Algebra

Alessandro D'Andrea

12. Reciprocità quadratica e teorema di Solovay-Strassen

Richiami

- Simbolo di Legendre e simbolo di Jacobi
- Il simbolo di Jacobi si calcola rapidamente grazie alle proprietà di reciprocità quadratica
- La rapidità nel calcolo del simbolo di Jacobi permette di verificare rapidamente la primalità di un numero grande (algoritmo di Solovay-Strassen)
- Oggi: **Dimostrazione combinatoria del teorema di reciprocità quadratica**
- **Dimostrazione della correttezza dell'algoritmo di Solovay-Strassen**

Calcolo di $\left(\frac{2}{p}\right)$

In tutto quello che segue, p e q sono primi dispari. Abbiamo visto come calcolare $\left(\frac{2}{p}\right)$. Si scrive

$$\begin{aligned} 2^{(p-1)/2} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! & \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (p-3) \cdot (p-1) \\ &\equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (-3) \cdot (-1) \\ &\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p-1}{4} \rfloor} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \mod p, \end{aligned}$$

per ottenere

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p-1}{4} \rfloor} \mod p.$$

Calcolo di $\left(\frac{q}{p}\right)$

Proviamo a fare lo stesso per calcolare $\left(\frac{q}{p}\right)$.

$$q^{(p-1)/2} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)!$$
$$= q \cdot 2q \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p-3}{2} \cdot q\right) \cdot \left(\frac{p-1}{2} \cdot q\right)$$

Se riduco tutto modulo p, e riscrivo ogni $(p+1)/2 \leq m < p$ come $-(p-m)$, allora il secondo membro diventa

$$q \cdot 2q \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p-3}{2} \cdot q\right) \cdot \left(\frac{p-1}{2} \cdot q\right) \equiv \pm \left(\frac{p-1}{2}\right)! \mod p.$$

Se troviamo un modo di stimare il segno, abbiamo calcolato il simbolo di Legendre.

Calcolo di $\left(\frac{7}{23}\right)$ - I

$$\begin{aligned} 7^{11} \cdot 11! &= 7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 42 \cdot 49 \cdot 56 \cdot 63 \cdot 70 \cdot 77 \\ &\equiv 7 \cdot (-9) \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-11) \cdot (-4) \cdot 3 \cdot 10 \cdot (-6) \cdot 1 \cdot 8 \\ &\equiv (-1)^5 11! \mod 23. \end{aligned}$$

Il segno è $+$ quando $7n \mod 23$ si trova nella metà inferiore $1, \ldots, 11$; equivalentemente, quando la parte frazionaria di $7n/23$ è compresa tra 0 e $1/2$ (esclusi).

Il segno è $-$ quando $7n \mod 23$ si trova nella metà superiore $12, \ldots, 22$; equivalentemente, quando la parte frazionaria di $7n/23$ è compresa tra $1/2$ e 1 (esclusi).

Calcolo di $\left(\frac{7}{23}\right)$ - II

Il segno è $+$ quando $7n \mod 23$ si trova nella metà inferiore $1, \ldots, 11$; equivalentemente, quando la parte frazionaria di $7n/23$ è compresa tra 0 e $1/2$ (esclusi).

Il segno è $-$ quando $7n \mod 23$ si trova nella metà superiore $12, \ldots, 22$; equivalentemente, quando la parte frazionaria di $7n/23$ è compresa tra $1/2$ e 1 (esclusi).

Possiamo tradurre tutto in questo modo: il segno è $+$ se $\lfloor 14n/23 \rfloor$ è pari, mentre è $-$ se $\lfloor 14n/23 \rfloor$ è dispari. In conclusione, il segno di ciascun fattore è

$$(-1)^{\lfloor 14n/23 \rfloor}.$$

Nel caso generale del calcolo di $\left(\frac{q}{p}\right)$, il segno di ciascun fattore è

$$(-1)^{\lfloor 2qn/p \rfloor}.$$

Espressione esplicita per $\left(\frac{q}{p}\right)$ - I

$$
\begin{aligned}
& q^{(p-1)/2} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! \\
& \quad = q \cdot 2q \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p-3}{2} \cdot q\right) \cdot \left(\frac{p-1}{2} \cdot q\right) \\
& \quad \equiv (-1)^{\lfloor 2q/p \rfloor} \cdot (-1)^{\lfloor 4q/p \rfloor} \cdot \ldots \cdot (-1)^{\lfloor (p-1)q/p \rfloor} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! \\
& \quad \equiv (-1)^{\lfloor 2q/p \rfloor + \lfloor 4q/p \rfloor + \ldots + \lfloor (p-1)q/p \rfloor} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! \mod p.
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
q^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{\lfloor 2q/p \rfloor + \lfloor 4q/p \rfloor + \ldots + \lfloor (p-1)q/p \rfloor} \mod p.
$$

