UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

14. Il procedimento di eliminazione di Gauss

Richiami

- Alcune manipolazioni di un sistema di equazioni lineari non ne cambiano l'insieme di soluzioni
- Queste manipolazioni ci permettono di trovare facilmente le soluzioni (almeno in un esempio)
- Oggi: **Queste manipolazioni ci permettono di risolvere ogni sistema di equazioni lineari?**
- **Il procedimento (o algoritmo) di eliminazione di Gauss**

Matrice dei coefficienti

La lezione scorsa, abbiamo visto come applicare delle manipolazioni alle equazioni di un (particolare, per il momento) sistema lineare per giungere alle sue soluzioni. Le manipolazioni utilizzate sono:

- Permutazione delle equazioni
- Moltiplicazione di una delle equazioni per un numero (reale) invertibile
- Somma ad un'equazione di una delle altre equazioni (o di un suo multiplo)

Per effettuare queste manipolazioni, non abbiamo bisogno di scrivere completamente il sistema dato, ma solo di conoscere i suoi coefficienti:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminazione in forma matriciale

Il procedimento descritto l'altra volta diventa molto più compatto:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Avvertenze - I

Occorre però prestare un po' di attenzione:

- quando sommiamo un'equazione ad un'altra, i coefficienti che sommiamo devono descrivere quantità analoghe: è bene quindi scrivere i coefficienti seguendo un ordine prestabilito per le incognite
- quando un incognita non compare, bisogna scrivere 0 al posto del suo coefficiente
- i termini noti vanno considerati (convenzionalmente) sempre a secondo membro

Ad esempio, una volta presa la decisione si scrivere prima la x, poi la y e infine la z, abbiamo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 2z - x = 3 \\ z - x - 4 = 0 \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Avvertenze - II

Una volta accettate le convenzioni, le nostre manipolazioni permettono davvero di risolvere ogni sistema di equazioni lineari?

Proviamo a risolvere questo sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Avvertenze - III

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&9\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-3\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Il sistema di partenza è quindi equivalente a

$$\begin{cases}x+2y+3z=4\\-y-2z=-3\\0=3\end{cases}$$

Cosa dobbiamo concludere? **Che il sistema di partenza non ha soluzioni, ovviamente!**

L’algoritmo - I

Posso finalmente descrivere l’algoritmo detto procedimento di eliminazione di Gauss. Invece di parlare di sistemi di equazioni lineari, mi riferirò solo a matrici.

1. Se sulla prima colonna della matrice sono presenti solo coefficienti uguali a 0, rimuovere la prima colonna dalla matrice. Se si ottiene la matrice vuota, andare al passo 5; altrimenti, riprendere dal passo 1.
2. Se il primo coefficiente della prima colonna è uguale a 0, effettuare una permutazione delle righe in modo che il primo coefficiente della prima colonna sia diverso da 0.
3. Sottrarre dalle righe successive alla prima degli opportuni multipli della prima riga in modo che il loro primo coefficiente diventi 0.
4. Privare la matrice della prima riga e della prima colonna. Se si ottiene la matrice vuota, andare al passo 5; altrimenti riprendere dal passo 1.

L’algoritmo termina

Ogni volta che l’algoritmo torna al passo 1, abbiamo eliminato una colonna; di conseguenza, dopo un numero finito di ritorni, si esce dai primi quattro passi per andare al passo numero 5, che non abbiamo ancora descritto.

Cosa vuol dire rimozione? Ogni volta che eliminiamo righe e/o colonne, intendiamo che la parte di matrice che viene rimossa **non viene più toccata dall’algoritmo**, che si concentrerà da quel momento in poi solo sulla parte residua. Dopo un numero finito di passi, l’algoritmo smetterà di modificare i coefficienti della matrice, e uscirà verso il passo 5.

