Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 4 – Relazioni d'ordine e di equivalenza

Docente: Pietro Cenciarelli

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Relazioni d'ordine

R ⊆ A X A è chiamata *ordinamento parziale* su A se
è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

$\{(a, b) \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B) : a \subseteq b\}$ ☺

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n \leq m\}$ ☺

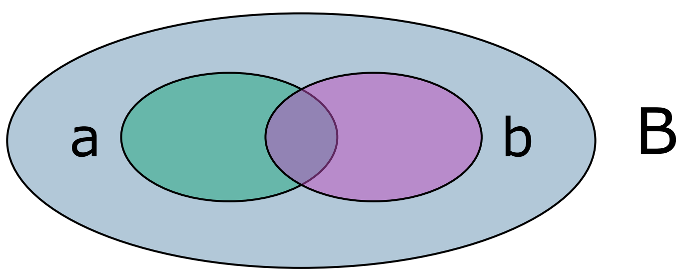
Se antiriflessiva e transitiva: *ordine stretto*:

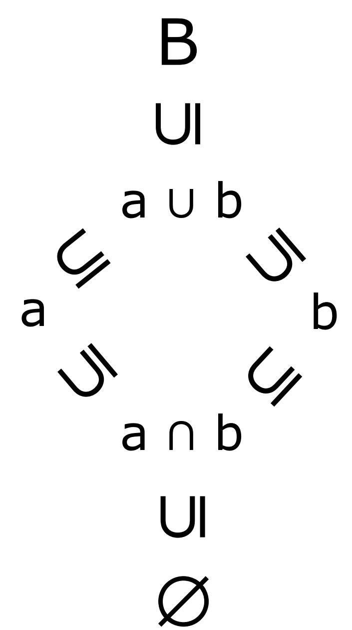
$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n < m\}$

Relazioni d'ordine

$R \subseteq A \times A$ è chiamata *ordinamento parziale* su A se
è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

$\{(a, b) \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B) : a \subseteq b\}$





Nota: $a \not\subseteq b$ e $b \not\subseteq a$

Relazioni d'ordine

$R \subseteq A \times A$ è chiamata *ordinamento parziale* su A se
è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Un ordinamento parziale R su A si dice *totale* quando,
per ogni a e b $\in$ A, a R b oppure b R a.

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n \leq m\}$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n < m\}$

Dunque: *un ordinamento totale è un caso particolare di ordinamento parziale.*

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Relazioni d'ordine

L'inversa di una relazione d'ordine (stretto) è ancora una relazione d'ordine (stretto).

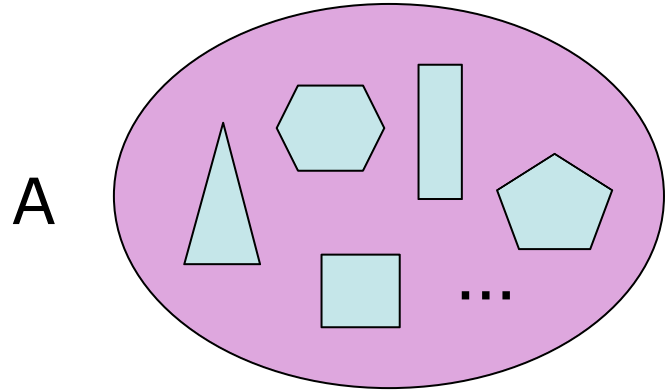
Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione riflessiva; per ogni $a \in A$, $a\ R\ a$ e dunque $a\ R^{-1}\ a$. Dunque anche R^{-1} è riflessiva.

Sia $R \subseteq A \times A$ una ralazione antisimmetrica; per ogni $a, b \in A$, se $a\ R^{-1}\ b$ e $b\ R^{-1}\ a$ allora $b\ R\ a$ e $a\ R\ b$; dall'antisimmetria di R consegue che $a=b$. Dunque anche R^{-1} è simmetrica.

Sia $R \subseteq A \times A$ una ralazione transitiva; per ogni $a, b, c \in A$, se $a\ R^{-1}\ b$ e $b\ R^{-1}\ c$ allora $b\ R\ a$ e $c\ R\ b$; dalla transitività di R consegue che $c\ R\ a$, ovvero $a\ R^{-1}\ c$. Dunque anche R^{-1} è transitiva.

Relazioni di equivalenza

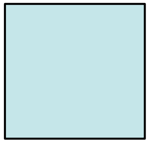
$R \subseteq A \times A$ è chiamata *relazione di equivalenza* su A se è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.



