Rappresentazione dei numeri razionali: Virgola Fissa

Prof. Daniele Gorla

Numeri razionali in virgola fissa

Sempre un sistema posizionale in base b (≥ 2).
Le prime m cifre rappresentano la parte intera, le successive n la parte frazionaria.

$$c_{m-1}\dots c_1 c_0 , c_{-1} c_{-2} \dots c_{-n} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i b^i + \sum_{i=-1}^{-n} c_i b^i = \sum_{i=0}^{m-1} c_i b^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{-i}}{b^i}$$

con $c_i \in \{ 0 , \dots , b\text{-}1 \}$.

ES. (base 10): 24,865 = $2\times10^1+4\times10^0+8\times10^{-1}+6\times10^{-2}+5\times10^{-3}$

Quindi, un numero razionale N è una coppia

$$< Ni , Nf >$$

formata da una parte intera (Ni) e una frazionaria (Nf)

Cambiamento di base

Trasformare $< Ni , Nf >_a$ in $< Ni', Nf' >_b$

- Per la parte intera, segue il procedimento di cambiamento di base per numeri naturali
- Per la parte frazionaria, procediamo in maniera simile:
  - se la base di arrivo è 10, usa il *metodo polinomiale*
  - se la base di partenza è 10, usa un metodo di *moltiplicazioni iterate* (vedi dopo)
  - altrimenti, effettua due conversioni:
    - una da base a a base 10 (metodo polinomiale)
    - l'altra da base 10 a base b (moltiplicazioni iterate)

Metodo polinomiale (da base b a base 10)

$$c_{m-1}\dots c_1 c_0 , c_{-1} c_{-2} \dots c_{-n} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i b^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{-i}}{b^i}$$

Esempio: convertire $1011{,}011_2$ in base 10

$$1011{,}011_2 = \left(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)_{10}$$

$$= \left(8+2+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)_{10} = \left(11+\frac{2+1}{8}\right)_{10} = \left(11+\frac{3}{8}\right)_{10} = 11{,}375_{10}$$

Conversione della parte frazionaria (da base 10 a base b)

Diciamo di voler convertire un numero frazionario puro

$$F = 0,c_{-1}\, c_{-2} \ldots c_{-n}$$

Sappiamo che F rappresenta il numero

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_{-i}}{b^i} = \frac{c_{-1}}{b} + \frac{c_{-2}}{b^2} + \frac{c_{-3}}{b^3} + \ldots + \frac{c_{-(n-1)}}{b^{n-1}} + \frac{c_{-n}}{b^n}$$

Se moltiplichiamo F per b otteniamo

$$b \cdot F = c_{-1} + \frac{c_{-2}}{b} + \frac{c_{-3}}{b^2} + \ldots + \frac{c_{-(n-1)}}{b^{n-2}} + \frac{c_{-n}}{b^{n-1}}$$

cioè un numero della forma $c_{-1}\,,c_{-2} \ldots c_{-n}$

Quindi, $b{\cdot}F$ è un numero la cui parte intera è la prima cifra frazionaria di F e la cui parte frazionaria è formata dalle restanti cifre frazionarie di F.

Conversione della parte frazionaria (da base 10 a base b)

A questo punto, iteriamo sul numero frazionario puro

$$F^{(2)} = 0,c_{-2}\, c_{-3} \ldots c_{-n}$$

Se moltiplichiamo $F^{(2)}$ per b otteniamo

$$b \cdot F^{(2)} = c_{-2} + \frac{c_{-3}}{b} + \frac{c_{-4}}{b^2} + \ldots + \frac{c_{-(n-1)}}{b^{n-3}} + \frac{c_{-n}}{b^{n-2}}$$

cioè un numero della forma $c_{-2}\,,c_{-3} \ldots c_{-n}$

Itera questo procedimento finché:

- $F^{(k)} = 0$, per qualche k *(N.B.: diversamente dal metodo di divisioni iterate, questo non sempre avviene)*
- oppure ottieni una parte periodica (che si ripete all'infinito)
- oppure hai raggiunto il massimo numero di cifre disponibili per la rappresentazione della parte frazionaria in base b

Esempio:

Convertire $17{,}416_{10}$ in base 2 con 8 bit sia per P.I. che per P.F.

