UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

10. Probabilità condizionata

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:

1. dare una formulazione precisa dell'idea che il verificarsi di un evento modifichi la probabilità del verificarsi di un altro;
2. estendere l'idea del principio della moltiplicazione nella trattazione combinatoria del modello classico a contesto più generale che abbiamo introdotto nella lezione precedente.

Primi esempi

Estraiamo una carta da un mazzo di 52.

La probabilità di ottenere un re è $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Se però sappiamo che la carta estratta è una figura allora la probabilità aumenta e diventa $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Infatti la scelta di una carta si è ristretta a sole 12 carte, 4 delle quali sono re.

Il numero dei casi favorevoli è rimasto lo stesso, mentre il numero dei casi possibili è diminuito.

Primi esempi

Può anche succedere che imporre una condizione restringa sia il numero dei casi favorevoli che il numero dei casi possibili.

Assegniamo i valori 11, 12, 13 a J, Q e K rispettivamente.

La probabilità di estrarre una figura sapendo di aver estratto una carta dispari è $\frac{8}{28}$.

In questo caso si è ristretto sia il numero dei casi favorevoli che il numero dei casi possibili.

Primi esempi

L'idea che abbiamo appena introdotto si presenta in maniera ancora più naturale quando abbiamo a che fare con esperimenti in più passi.

Estraiamo due carte in successione da un mazzo.

La probabilità di estrarre una carta di cuori alla prima estrazione è $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ e così pure alla seconda.

Ma se conosciamo l'esito della prima estrazione, la probabilità di estrarre una carta di cuori alla seconda cambia!

Infatti se la prima carta estratta è stata di cuori, la probabilità diventa $\frac{12}{51}$, mentre se non lo è stata diventa $\frac{13}{51}$.

Probabilità condizionata

Tutti gli esempi visti sinora hanno la stessa struttura:
A e B sono due eventi, ovvero due sottoinsiemi dello spazio dei campioni S.

Vogliamo calcolare la probabilità di A sapendo che si è verificato B.
Introduciamo la notazione $\mathbf{P}(A \mid B)$ che si legge *probabilità di A dato B*.

I casi possibili ora sono solo gli elementi di B mentre i casi favorevoli sono gli elementi di S che appartengono sia a A che a B, quindi gli elementi di $A \cap B$.

Probabilità condizionata

Abbiamo quindi:

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Possiamo riscriverla come

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} \cdot \frac{|S|}{|B|} = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Abbiamo riscritto la probabilità di A dato B come il quoziente di due probabilità.

Probabilità condizionata

Come sempre quando abbiamo a che fare con un quoziente dobbiamo assicurarci di non dividere per zero.

Come abbiamo fatto per per la costruzione degli assiomi, il modello classico ci serve da guida per una definizione generale.

Probabilità condizionata

Definizione:
Si dice probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B, con $\mathbf{P}(B) \neq 0$, la quantità

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

Se $\mathbf{P}(B) = 0$, la probabilità condizionata rispetto a B NON è definita.

Nota: è possibile costruire altri sistemi di assiomi all'interno dei quali la probabilità condizionata rispetto a eventi di probabilità 0 è ben definita, ma non ce ne occuperemo.

Esempio 1
Trovare la probabilità che una mano di poker contenga esattamente due re, sapendo che contiene esattamente un asso.

Abbiamo

$$\mathbf{P}(1\mathbf{A}) = \frac{4\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}},$$

$$\mathbf{P}(2\mathbf{K} \text{ e } 1\mathbf{A}) = \frac{\binom{4}{2}4\binom{44}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

Quindi

$$\mathbf{P}(2\mathbf{K}|1\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(2\mathbf{K} \text{ e } 1\mathbf{A})}{\mathbf{P}(1\mathbf{A})} = \frac{\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{48}{4}}.$$

Esempio 2
Si estraggono 2 carte da un mazzo di 52. Trovare la probabilità che siano due re, sapendo che almeno una è una figura.

Abbiamo

$$\mathbf{P}(2\mathbf{K} \text{ e almeno una figura}) = \mathbf{P}(2\mathbf{K}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}},$$

$$\mathbf{P}(\text{almeno una figura}) = 1 - \mathbf{P}(\text{nessuna figura}) = 1 - \frac{\binom{40}{2}}{\binom{52}{2}}.$$

Quindi

$$\mathbf{P}(2\mathbf{K}| \text{ almeno una figura}) = \frac{\mathbf{P}(2\mathbf{K})}{1 - \mathbf{P}(\text{nessuna figura})} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2} - \binom{40}{2}}.$$

Esempio 3
Una moneta viene lanciata due volte. Trovare la probabilità che il risultato sia due teste sapendo che il primo è testa.

Il nostro spazio di probabilità è ora $\{TT, TC, CT, CC\}$.

L'evento *escono due teste* corrisponde all'insieme $\{TT\}$ e l'evento *la prima è testa* all'insieme $\{TT, TC\}$.

Quindi

$$\mathbf{P}(\text{due teste} \mid \text{testa la prima}) = \frac{\mathbf{P}(\text{due teste} \cap \text{testa la prima})}{\mathbf{P}(\text{testa la prima})} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(\text{due teste})}{\mathbf{P}(\text{testa la prima})} = \frac{|\{TT\}|}{|\{TT, TC\}|} = \frac{1}{2}.$$

Esempi

Esempio 4
Una moneta viene lanciata due volte. Trovare la probabilità che il risultato sia due teste sapendo che almeno un risultato è testa.

