UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

4. Leggi di De Morgan e principio di inclusione-esclusione

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:

1. dare una descrizione più completa dell'algebra delle operazioni fra insiemi
2. Iniziare a introdurre tecniche per contare quanti elementi ci sono in un insieme

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:

1. dare una descrizione più completa dell'algebra delle operazioni fra insiemi
2. Iniziare a introdurre tecniche per contare quanti elementi ci sono in un insieme

La nostra scelta di utilizzare il linguaggio della teoria degli insiemi per parlare di eventi ci permette di descrivere con precisione anche situazioni complesse che a parole potrebbero essere difficili da trattare senza ambiguità.

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:

1. dare una descrizione più completa dell'algebra delle operazioni fra insiemi
2. Iniziare a introdurre tecniche per contare quanti elementi ci sono in un insieme

La nostra scelta di utilizzare il linguaggio della teoria degli insiemi per parlare di eventi ci permette di descrivere con precisione anche situazioni complesse che a parole potrebbero essere difficili da trattare senza ambiguità. A tale scopo è necessario ampliare gli strumenti in nostro posseso per lavorare con le operazioni fra insiemi.

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:

1. dare una descrizione più completa dell'algebra delle operazioni fra insiemi
2. Iniziare a introdurre tecniche per contare quanti elementi ci sono in un insieme

La nostra scelta di utilizzare il linguaggio della teoria degli insiemi per parlare di eventi ci permette di descrivere con precisione anche situazioni complesse che a parole potrebbero essere difficili da trattare senza ambiguità. A tale scopo è necessario ampliare gli strumenti in nostro posseso per lavorare con le operazioni fra insiemi.

Nella lezione successiva vedremo che è essenziale saper contare quanti elementi ci sono in un insieme, anche quando è descritto in maniera indiretta, p.e. come risultato di operazioni fra altri insiemi che riusciamo a descrivere in maniera più diretta.

Leggi di De Morgan

Relazione fra unione e complementazione.

Leggi di De Morgan

Relazione fra unione e complementazione.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Leggi di De Morgan

Relazione fra unione e complementazione.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

esempio:

$$(\{1, 2\} \cup \{5\})^C = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6\} = \{3, 4, 6\}$$

Leggi di De Morgan

Relazione fra unione e complementazione.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

esempio:

$$(\{1,2\} \cup \{5\})^C = \{3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6\} = \{3,4,6\}$$

Relazione fra intersezione e complementazione.

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Leggi di De Morgan

Relazione fra unione e complementazione.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

esempio:

$$(\{1,2\} \cup \{5\})^C = \{3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6\} = \{3,4,6\}$$

Relazione fra intersezione e complementazione.

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

esempio:

$$(\{3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6\})^C = \{1,2\} \cup \{5\} = \{1,2,5\}$$

Leggi di De Morgan

Le relazioni appena viste ammettono una generalizzazione naturale all'unione e intersezione di un numero qualunque di insiemi.

Leggi di De Morgan

Le relazioni appena viste ammettono una generalizzazione naturale all'unione e intersezione di un numero qualunque di insiemi.

Prima legge di De Morgan

Leggi di De Morgan

Le relazioni appena viste ammettono una generalizzazione naturale all'unione e intersezione di un numero qualunque di insiemi.

Prima legge di De Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$$

Leggi di De Morgan

Le relazioni appena viste ammettono una generalizzazione naturale all'unione e intersezione di un numero qualunque di insiemi.

Prima legge di De Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$$

Seconda legge di De Morgan

Leggi di De Morgan

Le relazioni appena viste ammettono una generalizzazione naturale all'unione e intersezione di un numero qualunque di insiemi.

Prima legge di De Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$$

Seconda legge di De Morgan

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$$

Leggi di De Morgan

In tutto il corso daremo poche dimostrazioni, scelte perché illustrano il modo di ragionare in un ambito che ci interessa.

Leggi di De Morgan

In tutto il corso daremo poche dimostrazioni, scelte perché illustrano il modo di ragionare in un ambito che ci interessa.

Scegliamo di dimostrare leggi di De Morgan per uno sguardo su come si lavora con gli insiemi.

