E la pratica

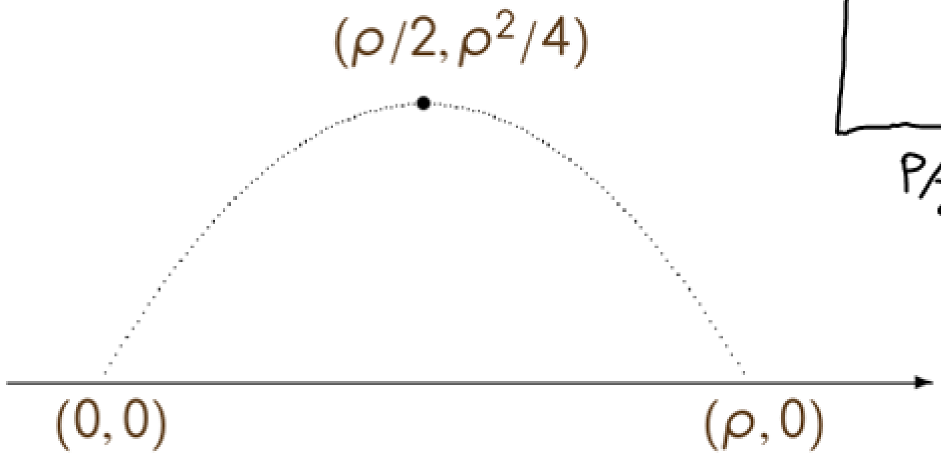
UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

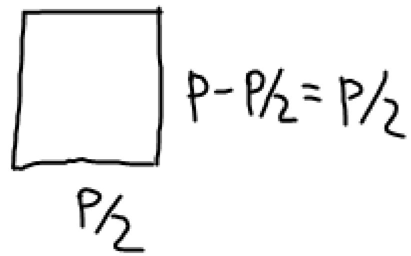
Problema. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

$$f(x) = x(\rho - x) \quad \text{con} \quad x \in [0, \rho]$$

$$f'(x) = \rho - 2x = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \rho/2$$

$$\text{si noti che} \quad f(0) = f(\rho) = 0$$





Esempi

Problema. Tra tutte le lattine di superficie totale assegnata si trovi quella di volume massimo. Ricordiamo che

$$V = \pi h r^2 \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

$$V(r) = \pi\left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) r^2 = \frac{S}{2} r - \pi r^3 \qquad r \in \left[0, \left(\frac{S}{2\pi}\right)^{1/2}\right]$$

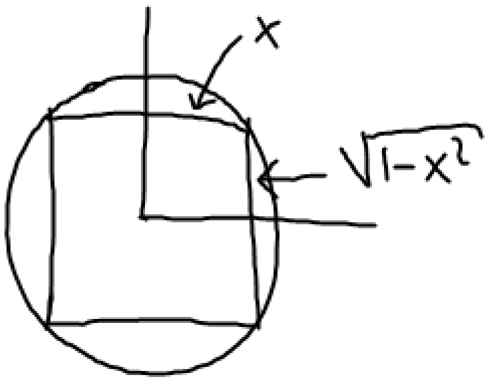
$$2\pi r(r+h) = S$$

$$r+h = \frac{S}{2\pi r}, \quad h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

Esempi

Problema. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi quello di volume massimo.

$$V(x) = \pi x \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^2 = \pi x \left(1 - x^2\right) \qquad x \in [0,1]$$

