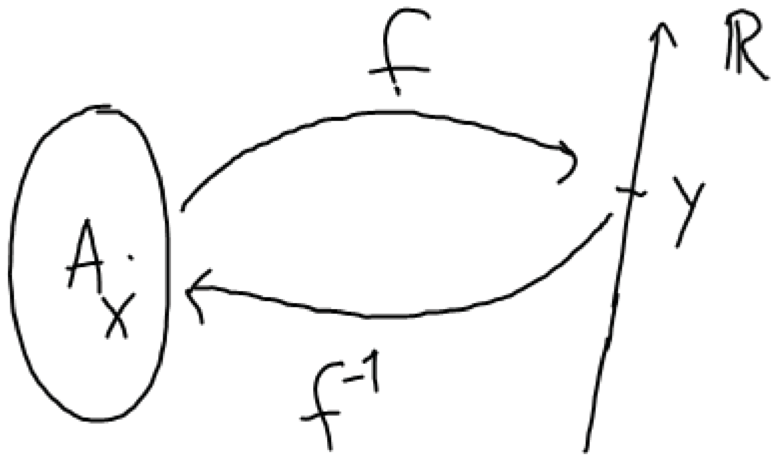
Funzioni invertibili

Definizione.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali, diremo che f è **invertibile** se

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \exists! x \in A \qquad \text{tale che} \qquad y = f(x)$$



Un esempio

$$y = f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 4 - \frac{1}{2}x & x \in (2,3] \end{cases}$$

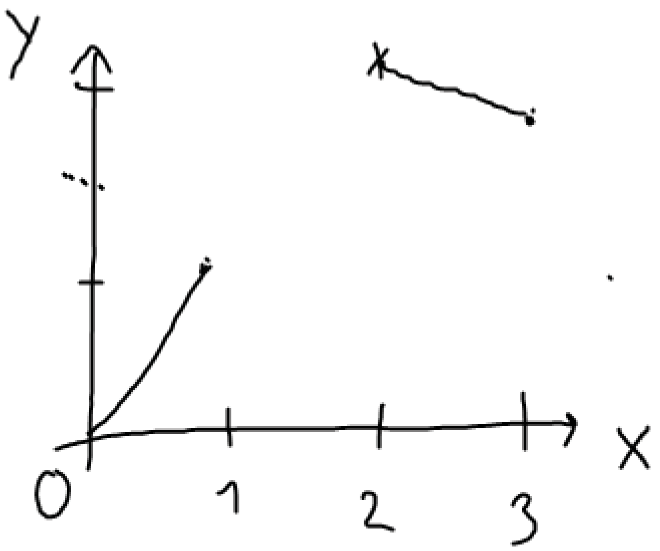
iniettiva

$$f(A) = [0,1] \cup \left[\tfrac{5}{2}, 3\right)$$

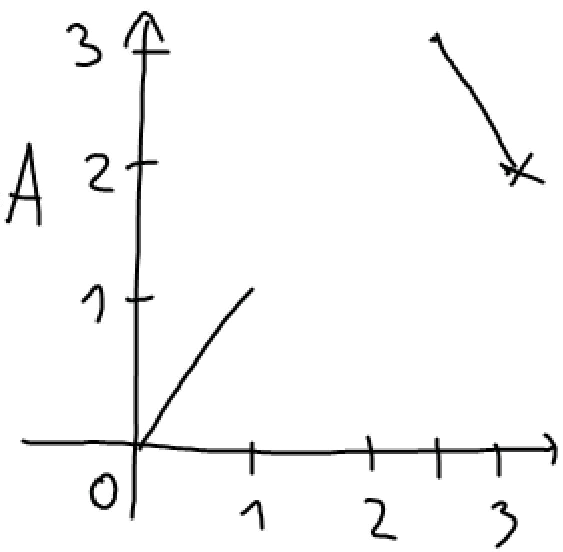
$$f : \underbrace{[0,1] \cup (2,3]}_{= A} \to f(A)$$