Un esempio - I

Vediamo un esempio di esecuzione dell'algoritmo. Partiamo dal sistema lineare e scriviamo la matrice

$$\begin{cases} 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

ed iniziamo ad applicare i passi del procedimento.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{0} & 0 & 2 & 3 & -2 \\ \color{red}{2} & 3 & -1 & 2 & 5 \\ \color{red}{4} & 6 & 2 & 11 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \color{red}{2} & 3 & -1 & 2 & 5 \\ \color{red}{0} & 0 & 2 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 6 & 2 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \color{red}{2} & 3 & -1 & 2 & 5 \\ \color{red}{0} & 0 & 2 & 3 & -2 \\ \color{red}{0} & 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Un esempio - II

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Forma a gradoni e pivot

I primi quattro passi dell'algoritmo hanno messo la matrice in una forma a gradoni. Il primo elemento non nullo di ciascuna riga (non completamente nulla) si chiama pivot. Ad esempio, i pivot della matrice (in forma a gradoni) che segue sono colorati di rosso.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Se uno dei pivot si trova sull'ultima colonna (quella dei termini noti), possiamo già affermare con certezza che il sistema di partenza non possiede soluzioni ed evitare di procedere oltre.

I passi successivi dell'algoritmo si occupano di annullare tutti i coefficienti che si trovano direttamente al di sopra di qualche pivot. Vediamoli!

L'algoritmo - II

5. Se direttamente al di sopra di ciascun pivot vi sono solamente coefficienti nulli, uscire. Altrimenti, individuare la riga dell'ultimo, tra i pivot, direttamente al di sopra dei quali è presente qualche coefficiente non nullo.
6. Sommare multipli di tale riga alle righe precedenti in modo da rendere nulli tutti i coefficienti al di sopra di tale pivot.
7. Tornare al passo 5.

Eseguiamo questa seconda parte sul nostro esempio

Un esempio - III

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 0 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Come troviamo le soluzioni? - I

Una volta eseguita anche la seconda parte dell'algoritmo, siamo nelle condizioni di risolvere il sistema originario. Portiamo le incognite relative alle colonne sulle quali non compaiono pivot a secondo membro.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3/2 & 0 & 0 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -17/2 - 3/2\, x_2 \\ x_3 = -10 \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

In questa forma, il sistema calcola le incognite con pivot in termini delle incognite senza pivot: per ogni scelta del valore delle incognite senza pivot otteniamo un unico e ben determinato valore delle incognite con pivot che fornisce una soluzione.

Si ottiene in questo modo una parametrizzazione delle soluzioni del sistema originario in termini delle incognite che sono prive di pivot al termine del procedimento di eliminazione.

Come troviamo le soluzioni? - II

In generale, per risolvere un sistema di equazioni lineari procediamo in questo modo:

- Scriviamo la matrice associata al sistema lineare.
- Eseguiamo la prima parte del procedimento di eliminazione, mettendo la matrice nella forma a gradoni.
- Se compare un pivot nella colonna dei termini noti, il sistema non ha soluzione, e abbiamo terminato.
- Altrimenti, procediamo ad annullare i coefficienti al di sopra di ciascun pivot.
- Portiamo (i termini relativi al)le incognite senza pivot a secondo membro.
- Leggiamo le soluzioni, parametrizzate in termini delle incognite senza pivot. Se non vi sono incognite senza pivot, la soluzione è unica.

Osservazioni finali

Un'ultima osservazione importante: il procedimento di eliminazione che abbiamo appena imparato serve a trovare le soluzioni reali di sistemi di equazioni lineari. L'algoritmo può essere tuttavia applicato a sistemi di equazioni lineari in cui le incognite (e quindi anche i coefficienti) appartengano ad un altro anello.

L'esecuzione dell'algoritmo richiede il calcolo di somme e prodotti (sommo ad una riga un multiplo di un'altra), ma anche di divisioni. In effetti, è possibile calcolare quale multiplo di una data riga sommare o sottrarre ad un'altra, per annullare un dato coefficiente, solamente effettuando una divisione tra i due coefficienti coinvolti.

In conclusione, il procedimento di eliminazione di Gauss permette la risoluzione di sistemi di equazioni lineari nei quali coefficienti e soluzioni appartengono ad un campo prefissato.

Vedremo nelle prossime lezioni campi diversi da quello dei numeri reali.