UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

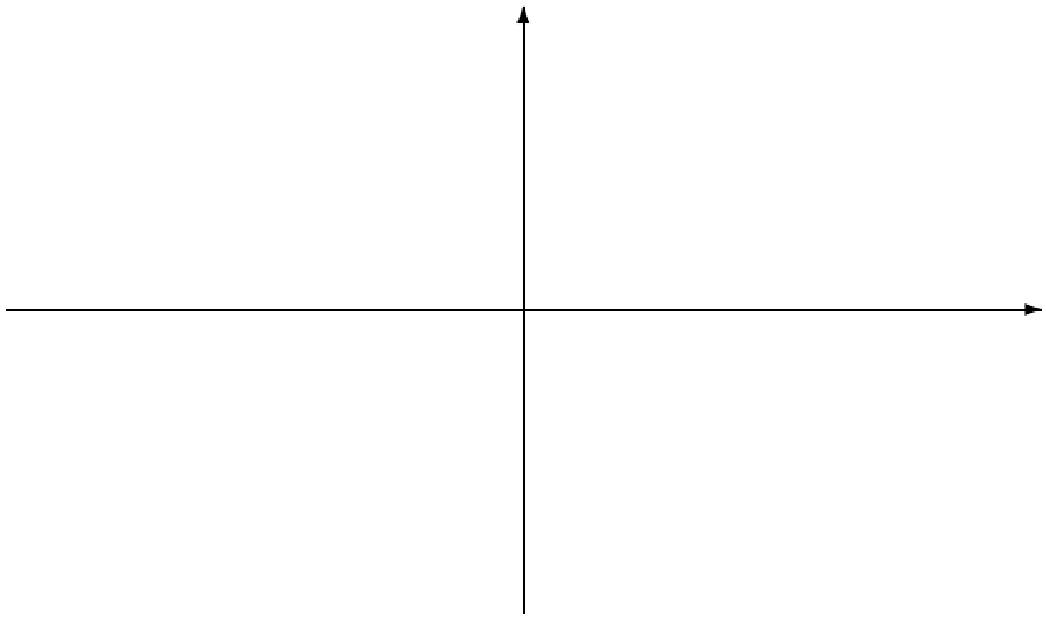
Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

17. Ricerca di zeri

Un problema “concreto”

$$y = f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$$



Numeri reali e numeri "reali"

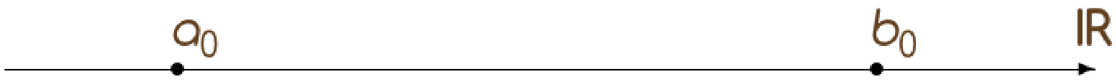
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$
π	3.141593
$\sqrt{2}$	1.41421
$\ln(2)$	0.69315
e	2.7182818
$\sin(1)$	0.84147

Il metodo di bisezione

Sia f una funzione tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$

Il metodo di bisezione

Sia f una funzione tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$



il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

Il metodo di bisezione

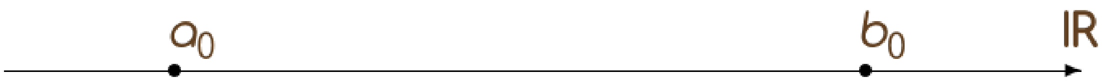
Sia f una funzione tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$

il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

scegliamo una delle due metà risultanti per proseguire la ricerca

Il metodo di bisezione

Sia f una funzione tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$



il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

scegliamo una delle due metà risultanti per proseguire la ricerca

- $I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, P]$ se $f(a_0)f(P) < 0$

Il metodo di bisezione

Sia f una funzione tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$

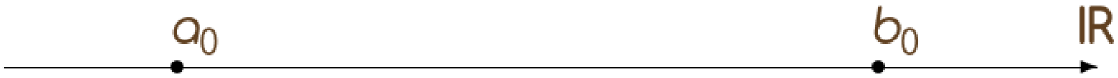
il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

scegliamo una delle due metà risultanti per proseguire la ricerca

- $I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, P]$ se $f(a_0)f(P) < 0$
- $I_1 = [a_1, b_1] = [P, b_0]$ se $f(P)f(b_0) < 0$

Il metodo di bisezione

Sia f una funzione tale che $f(a_0)f(b_0) < 0$



il punto medio di $I_0 = [a_0, b_0]$ è $P = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

scegliamo una delle due metà risultanti per proseguire la ricerca

- $I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, P]$ se $f(a_0)f(P) < 0$
- $I_1 = [a_1, b_1] = [P, b_0]$ se $f(P)f(b_0) < 0$

Ora si ripeta il ragionamento su I_1...