$R = \{(a, b) \in A \times A$: a ha la stessa area di b$\}$

Relazioni di equivalenza

R ⊆ A X A è chiamata *relazione di equivalenza* su A se è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.



a

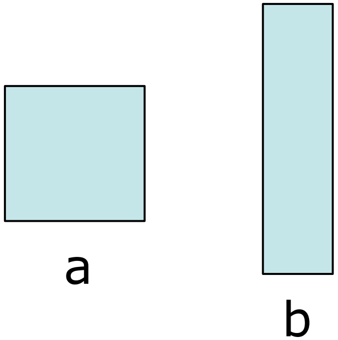
ogni poligono ha stessa area di se stesso

…ovvero: a R a

R = {(a, b) ∈ A X A : a ha la stessa area di b}

Relazioni di equivalenza

$R \subseteq A \times A$ è chiamata *relazione di equivalenza* su A se è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.



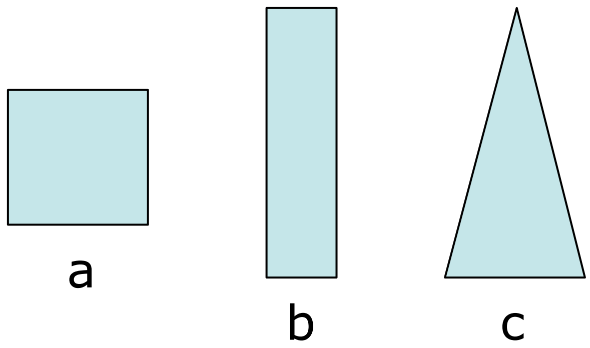
se a ha la stessa area di b,
allora b ha stessa area di a

…ovvero: se a R b allora b R a

$R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ ha la stessa area di } b\}$

Relazioni di equivalenza

R ⊆ A X A è chiamata *relazione di equivalenza* su A se è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.



se a R b e b R c,
allora a R c

R = {(a, b) ∈ A X A : a ha la stessa area di b}

Relazioni di equivalenza

Data una relazione di equivalenza $R \subseteq A \times A$, e dato $a \in A$, l'insieme $\{b \in A : b\ R\ a\}$ è chiamato classe di equivalenza di a rispetto a R, e si indica con $[a]_R$. L'insieme delle classi di equivalenza si chiama *insieme quoziente* e si indica con A/R.

Nota: a R b implica [a] = [b].

Ogni $a \in A$, appartiene a una classe di equivalenza ([a]).

Ogni $a \in A$, appartiene a una *sola* classe di equivalenza.

Infatti, se $a \in [b]$ e $a \in [c]$, allora c R a e b R a; per la simmetria e transitività di R, c R b, e dunque [c] = [b].

Relazioni di equivalenza e partizioni

Dato un insieme A, una famiglia P di sottoinsiemi di A si chiama *partizione* di A se ogni $a \in A$ appartiene ad uno ed un solo insieme della famiglia P.

Data una relazione di equivalenza R su A, A/R è una partizione di A.

Data una partizione P di A, indichiamo con $\sim_P$ la relazione su A tale che $a \sim_P b$ se e solo se $a, b \in X$, per qualche $X \in P$.

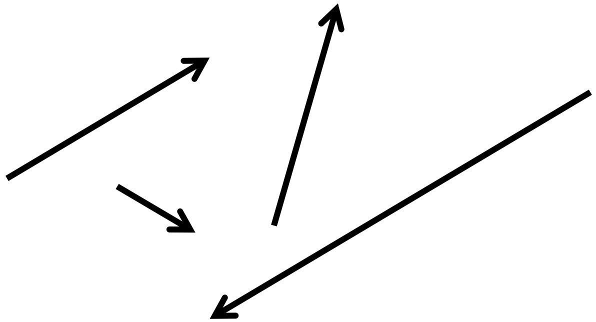
$\sim_P$ è una relazione di equivalenza.

$$R = \sim_{A/R} \qquad P = A/\sim_P$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Relazioni di equivalenza
(esempi)

