UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l’Informatica

Modulo 16.1 – Logica Predicativa (parte I: sintassi e semantica)

Docente: Pietro Cenciarelli

Il sillogismo

Woody Allen

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è mortale.
Dunque, tutti gli uomini sono Socrate.

Amore e guerra -1975

Aristotele (384 – 322 a.C.)

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Dunque, Socrate è mortale.

Οργανον

Il sillogismo

P, Q e R hanno una struttura…

U(x) = x è un uomo

M(x) = x è mortale

S = Socrate

P) $\forall x \,.\, U(x) \rightarrow M(x)$

Q) $U(S)$

R) $M(S)$

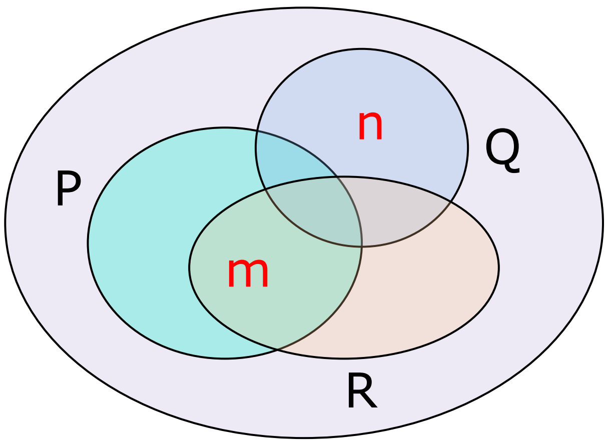
$$\dfrac{U(S) \qquad \dfrac{\forall x \,.\, U(x) \rightarrow M(x)}{U(S) \rightarrow M(S)}}{M(S)}$$

Aristotele (384 – 322 a.C.)

P) Tutti gli uomini sono mortali.
Q) Socrate è un uomo.
R) Dunque, Socrate è mortale.

$P \wedge Q \rightarrow R$ **?!**

Logica proposizionale (modelli)



	P	Q	R	...
m	✔		✔	
n		✔		

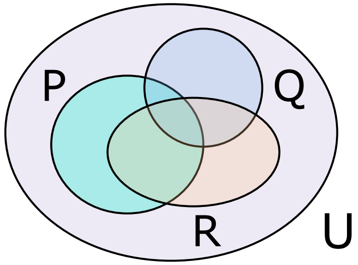
m: *simboli proposizionali* → {T, F}

m si estende alle proposizioni applicando le *tavole di verità*

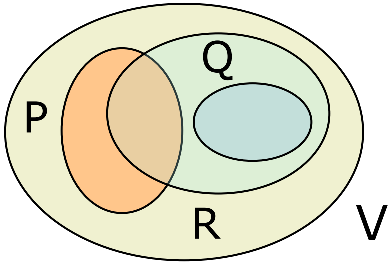
Se m(A) = T, si dice che m *soddisfa* A e si scrive $\vDash_m$ A

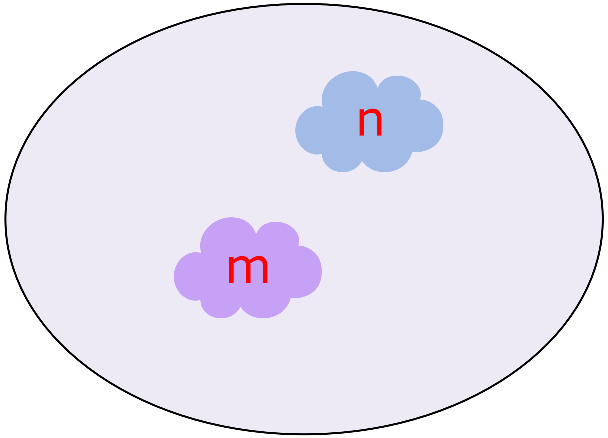
Logica predicativa (modelli)

m :



n :



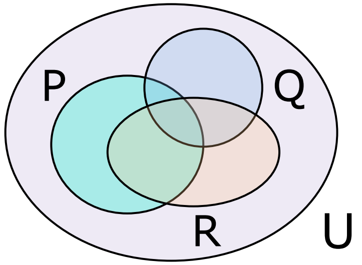


Logica predicativa (modelli)