$$\exists\, f^{-1} : f(A) \to A$$

f



f^{-1}



Un esempio

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$y = f(x) = e^x + x$$

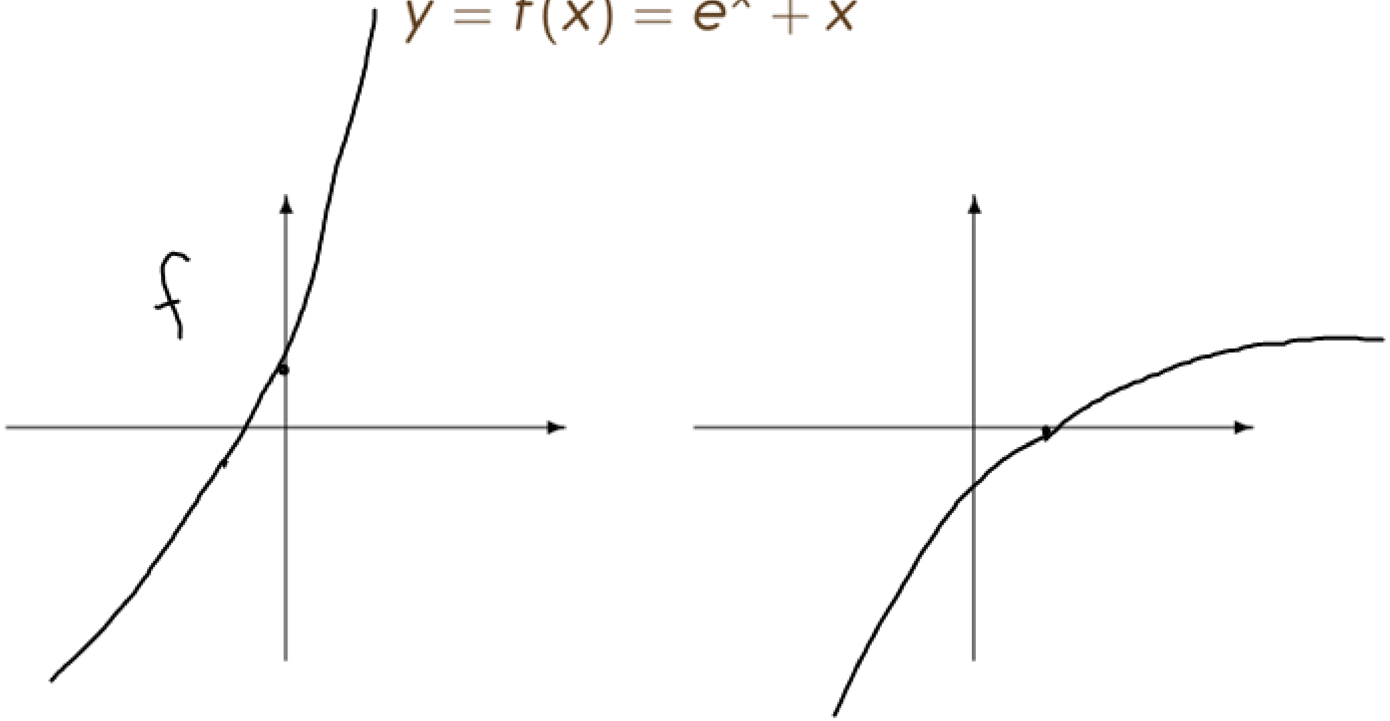
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescenti $\Rightarrow (f+g)$ è crescente!

$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ e $g(x) > g(y)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) > f(y) + g(x) > f(y) + g(y) = (f+g)(y)$$

Un esempio

$$y = f(x) = e^x + x$$



$$y = f^{-1}(x) = ?$$

Funzioni composte

Osservazione.
Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni strettamente monotone, allora la loro composizione è una funzione strettamente monotona.

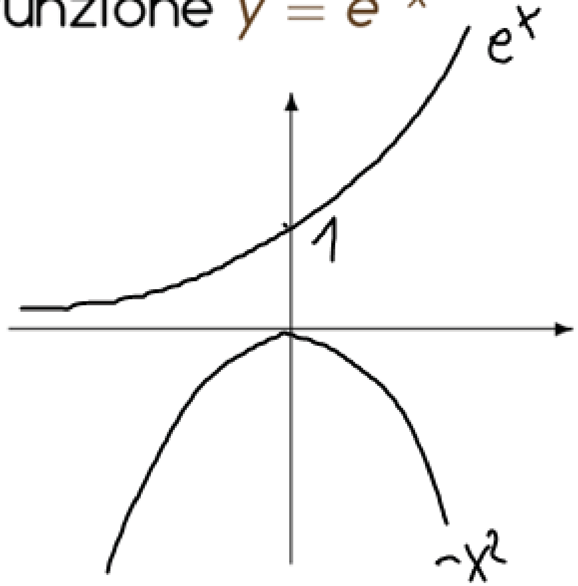
f, g decrescenti : $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$ e $g(x) < g(y)$

