Corso di Laurea in Informatica a.a.2015-16
Esercizi di Probabilità, parte prima
Marco Isopi

Nota: i seguenti esercizi coprono le prime 14 lezioni del corso. Molti altri esercizi si trovano nei testi indicati come riferimento. Gli esercizi contrassegnati da * sono decisamente più impegnativi di quanto potrebbe essere richiesto in una prova di esame, ma affrontandoli senza la pressione del tempo possono rivelarsi molto istruttivi.

Esercizio 1. Si lanciano due dadi. Calcolare la probabilità degli eventi:

a) Entrambi i dadi mostrano lo stesso punteggio.

b) La somma dei punteggi è 7 o 11.

c) I punteggi sono primi tra loro.

d) La somma dei punteggi è dispari.

e) La differenza tra i punteggi è dispari.

f) Il prodotto tra i punteggi è dispari.

g) Un punteggio divide l'altro.

Esercizio 2. Siano A, B eventi tali che $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$ e $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

a) Quanto vale $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$?

b) Qual è il valore massimo che può assumere $\mathbf{P}(A)$?

c) Qual è il valore minimo che può assumer di $\mathbf{P}(A)$?

Imponiamo l'ulteriore condizione $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$

d) Quanto vale $\mathbf{P}(A)$?

e) Quanto vale $\mathbf{P}(A^C \cup B^C)$?

f) Quanto vale $\mathbf{P}(A^C \cap B^C)$?

Esercizio 3. Siano A; B; C e D eventi. Scrivere le espressioni degli eventi:

a) Almeno tre tra questi si verificano;

b) Esattamente tre tra questi si verificano;

c) Al più due tra questi si verificano;

d) Esattamente uno tra questi si verifica.

Esercizio 4. Consideriamo il lancio di quattro dadi. Calcolare la probabilità di

a) nessun dado dà il risultato “3”

b) almeno un dado dà risultato “3”

c) esattamente un dado dà risultato “3”

Esercizio 5. Consideriamo le 5 estrazioni in una ruota del lotto estrazioni casuali senza reinserimento da un'urna contenente 90 palline numerate da 1 fino a 90).

Calcolare la probabilità che il secondo numero estratto sia “16”.

Esercizio 6. Si lancia una moneta 10 volte. La probabilità di ottenere testa in un singolo lancio è $\frac{1}{3}$.

a) Trovare la probabilità di avere non più di cinque teste.

b) Trovare la probabilità di avere non più di cinque teste, sapendo di avere almeno tre teste.

Esercizio 7. Si lancia 12 volte un dado a 6 facce.

a) Trovare la probabilità di avere non più di sei volte il numero 3.

b) Trovare la probabilità di avere non più di sei volte il numero 3, sapendo che è uscito almeno tre volte.

Esercizio 8. Un'urna contiene 6 palle bianche, 4 rosse e 8 nere. Si effetuano 10 estrazioni con reinserimento.

a) Trovare la probabilità di avere non più di cinque palle rosse.

b) Trovare la probabilità di avere non più di cinque palle rosse, sapendo che almeno tre sono nere.

Esercizio. 9. Un numero di telefono di sei cifre viene composto digitando a a caso sulla tastiera (10 tasti). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

a) il numero non contiene il 6;

b) il numero contiene solo cifre pari;

c) il numero contiene la stringa 2345;

d) il numero contiene la stringa 2222.

Esercizio. 10. In un'urna ci sono n palle numerate con n interi consecutivi.

Vengono estratte cinque palle, sequenzialmente e senza rimpiazzo.

a) Trovare la probabilità che i numeri estratti formino una successione di cinque interi consecutivi.

b) Trovare la probabilità che i numeri estratti formino una successione di tre interi consecutivi e un'altra non adiacente di due interi consecutivi. (Per esempio, 3,4,5,7,8 or 2,3,7,8,9.)

Le cinque palle vengono estratte in blocco.

c) Trovare la probabilità che i numeri estratti possano essere ordinati per formare una successione di cinque interi consecutivi.

d) Trovare la probabilità che i numeri estratti possano essere ordinati per formare una successione di tre interi consecutivi e un'altra non adiacente di due interi consecutivi.

Esercizio 11. In un mazzo di n chiavi ce ne sono 2 che aprono una porta; si cerca di aprirla provando successivamente tutte le chiavi.

Calcolare la probabilita di riuscire al k-esimo tentativo.

E se le chiavi adatte fossero r $(2 < r \leq n)$?

Esercizio 12. In quanti modi 12 persone possono suddividersi in 3 gruppi, formati rispettivamente da 3, 4 e 5 persone?

