*Cognome*______________________________

*Informatica teledidattica 2019/2020* *Nome*______________________________

*Scritto di ALGEBRA del 07/05/2020*

*L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.*

*******************************************

**Esercizio 1.**

(**a**) Si calcoli il massimo comune divisore dei numeri 3522 e 321 e per esso si scriva un'identità di Bézout.

(**b**) Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X^{43} \equiv 43Y \pmod 7 \\ (XY)^{43} \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}.$$

(**c**) Dimostrare che per ogni intero $n$ il numero $n^{49}+3n^{38}+4n^{15}+3n^3+4n^2+6n$ è multiplo di 7.

**Esercizio 2.**

(**a**) Discutere la compatibilità e il tipo di infinità delle eventuali soluzioni del seguente sistema lineare reale, $k$ essendo un parametro reale.

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 3 \\ kx + 4y = 4 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases}.$$

(**b**) Siano $U$ e $V$ spazi vettoriali con basi $(u_1, u_2)$ e $(v_1, v_2, v_3)$, rispettivamente. Sia $f : U \to V$ l'aplicazione lineare tale che $f(u_1) = v_1 - v_2$ e $f(u_2) = 2v_1 + 3v_3$. Esibire un vettore $v$ di $V$ che non è immagine di alcun vettore di $U$ (detto altrimenti: un vettore $v$ la cui controimmagine sia vuota).

(**c**) Calcolare una base di autovettori per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ 0 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.**

(**a**) Siano $\sigma$, $\tau \in S_9$ le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli l'ordine di $\sigma^{-1}\tau\sigma$.

(**b**) Determinare il minimo intero $n \geq 2$ tale che il gruppo simmetrico $S_n$ contenga un elemento di ordine 77.

(**c**) Sia $G = GL_2(\mathbb{Z}_3)$ il gruppo delle matrici invertibili di ordine 2 sul campo $\mathbb{Z}_3$ dove l'operazione di gruppo è l'usuale moltiplicazione righe per colonne. Dopo aver verificato che le seguenti matrici sono in $G$ se ne calcoli l'ordine.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$