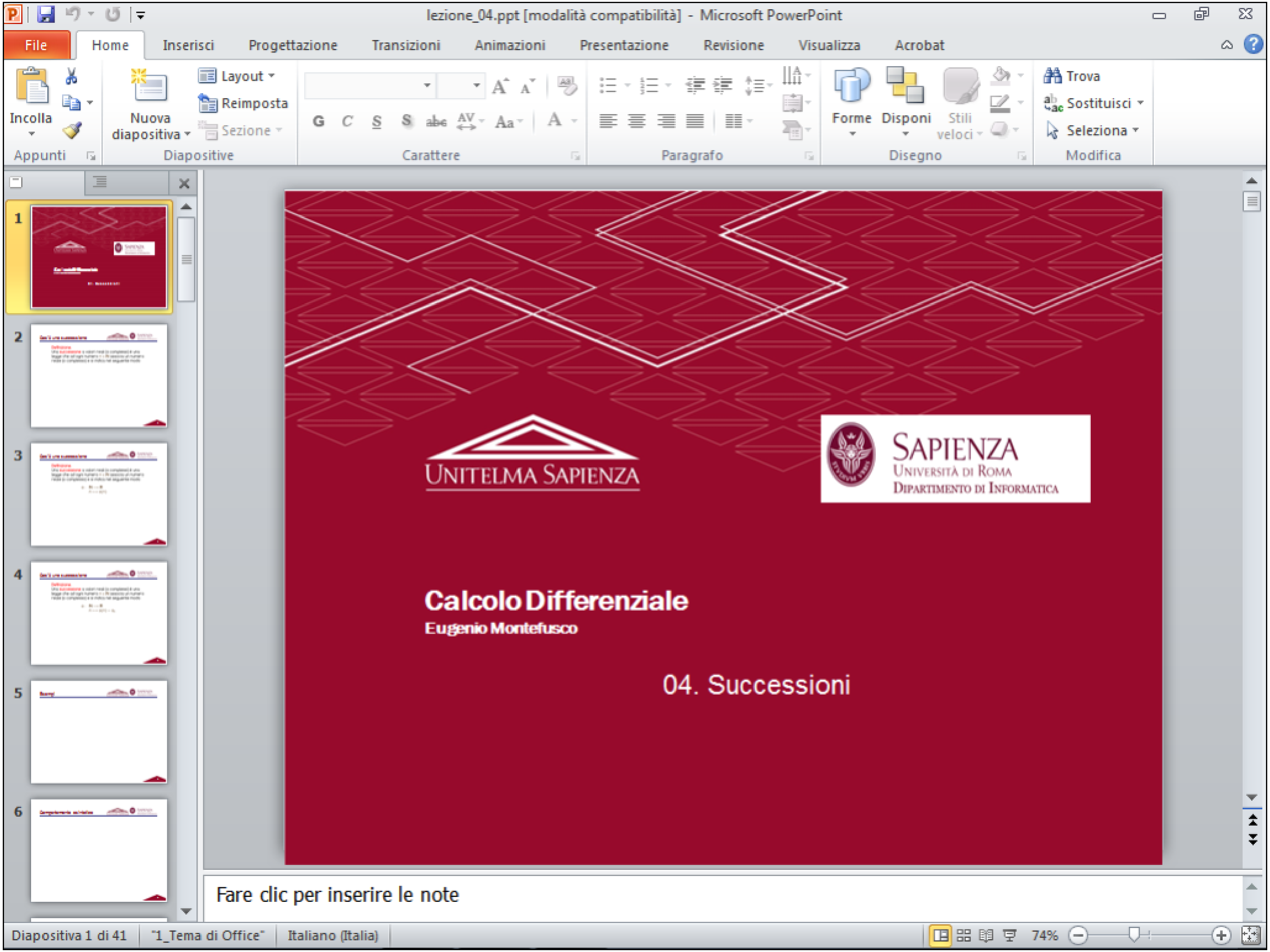

lezione_04.ppt [modalità compatibilità] - Microsoft PowerPoint
UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
Calcolo Differenziale
Eugenio Montefusco
04. Successioni
Fare clic per inserire le note
Diapositiva 1 di 41
"1_Tema di Office"
Italiano (Italia)
74%