Esercizio 13. In una fila di 6 sedili devono sedersi 6 studenti, 3 maschi e 3 femmine.

- In quanti modi possono sedersi nei vari casi?
  1. Senza restrizioni;
  2. maschi vicini tra loro e femmine vicine tra loro;
  3. maschi vicini tra loro;
  4. studenti dello stesso sesso non devono stare vicini.
- Se si dispongono casualmente, qual e la probabilità che
  1. i maschi capitino tutti vicini?
  2. studenti dello stesso sesso non capitino vicini?

Esercizio 14. Un'urna contiene 6 palline bianche e 9 palline nere. Se si scelgono a caso 4 palline senza rimpiazzo, qual e la probabilità che le prime due siano bianche e le ultime due siano nere?

Esercizio 15. Un'urna contiene inizialmente 5 palline bianche e 7 palline nere. A ogni estrazione si prende nota del colore della pallina che viene poi rimessa nell'urna assieme ad altre due palline dello stesso colore.

Calcolare la probabilita che

1. le prime due palline selezionate siano nere e le due successive siano bianche;

2. esattamente due delle prime 4 palline estratte siano nere.

Esercizio 16. Tra questi due eventi, quale ha la probabilità più alta?

1. esce almeno un 6 tirando un dado 4 volte
2. esce almeno un doppio 6 tirando una coppia di dadi 24 volte

Esercizio 17. L'urna A ha 5 palline bianche e 7 palline nere. L'urna B ha 3 palline bianche e 12 palline nere. Lanciamo una moneta non truccata. Se esce testa, si estrae una pallina dall'urna A, se esce croce dall'urna B. Si supponga di aver estratto una pallina bianca. Qual è la probabilità che sia uscita croce?

Esercizio 18.* Supponiamo di raccogliere continuamente delle figurine tra m tipi diversi. Supponiamo anche che ogni volta che si ha una figurina, questa sia di tipo i con probabilità p_i, $1 = 1, \dots, m$. Supponiamo si aver appena raccolto la figurina n-esima. Qual'è la probabilità che si tratti di un nuovo tipo di figurina?
(Suggerrimento: condizionare sul tipo di questa figurina).

Esercizio 19.* Un sistema ingegneristico che consiste di n componenti è detto k-su-n ($k \leq n$) se il sistema funziona se e solo se almeno k delle n componenti funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino indipendentemente l'una dall'altra.

1. Se l'i-esimo componente funziona con probabilità P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, calcolare la probabilità che un sistema 2-su-4 funzioni.
2. Ripetere il punto precedente per un sistema 3-su-5.
3. Fare lo stesso per un sistema k-su-n quando tutte le P_i sono uguali a p.

Esercizio 20. Su un bersaglio vengono tirati indipendentemente 3 colpi. Le probabilità che il colpo centri il bersaglio sono, rispettivamente, p_1, p_2, p_3.

Calcolare la probabilità che

1. un solo colpo centri il bersaglio;
2. almeno un colpo centri il bersaglio.

Esercizio 21. Si scelgono due carte a caso, senza rimpiazzo, da un mazzo di 52 carte. Sia B l'evento che entrambe siano degli assi; sia A_P l'evento che sia stato estratto l'asso di picche, e A l'evento che sia stato estratto almeno un asso. Determinare

1. $P(B|A_P)$
2. $P(B|A)$

Esercizio 22. Si lanciano due dadi a 6 facce. Mostrare che l'evento che la somma è 7, è indipendente dal punteggio del primo dado.

Esercizio 23. L'urna A contiene 6 palline gialle e 4 palline rosse, mentre le urne B e C ne contengono 3 gialle e 7 rosse ciascuna. Viene scelta un'urna a caso fra A, B, C e da questa ne vengono estratte casualmente ed in blocco tre palline.

Si ponga E = {le tre palline estratte sono tutte rosse}

a) Calcolare la probabilità di E sotto l'ipotesi che l'estrazione sia stata eseguita dall'urna A .

b) Calcolare $P(E)$

c) Condizionatamente all'osservazione dell'evento E, calcolare la probabilità che l'estrazione sia stata eseguita dall'urna A .

Esercizio 24. Dagli esami di maturità in una scuola secondaria del Lazio escono 100 diplomati, ciascuno dei quali decide, con probabilità costante 0.90 ed indipendentemente dagli altri, di iscriversi ad un corso di laurea universitario. Supponiamo inoltre che ciascun diplomato, fra quelli che decidono di iscriversi ad un corso di laurea, si iscriva alla Sapienza con probabilità $\frac{3}{4}$ indipendentemente dagli altri. Sia R il numero dei diplomati che si iscrivono ad un corso di laurea ed S il numero di quelli che si iscrivono ad un corso di laurea della Sapienza.

a) Calcolare la probabilità dell'evento $\{R = i\}$ $(i = 0, 1, ..., 100)$

b) Calcolare $P(S = j|R = i)$ e $P(S = j, R = i)$.

c) Calcolare $P(S = j)$.

d) Calcolare $P(R = i|S = j)$.

