Il modello di Malthus

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Sia X_n il numero di individui in una popolazione al tempo n, detto $\delta > 0$ il tasso di fertilità e $\mu > 0$ il tasso di mortalità, abbiamo che

$$X_{n+1} = X_n + \delta X_n - \mu X_n = (1+k)X_n \qquad k \in \mathbb{R}$$

Il modello di Malthus (1766-1834) è una successione per ricorrenza lineare del primo ordine

$$X_{n+1} = X_0(1+k)^{n+1}$$

Risultati generali

Teorema.
Sia f una funzione continua e si consideri il sistema del primo ordine

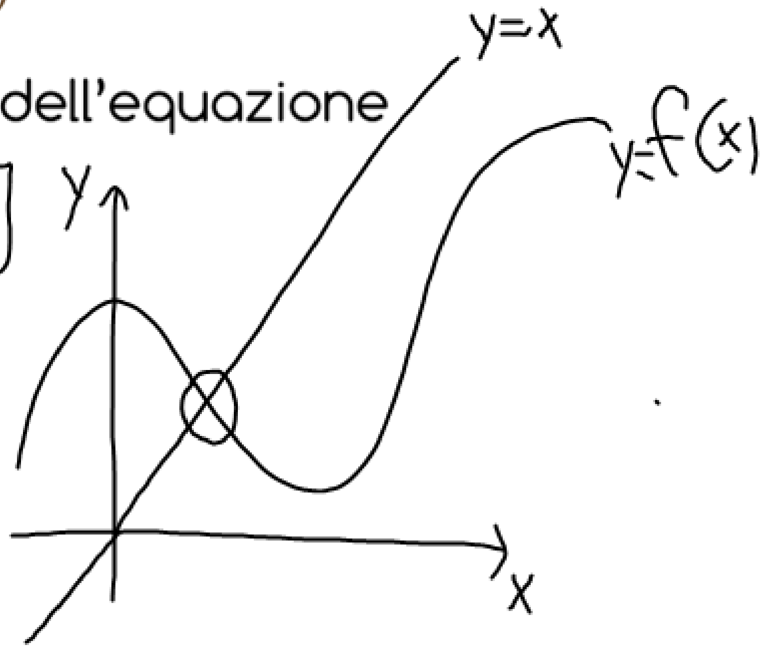
$$X_{n+1} = f(X_n)$$

i possibili limiti sono le soluzioni dell'equazione

$$\boxed{L = f(L)}$$

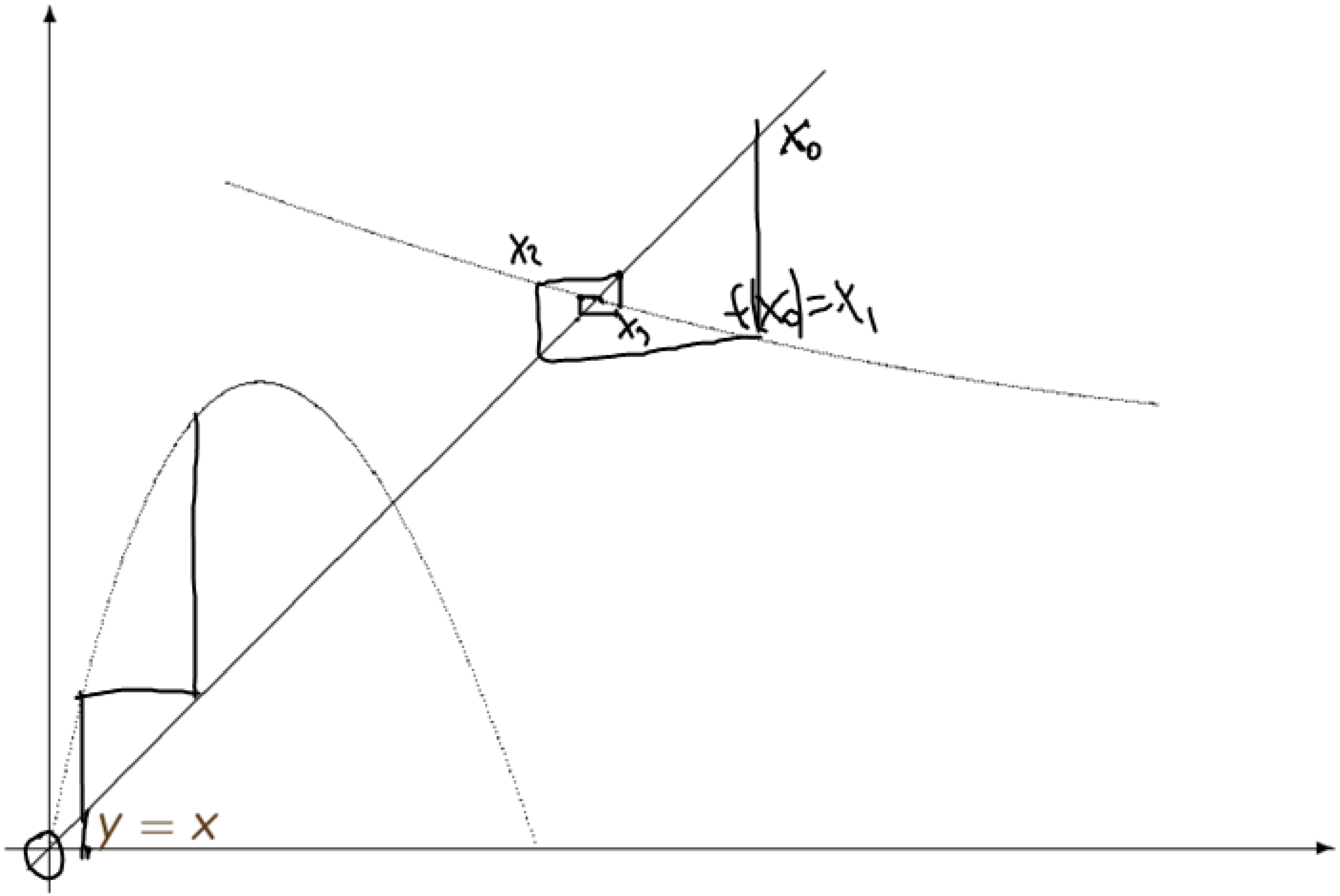
$x_n \to L$

$x_{n+1} \to L$



Il metodo della ragnatela

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA



L'equazione logistica

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Il modello di Verhulst è più noto come equazione **logistica**

