UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Algebra

Alessandro D'Andrea

24. Generatori e dimensione

Richiami

- La lineare indipendenza è una proprietà degli insiemi piccoli
- In uno spazio vettoriale, tutti gli insiemi linearmente indipendenti di generatori hanno lo stesso numero di elementi
- Questo numero è la dimensione dello spazio vettoriale
- Se $\dim V = n$, allora un insieme linearmente indipendente è composto da al più n vettori; se ne ha esattamente n, è necessariamente una base
- Oggi: **Se sostituiamo gli insiemi linearmente indipendenti con gli insiemi di generatori, continuano a valere affermazioni simili ma opposte**
- **Essere generatori è una proprietà degli insiemi grandi**
- **Sottospazi vettoriali di K^2 e K^3 (per lo più, quando $K = \mathbb{R}$)**

Come trovo una base? – 2

Una base è un insieme linearmente indipendente di generatori.

Abbiamo visto una strategia per individuare una base: aggiungo sempre nuovi vettori mantenendo la condizione di lineare indipendenza. Questo può essere fatto fin tanto che gli elementi che ho considerato non diventano generatori dello spazio vettoriale.

Se riesco a limitare in qualche modo il numero di elementi linearmente indipendenti che posso prendere – ad esempio se lo spazio vettoriale ha dimensione finita – prima o poi mi sarà impossibile aggiungere nuovi vettori, e quindi avrò necessariamente un insieme di generatori, linearmente indipendenti.

Una strategia *duale* è quella di partire da un insieme di generatori, e rimuoverli uno alla volta finché non diventano linearmente indipendenti.

Generatori ridondanti

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.

Un insieme $v_1, \ldots, v_m$ di generatori di V può essere linearmente dipendente, ad esempio se m è maggiore della dimensione di V.

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno tra essi si esprime come combinazione lineare degli altri. A meno di riordinarli, posso supporre che sia v_m.

- Se v_m è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{m-1}$, ogni elemento di V che si esprime come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$ è anche combinazione lineare dei soli $v_1, \ldots, v_{m-1}$.
  - Diciamo che $v_m = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{m-1} v_{m-1}$;
  - se $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m v_m$ posso sostituire l'espressione di v_m e ottenere ...
  - $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{m-1} v_{m-1})$, cioè
  - $v = (\alpha_1 + \alpha_m \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m \beta_{m-1}) v_{m-1}$.

Estrazione di una base - I

Partiamo allora da un insieme $v_1, \ldots, v_m$ di generatori dello spazio vettoriale V.

Se $v_1, \ldots, v_m$ non sono linearmente dipendenti, uno tra i vettori è combinazione lineare degli altri; rimuovendolo, il sottospazio vettoriale generato dai vettori rimanenti non cambia, ed è quindi ancora V.

Posso continuare a rimuovere vettori finché rimangono linearmente dipendenti, e continueranno a generare V. Tuttavia non posso rimuoverli tutti, altrimenti smettono di generare V. Qui bisogna fare attenzione!

Questo vuol dire che, dopo alcune rimozioni, l'insieme sarà linearmente indipendente, e quindi una base.

Estrazione di una base - II

- Ogni insieme (finito) di generatori di V contiene una base come sottoinsieme
  - Gergo: da ogni insieme di generatori si può *estrarre* una base
- Se $\dim V = n$, ogni insieme di generatori di V contiene almeno n elementi
- Se $\dim V = n$, ogni insieme di n generatori di V è una base

Attenzione: non ogni spazio vettoriale V possiede un insieme finito di generatori. In tal caso, poiché da ogni insieme finito di generatori di V si estrae una base finita, V deve avere dimensione finita.

In uno spazio vettoriale di dimensione n, n elementi sono generatori se e solo se sono linearmente indipendenti.

Dimensione di sottospazi - I

Abbiamo finalmente gli strumenti per confrontare la dimensione di un sottospazio con quella dello spazio vettoriale che lo contiene.

Sia V uno spazio vettoriale, e $U \subset V$ un suo sottospazio. Anche U è uno spazio vettoriale – rispetto alle operazioni di V – e quindi possiamo trovare la dimensione sia di U che di V, esibendone basi.

Se $u_1, \ldots, u_m$ è una base di U, allora $\dim U = m$. Gli elementi $u_1, \ldots, u_m$, essendo elementi di U, sono anche elementi di V. Tuttavia, non possiamo aspettarci che siano generatori anche di V.

