UNITELMA SAPIENZA

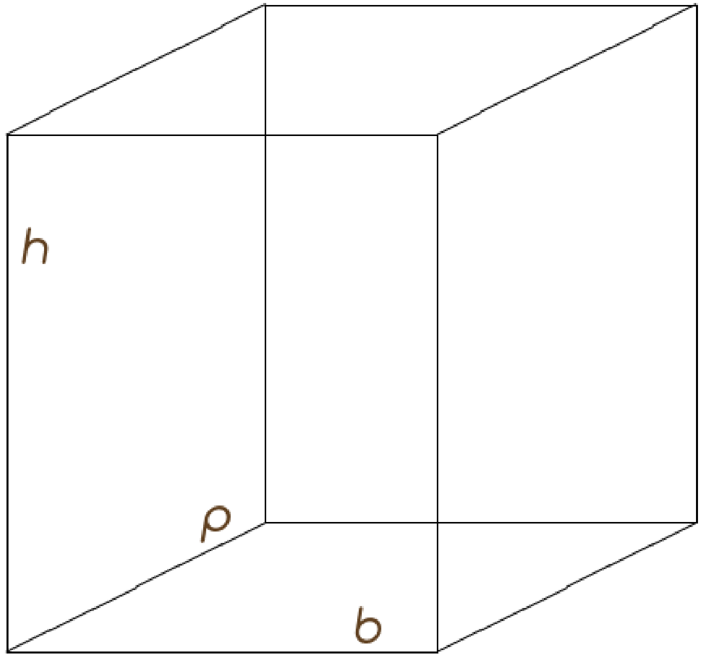
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