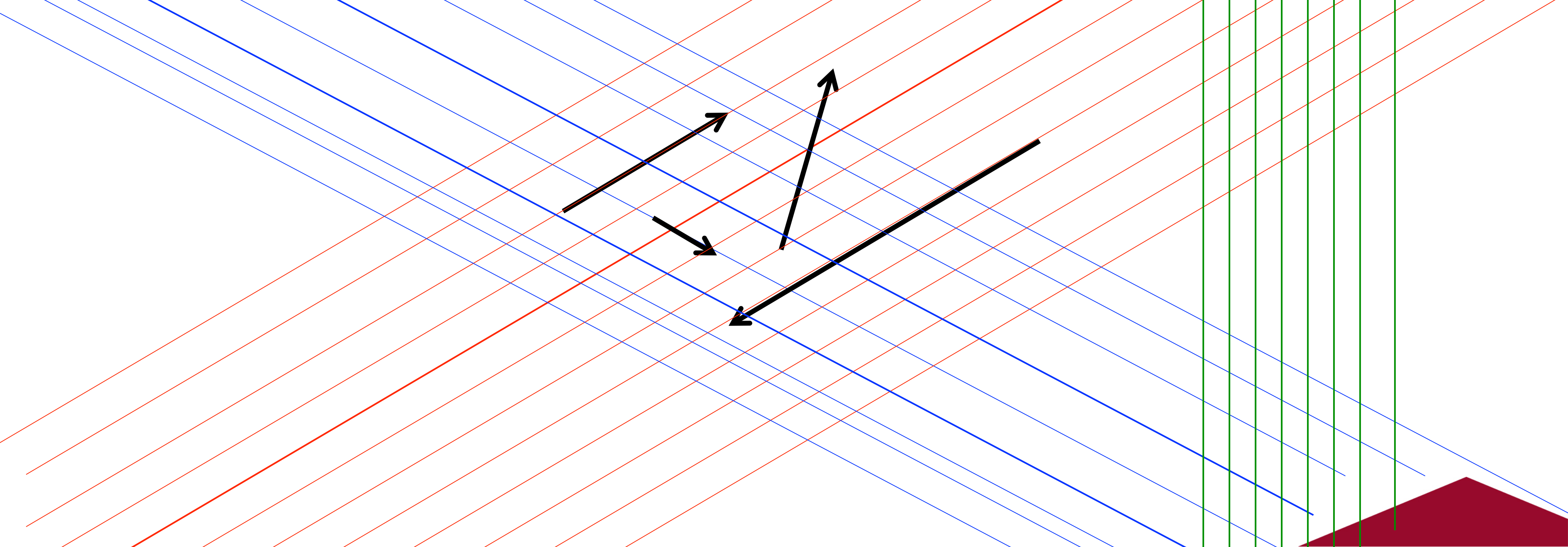
vettore (in fisica) - modulo, direzione, verso, punto di applicazione.



Relazioni di equivalenza
(esempi)

vettore (in fisica) - modulo, direzione, verso, punto di applicazione.

l’insieme A di tutte le rette del mondo; r ~ s se r è parallela a s.

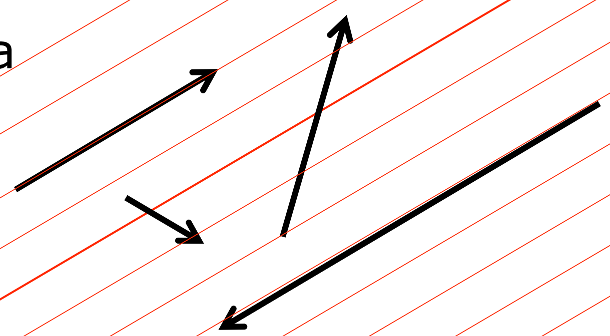


Relazioni di equivalenza
(esempi)

vettore (in fisica) - modulo, direzione, verso, punto di applicazione.

l'insieme A di tutte le rette del mondo; r ~ s se r è parallela a s.

una *direzione* è una classe di equivalenza in A/~

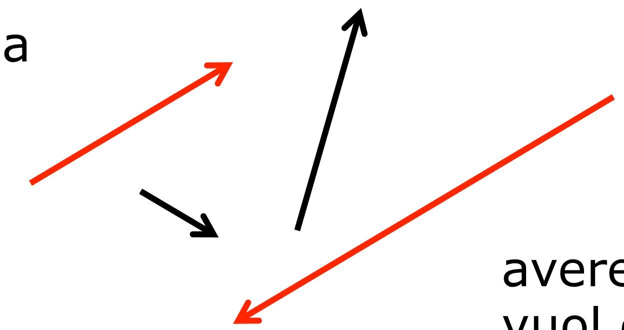


Relazioni di equivalenza
(esempi)

vettore (in fisica) - modulo, direzione, verso, punto di applicazione.

l'insieme di tutte le rette del mondo; r ~ s se r è parallela a s.

una *direzione* è una classe di equivalenza in A/~.



avere la stessa direzione vuol dire giacere su rette equivalenti.

Relazioni di equivalenza
(esempi)

$\mathcal{Q}$ l'insieme dei numeri razionali

$\sim\ \subseteq (\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{Z} \times \mathcal{Z})$

$(a, b) \sim (c, d)$ sse $a \cdot d = b \cdot c$

$\mathcal{Q} = (\mathcal{Z} \times \mathcal{Z})/\sim$