Il teorema di Fermat

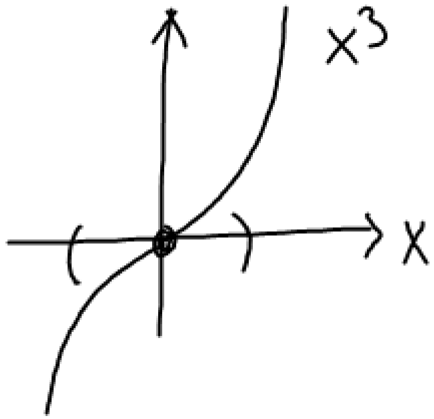
UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema di Fermat. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a,b)$ sia un punto di minimo o massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

Tutti i punti a tangente orizzontale verranno detti punti **stazionari** o **critici**.

Non tutti i punti critici sono massimi o minimi locali!

$$f(x) = x^3$$



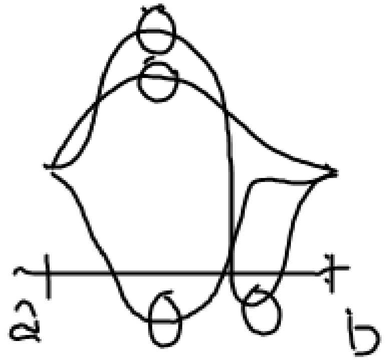
$(x^3)' = 3x^2$

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.



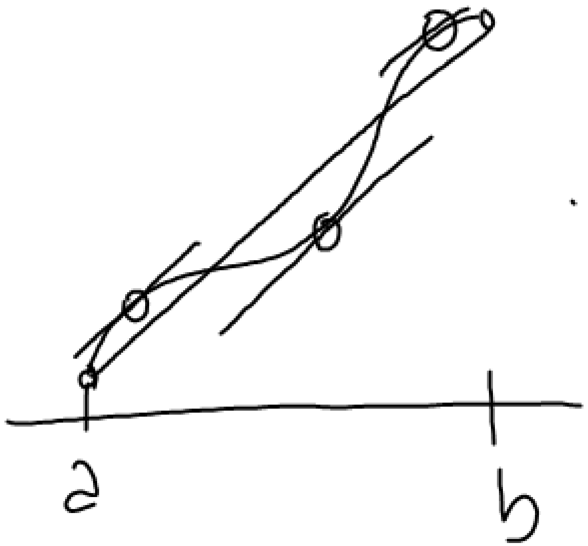
- se $f(a) = f(x) = f(b), \forall x \in (a, b)$, la tesi è provata
- altrimenti almeno uno tra massimo e minimo di f,

Il teorema di Lagrange

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema di Lagrange. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b).
Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Alcuni corollari

Corollario.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) tale che

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

allora $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$.

$\exists\, x, y \in [a,b]$ tali che $f(x) \neq f(y)$ $(x \neq y)$

$$0 \neq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(p) = 0 \quad p \in [x,y] \subseteq [a,b].$$

Alcuni corollari

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Corollario.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
Allora se $x_1 < x_2$ segue

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2,\ \Rightarrow \quad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}} = f'(p) > 0 \quad p \in (x_1, x_2) \subseteq [a,b]$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0.$