Il nostro spazio di probabilità è ancora $\{TT, TC, CT, CC\}$.

L'evento *escono due teste* corrisponde all'insieme $\{TT\}$ e l'evento *almeno un risultato è testa* all'insieme $\{TT, TC, CT\}$.

Quindi

$$\mathbf{P}(\text{due teste} \mid \text{almeno una testa}) = \frac{\mathbf{P}(\text{due teste } \cap \text{ almeno una testa})}{\mathbf{P}(\text{almeno una testa})} =$$

$$\frac{\mathbf{P}(\text{due teste})}{\mathbf{P}(\text{almeno una testa})} = \frac{|\{TT\}|}{|\{TT, TC, CT\}|} = \frac{1}{3}$$

Eventi indipendenti

Torniamo all'esempio di una moneta lanciata due volte. Calcoliamo ora la probabilità che il secondo lancio dia testa sapendo che il primo è testa.

Il nostro spazio di probabilità è sempre $\{TT, TC, CT, CC\}$.

L'evento *la prima è testa* corrisponde all'insieme $\{TT, TC\}$, mentre l'evento *la seconda è testa* all'insieme $\{CT, TT\}$.

Abbiamo

$$\mathbf{P}(\text{seconda testa} \mid \text{prima testa}) = \frac{\mathbf{P}(\text{seconda testa } \cap \text{ prima testa})}{\mathbf{P}(\text{prima testa})} =$$

$$\frac{\mathbf{P}(\text{due teste})}{\mathbf{P}(\text{prima testa})} = \frac{|\{TT\}|}{|\{TT, TC\}|} = \frac{1}{2}$$

Eventi indipendenti

Se invece avvessimo semplicemente chiesto la probabilità che il secondo lancio dia testa,

$$\mathbf{P}(\text{seconda testa }) = \frac{|\{TT, CT\}|}{|\{TT, TC, CT, CC\}|} = \frac{1}{2}.$$

Come ci aspettiamo il risultato è lo stesso ed è in accordo con la nostra intuizione e le osservazioni empiriche: l'esito del primo lancio non ha influenza sul secondo.

Eventi indipendenti

In accordo con la nostra osservazione, diremo che due eventi A e B sono indipendenti se $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.

Questa definizione è sostanzialmente corretta, ma ha due difetti:

Eventi indipendenti

In accordo con la nostra osservazione, diremo che due eventi A e B sono indipendenti se $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.

Questa definizione è sostanzialmente corretta, ma ha due difetti:

- A e B non vi compaiono nello stesso modo,

Eventi indipendenti

In accordo con la nostra osservazione, diremo che due eventi A e B sono indipendenti se $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.

Questa definizione è sostanzialmente corretta, ma ha due difetti:

- A e B non vi compaiono nello stesso modo,
- non funziona se $\mathbf{P}(B) = 0$.

Eventi indipendenti

Ricordando la definizione di probabilità condizionata possiamo dare la seguente

Definizione:
Due eventi A e B si dicono indipendenti se

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Rispetto alla definizione precedente A e B vi figurano in maniera simmetrica e il fatto che possano avere probabilità nulla non costituisce un ostacolo.

Eventi indipendenti

La nozione di indipendenza può essere estesa a più di due eventi.

Per esempio tre eventi A, B e C si dicono indipendenti se

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C),\\
&\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),\\
&\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C),\\
&\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).
\end{aligned}$$

Osserviamo che il fatto che tre eventi siano tutti indipendenti a coppie non vuol dire che siano complessivamente indipendenti.

Eventi indipendenti

Consideriamo due gettoni che hanno $+\mathbf{1}$ su una faccia e $-\mathbf{1}$ sull'altra.

Definiamo i seguenti eventi

$$\begin{aligned} A &= \text{il primo gettone dà } +1 \\ B &= \text{il secondo gettone dà } +1 \\ C &= \text{il prodotto dei risultati è} +1. \end{aligned}$$

Lo spazio dei campioni che descrive ill nostro esperimento è $S = \{1_+2_+, 1_-2_+, 1_+2_-, 1_-2_-\}$.

Inoltre abbiamo $A = \{1_+2_+, 1_+2_-\}$; $B = \{1_+2_+, 1_-2_+\}$; $C = \{1_+2_+, 1_-2_-\}$.

Eventi indipendenti

Ognuno di questi eventi ha probabilità $\frac{1}{2}$. Inoltre sono tutti indipendenti a coppie.

Verifichiamolo per A e C:

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{|\{1_+ 2_+\}|}{|S|} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C).$$

Ma A, B e C **non** sono indipendenti.

Infatti

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{|\{1_+ 2_+\}|}{|S|} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

Eventi indipendenti

Possiamo dare una definizione ricorsiva di indipendenza per il caso generale di n eventi.

Diremo che gli eventi $A_1, A_2, \dots A_n$ sono indipendenti se

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\dots\mathbf{P}(A_n)$$

e tutte le n sottofamiglie di $n-1$ eventi costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

Per esperimenti ripetuti come le estrazioni da un'urna con reinserimento, la definizione di indipendenza che abbiamo dato generalizza il principio della moltiplicazione che abbiamo visto nella trattazione combinatoria del modello classico.