$\forall x.\ Q(x) \rightarrow R(x)$

quantificatore universale

m :



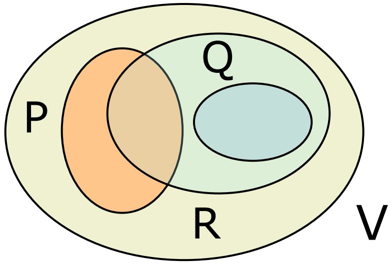
U = *animali*

$Q_m(x)$ = *x è un quadrupede*

$R_m(x)$ = *x è un rettile*

tutti i quadrupedi sono rettili ☹

n :



V = *esseri animati (anche gli dei)*

$Q_n(x)$ = *x è un uomo*

$R_n(x)$ = *x è mortale*

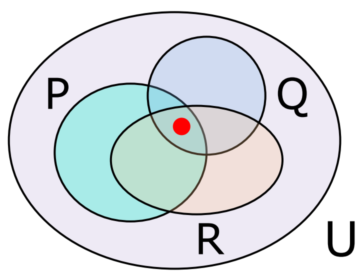
tutti gli uomini sono mortali ☺

Logica predicativa (modelli)

$\exists x.\ P(x) \wedge Q(x)$

quantificatore esistenziale

m :



U = *animali*

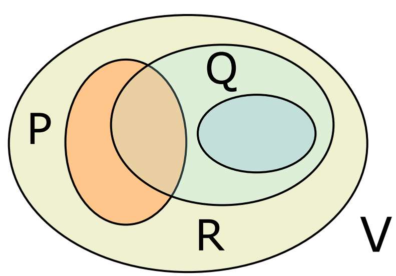
$Q_m(x)$ = *x è un quadrupede*

$R_m(x)$ = *x è un rettile*

$P_m(x)$ = *x è squamato*

esiste un quadrupede squamato ☺

n :



V = *esseri animati (anche gli dei)*

$Q_n(x)$ = *x è un uomo*

$R_n(x)$ = *x è mortale*

$P_n(x)$ = *x ha almeno 100 arti*

☹

esiste un uomo con almeno 100 arti

Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

$x, y, z, \ldots \in$ *simboli di variabile*

$a, b, c, \ldots \in$ *simboli di costante*

$f, g, h, \ldots \in$ *simboli di funzione*

A ciascun simbolo di funzione f è associato un intero positivo n, chiamato *arietà* di f, che ne rappresenta il numero di argomenti.

Ad esempio: + è una funzione bin*aria* (n = 2)

! (fattoriale) è una funzione un*aria* (n = 1)

*if_then_else_* è una funzione tern*aria* (n = 3)

Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

- una variabile è un termine
- una costante è un termine
- se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini e f è un simbolo di funzione *di arietà n*, allora $f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è un termine
- *nient'altro è un termine*

Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \mathit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

P, Q, R, … ∈ *simboli predicativi* (denotano relazioni)

A ciascun simbolo predicativo P è associato un intero positivo n, chiamato *arietà* di P, che ne rappresenta il numero di argomenti.

Esempi… *vedi relazioni!*

Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \mathit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\ A \mid \exists x.\ A$

- se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini e P è un simbolo predicativo *di arietà n*, allora $P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è una formula
- …
- se A è una formula, allora $\forall x.\ A$ è una formula
- se A è una formula, allora $\exists x.\ A$ è una formula
- *nient'altro è una formula*

Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots , t_n) \mid \ldots \mid$ *falso* $\mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\ A \mid \exists x.\ A$

Esempi:

$\neg\exists x.\ x = succ(0)$ (*terzo assioma di Peano*)

$\forall x.\ \forall y.\ succ(x) = succ(y) \rightarrow x = y$ (*quarto assioma di Peano*)

$\forall x\ y.\ succ(x) = succ(y) \rightarrow x = y$

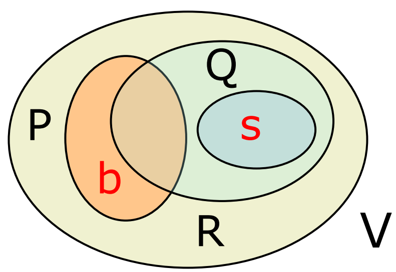
Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid$ *falso* $\mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

n :

