La definizione di limite

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Promemoria.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che $a_n \longrightarrow l$ se

per ogni J_l intorno di l $\quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \in J_l \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$\rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$J_l = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Formulazione "classica".
Oppure diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

i. se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$

$$x = \frac{1}{1+h}, \quad x^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh}$$

$h > 0$

$$0 \leq x^n \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Esempi

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

- **i.** se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$
- **ii.** se $x = 1$ abbiamo che $a_n = 1 \longrightarrow 1$
- **iii.** se $x = -1$, $a_n = (-1)^n$ e non ammette limite
- **iv.** se $x > 1$ abbiamo che $a_n \longrightarrow +\infty$

$$x^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq h \cdot n \longrightarrow +\infty$$

Un risultato generale

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow h \in [0,1)$$

allora $a_n \longrightarrow 0^+$.

$$(h-\varepsilon)^p a_{\bar n} \le \dots \le a_{\bar n+p-1}(h-\varepsilon) \le a_{\bar n+p} \le a_{\bar n+p-1}(h+\varepsilon) \le \dots \le a_{\bar n}(h+\varepsilon)^p$$

0 $\qquad$ $\forall n \geq \bar n,\ p>0$ $\qquad$ 0

Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$a_n = \frac{n^p}{x^n} \longrightarrow 0$$

$x > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{x^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{n^p} = \frac{1}{x}\Big[\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\downarrow \, 1}\Big]^p$$

$$\downarrow$$

$$0 < \frac{1}{x} < 1$$

Esempi

$n!$

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$\vdots$

Esempi

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \left[\frac{n}{n+1}\right]^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$a_n = \frac{n^2 + 2^n}{3^n} = \frac{n^2}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0$$

$$\frac{n^2}{3^n} \to 0 \qquad \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

$$a_n = \operatorname{sen}(n)\,\frac{2^n + 3}{5^n} \longrightarrow 0$$

$$-\frac{2^n+3}{5^n} \le a_n \le \frac{2^n+3}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{5^n} \longrightarrow 0$$

$$-\frac{2^n+3}{5^n} \to 0 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0 \qquad \frac{3}{5^n} = 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n \to 0$$

Esempi

Un numero speciale

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \in (2,3)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e}.$$

$$\parallel$$

$$\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\downarrow\ e}\right]^{-1}$$