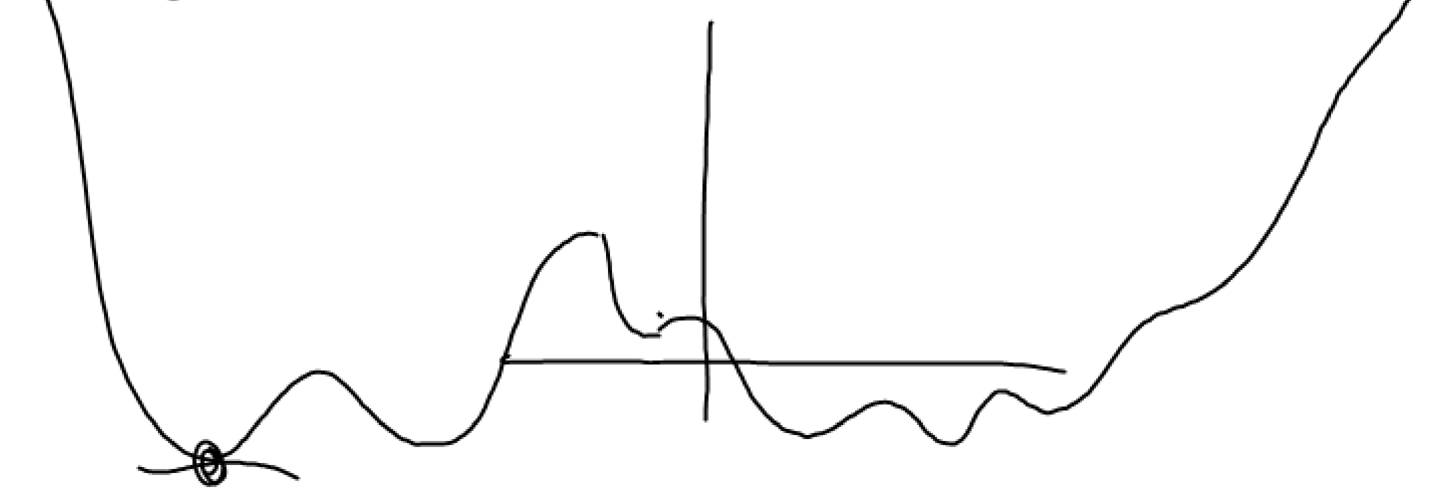


Alcune generalizzazioni

Teorema di Weierstrass II.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

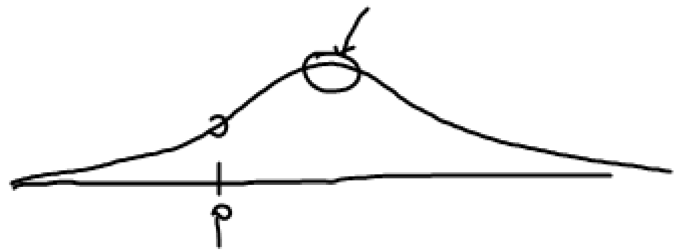
$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \, (-\infty)$$

allora esiste $x_* \in \mathbb{R}$ punto di minimo (massimo) globale.



Alcune generalizzazioni

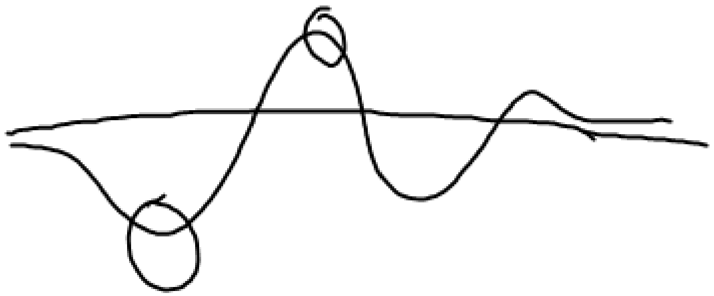
Teorema di Weierstrass III.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che



$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = c$$

allora

- se esiste ρ tale che $f(\rho) < c$ allora esiste $x_* \in \mathbb{R}$ punto di minimo globale.
- se esiste ρ tale che $f(\rho) > c$ allora esiste $x^* \in \mathbb{R}$ punto di massimo globale.



