UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

18. Linearità

Richiami

- Sappiamo risolvere i sistemi di equazioni lineari
- Siamo felici se un problema che abbiamo si riduce a risolvere un sistema di equazioni lineari
- Oggi: **Il concetto di linearità**
- **Alcuni fenomeni naturali possiedono proprietà lineari**

I fenomeni lineari

Imparare a risolvere sistemi di equazioni lineari non è soltanto una curiosità matematica.

La maggior parte dei fenomeni comprensibili in natura possiede proprietà lineari.

Il concetto di linearità può essere catturato da semplici proprietà algebriche. Le informazioni che descrivono un fenomeno lineare sono descrivibili in maniera compatta e pratica.

L'aspetto caratteristico dei fenomeni lineari è la descrivibilità in termini di espressioni di primo grado (spesso prive di termine noto). Lo strumento tipico per manipolare tali espressioni è il linguaggio matriciale.

Un esempio quotidiano - I

Quando si va a fare la spesa, il fruttivendolo non ci fornisce una descrizione completa di come ricavare la cifra totale da pagare per la quantità di frutta che desideriamo, ma si limita a darci delle informazioni parziali.

Le informazioni parziali che ci vengono comunicate (ad esempio, prezzo al chilogrammo di mele, pere, banane) sono tuttavia sufficienti a descrivere completamente la funzione di spesa.

Se, in effetti, x_m, x_p, x_b sono le quantità in Kg di mele, pere, banane che desideriamo comperare, e m, p, b sono i prezzi al Kg di mele, pere, banane, la cifra totale che spenderemo è

$$S(x_m, x_p, x_b) = mx_m + px_p + bx_b.$$

Quali proprietà della funzione S stiamo ipotizzando per garantirci che l'espressione appena scritta sia corretta?

Un esempio quotidiano - II

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Informatica

E' lecito aspettarsi che la funzione S soddisfi un paio di proprietà naturali

- Se mi reco dal fruttivendolo due volte, e compro quantità x_m, x_p, x_b una prima volta e y_m, y_p, y_b immediatamente dopo, mi aspetto che la spesa totale sia la stessa che per comprare quantità $x_m + y_m, x_p + y_p, x_b + y_b$
- Se compro il doppio di ciascuna quantità, mi aspetto di spendere il doppio; se compro il triplo, mi aspetto di spendere il triplo, ecc...

In altre parole, mi aspetto che

$$S(x_m + y_m, x_p + y_p, x_b + y_b) = S(x_m, x_p, x_b) + S(y_m, y_p, y_b),$$

$$S(\lambda x_m, \lambda x_p, \lambda x_b) = \lambda S(x_m, x_p, x_b).$$

In altre parole, mi aspetto che S sia una funzione lineare.

Un esempio quotidiano - III

Se S soddisfa queste proprietà, ho un modo semplice per dimostrare che la funzione S deve possedere la descrizione precedentemente data. Poiché S è additiva, allora

$$S(x_m, x_p, x_b) = S(x_m, 0, 0) + S(0, x_p, 0) + S(0, 0, x_b).$$

Inoltre

$$S(x_m, 0, 0) = x_m S(1, 0, 0), \quad S(0, x_p, 0) = x_p S(0, 1, 0),$$

$$S(0, 0, x_b) = x_b S(0, 0, 1).$$

Ma $S(1, 0, 0), S(0, 1, 0), S(0, 0, 1)$ sono proprio i prezzi unitari di mele, pere, banane:

$$S(1, 0, 0) = m, \quad S(0, 1, 0) = p, \quad S(0, 0, 1) = b.$$

Un esempio quotidiano - IV

Mettendo insieme le nostre informazioni, abbiamo

$$\begin{aligned} S(x_m, x_p, x_b) &= S(x_m, 0, 0) + S(0, x_p, 0) + S(0, 0, x_b) \\ &= x_m S(1, 0, 0) + x_p S(0, 1, 0) + x_b S(0, 0, 1) \\ &= m x_m + p x_p + b x_b. \end{aligned}$$

Riassumendo, se la funzione $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è lineare, allora

$$S(x, y, z) = xS(1, 0, 0) + yS(0, 1, 0) + zS(0, 0, 1),$$

e pertanto S è caratterizzata dal valore che assume sulle terne $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Conoscere il valore che S assume su tali terne ci permette di ricavare S su qualsiasi altra terna di argomenti.