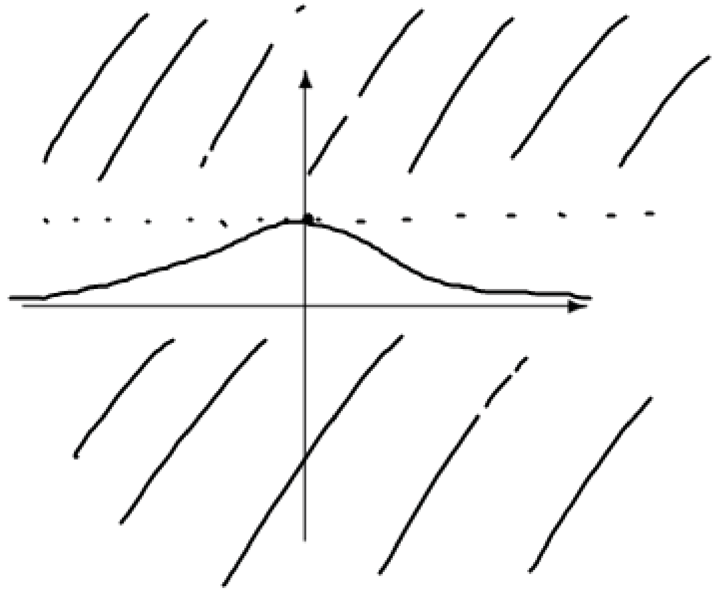
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) > g(f(y)) = (g \circ f)(y)$$

$(g \circ f)$ e' crescente

Un esempio

Siano $f(x) = -x^2$ e $g(x) = e^x$, la loro composizione è la funzione $y = e^{-x^2}$

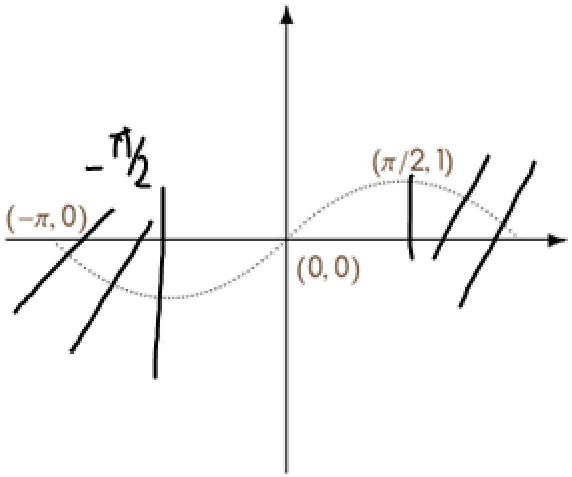


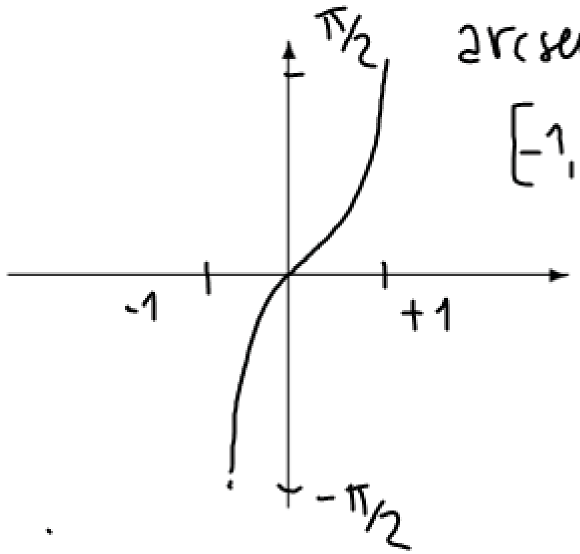


La funzione seno

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Studiamo $y = \sin(x)$ $: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$





