V/F	Es. 1	Es. 2	Voto
/12	/10	/10	/32

Sapienza Università di Roma, Corso di Laurea in Informatica - canale telematico (a.a. 2022/2023)

Prova scritta di Calcolo Differenziale - 9 Giugno 2023

Nome e Cognome (in stampatello):

Numero matricola:

NOTA BENE: devono essere riconsegnati soltanto i fogli contenenti i testi degli esercizi. È vietato usare testi, appunti e strumenti elettronici di ogni tipo. Ogni affermazione negli esercizi a risposta aperta deve essere motivata dettagliatamente! È possibile utilizzare anche il retro dei fogli per inserire i calcoli.
Il tempo a disposizione per la prova è di 2h.

Domande V/F

NOTA BENE: +1 risposta esatta, -0.5 risposta sbagliata, 0 risposta assente

1. Sia data la successione numerica reale

$$a_n = (-1)^n \frac{3^n}{n^2+n+1}$$

1A	a_n è infinitesima	V	F
1B	la successione $b_n = (-1)^n a_n$ non ammette limite finito per $n \longrightarrow \infty$	V	F
1C	la successione $c_n = (a_n)^2$ è limitata	V	F
1D	a_n è indeterminata	V	F

2. Sia data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

2A	f ammette asintoti orizzontali	V	F
2B	f non ammette punti né di massimo né di minimo relativi	V	F
2C	f è decrescente su $\mathbb{R}$	V	F
2D	l'insieme immagine di f è tutto $\mathbb{R}$	V	F

3. Sia

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

3A	L'insieme immagine di f è l'insieme $\mathbb{R}$.	V	F
3B	La funzione f è invertibile	V	F
3C	La funzione f ha esattamente due zeri reali.	V	F
3D	f è convessa in tutto il suo dominio	V	F

Esercizio 1

(1) Per quali valori di α la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

è derivabile su tutto l'asse reale?

Per la continuità deve essere $\alpha = 4$. *La funzione però non è derivabile (dovrebbe anche essere* $\alpha = 1$*).*

(2) Calcolare l'insieme immagine di $f(x) = x|x|$ definita nell'intervallo $[-1, 2]$.

La funzione si comporta come x^2 *tra 0 e 2, mentre come* $-x^2$ *tra -1 e 0. Allora l'insieme immagine è l'intervallo* $[-1, 4]$

(3) Calcolare il polinomio di MacLaurin di

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

di grado 2.

Si trova $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

Esercizio 2
Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

In particolare: determinarne il dominio, eventuali simmetrie, studiarne il segno, studiare i limiti agli estremi del dominio, determinare eventuali asintoti, studiarne la continuità, derivabilità, la monotonia, la convessità, determinarne eventuali punti di massimo, di minimo (locali e/o assoluti) e di flesso. Tracciare un grafico qualitativo di f.

La funzione è definita su $(-1,1)$ ed è dispari. Essa passa per l'origine, è negativa sui negativi e positiva sui positivi. Ha due asintoti verticali per $x = \pm 1$. Si ha che

$$f'(x) = \frac{-2}{}x^2 - 1$$

e

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

La funzione è strettamente crescente. L'origine è un punto di flesso.