UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 12 – L'Implicazione

Docente: Pietro Cenciarelli

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Logica proposizionale

simboli proposizionali

proposizioni A, B, … ::= P | Q | … | *falso* | A ∨ B | A ∧ B | ¬ A | … ?

modelli m : *simboli proposizionali* → {T, F}

m si estende alle proposizioni (*interpretazione*) come segue: m(*falso*) = F e, per le proposizioni composte, applicando le *tavole di verità*:

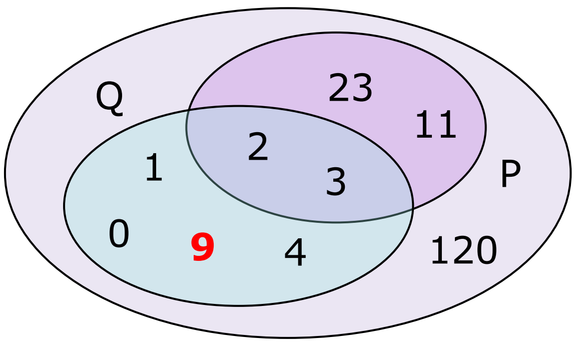
A	B	A ∧ B
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

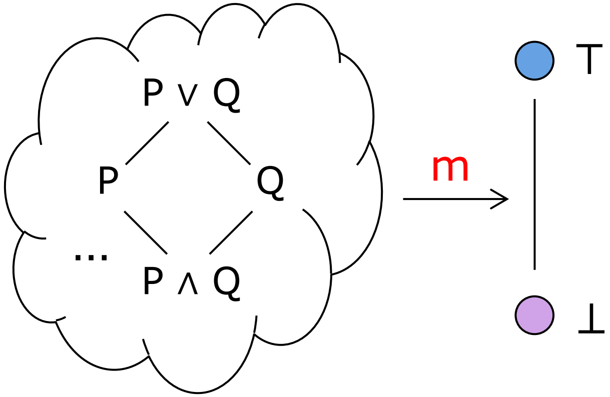
A	B	A ∨ B
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	¬A
T	F
F	T

Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in* $\mathbf{2}$
and ($\wedge$)	*intersezione* ($\cap$)	*meet* ($\wedge$)
or ($\vee$)	*unione* ($\cup$)	*join* ($\vee$)
not ($\neg$)	*complemento* ($\overline{\ }$)	*complemento* ($\overline{\ }$)
?	$\subseteq$	$\leq$

Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in $\mathbf{2}$*

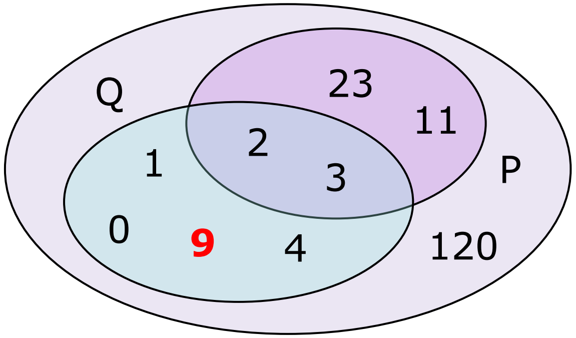




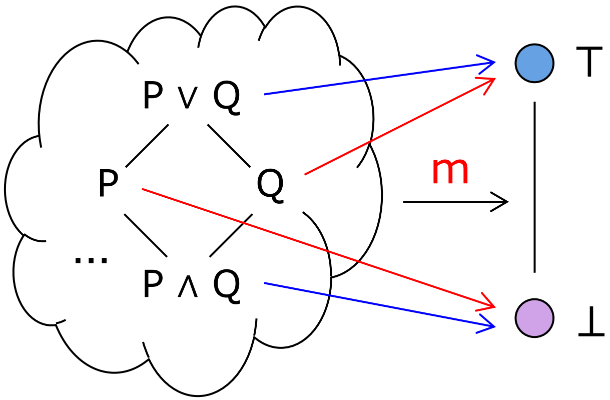
P = essere un numero primo
Q = essere minore di 10

Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in $\mathbf{2}$*

m (Q) = T
m (P) = F
m (P ∧ Q) = F
m (P ∨ Q) = T
…



9 ∈ Q
9 ∉ P



Logica | Insiemi | Algebre di Boole

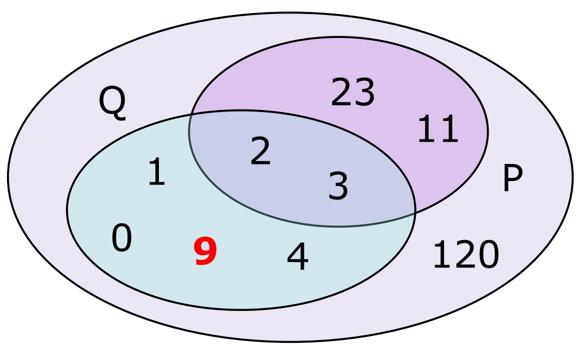
Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in 2*

$m(Q) = T$
$m(P) = F$
$m(P \wedge Q) = F$
$m(P \vee Q) = T$
…

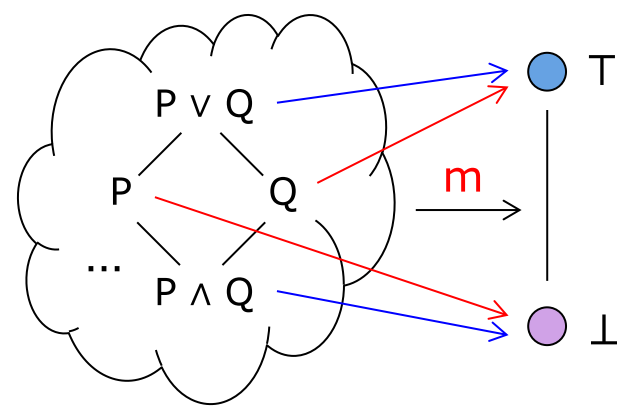
$\models_m Q$

Q *è vero in* m

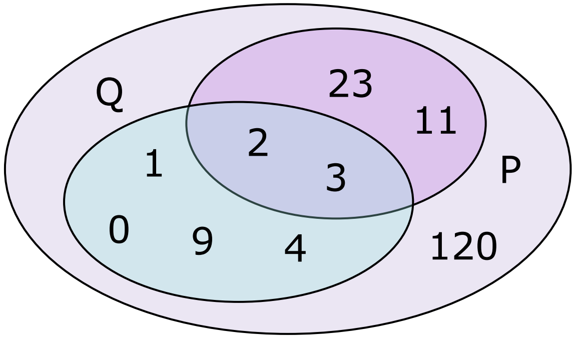
m *soddisfa* Q



$9 \in Q$



Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in* $\mathbf{2}$

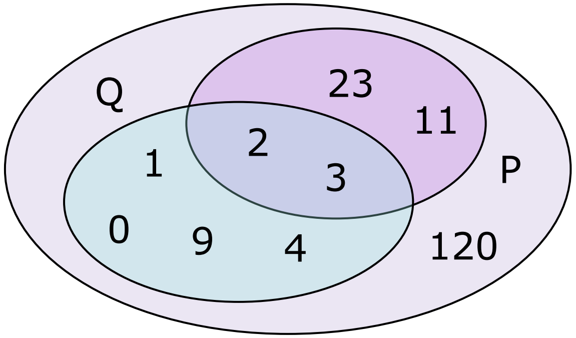


essere un numero primo minore di 10 (P ∧ Q) è una proprietà *più forte* di essere un numero primo e basta (P)

P = essere un numero primo
Q = essere minore di 10

Logica Insiemi Algebre di Boole

Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in 2*



essere un numero primo minore di 10 ($P \land Q$) è una proprietà *più forte* di essere un numero primo e basta (P)

$P \land Q \models P$

per ogni modello m,
se m soddisfa $P \land Q$
allora m soddisfa P

$P \cap Q \subseteq P$

per ogni numero m,
se $m \in P \cap Q$, allora $m \in P$

Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in* $\mathbf{2}$
?	$\subseteq$	$\leq$

$P \wedge Q \vDash P$

per ogni modello m,
se m soddisfa $P \wedge Q$
allora m soddisfa P

$P \cap Q \subseteq P$

per ogni numero m,
se $m \in P \wedge Q$, allora $m \in P$

Logica	Insiemi	Algebre di Boole
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in $\mathbf{2}$*
$\models$	$\subseteq$	$\leq$
$A_1, A_2, \dots A_n \models B$	$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subseteq B$	$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \leq B$

