UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 8.2 – Cardinalità (parte II)

Docente: Pietro Cenciarelli

Cosa è l'infinito ?

Richard Dedekind (1888)

"Un insieme si dice infinito se è equipotente ad una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito."

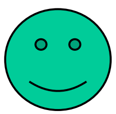
$|[0,1]| =$ |  |

David Hilbert (1862 – 1943)

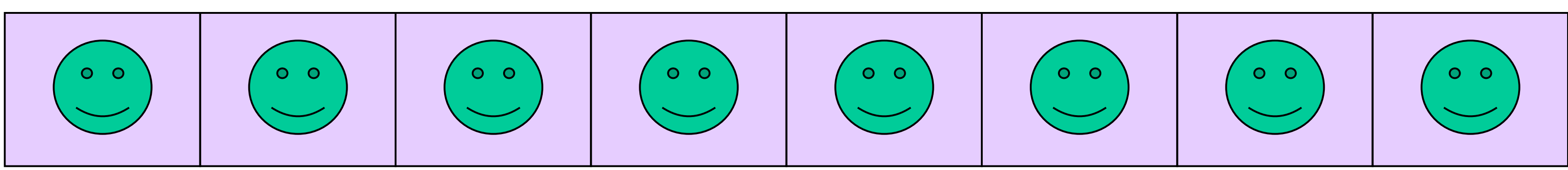
"Immaginiamo un albergo con infinite stanze..."

Alberghi transfiniti ( )

che succede quando un albergo transfinito è **pieno** e...
…si presenta un nuovo ospite?



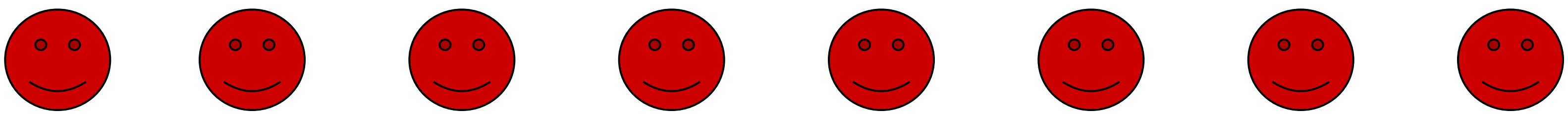
ovvero: $|\omega| = |\omega+1|$



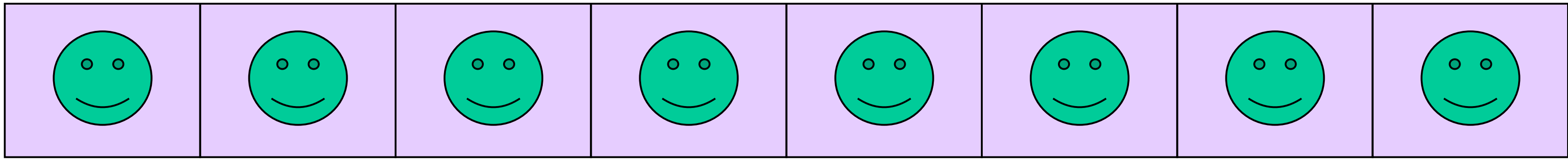
1 2 3 4 5 6 7 8…

Alberghi transfiniti (💣 💣)

che succede quando un albergo transfinito è **pieno** e...
…si presentano ω nuovi ospiti?



ovvero: $|\omega| = |\omega+\omega|$



1 2 3 4 5 6 7 8…

E ‘l naufragar...

$$|\omega| = |\omega+1| = |\omega+\omega| = |\omega+\omega+\omega| = \ldots|\omega^2| \ldots$$

ma allora gli infiniti
sono tutti uguali?!