Esempi

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$a_n = 1$

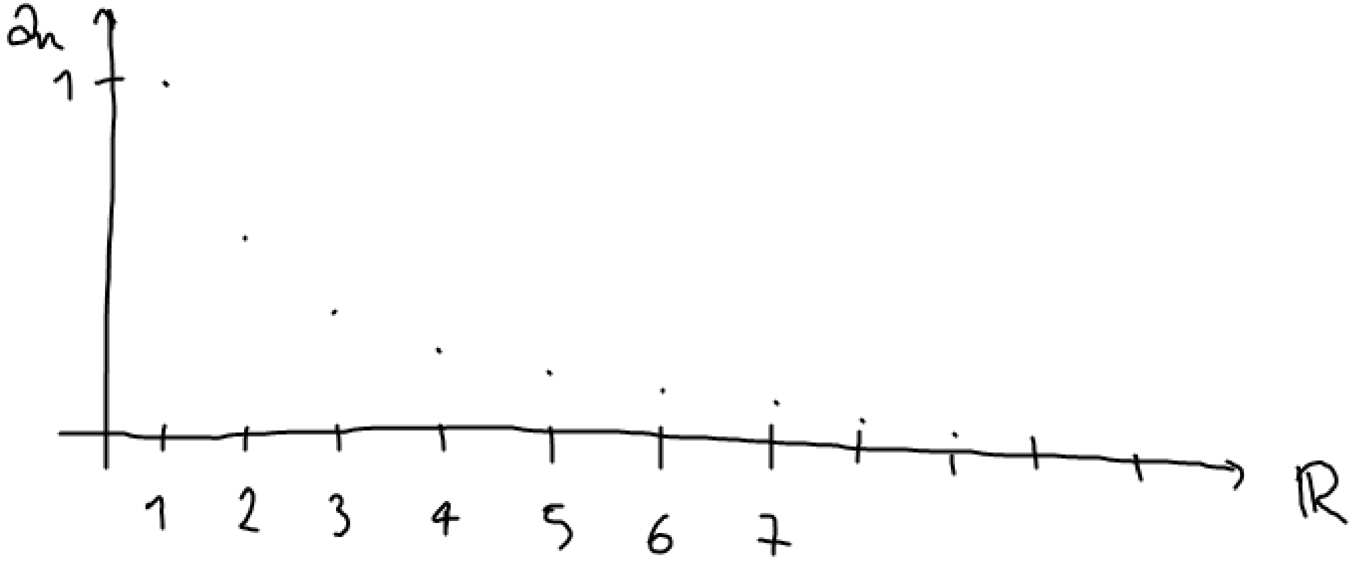
$a_n = \begin{cases} +1 & n = 2k \\ -1 & n = 2k+1 \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{n} \quad n \neq 0$

$a_n = 2^n$

Comportamento asintotico

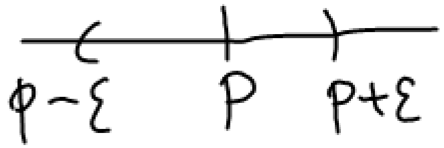
$a_n = \frac{1}{n}, \; n \neq 0$



Intorni

Definizione.
Dato un punto $p \in \mathbb{R}$ chiameremo **intorno** di p un qualunque intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$a < p < b \qquad (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \ \forall \varepsilon > 0$$

