*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2023/2024 *Nome*______________________________
Scritto di ALGEBRA del 23/02/2024

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Si consideri la rappresentazione decimale $2x3$ di un certo numero intero N (x è dunque la cifra delle decine). Dire se tra tutti gli interi di tale forma ne esiste almeno uno tale che $N = 13x$.

Soluzione. Siccome $N = 2 \cdot 10^2 + x \cdot 10 + 3$ mentre x è tale che $0 \le x \le 9$ si ha sempre $N > 200 > 13x$ sicché l'equazione $N = 13x$ non ha soluzioni.

(**b**) Determinare, se ve ne sono, tutte le coppie (X, Y) di numeri interi che risolvono il sistema

$$\begin{cases} X \ - \ Y \equiv 0 \pmod 5 \\ X^4 + Y^4 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}.$$

Soluzione. Dalla prima equazione deduciamo che X e Y o sono entrambi multipli di 5 oppure entrambi primi con 5. Se fossero entrambi primi con 5, la seconda equazione sarebbe incompatibile per il Teorema di Fermat. Allora X e Y sono entrambi multipli di 5 sicché le coppie (X, Y) di numeri interi che soddisfano il sistema sono della forma $(5m, 5n)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$

(**c**) Dimostrare che i numeri interi $2n + 5$ e $5n + 13$ sono coprimi per ogni intero non negativo n.

Soluzione. Siccome sussiste l'identità di Bézout $-5(2n+5)+2(5n+13) = 1$ concludiamo che il massimo comune divisore dei numeri dati è 1.

Esercizio 2.

(**a**) Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ e $f(e_3) = f(e_1)$ dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si scriva la matrice A che rappresenta f, e si calcolino le prime 6 potenze di A a partire dall'esponente 1.

Soluzione. Si verifica che

$$A^3 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sicché le potenze si ripetono con periodo 2 e si ha $A = A^3 = A^5$ e $A^2 = A^4 = A^6$. Siccome la matrice A^2 è triangolare, i suoi autovalori sono gli elementi diagonali. L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 sicché solo per esso è necessario verificare l'uguaglianza delle molteplicità. Risolvendo il sistema (oppure direttamente) si verifica che e_2 e_3 sono autovettori relativi all'autovalore 1.

(**b**) Sia A la matrice del punto precedente. Discutere la diagonalizzabilità delle matrici A^2, A^4 e A^6.

Soluzione. La soluzione è già stata data al punto precedente. Qui discutiamo brevemente la soluzione del testo alternativo dove invece che richiedere $f(e_3) = f(e_1)$ richiediamo $f(e_3) = e_1$. In questo caso le potenze si ripetono con periodo 3 e si ha $A^3 = A^6 = I_3$. Le matrici A^2 e A^4 non sono diagonalizzabili in quanto il polinomio caratteristico non ha abbastanza radici reali.

(**c**) Siano $v_1, \dots v_5$ cinque vettori di uno spazio vettoriale V. Sia V_i lo spazio vettoriale generato da tutti i vettori dati tranne l'i-esimo, $i = 1, \dots, 5$. Si dimostri che $v_1, \dots v_5$ sono linearmente indipendenti se e solo se per ogni indice i si ha $v_i \notin V_i$.

Soluzione. Se i cinque vettori sono indipendenti, allora nessuno di essi appartiene allo spazio generato dai rimanenti. Abbiamo dunque dimostrato che

$$v_1, \dots v_5 \textit{ sono linearmente indipendenti} \Longrightarrow v_i \notin V_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Dimostriamo il viceversa. Basta dimostrare che se i cinque vettori dati sono linearmente dipendenti allora esiste almeno un indice i tale che $v_i \in V_i$. Infatti se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0$$

per certi λ_i non tutti nutti nulli, allora esiste un indice j tale che $\lambda_j \neq 0$. Portando $\lambda_j v_j$ all'altro membro e dividendo per $-\lambda_j$ defininiamo v_j come combinazione lineare dei rimanenti quattro vettori. Sicché $v_j \in V_j$ come volevasi.