UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

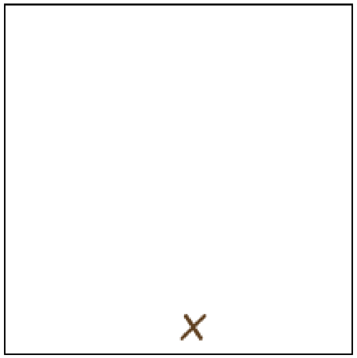
19. Ottimizzazione

Un primo problema

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

Un primo problema

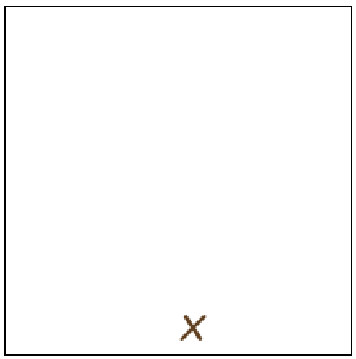
Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.



perimetro 2ρ
base $b = x$
altezza $h = (\rho - x)$

Un primo problema

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

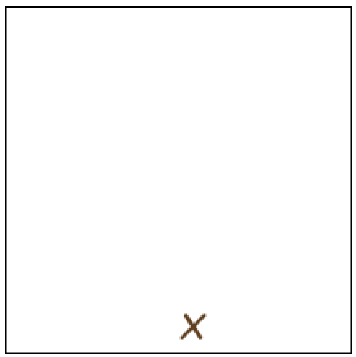


perimetro 2ρ
base $b = x$
altezza $h = (\rho - x)$

Area $bh = x(\rho - x)$

Un primo problema

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.



perimetro 2ρ
base $b = x$
altezza $h = (\rho - x)$

Area $bh = x(\rho - x)$

Il problema è equivalente a **massimizzare** il prodotto $x(\rho - x)$ con la restrizione $0 \leq x \leq \rho$.

Teorema di Weierstrass.
Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esistono due punti $x^*, x_* \in [a, b]$ tali che

Teorema di Weierstrass.
Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esistono due punti $x^*, x_* \in [a, b]$ tali che

$$f(x_*) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Teorema di Weierstrass.
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esistono due punti $x^*, x_* \in [a,b]$ tali che

$$f(x_*) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x^*) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Teorema di Fermat.
Sia f derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a,b)$ sia un punto di minimo o massimo **locale**, allora

Teorema di Weierstrass.
Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esistono due punti $x^*, x_* \in [a, b]$ tali che

$$f(x_*) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x^*) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Teorema di Fermat.
Sia f derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di minimo o massimo **locale**, allora

$$f'(x_0) = 0$$

E la pratica

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

$$f(x) = x(\rho - x) \quad \text{con} \quad x \in [0, \rho]$$

E la pratica

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

$$f(x) = x(\rho - x) \quad \text{con} \quad x \in [0, \rho]$$

$$f'(x) = \rho - 2x$$

E la pratica

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

$$f(x) = x(\rho - x) \quad \text{con} \quad x \in [0, \rho]$$

$$f'(x) = \rho - 2x = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \rho/2$$

$$\text{si noti che} \quad f(0) = f(\rho) = 0$$

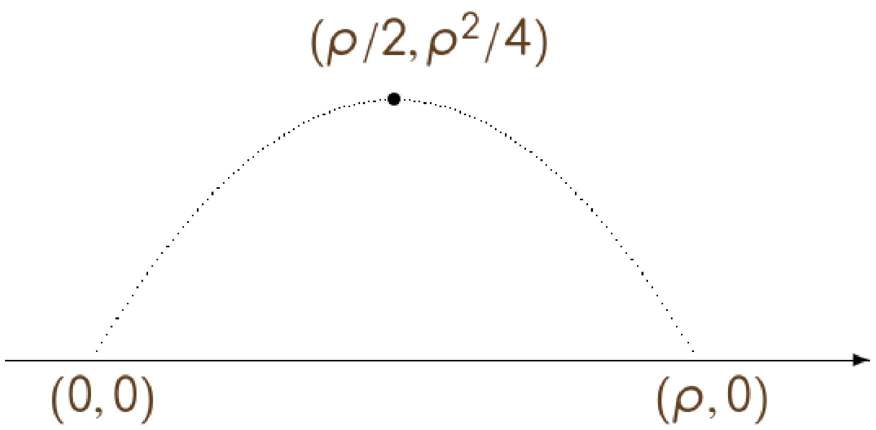
E la pratica

Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

$$f(x) = x(\rho - x) \quad \text{con} \quad x \in [0, \rho]$$

$$f'(x) = \rho - 2x = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \rho/2$$

$$\text{si noti che} \quad f(0) = f(\rho) = 0$$



UNITELMA SAPIENZA SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Problema. Tra tutte le lattine di superficie totale assegnata si trovi quella di volume massimo.
Ricordiamo che

$$V = \pi h r^2 \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

Esempi

Problema. Tra tutte le lattine di superficie totale assegnata si trovi quella di volume massimo.
Ricordiamo che

$$V = \pi h r^2 \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

$$V(r) = \pi\left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) r^2 = \frac{S}{2} r - \pi r^3 \qquad r \in \left[0, \left(\frac{S}{2\pi}\right)^{1/2}\right]$$

Problema. Tra tutte le lattine di superficie totale assegnata si trovi quella di volume massimo.
Ricordiamo che

$$V = \pi h r^2 \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

$$V(r) = \pi\left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) r^2 = \frac{S}{2} r - \pi r^3 \qquad r \in \left[0, \left(\frac{S}{2\pi}\right)^{1/2}\right]$$

V è derivabile e $V(0) = V\left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right) = 0,$

Esempi

Problema. Tra tutte le lattine di superficie totale assegnata si trovi quella di volume massimo.
Ricordiamo che

$$V = \pi h r^2 \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

$$V(r) = \pi\left(\frac{S}{2\pi r} - r\right)r^2 = \frac{S}{2}r - \pi r^3 \qquad r \in \left[0, \left(\frac{S}{2\pi}\right)^{1/2}\right]$$

V è derivabile e $V(0) = V\left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right) = 0$, quindi

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \bar{r} = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Problema. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi quello di volume massimo.