Espressione esplicita per $\left(\frac{q}{p}\right)$ - II

$$q^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{\lfloor 2q/p \rfloor + \lfloor 4q/p \rfloor + \ldots + \lfloor (p-1)q/p \rfloor} \mod p.$$

Di conseguenza

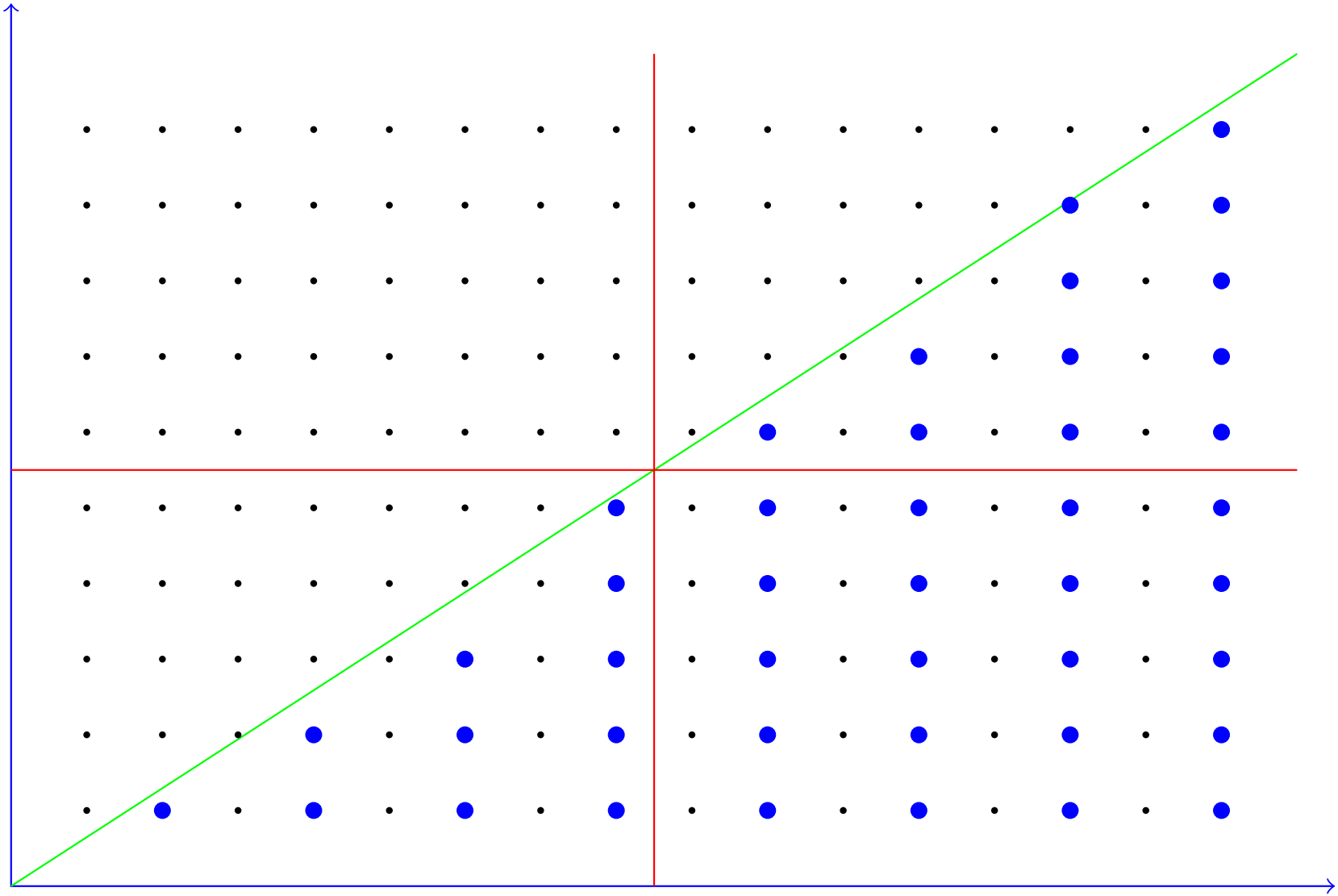
$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\lfloor 2p/q \rfloor + \lfloor 4p/q \rfloor + \ldots + \lfloor (q-1)p/q \rfloor},$$
$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\lfloor 2q/p \rfloor + \lfloor 4q/p \rfloor + \ldots + \lfloor (p-1)q/p \rfloor}.$$

