UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

9. Assiomi del calcolo delle probabilità

Scopo della lezione

Obiettivo della lezione: dare una base assiomatica del calcolo delle probabilità.

Dalla definizione di probabilità nel modello classico come rapporto fra i casi favorevoli e i casi possibili, si derivano proprietà della probabilità il cui uso è desiderabile in un contesto più generale.

La scelta più efficace non è quella di complicare il modello classico, ma quella di trasformare in assiomi alcune delle proprietà che nel modello classico si ricavano dalla definizione combinatoria della probabilità.

Si ottiene un modello molto più generale di cui il caso classico rimane un caso particolare.

Assiomi

Il primo ingrediente di cui abbiamo bisogno è stato introdotto nella seconda lezione.

Si tratta dello spazio dei campioni, un insieme i cui elementi sono tutti gli esiti possibili di un determinato esperimento.
Salvo esigenze diverse denoteremo con S lo spazio dei campioni.

Per evitare complicazioni tecniche, al momento ci occuperemo esclusivamente di spazi dei campioni finiti.

Assiomi

Un qualunque sottoinsieme di S, inclusi S stesso e l'insieme vuoto, è detto evento.

Denoteremo con E un generico evento e con $\mathbf{P}(E)$ la sua probabilità.

$\mathbf{P}(E)$ è quindi una funzione a valori reali su $\mathcal{P}(S)$, l'insieme delle parti di S.

Assiomi

Assioma 1

$$0 \leq \mathbf{P}(E) \leq 1$$

Assioma 2

$$\mathbf{P}(S) = 1$$

Assioma 3
Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi mutuamente esclusivi, ovvero $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

Assiomi

Abbiamo quindi definito una funzione

$$\mathbf{P} : \mathcal{P}(S) \to [0, 1].$$

Abbiamo poi richiesto che abbia la proprietà di essere additiva e assumere il valore 1 quando è calcolata in S.

È immediato verificare che la definizione di probabilità del modello classico soddisfa gli assiomi appena enunciati.

Dagli assiomi si ricavano tutte le proprietà della probabilità nel modello classico, salvo quelle che dipendono dall'equiprobabilità degli eventi elementari.

Proprietà

$$\boxed{\mathbf{P}(\emptyset) = 0}$$

Dagli assiomi 2 e 3 abbiamo subito:

$$1 = \mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S \cup \emptyset) = \mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(\emptyset).$$

Proprietà

$$\boxed{\mathbf{P}(A^C) = 1 - \mathbf{P}(A)}$$

Dagli assiomi 2 e 3 abbiamo:

$$1 = \mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(A \cup A^C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^C).$$

Proprietà

Se $A \subset B$,

$$\boxed{\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).}$$

Dato che $A \subset B$, possiamo scrivere $B = A \cup (A^C \cap B)$.

A e $A^C \cap B$ sono ovviamente insiemi disgiunti.

Pertanto $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^C \cap B)$, e basta ricordare che $\mathbf{P}(A^C \cap B) \geq 0$.

Proprietà

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)}$$

Osserviamo che $A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$. A e $A^C \cap B$ sono disgiunti.

Quindi

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \cup (A^C \cap B)) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^C \cap B).$$

Ma $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ e quindi

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A^C \cap B).$$

Proprietà

La formula di inclusione-esclusione in questo contesto più generale assume la forma

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \ldots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Proprietà

Valgono ancora le disuguaglianze di Bonferroni.

Se nella somma ci arrestiamo dopo alcuni termini, otteniamo una stima per eccesso se l'ultimo termine compare col segno $+$ e per difetto se compare col segno $-$.

Per esempio nel caso di tre insiemi, se ci fermiamo dopo il primo termine abbiamo $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$, e se ci fermiamo dopo il secondo termine,
$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) \geq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C)$.

Quindi,

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \leq$$
$$\leq \mathbf{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C).$$

Proprietà

La specializzazione di queste proprietà al caso di eventi elementari equiprobabili ci era già nota ed è anche dimostrabile direttamente lavorando sulla cardinalità degli insiemi.