Per ogni modello m, se m soddisfa
$A_1, A_2, \dots A_n$, *allora m soddisfa* B

B *consegue semanticamente* da $A_1, A_2, \dots A_n$

Quando n=0, $\models$ B vuol dire: *per ogni modello m, m soddisfa B*

B è *valida* …o anche: B è una *tautologia*

In un'algebra di Boole…

…per ogni coppia di elementi A e B esiste un elemento B^A tale che

$B^A \wedge A \leq B$ ovvero: $(B^A \wedge A) \vee B = B$

$B^A = \overline{A} \vee B$ infatti…

dimostriamo $[(\overline{A} \vee B) \wedge A] \vee B = B$

$$
\begin{aligned}
[(\overline{A} \vee B) \wedge A] \vee B &= [(\overline{A} \vee B) \vee B] \wedge (A \vee B) \\
&= (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee B) \\
&= (\overline{A} \wedge A) \vee B = \perp \vee B = B
\end{aligned}
$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

In un'algebra di Boole…

…per ogni coppia di elementi A e B esiste un elemento B^A tale che

$$B^A \wedge A \leq B$$

$$B^A = \overline{A} \vee B$$ e inoltre…

B^A è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$ infatti…

per ogni Y tale che $Y \wedge A \leq B$ abbiamo:

$$Y \leq Y \vee \overline{A} = (Y \vee \overline{A}) \wedge (A \vee \overline{A}) = (Y \wedge A) \vee \overline{A} \leq B \vee \overline{A} = B^A$$

Logica

proposizioni

$A_1, A_2, \dots A_n \vDash B$

$A \to B$ è *la più debole* proposizione X tale che

$X, A \vDash B$

Algebre di Boole

elementi

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \leq B$

$B^A = \overline{A} \vee B$ è *il più grande* elemento X tale che

$X \wedge A \leq B$

A	B	¬A	¬A ∨ B = A → B
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Logica

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

$A \rightarrow B, A \vDash B$

Insiemi

$A \rightarrow B = \overline{A} \cup B$

$A \rightarrow B \cap A \subseteq B$

$A \rightarrow B$ è *la più debole* proposizione X tale che

$X, A \vDash B$

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Logica

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

$A \rightarrow B,\ A \vDash B$

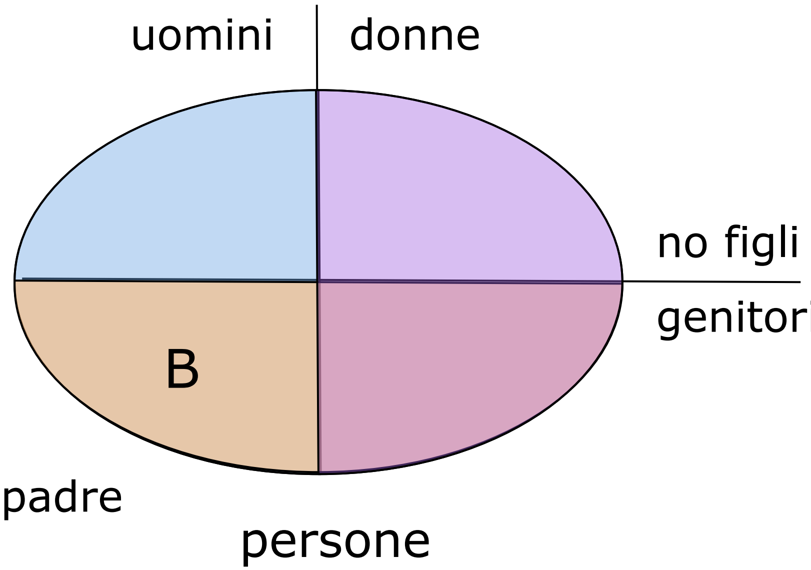
Insiemi

$A \rightarrow B = \overline{A} \cup B$

$A \rightarrow B \cap A \subseteq B$

$A \rightarrow B$ è *la più debole* proposizione X tale che

$X,\ A \vDash B$



A = è genitore

B = è padre

$A \rightarrow B$ = se è genitore allora è padre

uomini ?

