UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

15. Variabili aleatorie discrete. Funzione di massa e funzione di distribuzione.

Scopo della lezione

1. Sviluppare il linguaggio matematico per poter trattare di esperimenti che hanno un risultato numerico;
2. Introdurre le prime nozioni sulle variabili aleatorie.

Variabili aleatorie

Il risultato di un esperimento è spesso descritto da un numero. Per esempio l'esito di un procedimento di misura, il punteggio ottenuto in un gioco che prevede elementi casuali come il lancio di un dado.

Il linguaggio che abbiamo sviluppato ci permette di trattare queste situazioni parlando di eventi come {*il risultato è* 3.2}, ma non ci permette per esempio di trattare agevolmente concetti come la media dei valori ottenuti ripetendo l'esperimento un po' di volte.

Variabili aleatorie

Per trattare efficacemente quantità numeriche che possono assumere diversi valori con certe probabilità abbiamo bisogno di ampliare il nostro linguaggio introducendo il concetto di variabile aleatoria.

A tale scopo richiamiamo la definizione di spazio di probabilità (finito).

Definizione: si dice spazio di probabilità finito la tripla $(S, \mathcal{P}(S), \mathbf{P})$, dove

- S è un insieme finito;
- $\mathcal{P}(S)$ il suo insieme delle parti;
- $\mathbf{P}$ una funzione da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathbf{R}$.

Variabili aleatorie

Definizione: La variabile aleatoria X (su S) è una funzione

$$X : S \to \mathbf{R}.$$

Naturalmente, dato che S è un insieme finito, la sua immagine tramite X sarà un sottoinsieme finito di **R**.

Notiamo che malgrado solo il primo elemento della tripla $(S, \mathcal{P}(S), \mathbf{P})$ entri esplicitamente nella definizione, questa sia utile solo se pensiamo a S come il primo elemento della tripla che definisce uno spazio di probabilità finito.

La nostra definizione funziona in due passi. Nel primo, tramite la funzione X, a un elemento ω di S viene associato un numero x.

Nel secondo la funzione $\mathbf{P}$ ci dice la probabilità dell'evento $\{\omega\}$.

Leggiamo insieme queste informazioni per trovare la probabilità dell'evento $\{X = x\}$. In generale non ci sarà un solo elemento di S sul quale la funzione X assume il valore x. Avremo quindi

$$\mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega : X(\omega) = x} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Dobbiamo trovare tutti gli $\omega \in S$ tali che $X(\omega) = x$ e sommarne le probabilità.

Esempio 1

Vengono lanciate tre monete equilibrate. Chiamiamo X il numero di teste ottenuto.

Allora X è una variabile aleatoria che prende valori nell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$ con le seguenti probabilità

$$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(C, C, C) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(C, C, T) + \mathbf{P}(C, T, C) + \mathbf{P}(T, C, C) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(C, T, T) + \mathbf{P}(T, C, T) + \mathbf{P}(T, T, C) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbf{P}(X = 3) = \mathbf{P}(T, T, T) = \frac{1}{8}$$

Osserviamo che, in accordo con la formula della probabilità totale,

$$\sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(X = i) = 1$$

La X che abbiamo appena descritto è un esempio di variabile aleatoria *binomiale*. Tratteremo sistematicamente questo tipo di variabili aleatorie in seguito.

Esempio 2

Un'urna contiene 20 palle numerate da 1 a 20. Vengono estratte tre palle.

Vogliamo sapere la probabilità che fra le tre palle estratte ve ne sia una che reca un punteggio pari almeno a 17.

Formuliamo il problema in termini di variabili aleatorie. Definiamo la variabile aleatoria X come il massimo fra i tre punteggi riportati sulle palle estratte.

Vogliamo conoscere $\mathbf{P}(X \geq 17)$. X può assumere valori interi da 3 a 20.

Esempi

Supporremo che tutte le estrazioni siano equiprobabili.

