UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 11 – Algebra e modelli

Docente: Pietro Cenciarelli

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \perp, \top)$

$\perp, \top \in \mathcal{A}$

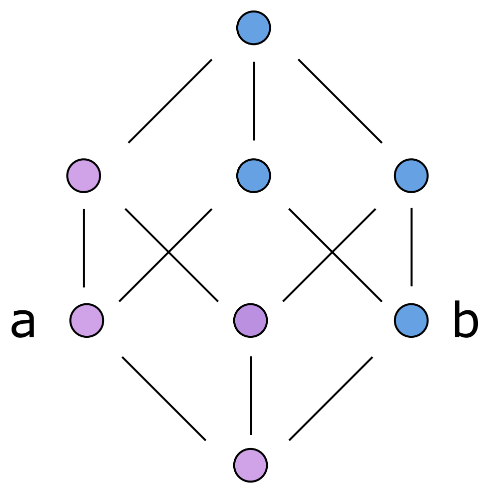
$\vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

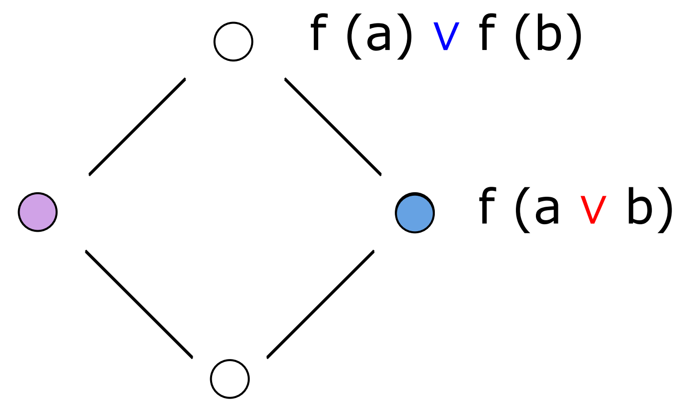
$\wedge : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$\overline{} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \bar{\ }, \bot, \top)$ $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, \bar{\ }, \bot, \top)$



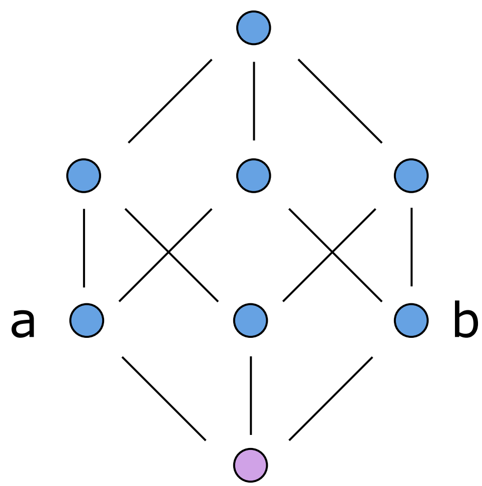


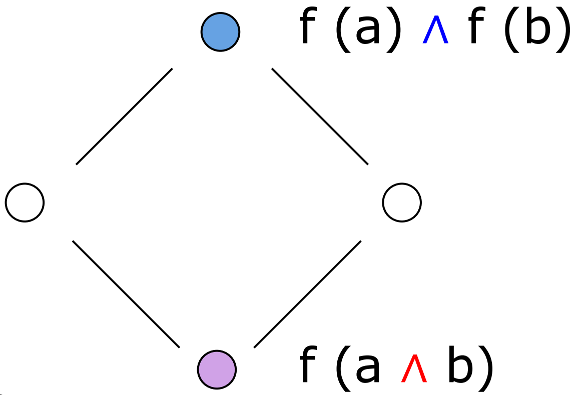
$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

$f(a \vee b) \neq f(a) \vee f(b)$

Algebre di Boole

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$ $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, \overline{}, \bot, \top)$





$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

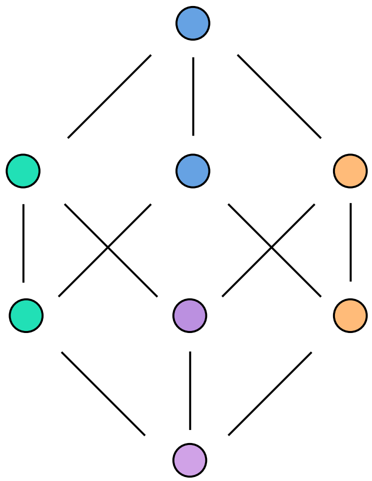
$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ ☺