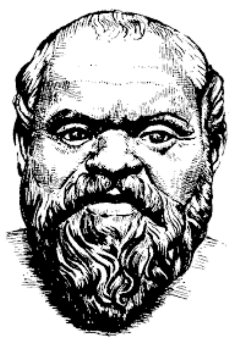


V = *esseri animati (anche gli dei)*

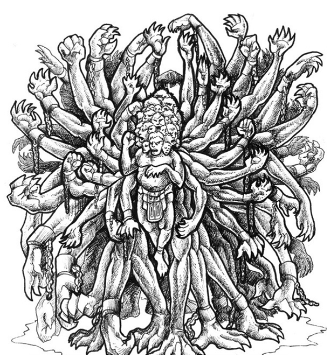
$Q_n(x)$ = *x è un uomo*

$R_n(x)$ = *x è mortale*

$P_n(x)$ = *x ha almeno 100 arti*



s = Socrate



b = Briareo

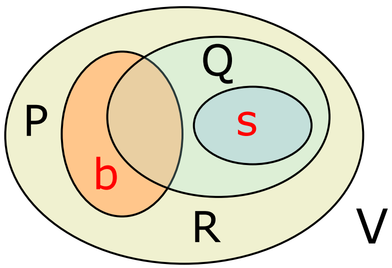
Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \mathit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

n :



$P(b) \wedge \forall x.\, Q(x) \rightarrow R(x)$ ☺

$P(s) \wedge \forall x.\, Q(x) \rightarrow R(x)$ ☹

V = *esseri animati (anche gli dei)*

$Q_n(x)$ = *x è un uomo*

$R_n(x)$ = *x è mortale*

$P_n(x)$ = *x ha almeno 100 arti*

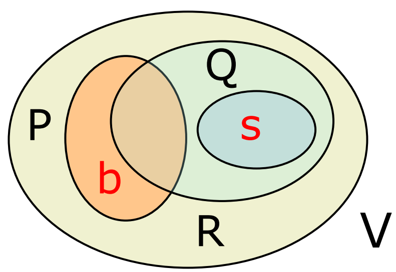
Logica predicativa

(sintassi)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \textit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \to B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

n :



?

$P(y) \wedge \forall x.\, Q(x) \to R(x)$

V = *esseri animati (anche gli dei)*
$Q_n(x)$ = *x è un uomo*
$R_n(x)$ = *x è mortale*
$P_n(x)$ = *x ha almeno 100 arti*

y è *libera* x è *legata*

il valore di verità di una formula dipende dalle variabili libere, non da quelle legate

Variabili libere e legate

	libere	legate
$P(y) \land \forall z.\ Q(z) \to R(z)$	y	z
$P(y) \land \forall z.\ Q(x) \to R(z)$	x, y	z
$P(z) \land \forall z.\ Q(x) \to R(z)$	x, z	z

?

Ad esser libere o legate sono le *occorrenze* delle variabili

Variabili libere e legate

	libere	legate
$P(y) \land \forall z.\ Q(z) \to R(z)$	y	z
$P(y) \land \forall z.\ Q(x) \to R(z)$	x, y	z
$P(z) \land \forall z.\ Q(x) \to R(z)$	x, z	z
	x, y, z	x, y

$$(\forall x.\ (P(z) \land \exists y.\ P(y) \land Q(x))) \to (\forall z.\ \exists w,\ R(x) \lor Q(y))$$

? ?

Nota: z non compare legata! …e w non compare tout court!

Logica predicativa

(semantica)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \mathit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

Un *modello* della logica predicativa (*struttura*) è costituito da:

- un insieme U (universo) non vuoto
- $\forall$ a … $\in$ *simboli di costante* $[\![a]\!] \in U$
- $\forall$ f … $\in$ *simboli di funzione* n-ario $[\![f]\!] : \underbrace{U \times U \times \ldots \times U}_{\text{n volte}} \rightarrow U$
- $\forall$ P … $\in$ *simboli predicativi* n-ario $[\![P]\!] \subseteq \underbrace{U \times U \times \ldots \times U}_{\text{n volte}}$

Logica predicativa

(semantica)

