Algebra di Boole

Prof. Daniele Gorla

Codifiche binarie

Perchè il codice binario viene utilizzato nel progetto di circuiti digitali?

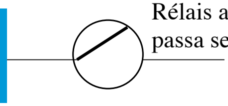
George Boole dimostrò come la logica possa essere ridotta ad un sistema algebrico molto semplice, che utilizza solo un codice binario (0 e 1, con 3 operazioni fondamentali).

Il codice binario fu trovato particolarmente utile nella *teoria della commutazione* (Claude Shannon) per descrivere il comportamento dei circuiti digitali (1=chiuso, 0=aperto).

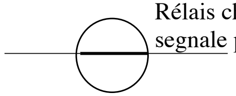
2

Rélais

..ai tempi di Shannon i commutatori telefonici erano reti di rélais (interruttori)



Rélais aperto (non passa segnale)



Rélais chiuso (il segnale passa)

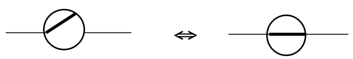
Shannon introdusse l'alfabeto binario per descrivere lo stato dei rélais

x variabile che descrive lo stato del rélais

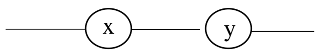
x assume valori in {0,1}

3

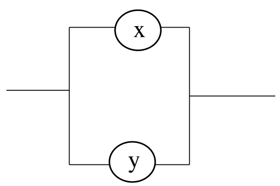
Operazioni Fondamentali sui Rélais



Commutazione di stato
Il rélais passa da aperto a chiuso e viceversa



Composizione in serie
Il segnale passa solo se sia x che y sono a 1, cioè i due rélais sono chiusi



Composizione in parallelo
Il segnale passa se almeno uno tra x e y è a 1, cioè chiuso

4

Algebra di Boole

$$(0,1,+,\cdot,\bar{\ })$$

dove:

$+\,,\,\cdot\,:\ \{0,1\}\times\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$
$\bar{\ }\,:\ \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

che godono delle seguenti proprietà:

Commutativa	$x+y = y+x$	$x\cdot y = y\cdot x$
Associativa	$x+(y+z) = (x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
Distributiva	$x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$	$x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z)$
Elemento neutro	$x+0=x$	$x\cdot 1=x$
Complemento	$x+\overline{x}=1$	$x\cdot\overline{x}=0$

5

Leggi derivate: Idempotenza

$x\cdot x = x$

$$x \underset{\text{neutro }\bullet}{=} x\cdot 1 \underset{\text{complemento }+}{=} x\cdot(x+\overline{x}) \underset{\text{distributiva }\bullet\,+}{=} x\cdot x + x\cdot\overline{x} \underset{\text{complemento }\bullet}{=} x\cdot x + 0 \underset{\text{neutro }+}{=} x\cdot x$$

$x+x = x$

$$x \underset{\text{neutro }+}{=} x+0 \underset{\text{complemento }\bullet}{=} x+(x\cdot\overline{x}) \underset{\text{distributiva }+\,\bullet}{=} (x+x)\cdot(x+\overline{x}) \underset{\text{complemento }+}{=} (x+x)\cdot 1 \underset{\text{neutro }\bullet}{=} x+x$$

6

Principio di Dualità

Come si vede dall'esempio precedente, la prova per la legge con + al posto di · si ottiene scambiando

- 0 e 1
- \+ e ·

Questo fenomeno si ha sempre nell'Algebra di Boole e deriva dal fatto che gli assiomi godono del principio di dualità

7

Leggi derivate: Elemento Annullatore

$$x\cdot 0 = 0$$

$$x\cdot 0 \underset{\text{complemento }\bullet}{=} x\cdot(x\cdot\overline{x}) \underset{\text{associativa}}{=} (x\cdot x)\cdot\overline{x} \underset{\text{idempotenza}}{=} x\cdot\overline{x} \underset{\text{complemento }\bullet}{=} 0$$

N.B.: una volta dimostrata, una legge derivata può essere usata come un assioma nel provare nuove leggi

Per dualità, $x+1=1$

8

Leggi derivate: Assorbimento

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$x + x \cdot y = x$$

$$x + x \cdot y \underset{\text{neutro }\bullet}{=} x \cdot 1 + x \cdot y \underset{\text{distributiva }\bullet\,+}{=} x \cdot (1 + y) \underset{\text{annullatore }+}{=} x \cdot 1 \underset{\text{neutro }\bullet}{=} x$$

Per dualità, $x \cdot (x+y) = x$

Leggi derivate: Involuzione

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$\overline{\overline{x}} = x$$

$$x \underset{\text{Neutro }\cdot}{=} x \cdot 1 \underset{\text{Complemento }+}{=} x \cdot (\overline{x} + \overline{\overline{x}}) \underset{\text{Distributiva }\cdot\,+}{=} x \cdot \overline{x} + x \cdot \overline{\overline{x}} =$$

$$\underset{\text{Complemento }\cdot}{=} 0 + x \cdot \overline{\overline{x}} \underset{\text{Complemento }\cdot}{=} \overline{x} \cdot \overline{\overline{x}} + x \cdot \overline{\overline{x}} \underset{\text{Distributiva }\cdot\,+}{=} (\overline{x} + x) \cdot \overline{\overline{x}} \underset{\text{Complem.}+}{=} 1 \cdot \overline{\overline{x}} \underset{\text{Neutro }\cdot}{=} \overline{\overline{x}}$$

Leggi derivate: De Morgan

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \qquad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x} \cdot (x \cdot y + \overline{x \cdot y}) + \overline{y} \cdot (x \cdot y + \overline{x \cdot y}) =$$

neutro e complemento

$$= \overline{x} \cdot x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{x \cdot y} + \overline{y} \cdot x \cdot y + \overline{y} \cdot \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{x \cdot y} + \overline{y} \cdot \overline{x \cdot y} =$$

distributiva — complemento, annullatore e neutro

$$= (\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{x \cdot y} = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{x \cdot y} + x \cdot y \cdot \overline{x \cdot y} = (\overline{x} + \overline{y} + x \cdot y) \cdot \overline{x \cdot y}$$

distributiva — neutro e complemento — distributiva

$$= (\overline{x} + \overline{y} + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + x) \cdot \overline{x \cdot y} = (\overline{x} + 1) \cdot (\overline{y} + 1) \cdot \overline{x \cdot y} = \overline{x \cdot y}$$

distributiva — complemento — annulatore e neutro

Dagli Assiomi alle Tavole di Verità

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

1. Per l'assioma dell'elemento neutro, $0 + \overline{0} = \overline{0}$
   Per l'assioma dell'elemento complementare, $0 + \overline{0} = 1$
   Per transitività, $\overline{0} = 1$ e, per dualità, $\overline{1} = 0$
2. Per l'elemento neutro, 0+0 = 0
   Per l'elemento annullatore, 0+1=1+0=1+1=1
3. Per dualità, 1·1 = 1 e 0·1 = 1·0 = 0·0 = 0

Quindi:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

x y	$x+y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

x y	$x \cdot y$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1