Successioni per ricorrenza I

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

La generica forma di una successione per ricorrenza lineare del primo a coefficienti costanti è la seguente

$$\begin{cases} A_{n+1} = rA_n + d \\ A_0 = a_0 \end{cases}$$

$$A_1 = ra_0 + d$$

$$A_2 = r(ra_0 + d) + d = r^2 a_0 + rd + d$$

$$\vdots$$

Successioni per ricorrenza I

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$c\,r^{n+1} + d = r(c\,r^n + d) + d$$

$$A_0 = c\,r^0 + d = c + d = a_0$$

Successioni per ricorrenza I

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$cr^{n+1} + k = r\,(cr^n + k) + d$$

invece il dato iniziale ci fornisce la seconda relazione

$$A_0 = a_0 = c + k$$

$r = (1 + j)$

$d = -S$

e risolvendo il sistema ottieniamo

$$A_{n+1} = \left(a_0 - \frac{d}{1-r}\right) r^{n+1} + \frac{d}{1-r}$$

$$C_{n+1} = \left[C_0 + \left(-\frac{S}{j}\right)\right] r^{n+1} - \frac{S}{j}$$

Interessi bancari II

Il nostro modello degli interessi bancari era

$$\begin{cases} C_{n+1} = (1+j)C_n - s \\ C_0 = c_0 \end{cases}$$

e la sua soluzione risulta

$$C_n = \left(c_0 - \frac{s}{j}\right)\cancel{j}^n + \frac{s}{j}$$

$$(1+j)^n$$

Successioni per ricorrenza II

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Adottiamo nuovamente la strategia iniziale e cerchiamo una soluzione nella forma

$$A_n = c\lambda^n + \mu$$

sostituendo nell'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} + \mu = r\left(c\lambda^{n+1} + \mu\right) + d\left(c\lambda^n + \mu\right) + s$$

da cui abbiamo subito che

$$\mu = \frac{s}{1 - r - d}$$

$$c\lambda^{n+2} + \mu = cr\lambda^{n+1} + r\mu + cd\lambda^{n} + d\mu + s$$

Successioni per ricorrenza II

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Adesso possiamo utilizzare i dati iniziali, infatti

$$A_0 = c_1 + c_2 + \frac{s}{1-r-d} = a$$
$$A_1 = c_1\lambda_+ + c_2\lambda_- + \frac{s}{1-r-d} = b$$

ora dobbiamo risolvere un ultimo sistema algebrico per identificare i coefficienti c_1 e c_2, da cui

$$A_n = \left(\frac{b - a\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} + \frac{s(\lambda_- - 1)}{(\lambda_+ - \lambda_-)(1-r-d)}\right)\lambda_+^n + \left(\frac{a\lambda_+ - b}{\lambda_+ - \lambda_-} + \frac{s(1-\lambda_+)}{(\lambda_+ - \lambda_-)(1-r-d)}\right)\lambda_-^n + \frac{s}{1-r-d}$$

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

è descritta dalla seguente legge

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

dai conti precedenti abbiamo che

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

L'algoritmo di Erone

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) \\ X_0 = 2 \end{cases}$$

i. $X_n > 0$ e $X_n^2 \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(X_n^2 + \frac{4}{X_n^2} + 4\right) \geq 1 + \frac{1}{4}\left(X_n^2 + \frac{4}{X_n^2}\right) \geq 1 + \frac{1}{4}\, 2 \cdot 2$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$1 + \frac{1}{4}\, 2 \cdot 2 = 1 + 1$$