Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Si determini il punto del piano $\pi : \{z = x + y - 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ più vicino al punto $Q(2, 1, -1)$.

$d(P(x, y, z), Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$, inoltre $P(x, y, x + y - 1)$ da cui

$$d^2(P, Q) = F(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} F_x = 2(x-2) + 2(x+y) = 0 \\ F_y = 2(y-1) + 2(x+y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2y + x = 1 \end{cases}$$

Esercizi

UNITELMA SAPIENZA SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Esercizio. Determinare la scatola (senza coperchio) di volume massimo ricavabile da $12m^2$ di cartone?

Siano $x, y, z > 0$ le dimensioni della scatola, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$ sapendo che $xy + 2xz + 2yz = 12$

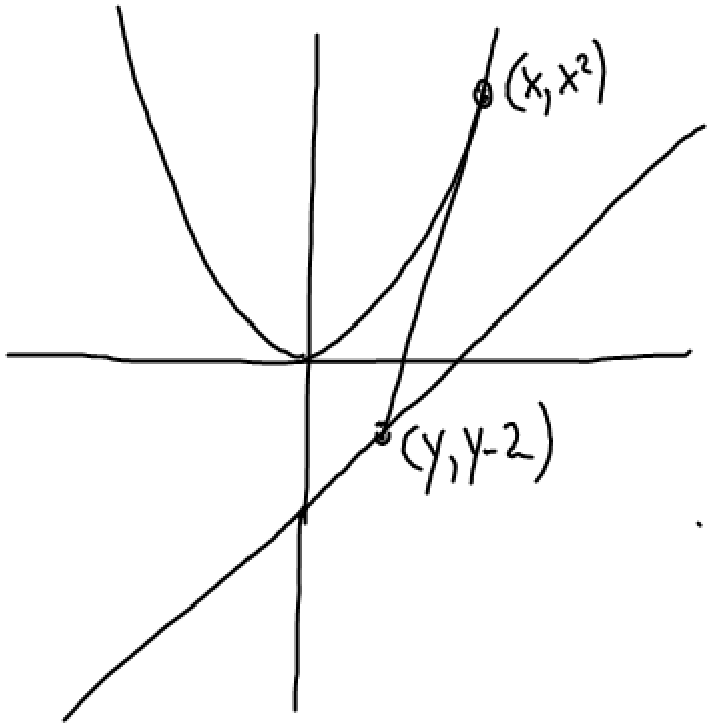
$$F(x, y) = V\left(\frac{2(6 - yz)}{y + 2z}, y, z\right) = \frac{2yz(6 - yz)}{y + 2z} \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{2z^2(12 - y^2 - 4yz)}{(y + 2z)^2}, \frac{4y^2(3 - z^2 - yz)}{(y + 2z)^2}\right) = (0, 0)$$

$$y = \frac{3 - z^2}{z}$$

Esercizi

Esercizio. Trovare due punti, appartenenti alle curve $\{y = x^2\}$ e $\{y = x - 2\}$, che realizzano il minimo della funzione distanza.



Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Trovare due punti, appartenenti alle curve $\{y = x^2\}$ e $\{y = x - 2\}$, che realizzano il minimo della funzione distanza.

Siccome $P(x, x^2)$ e $Q(y, y-2)$ abbiamo che

$$H(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - y + 2)^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

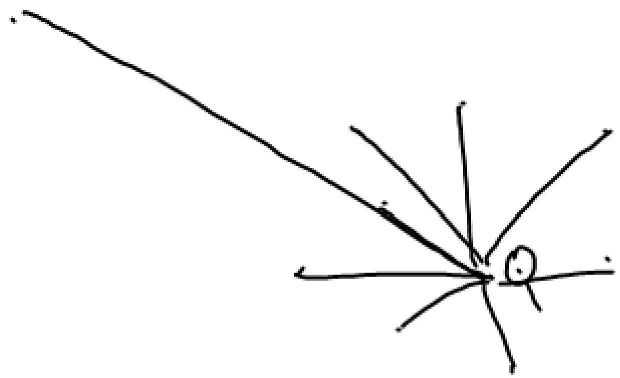
$$\nabla H(x,y) = \left(4x^3 - 4xy + 10x - 2y, 4y - 2x^2 - 2x - 4\right) = (0,0)$$

$$2y = x^2 + x + 2$$

$$4x^3 - 2x(x^2+x+2) + 10x + x^2 + x + 2 = 0$$

Esercizi

Esercizio. Assegnata un insieme di punti nel piano $\{P_k\}_{k=1,\ldots,n}$ si trovi il punto Q tale che sia minima la somma delle distanze dai punti assegnati.



Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Assegnata un insieme di punti nel piano $\{P_k\}_{k01,\dots,n}$ si trovi il punto Q tale che sia minima la somma delle distanze dai punti assegnati.

