L'algoritmo di bisezione

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Introduciamo lo strumento fondamentale di questa lezione e consideriamo un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$

$L = b - a$

il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

$a_0 + \frac{1}{2}(b_0 - a_0) = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

L'algoritmo di bisezione

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Stimiamo la lunghezza degli intervalli, cioè la distanza degli estremi, al variare dell'indice

$$|I_0| = (b_0 - a_0) = L$$

$$|I_1| = (b_1 - a_1) = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{L}{2}$$

$$|I_2| = (b_2 - a_2) = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Il teorema dei valori intermedi

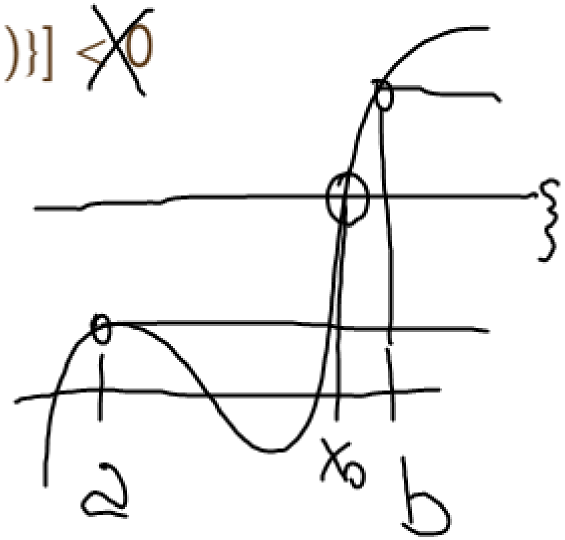
UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema dei valori intermedi. Supponiamo di avere una funzione $f : A \longrightarrow \mathrm{IR}$, con $A = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato, allora

$$\forall \xi \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] \cancel{< 0}$$

esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \xi$.

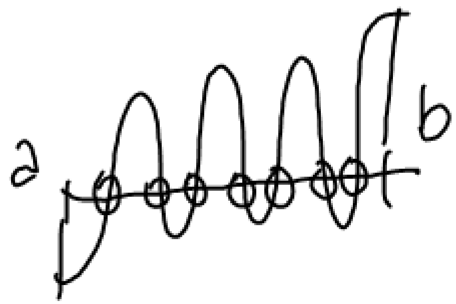


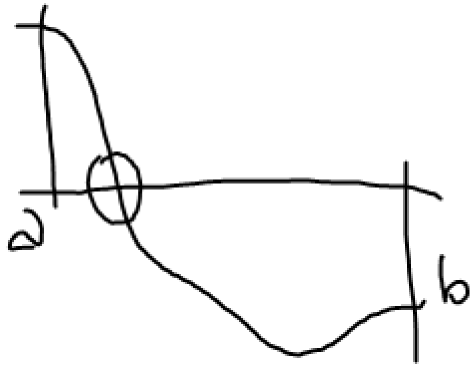
Un corollario

Teorema di esistenza degli zeri. Supponiamo di avere una funzione continua f, definita su un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$, tale che

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

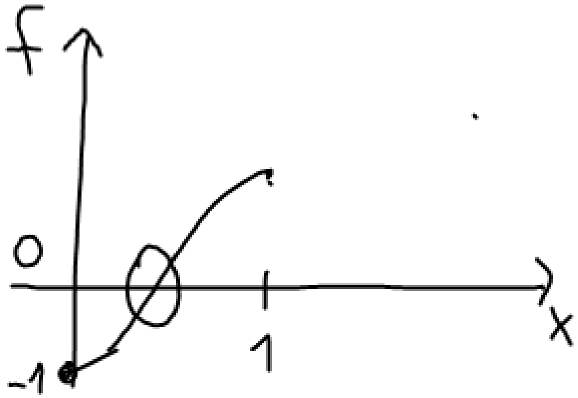




Un esempio

$\exists x_0 ?\ f(x) = x^7 + x - 1 \overset{?}{=} 0$

$f(0) = -1 < 0\ ,\ f(1) = 1^7 + 1 - 1 = 1 > 0$



f è continua ✓

$[0,1]$ è chiuso e limitato ✓

$f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$ ✓

Thm. Valori intermedi

$\Rightarrow \exists x_0 : f(x_0) = 0$

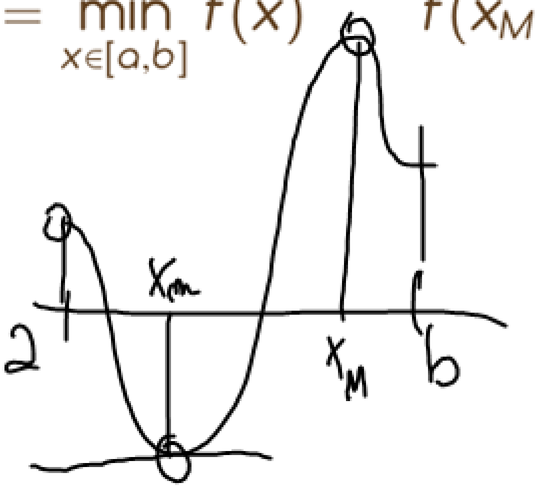
Il teorema di Weierstrass

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Teorema di Weierstrass. Supponiamo di avere una funzione **continua** f, definita su un **intervallo chiuso e limitato** $I = [a, b]$, allora esistono due punti $x_M, x_m \in [a, b]$ tale che

$$f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$



Un esempio

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$x^2 \geq 0$

$f(x) = 1 - x^2 \leq 1 = f(0)$

$x \in [-1, 2]$

$0 = x_M \quad 1 = \max(f)$

$-3 = \min(f), \quad x_m = 2$

ok

$f(x) = 1 - x^2 \geq -3 \quad \forall x \in [-1, 2]$

$x^2 \leq 4$

$-2 \leq x \leq 2$