$$W_{n+1} = rW_n\,(1 - W_n)$$

$$L = rL(1-L)$$

gli equilibri del sistema sono

$$W_n = 0 \qquad W_n = \left[1 - \frac{1}{r}\right] \in (0,1)$$

$$L(r-1-\cancel{r}L) = 0$$

$$L_1 = \frac{r-1}{r}$$

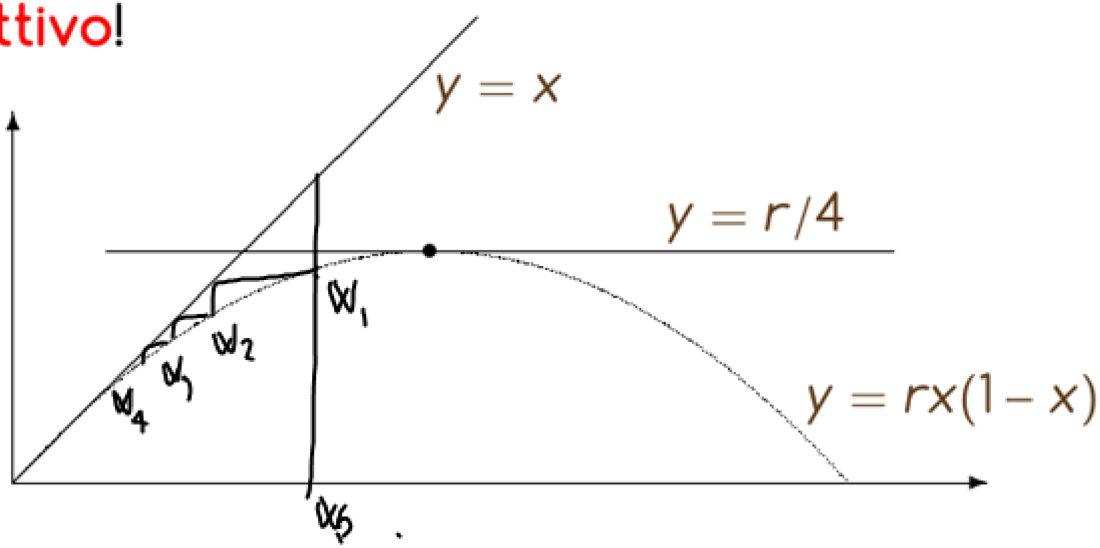
$$L_2 = 0$$

L'equazione logistica

Se $r \in (0,1)$ e $W_0 > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} W_{n+1} = rW_n - rW_n^2 < rW_n &= r^2 W_{n-1} - r^2 W_{n-1}^2 \\ &< r^2 W_{n-1} = r^3 W_{n-2} - r^3 W_{n-2}^2 \\ &< r^3 W_{n-2} < \cdots < r^{n+1} W_0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quindi in questo caso abbiamo che 0 è un equilibrio **attrattivo**!

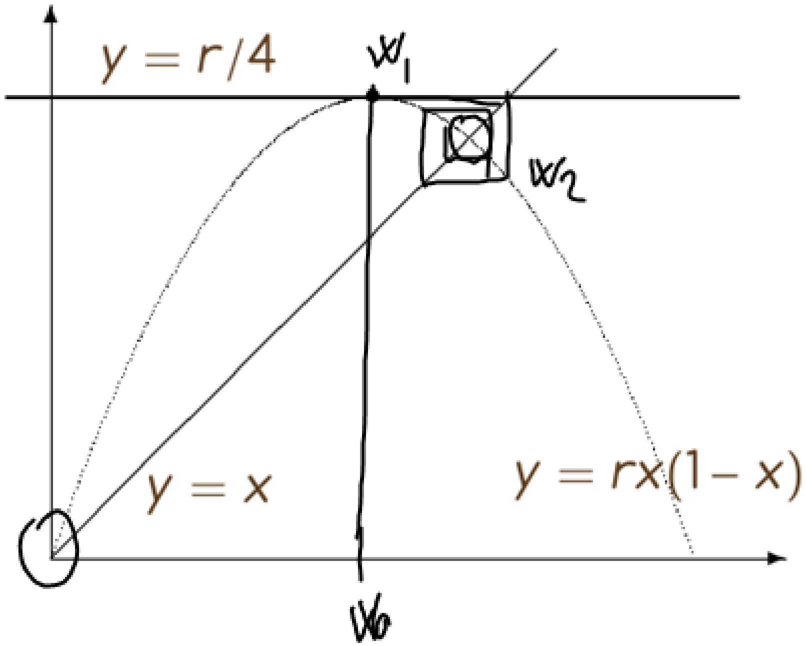


L'equazione logistica

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Se $r \in (1,3)$ abbiamo che $1 - 1/r$ è un equilibrio attrattivo!