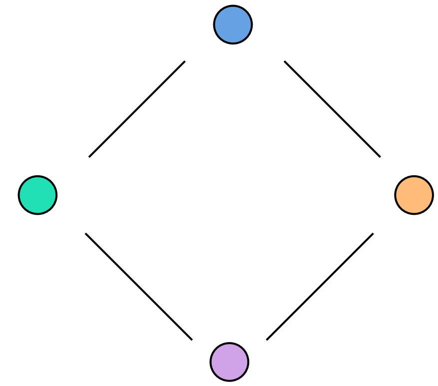
$f(a \wedge b) \neq f(a) \wedge f(b)$ ☹

Algebre di Boole

(omomorfismi)

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, ^{-}, \perp, \top)$ $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, ^{-}, \perp, \top)$





$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

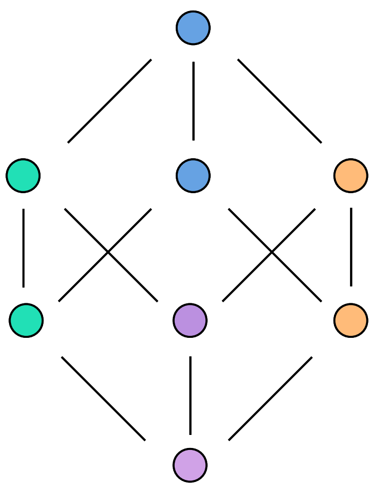
$$f\,(a \vee b) = f\,(a) \vee f\,(b)$$ ☺

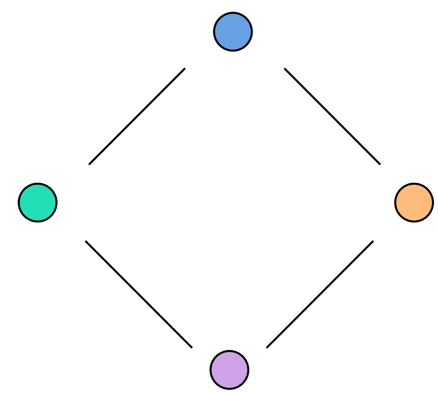
$$f\,(a \wedge b) = f\,(a) \wedge f\,(b)$$ ☺

$$f\,(\perp) = \perp \qquad f\,(\top) = \top$$

Algebre di Boole
(omomorfismi)

$(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \overline{\ \ }, \bot, \top)$ $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, \overline{\ \ }, \bot, \top)$



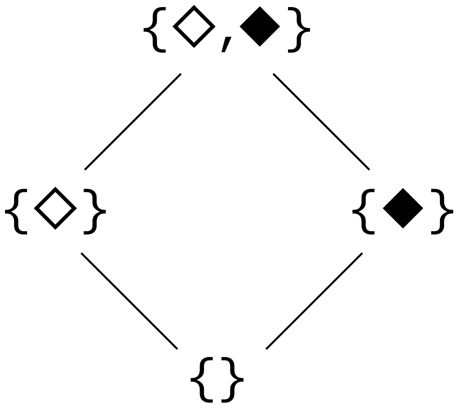


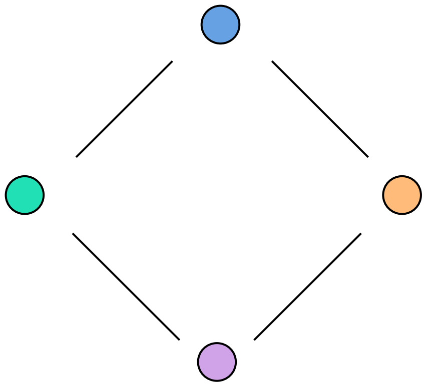
$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

$$f(\,\overline{a}\,) = \overline{f(a)}$$ ☺

Un omomorfismo di reticoli è un omomorfismo di algebre di Boole

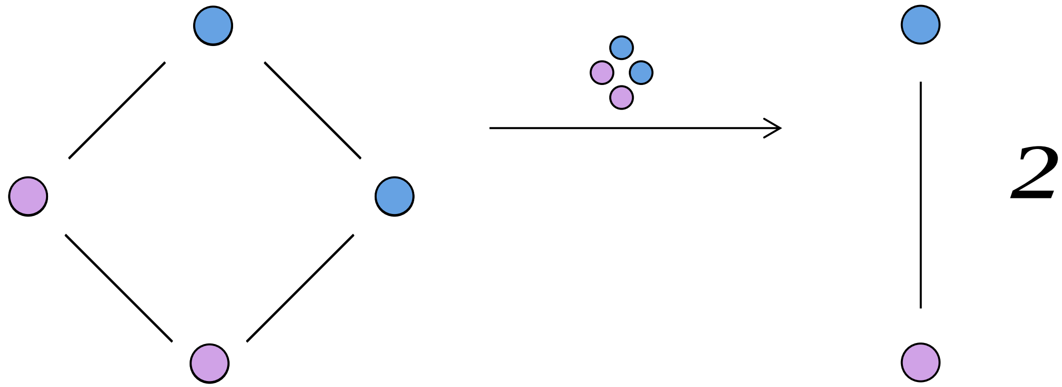
Algebre di Boole
(omomorfismi)