Esempio: U = numeri naturali

$[\![a]\!] = 0$, $[\![b]\!] = 1$, $[\![c]\!] = 2$, … $[\![m]\!] = 9$

$[\![f]\!](x, y) = x + y$ (*binario*)

$[\![P]\!]$ = essere un numero primo (*unario*)

$[\![Q]\!]$ = essere maggiore di (*binario*)

Un *modello* della logica predicativa (*struttura*) è costituito da:

- un insieme U (universo)
- $\forall$ a … $\in$ *simboli di costante* $[\![a]\!] \in U$
- $\forall$ f … $\in$ *simboli di funzione* n-ario $[\![f]\!] : \underbrace{U \times U \times \ldots \times U}_{\text{n volte}} \to U$
- $\forall$ P … $\in$ *simboli predicativi* n-ario $[\![P]\!] \subseteq \underbrace{U \times U \times \ldots \times U}_{\text{n volte}}$

Logica predicativa

(semantica)

Esempio: U = numeri naturali

$[\![a]\!] = 0$, $[\![b]\!] = 1$, $[\![c]\!] = 2$, … $[\![m]\!] = 9$

$[\![f]\!](x, y) = x + y$ (*binario*)

$[\![P]\!]$ = essere un numero primo (*unario*)

$[\![Q]\!]$ = essere maggiore di (*binario*)

$$\exists y.\ Q(y,x) \wedge P(y) \wedge P(y+c)$$

esiste un numero primo y maggiore di x tale che y+2 è primo

è vero per x = 4 (5 e 7 sono primi)

è vero per x = 820 (821 e 823 sono primi) …

$\forall x.\ \exists y.\ Q(y,x) \wedge P(y) \wedge P(y+c)$?!

congettura dei numeri primi gemelli !

Logica predicativa

(semantica)

Logica proposizionale (modelli) m: *simboli proposizionali* $\rightarrow$ {T, F}

m si estende alle proposizioni applicando le *tavole di verità*

Logica predicativa (modelli) (U, $[\![\_]\!]$) ?

$[\![\_]\!]$ si estende a termini e formule fornendogli un *ambiente* per le variabili:

$[\![\_]\!]$: *termini*, *ambienti* $\rightarrow$ U

$[\![\_]\!]$: *formule*, *ambienti* $\rightarrow$ {T, F}

Ambienti

Un ambiente (in U) è una funzione ρ : *variabili* → U

Dati un ambiente ρ, una variabile x e un elemento $v \in U$ denotiamo con $\rho[x \mapsto v]$ l'ambiente ρ' definito come segue:

$$\rho'(x) = v$$
$$\rho'(y) = \rho(y), \quad \text{per } y \neq x$$

$[\![\_]\!]$: *termini*, *ambienti* → U

$[\![\_]\!]$: *formule*, *ambienti* → {T, F}

Logica predicativa

(semantica)

termini $t_1, t_2, \ldots ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \mid a \mid b \mid c \mid \ldots \mid f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

Scriviamo $[\![t]\!]_\rho$ al posto di $[\![-]\!]\,(t, \rho)$

$$[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$$

$$[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!]$$

$$[\![f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]\,([\![t_1]\!]_\rho, [\![t_2]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho)$$

ρ : *variabili* $\to$ U

$\boxed{[\![-]\!] : \textit{termini}, \textit{ambienti} \to U}$

$[\![-]\!]$: *formule*, *ambienti* $\to$ {T, F}

Logica predicativa

(semantica)

		$\vee$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

		$\wedge$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

		$\rightarrow$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

	$\neg$
T	F
F	T

ρ : *variabili* $\rightarrow$ U

$[\![\_]\!]$: *termini*, *ambienti* $\rightarrow$ U

$\boxed{[\![\_]\!] : \textit{formule}, \textit{ambienti} \rightarrow \{T, F\}}$

Logica predicativa

(semantica)

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid$ *falso* $\mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

Scriviamo $[\![A]\!]_\rho$ al posto di $[\![-]\!](A, \rho)$

$[\![P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)]\!]_\rho = T$ se $([\![t_1]\!]_\rho, [\![t_2]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho) \in [\![P]\!]$

$[\![P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)]\!]_\rho = F$ *altrimenti*

