V/F	Es. 1	Es. 2	Voto
/12	/10	/10	/32

Sapienza Università di Roma, Corso di Laurea in Informatica - canale telematico (a.a. 2022/2023)

Prova scritta di Calcolo Differenziale - 7 settembre 2023

Nome e Cognome (in stampatello):

Numero matricola:

NOTA BENE: devono essere riconsegnati soltanto i fogli contenenti i testi degli esercizi. È vietato usare testi, appunti e strumenti elettronici di ogni tipo. Ogni affermazione negli esercizi a risposta aperta deve essere motivata dettagliatamente! È possibile utilizzare anche il retro dei fogli per inserire i calcoli.
Il tempo a disposizione per la prova è di 2h.

Domande V/F

NOTA BENE: +1 risposta esatta, -0.5 risposta sbagliata, 0 risposta assente

1. Sia data la successione numerica reale

$$a_n = (-1)^n \frac{2\sqrt{n}-1}{n^5+n+1}$$

1A	a_n è infinitesima	V	F
1B	la successione $b_n = (-1)^n a_n$ non ammette limite finito per $n \longrightarrow \infty$	V	F
1C	la successione $c_n = (a_n)^2$ è limitata	V	F
1D	a_n è indeterminata	V	F

2. Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan x^2$$

2A	f ammette asintoti orizzontali	V	F
2B	f non ammette punti né di massimo né di minimo relativi	V	F
2C	f è decrescente su $\mathbb{R}$	V	F
2D	l'insieme immagine di f è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	V	F

3. Sia

$$f(x) = x^4 + x^2 + 3$$

3A	L'insieme immagine di f è l'insieme $\mathbb{R}$.	V	F
3B	La funzione f è invertibile	V	F
3C	La funzione f ha esattamente uno zero reale negativo.	V	F
3D	f è convessa in tutto il suo dominio	V	F

Esercizio 1

(1) Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Usando il teorema dei carabinieri si trova che la funzione è continua nell'origine. La derivata di f, definita per $x \neq 0$, è

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Per studiare la derivabilità di f nell'origine, non possiamo utilizzare la condizione sufficiente, infatti il limite di f' nell'origine non esiste. Usiamo invece la definizione di derivata. Si trova:

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

applicando il teorema dei carabinieri. Quindi f è continua e derivabile nell'origine, ma non è di classe $\mathcal{C}^1$.

(2) Applicare, se possibile, il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = x\sqrt{1-x}$$

definita nell'intervallo $[0,1]$.

Il teorema di Rolle è applicabile poiché f è derivabile (e continua) su $(0,1)$. Inoltre $f(0) = f(1) = 0$. Si calcola facilmente che

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Allora risolviamo l'equazione

$$f'(x) = 0$$

nel dominio di f e troviamo $x = \frac{2}{3}$.

(3) Calcolare il polinomio di MacLaurin di

$$f(x) = x^2 \sin x$$

di grado 2.

Si trova $p(x) = 0$, poiché il primo termine non nullo è di grado 3.

Esercizio 2

Studiare la seguente funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

In particolare: determinarne il dominio, eventuali simmetrie, studiarne il segno, studiare i limiti agli estremi del dominio, determinare eventuali asintoti, studiarne la continuità, derivabilità, la monotonia, la convessità, determinarne eventuali punti di massimo, di minimo (locali e/o assoluti) e di flesso. Tracciare un grafico qualitativo di f.

La funzione è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non ha simmetrie notevoli. Non interseca gli assi. È negativa per $x < 0$, positiva per $x > 0$. Ha l'asse y come asintoto verticale a destra di $x = 0$. Ammette poi l'asintoto obliquo $y = x+1$, per $x \longrightarrow \pm\infty$. Si ha che

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

e

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}.$$

La funzione ha un minimo relativo in $x = 1$. *La funzione non ha flessi ma cambia concavità: sui negativi è concava, sui positivi è convessa.*