Sia dato uno spazio vettoriale $(V, +, m)$ su $\mathbb{R}$, dove m è la moltiplicazione per scalari (numeri reali). Indichiamo la terna $(V, +, m)$ con V per semplicità.

Definizione 1. *Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $U \subseteq V$ chiuso rispetto a prendere combinazioni lineari di elementi di U: se u, $v \in U$ allora $\lambda u + \mu v \in U$ per ogni scelta di reali λ e μ.*

Abbia visto che questo è un criterio sintetico per stabilire se un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è esso stesso uno spazio vettoriale. Ciò che vi chiedo e di riflettere sulla definizione e provare a risolvere qualcuno dei problemi che vi propongo (oltre a quelli proposti nell'ultimo incontro).

Esercizio 1. Convincervi che un sottospazio vettoriale U di uno spazio vettoriale V è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V. In altre parole, se fate la somma tra elementi di U come la fate in V e se moltiplicate gli scalari per elementi di U come li moltiplicate per elementi di V, cio' che ottenete è uno spazio vettoriale.

Esercizio 2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici reali quadrate di ordine 2 (le matrici 2×2 detto alla buona).

(**a**) Dimostrare che V è uno spazio vettoriale e determinarne una base.

(**b**) Dimostrare che l'insieme $S_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici simmetriche di ordine 2 [1] è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(**c**) Calcolare la dimensione di $S_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Abbiamo visto in qualcuno dei webinar passati che dati i vettori $v_1, \dots, v_t$ in uno spazio vettoriale V il simbolo $\langle v_1, \dots, v_t \rangle$ denota l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_t$. Pertanto $u \in \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ se e solo se u combinazione lineare di $v_1, \dots, v_t$ e quindi se e soltanto se u è linearmente dipendente dai vettori $v_1, \dots, v_t$. Abbiamo chiamato un siffatto insieme *l'involucro lineare di* $v_1, \dots, v_t$.

(**a**) Dimostrare che l'involucro lineare di $v_1, \dots, v_t$ è un sottospazio vettoriale di V. E' quasi una tautologia.

(**b**) . Dimostrare che se $u \notin \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ allora la dimensione di $\langle u, v_1, \dots, v_t \rangle$ supera di 1 la dimensione di $\langle v_1, \dots, v_t \rangle$ (basta far vedere che il primo ha una base con un elemento in più) e dedurre un algoritmo per costruire una base di uno spazio vettoriale partendo dal un vettore non nullo.

[1] Una matrice di ordine 2 è simmetrica se le sue entrate soddisfano la relazione $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni coppia di indici i e j con i, $j \in \{1, 2\}$

(**c**) Dimostrare che l'intersezione di due sottospazi vettoriali di V è ancora un sottospazio vettoriale di V.

(**d**) Provate a convincervi che l'involucro di $v_1, \ldots, v_t$ è contenuto (come sottospazio) in ogni sottospazio W di V tale che W contiene l'insieme $\{v_1, \ldots, v_t\}$ e provate a dedurre che $\langle v_1, \ldots, v_t \rangle$ è l'intersezione di tutti i sottospazi di V che contengono $\{v_1, \ldots, v_t\}$. In questo senso, l'involucro di $v_1, \ldots, v_t$ è il <u>più piccolo sottospazio</u> di V che contiene $\{v_1, \ldots, v_t\}$.

Dopo aver dimostrato i punti precedenti, potete a buon diritto chiamare $\langle v_1, \ldots, v_t \rangle$ il sottospazio *generato da* $v_1, \ldots, v_t$.

Esercizio 4. Parliamo di $\mathbb{R}^n$ adesso. Questi fatti sono importanti perché attraverso l'isomorfismo di spazi vettoriali di dimensione n su $\mathbb{R}$, sono in effetti gli unici che contano. Siano $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m$, vettori di $\mathbb{R}^n$.