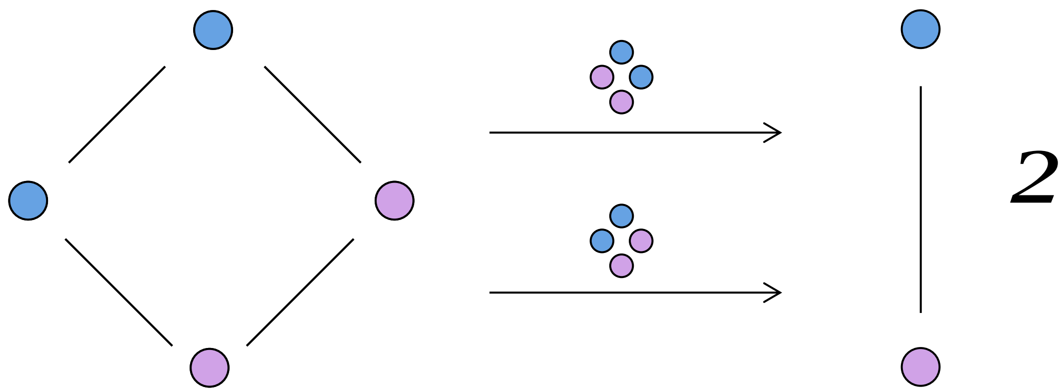
◇, ◆ ?!

Algebre di Boole
(omomorfismi)



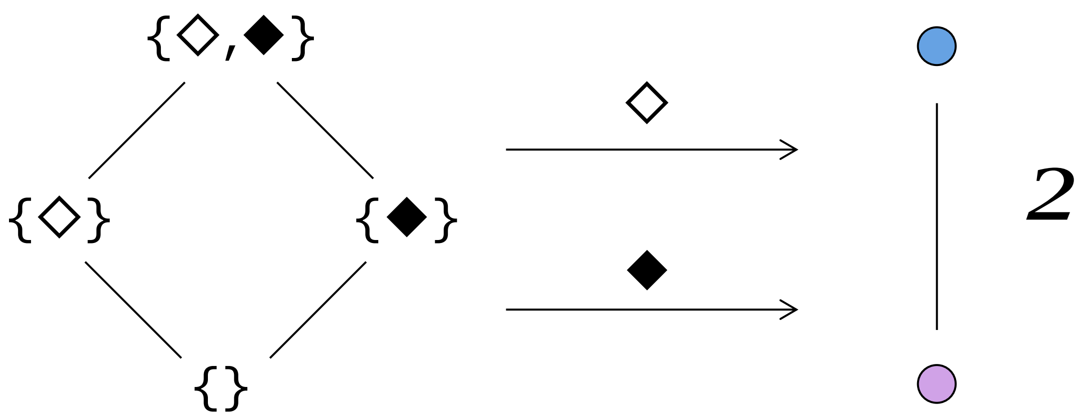
◇, ◆ ?!

Algebre di Boole
(omomorfismi)



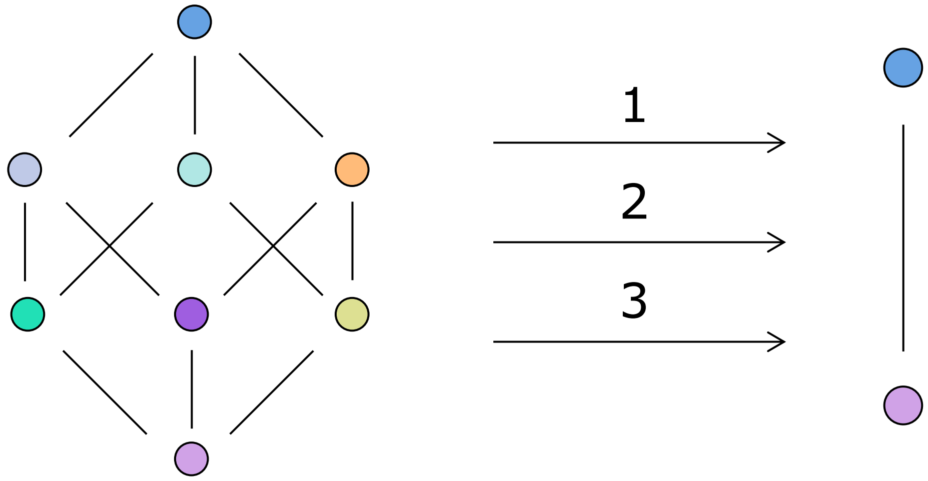
◇, ◆ ?!

