



# Probabilità

Marco Isopi

## 17. Valore atteso

Eventi  $\longrightarrow$  v.2.

Dado 6 facce medio?

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Valore atteso di una v.d.,

$$E(X) = \sum_{w \in S} X(w) P(\{w\})$$

$$E(X) = \sum_x x P(X=x)$$

Varieabili di Bernoulli

$$P(X=1)=p \quad P(X=0)=1-p$$

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$E(X) = P(X=1)$$



Dado a  $N$  facce  $X = \text{punteggio}$

$$E(X) = \sum_k k P(X=k) = \sum_{j=1}^N j P(X=j)$$

$$= \sum_{j=1}^N j \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$X \sim B(n, p) \quad \left| \quad K \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \right.$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$n p \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = n p \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = n p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} \stackrel{=1}{=} n p$$

$m = n-1, j = k-1$

$q = 1-p$

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow E(X) = np$$

---

Moneta:  $P(T) = \frac{3}{5}$ , 15 lanci

$$X \equiv \# \text{ teste} \quad E(X) = 15 \cdot \frac{3}{5} = 9$$



$X$  v.d. degenerate  $P(X=c)=1$

$$E(X)=c$$

---

$$\begin{aligned} E(aX) &= \sum_{\omega \in S} (aX)(\omega) P(\omega) = \\ &= a \sum_{\omega \in S} X(\omega) P(\omega) = a E(X) \end{aligned}$$



$$E(X+b) = E(X) + b$$

---

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

120 persone - 3 bus

36, 40, 44 /  $X = \#$  persone sul bus di quella scelta a caso.

~~$E(X) = 40$~~

$$E(X) = 36 \cdot P(X=36) + 40 \cdot P(X=40) + 44 \cdot P(X=44) = 36 \cdot \frac{36}{120} + 40 \cdot \frac{40}{120} + 44 \cdot \frac{44}{120}$$

$$\approx 40.27 > 40$$

Gioco E QVO

$E(\text{premio}) = \text{prezzo per giocare}$

Esempio: una moneta da test con  
prob.  $p$

$T = > 10 \text{ €}$  quanto devo pagare per  
giocare?

$X = \text{vincita}$

$$E(X) = p \cdot 10 = 10p$$

il gioco sarà equo e per giocare paga  
 $10 \cdot p$



Dado a 6 facce

- se esce pari vinco la somma di  
tanti € quanti indicati nel punteggio
- se esce dispari perdo quanto indicato  
nel punteggio

$X$  = somma vinta

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1) \cdot \frac{1}{6} + 2 \left( \frac{1}{6} \right) + (-3) \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + (-5) \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

il gioco è equo se per giocare  
si paga  $\frac{1}{2}$

$$X \text{ r.v.} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(X) \text{ r.v.} \quad E(f(X)) = ?$$

$$\sum_g g P(f(X)=g)$$

$$E(f(X)) = \sum_x f(x) P(X=x)$$