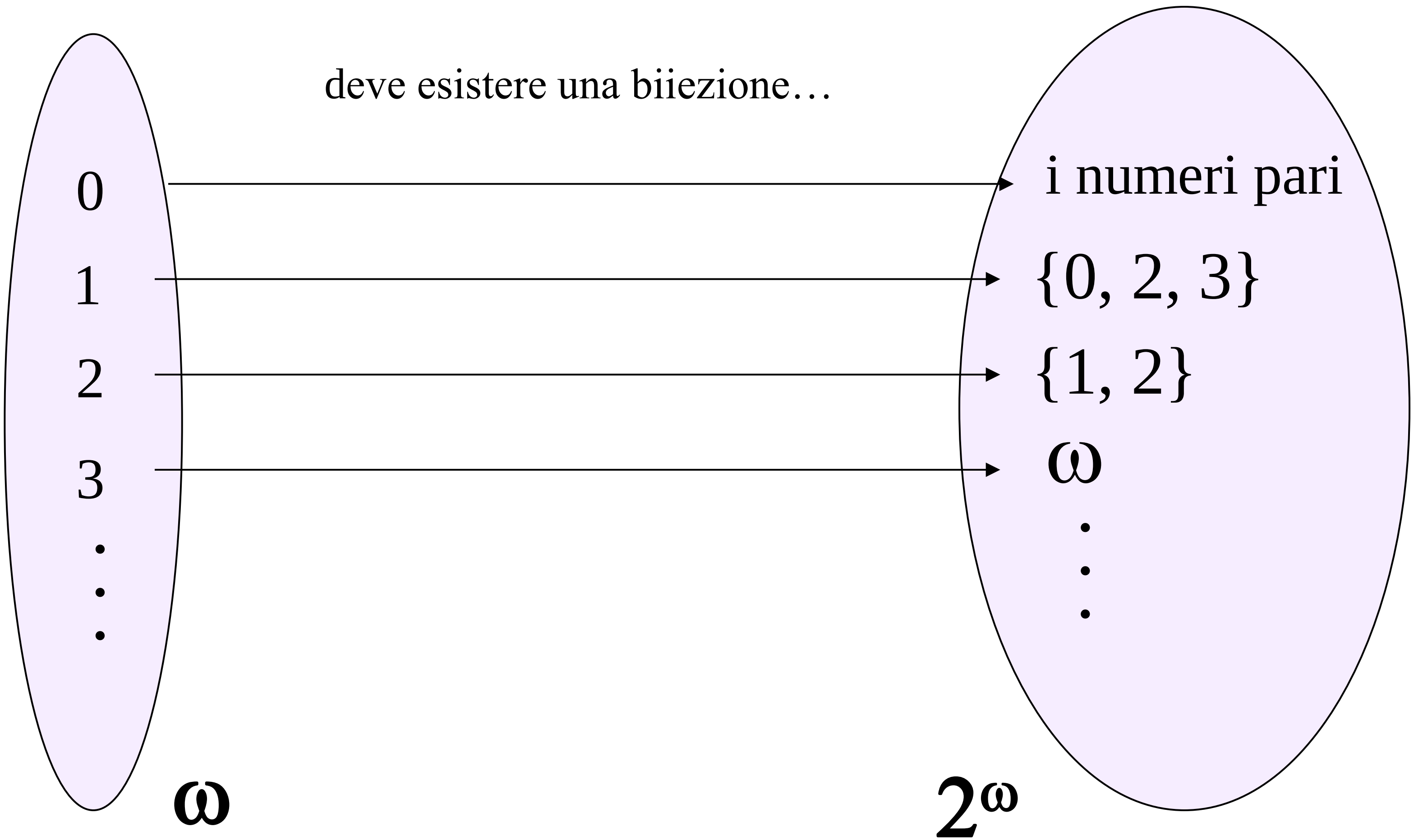
2^ω

chiamiamo 2^ω l'insieme dei sottoinsiemi di ω

ovvero:

$\{\{0\}, \{1,4,100\}, \{2,4,6,8...\}, \{\}, \omega...\}$

supponiamo che $|\omega| = |2^\omega|$



supponiamo che $|\omega| = |2^{\omega}|$

	0	1	2	3	4	…
0	1	0	1	0	1	…
1	1	0	1	1	0	…
2	0	1	1	0	0	…
3	1	1	1	1	1	…
⋮						

i numeri pari

$\{0, 2, 3\}$

$\{1, 2\}$

ω

⋮

…che può essere rappresentata
in forma tabellare come sopra.