Algebre di Boole
(omomorfismi)

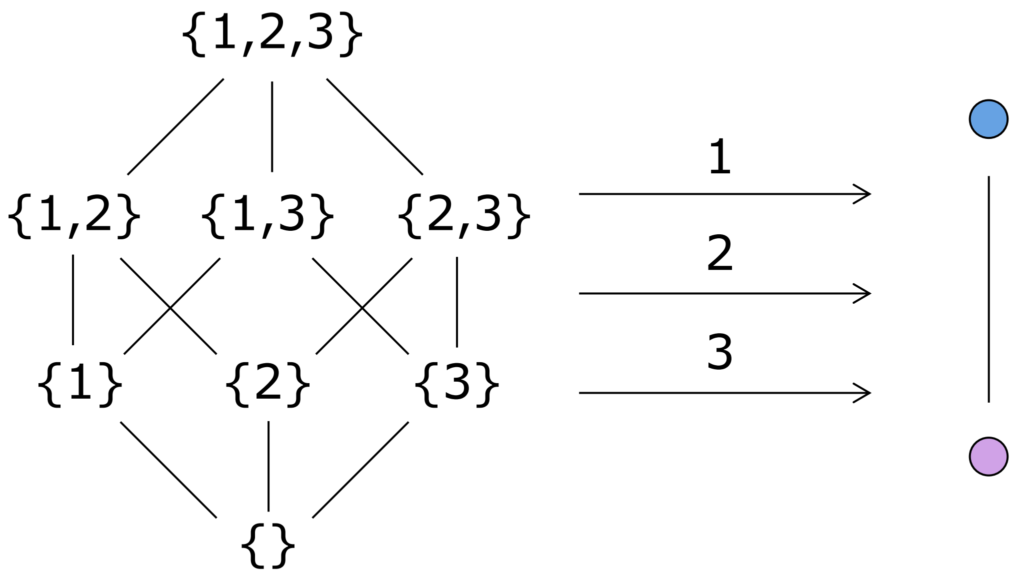


Algebre di Boole

(omomorfismi)

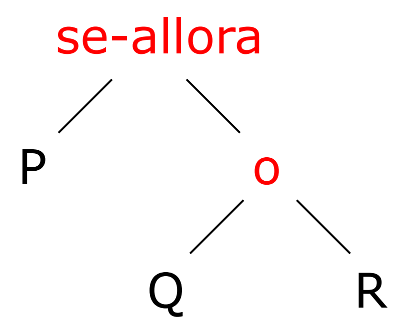


Algebre di Boole
(omomorfismi)



Connettivi logici

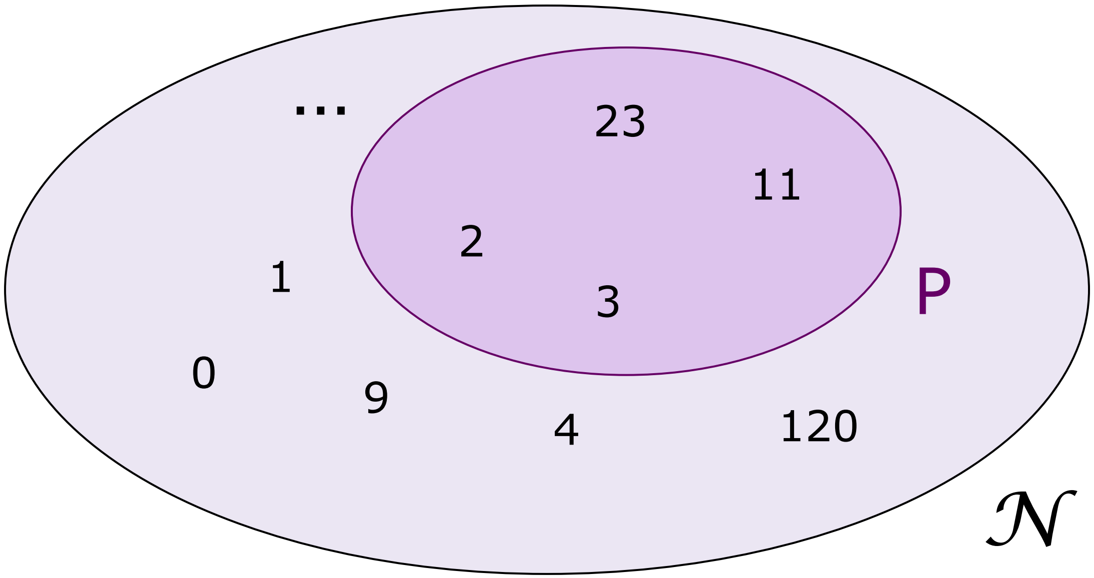
Se un numero è primo, allora è minore di 10 o è dispari



