UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

# Algebra

Alessandro D’Andrea

## 26. Rango

# Richiami



- La dimensione del nucleo di un'applicazione lineare $T : K^m \to K^n$ è legata al <u>numero di pivot della sua matrice</u>, dopo aver effettuato l'eliminazione di Gauss
- La dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare $T : K^m \to K^n$ è legata al <u>numero di pivot della **trasposta** della sua matrice</u>, dopo aver effettuato l'eliminazione di Gauss
- Oggi: **I due numeri coincidono**
- **Rango di una matrice**
- **Teorema di Rouché-Capelli**

# Rango per righe



Abbiamo visto che effettuando il procedimento di eliminazione di Gauss su una matrice $m \times n$, il sottospazio di $K^n$ generato dalle righe non cambia.

- Alla fine del procedimento di eliminazione, le righe non nulle sono linearmente indipendenti
- I pivot sono i primi elementi non nulli di ciascuna riga
- Il numero di righe non nulle è uguale al numero di pivot
- **La dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe della matrice iniziale è uguale al numero dei pivot che si hanno al termine dell'eliminazione**

# Rango per colonne - I

Consideriamo $n$ vettori $v_1, \ldots, v_n$ di $K^m$, e mettiamoli nelle colonne di una matrice $m \times n$.

Per stabilire la lineare dipendenza o indipendenza di $v_1, \ldots, v_n$ è necessario trovare le soluzioni di

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0.$$

I vettori sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica soluzione è $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Si può risolvere il sistema applicando il procedimento di eliminazione alla matrice che ha i coefficienti di $v_1, \ldots, v_n$ per colonne.

Al termine dell'eliminazione di Gauss, ho dei pivot in corrispondenza di alcune colonne (e quindi di alcune incognite).

# Rango per colonne - II

Per scrivere le soluzioni del sistema, si utilizzano le incognite, relative a colonne senza pivot, come parametri. Dopo averle portate a secondo membro, ogni scelta del valore di tali parametri determina il valore delle incognite relative a colonne con pivot.

Vediamo un esempio per poi trarre le nostre conclusioni. Abbiamo i vettori
$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 2, 2), v_4 = (1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$. Per trovare le soluzioni dell'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$$

eseguiamo il procedimento di eliminazione sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

# Rango per colonne - III



$$v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,2,2), v_4 = (1,-2,-1) \in \mathbb{R}^3$$
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- I pivot si trovano nelle colonne $x_1, x_2$.
- Si usano come parametri $x_3 = a, x_4 = b$.
- Le soluzioni sono $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-a + b, a - 2b, a, b)$.

# Rango per colonne - IV

$$v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,2,2), v_4 = (1,-2,-1) \in \mathbb{R}^3$$
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0 \text{ ha per soluzioni}$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-a+b, a-2b, a, b)$$

L'unica soluzione con $x_3 = x_4 = 0$ è $(0,0,0,0)$. Questo vuol dire che l'unica soluzione di $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ è $x_1 = x_2 = 0$. I vettori $v_1, v_2$ sono linearmente indipendenti.

Quando $a = 1, b = 0$, si ottiene la soluzione $(-1,1,1,0)$. Pertanto $-v_1 + v_2 + v_3 = 0$ e quindi $v_3 = v_1 - v_2$. $v_3$ è combinazione lineare di $v_1, v_2$.

Quando $a = 0, b = 1$, si ottiene la soluzione $(1,-2,0,1)$. Pertanto $v_1 - 2v_2 + v_4 = 0$ e quindi $v_4 = -v_1 + 2v_2$. $v_4$ è combinazione lineare di $v_1, v_2$.