ω $\qquad$ 2^{ω}

ora prendiamo la diagonale

	0	1	2	3	4	…
0	1	0	1	0	1	…
1	1	0	1	1	0	…
2	0	1	1	0	0	…
3	1	1	1	1	1	…
⋮						

essa rappresenta un insieme {0, 2, 3, ...}

ora prendiamone il complemento

…

	0	1	2	3	4	…
0	1	0	1	0	1	…
1	1	0	1	1	0	…
2	0	1	1	0	0	…
3	1	1	1	1	1	…
⋮						

0	1	0	0	…

esso rappresenta un insieme {1, ...} che però…

… non può comparire nella tabella!

	0	1	2	3	4	…
0	1	0	1	0	1	…
1	1	0	1	1	0	…
2	0	1	1	0	0	…
3	1	1	1	1	1	…
⋮						
	0	1	0	0	…	?

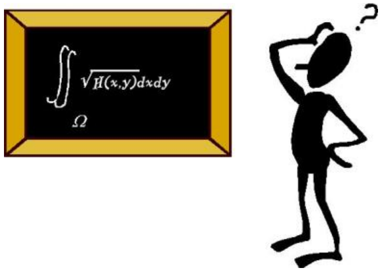
conclusione

$$|\omega| < |2^{\omega}|$$

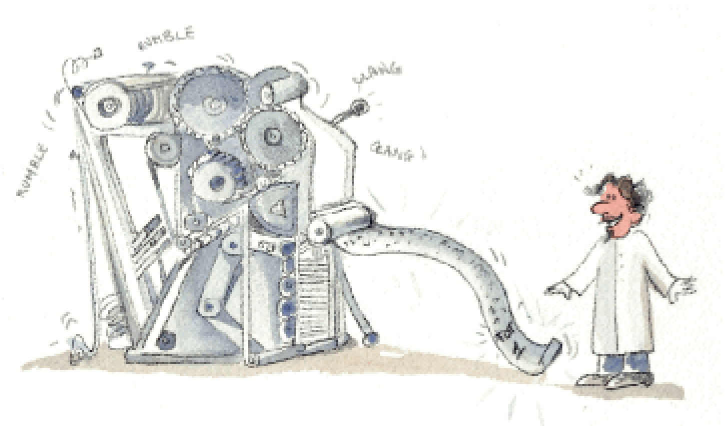
 …e allora?

Buddha Shakyamuni (~ 500 a.C.)

"Onorato dal Mondo, questi mondi sono infiniti e sconfinati. Il loro numero è al di là di ogni calcolo e supera il potere dell'immaginazione." (Sutra del Loto – IV.5)

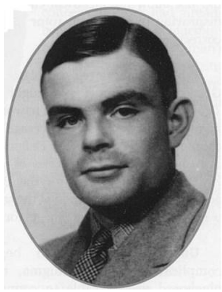


Cosa vuol dire che una funzione è *calcolabile* ?

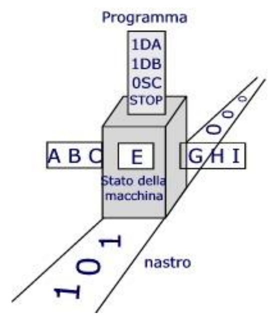


Che esiste un *procedimento effettivo* per calcolarla

Procedimento effettivo di calcolo



Alan M. Turing (1912 – 1954)



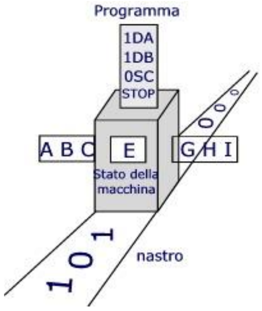
(~ 1930)

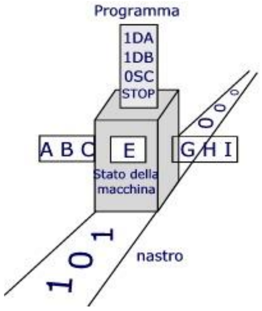
Alonzo Church (1903 – 1995)

Tutto ciò che è calcolabile

è “  *- calcolabile* ”

Quante sono le macchine di Turing ?