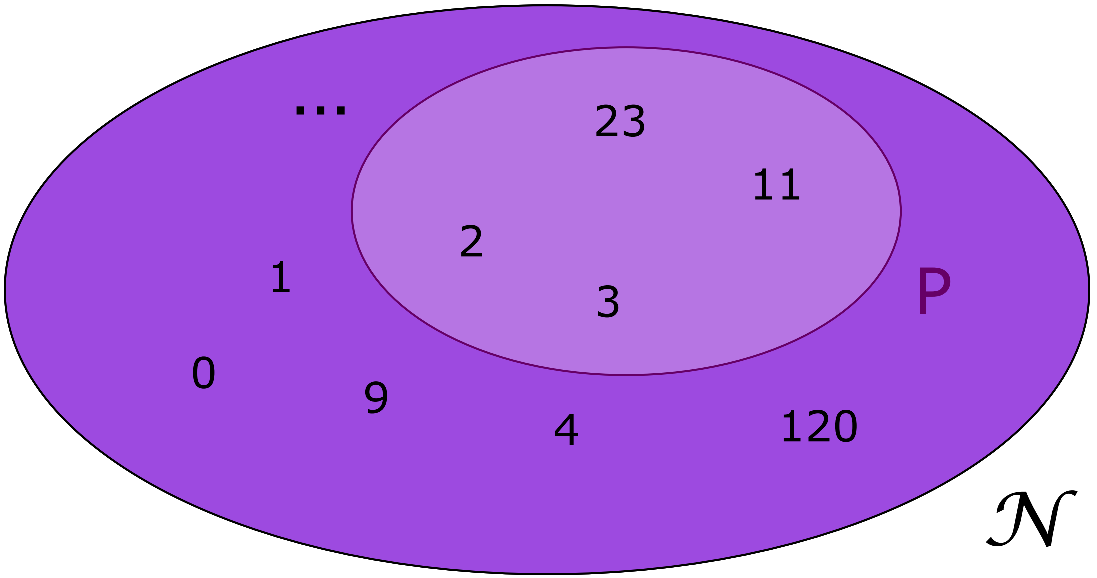
P = essere un numero primo

Q = essere minore di 10

R = essere dispari

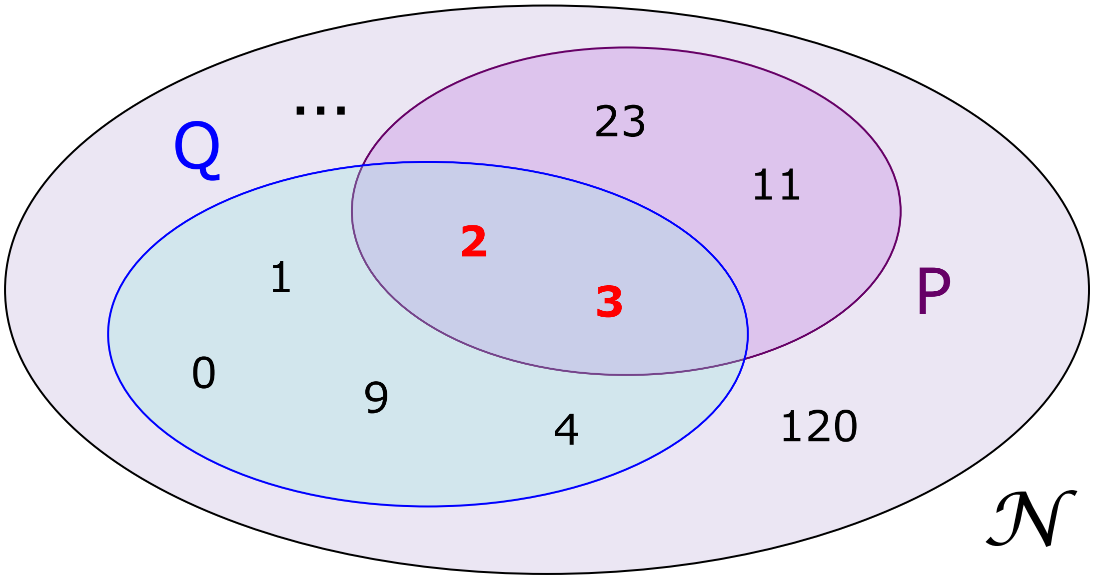


P = essere un numero primo



P = essere un numero primo

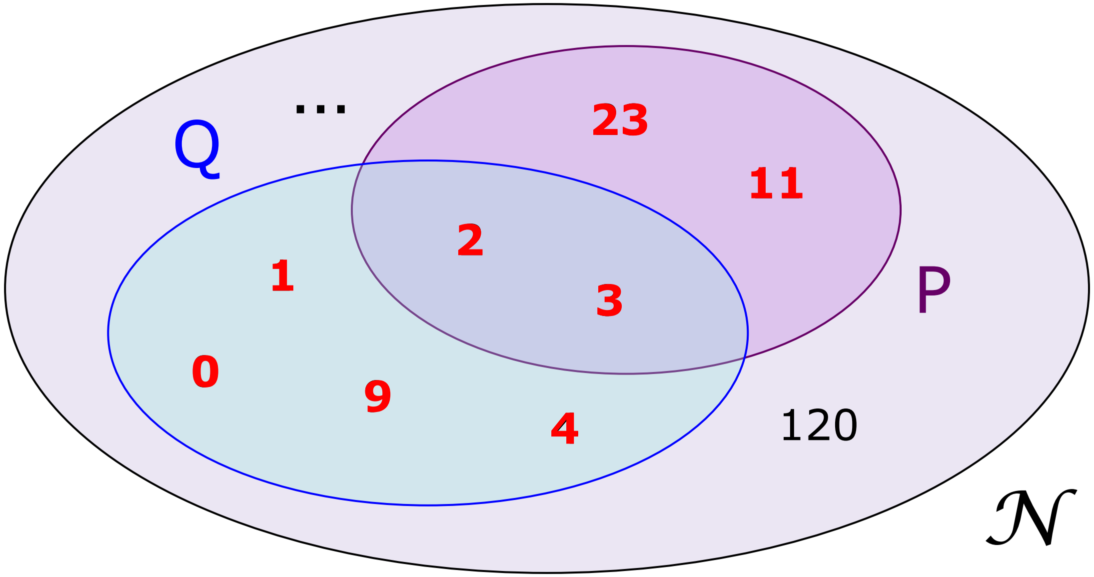
$\overline{\text{P}}$ = *non* essere un numero primo (*not*)



P = essere un numero primo

Q = essere minore di 10

P ∩ Q = essere un numero primo (*e*) minore di 10 (*and*)



P = essere un numero primo

Q = essere minore di 10

P ∪ Q = essere un numero primo *o* minore di 10 (*or*)

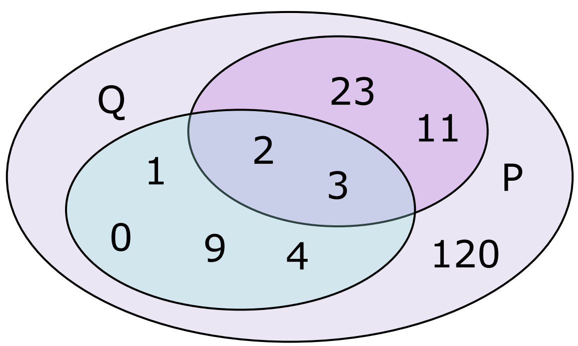
Logica	Insiemi	Algebre di Boole
	teorema di rappresentazione	
	Stone (1936)	
proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in* $\mathbf{2}$
and ($\wedge$)	*intersezione* ($\cap$)	*meet* ($\wedge$)
or ($\vee$)	*unione* ($\cup$)	*join* ($\vee$)
not ($\neg$)	*complemento* ($\overline{}$)	*complemento* ($\overline{}$)