# Rango per colonne - V

- I vettori (della matrice iniziale) che si trovano nelle colonne con pivot sono linearmente indipendenti
  - Ponendo a 0 il valore di tutti i parametri, si scopre che l'unica combinazione lineare nulla delle colonne con pivot è quella a coefficienti tutti nulli
- I vettori che si trovano su ogni altra colonna sono loro combinazione lineare
  - Ponendo a 1 il valore di un singolo parametro, e tutti gli altri a 0, si trova una scelta di parametri che esprime il vettore che si trovava sulla colonna relativa a quel parametro come combinazione lineare dei vettori che si trovano sulle colonne con pivot.
- **La dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle colonne della matrice iniziale è uguale al numero di pivot che si hanno al termine dell'eliminazione**

# Rango di una matrice



Data una matrice $M$ con $m$ righe ed $n$ colonne,

- La dimensione del sottospazio di $K^m$ generato dalle $n$ colonne di $M$ è uguale al numero di pivot al termine del procedimento di eliminazione
- La dimensione del sottospazio di $K^n$ generato dalle $m$ righe di $M$ è uguale al numero di pivot al termine del procedimento di eliminazione
- Le dimensioni dei sottospazi generati dalle righe di $M$ e dalle colonne di $M$ coincidono e questo valore comune rg $M$ si chiama rango di $M$
- Il rango di una matrice $m \times n$ non supera né $m$, né $n$. E' limitato dal più piccolo tra questi due numeri.

Vedremo in futuro un'altra giustificazione dell'uguaglianza delle due quantità, utilizzando il concetto di **determinante**.

# Rango di un'applicazione



Sia $F : K^n \to K^m$ un'applicazione lineare, e indichiamo con $[F]$ la sua matrice. Abbiamo già visto che

- $\dim \operatorname{im} F = \operatorname{rg}[F]$
- $\dim \ker F = n - \operatorname{rg}[F]$
- $\dim \operatorname{im} F + \dim \ker F = n$

Morale: se in partenza ho $n$ dimensioni, e ne perdo $k$ di nucleo, l'immagine dovrà avere dimensione $n - k$.

Il rango dell'applicazione $F$ è la dimensione della sua immagine. Questo valore coincide con il rango della matrice $[F]$.

# Teorema di Rouché-Capelli - I



Prima di terminare, vi presento un teorema che è semplice sia nell’enunciato che nella dimostrazione.

Fornisce condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema di equazioni lineari abbia soluzioni, in termini di rango di matrici associate al sistema.

Questo teorema sarà molto utile quando avremo modi più evoluti di calcolare il rango delle matrici.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

## Teorema (Rouché-Capelli)

*Il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

*ammette soluzioni se e solo se i ranghi delle matrici*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

*coincidono.*

# Teorema di Rouché-Capelli - III



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

*Dimostrazione:* Il rango di una matrice è la dimensione del sottospazio generato dalle sue colonne. Le colonne di $A$ sono le stesse di $B$, che però ha una colonna in più: quella dei termini noti.

Se $U_A$ è il sottospazio di $K^m$ generato dalle colonne di $A$ e $U_B$ è quello generato dalle colonne di $B$, abbiamo $U_A \subset U_B$ e quindi $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} B$.

Se la colonna dei termini noti non appartiene a $U_A$, allora $U_A \subsetneq U_B$, e quindi $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg} B$; se invece appartiene a $U_A$, allora $U_A = U_B$, e quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

In conclusione, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ se e solo se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice $A$.

# Teorema di Rouché-Capelli - IV



Tuttavia, il sistema lineare può essere riscritto come segue:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

e ha quindi soluzione esattamente quando la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Possiamo concludere: il sistema ha soluzione se e solo se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti; questo accade esattamente quando i ranghi delle matrici $A$ e $B$ coincidono. Pertanto, il sistema ha soluzione se e solo se le matrici hanno lo stesso rango.

# Un esempio rapidissimo



Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = a \\ x + y + 5z = b \end{cases}$$

ammette soluzioni? Dobbiamo confrontare i ranghi delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & a \\ 1 & 1 & 5 & b \end{pmatrix}.$$

Le prime due colonne di $A$ sono linearmente indipendenti, e quindi la matrice ha almeno rango 2; ma si tratta di una matrice $2 \times 3$, e quindi $\operatorname{rg} A$ è esattamente 2. Sappiamo già che $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} B$, quindi $\operatorname{rg} B$ è almeno 2. Ma $B$ è una matrice $2 \times 4$, quindi il rango è al più 2.

Concludiamo che $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, e quindi il sistema ha sempre soluzione, a prescindere dalla scelta di $a, b \in \mathbb{R}$.