UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

13. Eventi indipendenti

Scopo della lezione

1. Approfondire il concetto di eventi indipendenti, esplorandone diverse interpretazioni;
2. Definire poi una misura quantitativa delle dipendenza fra eventi.

Eventi indipendenti

Ricordiamo la definizione di eventi indipendenti.

Due eventi A e B si dicono indipendenti se

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Per esperimenti ripetuti come le estrazioni da un'urna con reinserimento, la definizione di indipendenza che abbiamo dato generalizza il principio della moltiplicazione che abbiamo visto nella trattazione combinatoria del modello classico.

Eventi indipendenti

Possiamo dare una definizione ricorsiva di indipendenza per il caso generale di n eventi.

Diremo che gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono indipendenti se

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\ldots\mathbf{P}(A_n)$$

e tutte le n sottofamiglie di $n-1$ eventi costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

Come per le altre nozioni di base, abbiamo introdotto l'indipendenza in maniera assiomatica, introducendo una definizione che parte dalla formalizzazione della nostra intuizione di quello che avviene nel modello classico.

Eventi indipendenti

La definizione di indipendenza cattura quindi la nostra idea di eventi che non si influenzano reciprocamente.

Ma occorre ribadire che, una volta formulato il modello, l'indipendenza è una proprietà da **verificare** all'interno del modello stesso e non da dedurre ragionando sull'esperimento che il nostro modello vuole descrivere.

Il seguente esempio è utile per illustrare questo punto.

Esempio 1

Rimanendo nel contesto del modello classico consideriamo il lancio di un dado con $2k$ facce, $k \in \mathbb{N}$.

Definiamo i seguenti eventi:

$$A = \{\text{il risultato del lancio è un numero pari}\}$$
$$B = \{\text{il risultato del lancio è } \leq k\}$$

Ci chiediamo se A e B sono eventi indipendenti oppure no.

Si vede subito che $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$.

Il calcolo di $\mathbf{P}(A \cap B)$ richiede maggiore attenzione.

Abbiamo

$$A \cap B = \begin{cases} \{2, 4, \ldots, k\} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \{2, 4, \ldots, k-1\} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \begin{cases} \dfrac{|\{2, 4, \ldots, k\}|}{2k} = \dfrac{1}{4} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \dfrac{|\{2, 4, \ldots, k-1\}|}{2k} = \dfrac{k-1}{4k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Ne concludiamo che gli eventi A e B sono indipendenti se k è pari e dipendenti se k è dispari.

Esempi

A prima vista questo risultato potrebbe sorprendere se si concepisce l'indipendenza in termini di (non) influenza di un evento su un altro che si verifica successivamente.

Qui invece a abbiamo due eventi riferiti a un singolo esperimento e l'indipendenza c'è o meno a secondo della parità di k.

Il risultato che abbiamo appena derivato appare più naturale se interpretiamo la probabilità condizionata in termini di informazione parziale.

Esempi

Infatti se k è pari sapere che è uscito un numero basso non ci aiuta a capire se tale numero è pari o dispari. Mentre se k è dispari questa informazione è rilevante.

Possiamo dire che assegnare le probabilità degli eventi elementari si basa sulla nostra conoscenza e quando acquistiamo ulteriore informazione, tale assegnazione potrebbe cambiare.

Il prossimo esempio riguarda eventi non equiprobabili.

Esempi

Esempio 2

Consideriamo una moneta che con $\mathbf{P}(T) = p$; $\mathbf{P}(C) = 1 - p$.
Effettuiamo tre lanci indipendenti della moneta e consideriamo gli eventi

$$A = \{\text{esce al più una croce}\}$$
$$B = \{\text{tutti i lanci danno lo stesso risultato}\},$$

cioè

$$A = \{TTT, TTC, TCT, CTT\}$$
$$B = \{TTT, CCC\}.$$

Esempi

Abbiamo

$$\mathbf{P}(A) = p^3 + 3p^2(1-p)$$
$$\mathbf{P}(B) = p^3 + (1-p)^3$$
$$\mathbf{P}(A \cap B) = p^3.$$

Dobbiamo controllare se $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B)$ ovvero se

$$[p^3 + 3p^2(1-p)] \cdot [p^3 + (1-p)^3] = p^3.$$

Esempi

Con qualche calcolo l'equazione diventa

$$p^2(2p-1)(p-1)^2 = 0,$$

che ha come soluzioni 0, $\frac{1}{2}$ e 1.

Ne deduciamo che i due evento sono indipendenti solo nei casi banali e nel caso simmetrico, ovvero nel modello classico.

Indipendenza a coppie

Gli eventi di una famiglia posso essere indipendenti due a due senza che la famiglia sia globalmente indipendente.

Queta nozione più debole è detta indipendenza a coppie.

Esempi

Consideriamo come spazio degli eventi l'insieme

$$S = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$$

e assumiamo $\mathbf{P}(x) = \frac{1}{9}$ per ogni $x \in S$.

Consideriamo gli eventi $A_k =$ la k-esima lettera è a.

Calcoliamo $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$ e $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$.

Esempi

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA — DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{|\{abc, acb, aaa\}|}{|S|} = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{P}(A_2) = \frac{|\{cab, bac, aaa\}|}{|S|} = \frac{1}{3};$$

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{|\{aaa\}|}{|S|} = \frac{1}{9}.$$

Allora abbiamo $\mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$ e quindi A_1 e A_2 sono indipendenti.

Nello stesso modo si vede che le coppia A_1 e A_3 e la coppia A_2 e A_3 sono coppie di eventi indipendenti.

Esempi

La terna A_1, A_2, A_3 non è peroò una terna di eventi indipendenti.

Infatti

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{|\{aaa\}|}{|S|} = \frac{1}{9} \neq \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{27}.$$

Correlazione fra eventi

Due eventi, A e B con $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ si dicono *correlati positivamente* se $P(A|B) > P(A)$.
Tale condizione è equivalente a $P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$ e dunque è simmetrica.

Due eventi, A e B con $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ si dicono *correlati negativamente* se $P(A|B) < P(A)$ o equivalentemente $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$.

Esempio

Consideriamo il lancio di due dadi a sei facce non truccati e chiamiamo X e Y i risultati ottenuti rispettivamente dal primo e dal secondo dado.

Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} A &= \{X \text{ pari}\}, \\ B &= \{X + Y \text{ pari}\}, \\ C &= \{X + Y \leq 4\}, \\ D &= \{X \leq 2\}, \\ E &= \{\max(X, Y) > 3\}. \end{aligned}$$

Esempio

Abbiamo poi:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(X \text{ pari} \cap Y \text{ pari}) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}(C \cap D) = \frac{1}{36}|\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}| = \frac{5}{36},$$

$$\mathbf{P}(C \cap E) = 0$$

Ne deduciamo che:

- A ed B sono indipendenti,
- C e D sono correlati positivamente,
- C e E sono correlati negativamente.