Vogliamo mostrare che

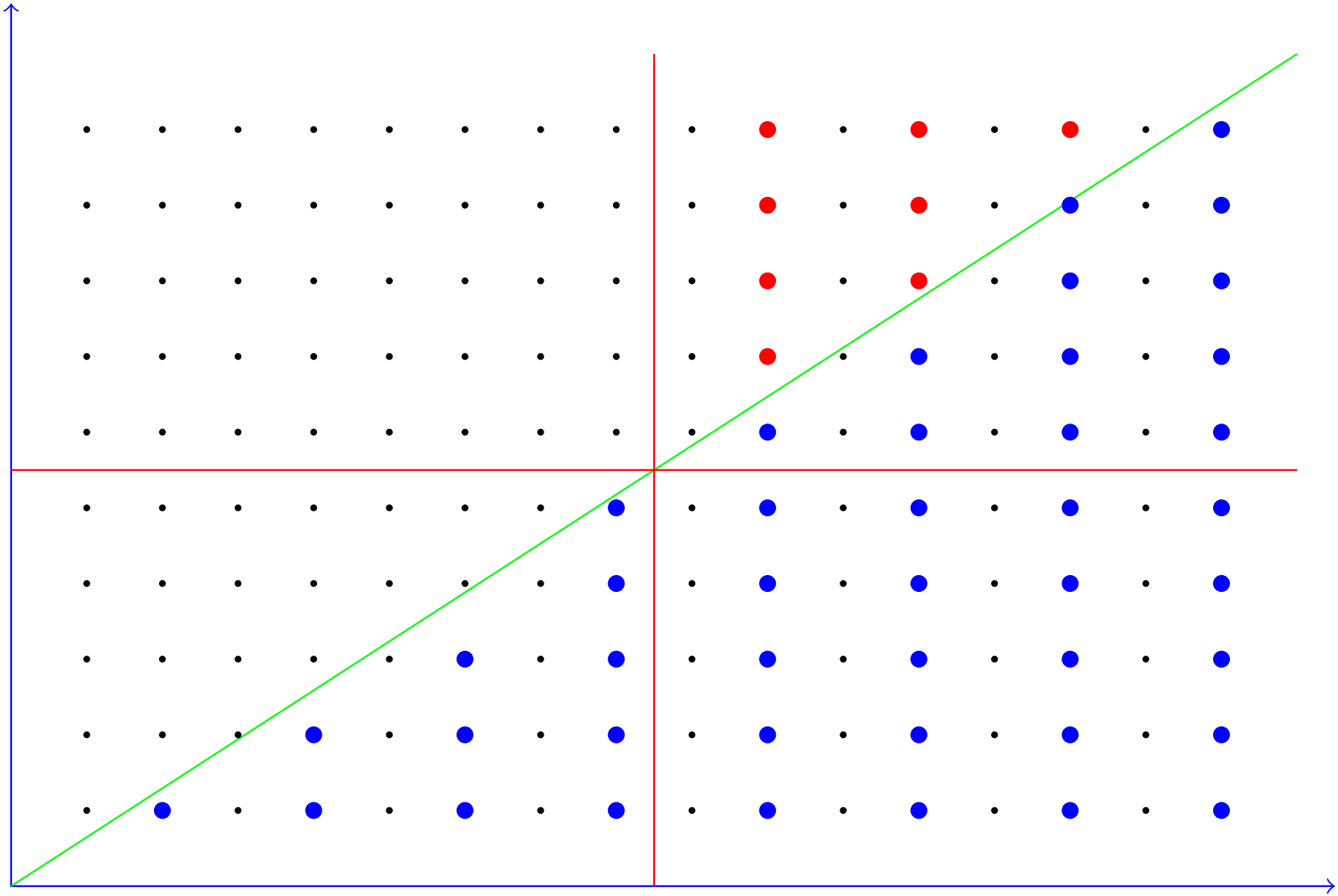
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Daremo di questo fatto una dimostrazione grafica.

