Minimizzazione di espressioni booleane

Prof. Daniele Gorla

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Minimizzare EB

Il problema di ricavare una espressione minima deriva dalla necessità di **ridurre il numero di porte logiche** necessarie per realizzare una rete combinatoria.

Questo ha conseguenze in termini di:

COSTO: Con l'avvento dei circuiti integrati su scala media, alta e molto alta (MSI, LSI e VLSI) questa esigenza è meno sentita. Tuttavia esiste un problema di area occupata.

TEMPO DI ATTRAVERSAMENTO: Il tempo di risposta di una rete combinatoria dipende dal numero di porte logiche attraversate: ridurre tale numero può avere effetti importanti in termini di prestazioni.

2

Minimizzazione

Si basano sulla applicazione ripetuta della seguente semplificazione:

$$axa' + a\overline{x}a' = a(x+\overline{x})a' = aa'$$

dove a e a' sono una sequenza di letterali.

Probl.: avendo a disposizione solo la tavola di verità, non sempre questa semplificazione è evidente!

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\overline{x}_3x_2\overline{x}_1 + \overline{x}_3x_2x_1 = \overline{x}_3x_2(\overline{x}_1 + x_1) = \overline{x}_3x_2$$

"1" adiacenti corrispondono a mintermini semplificabili

$$\overline{x}_3x_2x_1 + x_3x_2x_1 = (\overline{x}_3 + x_3)x_2x_1 = x_2x_1$$

Mintermini semplificabili non sono "1" adiacenti

"1" adiacenti corrispondono a mintermini NON semplificabili

3

Mappe di Karnaugh

Modo di scrivere una FB diverso dalle tavole di verità

Queste mappe ordinano i punti dello spazio booleano $\{0,1\}^n$ in modo che i punti a distanza unitaria (cioè le cui coordinate differiscono per un solo bit) siano adiacenti sulla mappa

Funzionano solo fino $n = 4$; poi servono metodi più complessi (che non vedremo)

Per i nostri scopi basteranno, perché avere FB con più di 4 variabili porterebbe a tavole di verità troppo grandi per essere gestite a mano

4

MdK per funzioni a 2 variabili

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

x	y	f
0	0	f_{00}
0	1	f_{01}
1	0	f_{10}
1	1	f_{11}

$\longrightarrow$

$y \backslash x$	0	1
0	f_{00}	f_{10}
1	f_{01}	f_{11}

m_0 deve stare vicino a m_1 e m_2

m_1 deve stare vicino a m_0 e m_3

m_2 deve stare vicino a m_0 e m_3

m_3 deve stare vicino a m_1 e m_2

m_0	m_2
m_1	m_3

MdK per funzioni a 3 variabili

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

x	y	z	f
0	0	0	f_{000}
0	0	1	f_{001}
0	1	0	f_{010}
0	1	1	f_{011}
1	0	0	f_{100}
1	0	1	f_{101}
1	1	0	f_{110}
1	1	1	f_{111}

$\longrightarrow$

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	f_{000}	f_{010}	f_{110}	f_{100}
1	f_{001}	f_{011}	f_{111}	f_{101}

!!!

m_0 deve stare vicino a m_1, m_2 e m_4
m_1 deve stare vicino a m_0, m_3 e m_5
m_2 deve stare vicino a m_0, m_3 e m_6
m_3 deve stare vicino a m_1, m_2 e m_7
m_6 deve stare vicino a m_2, m_7 e m_4
m_7 deve stare vicino a m_3, m_6 e m_5
m_4 deve stare vicino a m_0, m_5 e m_6
m_5 deve stare vicino a m_1, m_4 e m_7

m_4	m_0	m_2	m_6	m_4
m_5	m_1	m_3	m_7	m_5

$\downarrow$

Struttura tridimensionale (ricurva su di sè)

MdK per funzioni a 4 variabili

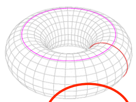
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

m_0	m_4	m_{12}	m_8
m_1	m_5	m_{13}	m_9
m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

Ricurva sul lato corto

Ricurva sul lato lungo

È un *toro*



x	y	w	z	f
0	0	0	0	f_{0000}
0	0	0	1	f_{0001}
	…			…
1	1	1	1	f_{1111}

$\longrightarrow$

$wz \backslash xy$	00	01	11	10
00	f_{0000}	f_{0100}	f_{1100}	f_{1000}
01	f_{0001}	f_{0101}	f_{1101}	f_{1001}
11	f_{0011}	f_{0111}	f_{1111}	f_{1011}
10	f_{0010}	f_{0110}	f_{1110}	f_{1010}

!!! !!!

