UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

05. Il calcolo dei limiti

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Promemoria.

Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che $a_n \longrightarrow l$ se

$$\text{per ogni } J_l \text{ intorno di } l \qquad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che}$$

$$a_n \in J_l \qquad \forall n \geq \overline{n}$$

Promemoria.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che $a_n \longrightarrow l$ se

$$\text{per ogni } J_l \text{ intorno di } l \qquad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che}$$

$$a_n \in J_l \qquad \forall n \geq \overline{n}$$

Formulazione "classica".
Oppure diremo che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \qquad \text{tale che}$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

Esempi

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

i. se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$

Esempi

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

i. se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$

ii. se $x = 1$ abbiamo che $a_n = 1 \longrightarrow 1$

Esempi

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

i. se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$

ii. se $x = 1$ abbiamo che $a_n = 1 \longrightarrow 1$

iii. se $x = -1$, $a_n = (-1)^n$ e non ammette limite

Esempi

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

i. se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$
ii. se $x = 1$ abbiamo che $a_n = 1 \longrightarrow 1$
iii. se $x = -1$, $a_n = (-1)^n$ e non ammette limite
iv. se $x > 1$ abbiamo che $a_n \longrightarrow +\infty$

Esempi

Consideriamo la successione $a_n = x^n$ e discutiamo il suo comportamento asintotico al variare di $x \in \mathbb{R}$:

i. se $x \in (-1, 1)$ abbiamo che $a_n \longrightarrow 0$
ii. se $x = 1$ abbiamo che $a_n = 1 \longrightarrow 1$
iii. se $x = -1$, $a_n = (-1)^n$ e non ammette limite
iv. se $x > 1$ abbiamo che $a_n \longrightarrow +\infty$
v. se $x < -1$, a_n non ha limite

Un risultato generale

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow h \in [0, 1)$$

allora $a_n \longrightarrow 0^+$.

Esempi

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Esempi

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Esempi

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Esempi

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Esempi

$$a_n = \frac{n^p}{x^n} \longrightarrow 0$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$$

quindi segue che

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

Esempi

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$$

quindi segue che

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$$

Esempi

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$$

Esempi

Un numero speciale

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \in (2,3)$$

Protagonisti

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano

1781 - 1848