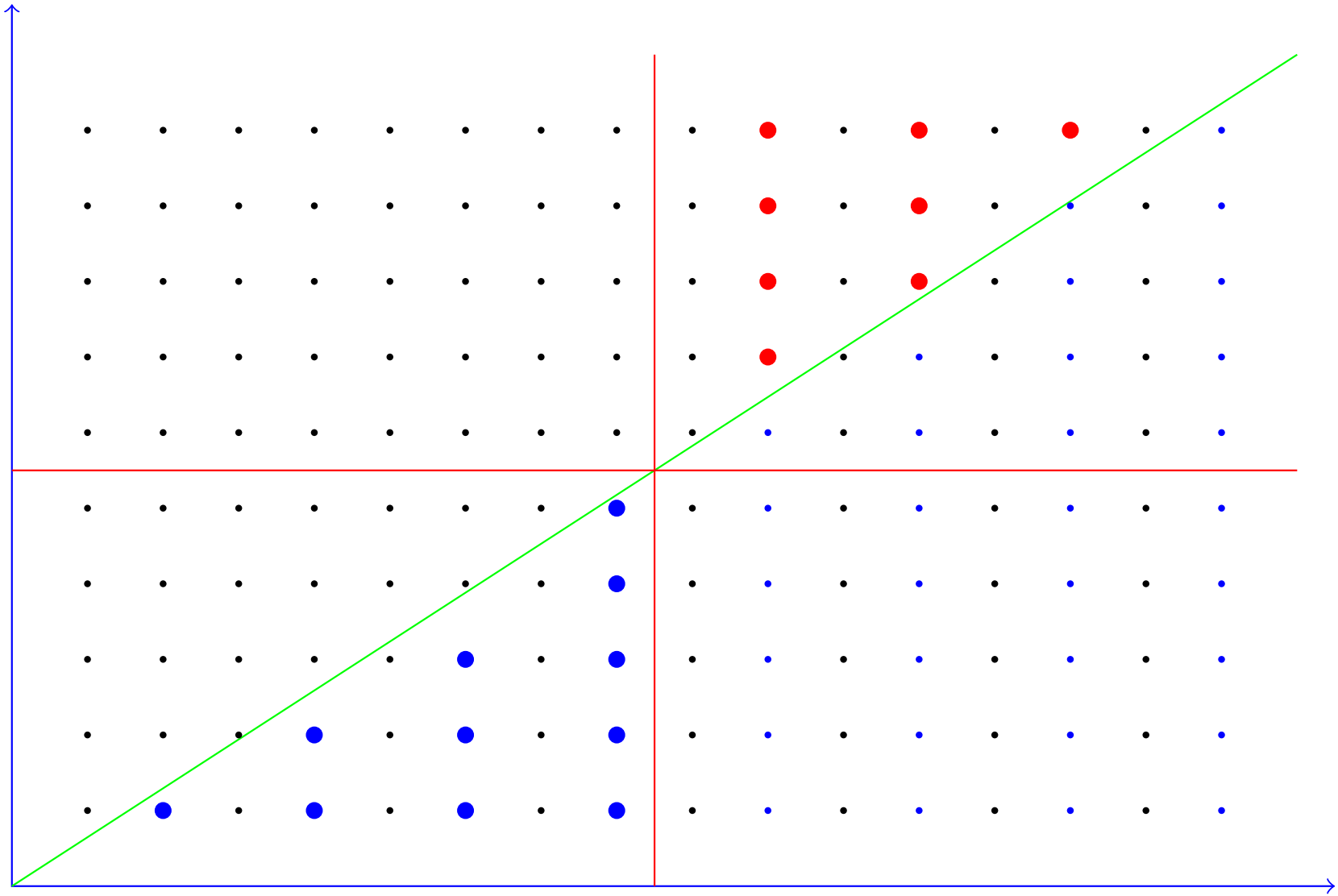
Dimostrazione grafica - I



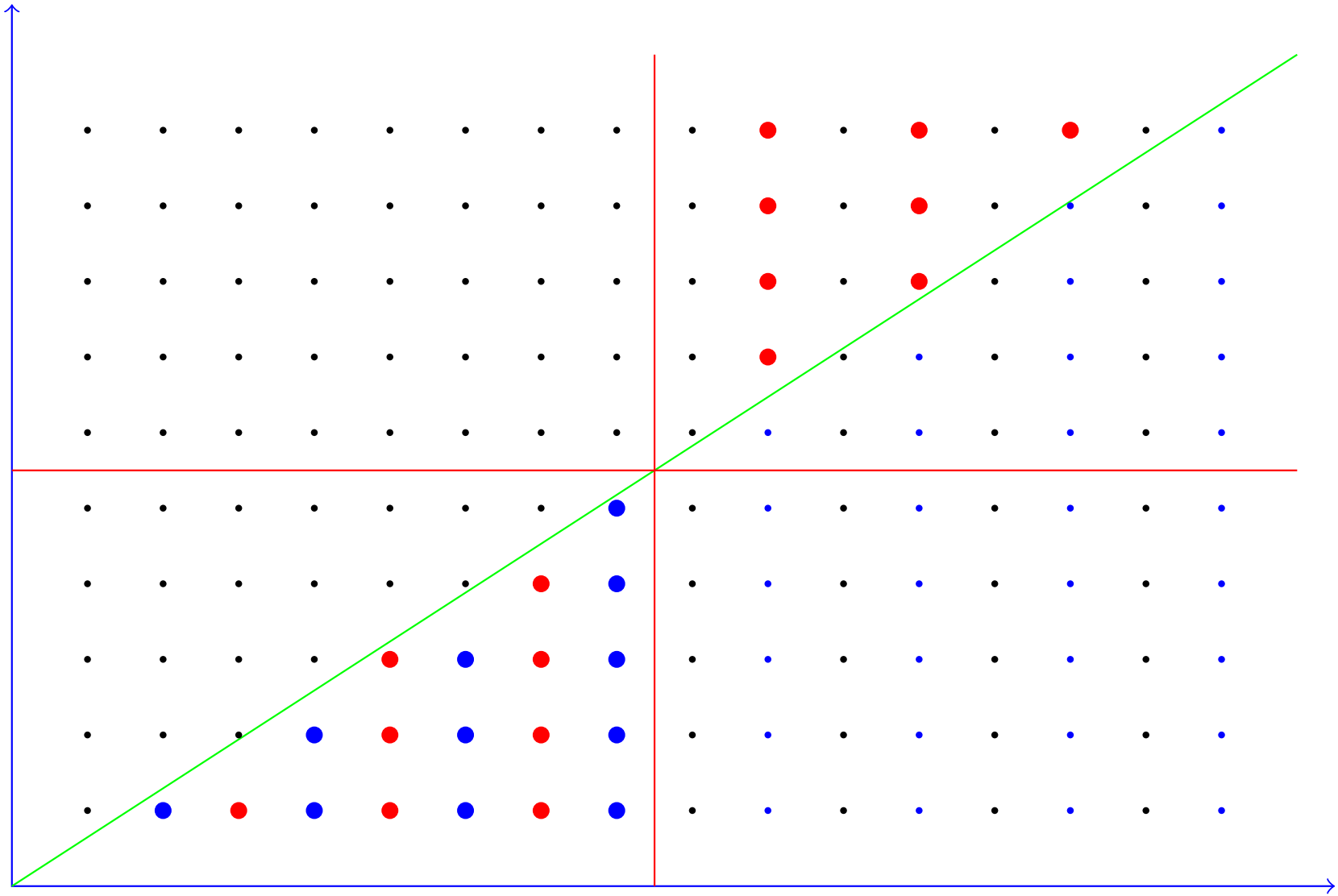
Dimostrazione grafica - II