Leggi di De Morgan

In tutto il corso daremo poche dimostrazioni, scelte perché illustrano il modo di ragionare in un ambito che ci interessa.

Scegliamo di dimostrare leggi di De Morgan per uno sguardo su come si lavora con gli insiemi.

Per far vedere che due insiemi A e B coincidono mostreremo che sono uno incluso nell'altro.

Leggi di De Morgan

Dimostrazione della prima legge di De Morgan

Supponiamo che x sia un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C$.

Leggi di De Morgan

Dimostrazione della prima legge di De Morgan

Supponiamo che x sia un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C$.

Allora x non è contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$,

Leggi di De Morgan

Dimostrazione della prima legge di De Morgan

Supponiamo che x sia un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C$.

Allora x non è contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$,

quindi x non è contenuto in nessuno degli eventi A_i.

Leggi di De Morgan

Dimostrazione della prima legge di De Morgan

Supponiamo che x sia un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C$.

Allora x non è contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$,

quindi x non è contenuto in nessuno degli eventi A_i.

Questo a sua volta implica che x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

Leggi di De Morgan

Dimostrazione della prima legge di De Morgan

Supponiamo che x sia un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C$.

Allora x non è contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$,

quindi x non è contenuto in nessuno degli eventi A_i.

Questo a sua volta implica che x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi è contenuto nella loro intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Leggi di De Morgan

Dimostrazione della prima legge di De Morgan

Supponiamo che x sia un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C$.

Allora x non è contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$,

quindi x non è contenuto in nessuno degli eventi A_i.

Questo a sua volta implica che x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi è contenuto nella loro intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Di conseguenza $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Allora x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Allora x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi in nessuno degli A_i

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Allora x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi in nessuno degli A_i

ovvero non è un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Allora x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi in nessuno degli A_i

ovvero non è un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Di conseguenza $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Allora x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi in nessuno degli A_i

ovvero non è un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Di conseguenza $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$

Ne concludiamo $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$

Leggi di De Morgan

Supponiamo invece che x sia un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$.

Allora x è contenuto in ciascuno degli A_i^C

e quindi in nessuno degli A_i

ovvero non è un elemento di $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Di conseguenza $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$

Ne concludiamo $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$

ovvero la prima legge di De Morgan.

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima e dall'identità

$$\left(A^C\right)^C = A.$$

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima e dall'identità

$$\left(A^C\right)^C = A.$$

Scriviamo la prima legge prendendo i complementari degli A_i

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima e dall'identità

$$\left(A^C\right)^C = A.$$

Scriviamo la prima legge prendendo i complementari degli A_i

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima e dall'identità

$$\left(A^C\right)^C = A.$$

Scriviamo la prima legge prendendo i complementari degli A_i

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

prendiamo poi i complementari dei due membri dell'uguaglianza

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima e dall'identità

$$\left(A^C\right)^C = A.$$

Scriviamo la prima legge prendendo i complementari degli A_i

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

prendiamo poi i complementari dei due membri dell'uguaglianza

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C$$

Leggi di De Morgan

Per dimostrare la seconda legge di De Morgan partiremo dalla prima e dall'identità

$$\left(A^C\right)^C = A.$$

Scriviamo la prima legge prendendo i complementari degli A_i

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

prendiamo poi i complementari dei due membri dell'uguaglianza

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C$$

e troviamo la seconda legge.

proprietà distributiva

Per l'unione e intersezione di tre insiemi vale la proprietà distributiva

proprietà distributiva

Per l'unione e intersezione di tre insiemi vale la proprietà distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

proprietà distributiva

Per l'unione e intersezione di tre insiemi vale la proprietà distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Come per le leggi di De Morgan che legano unione (o intersezione) e complementazione si passa facilmente a una formulazione per un numero qualunque di insiemi:

proprietà distributiva

Per l'unione e intersezione di tre insiemi vale la proprietà distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Come per le leggi di De Morgan che legano unione (o intersezione) e complementazione si passa facilmente a una formulazione per un numero qualunque di insiemi:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

proprietà distributiva

Per l'unione e intersezione di tre insiemi vale la proprietà distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Come per le leggi di De Morgan che legano unione (o intersezione) e complementazione si passa facilmente a una formulazione per un numero qualunque di insiemi:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \bigcap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

La struttura che abbiamo descritto delle operazioni fra insiemi è un esempio di algebra di Boole. Il calcolo proposizionale costituisce un altro esempio.

inclusione-esclusione

Calcolo della cardinalità dell'unione di insiemi non disgiunti.

inclusione-esclusione

Calcolo della cardinalità dell'unione di insiemi non disgiunti.