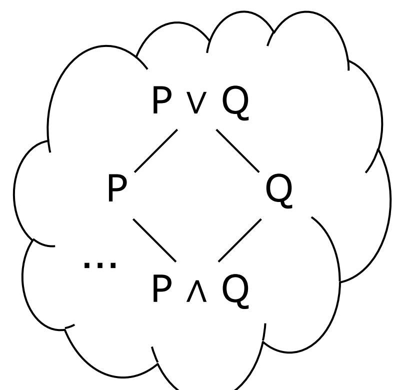
Logica	Insiemi	Algebre di Boole

teorema di rappresentazione

Stone (1936)

proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in 2*





P = essere un numero primo
Q = essere minore di 10

Logica | Insiemi | Algebre di Boole

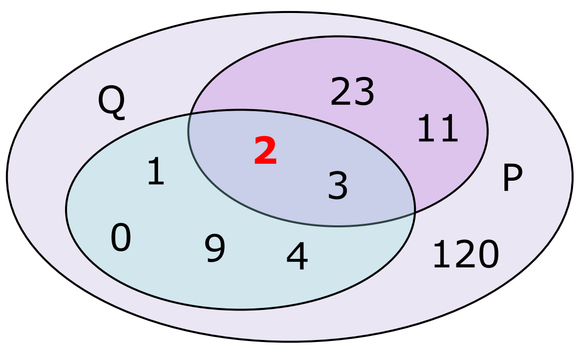
teorema di rappresentazione

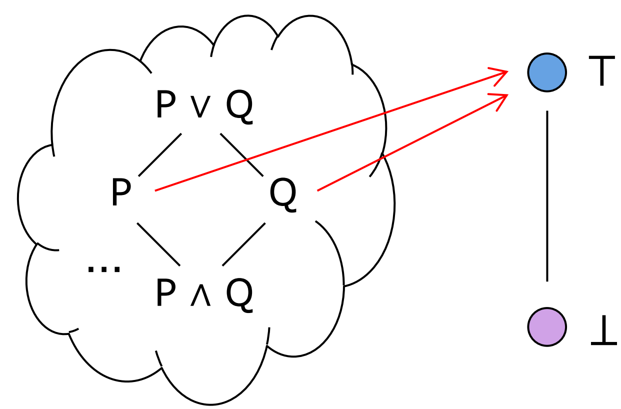
Stone (1936)

proposizioni | *sottoinsiemi* | *elementi*

modelli | *elementi* | *omomorfismi in 2*

$P \mapsto \top$
$Q \mapsto \top$
...





P = essere un numero primo
Q = essere minore di 10

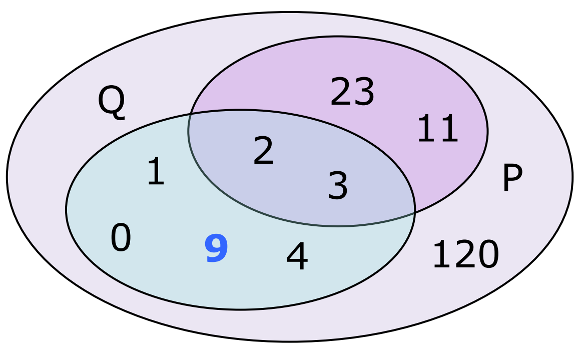
Logica	Insiemi	Algebre di Boole

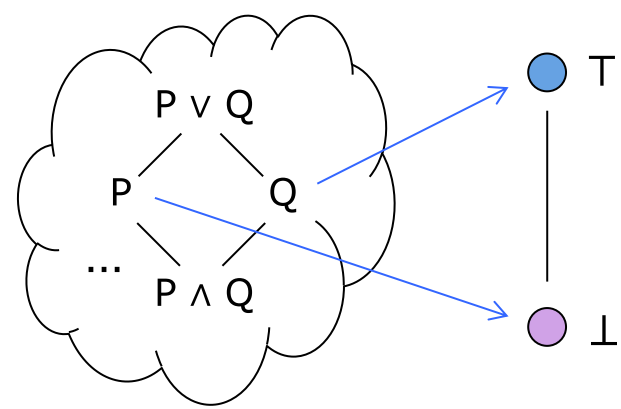
teorema di rappresentazione

Stone (1936)