Il nostro obiettivo è quello di formalizzare, e generalizzare, le proprietà di linearità esibite da questo (semplice) esempio.

Struttura lineare di $\mathbb{R}^n$ - I

La linearità della funzione di spesa S appena considerata è stata verificata in termini di alcune operazioni eseguite sui possibili argomenti. Abbiamo avuto bisogno di

- Sommare quantità omogenee: il valore di S su $(x_m + y_m, x_p + y_p, x_b + y_b$ era in stretta relazione con il valore di S su (x_m, x_p, x_b) e su (y_m, y_p, y_b).
- Calcolare multipli di quantità: comprare il doppio di (x_m, x_p, x_b) significa comprare $(2x_m, 2x_p, 2x_b)$.

Ha senso allora definire due operazioni

- di somma tra terne: $(x_m, x_p, x_b) + (y_m, y_p, y_b) = (x_m + y_m, x_p + y_p, x_b + y_b)$;
- di prodotto per un numero reale: $\lambda(x_m, x_p, x_b) = (\lambda x_m, \lambda x_p, \lambda x_b)$.

Allora, se $\underline{x} = (x_m, x_p, x_b)$ e $\underline{y} = (y_m, y_p, y_b)$, la funzione S soddisfa

$$S(x + y) = S(x) + S(y), \qquad S(\lambda x) = \lambda S(x).$$

In generale, senza bisogno di scomodare mele, pere e banane, si definiscono su $\mathbb{R}^n$ le operazioni

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),\end{aligned}$$

e si dice che $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare se

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \qquad T(\lambda x) = \lambda T(x),$$

per ogni scelta di $x, y \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Quando parleremo di $\mathbb{R}^n$, avremo sempre in mente le operazioni di somma e prodotto per numero reale appena descritte.

Ripetendo il ragionamento già fatto, vediamo cosa possiamo dire di un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Volendo calcolare il valore che assume sulla m.upla $(x_1, \dots, x_m)$, possiamo procedere come prima: poiché

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_m) &= (x_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_m) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_m(0, \dots, 0, 1),\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}T(x_1, \dots, x_m) &= T(x_1, 0, \dots, 0) + \dots + T(0, \dots, 0, x_m) \\ &= x_1 T(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_m T(0, \dots, 0, 1).\end{aligned}$$

Pertanto, l'informazione per calcolare T su qualsiasi m.upla è tutta contenuta nelle immagini $T(1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 0, 1)$, che sono elementi di $\mathbb{R}^n$.

La maniera più pratica per registrare i valori $T(1, 0, \ldots, 0)$, ..., $T(0, \ldots, 0, 1)$ è quella di disporli in una matrice.
La convenzione che useremo è quella di disporli, ordinatamente, lungo le colonne. Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è un'applicazione lineare, e

$$T(1, 0, 0) = (1, 2), \quad T(0, 1, 0) = (3, 4), \quad T(0, 0, 1) = (5, 6),$$

allora assoceremo a T la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

e questo significa che $T(x, y, z) = (x + 3y + 5z, 2x + 4y + 6z)$.

Prodotto righe per colonne

Un modo mnemonico per ricordare il significato della matrice associata ad un'applicazione lineare senza dover ripercorrere ogni volta lo stesso ragionamento è notare che l'espressione generale per l'applicazione T:

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 5z, 2x + 4y + 6z)$$

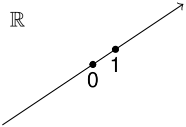
si può ricavare anche moltiplicando righe per colonne la matrice associata a T per la colonna degli argomenti:

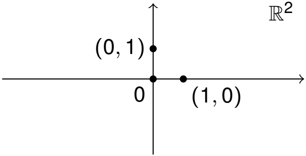
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix}.$$

Questo è un fenomeno generale, e non tipico solamente dell'esempio che abbiamo considerato.

Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^n$

E' utile interpretare i numeri reali come coordinate dei punti su una retta (la retta reale!) una volta fissata un'origine delle coordinate e un'unità di misura.





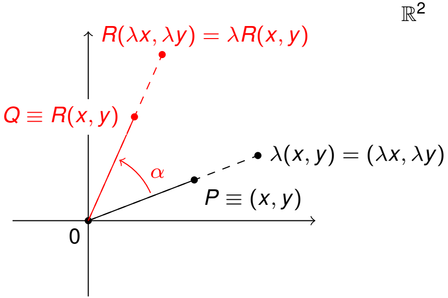
Allo stesso modo, le coppie di numeri reali sono interpretabili come coordinate dei punti del piano rispetto ad un sistema cartesiano di riferimento, e gli elementi di $\mathbb{R}^3$ sono coordinate dei punti dello spazio tridimensionale.

$\mathbb{R}^n$ è una generalizzazione di dimensione n. La somma tra n.uple traduce la regola del parallelogramma, mentre il prodotto per il numero reale λ produce un elemento nella stessa direzione rispetto all'origine, ma λ volte più lontano.

Un operatore di rotazione in $\mathbb{R}^2$

UNITELMA SAPIENZA · SAPIENZA Università di Roma · Dipartimento di Informatica

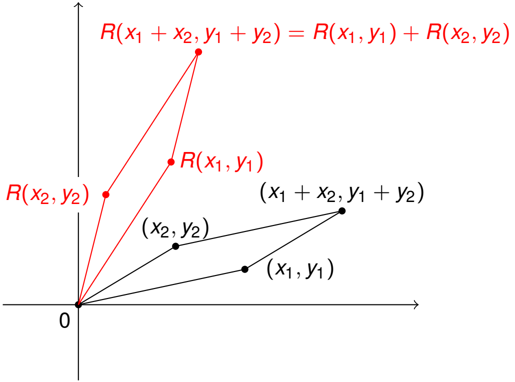
Proviamo a fare un esempio meno banale di quello del fruttivendolo, e consideriamo l'applicazione $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto del piano il punto che si ottiene ruotandolo attorno all'origine di un angolo α.



E' geometricamente evidente che $R(\lambda x, \lambda y) = \lambda R(x, y)$.

L'operatore R è lineare

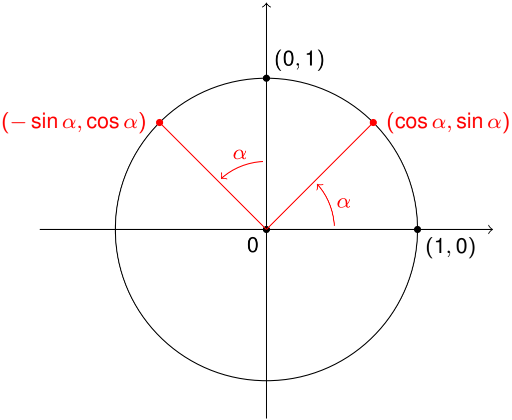
Vale anche $R(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = R(x_1, y_1) + R(x_2, y_2)$.



Poiché l'applicazione R è lineare, il suo valore su ciascun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è determinato dai valori che assume su $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

L'operatore R in coordinate

Poiché $R(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $R(0,1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$,



Si dovrà avere
$R(x,y) = xR(1,0) + yR(0,1) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.

Espressione matriciale di R

La matrice associata a R si ottiene scrivendo per colonne le immagini di $(1,0)$ e $(0,1)$ attraverso R. In questo caso, la matrice è

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Per conoscere le coordinate del punto $(1,2)$ una volta ruotato attraverso R, è sufficiente calcolare

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - 2\sin\alpha \\ \sin\alpha + 2\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pertanto, $R(1,2) = (\cos\alpha - 2\sin\alpha, \sin\alpha + 2\cos\alpha)$.