Forme canoniche e forme normali

Prof. Daniele Gorla

FB ed EB associate

Teorema: per ogni espressione booleana esiste un'unica funzione booleana associata.

Dim:

- tramite l'induzione perfetta, costruisco la tavola di verità associata alla EB
- tale tavola di verità descrive *LA* FB associata

C.V.D.

Il viceversa NON vale: *per ogni funzione booleana esistono infinite espressioni booleane equivalenti*

Esempio:

x	f
0	1
1	0

Le EB che hanno questa come tavola di verità sono (tra le altre):

$$\overline{x}, \overline{x}+0, \overline{x}+0+0, \overline{x}+0+0+0, \ldots$$

Definiremo delle *forme canoniche* in modo che, ogni FB avrà un'unica EB in forma canonica associata.

Da una FB alla forma canonica (disgiuntiva) tramite esempi

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f vale 1 se e solo se $x=1$ e $y=1$
cioè, se e solo se $x \cdot y = 1$
Quindi, $f = x \cdot y$

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

f vale 1 se e solo se $x=1$ e $y=0$ (ossia, $\overline{y}=1$)
cioè, se e solo se $x \cdot \overline{y} = 1$
Quindi, $f = x \cdot \overline{y}$

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

f vale 1 se e solo se $x=1$ e $y=1$ oppure $x=1$ e $y=0$
cioè, se e solo se $x \cdot y + x \cdot \overline{y} = 1$
Quindi, $f = x \cdot y + x \cdot \overline{y}$

Forma canonica disgiuntiva (o SOP)

Assumiamo di avere n variabili $\{x_1,\ldots,x_n\}$:

ogni occorrenza di una singola variabile, sia in forma semplice x_i che complementata $\overline{x}_i$, è detta *letterale*.

Un *mintermine* è un prodotto di n letterali $l_1 \cdot \ldots \cdot l_n$ tale che $l_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$, per ogni $i \in \{1,..,n\}$

Una *forma canonica disgiuntiva* (o forma canonica *SOP*, dall'inglese *Sum Of Products*) è una somma (o disgiunzione, da qui il nome) di mintermini tutti distinti tra loro.

Esempio (n=3): $x_1x_2x_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

FCD e FB

Sia f una funzione nelle n variabili $\{x_1,\ldots,x_n\}$:

Un mintermine m è un *implicante* di f se, per ogni $b_1\ldots b_n \in \{0,1\}^n$,

$$m(b_1\ldots b_n) = 1 \;\Rightarrow\; f(b_1\ldots b_n) = 1$$

La FCD associata a f è la FCD che contiene tutti e soli i mintermini che sono implicanti di f.

Es.:

$x_3\ x_2\ x_1$	f
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

$\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1$ non è un implicante di f: $m(000)=1$ ma $f(000)=0$

$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1$ è un implicante: l'unico assegnamento che rende m=1 è 010 ed $f(010)=1$

Gli implicanti di f sono: $\bar{x}_3x_2\bar{x}_1, \bar{x}_3x_2x_1, x_3x_2x_1$

da cui la FCD di f è $\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_3x_2x_1 + x_3x_2x_1$

Identificare i mintermini

OSS: per ogni mintermine m, esiste un'unica n-pla di bit che lo fa valere 1.

Es.: $\bar{x}_3x_2\bar{x}_1$ vale 1 se e solo se $x_3 = x_1 = 0$ e $x_2 = 1$

In generale, la n-pla si ottiene assegnando 1 alle variabili che in m sono affermate e 0 a quelle che sono negate.

Si possono quindi mettere in corrispondenza biunivoca i 2^n mintermini con $\{0,1\}^n$:

$$m \leftrightarrow b_1\ldots b_n \quad \text{sse} \quad m(b_1\ldots b_n) = 1$$

Se m è in relazione con $b_1\ldots b_n$ e $b_1\ldots b_n$, visto come numero naturale codificato in binario a n bit, corrisponde al decimale k, allora m verrà chiamato m_k.

Es.: $\bar{x}_3x_2\bar{x}_1$ corrisponde a 010; avendo $010_2 = 2_{10}$, chiameremo m_2 tale mintermine.

Dalla FCD alla FB e viceversa

- Data un FB, la FCD associata si ottiene prendendo tutte le righe in cui la FB vale 1; la FCD conterrà tutti i mintermini associati alle stringhe binarie in tali righe.
- Data una FCD, la FB associata si ottiene mettendo 1 in corrispondenza delle righe le cui stringhe binarie sono associate ai mintermini della FCD e 0 altrove.

Es.:

$x_3\ x_2\ x_1$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

FCD: $m_1+m_3+m_5+m_6+m_7$

Da una EB alla sua FCD

Sia E una EB qualsiasi.

