UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

12b. Il problema delle parti

Il problema delle parti

Il problema più famoso posto dallo Chevalier de Méré a Pascal riguarda come dividere la posta in un gioco d’azzardo che deve essere interrotto prima del termine.

Il gioco può essere descritto astrattamente nella maniera seguente: due giocatori puntano la stessa cifra e giocano un certo numero di “mani” di un gioco.

I due giocatori hanno uguale probabilità di vincere ciascuna mano. Gli esiti delle varie mani sono eventi indipendenti.

Chi arriva per primo a vincere N mani prende tutto il piatto.

Il problema delle parti

Si tratta con tutta evidenza di un gioco equo, dato che i due giocatori vi compaiono in maniera simmetrica.

Supponiamo adesso che per cause di forza maggiore il gioco debba essere interrotto prima che possa avere termine, quando il primo giocatore ha vinto *m* mani e il secondo *n*.

Come possono dividersi la posta i due giocatori in maniera equa?

Se sono pari la risposta è ovvia: devono dividerlo in parti uguali. Ma negli altri casi?

Il problema delle parti

Ovviamente non sarebbe giusto dare tutto il piatto a chi è in vantaggio; anche l'altro giocatore avrebbe potuto vincere.

Ma nemmeno possiamo dividerlo in parti uguali. Sembra ragionevole che il giocatore in vantaggio debba ricevere di più.

Come dobbiamo quantificare questo "di più"?

Ben prima di de Méré la domanda era stata posta dal matematico italiano Luca Pacioli che propose la seguente soluzione: dividere il piatto proporzionalmente al numero di mani vinte da ognuno.

La soluzione proposta da Pacioli sembra di buon senso ma non è corretta, come ebbe a notare circa sessanta anni dopo un altro matematico italiano, Niccoló Tartaglia.

Il problema delle parti

Tartaglia osserva che con la soluzione di Pacioli se $m = 1$ e $n = 0$, il primo giocatore andrebbe a prendere tutto il piatto, mentre la partita è ancora tutta da giocare.

Per evitare il problema Tartaglia propone di considerare la proporzione fra il vantaggio di uno dei giocatori e la lunghezza totale del gioco.

La proposta di Tartaglia è che il piatto venga diviso a metà e poi il primo giocatore, supponendo sia lui a essere in vantaggio, prenda una frazione di quanto dato al secondo giocatore pari a $\frac{m-n}{N}$ (dove $m \geq n$).

È lo stesso Tartaglia a rendersi conto che la sua situazione è però insoddisfacente.

Il problema delle parti

Se $N = 100$ e al momento dell'interruzione il punteggio è 99 a 89 la partita è praticamente decisa, mentre se è 40 a 30 il secondo giocatore ha ancora buone possibilità. Eppure la soluzione di Tartaglia porta alla stessa suddivisione nei due casi.

Alla metà del XVII secolo il problema verrà affrontato in maniera più sistematica da Pascal.

All'osservazione che in caso di parità il piatto va ovviamente diviso in parti uguali Pascal e Fermat ne aggiungono un'altra, banale ma decisiva per capire come lavorare alla soluzione:

Il caso $N = 20, m = 18, n = 16$ deve avere la stessa soluzione del caso $N = 10, m = 8, n = 6$.

Il problema delle parti

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Dobbiamo guardare unicamente a quanti punti servono per vincere.

La soluzione equa che propongono è che il piatto venga diviso proporzionalmnete alla probabilità che ciascuno dei giocatori avrebbe di vincere il gioco se questo fosse continuato sino al termine.

Rimane da calcolare tale probabilità.

La prima soluzione si deve proprio a Fermat.

Il problema delle parti

Iniziamo considerando un caso semplice: $N = 10, m = 9, n = 8$. Supponiamo che si giochi tirando una moneta.

Se esce testa vince subito il primo giocatore, con croce-testa ancora il primo e con croce-croce il secondo.

Non è difficile calcolare queste probabilità ma il fatto che il numero di mani da giocare non sia fissato, può creare confusione. Per evitarlo chiederemo che si giochi sempre lo stesso numero di mani, anche se le ultime possono essere ininfluenti ai fini del risultato.

Il problema delle parti

Dato che al primo giocatore servono $N - m$ punti per vincere e al secondo $N - n$, il gioco avrà certamente termine entro $2N - m - n - 1$ mani.

Supporremo pertanto di continuare il gioco sempre per $2N - m - n - 1$.

Il vantaggio di questa scelta è che ogni svolgimento ha probabilità $2^{-(2N-m-n-1)}$. Rientriamo quindi nell'ambito del modello classico.

A questo punto la soluzione è a portata di mano: basta scrivere tutti i $2^{2N-m-n-1}$ svolgimenti possibili e contare quanti portano alla vittoria del primo giocatore.

La soluzione di Fermat, per quanto non particolarmente elegante, è certamente corretta.

Il problema delle parti

Il tentativo di Pascal di migliorare la soluzione del suo amico Fermat, in particolare dando una formula chiusa che non richiedesse l'enumerazione di tutti i casi possibili, lo porta a usare con successo il Triangolo di Tartaglia che diventerà poi noto anche come Triangolo di Pascal.

Guardiamo alla riga $2N - m - n - 1$ del Triangolo.

Gli elementi della riga rappresentano il numero di modi in cui il primo giocatore può vincere $0, 1, 2, \dots$ mani.

Quindi il j-esimo elemento della riga $2N - m - n - 1$ è $\binom{2N-m-n-1}{j}$ e rappresenta il numero di modi in cui il primo giocatore può vincere j mani.

Il problema delle parti

Supponiamo adesso che al primo giocatore serva vincere ancora $N - m$ mani e al secondo $N - n$.

Pascal mostra che il numero dei modi che ha per vincere il primo giocatore è pari a

$$\binom{2N-m-n-1}{N-m} + \binom{2N-m-n-1}{N-m+1} + \dots + \binom{2N-m-n-1}{2N-m-n-1},$$

che è la somma dei primi $N - n$ elementi della riga.

Il numero dei modi che ha per vincere il secondo giocatore è invece dato dalla somma dei rimanenti $N - m$ elementi della riga.