Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

24. Ottimizzazione in più variabili

Teorema di Weierstrass.
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso e limitato e sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua,

Teorema di Weierstrass.
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso e limitato e sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, allora esistono due punti $x^*, x_* \in D$ tali che

$$f(x^*) = \max_D(f) \qquad f(x_*) = \min_D(f)$$

Teorema.
Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, se $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ è un punto stazionario di f allora

Teorema.
Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, se $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ è un punto stazionario di f allora

$$\nabla f(P_0) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

Esercizio. Si determini il punto del piano $\pi : \{z = x + y - 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ più vicino al punto $Q(2, 1, -1)$.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Si determini il punto del piano $\pi : \{z = x + y - 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ più vicino al punto $Q(2, 1, -1)$.

$d(P(x, y, z), Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$, inoltre $P(x, y, x + y - 1)$ da cui

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Informatica

Esercizio. Si determini il punto del piano $\pi : \{z = x + y - 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ più vicino al punto $Q(2, 1, -1)$.

$d(P(x, y, z), Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$, inoltre $P(x, y, x + y - 1)$ da cui

$$d^2(P, Q) = F(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Esercizio. Si determini il punto del piano $\pi : \{z = x + y - 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ più vicino al punto $Q(2, 1, -1)$.

$d(P(x, y, z), Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$, inoltre $P(x, y, x + y - 1)$ da cui

$$d^2(P, Q) = F(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$F_x(x, y) = 0 \qquad 2(x-2) + 2(x+y) = 0$$
$$F_y(x, y) = 0 \qquad 2(y-1) + 2(x+y) = 0$$
$$x = 1 \quad y = 0$$

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Si determini il punto del piano $\pi : \{z = x + y - 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ più vicino al punto $Q(2, 1, -1)$.

$d(P(x, y, z), Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$, inoltre $P(x, y, x + y - 1)$ da cui

$$d^2(P, Q) = F(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} F_x(x, y) = 0 \qquad & 2(x-2) + 2(x+y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \qquad & 2(y-1) + 2(x+y) = 0 \end{aligned}$$

$$x = 1 \quad y = 0$$

quindi $P_{min}(1, 0, 0)$

Esercizio. Determinare la scatola (senza coperchio) di volume massimo ricavabile da $12m^2$ di cartone?

Esercizio. Determinare la scatola (senza coperchio) di volume massimo ricavabile da $12m^2$ di cartone?

Siano $x, y, z > 0$ le dimensioni della scatola, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$ sapendo che $xy + 2xz + 2yz = 12$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Determinare la scatola (senza coperchio) di volume massimo ricavabile da $12m^2$ di cartone?

Siano $x, y, z > 0$ le dimensioni della scatola, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$ sapendo che $xy + 2xz + 2yz = 12$

$$F(x,y) = V\left(\frac{2(6-yz)}{y+2z}, y, z\right) = \frac{2yz(6-yz)}{y+2z} \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Determinare la scatola (senza coperchio) di volume massimo ricavabile da $12m^2$ di cartone?

Siano $x, y, z > 0$ le dimensioni della scatola, cerchiamo il massimo di $V(x,y,z) = xyz$ sapendo che $xy + 2xz + 2yz = 12$

$$F(x,y) = V\left(\frac{2(6-yz)}{y+2z}, y, z\right) = \frac{2yz(6-yz)}{y+2z} \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{2z^2(12-y^2-4yz)}{(y+2z)^2}, \frac{4y^2(3-z^2-yz)}{(y+2z)^2}\right) = (0,0)$$

Esercizio. Determinare la scatola (senza coperchio) di volume massimo ricavabile da $12m^2$ di cartone?

Siano $x, y, z > 0$ le dimensioni della scatola, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$ sapendo che $xy + 2xz + 2yz = 12$

$$F(x,y) = V\left(\frac{2(6-yz)}{y+2z}, y, z\right) = \frac{2yz(6-yz)}{y+2z} \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{2z^2(12-y^2-4yz)}{(y+2z)^2}, \frac{4y^2(3-z^2-yz)}{(y+2z)^2}\right) = (0,0)$$

la cui soluzione è $(x_{max}, y_{max}, z_{max}) = (2, 2, 1)$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Trovare due punti, appartenenti alle curve $\{y = x^2\}$ e $\{y = x - 2\}$, che realizzano il minimo della funzione distanza.

Esercizio. Trovare due punti, appartenenti alle curve $\{y = x^2\}$ e $\{y = x - 2\}$, che realizzano il minimo della funzione distanza.