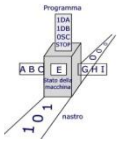




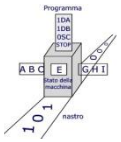
C1,0,1,C2		C1,1,L,C2
C1,1,R,C1		C2,0,L,C3
C2,0,R,C3		C2,1,L,C3
C2,1,L,C2	<	C3,0,1,C3
C3,0,R,C4		C3,1,L,C4
C3,1,0,C3		C4,0,1,C4
C4,0,R,C4		C4,1,R,C5

$f(x,y) = x+y$ $\qquad$ $f(x) = 2x$

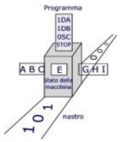
Quante sono le maccine di Turing ?



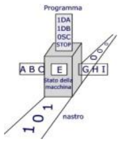
1



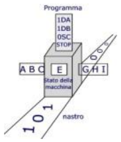
2



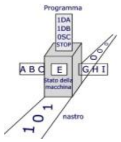
3



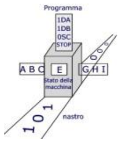
4



5



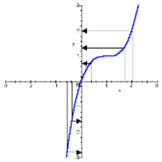
6



7

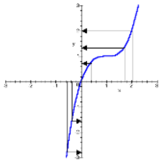
• • • ω

Quante sono le funzioni ?



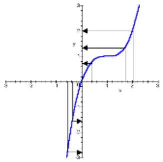
1

• • •



1,03

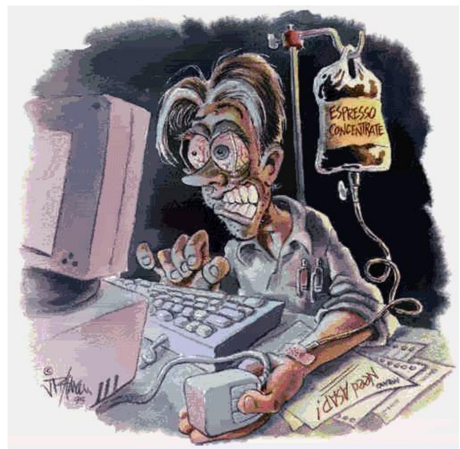
• • •



π

• • • 2^{ω}

Dunque, esistono funzioni matematicamente ben definite ma…



… NON CALCOLABILI !

 ... tipo...?!

Post Correspondence Problem

Emil Post
(1897 – 1954)

