UNITELMA SAPIENZA

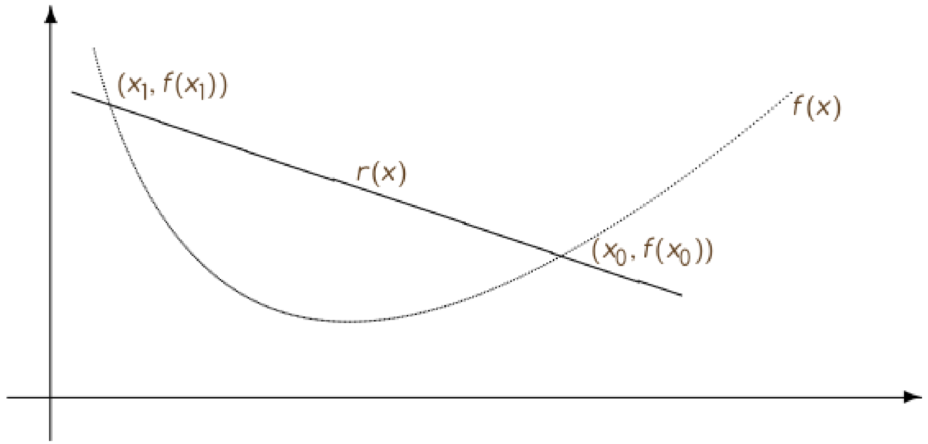
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

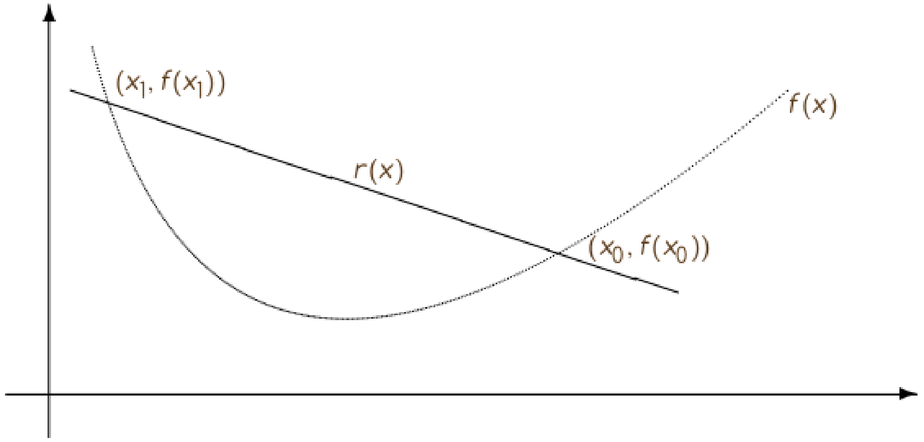
13. La derivata

Rette secanti



Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, due punti distinti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, e tracciamo il suo grafico e la **retta secante** il grafico nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

Rette secanti



la retta secante ha equazione

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

Il rapporto incrementale

Chiameremo **rapporto incrementale** la variazione media di una certa funzione rispetto alla variazione della variabile indipendente,

Il rapporto incrementale

Chiameremo **rapporto incrementale** la variazione media di una certa funzione rispetto alla variazione della variabile indipendente, cioè la frazione

$$\Delta f(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il rapporto incrementale

Chiameremo **rapporto incrementale** la variazione media di una certa funzione rispetto alla variazione della variabile indipendente, cioè la frazione

$$\Delta f(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ponendo $x = x_0 + h$, cioè $h = x - x_0$, abbiamo anche la seguente scrittura equivalente

$$\Delta f(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione. Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme aperto, e un punto $x_0 \in A$, diremo che f è **derivabile** in x_0 se

La derivata

Definizione. Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme aperto, e un punto $x_0 \in A$, diremo che f è **derivabile** in x_0 se il limite

$$\lim_{h\to 0} \Delta f(x_0, h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

esiste finito.