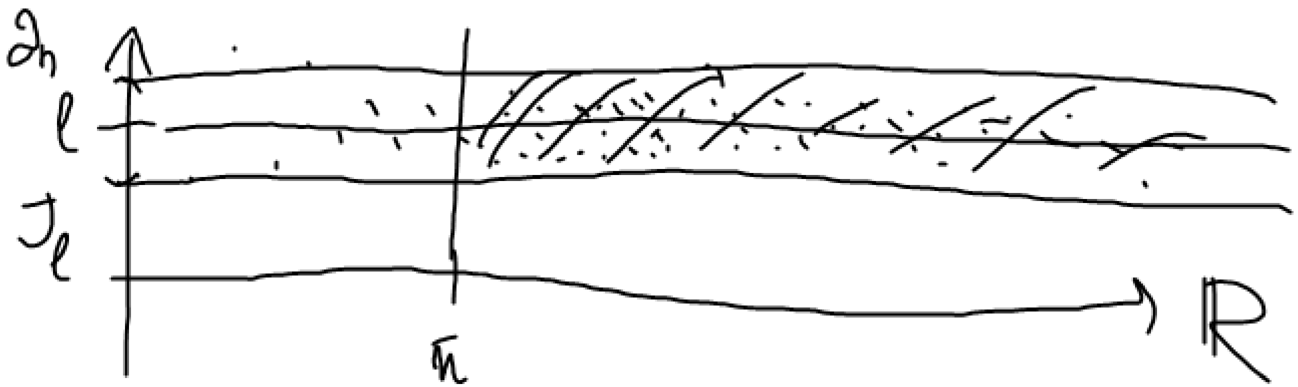


Il limite

Definizione.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che a_n ha **limite** l se

per ogni J_l intorno di l $\quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\quad$ tale che

$$a_n \in J_l \qquad \forall n \geq \bar{n}$$



Esempi

$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{?} 0$

$J_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$

$\exists \bar{n} : a_n \in J_0 \quad \forall n \geq \bar{n}$

$-\varepsilon < a_n < \varepsilon$

$\underset{\text{ok}}{-\varepsilon <} \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n \quad$ se $n > \bar{n}$

$a_n \longrightarrow 0$

$\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \bar{n}$

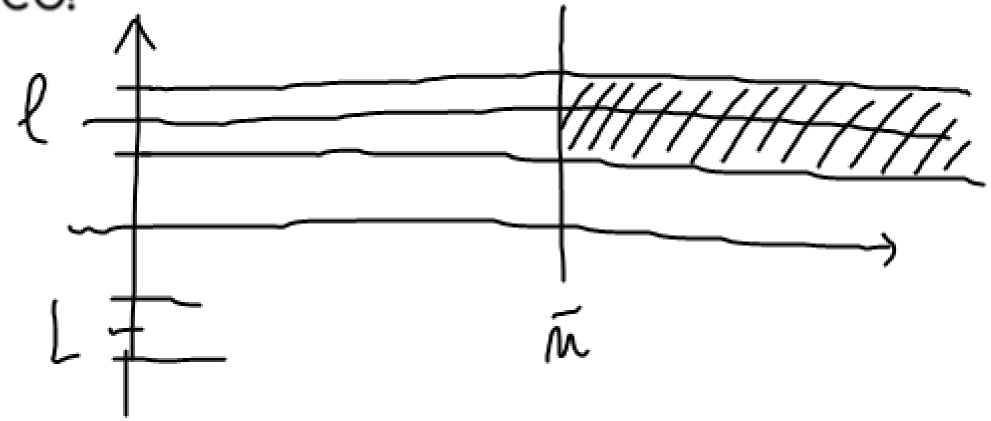
$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

parte intera

Due teoremi importanti!

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!



Esempi

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad a_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \geq 0 \\ \frac{1}{n+1/n} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq a_n \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \Rightarrow a_n \to 0$$

Successioni monotone

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma — Dipartimento di Informatica

Definizione.
Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$
ii. **non decrescente** se $a_n \leq a_{n+1}$
iii. **non crescente** se $a_n \geq a_{n+1}$
iv. (strettamente) **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$

Teorema di regolarità delle successioni monotone.
Ogni $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ successione **monotona** possiede limite.

$\ell \nexists$ $a_n = (-1)^n$