ρ : *variabili* $\rightarrow U$

$[\![-]\!]$: *termini, ambienti* $\rightarrow U$

$\boxed{[\![-]\!] : \textit{formule, ambienti} \rightarrow \{T, F\}}$

Logica predicativa

(semantica)

formule $A, B, \ldots ::= P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \textit{falso} \mid A \vee B \mid A \wedge B \mid A \to B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

$$[\![\textit{falso}]\!]_\rho = F$$

ρ : *variabili* $\to$ U

$[\![\_]\!]$: *termini*, *ambienti* $\to$ U

$\boxed{[\![\_]\!] : \textit{formule}, \textit{ambienti} \to \{T, F\}}$

Logica predicativa

(semantica)

formule $A, B, \ldots ::= P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \textit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

$$[\![A \vee B]\!]_\rho = [\![A]\!]_\rho \vee [\![B]\!]_\rho$$

$\vee$ *sintattico* $\qquad$ $\vee$ *semantico*

ρ : *variabili* $\rightarrow$ U

$[\![\_]\!]$: *termini, ambienti* $\rightarrow$ U

$\boxed{[\![\_]\!] : \textit{formule, ambienti} \rightarrow \{T, F\}}$

Logica predicativa

(semantica)

formule A, B, … ::= $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ | … | *falso* | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \rightarrow B$ | $\neg A$ | $\forall x.\, A$ | $\exists x.\, A$

$$[\![A \vee B]\!]_\rho = [\![A]\!]_\rho \vee [\![B]\!]_\rho$$

$$[\![A \wedge B]\!]_\rho = [\![A]\!]_\rho \wedge [\![B]\!]_\rho$$

$$[\![A \rightarrow B]\!]_\rho = [\![A]\!]_\rho \rightarrow [\![B]\!]_\rho$$

$$[\![\neg A]\!]_\rho = \neg [\![A]\!]_\rho$$

ρ : *variabili* $\rightarrow$ U

$[\![\_]\!]$: *termini*, *ambienti* $\rightarrow$ U

$\boxed{[\![\_]\!] : \textit{formule, ambienti} \rightarrow \{T, F\}}$

Logica predicativa

(semantica)

formule $A, B, \ldots ::= P\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid \textit{falso} \mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

$[\![\forall x.\, A]\!]_\rho = T$ se, *per ogni* $v \in U$, $[\![A]\!]_{\rho[x \mapsto v]} = T$
$= F$ *altrimenti*

$[\![\exists x.\, A]\!]_\rho = T$ se, *esiste* $v \in U$, $[\![A]\!]_{\rho[x \mapsto v]} = T$
$= F$ *altrimenti*

ρ : *variabili* $\rightarrow U$

$[\![\_]\!]$: *termini*, *ambienti* $\rightarrow U$

$\boxed{[\![\_]\!] : \textit{formule}, \textit{ambienti} \rightarrow \{T, F\}}$

Logica predicativa

($\models$)

formule $A, B, \ldots ::= P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \ldots \mid$ *falso* $\mid A \vee B$
$\mid A \wedge B \mid A \rightarrow B \mid \neg A \mid \forall x.\, A \mid \exists x.\, A$

Un modello m = $(U, [\![\_]\!])$ *soddisfa* una formula A, scritto $\models_m A$, se $[\![A]\!]_\rho = T$ per ogni ambiente ρ.

A si dice *valida* (una *tautologia*), scritto $\models A$, se è soddisfatta in ogni modello.

Logica predicativa

($\models$)

Le seguenti formule sono valide:

$\forall x.\ P(x) \leftrightarrow \neg\exists x.\ \neg P(x)$

$\exists x.\ P(x) \leftrightarrow \neg\forall x.\ \neg P(x)$

$\exists x.\forall y.\ P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.\ P(x,y)$

$\forall x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x.\ P(x) \wedge \forall x.\ Q(x))$

$\forall x.\ (P(x) \vee Q(x)) \leftarrow (\forall x.\ P(x) \vee \forall x.\ Q(x))$

$\exists x.\ (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x.\ P(x) \vee \exists x.\ Q(x))$

$\exists x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.\ P(x) \wedge \exists x.\ Q(x))$