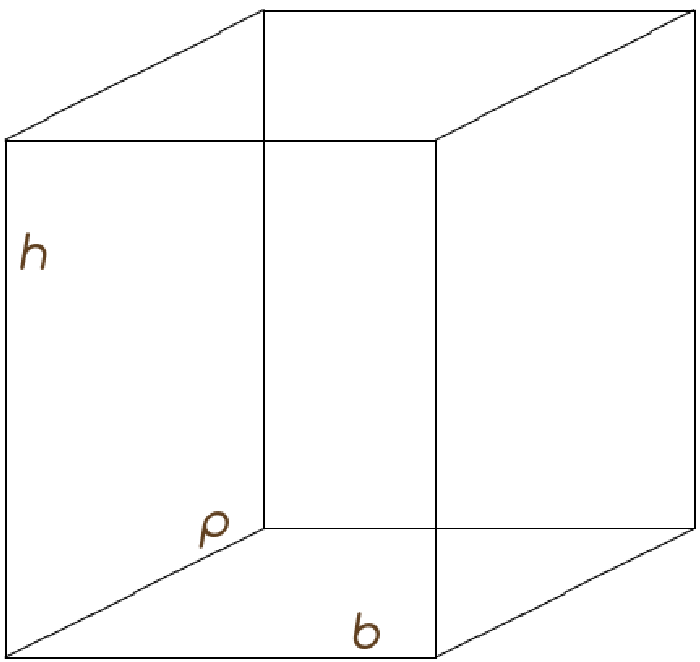
23. Funzioni di più variabili

Sia P un parallelepipedo di dimensioni $b, h, \rho > 0$, allora abbiamo che



Funzioni di più variabili

Sia P un parallelepipedo di dimensioni $b, h, \rho > 0$, allora abbiamo che



$$S_{lat} = 2(\rho + b)h$$

$$S_{tot} = 2(\rho b + \rho h + \rho b)$$

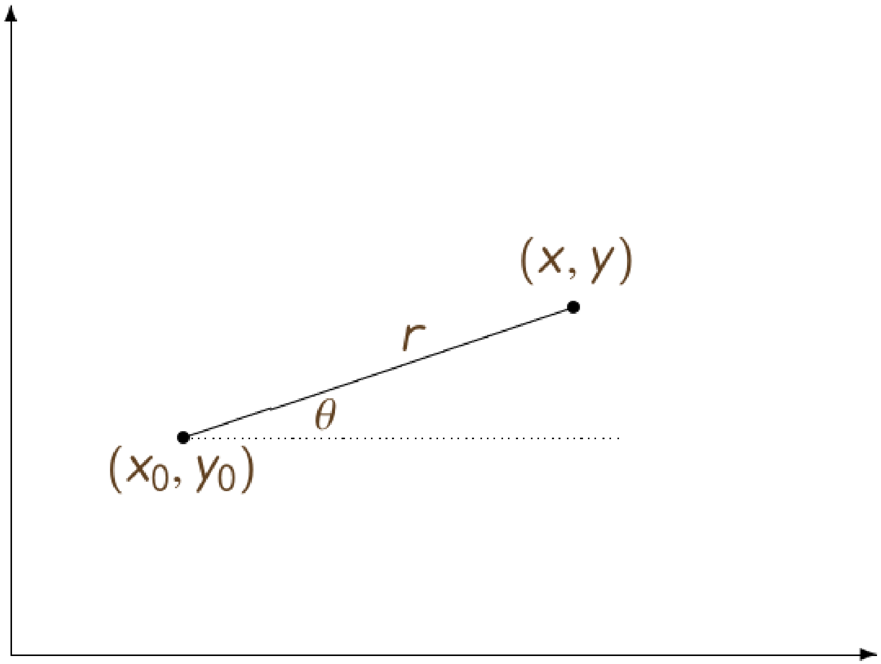
$$V = \rho b h$$

Movimenti nel piano

Come ci si può avvicinare ad un punto nel piano?

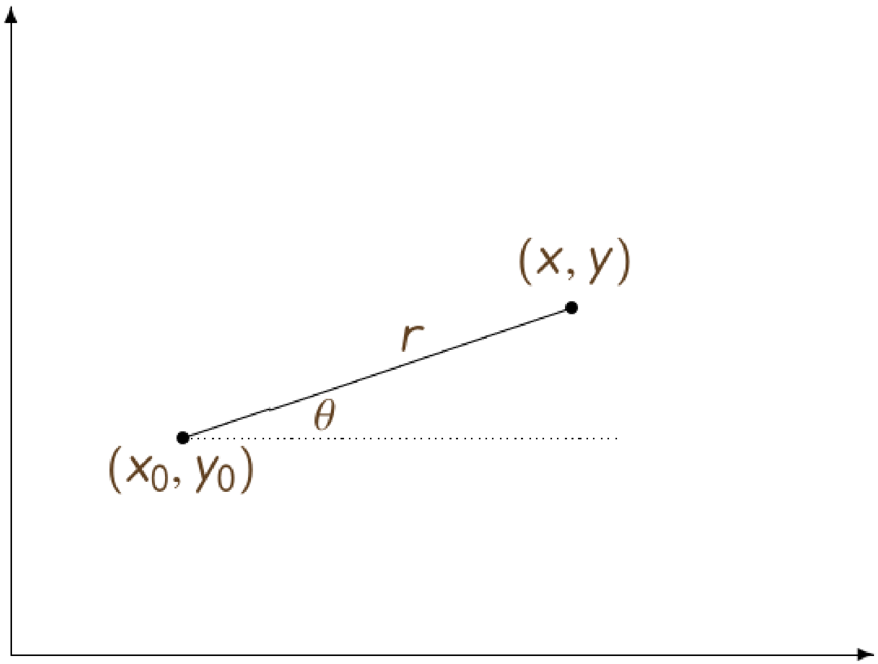
Movimenti nel piano

Come ci si può avvicinare ad un punto nel piano?



Movimenti nel piano

Come ci si può avvicinare ad un punto nel piano?



$$x = x_0 + r\cos(\theta) \qquad y = y_0 + r\sin(\theta)$$

Limiti

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} =$$

Limiti

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} =$$

Teorema.
Operazioni "continue" danno luogo a funzioni continue anche in $\mathbb{R}^2$!