Logica

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

$A \rightarrow B, A \models B$

$A \rightarrow B$ è *la più debole* proposizione X tale che

$X, A \models B$

A = è genitore

B = è padre

$A \rightarrow B$ = se è genitore allora è padre

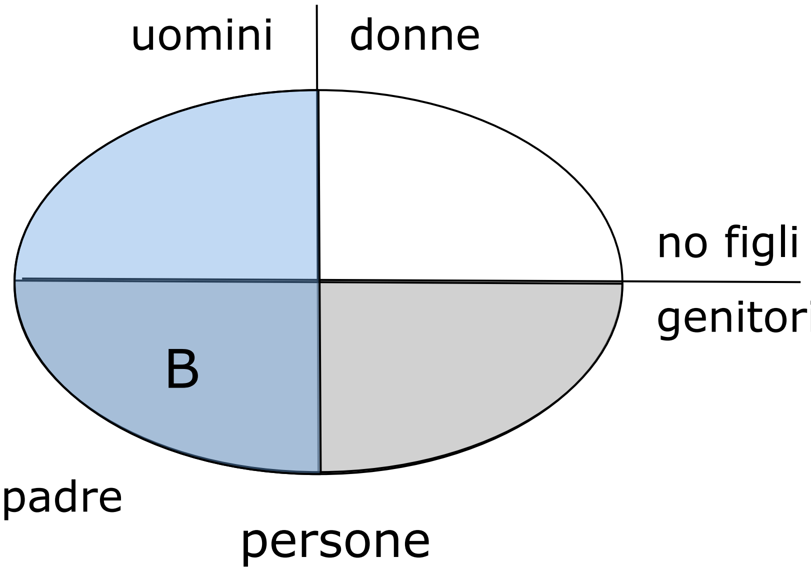
uomini ?

Insiemi

$A \rightarrow B = \overline{A} \cup B \supseteq$ uomini ☹

$A \rightarrow B \cap A \subseteq B$ uomini $\cap A = B$

☺



Logica

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

$A \rightarrow B, A \models B$

Insiemi

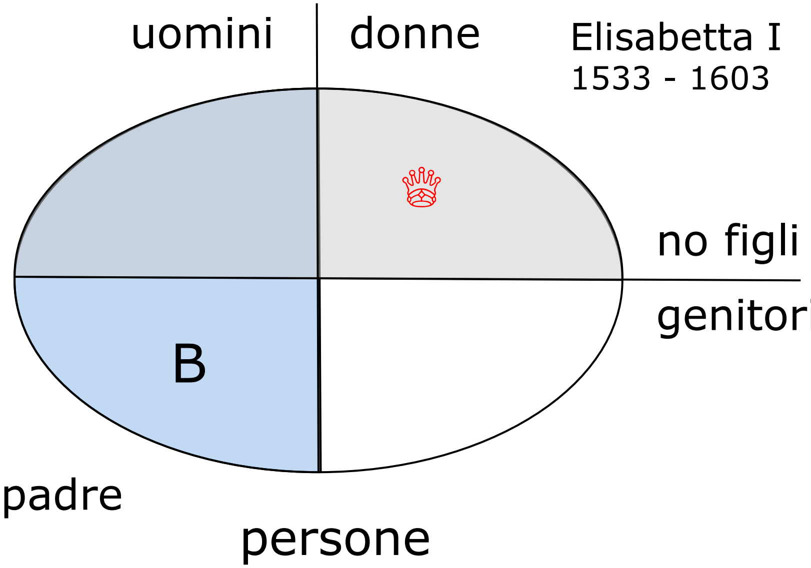
$A \rightarrow B = \overline{A} \cup B$

$A \rightarrow B \cap A \subseteq B$

Elisabetta I
1533 - 1603

$A \rightarrow B$ è *la più debole*
proposizione X tale che

$X, A \models B$



A = è genitore

B = è padre

$A \rightarrow B$ = se è genitore allora è padre

$\models_{\text{♕}} A \rightarrow B$

L'implicazione

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

(interpretazione in un'algebra di Boole)

$A \rightarrow B$ è *la più debole* proposizione X tale che

$X, A \models B$

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

corrisponde alla nozione intuitiva di implicazione ?

L'implicazione

L	Ma	Me	
G	V	S	D

oggi è martedì

domani piove

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

se oggi è martedì domani piove oppure
se domani piove oggi è martedì

corrisponde alla nozione intuitiva di implicazione ?

L'implicazione

L	Ma	Me	
G	V	S	D

oggi è martedì

A

domani piove

B

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

se oggi è martedì domani piove oppure
se domani piove oggi è martedì

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

è una tautologia! ☹

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Logica | Algebre di Boole

$A \to B = \neg A \vee B$ ☹ $A \to B = \overline{A} \vee B$

$A \to B$ è *la più debole* proposizione X tale che

$X, A \models B$

☺

$A \to B$ è *il più grande* elemento X tale che

$X \wedge A \leq B$

Nella *logica classica* (in un'algebra di Boole) l'implicazione *è definita* in termini della negazione (complementazione)

Proviamo a fare il contrario…

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \rightarrow B$ è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$

proprietà dei reticoli distributivi

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee A = A \qquad A \wedge A = A$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \vee \bot = A \qquad A \wedge \top = A$$

$$A \vee \overline{A} = \top \qquad A \wedge \overline{A} = \bot$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebre di Heyting

