UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

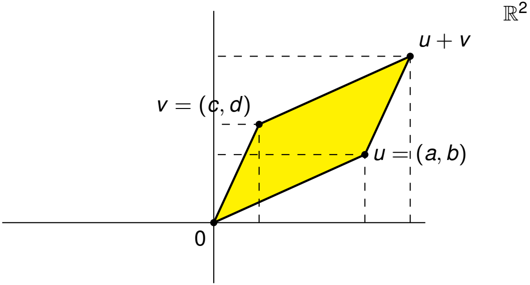
27. Determinanti

Richiami

- Si può dare una descrizione dimensionale degli spazi vettoriali
- Il concetto di dimensione si basa su quello di (in)dipendenza lineare
- Oggi: **Aree e volumi**
- **Determinante di matrici**

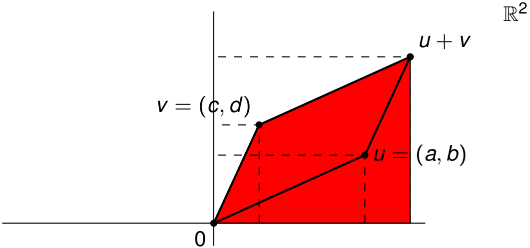
Area di un parallelogramma

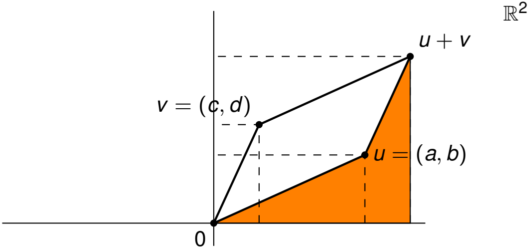
Qual è l'area del parallelogramma nel piano i cui vertici sono
$O \equiv (0,0)$, $u = (a,b)$, $v = (c,d)$ e $u+v = (a+c, b+d)$?



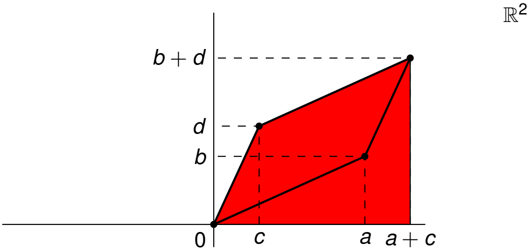
Come calcolarla - I

Possiamo calcolarla come differenza tra due aree





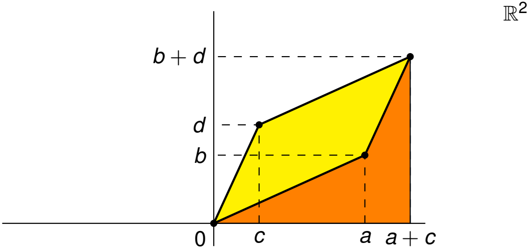
Come calcolarla - II



La regione rossa si ottiene unendo un triangolo rettangolo e un trapezio.

L'area del triangolo è $cd/2$; quella del trapezio è $a(d+(b+d))/2$.

L'area totale della regione rossa è $(2ad+ab+cd)/2$.



Anche la regione arancio si ottiene unendo un triangolo rettangolo e un trapezio.

L'area del triangolo è $ab/2$; quella del trapezio è $c(b+(b+d))/2$.

L'area totale della regione arancio è $(2bc+ab+cd)/2$.

L'area del parallelogramma si ottiene per differenza

$$(2ad+ab+cd)/2-(2bc+ab+cd)/2=ad-bc.$$

Determinante 2×2

La funzione area si indica come una matrice, ma con delle barre dritte al posto delle parentesi

$$\text{Area}((a, b), (c, d)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ci interessa perché può avere a che fare con la nozione di dipendenza lineare. Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno multiplo dell'altro; in tal caso l'area è nulla. Se comprendiamo le proprietà della funzione area (che tra poco inizieremo a chiamare **determinante**) potremo capire meglio la nozione di (in)dipendenza lineare.

Bilinearità e alternanza

- $\text{Area}(u, v)$ è *separatamente lineare* nei due argomenti
- $\text{Area}(u, u) = 0$
- $\text{Area}((1, 0), (0, 1)) = 1$

Un'osservazione a prima vista sorprendente è che

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

quindi la funzione Area non calcola solo l'area del parallelogramma, ma anche un segno di qualche tipo. Questo è in realtà inevitabile. In effetti,

$$\begin{aligned} 0 = \text{Area}(u + v, u + v) &= \text{Area}(u + v, u) + \text{Area}(u + v, v) \\ &= \text{Area}(u, u) + \text{Area}(v, u) + \text{Area}(u, v) + \text{Area}(v, v) \\ &= \text{Area}(u, v) + \text{Area}(v, u), \end{aligned}$$

quindi $\text{Area}(u, v) = -\text{Area}(v, u)$.