Di sicuro $u_1, \ldots, u_m$, formando una base di U, sono vettori linearmente indipendenti di V. Abbiamo visto che ogni insieme linearmente indipendente si completa ad una base di V: possiamo aggiungere elementi a $u_1, \ldots, u_m$ in modo che diventino una base di V.

La base di V così ottenuta dovrà avere più elementi della base di U dalla quale siamo partiti: se $U \subset V$, allora $\dim U \leq \dim V$.

Dimensione di sottospazi - II

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma — Dipartimento di Informatica

Se $U \subset V$, allora $\dim U \leq \dim V$.

Possiamo anche essere più precisi: se U è un sottospazio vettoriale di V, e $\dim U = \dim V = n$, questo vuol dire che una base di U è un insieme di n elementi linearmente indipendenti. Poiché V ha dimensione n, questi elementi devono esserne una base.

Pertanto U e V hanno la stessa base; tale base deve generare sia U che V, e quindi U coincide con V.

- Se $U \subset V$ e $\dim U = \dim V = n$, allora $U = V$
- Equivalentemente, se $U \subsetneq V$ sono spazi vettoriali di dimensione finita, allora $\dim U < \dim V$

Attenzione: in base a questo principio, il sottospazio vettoriale $\{0\}$ dello spazio vettoriale di dimensione uno K deve avere dimensione 0. Ci si mette quindi d'accordo che l'insieme vuoto è una base di $\{0\}$; pertanto l'insieme vuoto è linearmente indipendente, e genera il solo vettore nullo.

Sottospazi di K^2

Possiamo finalmente rendere rigoroso il ragionamento fatto (nel caso $K = \mathbb{R}$) qualche lezione fa, e descrivere completamente i sottospazi vettoriali di K^2.

Sappiamo già che $\dim K^2 = 2$. Se $U \subset K^2$ è un sottospazio vettoriale, allora $\dim U \leq \dim K^2 = 2$, e quindi U ha dimensione $0, 1$ oppure 2.

- Se $\dim U = 0$, allora $U = \{0\}$;
- se $\dim U = 2$, allora $U = K^2$;
- se $\dim U = 1$, allora U ha una base composta da un solo elemento (non nullo!). Se $u \neq 0$ costituisce una base di U, allora $U = Ku$ è l'insieme dei multipli di u, cioè la *retta* per l'origine che contiene u.

Non solo la dimostrazione è convincente e rigorosa, ma non abbiamo nemmeno bisogno di fare disegni!

NB: i termini *retta* e *piano* si utilizzano per indicare gli spazi vettoriali di dimensione 1 e 2.

Sottospazi di K^3

Possiamo farci coraggio e provare a descrivere anche i sottospazi vettoriali di K^3.

Se $U \subset K^3$ è un sottospazio vettoriale, poiché $\dim K^3 = 3$, la dimensione di U può essere solo $0, 1, 2$ oppure 3.

- Se $\dim U = 0$, allora $U = \{0\}$;
- se $\dim U = 3$, allora $U = K^3$;
- se $\dim U = 1$, allora posso trovare $u \neq 0$ tale che $U = Ku$ è la retta per l'origine dei soli multipli di u;
- se $\dim U = 2$, allora posso trovare u', u'' linearmente indipendenti tali che $U = \langle u', u'' \rangle$. U contiene sia la retta dei multipli di u' che la retta dei multipli di u''; tali rette sono distinte perché altrimenti u', u'' sarebbero linearmente dipendenti. U è il piano (l'unico!) che passa per l'origine, per u' e per u''.

Basi di nucleo e immagine - I

In precedenza, abbiamo già calcolato il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare.

Nel caso del nucleo, abbiamo calcolato esplicitamente tutti i suoi elementi; nel caso dell'immagine abbiamo dato generatori, e un po' rocambolescamente ne abbiamo compreso la struttura geometrica.

Vogliamo ora usare il concetto di base per dare una descrizione più precisa di nucleo e immagine. Occupiamoci di un esempio esplicito, e consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Basi di nucleo e immagine - II

Per capire come è fatto ker F, eseguiamo il procedimento di eliminazione sulla sua matrice; possiamo non riportare i termini noti perché sono 0 all'inizio, e rimangono 0 per tutto il procedimento.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5/4 & -1/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & -5/2 & 1/2 & -2 & -5/2 \\ 0 & -5/4 & 1/4 & -1 & -5/4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5/4 & -1/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8/5 & -12/5 & 4 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 1 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basi di nucleo e immagine - III

Il calcolo di $\ker F$ coincide con la risoluzione di un sistema omogeneo di equazioni lineari, che stiamo risolvendo applicando il procedimento di eliminazione di Gauss alla sola matrice dei coefficienti (senza termini noti).

