UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

19. Somma di variabili aleatorie. Varianza.

Somma di v.a.

X, Y $\qquad X+Y$ è una v.a

$$(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

$\omega \in S$

$X+Y$ attesa

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

vale <u>sempre</u> anche quando

X e Y <u>non</u> sono indipendenti

Vale solo per la somma

per il prodotto non vale

$$E(XY) \stackrel{?}{=} E(X)E(Y)$$

se sono indipendenti <u>SI</u>

in generale <u>NO</u>

$$P(X=1)=p;\ P(X=0)=1-p$$

$$Y=1-X;\ P(Y=1)=1-p;\ P(Y=0)=1$$

$$P(X=1\cap Y=1)=0;\ P(X=1)P(Y=1)=p(1-p)$$

$$E(X+Y)=E(X+1-X)=E(1)=1$$

$$E(X)+E(Y)=p+1-p=1$$

$$E(XY)=E(X(1-X))=E(X-X^2)=$$

$$E(X)-E(X^2)=E(X)-E(X)=0$$

Variabili indicatrici

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

$\omega \in S$

$$P(I_A = 1) = P(A) = E(I_A)$$

$A_1, A_2 \ldots A_n$

$$E\left(\sum_i I_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(I_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

estrazioni da urne

K palle bianche, $N-K$ palle nere

estraiamo n palle $\quad X = \#$ palle bianche estratte

- con rimpiazzo

$$X \sim B\left(\frac{K}{N}, n\right) \Rightarrow E(X) = n\frac{K}{N}$$

- senza rimpiazzo

$$P(X=j) = \frac{\binom{K}{j}\binom{N-K}{n-j}}{\binom{N}{n}} \qquad E(X) = \sum_j j\,P(X=j)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \; ; \; A_i = \{\text{i-esima estratta è bianca}\}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{K}{N} = n \cdot \frac{K}{N}$$

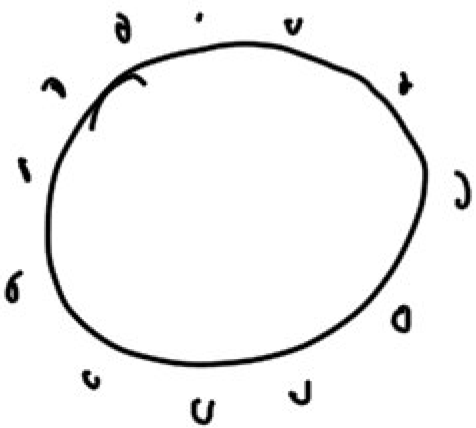
secondo metodo per l'attesa di una v.a. binomiale

$$X \sim B(n, p) \; ; \; X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Z_i Bernoulli di parametro p ; $P(Z_i = 1) = p$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

20 persone <u>dieci coppie</u>



$X = \#$ persone che si siedono vicino al proprio partner

$E(X)$

$1, \dots \dots 20$

$$Z_i = I_{\{i\text{-esima accanto al proprio partner}\}}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Z_i) =$$

$n = 20$

$$E(X) = 20\,E(Z_1) = \frac{40}{19}$$

$$E(Z_1) = \frac{2}{19} \simeq 0.11$$

$E(X)$

dispersione attorno alla media

$$\underbrace{X - E(X)} \qquad E\big(X - E(X)\big) = 0$$

$$E\left(\big[X - E(X)\big]^2\right) = Var(X) \geq 0$$

varianza di X

$Var(X) = 0$ sse $X \equiv E(X)$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) =$$

$$E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) =$$

$$E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 =$$

$$\underline{E(X^2) - E(X)^2}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(X = x)$$

$P(X=1)=p$; $P(X=0)=1-p$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X) - E(X)^2$

$= p - p^2 = p(1-p)$

Dado 6 facce

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} i^2 P(X=i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{91}{6}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182-147}{12}$

$= \frac{35}{12}$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$+ E(Y)^2 = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

$$- E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 =$$

$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := E(XY) - E(X)E(Y)$$

se X e Y sono indipendenti
allora $E(XY) = E(X)E(Y)$

$\Longrightarrow Cov(X, Y) = 0$

---

se $\underline{X \perp\!\!\!\perp Y} \Longrightarrow$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

(non è vero in generale)

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$Var(X+b) = Var(X)$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

$X \sim B(n, p)$

$Var(X)$ $\quad E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ $\quad$ Z_i sono indip.

$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) = n Var(Z_1) =$

$= np(1-p)$