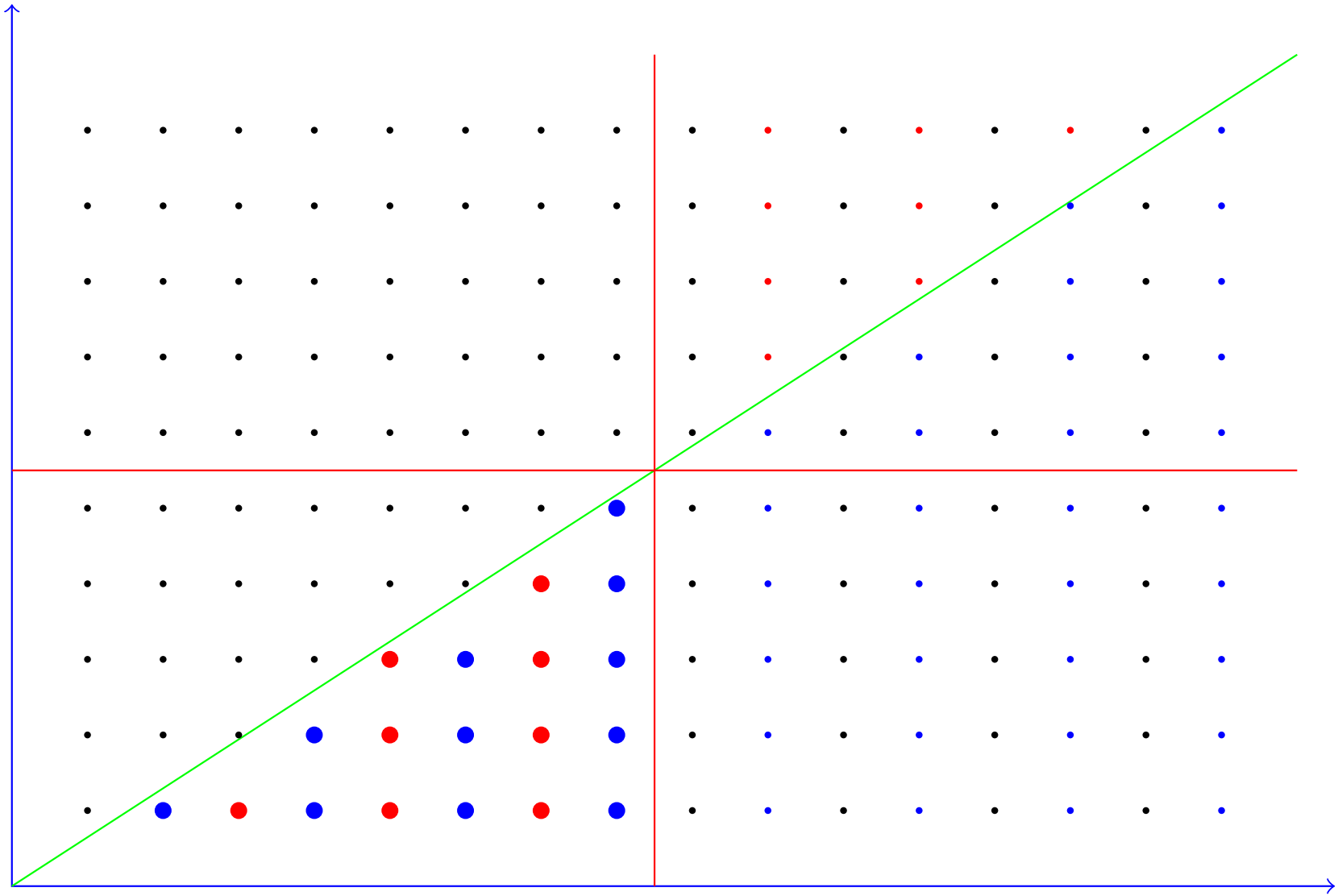
Dimostrazione grafica - III



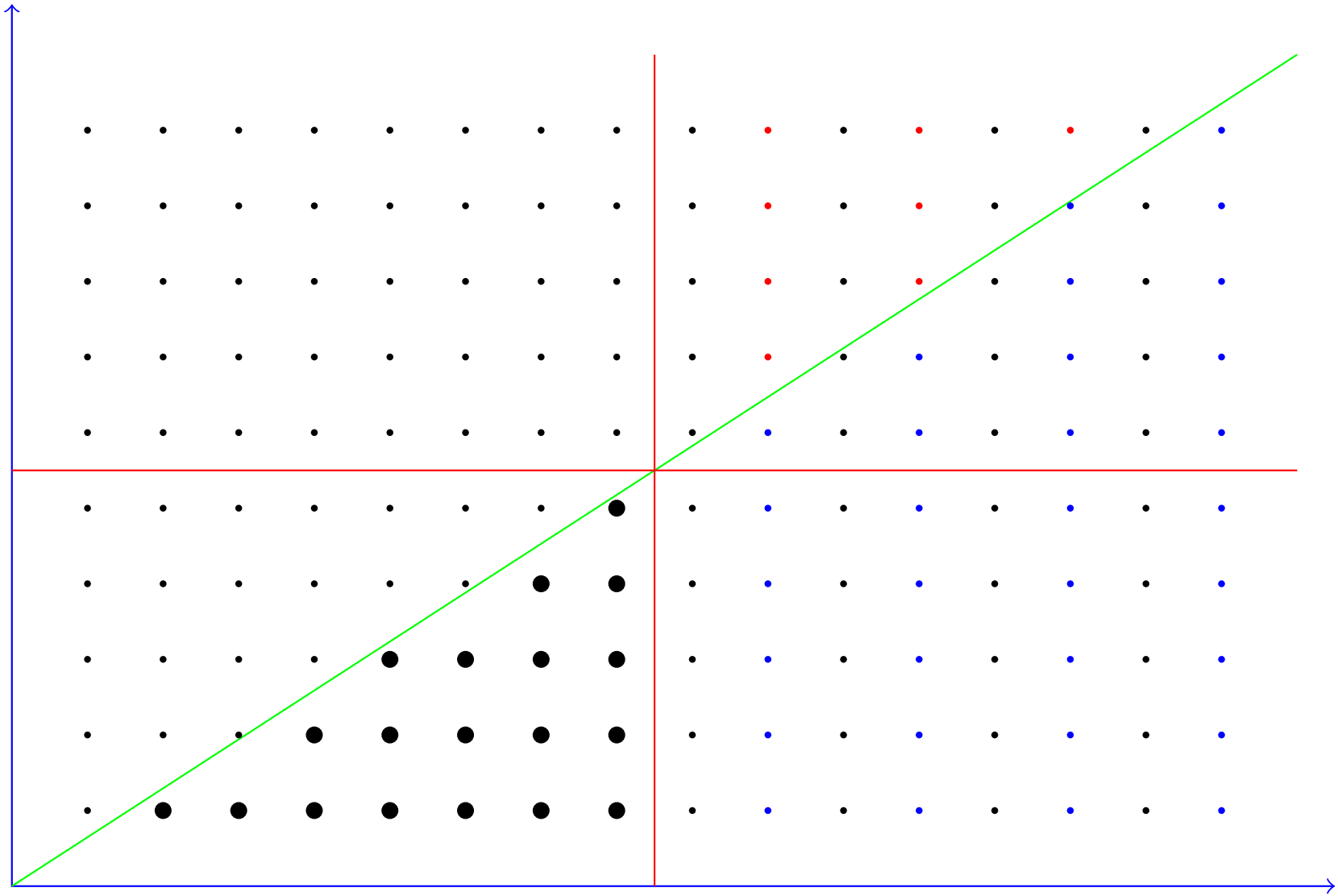
Dimostrazione grafica - IV