Troviamo

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{20}{3}}; \qquad 3 \leq k \leq 20$$

Scriviamo l'evento $\{X \geq 17\}$ come l'unione disgiunta degli eventi $\{X = 17\}, \{X = 18\}, \{X = 19\}, \{X = 20\}$ e troviamo

$$\mathbf{P}(X \geq 17) = \binom{20}{3}^{-1} \sum_{k=17}^{20} \binom{k-1}{2} \simeq 0.508$$

Definire una variabile aleatoria come funzione su uno spazio di probabilità permette di rendere esplicito il legame con un esperimento, ma rende meno immediata la sua descrizione come quantità che prende valori diversi con certe probabilità.

Questo aspettoè meglio descritto dalla densità discreta $p(x)$ della variabile aleatoria X:

$$p(x) = \mathbf{P}(X = x)$$

Variabili aleatorie

Dato che stiamo lavorando per ora solo su spazi di probabilità finiti, la v.a. X potrà assumere solo un numero finito di valori e pertanto $p(x) = 0$ salvo un numero finito di valori di x.

La densità discreta, detta anche funzione di massa, è quindi una funzione da $\mathbf{R}$ nell'intervallo $[0, 1]$, nulla per tutti i valori del suo argomento salvo, per ora, un numero finito.

Naturalmente deve essere

$$\sum_x p(x) = 1.$$

Esempio:

Dado a sei facce equilibrato.

Se X è il punteggio ottenuto lanciando un dado a sei facce, abbiamo $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$ e $p(x) = 0$ per ogni valore di x diverso da 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Funzioni di distribuzione

Un ulteriore modo per descrivere una variabile aleatoria, non ristretto solo a v.a. discrete, è tramite la sua *funzione di distribuzione*.

Definizione: si dice funzione di distribuzione della variabile aleatoria X, la funzione $F : \mathbf{R} \to [0,1]$

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

Funzioni di distribuzione

Notiamo che se X è una variabile discreta la sua funzione di distribuzione si ottiene subito dalla densità discreta:

$$F(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$$

Dato che se $x \leq y$, allora l'evento $\{X \leq x\}$ è contenuto nell evento $\{X \leq y\}$, abbiamo che $x < y$ implica $F(x) \leq F(y)$. Quindi F è una funzione *non decrescente*.

Ricordando che siamo su uno spazio di probabilità finito, vediamo che ci sono un valore minimo e un valore massimo che la X può assumere come funzione su S.

$$x_m = \min_S X(\omega) \text{ e } x_M = \max_S X(\omega)$$

Si vede subito che $F(x) = 0$ per ogni $x < x_m$ e $F(x) = 1$ per ogni $x > x_M$.

Più in generale

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Funzioni di distribuzione

Per semplicità consideriamo ora una variabile a valori interi

$$X \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

La funzione di distribuzione F è allora una funzione costante a tratti con un (possibile) salto verso l'alto solo in corrispondenza di valori interi delll'argomento.

Per ricavare la densità discreta p a partire dalla funzione di distribuzione F basta osservare che $\{X \le k\} = \{X \le k-1\} \cup \{X = k\}$ e quindi

$$p(k) = F(k) - F(k-1).$$

Osservazioni

Una variabile aleatoria descritta tramite la sua densità discreta può essere costruita in molti modi come funzione su uno spazio di probabilità.

Consideriamo la v.a. X descritta da

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

Un modo per costruire X Come funzione su uno spazio di probabilità è il seguente: consideriamo lo spazio di probabilità $S = \{T, C\}$ del lancio di una moneta non truccata.

Osservazioni

Definiamo la funzione $X\colon S \to \mathbf{R}$ come $X(T) = 1$ e $X(C) = 0$.

Allora si ottiene $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ come volevamo.

Avremmo però potuto definire X in modo che $X(C) = 1$ e $X(T) = 0$ ottenendo la stessa densità discreta per X.

Osservazioni

Nemmeno la scelta di S è obbigata. Si poteva, per esempio, scegliere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, il lancio di un dado.

Definendo poi $X(1) = X(3) = X(5) = 0$ e $X(2) = X(4) = X(6) = 1$.

Otteniamo anche stavolta $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$.