b	a	ca	abc
ca	ab	a	c

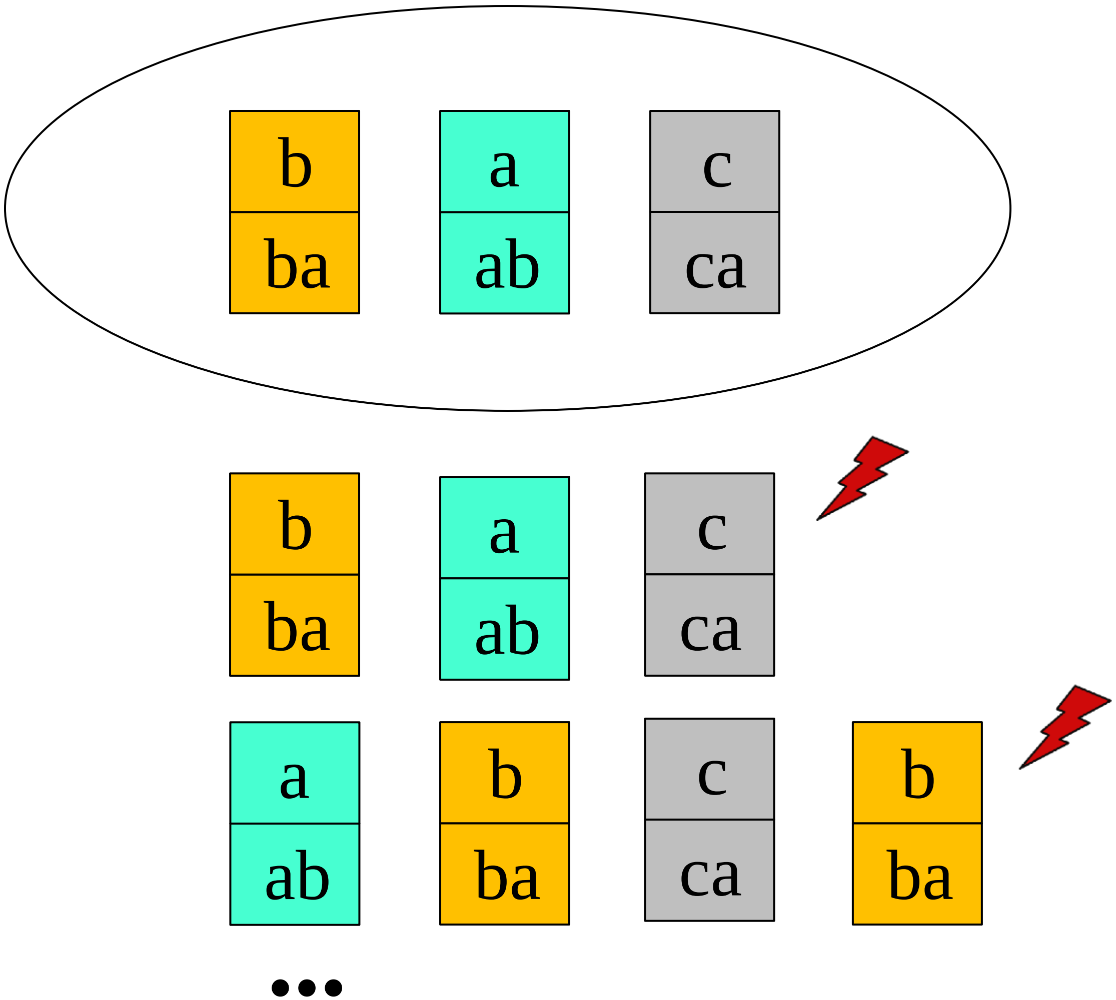
a	b	ca	a	abc
ab	ca	a	ab	c

abcaabc

abcaabc

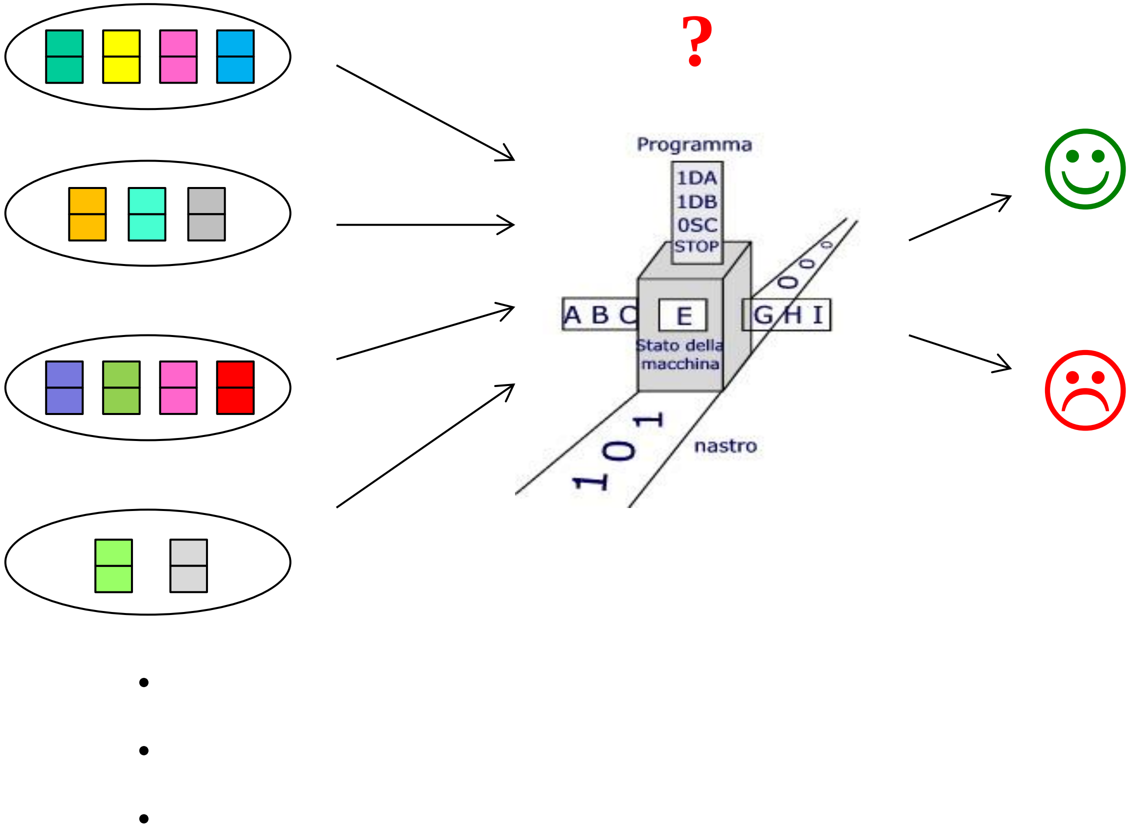
☺

Post Correspondence Problem