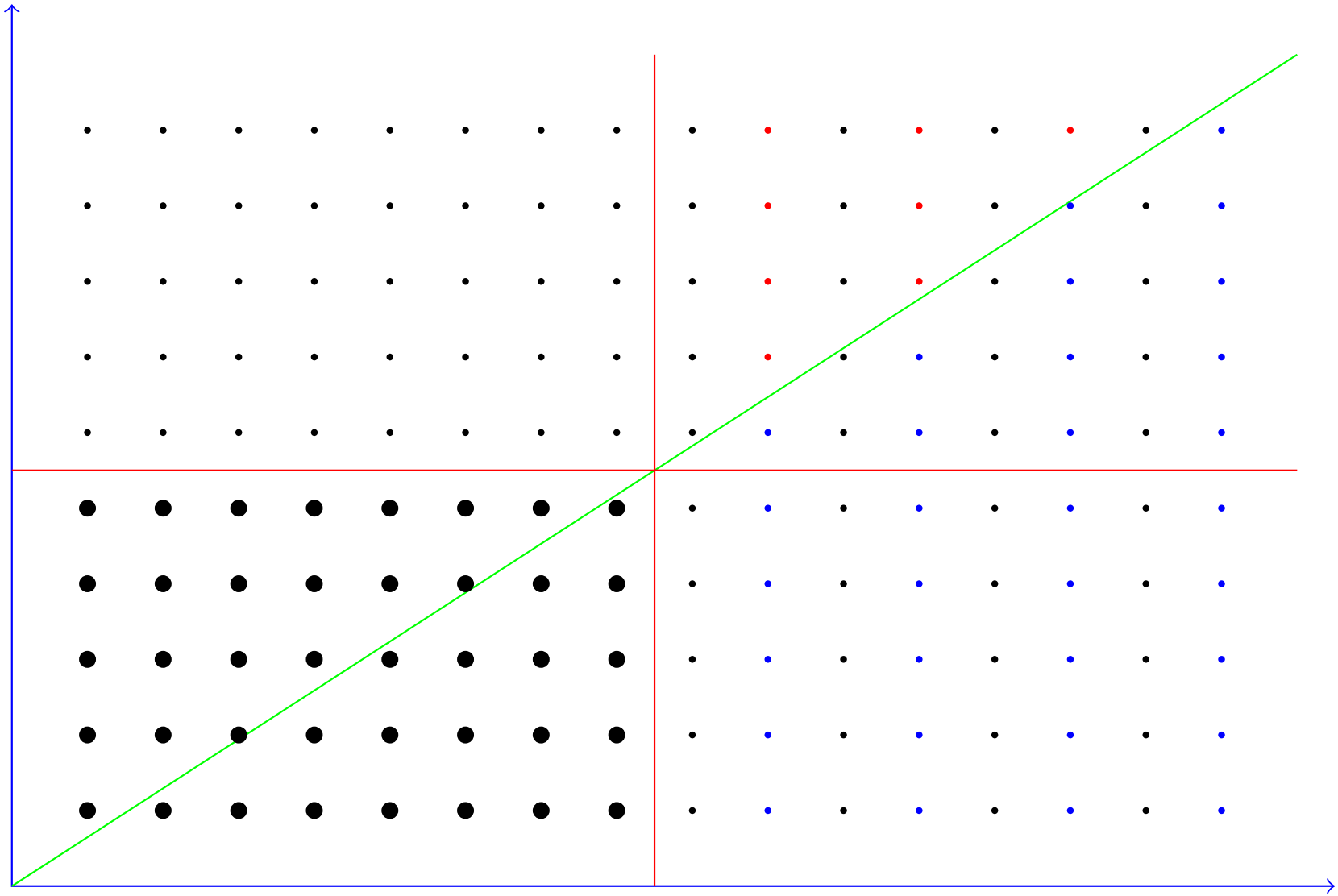
Dimostrazione grafica - V



Dimostrazione grafica - VI



Dimostrazione grafica - VII



Solovay-Strassen - I

Cerchiamo ora di capire per quale motivo l'algoritmo di Solovay-Strassen dia la risposta desiderata.