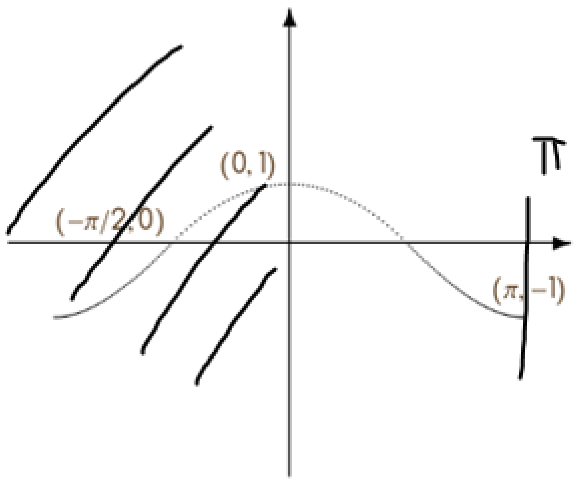
arcsen(x)
$[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

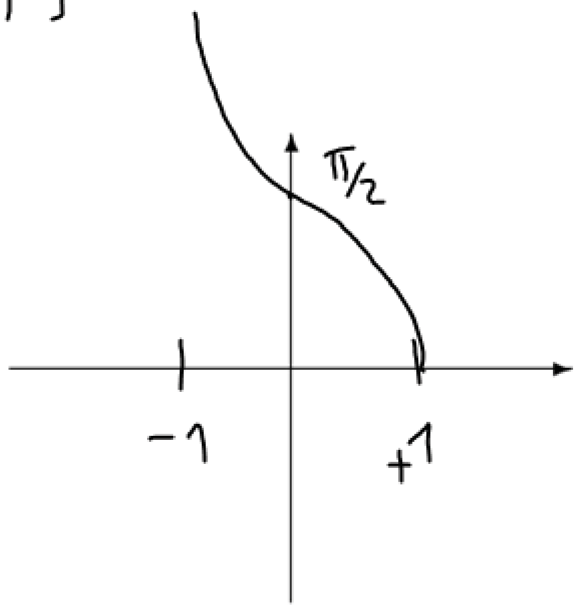
Si noti che $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ solo se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e che $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ solo per $x \in (-1, 1)$.

La funzione coseno

Studiamo $y = \cos(x)$: $[0, \pi] \to [-1, 1]$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$





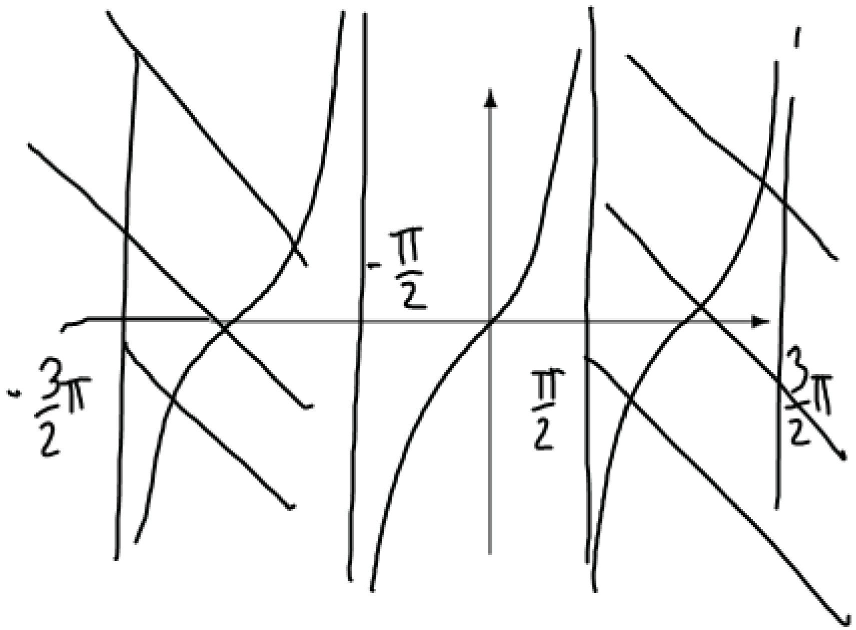
Si noti che $f^{-1}(f(x)) = x$ solo se $x \in (0, \pi)$ e che $f(f^{-1}(x)) = x$ solo per $x \in (-1, 1)$.

