UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

30. Il teorema degli orlati

Richiami

- Il determinante di una matrice quadrata misura la lineare indipendenza delle righe (o equivalentemente delle colonne) della matrice
- E' importante saper calcolare il rango anche di matrici non quadrate (es.: per applicare il teorema di Rouché-Capelli)
- Oggi: **Il teorema degli orlati**
- **Calcolo del rango di una matrice per mezzo del determinante delle sue sottomatrici**

Cose che sappiamo

- Il determinante di una matrice quadrata $n \times n$ è diverso da 0 solo se le sue colonne sono linearmente indipendenti.
- In questo caso, il rango è esattamente n. Se il rango è inferiore, allora le n colonne devono essere linearmente dipendenti, e il determinante della matrice è 0.
- Le colonne di una matrice quadrata sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le sue righe.
- La dimensione del sottospazio vettoriale di K^n generato dalle righe di una matrice $m \times n$ coincide con la dimensione del sottospazio di K^m generato dalle sue colonne.

Obiettivo: verificare se alcune righe (o colonne) di una matrice siano linearmente indipendenti calcolando dei determinanti.

Minori di una matrice

Abbiamo una matrice $m \times n$. Che cos'è un suo minore?

Un minore di ordine k è il determinante di una sottomatrice $k \times k$ ottenuta scegliendo k righe e k colonne (anche non adiacenti).

Ad esempio, esistono $36 = 6 \cdot 6$ minori di ordine 2 di una matrice 4×4 perché si possono scegliere 2 righe (o 2 colonne) dalle 4 della matrice in $\binom{4}{2} = 6$ modi diversi.

Se un dato minore $k \times k$ è diverso da 0, allora le sue (del minore) righe e colonne sono linearmente indipendenti.

Matrici $h \times n$

M è una matrice con h righe e $n > h$ colonne a coefficienti in un campo K.

Se un minore di ordine h di M è diverso da 0, le sue h colonne (che sono anche colonne di M) sono linearmente indipendenti. Pertanto il sottospazio di K^h generato dalle colonne di M contiene almeno h elementi linearmente indipendenti, ed è quindi tutto K^h.

La matrice M ha quindi rango h.

Di conseguenza, il sottospazio di K^n generato dalle h righe della matrice ha dimensione h, e quindi le h righe della matrice sono linearmente indipendenti.

Le h righe di una matrice $h \times n$ sono linearmente indipendenti non appena un minore di ordine h sia non nullo.

Minori non nulli

Le h righe di una matrice $h \times n$ sono linearmente indipendenti non appena un minore di ordine h sia non nullo.

- Se un minore di ordine h di una matrice M è diverso da 0, allora le h righe di M su cui insiste sono sicuramente linearmente indipendenti.
- Se un minore di ordine h di una matrice M è diverso da 0, allora le h colonne di M su cui insiste sono sicuramente linearmente indipendenti.
- Se un minore di ordine h di una matrice M è diverso da 0, allora M ha rango almeno h.

E' vera un'affermazione più precisa

Teorema

Il rango di una matrice M coincide con il più grande ordine di un minore di M diverso da 0.

Due enunciati sul rango - I

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema

Il rango di una matrice M coincide con il più grande ordine di un minore di M diverso da 0.

Ci sono troppi minori in una matrice, e verificare che si annullano tutti i minori di un dato ordine è una strategia inefficiente per il calcolo del rango. Si può tuttavia dimostrare che serve controllarne solo alcuni:

Teorema (degli orlati)

Se un minore di ordine h di una matrice M è non nullo e tutti i minori di ordine $h+1$ che ne contengono le righe e le colonne si annullano, allora M ha rango esattamente h.

Ci occuperemo, nel resto della lezione, di dimostrare queste due affermazioni.

Teorema

Il rango di una matrice M coincide con il più grande ordine di un minore di M diverso da 0*.*

Teorema (degli orlati)

Se un minore di ordine h di una matrice M è non nullo e tutti i minori di ordine $h+1$ *che ne contengono le righe e le colonne si annullano, allora M ha rango esattamente h.*

E' sufficiente dimostrare la seconda (più precisa) affermazione. In effetti, se un minore di ordine h della matrice M è non nullo, ma tutti i minori di ordine maggiore di h si annullano, allora in particolare si annullano i minori di ordine $h+1$ che orlano il minore non nullo di ordine h. Pertanto, per il teorema degli orlati, la matrice M ha rango h.

