UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

9bis. Due problemi classici

Scopo della lezione

L'obiettivo della lezione è di presentare due problemi classici con eventi equiprobabili:

- il problema dei compleanni,
- il problema degli accoppiamenti.

Problema dei compleanni

Formulazione:

A una cena sono presenti *n* persone.

Qual è la probabilità che celebrino tutte il compleanno in giorni diversi?

Quanto grande deve essere *n* perché questa probabilità sia minore di $\frac{1}{2}$?

Problema dei compleanni

Soluzione:

Ci sono 365 giorni in un anno, quindi i casi possibili sono 365^n.

Ora contiamo i casi favorevoli. Ci sono 365 scelte accettabili per il compleanno della prima persona, 364 per quello della seconda e così via.

Pertanto i casi favorevoli sono $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$.

Problema dei compleanni

Quindi la probabilità richiesta è

$$\mathbf{P}(\text{compleanni tutti diversi}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Se $n \geq 23$, allora questa probabilità è minore di $\frac{1}{2}$.

Nota: abbiamo dato una formulazione del problema che costituisce un'idealizzazione della situazione reale. Oltre a trascurare gli anni bisestili, abbiamo assunto che la proabilità di nascere in un qualunque giorno dell'anno sia la stessa.

Problema degli accoppiamenti

Formulazione:

Alla termine della cena ognuno degli *n* partecipanti si riprende un cappello, ma dato che hanno tutti bevuto molto, ne prende uno a caso.

Con quale probabilità nessuno riprende il proprio cappello?

Soluzione:

Calcoliamo la probabilità dell'evento complementare: almeno un convitato riprende il proprio cappello.

Chiamiamo A questo evento e chiamiamo A_i l'evento {l'i-esimo convitato riprende il proprio cappello}.

Quindi

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Problema degli accoppiamenti

Sappiamo che

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

$$+(-1)^{n+1}\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Problema degli accoppiamenti

Per il singolo convitato abbiamo $\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{n}$.

Per due convitati: $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \frac{2}{n(n-1)}$.

In generale per ℓ convitati,

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_\ell}) = \frac{(n-\ell)!}{n}.$$

Problema degli accoppiamenti

Visto che ci sono $\binom{n}{\ell}$ modi di scegliere ℓ convitati fra n, nella somma i termini che si riferiscono a ℓ commensali pesano in totale $\binom{n}{\ell}\frac{(n-\ell)!}{n} = \frac{1}{\ell!}$.

Quindi

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Problema degli accoppiamenti

E infine, ricordando che siamo interessati alla probabilità di A^c,

$$\mathbf{P}(\text{nessun convitato riprende il proprio cappello}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$