Esempi

Problema. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi quello di volume massimo.

$$V(x) = \pi x \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^2 = \pi x \left(1 - x^2 \right) \qquad x \in [0, 1]$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Problema. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi quello di volume massimo.

$$V(x) = \pi x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = \pi x\left(1-x^2\right) \qquad x \in [0,1]$$

V è derivabile, positiva e $V(0) = V(1) = 0$,

Esempi

Problema. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi quello di volume massimo.

$$V(x) = \pi x \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = \pi x \left(1-x^2\right) \qquad x \in [0,1]$$

V è derivabile, positiva e $V(0) = V(1) = 0$, quindi

$$V'(x) = \pi(1-3x^2) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il volume massimo è $V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema di Weierstrass II.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \, (-\infty)$$

allora esiste $x_* \in \mathbb{R}$ punto di minimo (massimo) globale.

Teorema di Weierstrass III.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = c$$

allora

- se esiste ρ tale che $f(\rho) < c$ allora esiste $x_* \in \mathbb{R}$ punto di minimo globale.
- se esiste ρ tale che $f(\rho) > c$ allora esiste $x^* \in \mathbb{R}$ punto di massimo globale.

Esempi

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \qquad A, B > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \qquad A, B > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} U(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \frac{A - Br}{r^2} = +\infty$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \qquad A, B > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} U(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \frac{A - Br}{r^2} = +\infty$$

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} U(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{A - Br}{r^2} = 0$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \qquad A, B > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} U(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \frac{A - Br}{r^2} = +\infty$$

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} U(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{A - Br}{r^2} = 0$$

quindi esiste soltanto il minimo assoluto

$$U'(r) = -2\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2}$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \qquad A, B > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} U(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \frac{A - Br}{r^2} = +\infty$$
$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} U(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{A - Br}{r^2} = 0$$

quindi esiste soltanto il minimo assoluto

$$U'(r) = -2\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2} = \frac{Br - 2A}{r^3} = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \overline{r} = \frac{2A}{B}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(r) = c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \qquad c > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(r) = c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \qquad c > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(r) = c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \qquad c > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} f(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(r) = c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \qquad c > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} f(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

quindi esiste soltanto il massimo assoluto

$$f'(r) = \frac{c}{r} + r$$

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(r) = c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \qquad c > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

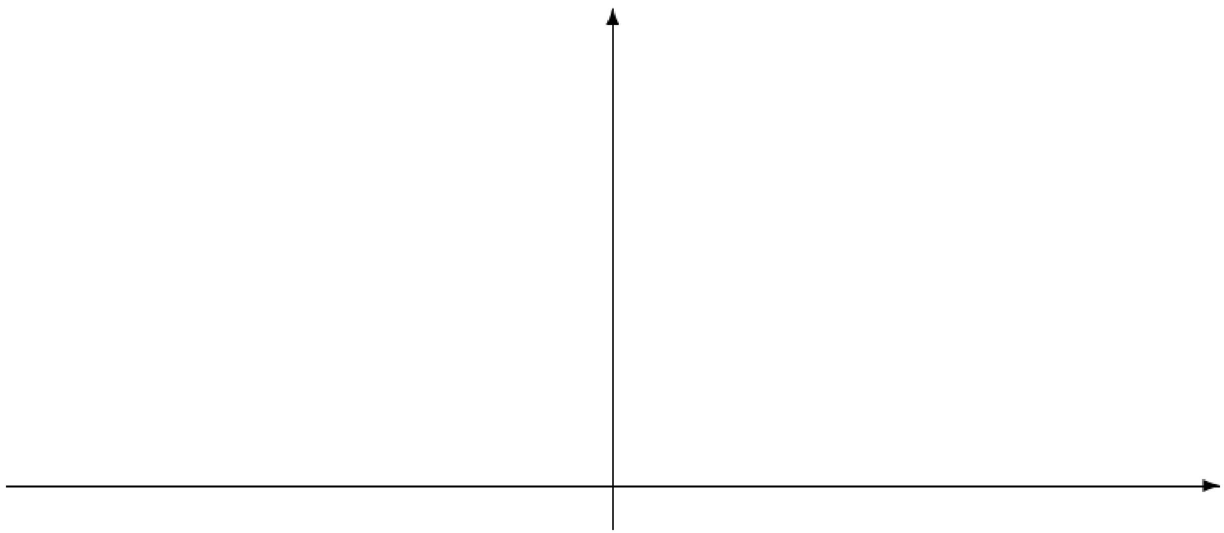
$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} f(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \left(c\ln(r) - \frac{1}{2}r^2 \right) = -\infty$$

quindi esiste soltanto il massimo assoluto

$$f'(r) = \frac{c}{r} + r = \frac{c - r^2}{r} = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \bar{r} = \sqrt{c}$$

Esempi

Problema. Si trovi il massimo assoluto di $f(x) = 1 - |x|$ con $x \in [-1, 1]$



Problema. Si trovi il massimo assoluto di
$f(x) = 1 - |x|$ con $x \in [-1, 1]$