I numeri naturali

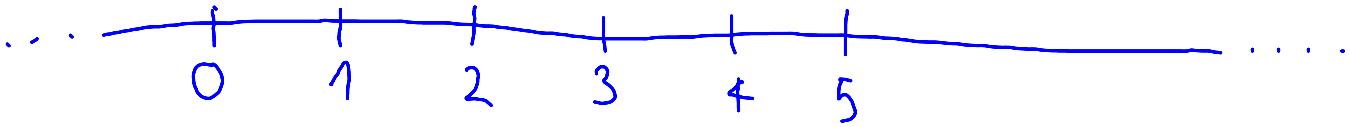
UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Cominciamo con l'insieme dei numeri **naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. 0 è un numero naturale

ii. la **somma** di due numeri naturali è un numero naturale $n + m = m + n \in \mathbb{N}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$



I numeri naturali

Cominciamo con l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

i. 0 è un numero naturale

ii. la somma di due numeri naturali è un numero naturale $n+m=m+n \in \mathbb{N}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

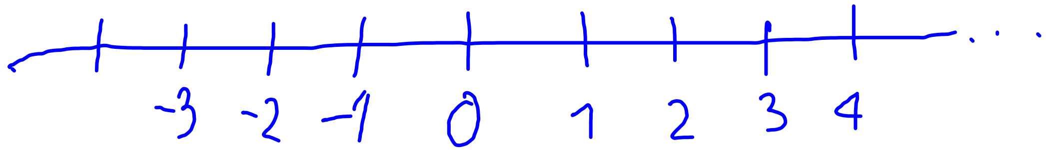
iii. $n+0=0+n=n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

I numeri interi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

L'insieme dei numeri interi è

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



I numeri interi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

L'insieme dei numeri interi è

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ però $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

ii. la somma algebrica di due numeri interi è un numero intero $n \pm m = m \pm n \in \mathbb{Z}$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

iii. per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste un unico intero $-n$ tale che $n + (-n) = 0$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

i. la somma è associativa

$a, b, c \in \mathbb{Q}$

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \in \mathbb{Q}$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa

$a, b \in \mathbb{Q}$

$a+b=b+a$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$

$a = \frac{m}{n} \qquad -a = \frac{-m}{n}$

$a + (-a) = \frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{m + (-m)}{n} = \frac{0}{n} = 0$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a+0=a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists! (-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a+(-a)=0$
v. il prodotto è associativo

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists! (-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \exists! (1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$

$a = \frac{m}{n}$, $m \neq 0$, $\frac{1}{a} = \frac{n}{m}$ $\quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n \cdot m}{n \cdot m} = 1$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

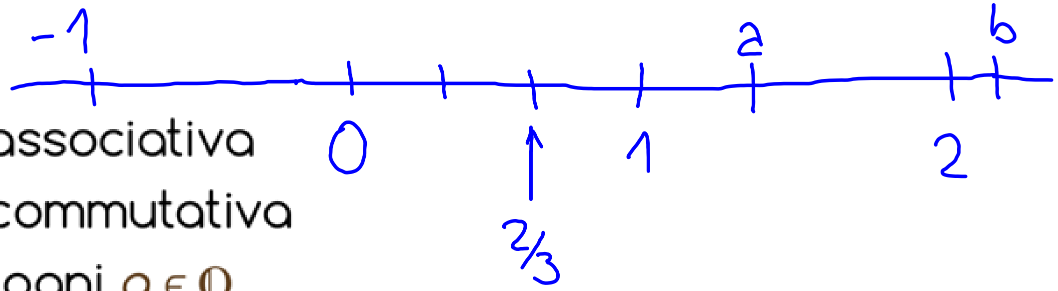
i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a+0=a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a+(-a)=0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0,\ \exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma

$a, b, c \in \mathbb{Q}$ $\quad a(b+c) = ab + ac$

Proprietà dei razionali

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

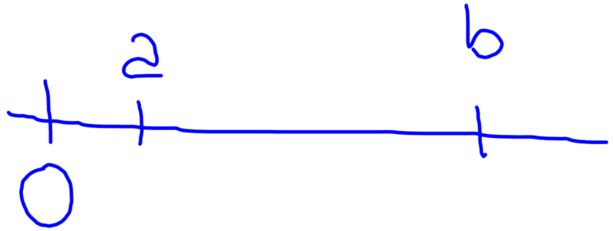


i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a+0=a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a+(-a)=0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0,\ \exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma
x. se $a \leq b$, allora $a+c \leq b+c$, $\forall c$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Proprietà dei razionali

i. la somma è associativa
ii. la somma è commutativa
iii. $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
iv. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!(-a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a + (-a) = 0$
v. il prodotto è associativo
vi. il prodotto è commutativo
vii. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$
viii. $\forall a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0,\ \exists!(1/a) \in \mathbb{Q}$ tale che $a \cdot (1/a) = 1$
ix. il prodotto è distributivo rispetto alla somma
x. se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$, $\forall c$
xi. se $a \leq b$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$, $\forall c \geq 0$



L'induzione

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Principio di induzione.
Sia $\{\mathscr{P}(n), n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni, se

i. $\mathscr{P}(0)$ è vera

ii. $\mathscr{P}(n)$ implica $\mathscr{P}(n+1)$

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\underset{\checkmark}{P(0)} \xrightarrow{ii.} P(1) \xrightarrow{ii.} P(2) \xrightarrow{ii.} \dots$

L'induzione

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Prima verifichiamo che sia vera la prima proposizione della famiglia

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1 \quad \checkmark$$

L'induzione

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Grazie al principio di induzione proviamo che sono vere tutte le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Supponiamo che sia vera $\mathscr{P}(n)$ allora

$$P(n+1) \qquad 1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \qquad \checkmark$$

$$=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$$

L'induzione

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h \quad \checkmark$$

L'induzione

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Sia $h \geq -1$ e studiamo le proposizioni

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+h)^n \geq 1+nh$$

verifichiamo il primo passo

$$\mathscr{P}(1): \qquad 1+h = 1+h$$

poi l'ipotesi induttiva

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) \qquad \mathscr{P}(n+1)\ \checkmark$$

$$= 1+(n+1)h + nh^2 \geq 1+(n+1)h$$