UNITELMA SAPIENZA

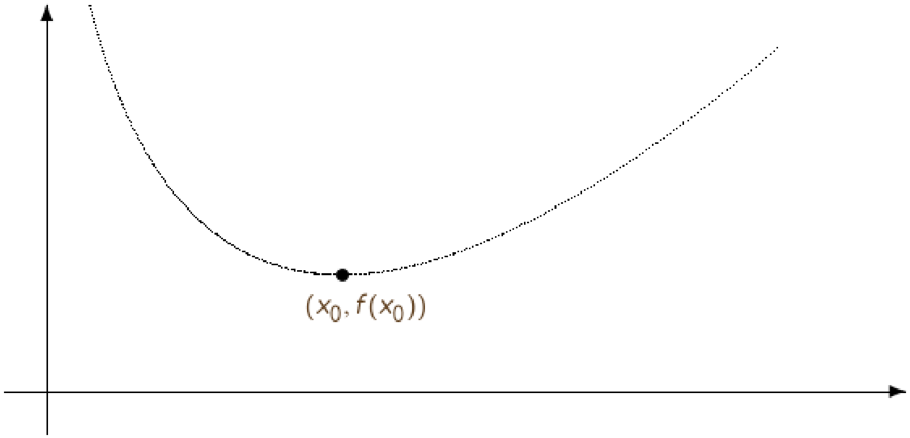
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