Una stima del metodo

$$(b_n - a_n) = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_o - a_0}{2} = \frac{L}{2^n}$$

se vogliamo che

$$(b_n - a_n) < \varepsilon$$

dobbiamo iterare il procedimento

$$n = \left[\frac{\ln(L/\varepsilon)}{\ln(2)} \right] + 1$$

Un esempio

Cerchiamo una soluzione dell'equazione
$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5 = 0$

x	$f(x)$	Interval
0.6	1.616	...
0.8	-0.888	(0.6, 0.8)
0.7	0.443	(0.7, 0.8)
0.75	-0. 203	(0.7, 0.75)
0.725	0.125	(0.725, 0.75)
0.7375	-0.038	(0.725, 0.7375)
0.73125	0.044	(0.7375, 0.73125)
0.73438	0.003	(0.7375, 0.73438)
0.73594	-0.017	(0.73438, 0.73594)
0.73516	-0.007	(0.73438, 0.73516)
0.73477	-0.002	(0.73438, 0.73477)

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Per il teorema di Lagrange sappiamo che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \simeq f'(x_1)$$

Il metodo di Newton

Per il teorema di Lagrange sappiamo che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \simeq f'(x_1)$$

se f' è continua e x_2 abbastanza vicino a x_1, da cui

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Il metodo di Newton

Per il teorema di Lagrange sappiamo che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \simeq f'(x_1)$$

se f' è continua e x_2 abbastanza vicino a x_1, da cui

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

noi cerchiamo una soluzione dell'equazione cioè

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Per il teorema di Lagrange sappiamo che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \simeq f'(x_1)$$

se f' è continua e x_2 abbastanza vicino a x_1, da cui

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

noi cerchiamo una soluzione dell'equazione cioè

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

che possiamo riscrivere così

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Il metodo di Newton

I ragionamenti precedenti possono essere usati per costruire il seguente algoritmo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Il metodo di Newton

I ragionamenti precedenti possono essere usati per costruire il seguente algoritmo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Osservazione.
Il metodo funziona bene "lontano" dai punti in cui la derivata si annulla!

Il metodo di Newton

I ragionamenti precedenti possono essere usati per costruire il seguente **algoritmo iterativo**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Osservazione.
Il metodo funziona bene "lontano" dai punti in cui la derivata si annulla! La convergenza è molto più veloce di quella del metodo di bisezione.

Un esempio

Cerchiamo una soluzione dell'equazione
$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5 = 0$,

Un esempio

Cerchiamo una soluzione dell'equazione $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5 = 0$, si noti che $f'(x) = 3x^2 - 20x$ da cui

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 10x_k^2 + 5}{3x_k^2 - 20x_k}$$

$$=$$

Un esempio

Cerchiamo una soluzione dell'equazione
$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5 = 0$, si noti che $f'(x) = 3x^2 - 20x$
da cui

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &= x_k - \frac{x_k^3 - 10x_k^2 + 5}{3x_k^2 - 20x_k} \\
&= \frac{2x_k^3 - 10x_k^2 - 5}{3x_k^2 - 20x_k}
\end{aligned}
$$

Un esempio

Cerchiamo una soluzione dell'equazione
$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5 = 0$, l'algoritmo è

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - 10x_k^2 - 5}{3x_k^2 - 20x_k}$$

Un esempio

Cerchiamo una soluzione dell'equazione $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5 = 0$, l'algoritmo è

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - 10x_k^2 - 5}{3x_k^2 - 20x_k}$$

e sappiamo che 0.7 è una buona stima della soluzione, per cui

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.7 \\ x_1 &= 0.73536 \\ x_2 &= 0.73460 \end{aligned}$$

Un altro esempio

Se cerchiamo una soluzione dell'equazione
$f(x) = x^2 - 2 = 0$, l'algoritmo diventa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

$$=$$

Un altro esempio

Se cerchiamo una soluzione dell'equazione $f(x) = x^2 - 2 = 0$, l'algoritmo diventa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

Un altro esempio

Se cerchiamo una soluzione dell'equazione $f(x) = x^2 - 2 = 0$, l'algoritmo diventa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

che è l'algoritmo di Erone!

$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = 1.41667$$
$$x_2 = 1.4142157$$