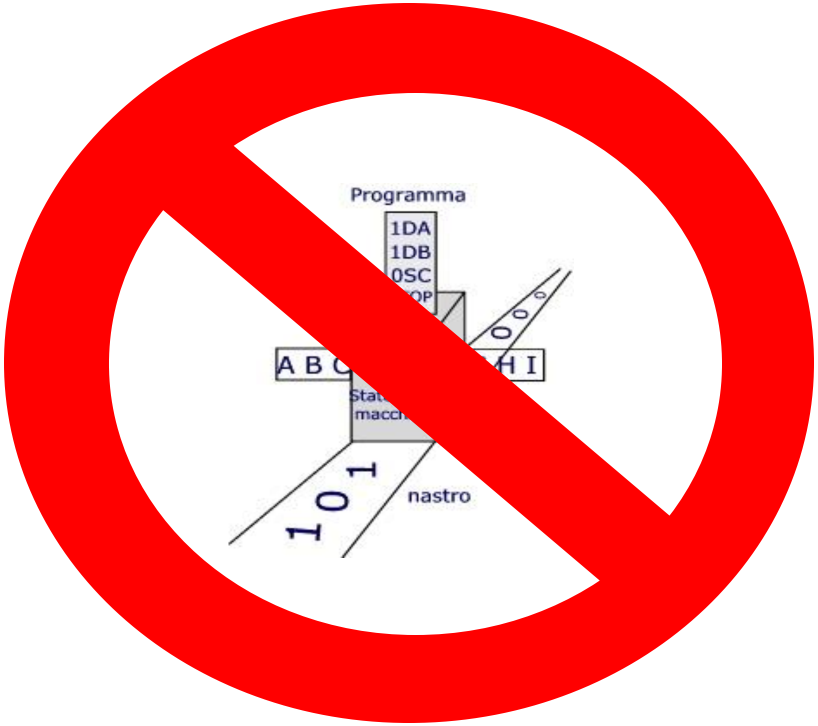
Emil Post
(1897 – 1954)

Post Correspondence Problem



Emil Post
(1897 – 1954)

Post Correspondence Problem



Emil Post
(1897 – 1954)