(**a**) Il sottospazio $\langle \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m \rangle$ è un insieme ben noto. Dire cos'è.

(**b**) Convincervi che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ è compatibile se e solo se $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m \rangle$ (si legge $\mathbf{b}$ è nel sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle colonne di A).

(**c**) Convincervi che la dimensione $\langle \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m, \mathbf{b} \rangle$ non supera di uno quella di $\langle \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m \rangle$ e che le dimensioni di tali sottospazi coincidono precisamente quando $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m \rangle$.

(**d**) Dedurre il Teorema di Rouché Capelli dai punti precedenti.

Veniamo ad uno dei fatti più importanti della teoria degli spazi vettoriali. La nozione di *coordinate rispetto ad una base.*

Esercizio 5. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordinata di uno spazio vettoriale V e sia u un arbitrario vettore in V. Quando si parla di insiemi ordinati (in particolare di basi) oppure di n-uple, si intende che l'ordine degli elementi distingue gli insiemi. In altre parole, per esempio, gli insiemi (a, b, c, d) e (b, c, a, d) pur essendo costruiti sugli stessi elementi, sono diversi come insiemi ordinati. Dimostrare che se valgono entrambe le relazioni $u = x_1 v_1 \ldots x_n v_n$ e $u = y_1 v_1 \ldots y_n v_n$, dove $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ sono numeri reali, allora $x_1 = y_1, \ldots x_n = y_n$. Questo significa che **ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base. Se la base è ordinata, allora i coefficienti dell'unica combinazione lineare degli elementi della base che esprime il vettore dato, sono dette le *coordinate del vettore rispetto alla base*.** Sugg. si sottraggano le espressioni membro a membro, si mettano in evidenza i vettori e si usi il fatto che essi sono linearmente indipendenti essendo elementi di una base. Per provare che ciò accade per ogni vettore di V si deve ricordare che la base è un insieme che gemera lo spazio vettoriale.

Osserviamo che fissta una base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V se $f_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione che manda ogni vettore $v \in V$ nel vettore colonna delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$—in altre parole $f_{\mathcal{B}}(v)$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono ordinatamente i coefficienti dell'unica combinazione lineare che esprime v rispetto $\mathcal{B}$, allora il risultato dell'esercizio precedente ci dice che $f_{\mathcal{B}}$ è bijettiva.

Sia $\mathbf{e}_i$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ la cui i-esima componente, $i = 1, \ldots, n$ è uguale ad 1 mentre tutte le altre sono nulle. Sia $\mathbf{E}_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice con m righe ed n colonne la cui componente di posto (i, j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ sia uguale ad 1 mentre tutte le altre sono nulle. Gli insiemi ordinati $(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{E}_{1,1}, \ldots \mathbf{E}_{1,n}, \ldots \mathbf{E}_{m,1}, \ldots \mathbf{E}_{m,n})$ sono detti, ripettivamente, base canonica di $\mathbb{R}^n$ e base canica di $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 6. Siano $\mathcal{B}(3)$ e $\mathcal{B}(2, 2)$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M_2(\mathbb{R})$.

(**a**) Dimostrare che $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}(3)$ e rispetto a $\mathcal{B}'$.
(**b**) Dimostrare che $\mathcal{B}'' = (\mathbf{E}_{1,1}, \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{1,2}, \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{2,1}, \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{2,2})$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e scrivere le coordinate della matrice identità rispetto a $\mathcal{B}(2, 2)$ e $\mathcal{B}''$. Solo per una questione di notazione, ricordo che i vettori formati dalle coordinate di un vettore di uno spazio vettoriale V rispetto ad una base si scrivono come vettori di $\mathbb{R}^q$ dove q è la dimensione dello spazio V.
(**c**) Osservare che uno stesso vettore ha coordinate diverse rispetto a basi diverse. Bisognerà trovare un modo per passare dalle coordinate dell'una alle coordinate dell'altra senza fare troppi conti ogni volta.