*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 21/01/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$ e si consideri l'unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$.

(**a**) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard.

(**b**) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

Esercizio 2.

(**a**) Calcolare a^{13721} per ogni intero a tale che $1 \leq a \leq 15$ e a primo con 15.

(**b**) Risolvere se possibile il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} X \equiv 0 \pmod 5 \\ 3X \equiv 0 \pmod 6 \\ 13^{754}X \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}.$$

(**c**) Sia data la seguente matrice ad elementi in $\mathbb{Z}_5$. Determinare i valori di $k \in \mathbb{Z}_5$ per i quali essa risulti invertibile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 12/02/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$, sia b un numero reale e sia f_b l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f_b(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $f_b(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3$ e $f_b(\mathbf{e}_3) = b\mathbf{e}_2$.

(**a**) Calcolare la dimensione dell'immagine di f_b al variare di b in $\mathbb{R}$.

(**b**) Stabilire se esiste $b \in \mathbb{R}$ in corrispondenza del quale f_b ammetta una base di autovettori rispetto a cui la matrice che rappresenta f_b sia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(**c**) In corrispondenza di $b = 0$ si ponga $f_0 = f$ e si determini l'unico endomorfismo non nullo g di $\mathbb{R}^3$ tale che

(i) $\operatorname{Im} g \subseteq \ker f$;

(ii) $g(\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{e}_2) = g(\mathbf{e}_3)$;

(iii) 1 è autovalore di g.

Esercizio 2.

(**a**) Siano a e b numeri interi. Determinare la classe di congruenza modulo 4 del numero $a^2 + b^2$ sapendo che $a^2 + b^2$ è un numero dispari.

(**b**) Risolvere se possibile il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} (X+Y)^3 \equiv 2 \pmod 3 \\ X^3 \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}.$$

(**c**) Calcolare la classe di congruenza modulo 5 del numero $13^{23^{21}}$.

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 09/04/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Si calcoli la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ al variare di a in $\mathbb{R}$.

(**b**) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

– $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\}$;

– $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

essendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. Discutere la diagonalizzabilità di f.

(**c**) Una matrice reale A di ordine n è *antisimmetrica* se $A = -A^T$, dove A^T è la matrice trasposta di A. Utilizzando le proproetà elementari del determinante, dimostrare che le matrici antisimmetriche di ordine dispari hanno determinante nullo.

Esercizio 2.

(**a**) Determinare un intero $a \leq 25$ affinché il numero

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^7}{7} + \frac{an}{35}$$

sia intero per ogni valore intero di n.

(**b**) Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $2^n \equiv 5^n \pmod{7}$.

*Cognome*____________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*____________________________

Scritto di ALGEBRA del 18/06/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Qual'è il più piccolo intero positivo a per cui il seguente sistema di congruenze lineari è compatibile?

$$\begin{cases} X \equiv 28 \pmod 5 \\ X \equiv 106 \pmod 4 \\ X \equiv a \pmod{10} \end{cases}$$

(**b**) Dimostrare che ogni intero n, l'ultima di cifra di n^5 e l'ultima cifra di n coincidono.

Esercizio 2.

(**a**) Discutere la compatibilità e il tipo di infinità delle eventuali soluzioni del sistema lineare reale

$$\begin{cases} x - ay = 0 \\ x - az = 0 \\ ax - az + 1 = 0 \end{cases}$$

al variare di a in $\mathbb{R}$.

(**b**) Sia $K = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ e sia f l'endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$ (insieme delle matrici quadrate reali di ordine 2) definito da: $A \mapsto AK$. Determinare una base del nucleo di f.

(**c**) Siano v_1, v_2, v_3, w_1 e w_2 vettori in uno sapzio vettoriale V di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Sia E il sottospazio di V generato dai v_i ed F il sottospazio generato dai w_i. Se per ogni scelta di a, b e c in $\mathbb{K}$ esistono sempre x e y in $\mathbb{K}$ tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = xw_1 + yw_2$, che relazione sussiste tra E ed F?