1. Converti parte intera (*divisioni iterate*):

   17:2 = 8 resto 1   8:2 = 4 resto 0   4:2 = 2 resto 0
   2:2 = 1 resto 0   1:2 = 0 resto 1

   Quindi, $17_{10} = 10001_2$

2. Converti parte frazionaria (*moltiplicazioni iterate*):

$0{,}416 \times 2 = 0{,}832$	da cui	P.I. = 0	P.F. = 0,832
$0{,}832 \times 2 = 1{,}664$	da cui	P.I. = 1	P.F. = 0,664
$0{,}664 \times 2 = 1{,}328$	da cui	P.I. = 1	P.F. = 0,328
$0{,}328 \times 2 = 0{,}656$	da cui	P.I. = 0	P.F. = 0,656
$0{,}656 \times 2 = 1{,}312$	da cui	P.I. = 1	P.F. = 0,312
$0{,}312 \times 2 = 0{,}624$	da cui	P.I. = 0	P.F. = 0,624
$0{,}624 \times 2 = 1{,}248$	da cui	P.I. = 1	P.F. = 0,248
$0{,}248 \times 2 = 0{,}496$	da cui	P.I. = 0	P.F. = 0,496

Perciò $0{,}416_{10} = 0{,}01101010_2$

Quindi, $17{,}416_{10} = 00010001{,}01101010_2$

Attenzione:

il numero così ottenuto è un'approssimazione (inferiore) del numero di partenza (ci siamo fermati quando la parte frazionaria non era ancora 0)

Infatti:

$$00010001{,}01101010_2 = 2^4 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}$$

$$= 17 + \frac{2^5 + 2^4 + 2^2 + 1}{2^7} = 17 + \frac{32+16+4+1}{128} = 17 + \frac{53}{128}$$

$$= 17{,}4140625 < 17{,}416$$

Esempio (con periodicità):

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Convertire $120{,}03_{10}$ in base 5

1. Converti parte intera (*divisioni iterate*):

   120:5 = 24 resto 0   24:5 = 4 resto 4   4:5 = 0 resto 4

   Quindi, $120_{10} = 440_5$

2. Converti parte frazionaria (*moltiplicazioni iterate*):

$0{,}03 \times 5 = 0{,}15$	da cui	P.I. = 0	P.F. = 0,15
$0{,}15 \times 5 = 0{,}75$	da cui	P.I. = 0	P.F. = 0,75
$0{,}75 \times 5 = 3{,}75$	da cui	P.I. = 3	P.F. = 0,75
$0{,}75 \times 5 = 3{,}75$	da cui	P.I. = 3	P.F. = 0,75

…

Perciò $0{,}03_{10} = 0{,}00333\ldots_5$

Quindi, $120{,}03_{10} = 440{,}00\overline{3}_5$

9

Conversione opposta (con periodicità):

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Convertire $0{,}0\overline{3}$ da base 5 a base 10.

Applichiamo il metodo polinomiale:

$$0{,}0\overline{3}_5 = \left(\frac{0}{5^1} + \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \ldots\right)_{10} = \sum_{i>1} \frac{3}{5^i} = 3\sum_{i>1}\frac{1}{5^i}$$

$$= 3\left(\sum_{i>0}\frac{1}{5^i} - \frac{1}{5}\right) = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{20} = 0{,}15_{10}$$

dove abbiamo usato la serie geometrica: $\sum_{i>0} \frac{1}{c^i} = \frac{1}{c-1}$
(per $c > 1$)

10

Problemi della rappresentazione in virgola fissa

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

L'intervallo dei reali rappresentabile è piccolo e con approssimazioni grossolane

<u>Esempio:</u> avendo a disposizione 32 bit e assegnandone 20 per la P.I. (in Ca2) e 12 per la P.F. si ha

- P.I. $\in \{-2^{19}+1, \ldots, 2^{19}-1\} = \{-524.287, \ldots, 524.287\}$
- la P.F si hanno a disposizione al più 4 cifre frazionarie in base 10 (infatti $2^{-12} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}00025$)

Ovviamente, si può ridurre la P.I. a favore della P.F., per aumentare la precisione (di poco però), a scapito dell'ampiezza dell'intervallo

In ogni caso, ***non è una rappresentazione adeguata per calcoli scientifici reali!!***