UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

32. Applicazioni geometriche

Esercizi di natura geometrica

- In algebra lineare si parla di rette, piani, dimensione
- Il corso di algebra lineare a matematica si chiamava un tempo *Geometria*
- **Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi vettoriali**
- **Sottospazi affini: retta per due punti, piano per tre punti**
- **Intersezione tra sottospazi affini**

Gergo

Se ho un sottospazio vettoriale $U \subset K^n$ posso

- darne una base:
  - se $u_1, \ldots u_k \in K^n$ sono una base di U, allora gli elementi di U sono tutti e soli quelli della forma

    $$t_1 u_1 + \ldots + t_k u_n, \qquad t_i \in K$$

    Al variare dei parametri $t_1, \ldots, t_k \in K$, ho ottenuto una *parametrizzazione lineare* di U, cioè delle equazioni parametriche di U;
- fornire una o più equazioni che sono soddisfatte da tutti e soli gli elementi di U:
  - ho trovato delle equazioni cartesiane del sottospazio U.

Le tecniche che abbiamo sviluppato permettono di passare da equazioni cartesiane a equazioni parametriche (risolvendo un sistema lineare) e viceversa (vedremo come).

Equazioni parametriche

- Un sottospazio di K^n può essere descritto in termini di generatori, o attraverso delle equazioni che deve soddisfare.
  - Se è dato in termini di generatori, ho già delle equazioni parametriche.
  - Se è invece dato in termini di equazioni cartesiane, basta risolverle per avere un'espressione parametrica.

Dare eq. parametriche della retta in $\mathbb{R}^3$ di eq. cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Eq. parametriche minimali

Dare equazioni parametriche del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (0, 3, 0, 1), (2, -1, 2, 0)$.

Equazioni cartesiane

- Se un sottospazio è dato in termini di generatori, si può utilizzare la nozione di rango per trovarne equazioni cartesiane.

Trovare equazioni cartesiane del piano in $\mathbb{R}^3$ generato da $(1, 2, -1), (2, 0, 1)$.

Eq. cartesiane minimali

- Anche le equazioni cartesiane possono essere date in maniera ridondante.

Descrivere il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x+2z=0 \\ y-z-t=0 \\ 3x+y+5z-t=0 \end{cases}$$

dandone un numero minimo di equazioni cartesiane.

Sottospazi affini

- Dal punto di vista geometrico, sono interessanti anche i sottospazi affini: quelli, cioè, che si ottengono traslando un sottospazio vettoriale di una quantità fissata
  - Traslando una retta per l'origine si ottiene una retta non necessariamente per l'origine
  - Traslando un piano per l'origine si ottiene un piano non necessariamente per l'origine
  - Traslando un sottospazio vettoriale (che passa sempre per l'origine) si ottiene un sottospazio affine (che non passa necessariamente per l'origine)
- Anche dei sottospazi affini si danno equazioni parametriche e cartesiane
  - Equazioni parametriche si ottengono sommando una quantità fissata alla parametrizzazione del corrispondente sottospazio vettoriale
  - Equazioni cartesiane si esibiscono fornendo un sistema di equazioni lineari, non omogeneo, le cui soluzioni siano il sottospazio affine

Retta per due punti

Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $P \equiv (1, 2, 1), Q \equiv (2, 1, 2)$.

Piano per tre punti

Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $P \equiv (1, 2, 1), Q \equiv (2, 1, 2), R \equiv (3, 0, 1)$.

Parametrizzazione di un piano

Dare una parametrizzazione lineare del piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $\pi : x - y + 3z = 5$.

Intersezione tra sottospazi affini

- L'intersezione di due sottospazi affini è ancora un sottospazio affine
- Se ho equazioni cartesiane di ciascuno dei due sottospazi, messe tutte insieme forniscono un sistema che descrive l'intersezione
  - Trovandone una quantità minimale (con l'eliminazione di Gauss) ottengo equazioni cartesiane dell'intersezione
  - Risolvendo il sistema, si ottiene invece una parametrizzazione lineare dell'intersezione.
- Se ho equazioni cartesiane del primo sottospazio e equazioni parametriche del secondo, sostituisco la parametrizzazione nel sistema e risolvo
  - La soluzione che ottengo mi dice per quali valori dei parametri i punti del secondo sottospazio appartengono anche al primo
- Se ho equazioni parametriche di entrambi i sottospazi, posso uguagliarle e risolvere. (sconsigliato!)

Un'intersezione

Calcolare l'intersezione in $\mathbb{R}^3$ del piano di equazione cartesiana $x - y + 3z = 5$ e di quello di equazione parametrica $(1 + t + s, t - 2s, 3 + t - s)$.