Esempi

UNITELMA SAPIENZA

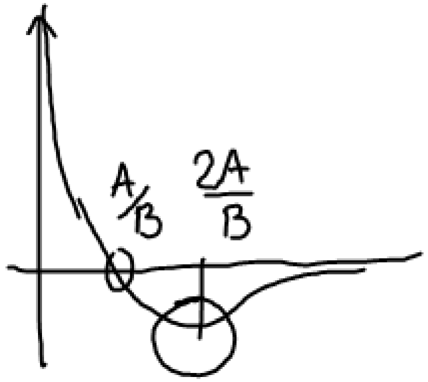
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Problema. Si dica se esistono massimo e minimo assoluto della funzione

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \qquad A, B > 0 \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{r \longrightarrow 0^+} U(r) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \frac{A - Br}{r^2} = +\infty$$

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} U(r) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \frac{A - Br}{r^2} = 0$$



quindi esiste soltanto il minimo assoluto

$$U'(r) = -2\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2} = \frac{Br - 2A}{r^3} = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \bar{r} = \frac{2A}{B}$$

Esempi

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Problema. Si trovi il massimo assoluto di
$f(x) = 1 - |x|$ con $x \in [-1, 1]$

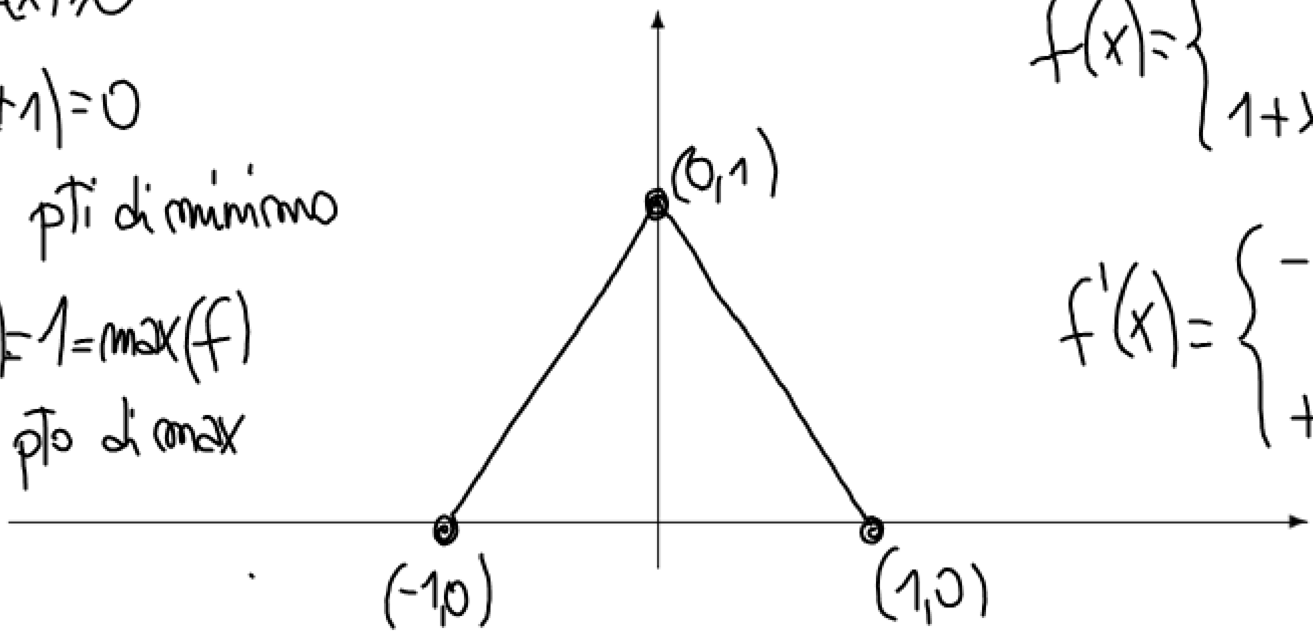
$f(x) \geq 0$

$f(\pm 1) = 0$

± 1 pti di minimo

$f(0) = 1 = \max(f)$

0 pto di max



$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \geq 0 \\ 1 + x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ +1 & x < 0 \end{cases}$$