UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

09. Limiti di funzioni

Definizione di limite

Definizione.

Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Dato $\rho \in A$ diremo che f ha **limite** l per x che tende a ρ se

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Dato $\rho \in A$ diremo che f ha **limite** l per x che tende a ρ se

per ogni J_l intorno di l
esiste I_ρ intorno di ρ tale che

Definizione di limite

Definizione.

Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Dato $\rho \in A$ diremo che f ha **limite** l per x che tende a ρ se

per ogni J_l intorno di l
esiste I_ρ intorno di ρ tale che

$$f(x) \in J_l \quad \forall x \in \left(I_\rho \setminus \{\rho\}\right) \cap A$$

Definizione di limite

Definizione.

Sia $F : A \longrightarrow \mathrm{IR}$ una funzione con $A \subseteq \mathrm{IR}$ un intervallo.
Dato $\rho \in A$ diremo che f ha **limite** l per x che tende a ρ se

per ogni J_l intorno di l
esiste I_ρ intorno di ρ tale che

$$f(x) \in J_l \quad \forall x \in \left(I_\rho \setminus \{\rho\}\right) \cap A$$

In tal caso scriveremo

$$\lim_{x \to \rho} f(x) = l \quad \text{oppure} \quad f(x) \longrightarrow l$$

Definizioni “alternative”

Formulazione 1.

Oppure diremo che $\lim_{x \to \rho} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \forall x : 0 < |x - \rho| < \delta$$

Definizioni "alternative"

Formulazione 2.

Oppure diremo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ tale che}$$
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \forall x : x > M$$

Definizioni “alternative”

Formulazione 2.

Oppure diremo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) \in \mathrm{IR} \text{ tale che}$$
$$\left|f(x) - l\right| < \varepsilon \quad \forall x : x > M$$

Formulazione 3.

Oppure diremo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) \in \mathrm{IR} \text{ tale che}$$
$$\left|f(x) - l\right| < \varepsilon \quad \forall x : x < M$$

Formulazione 4.

Oppure diremo che $\lim_{x \to \rho} f(x) = +\infty$ se

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \delta(\rho, k) > 0 \text{ tale che}$$
$$f(x) > k \quad \forall x : 0 < |x - \rho| < \delta$$

Definizioni “alternative”

Formulazione 4.

Oppure diremo che $\lim_{x \to \rho} f(x) = +\infty$ se

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \delta(\rho, k) > 0 \text{ tale che}$$
$$f(x) > k \quad \forall x : 0 < |x - \rho| < \delta$$

Formulazione 5.

Oppure diremo che $\lim_{x \to \rho} f(x) = -\infty$ se

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \delta(\rho, k) > 0 \text{ tale che}$$
$$f(x) < k \quad \forall x : 0 < |x - \rho| < \delta$$

Esempi

Proprietà del limite

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $p \in A$, allora

Proprietà del limite

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $\rho \in A$, allora

Teorema. Il limite $\lim_{x \to \rho} f(x)$, se esiste, è unico.

Proprietà del limite

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $\rho \in A$, allora

Teorema. Il limite $\lim_{x \to \rho} f(x)$, se esiste, è unico.

Teorema. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

i. $\lim_{x \to \rho} f(x) = l$

ii. per ogni $\{\rho_n\} \subseteq A$ tale che $\rho_n \longrightarrow \rho$ vale $f(\rho_n) \longrightarrow l$

Proprietà del limite

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $p \in A$, allora

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $\rho \in A$, allora

Teorema della permanenza del segno.

Se

$$\lim_{x \to \rho} f(x) = l > 0$$

allora esiste un intorno I_ρ del punto ρ tale che

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in (I_\rho \setminus \{\rho\}) \cap A$$

Altre proprietà del limite

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Date $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $p \in A$, allora

Altre proprietà del limite

Date $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $p \in A$, allora

Teorema. Se $f(x) < g(x)$, per ogni $x \in A$, allora

$$\lim_{x \to p} f(x) \leq \lim_{x \to p} g(x)$$

sempre che i due limiti esistano.

Altre proprietà del limite

Date $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo e $\rho \in A$, allora

Teorema. Se $f(x) < g(x)$, per ogni $x \in A$, allora

$$\lim_{x \to \rho} f(x) \leq \lim_{x \to \rho} g(x)$$

sempre che i due limiti esistano.

Teorema. Se $\lim_{x \to \rho} f(x) < \lim_{x \to \rho} g(x)$, allora esiste un intorno I_ρ tale che

$$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in (I_\rho \setminus \{\rho\}) \cap A$$

Algebra dei limiti

Supponiamo che $f(x) \longrightarrow l_f$, $g(x) \longrightarrow l_g$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

Algebra dei limiti

Supponiamo che $f(x) \longrightarrow l_f$, $g(x) \longrightarrow l_g$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $kf(x) \longrightarrow kl_f$

Algebra dei limiti

Supponiamo che $f(x) \longrightarrow l_f$, $g(x) \longrightarrow l_g$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $kf(x) \longrightarrow kl_f$

ii. $f(x) + g(x) \longrightarrow l_f + l_g$

Algebra dei limiti

Supponiamo che $f(x) \longrightarrow l_f$, $g(x) \longrightarrow l_g$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $kf(x) \longrightarrow kl_f$

ii. $f(x) + g(x) \longrightarrow l_f + l_g$

iii. $f(x)g(x) \longrightarrow l_f l_g$

Algebra dei limiti

Supponiamo che $f(x) \longrightarrow l_f$, $g(x) \longrightarrow l_g$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $kf(x) \longrightarrow kl_f$

ii. $f(x) + g(x) \longrightarrow l_f + l_g$

iii. $f(x)g(x) \longrightarrow l_f l_g$

iv. $f(x)/g(x) \longrightarrow l_f / l_g$,

Algebra dei limiti

Supponiamo che $f(x) \longrightarrow l_f$, $g(x) \longrightarrow l_g$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $kf(x) \longrightarrow kl_f$

ii. $f(x) + g(x) \longrightarrow l_f + l_g$

iii. $f(x)g(x) \longrightarrow l_f l_g$

iv. $f(x)/g(x) \longrightarrow l_f/l_g$, se $l_g \neq 0$

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni, tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A \cap (I_p \setminus \{p\})$$

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni, tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A \cap (I_p \setminus \{p\})$$

allora se

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \lim_{x \longrightarrow p} h(x) = l$$

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni, tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A \cap (I_\rho \setminus \{\rho\})$$

allora se

$$\lim_{x \longrightarrow \rho} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \rho} h(x) = l \quad \text{segue} \quad \lim_{x \longrightarrow \rho} g(x) = l$$

Limite destro e sinistro

Definizione.

Diremo che $\lim_{x \to \rho+} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \forall x : 0 < (x - \rho) < \delta$$

Limite destro e sinistro

Definizione.

Diremo che $\lim_{x\to\rho+} f(x) = l$ se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\rho,\varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$\left|f(x) - l\right| < \varepsilon \quad \forall x : 0 < (x-\rho) < \delta$$

Diremo che $\lim_{x\to\rho-} f(x) = l$ se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\rho,\varepsilon) > 0 \text{ tale che}$$
$$\left|f(x) - l\right| < \varepsilon \quad \forall x : -\delta < (x-\rho) < 0$$

Limite destro e sinistro

Teorema.

$$\lim_{x \to p} f(x) = l$$

Limite destro e sinistro

Teorema.

$$\lim_{x \to p} f(x) = l \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{x \to p+} f(x) = \lim_{x \to p-} f(x) = l$$

Esempi

Protagonisti

Augustin Louis Cauchy

1789 - 1857