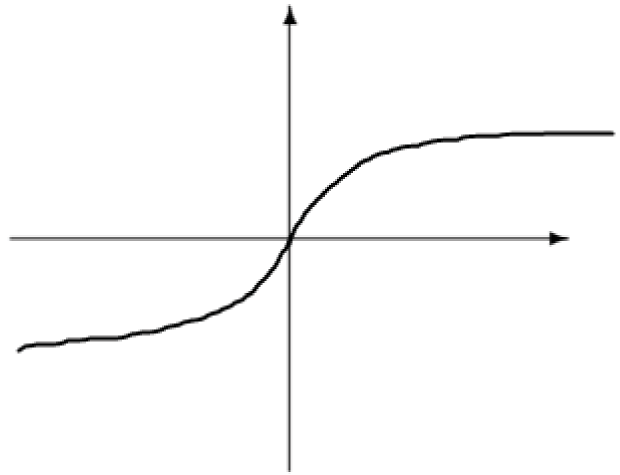
La funzione tangente

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Studiamo $y = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$





Si noti che $f^{-1}(f(x)) = x$ solo se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e che $f(f^{-1}(x)) = x$ solo per $x \in \mathbb{R}$!

Successioni per ricorrenza I

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$c r^{n+1} + d = r(c r^n + d) + d$$

$$A_0 = c r^0 + d = c + d = a_0$$

Successioni per ricorrenza I

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma — Dipartimento di Informatica

Sostituendo nella legge $A_{n+1} = rA_n + d$ troviamo la relazione

$$cr^{n+1} + k = r\,(cr^n + k) + d$$

invece il dato iniziale ci fornisce la seconda relazione

$$A_0 = a_0 = c + k$$

$r = (1 + j)$

$d = -s$

e risolvendo il sistema ottieniamo

$$A_{n+1} = \left(a_0 - \frac{d}{1-r}\right) r^{n+1} + \frac{d}{1-r}$$

$$C_{n+1} = \left[C_0 + \left(-\frac{s}{j}\right)\right] r^{n+1} - \frac{s}{j}$$

Interessi bancari II

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Il nostro modello degli interessi bancari era

$$\begin{cases} C_{n+1} = (1+j)C_n - s \\ C_0 = c_0 \end{cases}$$

e la sua soluzione risulta

$$C_n = \left(c_0 - \frac{s}{j}\right)\cancel{j}^n + \frac{s}{j}$$

$$(1+j)^n$$

Successioni per ricorrenza II

Adottiamo nuovamente la strategia iniziale e cerchiamo una soluzione nella forma

$$A_n = c\lambda^n + \mu$$

sostituendo nell'equazione abbiamo

$$c\lambda^{n+2} + \mu = r\left(c\lambda^{n+1} + \mu\right) + d\left(c\lambda^n + \mu\right) + s$$

da cui abbiamo subito che

$$\mu = \frac{s}{1-r-d}$$

$$c\lambda^{n+2} + \mu = cr\lambda^{n+1} + r\mu + cd\lambda^{n} + d\mu + s$$

Successioni per ricorrenza II

Adesso possiamo utilizzare i dati iniziali, infatti

$$A_0 = c_1 + c_2 + \frac{s}{1 - r - d} = a$$
$$A_1 = c_1\lambda_+ + c_2\lambda_- + \frac{s}{1 - r - d} = b$$

ora dobbiamo risolvere un ultimo sistema algebrico per identificare i coefficienti c_1 e c_2, da cui

$$A_n = \left(\frac{b - a\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} + \frac{s(\lambda_- - 1)}{(\lambda_+ - \lambda_-)(1 - r - d)}\right)\lambda_+^n + \left(\frac{a\lambda_+ - b}{\lambda_+ - \lambda_-} + \frac{s(1 - \lambda_+)}{(\lambda_+ - \lambda_-)(1 - r - d)}\right)\lambda_-^n + \frac{s}{1-r-d}$$

I numeri di Fibonacci

La celeberrima sequenza di numeri

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55 \ldots$$

è descritta dalla seguente legge

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

dai conti precedenti abbiamo che

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

L'algoritmo di Erone

Consideriamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) \\ X_0 = 2 \end{cases}$$

i. $X_n > 0$ e $X_n^2 \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(X_n^2 + \frac{4}{X_n^2} + 4\right) \geq 1 + \frac{1}{4}\left(X_n^2 + \frac{4}{X_n^2}\right) \geq 1 + \frac{1}{4} 2 \cdot 2 = 1 + 1$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$