MdK della funzione OR ternaria

SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$\mathrm{OR}(a,b,c) = 0$ se e solo se $a = b = c = 0$

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Mappa di Karnaugh della funzione *OR* (*a*, *b*, *c*).

Copertura di una MdK e FND minime

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Un *implicante* corrisponde ad un rettangolo formato da 2^k "1", cioè un insieme di 2^k mintermini a distanza unitaria

Un implicante si dice *primo* se non esite un implicante di dimensioni maggiori che lo contenga interamente

Un implicante si dice *essenziale* se contiene almeno un 1 che non sia incluso in alcun altro implicante

Una *copertura minima* di una MdK è un insieme minimo di implicanti primi che siano essenziali per tale insieme

Una FND minima per la FB associata alla MdK si ottiene sommando i prodotti associati agli implicanti di una copertura minima

Implicanti per la MdK dell'OR

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

È un implicante che rappresenta il mintermine $\bar{a}bc$

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

È un implicante che rappresenta la somma dei mintermini $\bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} = \bar{a}b$

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

È un implicante primo che rappresenta la somma dei mintermini $\bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + abc = \bar{a}b + ab = b$

Identificare il prodotto associato ad un implicante

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Il prodotto è formato dalle variabili che assumono lo stesso valore su tutti gli "1" del rettangolo

Ogni variabile viene affermata, se il valore di quella variabile è 1 su tutto il rettangolo, negata altrimenti

Es.:

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Rettangolo 1×1, in cui a=0 e b=c=1 da cui il prodotto associato è m_3

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Rettangolo 2×1, in cui a=0 e b=1 da cui il prodotto associato è $\bar{a}b$

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Rettangolo 2×2, in cui b=1 da cui il prodotto associato è b

Implicanti primi per la MdK dell'OR

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

b

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

c

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

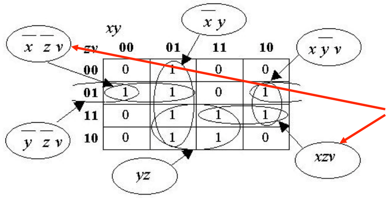
a

da cui la FND minima per questa FB è $a+b+c$

Esempio

x	*y*	*z*	*v*	*o*		*x*	*y*	*z*	*v*	*o*
0	0	0	0	0		1	0	0	0	0
0	0	0	1	1		1	0	0	1	1
0	0	1	0	0		1	0	1	0	0
0	0	1	1	0		1	0	1	1	1
0	1	0	0	1		1	1	0	0	0
0	1	0	1	1		1	1	0	1	0
0	1	1	0	1		1	1	1	0	1
0	1	1	1	1		1	1	1	1	1

N.B.: tutti questi implicanti sono primi, ma non sono tutti essenziali



Sono inutili, avendo gli altri

Espressioni minime usando altre porte

Le MdK danno le EB minime *in FND*

Si possono ottenere EB con meno operatori lavorando sulle FND minime usando altri operatori (NOR, NAND, XOR, XNOR)

Es.:

zt \ xy	00	01	11	10
0 0	1	0	1	1
0 1	0	0	1	1
1 1	1	1	0	0
1 0	1	1	0	1

9 porte logiche

$$\bar{x}z + x\bar{z} + \bar{y}\bar{t}$$

$$= (x \oplus z) + (\overline{y + t})$$

$$= XOR(x, z) + NOR(y, t)$$

3 porte logiche

FNC minima

zt \ xy	00	01	11	10
0 0	0	0	0	0
0 1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	1

FND minima: $yt + xt + yz + xz$

Semplificabile con assiomi dell'algebra:

$$yt + xt + yz + xz = (y + x)t + (y + x)z$$
$$= (y + x)(t + z)$$

che è una FNC!!

Come ottenere dalla MdK una POS minima?

Procedimento per POS minima

1. Copri gli "0" con rettangoli di dimensione 1, 2, 4, 8 o 16
2. Per ogni gruppo, costruisci la somma di letterali associata (per dualità, devo prendere il letterale negato se sul rettangolo la variabile vale 1, affermato altrimenti)

Es.:

zt \ xy	00	01	11	10
0 0	0	0	0	0
0 1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	1

FNC minima: $(x + y)(z + t)$

FB parziali

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

È possibile che la FB non sia definita su tutto $\{0,1\}^n$ ma solo su alcune n-ple

In tal caso, si può associare alle n-ple su cui NON è definita un qualsiasi valore booleano, in modo da rendere la FND (o FNC) più piccola possibile

Es.:

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	-
1 1 1	-

z \ $x\,y$	00	01	11	10
0	0	1	-	1
1	0	0	-	0

Conviene considerare - come un 1
e - come uno 0

Sappiamo che x e y non possono essere entrambe a 1