Altre proprietà

Sorprendentemente, le tre proprietà che abbiamo elencato ci permettono di calcolare la funzione Area senza conoscerne l'esatta definizione. Sappiamo infatti che:

- $\text{Area}(v, u) = -\text{Area}(u, v)$
- $\text{Area}(u, \lambda v) = \lambda\,\text{Area}(u, v)$
- $\text{Area}(u, v - \lambda u) = \text{Area}(u, v) - \text{Area}(u, \lambda u) = \text{Area}(u, v) - \lambda\,\text{Area}(u, u) = \text{Area}(u, v)$.

e quindi sappiamo controllare cosa accade al valore della funzione quando eseguiamo sulla matrice le manipolazioni del procedimento di eliminazione di Gauss.

Vediamo un esempio:

Calcolo di un determinante 2×2

Se eseguiamo i conti utilizzando solamente le proprietà che abbiamo visto:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} \\
&= -(-7)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 = 7,
\end{aligned}$$

otteniamo lo stesso risultato che ci dà la formula vista all'inizio

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7.$$

Chiaramente, la formula ci fornisce la risposta in modo più immediato, ma possono esserci situazioni in cui la formula non sia disponibile.

Volume in $\mathbb{R}^3$

Ad esempio, qual è la funzione che calcola il volume di un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$ in funzione dei vettori che ne costituiscono gli spigoli?

Il conto sembra complicato, quindi possiamo limitarci a elencare le proprietà che ricaviamo ragionando come con l'area:

- $\mathrm{Vol}(u, v, w)$ è separamente lineare nei tre argomenti $u, v, w \in \mathbb{R}^3$
- $\mathrm{Vol}(u, u, w) = 0$
- $\mathrm{Vol}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = 1$

e anche in questo caso, siamo in grado di calcolare la funzione utilizzandone soltanto le proprietà.

Calcolo di un determinante 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 16/3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

Definizione generale

Si chiama **determinante** ogni funzione $f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ con le seguenti proprietà:

- f è separatamente lineare nelle righe della matrice argomento
- f vale 0 sulle matrici con due righe uguali (o con una riga nulla)
- f vale 1 sulla matrice identità

Conseguenze:

- il valore di f su una matrice le cui righe sono linearmente dipendenti è 0
- il valore di f su una matrice diagonale è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale
  - Si usa la linearità
- il valore di f su una matrice a gradoni è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale
  - Se ho n pivot, la matrice è diagonale. Se ho meno di n pivot, ho almeno una riga nulla, e il determinante è 0.

Unicità del determinante

Se $f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ è una funzione che soddisfa le proprietà elencate, ho un modo di calcolarne il valore su ogni matrice data

- eseguo il procedimento di eliminazione di Gauss, tenendo sotto controllo cosa succede al valore del determinante (a volte cambia segno)
- arrivo ad una forma a gradoni
- calcolo il valore di f sulla matrice a gradoni moltiplicando gli elementi sulla diagonale.

Questo vuol dire che due funzioni $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ che soddisfano entrambe le proprietà date devono assumere lo stesso valore su ciascuna matrice.

Ma una funzione con queste proprietà esiste?

Esistenza del determinante - I

Sappiamo che una funzione determinante sulle matrice 2×2 esiste perché ne abbiamo esibita una con tutte le proprietà desiderate:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Anche per matrici 3×3 si riesce a trovare un'espressione che soddisfa le proprietà di multilinearità e alternanza, e che vale 1 sulla matrice identità:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Esistenza del determinante - II

L'espressione esplicita esiste sempre, ma è in generale poco gradevole: se A è la matrice con coefficiente a_{ij} al posto in riga i e colonna j, allora

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

La funzione determinante è quindi una somma di $n!$ monomi, ciascuno dei quali è prodotto di n coefficienti della matrice, con segni alternanti secondo il segno della permutazione degli indici.

In effetti, nel determinante 2×2 abbiamo due termini, uno con segno $+$ e uno con segno $-$; nel determinante 3×3 abbiamo $6 = 3!$ termini, la metà con segno $+$ e la metà con segno $-$.

Esercizio: convincetevi che la funzione appena scritta soddisfa tutte le proprietà del determinante che abbiamo elencato.