Siccome $P(x, x^2)$ e $Q(y, y-2)$ abbiamo che

$$H(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - y + 2)^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esercizio. Trovare due punti, appartenenti alle curve $\{y = x^2\}$ e $\{y = x - 2\}$, che realizzano il minimo della funzione distanza.

Siccome $P(x, x^2)$ e $Q(y, y-2)$ abbiamo che

$$H(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - y + 2)^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla H(x,y) = \left(4x^3 - 4xy + 10x - 2y, 4y - 2x^2 - 2x - 4\right) = (0,0)$$

Esercizio. Trovare due punti, appartenenti alle curve $\{y = x^2\}$ e $\{y = x - 2\}$, che realizzano il minimo della funzione distanza.

Siccome $P(x, x^2)$ e $Q(y, y-2)$ abbiamo che

$$H(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - y + 2)^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla H(x,y) = \left(4x^3 - 4xy + 10x - 2y, 4y - 2x^2 - 2x - 4\right) = (0,0)$$

da cui si trova $P_{min}(1/2, 1/4)$ e $Q_{min}(11/8, -5/8)$

Esercizi

Esercizio. Assegnata un insieme di punti nel piano $\{P_k\}_{k01,\dots,n}$ si trovi il punto Q tale che sia minima la somma delle distanze dai punti assegnati.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Esercizio. Assegnata un insieme di punti nel piano $\{P_k\}_{k01,\ldots,n}$ si trovi il punto Q tale che sia minima la somma delle distanze dai punti assegnati.

Supponiamo che $P_k(x_k, y_k)$, allora abbiamo che

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\right] \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma — Dipartimento di Informatica

Esercizio. Assegnata un insieme di punti nel piano $\{P_k\}_{k01,\dots,n}$ si trovi il punto Q tale che sia minima la somma delle distanze dai punti assegnati.

Supponiamo che $P_k(x_k, y_k)$, allora abbiamo che

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \right] \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla d(x,y) = 2 \left(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k, ny - \sum_{k=1}^{n} y_k \right)$$

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma — Dipartimento di Informatica

Esercizio. Assegnata un insieme di punti nel piano $\{P_k\}_{k01,\ldots,n}$ si trovi il punto Q tale che sia minima la somma delle distanze dai punti assegnati.

Supponiamo che $P_k(x_k, y_k)$, allora abbiamo che

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \right] \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla d(x,y) = 2\left(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k, ny - \sum_{k=1}^{n} y_k \right)$$

quindi il punto ottimale è $Q_{min} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \right)$

Esercizio. Tra tutte le scatole aventi lunghezza degli spigoli L, si individui quella di volume massimo.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Tra tutte le scatole aventi lunghezza degli spigoli L, si individui quella di volume massimo.

Detti $x, y, z > 0$ gli spigoli, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$, sapendo che $x + y + z = L$ e che $x, y > 0$ e che $z = L - x - y > 0$ cioè $x + y < L$

Esercizio. Tra tutte le scatole aventi lunghezza degli spigoli L, si individui quella di volume massimo.

Detti $x, y, z > 0$ gli spigoli, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$, sapendo che $x + y + z = L$ e che $x, y > 0$ e che $z = L - x - y > 0$ cioè $x + y < L$

$$F(x, y) = (L - x - y)xy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\nabla F(x, y) = (y(L - 2x - y), x(L - x - 2y)) = (0, 0)$$

Esercizio. Tra tutte le scatole aventi lunghezza degli spigoli L, si individui quella di volume massimo.

Detti $x, y, z > 0$ gli spigoli, cerchiamo il massimo di $V(x, y, z) = xyz$, sapendo che $x + y + z = L$ e che $x, y > 0$ e che $z = L - x - y > 0$ cioè $x + y < L$

$$F(x, y) = (L - x - y)xy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\nabla F(x, y) = (y(L - 2x - y), x(L - x - 2y)) = (0, 0)$$

la cui soluzione è $(x_{max}, y_{max}, z_{max}) = (L/3, L/3, L/3)$

$$V_{max} = \frac{L^3}{27}$$

Esercizi

Esercizio. Si trovi il punto del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ più lontano dall'origine degli assi.

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esercizio. Si trovi il punto del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ più lontano dall'origine degli assi.

$$d(x,y) = x^2 + y^2 \qquad T = \{x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

$$\nabla d = 2(x,y) = (0,0)\ !!!$$

Esercizio. Si trovi il punto del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ più lontano dall'origine degli assi.

$$d(x,y) = x^2 + y^2 \qquad T = \{x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

$$\nabla d = 2(x,y) = (0,0)\ !!!$$