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 17/09/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Sia a un numero reale e sia f l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(e_1) = ae_1,\ f(e_2) = a(e_1 + e_2),\ f(e_2) = a(e_1 + e_2 + e_3),$$

dove e_1, e_2 ed e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Stabilire per quali valori di a l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

(**b**) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che associa ad ogni numero reale b il vettore $\begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix}$. Scrivere la matrice che rappresenta g rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^3$ e stabilire se g è iniettiva.

(**c**) Siano $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{u_4, u_5\}$ insiemi di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo reale. Dimostrare che per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$ il vettore u_i si può scrivere come combinazione lieare degli altri quattro vettori.

Esercizio 2.

(**a**) Sia $A = \{a_{i,j}\} \in M_4(\mathbb{Z})$ la matrice in cui $a_{i,j} = i \cdot j$. Dimostrare che il prodotto lungo ciascuna diagonale di A è congruo a 1 modulo 5.

(**b**) Siano m ed n interi positivi coprimi. Dimostrare che il numero $(m^6+n^6-1)(m^6+n^6-2)$ è divisibile per 9.

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2020/2021 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 29/10/2021

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Risolvere il seguente sistema di congruenze con $100 \leq X \leq 200$.

$$\begin{cases} 8X \equiv 2^{577} \pmod 7 \\ X \equiv 8^{423} \pmod 5 \\ 7X \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}.$$

(**c**) Una matrice quadrata reale di ordine n è *unimodulare* se il valore assoluto del suo determinante è 1. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matrice unimodulare di ordine 2. Dimostrare che il sistema $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)$ ha sempre soluzioni intere per ogni scelta di $\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^2$.

Esercizio 2.

(**a**) Sia (u, v, w) una base di uno spazio vettoriale V. Stabilire se $\langle 2u + 2v, u + v - w, 2u + 2v - w, u + v \rangle = V$, dove il simbolo $\langle \cdots \rangle$, avente vettori ad argomento, denota lo spazio vettoriale generato dai vettori in argomento.

(**b**) Determinare l'unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 0) = (4, 2)$ e avente 0 e 2 come autovalori.

Cognome ______________________________

Informatica teledidattica 2019/2020 *Nome* ______________________________

Scritto di ALGEBRA del 07/05/2020

L'esame ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro (risposte non giustificate non saranno accreditate). Se occorre ulteriore spazio, usare il retro del foglio.

****

Esercizio 1.

(**a**) Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 1237^{28} \pmod 3 \\ 3X \equiv 5 \pmod 7 \\ X \equiv 2^{2149} \pmod 5 \end{cases}.$$

(**b**) Ricordiamo che in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n intero positivo, un elemento a è un elemento nilpotente se esiste un intero positivo m tale che $a^m = 0$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si determino gli elementi nilpotenti di $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2. Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare che ad ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$ associ la traccia di A ovvero la somma degli elementi diagonali di A. Sia inoltre g l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $g(e_1) = e_2$, $g(e_2) = e_1$ e $g(e_3) = e_3$, dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(**a**) Determinare basi del nucleo e dell'immagine di f.

(**b**) Descrivere l'insieme $f^{-1}(t)$ (la controimmmegine di t) al variare di $t \in \mathbb{R}$ e dire per quali valori di t esso è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.[1]

(**c**) Scrivere la matrice A che rappresenta g rispetto alla base canonica e dimostrare che per ogni scelta di due numeri reali a e b non entrambi nulli, il vettore $(a, a, b)^T$ è un autovettore di g.

[1]Sebbene non sia necessario per risolvere l'esercizio, per chi ha la nozione di gruppo quoziente, potrebbe essere utile osservare che si tratta delle classi laterali di $\ker f$.

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2019/2020 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 03/7/2020

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Discutere la compatibilità e il tipo di infinità delle eventuali soluzioni del seguente sistema lineare reale, k essendo un parametro reale.

