*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 12/02/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Siano a e b numeri interi. Determinare la classe di congruenza modulo 4 del numero $a^2 + b^2$ sapendo che $a^2 + b^2$ è un numero dispari.

(**b**) Risolvere se possibile il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} (X+Y)^3 \equiv 2 \pmod 3 \\ X^3 \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}.$$

(**c**) Calcolare la classe di congruenza modulo 5 del numero $13^{23^{21}}$.

Esercizio 2. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$, sia b un numero reale e sia f_b l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f_b(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $f_b(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3$ e $f_b(\mathbf{e}_3) = b\mathbf{e}_2$.

(**a**) Calcolare la dimensione dell'immagine di f_b al variare di b in $\mathbb{R}$.

(**b**) Stabilire se esiste $b \in \mathbb{R}$ in corrispondenza del quale f_b ammetta una base di autovettori rispetto a cui la matrice che rappresenta f_b sia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(**c**) In corrispondenza di $b = 0$ si ponga $f_0 = f$ e si determini l'unico endomorfismo non nullo g di $\mathbb{R}^3$ tale che

(i) $\operatorname{Im} g \subseteq \ker f$;

(ii) $g(\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{e}_2) = g(\mathbf{e}_3)$;

(iii) 1 è autovalore di g.

Esercizio 3.

(**a**) Elencare tutti i sottogruppi del gruppo $\mathbb{Z}_{42}$.

(**b**) Sia H un sottogruppo di un gruppo abeliano finito G. Si consideri l'insieme

$$\widetilde{H} = \{g \in G |\ g + g \in H\}$$

Si stabilisca se $\widetilde{H}$ è un sottogruppo di G.

(**c**) Sia n un intero maggiore o uguale a 3. Quante sono le permutazioni di S_n che mandano 1 in 3?