Al termine dell'eliminazione, siamo arrivati alla forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 1 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi due pivot sulle colonne relative alle incognite x_1, x_2. Nella descrizione degli elementi di $\ker F$, utilizzeremo le rimanenti incognite x_3, x_4, x_5 come parametri.

Se $x_3 = a, x_4 = b, x_5 = c$, ricaviamo subito $x_1 = -2/5a + 3/5b - c$, $x_2 = 1/5a - 4/5b - c$.

Basi di nucleo e immagine - IV

Gli elementi del nucleo sono quindi tutti e soli quelli della forma

$$\left(-\frac{2}{5}a+\frac{3}{5}b-c, \frac{1}{5}a-\frac{4}{5}b-c, a, b, c\right) = a\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1, 0, 0\right) + b\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0, 1, 0\right) + c\,(-1, -1, 0, 0, 1).$$

Gli elementi del nucleo sono dati in modo esplicito come comb. lineari di tre vettori in $\mathbb{R}^5$. Se questa combinazione lineare è nulla, allora a, b, c sono sicuramente tutti e tre nulli, perché compaiono nelle posizioni di x_3, x_4, x_5.

Ricapitolando, $\ker F$ è dato esplicitamente come sottospazio generato da tre vettori, che sono automaticamente linearmente indipendenti.

Fatto: $\dim \ker F$ è uguale alla differenza tra il numero di colonne di $[F]$ e il numero di pivot al termine del procedimento di eliminazione.

Basi di nucleo e immagine - V

Dedichiamoci ora alla descrizione dell'immagine di F. Sappiamo già che im F è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dalle colonne di

$$[F] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le cinque colonne danno generatori di im $F \subset \mathbb{R}^4$, ma sono sicuramente linearmente dipendenti; il nostro obiettivo è quello di trovare dei generatori minimali (cioè una base) di im F.

Abbiamo già visto che se scriviamo i generatori di un sottospazio vettoriale come **righe** di una matrice, il procedimento di eliminazione di Gauss produce un insieme di generatori che possiamo sperare più semplice.

Basi di nucleo e immagine - VI

Eseguiamo allora il procedimento di eliminazione sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5/4 & -5/2 & -5/4 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5/4 & -5/2 & -5/4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5/4 & -5/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori nulli possono essere eliminati dai generatori, e possiamo concludere che il sottospazio $\operatorname{im} F \subset \mathbb{R}^4$ è generato da $(1, 0, 1, 1)$ e $(0, 1, -2, -1)$.

$\operatorname{im} F = \langle (1,0,1,1), (0,1,-2,-1) \rangle$.

I generatori di im F che abbiamo ottenuto sono linearmente indipendenti? Se proviamo a prendere una loro combinazione lineare

$$t(1,0,1,1) + s(0,1,-2,-1) = (t, s, t-2s, t-s),$$

notiamo subito che i coefficienti corrispondenti alle colonne contenenti pivot contengono esattamente i valori t, s. Questo accade sempre, perché l'eliminazione di Gauss viene svolta in modo che su ciascuna colonna contenente un pivot rimane un solo coefficiente non nullo, uguale ad 1.

Ma allora l'unica combinazione lineare nulla si ottiene per $t = s = 0$, e quindi i generatori trovati sono linearmente indipendenti.

Fatto: $\dim \operatorname{im} F$ è uguale al numero dei pivot della matrice *trasposta* di $[F]$.

Conclusioni

- Abbiamo imparato a manipolare insiemi di generatori e insiemi linearmente indipendenti
- Il metodo di eliminazione di Gauss ci permette di scrivere esplicitamente una base del sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo
- Una differente interpretazione del metodo di eliminazione ci permette di determinare una base di un sottospazio di K^n del quale ci sia dato un insieme di generatori
- Queste tecniche ci permettono facilmente di determinare basi di $\ker F$ e $\operatorname{im} F$ quando $F : K^m \to K^n$ è un'applicazione lineare.