La derivata

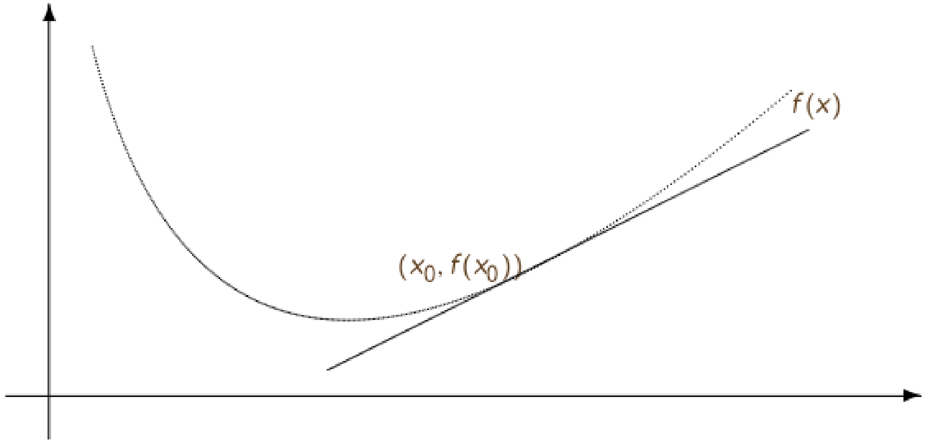
Definizione. Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme aperto, e un punto $x_0 \in A$, diremo che f è **derivabile** in x_0 se il limite

$$\lim_{h \to 0} \Delta f(x_0, h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

esiste finito. Tale quantità viene chiamata **derivata** della funzione f nel punto x_0 e indicata con i simboli

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Rette tangenti



la retta tangente ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Alcune derivate elementari

Alcuni facili esempi. Consideriamo la funzione costante $f(x) = c$

Alcuni facili esempi. Consideriamo la funzione costante $f(x) = c$

$$\frac{d}{dx}c = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Alcune derivate elementari

Alcuni facili esempi. Consideriamo la funzione costante $f(x) = c$

$$\frac{d}{dx}c = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$$

poi la funzione $f(x) = x$

$$\frac{d}{dx}x = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = 1$$

Alcune derivate elementari

Proseguiamo con la funzione quadratica $f(x) = x^2$

Alcune derivate elementari

Proseguiamo con la funzione quadratica $f(x) = x^2$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Alcune derivate elementari

Proseguiamo con la funzione quadratica $f(x) = x^2$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2hx}{h} + \frac{h^2}{h} \right) = 2x$$

Alcune derivate elementari

Proseguiamo con la funzione quadratica $f(x) = x^2$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2hx}{h} + \frac{h^2}{h} \right) = 2x$$

si può generalizzare con $f(x) = x^k$ e vale

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$$

Alcune derivate elementari

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Passiamo ora alle funzioni trigonometriche

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Alcune derivate elementari

Passiamo ora alle funzioni trigonometriche

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(h)}{h}$$

Alcune derivate elementari

Passiamo ora alle funzioni trigonometriche

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

Alcune derivate elementari

Passiamo ora alle funzioni trigonometriche

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

Alcune derivate elementari

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Alcune derivate elementari

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}+\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}\right) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}
$$

Alcune derivate elementari

Completiamo la lezione considerando la funzione esponenziale

$$\frac{d}{dx}e^{x} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h}$$

Alcune derivate elementari

Completiamo la lezione considerando la funzione esponenziale

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

ricordando il celeberrimo limite notevole...

Osservazioni conclusive

Nel seguito diremo che una funzione è derivabile in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste

$$f'(x) \qquad \forall x \in A$$

Osservazioni conclusive

Nel seguito diremo che una funzione è derivabile in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste

$$f'(x) \qquad \forall x \in A$$

Inoltre se la funzione f' risulta essere una funzione continua diremo che $f \in C^1(A)$.

Osservazioni conclusive

Concludiamo questa lezione osservando che una funzione continua non è necessariamente derivabile, per esempio se $f(x) = |x|$ abbiamo che

Osservazioni conclusive

Concludiamo questa lezione osservando che una funzione continua non è necessariamente derivabile, per esempio se $f(x) = |x|$ abbiamo che

$$\Delta f(0,h) = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

Osservazioni conclusive

Invece una funzione derivabile è sempre continua

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] =$$

Invece una funzione derivabile è sempre continua

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Osservazioni conclusive

Invece una funzione derivabile è sempre continua

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \longrightarrow x_0} (x - x_0)$$

Osservazioni conclusive

Invece una funzione derivabile è sempre continua

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \longrightarrow x_0} (x - x_0) = 0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Protagonisti

Sir Isaac Newton

1643 - 1727