

# Introduzione agli Algoritmi

## Esame Scritto a canali unificati

docenti: T. Calamoneri, A. Monti  
Sapienza Università di Roma

21 Gennaio 2025

**Esercizio 1 (10 punti):** Supponiamo di disporre di un processore speciale in grado di fondere due array ordinati, aventi complessivamente  $n$  elementi, in tempo  $O(\sqrt{n})$ .

Si determini il costo computazionale di un algoritmo di ordinamento, che chiamiamo NEW-MERGESORT, che sia identico all'algoritmo di ordinamento MERGESORT classico, salvo che la fase di fusione dei sotto-array ordinati viene realizzata mediante il processore speciale di cui sopra.

Si scriva l'equazione di ricorrenza di NEW-MERGESORT, spiegandola in dettaglio, e la si risolva con uno dei metodi studiati, specificando i passaggi.

**Esercizio 2 (10 punti):** Sia dato un array  $E$  di  $n$  coppie di interi del tipo  $(i, e)$ , in cui il primo elemento di ciascuna coppia  $i$  è un indice tra 0 ed  $n-1$  assegnato ad una persona, ed il secondo elemento  $e$  rappresenta l'età della persona di indice  $i$ ; sia poi data una matrice quadrata e simmetrica  $A$  di dimensione  $n \times n$  a valori 0 ed 1 in cui  $A[j, k] = A[k, j]$  è uguale ad 1 se e solo se la persona di indice  $j$  conosce la persona di indice  $k$ .

Si scriva un algoritmo il più efficiente possibile che verifichi se esiste almeno una coppia di conoscenti coetanei. L'algoritmo dovrebbe dare in output una coppia con gli indici

dei due conoscenti coetanei se ce ne sono, oppure la coppia  $(0,0)$ .

Ad esempio, sia dato il seguente array  $E$ :  $\frac{2 \ 1 \ 3 \ 0}{35 \ 31 \ 35 \ 35}$  e la matrice  $A$ :

	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

L'output è la coppia  $(0,3)$  in quanto queste due persone si conoscono ed hanno la stessa età; si osservi che le coppie  $(0,2)$  e  $(1,2)$  non sono soluzioni valide, infatti le persone nella prima coppia hanno la stessa età ma non si conoscono, mentre quelle nella seconda coppia si conoscono ma non hanno la stessa età.

Si scriva lo pseudocodice opportunamente commentato dell'algoritmo progettato e se ne calcoli formalmente il costo asintotico.

**Esercizio 3 (10 punti):** Sia  $T$  un albero binario radicato memorizzato tramite record e puntatori. L'albero è non vuoto e ogni nodo contiene un valore intero come chiave. Definiamo il *costo di un cammino radice-foglia* come la somma delle chiavi dei nodi che compongono il cammino.

Si progetti un algoritmo **ricorsivo** per trovare il valore minimo del costo di un cammino radice-foglia in un albero  $T$  dato in input tramite il puntatore alla sua radice.

Dell'algoritmo proposto:

- a) si dia la descrizione a parole,
  - b) si scriva lo pseudocodice,
  - c) si giustifichi formalmente il costo computazionale dando la ricorrenza che lo caratterizza e poi la sua soluzione.
- NOTA BENE: nello pseudocodice della funzione ricorsiva **non** si deve far uso di variabili globali.