Matrici con $h + 1$ righe - I

Consideriamo una matrice M che possiede $h + 1$ righe e n colonne, con $n > h$.

Supponiamo che M abbia un minore $h \times h$ diverso da 0, e che tutti i minori di ordine $h + 1$ che lo orlano siano nulli.

Le h colonne che intercettano il minore $h \times h$ non nullo devono essere linearmente indipendenti. Se aggiungo la riga che rimane e una delle altre colonne, ottengo una sottomatrice $(h + 1) \times (h + 1)$ il cui determinante è nullo.

Le sue colonne (che appartengono a K^{h+1}) sono quindi linearmente dipendenti.

Matrici con $h + 1$ righe - II

In particolare, la colonna che ho aggiunto deve essere combinazione lineare delle precedenti h, che erano linearmente indipendenti.

Ripetendo il ragionamento per ogni ulteriore colonna, scopro che non solo le h colonne che intercettano il minore non nullo sono linearmente indipendenti, ma tutte le altre sono loro combinazione lineare.

In conclusione, la matrice ha rango h. Pertanto la riga che non intercetta il minore di ordine h non nullo è combinazione lineare delle altre h.

Se in una matrice $(h + 1) \times n$, con $n > h$, un minore di ordine h è non nullo, ma tutti i minori di ordine $h + 1$ che lo orlano si annullano, allora la riga che non intercetta il minore non nullo è combinazione lineare delle altre, che sono invece linearmente indipendenti.

Caso generale

Se in una matrice $(h+1) \times n$, con $n > h$, un minore di ordine h è non nullo, ma tutti i minori di ordine $h+1$ che lo orlano si annullano, allora la riga che non intercetta il minore non nullo è combinazione lineare delle altre, che sono invece linearmente indipendenti.

Siamo pronti per il caso generale: M è una matrice $m \times n$ — con $m, n > h$ — che possiede un minore $h \times h$ non nullo orlato da soli minori $(h+1) \times (h+1)$ che si annullano.

Estraiamo da M le h righe che passano per il minore non nullo, e aggiungiamone una sola altra delle righe rimanenti. Per quanto già detto, la riga aggiunta è combinazione lineare delle h righe precedenti, che sono linearmente indipendenti.

Possiamo ripetere questo ragionamento per ogni altra riga.

M possiede quindi h righe linearmente indipendenti, delle quali ogni altra riga è combinazione lineare. La matrice M ha quindi rango h.

Uso del teorema degli orlati

Conseguenze:

- Se in una matrice si annullano tutti i minori di un dato ordine h, devono annullarsi anche tutti i minori di ordine maggiore.
- Il rango di una matrice può essere calcolato in maniera ricorsiva:
  - Cerco un minore non nullo di ordine 1. Se non lo trovo, la matrice ha rango 0 (e ha quindi tutti i coefficienti nulli).
  - Se invece trovo un minore non nullo di ordine 1, cerco un minore non nullo tra quelli di ordine 2 che lo orlano. Se non ne trovo, la matrice ha rango 1.
  - Se invece trovo un minore non nullo di ordine 2, cerco un minore non nullo tra quelli di ordine 3 che lo orlano. Se non ne trovo, la matrice ha rango 2.
  - Continuo finché tutti i minori controllati si annullano.
- In generale, se ho un minore non nullo di ordine h, posso solo concludere che la matrice ha rango $\geq h$.

Avvertenze

La via più pratica per il calcolo del rango di una matrice rimane quella di svolgere un'eliminazione di Gauss e contare il numero dei pivot.

Il teorema degli orlati è in generale un sistema inefficiente, perché richiede la valutazione di molti determinanti, ciascuno dei quali può esigere un calcolo oneroso.

La strategia di orlare ricorsivamente un minore non nullo diventa efficiente quando la matrice di cui calcolare il rango dipende da parametri. In questo caso, lo svolgimento del procedimento di eliminazione richiederebbe lo studio dell'albero di svolgimento dell'algoritmo, mentre la tecnica di orlare minori non nulli può offrire un sistema più economico di controllare i vari casi.

La prossima volta, vedremo questa strategia all'azione su alcuni esempi pratici.