Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{2x} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2} = 0 .$$

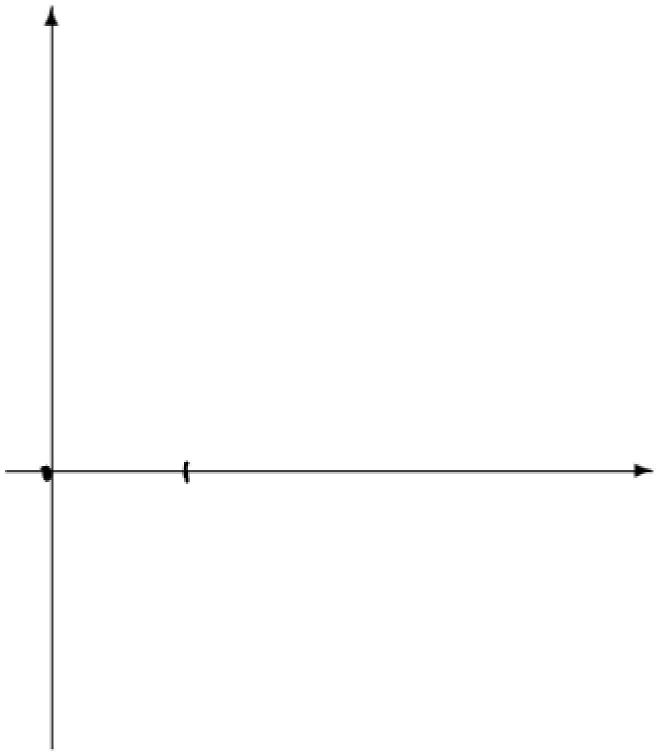
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} .$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$f(x) = x\ln(x)$$



$$D = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) \overset{*}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$$

$$\downarrow$$

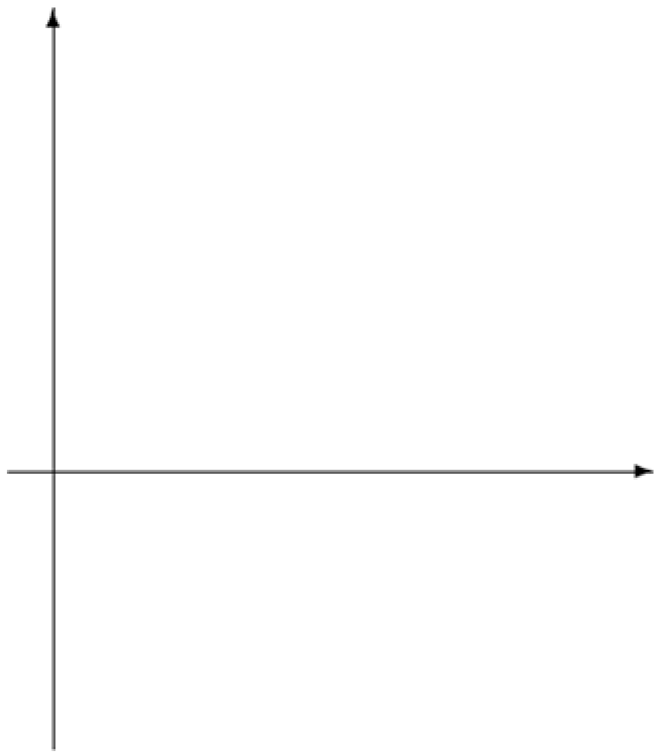
$$\frac{\ln(x)}{1/x}$$

$$f'(x) = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1 \geq 0$$

se $x \geq \frac{1}{e}$

Esempi

$$f(x) = x\ln(x)$$



$$D = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x\ln(x) = 0$$

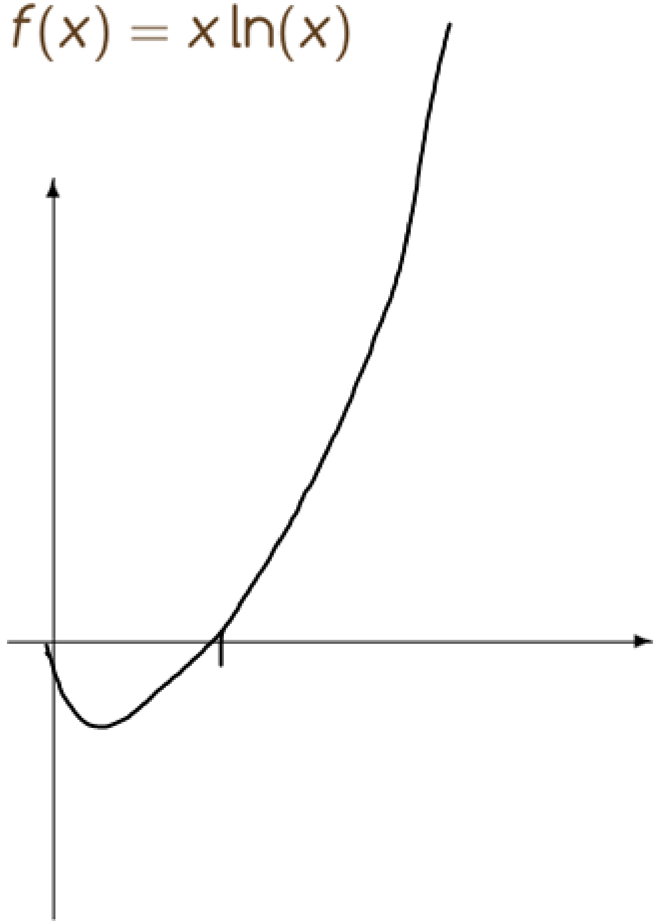
$f'(x) = 1 + \ln(x) > 0$ sse $x > 1/e$

$$f''(x) = 1/x > 0$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Informatica

$f(x) = x\ln(x)$



$D = (0, +\infty)$

$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x\ln(x) = +\infty$

$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x\ln(x) = 0$

$f'(x) = 1 + \ln(x) > 0$ sse $x > 1/e$

$f''(x) = 1/x > 0$

Approssimazioni polinomiali

Usando la formula di de L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(x_0)$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = o(x - x_0) \longrightarrow 0$$

m

oppure

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

questo significa che la **migliore approssimazione** lineare è la retta tangente!

Approssimazioni polinomiali

Cercando un'approssimazione quadratica otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{(x - x_0)^2}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

quindi possiamo scrivere che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\frac{o((x-x_0)^k)}{(x-x_0)^k} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Alcuni sviluppi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \qquad x_0 = 0$$

Approssimazioni polinomiali

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) .$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) .$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots$$

$$\ln(1+x)$$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\sqrt{1+x}$$

$$(\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$(\sqrt{1+x})'' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} .$$

Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Approssimare e

$e^x =$

Approssimare $\ln(2)$

Esercizi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Approssimare $e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\dots$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\dots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}.$$

$$0 = x_0 < \xi < x = 1$$

$$|e-P_5(1)| \leq \frac{1}{\underset{\underset{6!}{\parallel}}{720}}\, e < \frac{1}{240}$$

Approssimare ln(2)

$\ln(2) =$

$x=1$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$