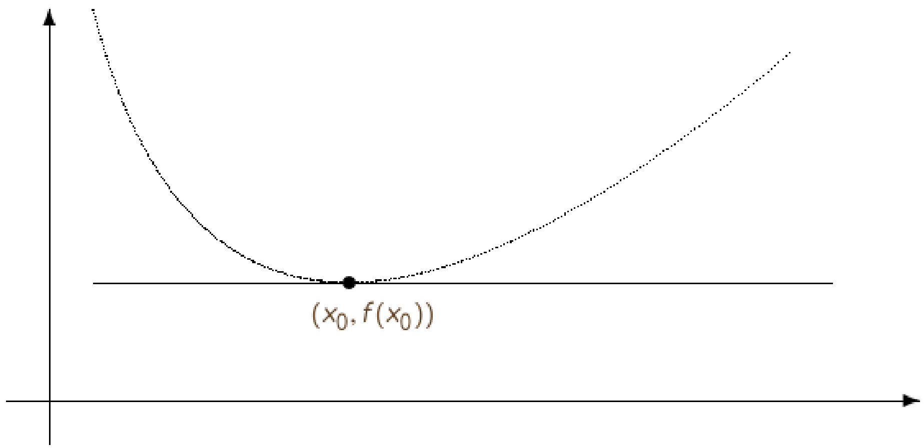
Eugenio Montefusco

16. Proprietà delle funzioni derivabili

Il teorema di Fermat

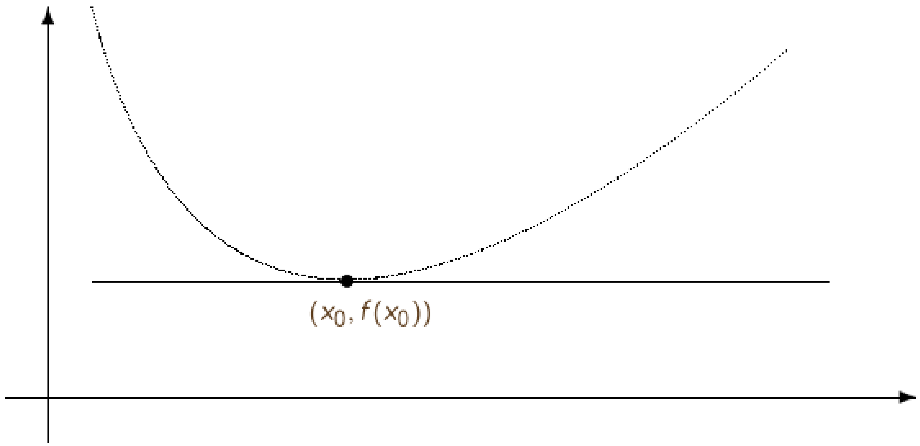


Il teorema di Fermat



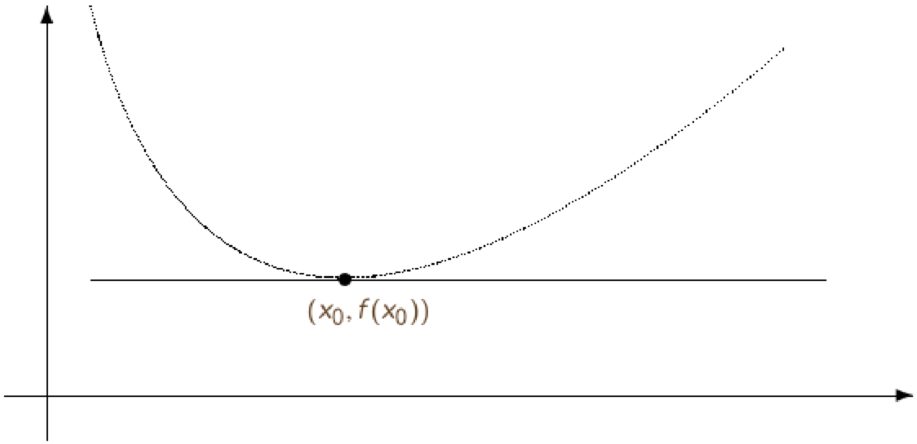
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e x_0 punto di minimo locale, cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Il teorema di Fermat



Il fatto che x_0 sia un minimo locale implica che

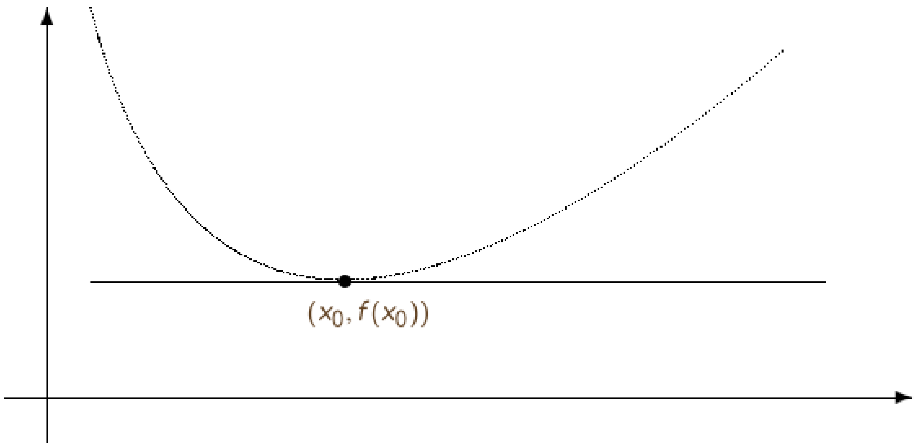
Il teorema di Fermat



Il fatto che x_0 sia un minimo locale implica che

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \text{ se } h > 0 \\ \\ \end{cases}$$