1. Porta tutte le negazioni di E direttamente sulle variabili (De Morgan) ed elimina le doppie negazioni (involuzione)
2. Porta l'espressione risultante in forma SOP, usando la distributività di · su +
3. Elimina gli addendi doppioni (idempotenza) e i prodotti che contengono un letterale e il suo negato (complemento e nullo)

A questo punto ho una *forma normale disgiuntiva* (o *SOP*), in cui ho una SOP ma gli addendi non sono in generale mintermini

4. Moltiplica ogni addendo che non contiene la variabile x_i per $(x_i + \bar{x}_i)$ (neutro e complemento)
5. Porta l'espressione risultante in forma SOP, usando la distributività di · su +
6. Elimina gli addendi doppioni (idempotenza)

Esempio

$$E = (x_1 + x_2(\overline{x_3 + \bar{x}_1 x_4}))x_3 + \overline{\bar{x}_2 x_4}$$

1) $E = (x_1 + x_2(\bar{x}_3 \cdot \overline{\bar{x}_1 x_4}))x_3 + (\bar{\bar{x}}_2 + \bar{x}_4) = (x_1 + x_2\bar{x}_3(\bar{\bar{x}}_1 + \bar{x}_4))x_3 + (x_2 + \bar{x}_4)$

$= (x_1 + x_2\bar{x}_3(x_1 + \bar{x}_4))x_3 + x_2 + \bar{x}_4$

2) $= x_1x_3 + x_2\bar{x}_3(x_1 + \bar{x}_4)x_3 + x_2 + \bar{x}_4 = x_1x_3 + x_1x_2\bar{x}_3x_3 + x_2\bar{x}_3x_3\bar{x}_4 + x_2 + \bar{x}_4$

3) $= x_1x_3 + x_2 + \bar{x}_4$ $\rightarrow$ *Forma Normale SOP*

4) $= x_1x_3(x_2 + \bar{x}_2)(x_4 + \bar{x}_4) + x_2(x_1 + \bar{x}_1)(x_3 + \bar{x}_3)(x_4 + \bar{x}_4) + \bar{x}_4(x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3)$

5) $= m_{15} + m_{11} + m_{14} + m_{10} + m_{15} + m_{14} + m_{13} + m_{12} + m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_{14} + m_{12} + m_{10} + m_8 + m_6 + m_4 + m_2 + m_0$

6) $= m_{15} + m_{14} + m_{13} + m_{12} + m_{11} + m_{10} + m_8 + m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_2 + m_0$

$\rightarrow$ *Forma Canonica SOP*

Da una FND alla FB

Anche le *forme normali (disgiuntive)* possono essere usate per derivare velocemente la tavola di verità di una FB:

Siano $\{x_1, \ldots, x_n\}$ la variabili nella FND

Mentre ogni mintermine identifica univocamente una sola riga della tabella, ora ogni addendo (prodotto di letterali) della FND identifica un insieme di righe nel seguente modo:

- se il letterale associato a x_j è negato, x_j deve valere 0;
- se il letterale associato a x_j è affermato, x_j deve valere 1;
- se x_j non compare, potrà valere indifferentemente 0 o 1.

Nella parte sinistra della tavola di verità mettiamo tutti i possibili assegnamenti alle variabili; nella parte destra mettiamo un 1 in corrispondenza di tutte le righe identificate da almeno un addendo.

Esempio

$$E = \bar{x}_2 x_1 + x_3 x_2 x_1$$

Il primo addendo vale 1 con gli assegnamenti 001 e 101
Il secondo addendo vale 1 solo per 111 (è un mintermine!)
da cui

$\bar{x}_2 x_1$

$x_3 x_2 x_1$

$x_3\ x_2\ x_1$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Forme POS (tramite esempi)

x y	f
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

$f = \bar{x}y + x\bar{y} + xy$. Ma possiamo descrivere f anche in termini dei suoi 0

f vale 0 se e solo se $x = 0$ e $y = 0$
cioè, $\bar{f} = 1$ se e solo se $\bar{x} = \bar{y} = 1$
Quindi, $\bar{f} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, da cui $f = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x + y$

x y	f
0 0	1
0 1	0
1 0	1
1 1	1

f vale 0 se e solo se $x = 0$ e $y = 1$
cioè, $\bar{f} = \bar{x} \cdot y$
da cui $f = x + \bar{y}$

x y	f
0 0	0
0 1	0
1 0	1
1 1	1

f vale 0 se e solo se $x = y = 0$ oppure $x = 0$ e $y = 1$
cioè, $\bar{f} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$
da cui $f = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y} = (\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}) \cdot (\overline{\bar{x} \cdot y}) = (x + y) \cdot (x + \bar{y})$

Forma Canonica Congiuntiva (o POS)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Assumiamo di avere n variabili $\{x_1,\ldots,x_n\}$:

Un *maxtermine* è una somma di n letterali $l_1+\ldots+l_n$ tale che

$$l_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}, \text{ per ogni } i \in \{1,..,n\}$$

Una *forma canonica congiuntiva* (o forma canonica *POS*, dall'inglese *Product Of Sums*) è un prodotto (o congiunzione, da qui il nome) di maxtermini tutti distinti tra loro.

