UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

5. Il modello classico

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione: Introdurre il "modello classico" del calcolo delle probabilità

Nel cosiddetto modello classico tutti gli eventi elementari sono considerati equiprobabili.

La probabilità è definita, in accordo con l'intuizione, "numero dei casi favorevoli diviso numero dei casi possibili".

Pertanto il calcolo della probabilià di un evento si riduce a problemi di conteggio.

Nella lezione successiva vedremo tecniche contare quanti elementi ci sono in un insieme, anche quando è descritto in maniera indiretta. Una di queste tecniche, Il principio di inclusione-esclusione, è già stato descritto nella lezione precedente.

Il modello classico

Finalmente è il momento di parlare di probabilità. Iniziamo con due esempi visti nelle lezioni precedenti: il lancio di una moneta e il tiro di un dado a sei facce. In entrambi i casi supporremo che non vi sia ragione di considerare più probabile il verificarsi di un'esito piuttosto che un'altro. Quindi uguale probabilità a ogni esito del singolo esperimento.

Lancio di una moneta

Iniziamo dal lancio della moneta;
due esiti possibili: testa e croce $\{T, C\}$.

A questi assegnamo la stessa probabilità:

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$$

È questo il modello più semplice di evento incerto.

Le estensioni più immediate sono di due tipi: assegnare probailità diverse alla testa e alla croce, oppure considerare più di due esiti possibili. Per ora prenderemo in considerazione solo la seconda estensione.

Lancio di un dado

Analogamente per un dado a sei facce assegnamo:

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(3) = \mathbf{P}(4) = \mathbf{P}(5) = \mathbf{P}(6) = \frac{1}{6}$$

Anche qui l'assegnazione è guidata da un'ipotesi, spesso implicita, di simmetria.

Questo non è un buon modello per un dato truccato!

Probabilità di eventi qualunque

Come abbiamo detto nelle lezioni precedenti non siamo interessati esclusivamente a eventi elementari.

Vogliamo anche trovare la probabilità di eventi come “esce un numero pari” oppure “il risultato è strettamente minore di cinque”.

L’evento “esce un numero pari” è descritto dall’insieme $\{2, 4, 6\}$ che ha cardinalità 3.

L’intero spazio di probabilità $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ha cardinalità 6.

Dei 6 *casi possibili*, 3 sono i *casi favorevoli*.

Probabilità di eventi qualunque

Coerentemente con la nostra ipotesi che vede sullo stesso piano tutti gli eventi elementari, diremo che

$$\mathbf{P}(\text{esce un numero pari}) = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{2}$$

La scelta naturale, quella che segue la nostra intuizione, è definire

$$\mathbf{P}(\text{evento}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

In altre parole, se A è un evento e quindi un sottoinsieme dello spazio campionario X, definiamo:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|X|}$$

Analogamente, nell'altro esempio che abbiamo considerato:

$$\mathbf{P}(\text{il risultato è strettamente minore di cinque}) = \frac{|\{1,2,3,4\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{2}{3}$$

Se invece guardiamo a un mazzo di carte:

$$\mathbf{P}(\text{estrarre una carta di picche da un mazzo di 52}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Modello classico

Questo importante caso particolare è detto modello classico del calcolo delle probabilità.

Storicamente la matematizzazione dell'incertezza inizia col modello classico, che rimane tutt'ora fondamentale.

Dato che nel modello classico la probabilità di un evento è definita come il quoziente delle cardinalità di due insiemi, calcolare una probababilità **si riduce a un problema di conteggio**.

La parte della matematica che si occupa di determinare la cardinalità di un insieme descritto tramite una proprietà dei suoi elementi è detta **calcolo combinatorio** o semplicemente **combinatoria**.

Se un insieme è specificato dando la lista dei suoi elementi, trovare la sua cardinalità naturalmente è banale!