Dati due insiemi A e B, supponiamo di conoscere la cardinalità di ciascuno, ovvero quanti elementi contengono.

Calcolo della cardinalità dell'unione di insiemi non disgiunti.

Dati due insiemi A e B, supponiamo di conoscere la cardinalità di ciascuno, ovvero quanti elementi contengono.

Se $A \cap B = \emptyset$, naturalmente $|A \cup B| = |A| + |B|$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo della cardinalità dell'unione di insiemi non disgiunti.

Dati due insiemi A e B, supponiamo di conoscere la cardinalità di ciascuno, ovvero quanti elementi contengono.

Se $A \cap B = \emptyset$, naturalmente $|A \cup B| = |A| + |B|$

Ma se A e B hanno qualche elemento in comune allora la loro unione ha cardinalità più piccola.

Calcolo della cardinalità dell'unione di insiemi non disgiunti.

Dati due insiemi A e B, supponiamo di conoscere la cardinalità di ciascuno, ovvero quanti elementi contengono.

Se $A \cap B = \emptyset$, naturalmente $|A \cup B| = |A| + |B|$

Ma se A e B hanno qualche elemento in comune allora la loro unione ha cardinalità più piccola.

Possiamo "correggere" questa ripetizione andando a togliere gli elementi in comune.

Calcolo della cardinalità dell'unione di insiemi non disgiunti.

Dati due insiemi A e B, supponiamo di conoscere la cardinalità di ciascuno, ovvero quanti elementi contengono.

Se $A \cap B = \emptyset$, naturalmente $|A \cup B| = |A| + |B|$

Ma se A e B hanno qualche elemento in comune allora la loro unione ha cardinalità più piccola.

Possiamo "correggere" questa ripetizione andando a togliere gli elementi in comune.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

inclusione-esclusione

Il metodo può essere applicato sistematicamente all'unione di un numero qualunque di insiemi

inclusione-esclusione

Il metodo può essere applicato sistematicamente all'unione di un numero qualunque di insiemi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione,

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione, se ci fermiamo dopo due per difetto,

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione, se ci fermiamo dopo due per difetto, dopo tre di nuovo per eccesso, ma più precisa di prima, e così via...

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione, se ci fermiamo dopo due per difetto, dopo tre di nuovo per eccesso, ma più precisa di prima, e così via...

A volte possiamo accontentarci di diseguaglianze.

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione, se ci fermiamo dopo due per difetto, dopo tre di nuovo per eccesso, ma più precisa di prima, e così via...

A volte possiamo accontentarci di diseguaglianze.

Per esempio nel caso di tre insiemi:

inclusione-esclusione

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione, se ci fermiamo dopo due per difetto, dopo tre di nuovo per eccesso, ma più precisa di prima, e così via...

A volte possiamo accontentarci di diseguaglianze.

Per esempio nel caso di tre insiemi:

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \leq |A\cup B\cup C| \leq |A|+|B|+|C|$$

Notiamo che l'espressione esatta si ottiene sommando termini che sono a segno alterno.

Se ci fermiamo al primo termine otterremo una stima per eccesso della cardinalità dell'unione, se ci fermiamo dopo due per difetto, dopo tre di nuovo per eccesso, ma più precisa di prima, e così via...

A volte possiamo accontentarci di diseguaglianze.

Per esempio nel caso di tre insiemi:

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \leq |A\cup B\cup C| \leq |A|+|B|+|C|$$

Le disuguaglianze che si ottengono arrestandosi dopo un certo numero di passi nella formula di inclusione-esclusione sono dette disuguaglianze di Bonferroni