Compatibilità di sistemi di congruenze lineari con moduli non coprimi

Il Teorema Cinese del Resto garantisce l'esistenza e l'unicità (modulo il prodotto dei moduli) di un sistema Cinese con moduli a due a due coprimi. Ricordiamo che un sistema Cinese è un sistema di conguenze lineari della forma

$$\begin{cases} X = a_1 & \pmod{n_1} \\ X = a_2 & \pmod{n_2} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ X = a_r & \pmod{n_r} \end{cases}$$

dove $r, n_1, \dots, n_r$ sono interi positivi e $a_1, \dots, a_r$ sono interi. Pertanto, in un sistema Cinese, l'indeterminata X si presenta con coefficiente 1 in ciascuna delle congruenze. Esiste una condizione necessaria e sufficiente di compatibilità anche quando i moduli sono non coprimi. In particolare vale il seguente teorema (la cui dimostrazione potete trovare sul libro di Campanella)

Teorema 1. *Siano $r, n_1, \dots, n_r$ ed $a_1, \dots, a_r$ interi. Il sistema*

$$\begin{cases} X = a_1 & \pmod{n_1} \\ X = a_2 & \pmod{n_2} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ X = a_r & \pmod{n_r} \end{cases}$$

è compatibile se e solo se $(n_i, n_j) | a_i - a_j$. dove al solito, (m, n) denota il massimo comune divisore di n ed m mentre con la scrittura $b|c$ si intende che b divide c.

Il precedente Teorema non si trova nelle videolezioni né l'ho enunciato io. La ragione è che non serve per risolvere gli esercizi. Il metodo di sostituzione, che avete appreso nelle videolezioni, è elementare e potente abbastanza da risolvere il problema. Illustriamolo nel caso di due sole congruenze:

$$\begin{cases} X = a & \pmod{m} \\ X = b & \pmod{n} \end{cases}$$

Procedendo per sostituzione della prima equazione nella seconda, si ottiene l'equazione

$$a + sm \equiv b \pmod{n}$$

che si riscrive come

$$sm \equiv b - a \pmod{n}.$$

La precedente è una congruenza della forma $\alpha X = \beta \pmod{\nu}$ con $X = s$, $\alpha = m$, $\beta = b - a$ e $\nu = n$. Applicando la nota condizione di compatibilità per una siffatta congruenza e ricordando che il minimo comune multiplo di m ed n si ottiene dividendo mn per d, si ottiene il risultato stabilito nel teorema. Se procedete per sostituzione non sbagliate!