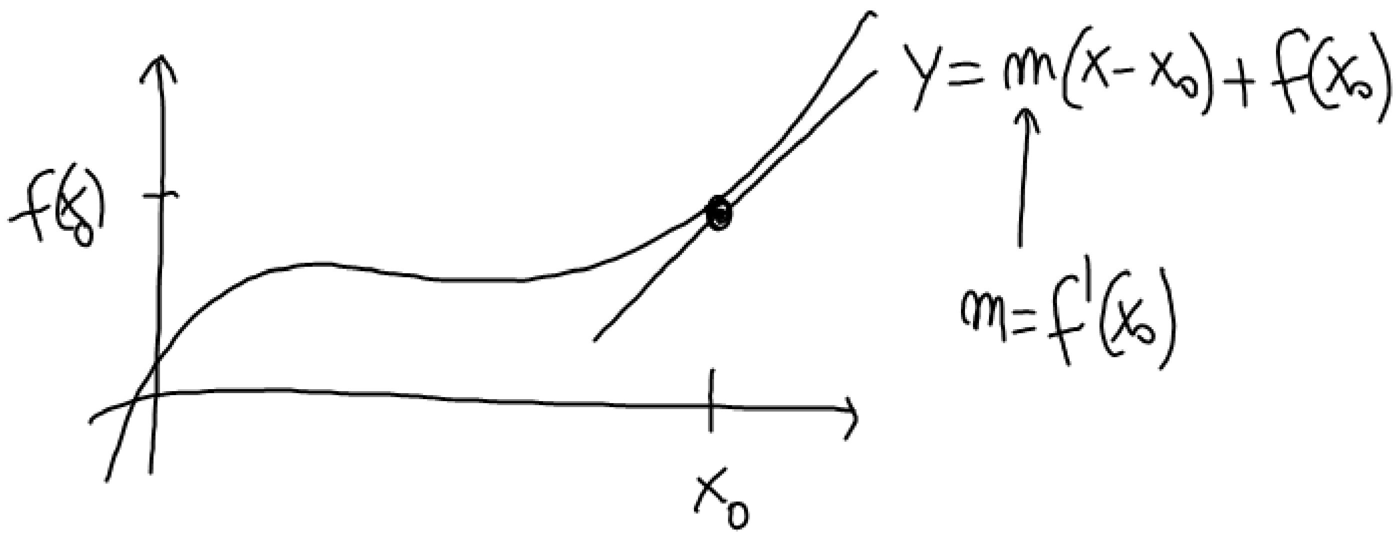
La derivata

Ripartiamo dalla definizione di **derivata**
La derivata è il limite del rapporto incrementale e una funzione *f* è derivabile in un punto *x* se esiste finite il seguente limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$



La derivata della funzione inversa

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

E' noto che la funzione inversa dell'esponenziale è il logaritmo naturale, cioè

$$y = e^x \quad \text{se e solo se} \quad \ln(y) = x$$

dalla formula precedente abbiamo che

$$(\ln(y))' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

Esempi

$$(fg)' = f'g + fg'$$

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$(x\ln(x))' = (x)'\ln(x) + x(\ln(x))' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$(\arctan^2(x))' = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \arctan(x) = \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}$$

$$(f^2(x))' = 2f'(x)f(x)$$

$$(\arccos(x) + \arcsin(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Esempi

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x e^{x^2} \qquad (e^{h(x)})' = h'(x) e^{h(x)}$$

$$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow e^{x^2}$$

$g(x) = x^2$

$f(t) = e^t$

$$(\sin(3x))' = \cos(3x) \cdot (3x)' = 3\cos(3x)$$

$$x \xrightarrow[g]{} 3x \xrightarrow[f]{} \operatorname{sen}(3x)$$

$$(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x \xrightarrow[g]{} (1+x^2) \xrightarrow[f]{} \ln(1+x^2)$$

Esempi

$$(\cos(x^2))' = -\operatorname{sen}(x^2)\cdot(x^2)' = -2x\operatorname{sen}(x^2)$$

$$x \xrightarrow[g]{} x^2 \xrightarrow[f]{} \cos(x^2)$$

$$(\arcsin(3x))' = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot(3x)' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$x \xrightarrow[g]{} 3x \xrightarrow[\operatorname{arcsen}]{} \operatorname{arcsen}(3x)$$

$$(\underbrace{(1+x^2)}_{f}\underbrace{e^x}_{g})' = (1+x^2)'e^x + (1+x^2)(e^x)' = 2xe^x + (1+x^2)e^x$$

$$= e^x(1+2x+x^2) = (x+1)^2 e^x$$

Esempi

$$(xe^{-x^2})' = (x)'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\cdot(-2x)\right)$$

$$= e^{-x^2} + \left(-2x^2 e^{-x^2}\right) = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$x \xrightarrow[g]{} -x^2 \xrightarrow[f]{} e^{-x^2}$$

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\left(-x^{-2}\right) = \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}$$

$$x \xrightarrow[g]{} \frac{1}{x} \xrightarrow[f]{} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\arcsin(x^2)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot(x^2)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$x \xrightarrow[g]{} x^2 \xrightarrow[f]{} \mathrm{arcsen}(x^2)$$