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \to, \bot, \top)$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo distributivo, dove, per ogni coppia di elementi A e B, esiste lo *pseudo complemento di A rispetto a B*, scritto $A \to B$, ovvero :

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \to B$ è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$

$A \vee \overline{A} = \top$ $\qquad$ $A \wedge \overline{A} = \bot$

Ogni algebra di Boole è un' algebra di Heyting, *ma …*

$\top$
|
♥□
|
$\bot$

$\top \to A = A$

♥□ $\to \top = \top$

♥□ $\to$ ♥□ $= \top$

♥□ $\to \bot = \bot$

$\bot$ □ $\to A = \top$

verificare!

Algebre di Heyting

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp, \top)$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo distributivo, dove, per ogni coppia di elementi A e B, esiste lo *pseudo complemento di A rispetto a B*, scritto $A \rightarrow B$, ovvero :

Ogni algebra di Boole è un' algebra di Heyting, *ma …*

$\top$
|
♥□
|
$\perp$

è una AdH

non è una AdB ($\overline{\heartsuit\square}$?!)

Quale proprietà delle AdB non è verificata dalle AdH?

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \perp, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \rightarrow B$ è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$

$A \vee \overline{A} = \top$ $\qquad$ $A \wedge \overline{A} = \perp$

A	$A \rightarrow \perp$		$\overline{A}$
$\top$	$\perp$	=	$\perp$
$\perp$	$\top$		$\top$

Algebre di Heyting

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp, \top)$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo distributivo, dove, per ogni coppia di elementi A e B, esiste lo *pseudo complemento di A rispetto a B*, scritto $A \rightarrow B$, ovvero :

definiamo $\neg A \overset{\text{def}}{=} A \rightarrow \perp$

$$A \wedge \neg A \overset{\text{def}}{=} A \wedge (A \rightarrow \perp) = \perp$$

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \perp, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \rightarrow B$ è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$

$A \vee \overline{A} = \top$ — *terzo escluso*

$A \wedge \overline{A} = \perp$ — *non contraddizione* ☺

Quale proprietà delle AdB non è verificata dalle AdH?

Algebre di Heyting

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \rightarrow, \bot, \top)$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo distributivo, dove, per ogni coppia di elementi A e B, esiste lo *pseudo complemento di A rispetto a B*, scritto $A \rightarrow B$, ovvero :

definiamo $\neg A \overset{\text{def}}{=} A \rightarrow \bot$

⊤
|
♥□
|
⊥

$\neg\top = \bot$

¬♥□= ⊥

¬⊥□= ⊤

♥□∨ ¬♥ = ♥□□

verificare!

(m'ama, non m'ama… m'ama!)

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \rightarrow B$ è *il più grande* elemento X tale che

$X \wedge A \leq B$

$A \vee \overline{A} \overset{?}{=} \top$ ☹ $A \wedge \overline{A} = \bot$ ☺

terzo escluso *non contraddizione*

Quale proprietà delle AdB non è verificata dalle AdH?

Algebre di Heyting

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \rightarrow, \bot, \top)$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo distributivo, dove, per ogni coppia di elementi A e B, esiste lo *pseudo complemento di A rispetto a B*, scritto $A \rightarrow B$, ovvero :

definiamo $\neg A \overset{\text{def}}{=} A \rightarrow \bot$

$\top$
|
♥
|
$\bot$

$\neg\top = \bot$

$\neg$♥ $= \bot$

$\neg\bot = \top$

$\neg(\neg$♥$) \neq$ ♥

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \rightarrow B$ è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$

$A \vee \overline{A} = \top$ ☹ $A \wedge \overline{A} = \bot$ ☺

terzo escluso   *non contraddizione*

Quale proprietà delle AdB non è verificata dalle AdH?

Algebre di Heyting

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \rightarrow, \bot, \top)$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo distributivo, dove, per ogni coppia di elementi A e B, esiste lo *pseudo complemento di A rispetto a B*, scritto $A \rightarrow B$, ovvero :

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$

Un'*algebra di Boole* è un reticolo distributivo, dove ogni elemento ha un complemento.

$A \rightarrow B$ è *il più grande* elemento X tale che

$$X \wedge A \leq B$$

se oggi è martedì domani piove
oppure
se domani piove oggi è martedì

non è una tautologia!

$A \vee \overline{A} = \top$ ☹ *terzo escluso*

$A \wedge \overline{A} = \bot$ ☺ *non contraddizione*