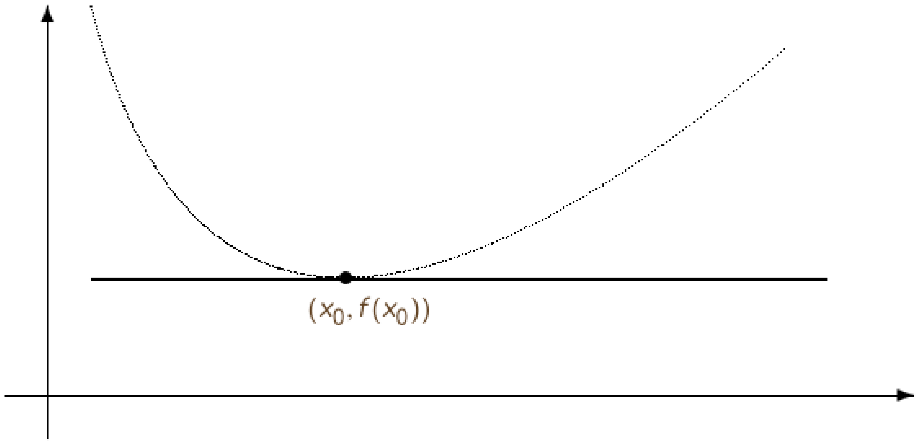
Il teorema di Fermat



Il fatto che x_0 sia un minimo locale implica che

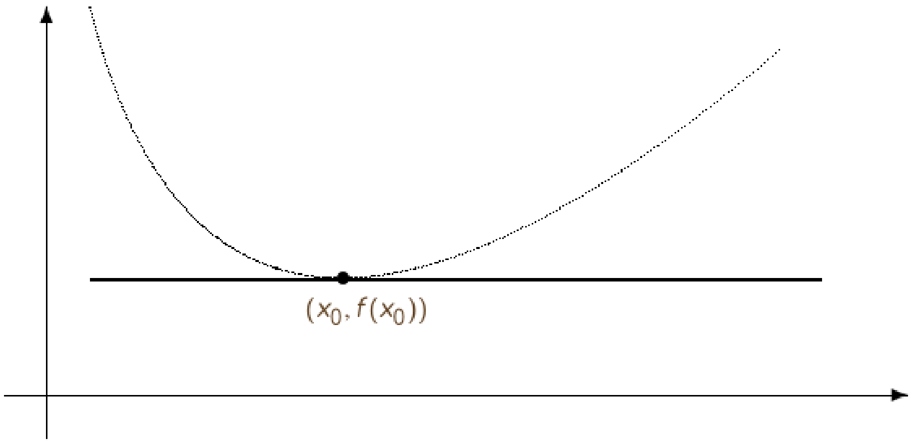
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \text{ se } h > 0 \\ \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \text{ se } h < 0 \end{cases}$$

Il teorema di Fermat



e siccome f è derivabile vale

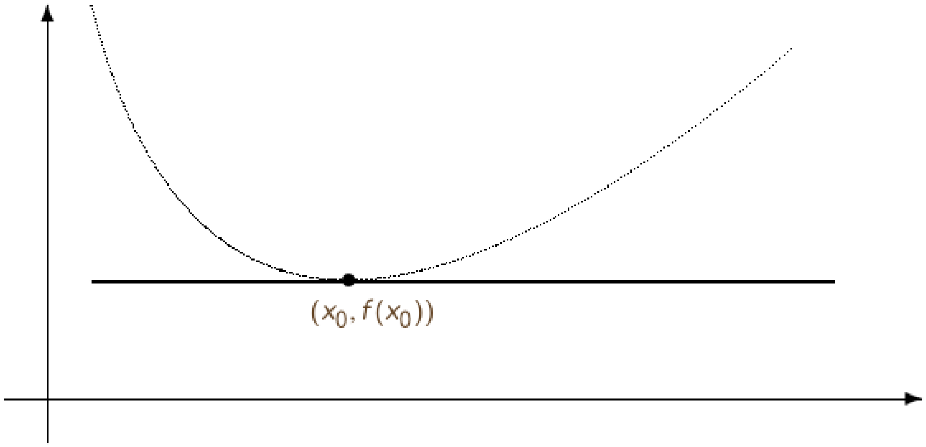
Il teorema di Fermat



e siccome f è derivabile vale

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \\ \end{cases}$$

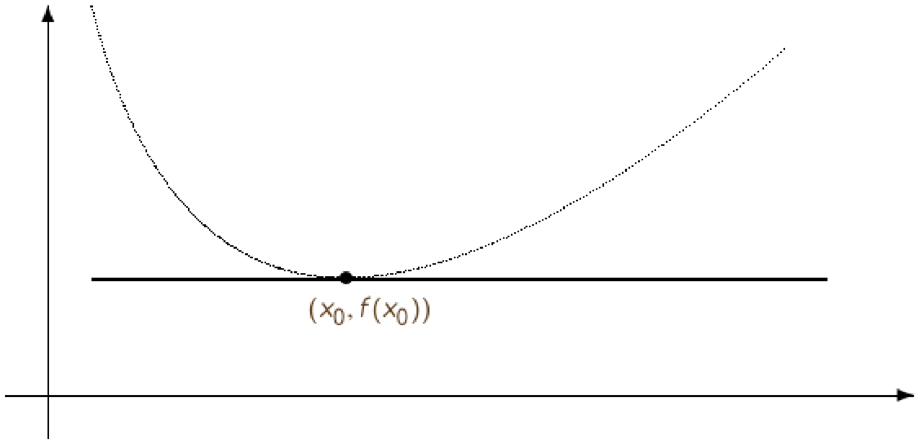
Il teorema di Fermat



e siccome f è derivabile vale

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \end{cases}$$

Il teorema di Fermat



e siccome f è derivabile vale

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \end{cases} = 0$$

Il teorema di Fermat

Teorema di Fermat. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua,

Il teorema di Fermat

Teorema di Fermat. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di minimo o massimo locale.

