ALGEBRA
Scheda di esecizi n.3.

Spazi vettoriali, diagonalizzazione.

In quanto segue, in modo inconsueto, i vettori di $\mathbb{K}^n$ saranno scritti per riga. Inoltre per un omomorfismo di spazi vettoriali $f : V \to W$ tale che in V sia data la base $\mathcal{B}$ mentre in W sia data la base $\mathcal{C}$, il simbolo $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ denoterà sempre la matrice che rappresenta l'omomorfismo rispetto alle basi date. Infine, se λ è un autovalore di un endomorfismo f, denotiamo con $\mathcal{E}_\lambda$ l'autospazio relativo a λ.

****

Esercizio 1. Sia

$$S = \{(a+b, a+2b+c, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

(**a**) Verificare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(**b**) Calcolare la dimensione di S.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano u, v e w tre vettori di V. Ricordiamo che un insieme di vettori di uno spazio vettoriale è detto *libero* se i suoi elementi sono linearmente indipendenti.

(**a**) Nell'ipotesi che $\{u, v, w\}$ sia libero stabilire se $\{u+2v, u+v-w, u+v\}$ è libero.

(**b**) Nell'ipotesi che $\{u+v, u+v-w, u+3v\}$ sia libero stabilire se $\{u, v, w\}$ è libero.

(**c**) Nell'ipotesi che $\{u, v, w\}$ sia libero e che $\dim V = 3$, stabilire se $\langle u+v, u+v-w, u+3v, 2u+2v\rangle = V$.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e siano $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = e_3$ e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale $v_1 \in \ker f$, e v_2, $v_3 \in \mathcal{E}_2$.

(**a**) Stabilire se f è diagonalizzabile e calcolare $f(v_1 + v_2 + v_3)$.

(**b**) Determinare la matrice $A = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ e stabilire se esiste una matrice invertibile M tale che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_2 - 2e_3 \\ f(e_2) = e_2 - e_3 \\ f(e_3) = e_2 - e_3 \end{cases}.$$

(**a**) Determinare il polinomio caratteristico di f.

(**b**) Stabilire se f è diagonalizzabile oppure no.

(**c**) Determinare i valori di k affinché il vettore $(3-k, k, -3)$ appartenga all'immagine di f.

Esercizio 5. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ e tale che $\mathcal{E}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z = 0\}$.

(**a**) Stabilire se f è diagonalizzabile (giustificando la risposta) e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

(**b**) Scrivere la matrice $A = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ essendo la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(**a**) Determinare gli autovalori di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

(**b**) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Esercizio 7. Sia a un numero reale e sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2. Si consideri l'applicazione $F : V \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(p(t)) = (p(1), p(a))$ e siano $\mathcal{P} = (1, t, t^2)$ e $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ le basi standard di V ed $\mathbb{R}^2$, rispettivamente.

(**a**) Scrivere la matrice di $[f]_{\mathcal{P}}^{\mathcal{C}}$.

(**b**) Determinare $\mathrm{im} F$ e $\ker F$ al variare di a in $\mathbb{R}$.

Esercizio 8. Sia $V = S_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali. Sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

la base standard di V. Sia $f : V \to V$ tale che $f(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a-c & b \\ b & c-a \end{smallmatrix}\right)$

(**a**) Scrivere la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(**b**) Determinare basi di $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.

(**c**) Se A è una qualsiasi matrice in $\mathrm{im} f$, dimostrare che le matrici A, A^2 e A^3 sono linearmente dipendenti.

Esercizio 9.

(**a**) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2, si consideri il sottospazio $U = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2} \mid p(0) = p(-1) = 0\}$, dei polinomi aventi 0 ed -1 come radici. Si dia una base di U.

(**b**) Determinare l'unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 0) = (2, 4)$ e avente 0 e 2 come autovalori.

(**c**) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$ e $f(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$. Stabilire se $(1, 3, 0)$ è un autovettore di f.

(**d**) Siano a e b numeri reali tali che $a \neq b$. Dmostrare che esitono numeri reali λ e μ tali che:

$$(a^2, b^2) = \lambda(1, 1) + \mu(a, b).$$