Esempio: mazzo di 52 carte

$$\mathbf{P}(\text{asso di picche}) = \frac{1}{52}; \qquad \mathbf{P}(\text{asso}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\mathbf{P}(\text{figura}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}; \quad \mathbf{P}(\text{asso oppure figura}) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Cosa facciamo per $\mathbf{P}$(asso oppure picche)?
Ci sono 4 assi e 13 picche, ma se rispondiamo $\frac{17}{52}$, ci sbaglieremmo.
Avremmo contato due volte l'asso di picche.
Eliminiamo il doppio conteggio. Ci sono 16 carte che sono assi oppure picche. Quindi $\mathbf{P}(\text{asso oppure picche}) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

Il lancio di due dadi a sei facce.

È utile distinguere i due dadi, anche se hanno caratteristiche identiche. Penseremo quindi a un dado rosso e un dado blu. Lo spazio degli eventi conta 36 elementi.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Calcoliamo la probabilità che la somma delle facce sia 8.
Ci sono cinque casi favorevoli (2, 6), (3, 5), (4 4), (5, 3), (6, 2).
Quindi

$$\mathbf{P}(8) = \frac{5}{36}$$

Calcoliamo la probabilità che le due facce mostrino valori diversi.
Facciamo prima a contare quanti sono i casi in cui mostrano due facce uguali, ovviamente sei.
Quindi

$$\mathbf{P}(\text{valori diversi})) = \frac{36-6}{36} = \frac{5}{6}$$

Il “trucco” appena utilizzato ha validità generale:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|X|} = \frac{|X| - |A^C|}{|X|} = 1 - \mathbf{P}(A^C)$$

Quando ci viene chiesto di calcolare la probabilità di un evento, vale sempre la pena di chiedersi se sia meno faticoso calcolare la probabilità dell’evento complementare.

Vogliamo sapere la probabilità che il secondo dado dia un risultato maggiore del primo.

I casi favorevoli sono 15:
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6).
Quindi:

$$\mathbf{P}(\text{secondo dado} > \text{primo}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Adesso calcoliamo la probabilità di ottenere almeno un 6.

I casi favorevoli sono 11:
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5).

$$\mathbf{P}(\text{ottenere almeno un 6}) = \frac{11}{36}$$

Avremmo potuto però usare quello che abbiamo imparato e procedere diversamente...

Scriviamo l'evento che ci interessa come unione:

$\{$ottenere almeno un 6$\} = \{$il primo dado dà 6$\} \cup \{$il secondo dado dà 6$\}$

e troviamo

$$\mathbf{P}(\{\text{ottenere almeno un 6}\}) =$$
$$\mathbf{P}(\ \{\text{il primo dado dà 6}\} \cup \{\text{il secondo dado dà 6}\}) =$$
$$\mathbf{P}(\{\text{il primo dà 6}\}) + \mathbf{P}(\{\text{il secondo dà 6}\}) - \mathbf{P}(\{\text{entrambi danno 6}) =$$
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Vediamo ulteriori esempi sempre per il lancio di due dadi:

$$\mathbf{P}(\text{entrambi i dadi} \geq 5) = \frac{|\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}|}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{almeno un dado} \geq 5) &= \mathbf{P}(\{\text{primo dado} \geq 5\} \cup \{\text{secondo dado} \geq 5\}) \\ &= \mathbf{P}(\text{primo dado} \geq 5) + \mathbf{P}(\text{secondo dado} \geq 5) - \mathbf{P}(\text{entrambi i dadi} \geq 5) \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{5}{9}\end{aligned}$$

Procedendo come sopra possiamo calcolare la probabilità che entrambi i dadi siano pari.
Contando dalla lista di tutte le coppie, vediamo che ce ne sono 9 con entrambi gli elementi pari. Quindi:

$$\mathbf{P}(\text{entrambi i dadi sono pari}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Immediatamente ricaviamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{almeno un dado è dispari}) &= 1 - \mathbf{P}(\text{entrambi i dadi sono pari}) \\ &= 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}\end{aligned}$$