Il teorema di Fermat

Teorema di Fermat. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di minimo o massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Fermat. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di minimo o massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

Tutti i punti a tangente orizzontale verranno detti punti **stazionari** o **critici**.

Il teorema di Fermat

Teorema di Fermat. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e derivabile e supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di minimo o massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

Tutti i punti a tangente orizzontale verranno detti punti **stazionari** o **critici**.

Non tutti i punti critici sono massimi o minimi locali!

$$f(x) = x^3$$

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

- se $f(a) = f(x) = f(b), \forall x \in (a, b)$, la tesi è provata

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

- se $f(a) = f(x) = f(b), \forall x \in (a, b)$, la tesi è provata
- altrimenti almeno uno tra massimo e minimo di f,

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

- se $f(a) = f(x) = f(b)$, $\forall x \in (a, b)$, la tesi è provata
- altrimenti almeno uno tra massimo e minimo di f, (i quali esistono per il teorema di Weierstrass!)

Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato**, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e che verifica

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

- se $f(a) = f(x) = f(b)$, $\forall x \in (a, b)$, la tesi è provata
- altrimenti almeno uno tra massimo e minimo di f, (i quali esistono per il teorema di Weierstrass!) è assunto dentro l'intervallo.
  Il teorema di Fermat conclude la dimostrazione.

Il teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b).

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Teorema di Lagrange. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b).
Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b).
Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tesi segue dal teorema di Rolle, ricorrendo alla funzione ausiliaria

$$H(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Alcuni corollari

Corollario.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) tale che

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

Alcuni corollari

Corollario.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) tale che

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

allora $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$.

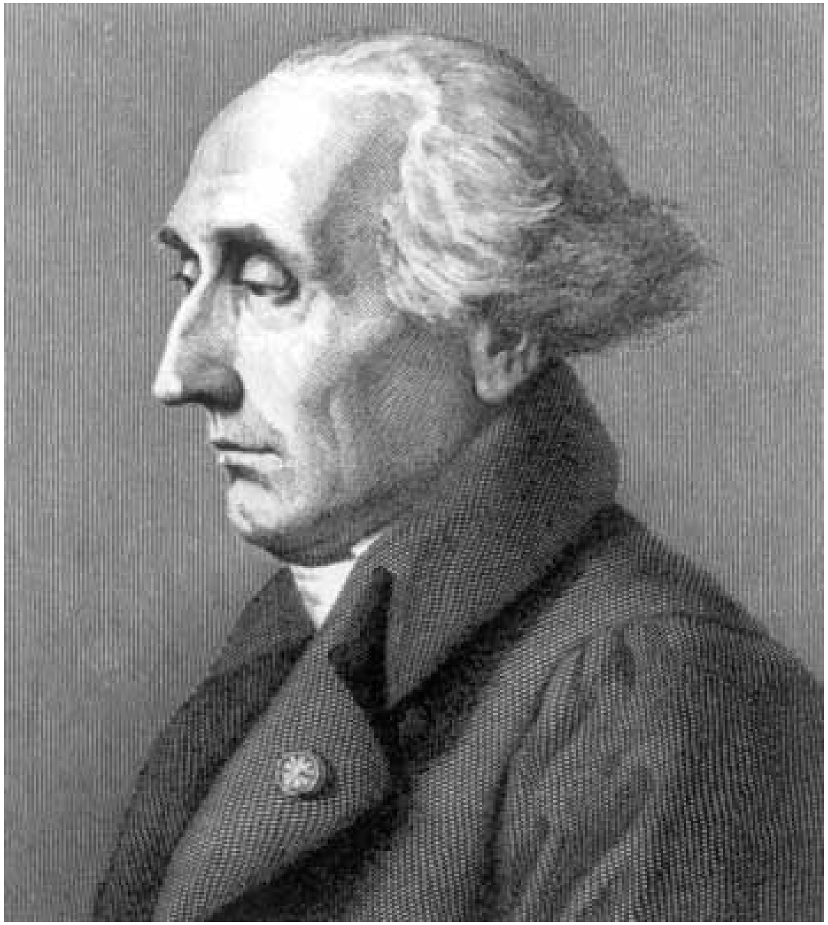
Alcuni corollari

Corollario.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Corollario.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un **intervallo chiuso** e **limitato** e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
Allora se $x_1 < x_2$ segue

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Protagonisti



Joseph-Louis Lagrange

1736 - 1813