Teorema.
Operazioni "continue" danno luogo a funzioni continue anche in $\mathbb{R}^2$!

$$e^{x+y^2}$$

$$\sin(xy)$$

$$\frac{x+y^2}{x^2+1}$$

$$\ln(1+x^2+y^2)$$

Derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} \qquad P_0 = (x_0, y_0)$$

Derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} \qquad P_0 = (x_0, y_0)$$

direzioni "speciali" $e_1(1, 0)$ e $e_2(0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Derivate parziali

$ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$e^{-(x^2+y^2)}$

$\sin(x)\cos(y)$

Il gradiente

Il **gradiente** è il vettore che ha come componenti le derivate parziali

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Il gradiente

Il gradiente è il vettore che ha come componenti le derivate parziali

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

vale che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$$

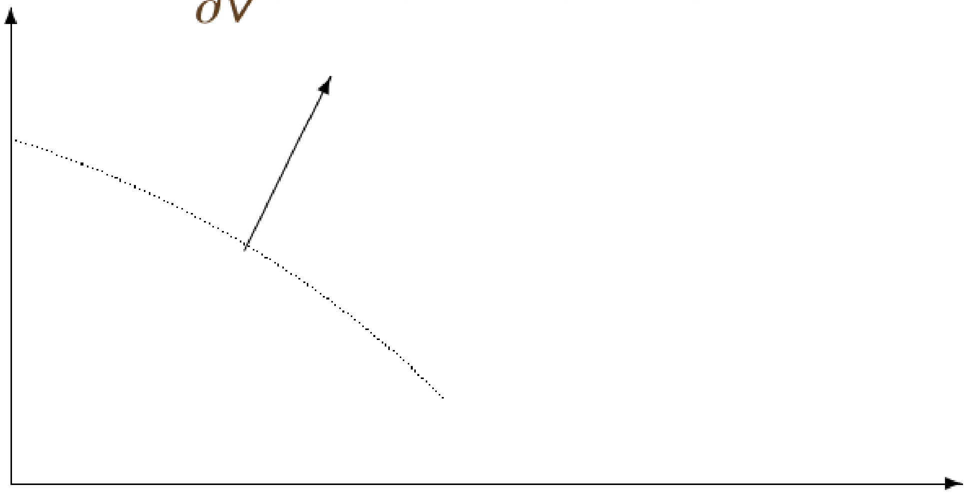
Il gradiente

Il **gradiente** è il vettore che ha come componenti le derivate parziali

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

vale che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$$



Piani tangenti

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

Piani tangenti

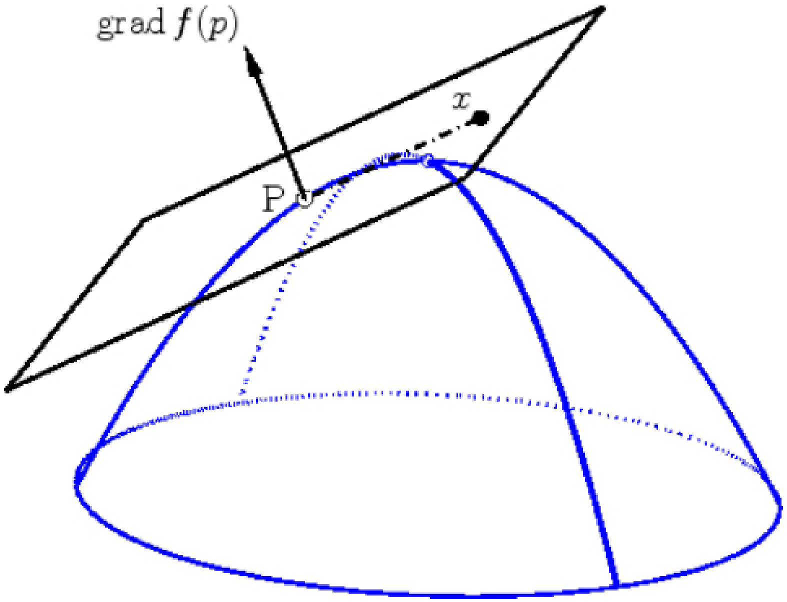
$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Piani tangenti

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$



Differenziabilità

Definizione.

Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** in un punto $(x_0, y_0) \in D$ se

$$f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \right]$$
$$= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2} \right)$$

Differenziabilità

Definizione.

Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** in un punto $(x_0, y_0) \in D$ se

$$f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \right] = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2} \right)$$

Teorema.

Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ che ha derivate parziali continue in un intorno di un punto $(x_0, y_0) \in D$ è differenziabile in (x_0, y_0).

Esempi

$$x^2 + y^2$$

$$e^{x+y^2}$$

$$\sin(xy)$$

Esempi

$$\frac{x+y^2}{x^2+1}$$

$$\ln(1+x^2+y^2)$$

$$y\ln(x)$$