Esercizio 25.* Sia $P(A) > 0$. Mostrare che $P(A \bigcap B|A) \geq P(A \bigcap B|A \bigcup B)$

Esercizio 26.* $A_1, A_2, \ldots$ sono eventi. Dinostrare che per ogni n vale

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_1\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

Esercizio 27.* Consideriamo il grafo completo con quattro vertici K_4; tutti i vertici sono connessi da un arco a tutti gli altri vertici. Si lancia un moneta bilanciata per ogni arco. Se viene croce, l'arco viene rimosso.

1. qual è la probabilità che due vertici dati siano ancora connessi dopo questa procedura?
2. qual è la probabilità che il grafo rimanga connesso?
3. qual è la probabilità che un dato vertice rimanga isolato?

Esercizio 28. Se il 5% degli automobilisti non si ferma col rosso, trovare la probabilità che almeno 2 dei prossimi 100 automobilisti non si fermerà col rosso.

Esercizio 29. In un cassetto ci sono 10 guanti sinistri e 12 guanti destri. Prendiamo 4 guanti a caso. Trovare la probabilità che di avere due paia di guanti.

Esercizio 30.* Sia Ω l'insieme dei risultati possibili del lancio di un dado con k facce, con k numero primo. Siano $A, B \subset \Omega$. Che cosa possiamo dire circa A, B se sappiamo che sono indipendenti?

Esercizio 31. In un seggio elettorale ci sono tre diverse sezioni, diciamo 1, 2 e 3; ognuna prevede 30 elettori. Supponiamo di sapere che:

- nella sezione 1, 20 elettori votano per lo schieramento A e 10 per lo schieramento B
- nella sezione 2, 15 elettori votano per lo schieramento A e 15 per lo schieramento B
- nella sezione 3, 10 elettori votano per lo schieramento A e 20 per lo schieramento B

a) Qual è la probabilità che, su tre elettori scelti a caso (senza reinserimento) da quelli iscritti alla sezione 1, due votino per A ed uno per B?

Supponiamo ora di sapere che i tre elettori sono stati scelti a caso (senza reinserimento) da quelli iscritti ad una delle tre sezioni, ma non sappiamo da quale e attribuiamo probabilità 1/3,1/3,1/3 alle tre possibilità

b) in tal caso quanto vale la probabilità che, sui tre elettori scelti, due votino per A ed uno per B?

c) Qual è la probabilità condizionata che i tre elettori provengano dalla sezione 2, sapendo che due di loro votano per A ed uno per B?

Esercizio 32. Vengono lanciate n monete bilanciate. Sia A_n l'evento che tutte le monete diano lo stesso risultato e B_n l'evento che al più una delle monete dia testa. Determinare se A_n è positivamente correlato, negativamente correlato o indipendente da B_n

a) per $n = 2$;

b) per $n = 3$;

c) per $n \geq 4$.

Esercizio 33.* Si considerino due lanci indipendenti di una moneta, che ha una probabilità p (non necessariamente uguale a $\frac{1}{2}$) che esca testa in un singolo lancio. Sia A l'evento che si realizza quando al primo lancio esce testa, e B l'evento che nei due lanci esca la stessa faccia. Discutere se A è positivamente correlato, negativamente correlato o indipendente da B a seconda del valore di $p \in (0, 1)$.

Esercizio 34.* Abbiamo a disposizione due urne che contengono palline bianche e nere, che chiamiamo urna 0 e urna 1. Nell'urna 0 la probabilità di avere una pallina bianca è $\frac{k}{n}$, mentre nell'urna 1 è $\frac{n-k}{n}$. Si sceglie a caso una delle due urne e si comincia ad estrarre una pallina. Se la pallina è bianca, si estrae dall'altra urna una seconda pallina; se è nera, si rimette nell'urna e si continua ad estrarre la seconda pallina dalla stessa urna.

a) Determinare la probabilità dell'evento A che le estrazioni diano palline di colore diverso, in un ordine qualsiasi.

b) Sapendo che A si è verificato, con che probabilità si è verificato l'evento B che la prima pallina estratta sia bianca?

c) Determinare, in funzione di $p \in (0, 1)$, se i due eventi A e B sono correlati (positivamente o negativamente) oppure indipendenti.