*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 21/01/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Calcolare a^{13723} per ogni $a \in U(\mathbb{Z}_{15})$ dove, per un intero positivo n, $U(\mathbb{Z}_n)$ è il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_n$.

(**b**) Risolvere se possibile il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} X \equiv 0 \pmod 5 \\ 3X \equiv 0 \pmod 6 \\ 13^{754}X \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}.$$

(**c**) Sia data la seguente matrice ad elementi in $\mathbb{Z}_5$. Determinare i valori di $k \in \mathbb{Z}_5$ per i quali essa risulti invertibile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$ e si consideri l'unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$.

(**a**) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard.

(**b**) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f

(**c**) Dimostrare che le matrici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ generano l'immagine di $F \circ f$ dove $F : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ è definita da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.

(**a**) Sino σ, $\tau \in S_n$ due permutazioni con supporti[1] disgiunti e sia $H = \langle \sigma, \tau \rangle$ il sottogruppo generato da σ e τ. Si dimostri che l'ordine di H è il prodotto dei periodi di σ e τ.

(**b**) Si stabilisca se $U(\mathbb{Z}_{22})$ è un gruppo ciclico.

(**c**) Si esibisca un sottogruppo di $U(\mathbb{Z}_{22})$ di ordine 5.

[1] Il supporto di una permutazione $\sigma \in S_n$ è l'insieme $\{i \mid \sigma(i) \neq i\}$