$$f(x) = rx(1-x)$$

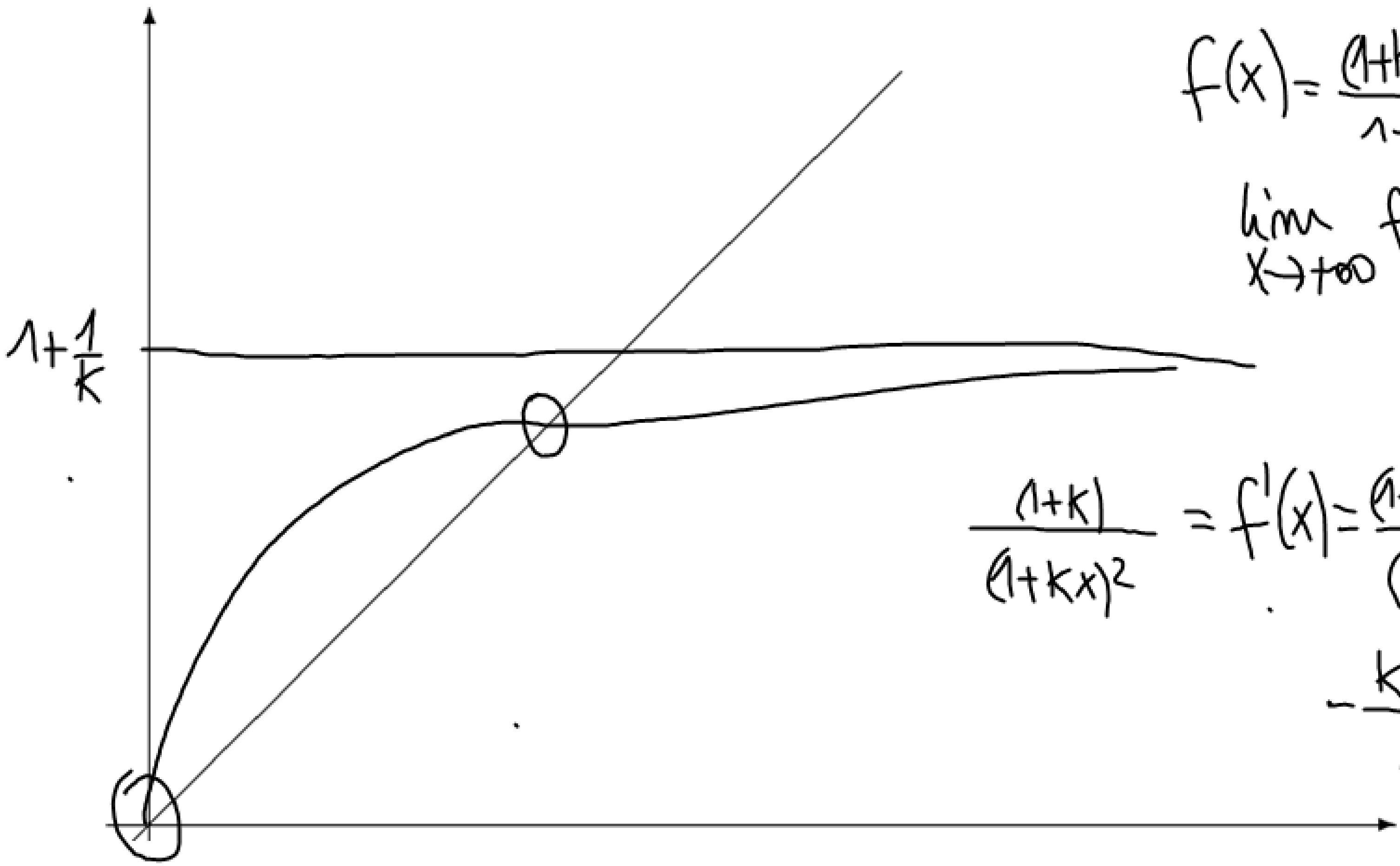
$$f'(0) = r > 1$$

$$f'(x) = -rx + r(1-x)$$
$$= r(1-2x)$$

$$f'\left(1-\frac{1}{r}\right) = r\left(1-2+\frac{2}{r}\right)$$
$$= -r+2$$

Un ultimo esempio

Si studi il sistema $X_{n+1} = \dfrac{(1+k)X_n}{1+kX_n}$, con $k > 0$



$$f(x) = \frac{(1+k)x}{1+kx}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1+k}{k} = 1 + \frac{1}{k}$$

$$\frac{(1+k)}{(1+kx)^2} = f'(x) = \frac{(1+k)(1+kx)}{(1+kx)^2} - \frac{k(1+k)x}{(1+kx)^2}$$