \cdot 1 - 1$ ✔

Se $|F_t| = n+1$, con $n \geq 1$, allora t è della forma (t1, t2), e per ipotesi induttiva… oops: abbiamo un problema:

non necessariamente $|F_{t1}| = n$ *e/o* $|F_{t2}| = n$ e *dunque non possiamo usare l'ipotesi induttiva!*

Ciò che sappiamo è che $|F_{t1}| \leq n$ e $|F_{t2}| \leq n$.
Abbiamo bisogno dell'*induzione completa*:

Induzione completa

$$\dfrac{P(0) \qquad (\forall m \leq n.\ P(m)) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n.\ P(n)}$$

Come per quando il caso base è diverso da 0, anche *l'induzione completa è derivabile da quella standard:* ponendo $Q(n) = \forall m \leq n.\ P(m)$, è facile verificare

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(0)}{Q(0)} \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall m \leq n.\ P(m)) \Rightarrow P(n+1)}{Q(n) \Rightarrow (Q(n) \land P(n+1)) \Rightarrow Q(n+1)}}{Q(n) \Rightarrow Q(n+1)}}{\forall n.\ Q(n)}}{\forall n.\ P(n)}$$

Esercizio 5

$$\forall n \geq 1, \forall t \; |F_t| = n \Rightarrow |N_t| = 2n - 1$$

Se $|F_t| = 1$ allora $t = o$ e $|N_t| = 1 = 2 \cdot 1 - 1$ ✔

Se $|F_t| = n+1$, con $n \geq 1$, allora t è della forma (t1, t2), con $|F_{t1}| \leq n$ e $|F_{t2}| \leq n$. Dunque:

$$\begin{aligned} |N_t| &= |N_{t1}| + |N_{t2}| + 1 \\ &= (2|F_{t1}| - 1) + (2|F_{t2}| - 1) + 1 \\ &= 2(|F_{t1}| + |F_{t2}|) - 1 \\ &= 2|F_t| - 1 \end{aligned}$$ ✔