Innanzitutto, notiamo che il simbolo di Jacobi

$$\left(\frac{a}{n}\right)$$

vale ± 1 ogni volta che $\text{MCD}(a, n) = 1$.

Mentre il simbolo di Legendre produce sicuramente anche il valore -1, il simbolo di Jacobi può valere sempre 1.
In effetti

$$\left(\frac{a}{p^2}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^2 = 1,$$

non appena $\text{MCD}(a, p) = 1$.

Solovay-Strassen - II

Dobbiamo dare una dimostrazione del

Teorema (Solovay-Strassen)

Se n non è primo, allora esiste a, primo con n, tale che

$$\left(\frac{a}{n}\right) \not\equiv a^{(n-1)/2} \mod n.$$

Dividiamo la dimostrazione in due casi:

- n non è libero da quadrati
  - Esiste p primo tale che p^2 divida n
- n è libero da quadrati

Faremo vedere che, in entrambi i casi, possiamo trovare a tale che $a^{(n-1)/2} \not\equiv \pm 1 \mod n$.

Solovay-Strassen - III

Se p^2 divide n, allora p divide $\varphi(n)$. Questo vuol dire che p divide l'ordine di $(\mathbb{Z}/n)^\times$.

Per il teorema di Cauchy, il gruppo $(\mathbb{Z}/n)^\times$ deve possedere un elemento $\overline{a}$ di ordine p. Chiaramente, $\overline{a} \neq \overline{1}$

Ma allora $a^p \equiv 1 \mod n$, e poiché n è un multiplo di p, $a^n \equiv 1 \mod n$.

Tuttavia, se $a^{(n-1)/2} \equiv \pm 1 \mod n$, allora $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$, il che contraddice $a^n \equiv 1 \mod n$.

Solovay-Strassen - IV

Il caso in cui n sia libero da quadrati è solo lievemente più delicato.

n è libero da quadrati solo se $n = p_1 p_2 \dots p_k$, dove i p_i sono primi diversi tra loro.

Il simbolo di Jacobi assume sicuramente entrambi i valori ± 1: basta trovare a che sia un residuo quadratico in ogni $\mathbb{Z}/p_i$ tranne che in $\mathbb{Z}/p_1$. Allora

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\dots\left(\frac{a}{p_k}\right)$$

deve valere -1. Un tale a esiste sicuramente per il teorema cinese dei resti.

Solovay-Strassen - V

Se $a^{(n-1)/2} \not\equiv -1 \mod n$, abbiamo concluso. Se invece $a^{(n-1)/2} \equiv -1 \mod n$, allora

$$a^{(n-1)/2} \equiv -1 \mod p_i$$

per ogni p_i.

Possiamo allora utilizzare il teorema cinese dei resti per costruire b che sia congruo ad a modulo p_1 e congruo a 1 modulo ogni altro p_i.

Per tale scelta, $b^{(n-1)/2} \equiv a^{(n-1)/2} \equiv -1 \mod p_1$, mentre $b^{(n-1)/2} \equiv 1$ modulo ogni altro p_i.

In conclusione $b^{(n-1)/2} \not\equiv \pm 1 \mod n$, altrimenti i suoi resti modulo ciascun p_i sarebbero tutti 1 o tutti -1.

Solovay-Strassen - VI

Le applicazioni

$$a \mapsto \left(\frac{a}{n}\right), \qquad a \mapsto a^{(n-1)/2}$$

sono entrambe omomorfismi di gruppi $(\mathbb{Z}/n)^\times \to (\mathbb{Z}/n)^\times$.

Se $\phi, \psi : G \to H$ sono due omomorfismi di gruppi, allora $X = \{g \in G \,|\, \phi(g) = \psi(g)\}$ è sicuramente un sottogruppo di G, che non può essere tutto G se ϕ, ψ differiscono su almeno un elemento.

Ma per il teorema di Lagrange, l'ordine di un sottogruppo di G divide $|G|$, e quindi $|X| \leq |G|/2$: i due omomorfismi devono pertanto assumere valore diverso su almeno la metà dei possibili argomenti.