Per ogni maxtermine M, esiste un'unica n-pla di bit che lo fa valere 0.

In generale, la n-pla si ottiene assegnando 0 alle variabili che in M sono affermate e 1 a quelle che sono negate.

Si possono mettere in corrispondenza biunivoca i 2^n maxtermini con $\{0,1\}^n$:

$$M \leftrightarrow b_1\ldots b_n \qquad \text{sse} \qquad M(b_1\ldots b_n) = 0$$

Se M è in relazione con $b_1\ldots b_n$ e $b_1\ldots b_n$, visto come numero naturale codificato in binario a n bit, corrisponde al decimale k, allora M verrà chiamato M_k.

Es.: $\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1$ vale 0 se e solo se $x_3 = x_1 = 1$ e $x_2 = 0$

E' quindi in corrispondenza biunivoca con 101 e quindi è M_5

Dalla FCC alla FB e viceversa

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

- Data un FB, la FCC associata si ottiene prendendo tutte le righe in cui la FB vale 0; la FCC conterrà tutti i maxtermini associati alle stringhe binarie in tali righe.
- Data una FCC, la FB associata si ottiene mettendo 0 in corrispondenza delle righe le cui stringhe binarie sono associate ai maxtermini della FCC e 1 altrove.

Es.:

$x_3\, x_2\, x_1$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

FCC: $M_0 \cdot M_2 \cdot M_4$

Da una EB alla sua FCC

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Sia E una EB qualsiasi.

1. Porta tutte le negazioni di E direttamente sulle variabili (De Morgan) ed elimina le doppie negazioni (involuzione)
2. Porta l'espressione risultante in forma POS, usando la distributività di + su ·
3. Elimina i fattori doppioni (idempotenza) e le somme che contengono un letterale e il suo negato (complemento e nullo)

A questo punto ho una *forma normale congiuntiva* (o *POS*), in cui ho una POS ma i fattori non sono in generale maxtermini

4. Somma $x_i \cdot \bar{x}_i$ ad ogni fattore che non contiene la variabile x_i (neutro e complemento)
5. Porta l'espressione risultante in forma POS, usando la distributività di + su ·
6. Elimina i fattori doppioni (idempotenza)

Esempio

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$E = \overline{x + y\bar{z}} + \bar{y}z$$

1) $E = \bar{x}(\bar{y}+z) + \bar{y}z$

2) $= (\bar{x}(\bar{y}+z)+\bar{y})(\bar{x}(\bar{y}+z)+z) = (\bar{x}+\bar{y})(\bar{y}+z+\bar{y})(\bar{x}+z)(\bar{y}+z+z)$

3) $= (\bar{x}+\bar{y})(\bar{y}+z)(\bar{x}+z)$ $\rightarrow$ *Forma Normale POS*

4) $= (\bar{x}+\bar{y}+z\bar{z})(\bar{y}+z+x\bar{x})(\bar{x}+z+y\bar{y})$

5) $= M_6 \cdot M_7 \cdot M_2 \cdot M_6 \cdot M_4 \cdot M_6$

6) $= M_7 \cdot M_6 \cdot M_4 \cdot M_2$ $\rightarrow$ *Forma Canonica POS*

Da una FNC alla FB

Anche le *forma normali congiuntive* possono essere usate per derivare velocemente la tavola di verità di una FB; il procedimento è duale rispetto alle FND:

Ogni fattore (somma di letterali) della FNC è associato a un insieme di righe nel seguente modo:

- se il letterale associato a x_j è negato, x_j deve valere 1;
- se il letterale associato a x_j è affermato, x_j deve valere 0;
- se x_j non compare, può valere o 0 o 1.

A questo punto, nella parte destra della tavola di verità poniamo uno 0 in corrispondenza di tutte le righe così identificate.

ES.:

$$E = (\overline{x}_2 + x_1)(x_3 + x_2 + x_1)$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

FB ed EB associate

Teorema: per ogni EB esiste un'unica FB associata.

Teorema: per ogni FB esiste un'unica EB in FCD ed un'unica EB in FCC associata.

N.B.: l'unicità è a meno di commutatività e associatività di + e · !!

Invece le FND e FNC non sono uniche.

ES.:

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ha come FCD $m_2 + m_3 + m_7$, cioè

$$\overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 + \overline{x}_3 x_2 x_1 + x_3 x_2 x_1$$

$$= \overline{x}_3 x_2 (\overline{x}_1 + x_1) + x_3 x_2 x_1 = \overline{x}_3 x_2 + x_3 x_2 x_1$$

$$= \overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 + (\overline{x}_3 + x_3) x_2 x_1 = \overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 + x_2 x_1$$