Supponiamo che $P_k(x_k, y_k)$, allora abbiamo che

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \right] \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla d(x,y) = 2\left(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k, ny - \sum_{k=1}^{n} y_k \right)$$

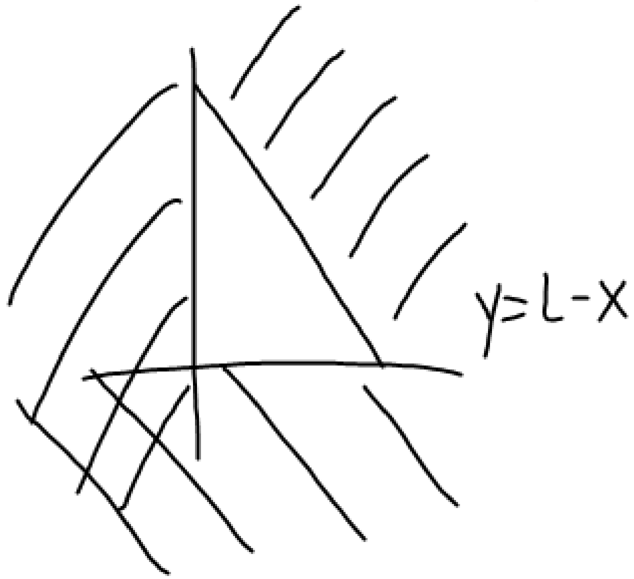
$$d_x = \sum_{k=1}^{n} 2(x - x_k) = 2\left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x}_{nx} - \sum_{k=1}^{n} x_k \right]$$

Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Tra tutte le scatole aventi lunghezza degli spigoli L, si individui quella di volume massimo.

Detti $x, y, z > 0$ gli spigoli, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$, sapendo che $x + y + z = L$ e che $x, y > 0$ e che $z = L - x - y > 0$ cioè $x + y < L$



Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Tra tutte le scatole aventi lunghezza degli spigoli L, si individui quella di volume massimo.

Detti $x, y, z > 0$ gli spigoli, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$, sapendo che $x + y + z = L$ e che $x, y > 0$ e che $z = L - x - y > 0$ cioè $x + y < L$

$$F(x, y) = (L - x - y)xy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\nabla F(x, y) = (y(L - 2x - y), x(L - x - 2y)) = (0, 0)$$

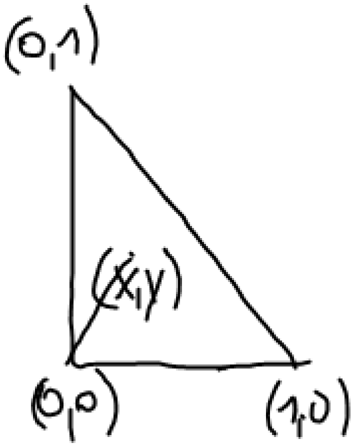
$$\begin{cases} 2x+y=L \\ x+2y=L \end{cases} \qquad x-y=0,\ x=y \qquad 3x=L$$

$$x_{max} = L/3 = y_{max}$$

Esercizi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Si trovi il punto del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ più lontano dall'origine degli assi.



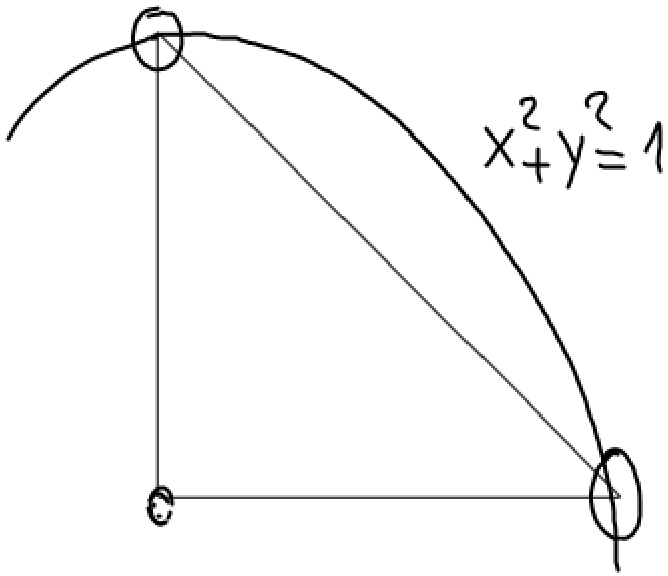
Esercizi

Esercizio. Si trovi il punto del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ più lontano dall'origine degli assi.

$$d(x,y) = x^2 + y^2 \qquad T = \{x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

$$\nabla d = 2(x,y) = (0,0)\ !!!$$

P_{max} $(1,0)$, $(0,1)$



$x^2 + y^2 = 1$.

$d_{max} = 1$