UNITELMA SAPIENZA

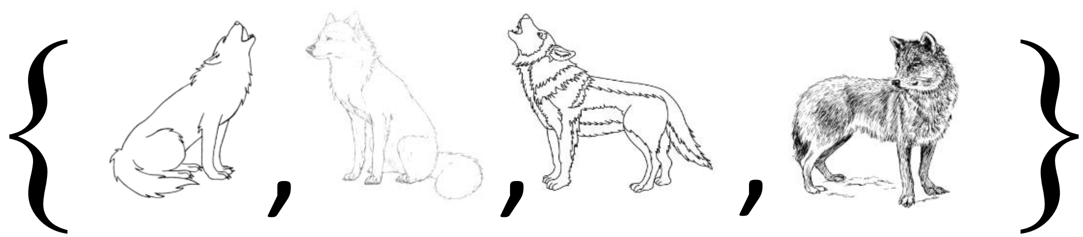
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

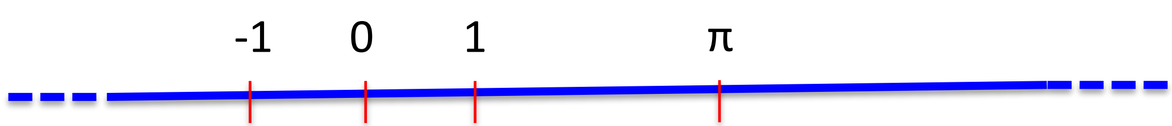
Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 1 - Estensione e specificazione di un insieme

Docente: Pietro Cenciarelli

“Un branco di lupi, un grappolo d’uva o un volo di colombi sono tutti esempi di insiemi di oggetti”
(Paul R. Halmos – Naive Set Theory)





{{✂}, {{}}, {{{♡, ♢, ♧, ♤}}, {✂}}, ☂}

{} 0

{{}} 1

{{}, {{}}} 2

{{}, {{}}, {{}, {{}}}} 3

3

John von Neumann
Budapest - 1923
(a 20 anni!)

{{ }, {{}}, {{{ }}, { }} }

Assioma di *estensione*

$$\{\{\}, \{\{\}\}\} = \{\{\{\}\}, \{\}\}$$

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

Relazione di appartenenza (∈)

A = {{✂}, {{}}, {{{♡, ♢, ♧, ♤}}, {✂}}, ☂}

☂ ∈ A

✂ ∉ A

{✂} ∈ A

{{✂}, ☂} ∉ A

Relazione di sottoinsieme (⊆)

B ⊆ A *se e solo se ogni elemento di B è anche elemento di A*

A = {{✂}, {{}}, {{{♡, ♢, ♧, ♤}}, {✂}}, ☂}

{{✂}, ☂} ⊆ A

{{✂}} ⊆ A

{✂} ⊈ A

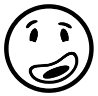
{{}} ⊈ A

{} ⊆ A

A ⊆ A

Elemento e sottoinsieme?! 

$\{\}$	0
$\{\{\}\}$	1
$\{\{\}, \{\{\}\}\}$	2
$\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$	3

$2 \in 3$ ma anche $2 \subseteq 3$!  ...

Una conseguenza dell’assioma di estensione:

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$.

Quindi, per dimostrare che due insiemi sono uguali, basta dimostrare che tutti gli elementi del primo appartengono anche al secondo, e viceversa.

Predicati

Gilberte Swann ha gli occhi neri.

Avere occhi neri è una caratteristica che alcune persone hanno, altre no.

Gilberte Swann ✔

Regina Ginevra ✖

Predicati

Gilberte Swann ha gli occhi neri.

Avere occhi neri è una caratteristica che alcune persone hanno, altre no.

In Logica, una proprietà astratta (come *avere occhi neri*) riferita agli elementi di un insieme A (per esempio l'insieme delle persone) si chiama *predicato* su A.

Se P è un predicato su A, indicando con *x* un generico elemento dell'insieme A, scriviamo P(x) per indicare che "*x gode della proprietà P*".

Se P è un predicato su A, si indica con $\{x \in A : P(x)\}$ l'insieme degli elementi di A che godono della proprietà P.

Predicati (sui lupi)

{  } = A

P(x) = “x è un lupo contento”

$\{x \in A : P(x)\}$ = {  }

Se P è un predicato su A, si indica con $\{x \in A : P(x)\}$ l’insieme degli elementi di A che godono della proprietà P.

Predicati

Predicati “elementari” (atomici) P(x), Q(x), R(x)... su un insieme A possono essere combinati mediante *connettivi logici* per costruire frasi complesse, che predicano anch’esse sugli elementi di A:

P(x) *e* Q(x) P(x) *o* Q(x) *not* P(x)

se P(x) *allora* Q(x) P(x) *se e solo se* Q(x) ...

P(x) e (se Q(x) allora R(x) o not P(x))

Predicati (sui lupi)

{  ,  ,  ,  ,  } = A

P(x) = “x è un lupo contento”

Q(x) = “x tiene la bocca chiusa”

$\{x \in A : P(x)$ e $Q(x)\}$ = {  ,  }

Assioma di *specificazione*

Ad ogni insieme A e ad ogni frase ϕ (x) che predica sugli elementi x di A corrisponde un insieme $\{x \in A : \phi(x)\}$ i cui elementi sono esattamente quelli di A che soddisfano ϕ.

Assioma di *specificazione*

{  } = A

{x∈A : se x non ride allora x tiene la bocca chiusa}

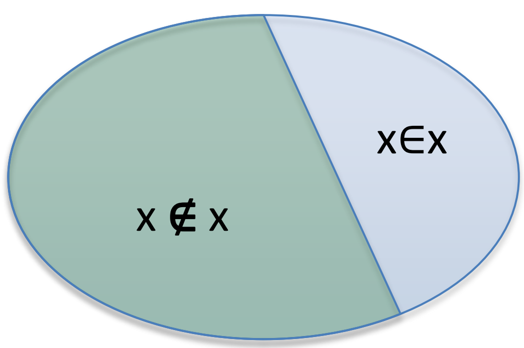
{  }

Assioma di *specificazione*

(una interessante conseguenza)

prendiamo un insieme A *qualunque*

e sia B l'insieme $\{x \in A : x \notin x\}$



$B \subseteq A$

$B \in A$?

Se $B \in A$ allora può stare:

o in B, ma allora $B \in B$,

o fuori, ma allora $B \notin B$.

dunque… $B \notin A$

Assioma di *specificazione*

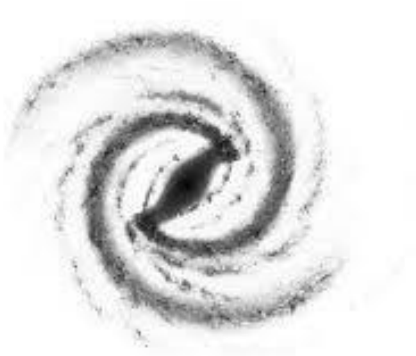
(una interessante conseguenza)

prendiamo un insieme A *qualunque*

e sia B l'insieme $\{x \in A : x \notin x\}$.

$B \notin A$

Ovvero: *qualunque* insieme prendiamo, c'è sempre qualcosa che non gli appartiene e dunque…



…l’universo non esiste!