Unitelma Sapienza

Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 3.1 - Relazioni

Docente: Pietro Cenciarelli

$x^2 + y^2 = 25$

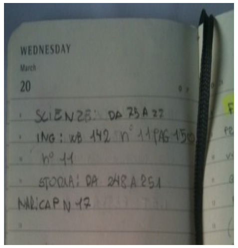
{(3, 4), (3, -4), (2, √21)…}

$\subseteq$ R X R

essere_amico_di

{(Lea, Ivo), (Ivo, Lea), (Ivo, Ugo)…}

$\subseteq$ Persone X Persone



il diario di mio figlio

{(merc, Sci, 75), (merc, Ing, 142), (gio, Sto, 248)…}

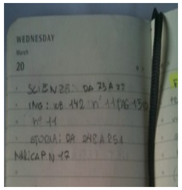
$\subseteq$ Giorni X Materie X Numeri_a_caso

Relazioni

Una *relazione* fra due insiemi A e B è un qualunque sottoinsieme di A X B. Una relazione *in* A è una relazione fra A e A.

relazioni *binarie*

scriviamo a R b per indicare che $(a, b) \in R$



{(merc, Sci, 75), (merc, Ing, 142), (gio, Sto, 248)…}

relazioni *n-arie* (insiemi di n-uple ordinate)

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \overset{\text{def}}{=} A_1 \times (A_2 \times (\dots \times A_n)\dots)$$

Relazioni

esempi già incontrati di relazioni binarie

$$\in_U \;=\; \{(a, A) \in U \times P(U) : a \in A\}$$

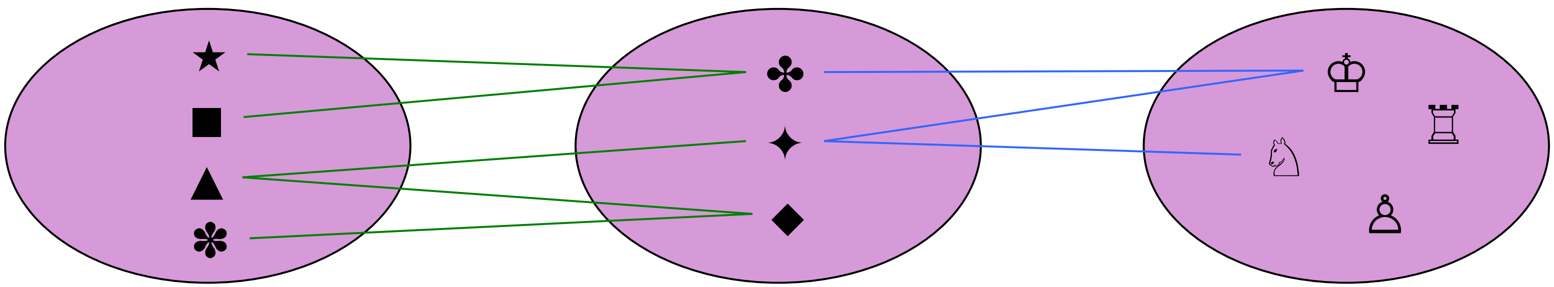
$$=_U \;=\; \{(a, b) \in U \times U : a = b\}$$

$$A \times B \;\subseteq\; A \times B$$

$$\{\} \;\subseteq\; A \times B$$

Composizione di relazioni

La *composizione* di due relazioni R ⊆ A X B e S ⊆ B X C è la relazione S ○ R = {(a, c) ∈ A X C: ∃ b ∈ B tale che a R b e b S c}.



A B C

R = {(★, ✤), (■, ✤), (▲, ✦), (▲, ◆), (❃, ◆)} ⊆ A X B

S = {(✤, ♔), (✦, ♔), (✦, ♘)} ⊆ B X C

S ○ R = {(★, ♔), (■, ♔), (▲, ♔), (▲, ♘)} ⊆ A X C

Proprietà delle relazioni

(*in* un insieme A)

R ⊆ A X A è *riflessiva* se, per ogni a ∈ A, a R a.

A (-nimali) = {  }

{(a, b) ∈ A X A : a pesa quanto b}

{(a, b) ∈ A X A : a pesa molto più di b}

{(a, b) ∈ A X A : a e b hanno occhi dello stesso colore}

…nel senso che a e b *hanno* occhi, e quelli di a hanno lo stesso colore di quelli di b

Proprietà delle relazioni

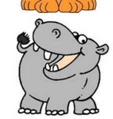
R ⊆ A X A è *riflessiva* se, per ogni a ∈ A, a R a.

A (-nimali) = {  }

{(a, b) ∈ A X A : a pesa molto più di b}

{(a, b) ∈ A X A : a e b hanno occhi dello stesso colore}

a = b = 

a = b = 

Proprietà delle relazioni

R ⊆ A X A è *riflessiva* se, per ogni a ∈ A, a R a.