proposizioni	*sottoinsiemi*	*elementi*
modelli	*elementi*	*omomorfismi in 2*

$P \longmapsto \perp$
$Q \longmapsto \top$
…





P = essere un numero primo
Q = essere minore di 10

Logica

Algebre di Boole

proposizioni

elementi

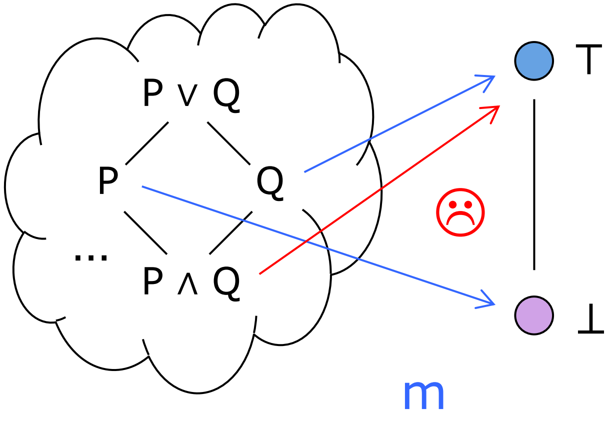
modelli

omomorfismi in 2

$P \mapsto \bot$
$Q \mapsto \top$
…

$P \wedge Q \mapsto$?

$$\begin{aligned} \bot &= \bot \wedge \top \\ &= m\ (P) \wedge m\ (Q) \\ &\neq m\ (P \wedge Q) = \top \end{aligned}$$



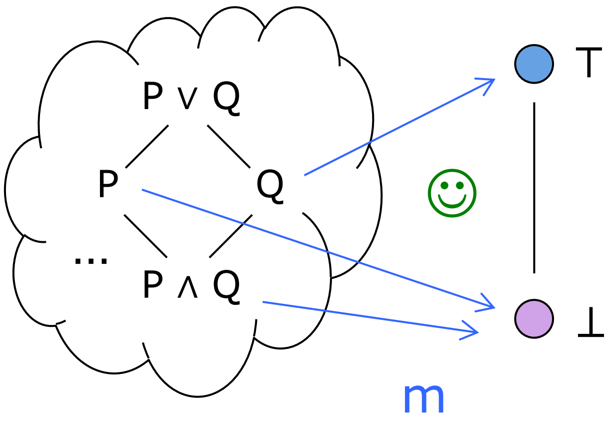
Logica	Algebre di Boole
proposizioni	*elementi*
modelli	*omomorfismi in 2*

$P \mapsto \perp$
$Q \mapsto \top$
…

$$P \wedge Q \mapsto m\,(P) \wedge m\,(Q)$$

$$P \vee Q \mapsto m\,(P) \vee m\,(Q)$$

$$\neg P \mapsto \overline{m\,(P)}$$



Logica

proposizioni

modelli

$P \wedge Q \longmapsto m\,(P) \wedge m\,(Q)$

$P \vee Q \longmapsto m\,(P) \vee m\,(Q)$

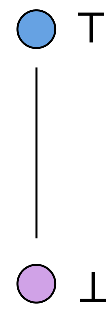
$\neg P \longmapsto \overline{m\,(P)}$

Algebre di Boole

elementi

omomorfismi in 2

P	Q	$P \wedge Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$



Logica

Algebre di Boole

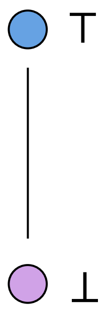
proposizioni

elementi

modelli

omomorfismi in 2

P	Q	$P \vee Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$



$$P \wedge Q \mapsto m(P) \wedge m(Q)$$

$$P \vee Q \mapsto m(P) \vee m(Q)$$

$$\neg P \mapsto \overline{m(P)}$$

Logica

proposizioni

modelli

$$P \wedge Q \longmapsto m\,(P) \wedge m\,(Q)$$

$$P \vee Q \longmapsto m\,(P) \vee m\,(Q)$$

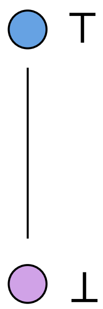
$$\neg P \longmapsto \overline{m\,(P)}$$

Algebre di Boole

elementi

omomorfismi in 2

P	$\neg P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$



Logica proposizionale

$$\text{proposizioni} \quad A, B, \ldots ::= \underbrace{P \mid Q \mid \ldots}^{\text{simboli proposizionali}} \mid A \vee B \mid A \wedge B \mid \neg A \mid \ldots$$

modelli m : *proposizioni* → {T, F} (*nota*: era {⊤, ⊥})

…tale che:

$$A \wedge B \mapsto m(A) \wedge m(B)$$

$$A \vee B \mapsto m(A) \vee m(B)$$

$$\neg A \mapsto \overline{m(B)}$$

oppure…

Logica proposizionale

simboli proposizionali

proposizioni A, B, … ::= P | Q | … | A ∨ B | A ∧ B | ¬ A | …

modelli m : *simboli proposizionali* → {T, F}

…e m (A) è calcolata attraverso le *tavole di verità*:

A	B	A ∧ B
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

A	B	A ∨ B
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

A	¬A
T	⊥
⊥	T