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 \\ kx + 2z = 4 \\ 2x + 4z = 8 \end{cases} .$$

(**b**) Siano V uno spazio vettoriale con base (v_1, v_2, v_3). Sia $u = v_1 + v_3$. Si determini un vettore $w \in V$ tale che (v_1, u, w) sia una base di V ed il vettore $v_1+v_2+v_3$ abbia coordinate $(0, 1, 1)$ rispetto ad una tale base .

(**c**) Discutere la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_4$, $f(e_4) = 0$, essendo (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2.

(**a**) Si determinino gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_9$.

(**b**) Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 4444^{445} \pmod 5 \\ X \equiv 5555^{556} \pmod 6 \end{cases}.$$

(**c**) Siano a e b due interi positivi tale che $a+b$ sia un numero primo. Dimostrare che a e b sono coprimi.

Cognome____________________________

Informatica teledidattica 2019/2020 Nome____________________________
Scritto di ALGEBRA del 03/09/2020

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Si determinino gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{10}$ e si spieghi perché in $\mathbb{Z}_{10}$ non esistono elementi nilpotenti[2].

(**b**) Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 3 \pmod 9 \\ X \equiv 5 \pmod 8 \\ X \equiv 7779^{673} \pmod 7 \end{cases} .$$

[2]Un elemento a di $\mathbb{Z}_{10}$ è nilpotente se esiste un intero non negativo n tale che $a^n = 0$ in $\mathbb{Z}_{10}$

Esercizio 2.

(**a**) Sia $\{u, v, w, u+v+w\}$ un insieme di generatori per uno spazio vettoriale di dimensione 3. Dimostrare che $u + v$ non può essere il vettore nullo.

(**b**) Sia $\mathbf{1}$ il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui entrate sono tutte pari a 1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = 2(x + y + z)\mathbf{1}$. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e determinare basi del nucleo e dell'immagine di f.

(**c**) Discutere la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f del punto precedente e determinare un'eventuale base diagonalizzante.

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2019/2020 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 30/10/2020

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Sia V uno spazio di dimensione 2 e sia $\{u, w\}$ una sua base. Determinare l'unico endomorfismo f di V tale che: (i) $f(u) = w$; (ii) f non è iniettivo; (iii) 1 è radice del polinomio caratteristico di f.

(**b**) Sia g l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$g\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice che rappresenta g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(**c**) Determinare i valori reali di a affinché la matrice reale

$$\begin{pmatrix}0 & a & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.

(**a**) Si determinino tutti gli interi n tali che il numero $2^{305} + n$ sia divisibile per 11.

(**b**) Risolvere in $\mathbb{Z}_7$ il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = 1 \\ 3X - Y = 1 \end{cases}.$$

(**c**) Determinare un'identità di Bézout per gli interi 255 e 87.

*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2019/2020 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 31/01/2020

L'esame ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro (risposte non giustificate non saranno accreditate). Se occorre ulteriore spazio, usare il retro del foglio.

****

Esercizio 1. Dati gli interi 1960 e 693 si determini

(**a**) il loro massimo comune divisore;

(**b**) una identità di Bézout;

(**c**) l'insieme delle soluzioni intere dell'equazione diofantea $1960x + 1764y = 14$.

Esercizio 2.

(**a**) Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 1237^{28} \pmod 9 \\ 2X \equiv 2^{2149} \pmod 7 \\ 3X \equiv 13253^{5} \pmod 5 \end{cases} .$$

(**b**) Elencare tutti le matrici invertibili di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ (il gruppo lineare generale $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(**a**) Scrivere la matrice canonica di f (la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^2$).

(**b**) Determinare basi di $\ker f$ (il nucleo di f) e $\mathrm{Im} f$ (l' immagine di f).

(**c**) Dire se l'insieme $U \subseteq \mathbb{R}^2$ definito più sotto è uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, esibirne una base.

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}, \, k \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 4. Siano dati i seguenti tre vettori di pendenti da un parametro h:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-1 \\ h^2-1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice A ottenuta incolonnando i vettori v_1, v_2 e v_3.

(**a**) Calcolare il rango di A al variare di h.

(**b**) Calcolare la dimensione del sottospazio $E_h = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ al variare di h.