

Nota esplicativa su chiusura e intersezione

Non tutte le proprietà sono preservate dall'intersezione. Prendiamo ad esempio la proprietà $P(A) = A \text{ è un insieme di due elementi}$. Ovviamente $\{a, b\}$ e $\{b, c\}$ soddisfano entrambi la proprietà P , ma la loro intersezione no! Dunque, alcune proprietà sono preservate dall'intersezione (chiamiamole proprietà “buone”), ad esempio la transitività, altre no (chiamiamole “cattive”). Il teorema presentato nella lezione ci dà un criterio *sufficiente* per stabilire se una proprietà è buona: qualunque proprietà P (ora commetto una piccola imprecisione che correggerò fra un attimo...) tale che *ogni insieme del mondo ha una chiusura rispetto a P^* è una proprietà buona! A rischio di creare ancora più confusione voglio aggiungere: questa che ho scritto fra asterischi (chiamiamola "proprietà degli asterischi") è una *proprietà di proprietà*. Dunque è tutto semplice: se una proprietà gode della proprietà degli asterischi, allora è buona. Così come lo abbiamo appena enunciato, il criterio fa però abbastanza schifo. Infatti, consideriamo la proprietà $P(A) = A \text{ ha meno di due elementi}$. In questo caso il criterio non ci è di nessun aiuto, perché non è vero che ogni insieme del mondo ha una chiusura rispetto a P (ad esempio, l'insieme $\{a, b, c\}$ non ce l'ha!), eppure P è preservata dall'intersezione! Allora raffiniamo un po' il criterio rilassando la proprietà degli asterischi: invece che richiedere l'esistenza di una chiusura rispetto a P per qualunque insieme del mondo, basta che ce l'abbiano quelli che sono P -maggiorabili. Il fatto che l'insieme $\{a, b, c\}$ non abbia una chiusura rispetto a P ora non ci impensierisce più, visto che comunque non è P -maggiorabile. Abbiamo così trovato un nuovo criterio, e migliore, per trovare proprietà buone, chiamiamolo "criterio del doppio asterisco": **ogni insieme P -maggiorabile ha una chiusura rispetto a P^{**} . Ora, per quanto possa esser buono questo criterio, esistono proprietà preservate dall'intersezione che però non soddisfano la condizione del doppio asterisco. Nella lezione ne viene dato un esempio. Dunque, la condizione del doppio asterisco è sufficiente ma non necessaria. Se però consideriamo l'intersezione *infinita* (ovvero l'operazione che, preso un numero arbitrario, anche infinito, di insiemi, ne restituisce l'intersezione), allora la condizione diventa, oltre che sufficiente, anche necessaria!