A (-nimali) = {  }

{(a, b) ∈ A X A : a pesa molto più di b}

{(a, b) ∈ A X A : a e b hanno occhi dello stesso colore}

a = b = 

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A$ X A è *antiriflessiva* se, per ogni $a \in A$, $(a, a) \notin R$.

A (-nimali) = {  }

$\{(a, b) \in A$ X A : a pesa molto più di b$\}$

$\{(a, b) \in A$ X A : a e b hanno occhi dello stesso colore$\}$

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *riflessiva* se, per ogni $a \in A$, $(a, a) \in R$

$R \subseteq A \times A$ è *antiriflessiva* se, per ogni $a \in A$, $(a, a) \notin R$

Esistono relazioni che non sono né riflessive né antiriflessive!

$\{(a, b) \in A \times A$: a e b hanno occhi dello stesso colore$\}$

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *riflessiva* se, per ogni $a \in A$, $(a, a) \in R$

$R \subseteq A \times A$ è *antiriflessiva* se, per ogni $a \in A$, $(a, a) \notin R$

Esistono relazioni che non sono né riflessive né antiriflessive !

Esistono relazioni che sono sia riflessive che antiriflessive ?!

Sì, una sola: $\emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset$

Proprietà delle relazioni

R ⊆ A X A è *simmetrica* se, per ogni a e b ∈ A, a R b implica b R a.

A (-nimali) = {  }

{(a, b) ∈ A X A : a è in simbiosi con b}

{(a, b) ∈ A X A : a mangia b}

Proprietà delle relazioni

R ⊆ A X A è *antisimmetrica* se, per ogni a e b ∈ A, se a R b e b R a, allora a = b.

A (-nimali) = {  }

{(a, b) ∈ P (A) X P (A) : a ⊆ b}

{(a, b) ∈ A X A : a mangia b}

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *antisimmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A, se a R b e b R a, allora a = b.

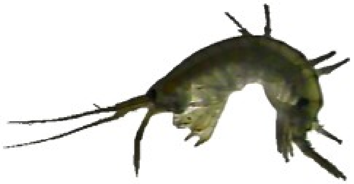
se $a \subseteq b$ e $b \subseteq a$, allora $a = b$

$\{(a, b) \in P(A) \times P(A) : a \subseteq b\}$

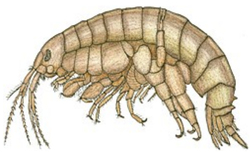
$\{(a, b) \in A \times A : a \text{ mangia } b\}$

Proprietà delle relazioni

R ⊆ A X A è *antisimmetrica* se, per ogni a e b ∈ A, se a R b e b R a, allora a = b.



Echinogammarus ischnus



Dikerogammarus villosus

{(a, b) ∈ A X A : a mangia b}

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *antisimmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A,
se a R b e b R a, allora a = b.

esistono relazioni che non sono né simmetriche né antisimmetriche !

esistono relazioni sia simmetriche che antisimmetriche ?! Sì, molte !

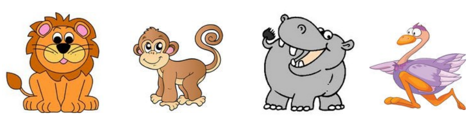
$\{(a, b) \in A \times A : a \text{ mangia } b\}$

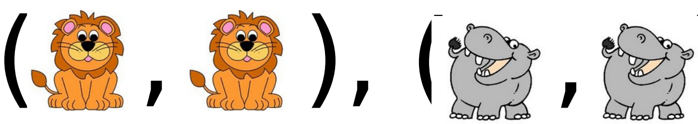
Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *antisimmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A,
se a R b e b R a, allora a = b.

$R \subseteq A \times A$ è *simmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A,
a R b implica b R a.

esistono relazioni sia simmetriche che antisimmetriche ?! Sì, molte !

A = {  }

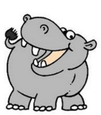
R_1 = { () } $\subseteq A \times A$

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *antisimmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A,
se a R b e b R a, allora a = b.

$R \subseteq A \times A$ è *simmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A,
a R b implica b R a.

esistono relazioni sia simmetriche che antisimmetriche ?! Sì, molte !

A = {     }

R_2 = { ( , ) } $\subseteq A \times A$

...

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *antisimmetrica* se, per ogni a e b $\in$ A,
se a R b e b R a, allora a = b.

$\{(a, b) \in P(A) \times P(A) : a \subseteq b\}$

$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\{(n, m) \in N \times N : n \leq m\} = \{(0,0), (0,1), \ldots (7,9), \ldots\}$

$\{(n, m) \in N \times N : n < m\} = \{(0,1), \ldots (7,9), \ldots\}$

L'antisimmetria è una proprietà tipica degli ordinamenti …