UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

11. Le funzioni continue

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo e $x_0 \in A$, diremo che f è una funzione **continua** in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta$$

Definizione.

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo e $x_0 \in A$, diremo che f è una funzione **continua** in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta$$

In altri termini

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo e $x_0 \in A$, diremo che f è una funzione **continua** in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta$$

In altri termini

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è **continua** in A se è continua in ogni punto di A.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo e $x_0 \in A$, diremo che f è una funzione **continua** in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta$$

In altri termini

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è **continua** in A se è continua in ogni punto di A.

Piccole variazioni negli input producono piccole variazioni negli output.

Quali funzioni sono continue?

Facciamo un piccolo elenco di funzioni continue:

- polinomi

Quali funzioni sono continue?

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Facciamo un piccolo elenco di funzioni continue:

- polinomi
- funzione valore assoluto

Quali funzioni sono continue?

Facciamo un piccolo elenco di funzioni continue:

- polinomi
- funzione valore assoluto
- funzioni trigonometriche

Quali funzioni sono continue?

Facciamo un piccolo elenco di funzioni continue:

- polinomi
- funzione valore assoluto
- funzioni trigonometriche
- funzioni esponenziali e logaritmi

Costruire funzioni continue

Siano f, g due funzioni continue, allora segue che

- $f + g$ sono funzioni continue

Costruire funzioni continue

Siano f, g due funzioni continue, allora segue che

- $f + g$ sono funzioni continue
- $f - g$ sono funzioni continue

Costruire funzioni continue

Siano f, g due funzioni continue, allora segue che

- $f + g$ sono funzioni continue
- $f - g$ sono funzioni continue
- fg è una funzione continua

Costruire funzioni continue

Siano f, g due funzioni continue, allora segue che

- $f + g$ sono funzioni continue
- $f - g$ sono funzioni continue
- fg è una funzione continua
- f/g è una funzione continua (se $g \neq 0$)

Osservazione.

Una funzione f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Discontinuità eliminabili

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Discontinuità di salto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Discontinuità essenziali

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + |x|}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esempi

Teorema della permanenza del segno.

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, A un intervallo e $x_0 \in A$. Se

$$f(x_0) > 0$$

allora esiste un intorno I_0 del punto x_0 tale che

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in I_0 \cap A$$

Osservazione. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, A un intervallo e $x_0 \in A$, allora

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$$

Proprietà delle funzioni continue

Proposizione.
Siano f e g due funzioni continue, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua.

Proprietà delle funzioni continue

Proposizione.
Siano f e g due funzioni continue, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua.

Proposizione.
Sia f una funzione continua, allora la funzione è iniettiva se e solo se è strettamente monotona.

Esempi

Proposizione.
Sia f una funzione continua e invertibile definita su un intervallo, allora la funzione inversa f^{-1} è una funzione continua.

Esempi

Georg Friedrich Bernhard Riemann

1826 - 1866

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA