UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

18. Distribuzioni congiunte

$X, Y \quad P(X=x), P(Y=y)$

densità congiunta

$$P(X=x \cap Y=y) = P(X=x, Y=y)$$

- tabella
- formula

$X \backslash Y$	0	1	5
-2	0,1	0	0,4
3	0	0,2	0,3

$P(X=-2 \cap Y=0)=0{,}1$

$P(X=3, Y=0)=0$

$P(X=-2) = P(X=-2 \cap Y=0) +$
$P(X=-2 \cap Y=1) + P(X=-2 \cap Y=5) = \frac{1}{2}$

$P(X=3) = \frac{1}{2}$

$\boxed{P(X=-2)=\frac{1}{2}=P(X=3)}$

Densità marginale di X

$P(Y=0)=0,1;\ P(Y=1)=0,2;\ P(Y=5)=0,7$

$x \backslash y$	0	1	5
-2	0,05	0,1	0,35
3	0,05	0,1	0,35

$$P(X=i \cap Y=j) = \frac{c}{i+j} \quad i,j=1,\dots 4$$

$$c = \left(\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{i+j} \right)^{-1} = \frac{840}{3047}$$

$$\sum_{i,j} P(X=i \cap Y=j) = 1$$

Due dadi a 6 facce D_1, D_2

$$X = \max(D_1, D_2); \; Y = D_1 + D_2$$

$$p(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

$1 \leq x \leq 6$, $2 \leq y \leq 12$

se $x+1 > y \implies p(x,y) = 0$

$$p(1,2) = P(X=1, Y=2) = P(D_1=1, D_2=1)$$

$$= \frac{1}{36}$$

$$p(1,3) = P(X=1, Y=3) = 0$$

$$p(3,5) = P(X=3, Y=5) =$$

$$P(D_1 = 3, D_2 = 2 \cup D_1 = 2, D_2 = 3) =$$

$$\frac{2}{36}$$

$$0, \frac{1}{36}, \frac{2}{36}$$

Passare dalla dens. congiunta alla densità marginale

$$\sum_y P(X=x \cap Y=y) = P(X=x)$$

$$\sum_x P(X=x \cap Y=y) = P(Y=y)$$

funzioni di distrubuzione congiunta

$$F(x,y) = P(\underline{\underline{X \leq x}} \cap Y \leq y)$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0 \; ; \; \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x,y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$$

$$\lim_{y \to \infty} F(x,y) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

$\{X = x\}$, $\{Y = y\}$ sono indip.

<u>per ogni</u> valore di x, e y

in questo caso diremo che le v.a. X e Y

sono <u>v.a. indipendenti</u>

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$ (vuol dire indip.)

se X e Y sono indip. allora

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

l'indipendenza è data per definizione
non si può dedurre da un ragionamento
sul sistema fisico che stiamo modellando

bisogna controllare

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$$

l'indipendenza di X e Y coincide con la fattorizzazione delle loro funzioni di densità oppure di distribuzione

---

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

per ogni funzione f e g.

Distribuzioni condizionate

$$P(X = x \mid A) = \frac{P(X = x \cap A)}{P(A)}$$

al variare di x è una densità discreta

Densità discreta di X condizionata a A

Lancio di un dado a 6 facce

X = punteggio ; A = dispari

$P(A) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(X = x \mid A)$

$$P(X=1 \mid A) = \frac{P(X=1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(X=1)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/6}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2 \mid A) = \frac{P(X=2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

$$P(X=3|A)=P(X=5|A)=\frac{1}{3}$$

$$P(X=4|A)=P(X=6|A)=0$$

$$p_{X|A}(1)=p_{X|A}(3)=p_{X|A}(5)=\frac{1}{3}$$

$$p_{X|A}(x)=0 \quad \text{se } x\neq 1,3,5$$

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}$$

densità congiunta di X e Y

densità discreta di Y

densità condizionata di X data Y

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$p_{XY}(x, y) = p_{X|Y}(x|y)\, p_Y(y)$$

Lancio un dado a 4 facce

X punteggio; poi lancio X monete

Y = numero di teste ottenute

$X \in \{1, 2, 3, 4\}$; $Y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$P(X=i)=\frac{1}{4} \qquad i=1,2,3,4$$

$$P(Y=j \mid X=i)=\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

$$P(X=i \cap Y=j)=\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\frac{1}{4}=\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}$$

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{4} P(X=i\cap Y=j)=\sum_{i=1}^{4}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}$$

$$P(Y=2)=\sum_{i=1}^{4}\binom{i}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}=\sum_{i=2}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}\binom{i}{2}=$$

$$P(Y=2) = \sum_{i=2}^{4} \binom{i}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{6}{16}\right] = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$P(Y=1)$, $P(Y=0)$, ...