*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2023/2024 *Nome*______________________________
Scritto di ALGEBRA del 26/01/2024

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Sia n un intero. Dimostrare che

$$(n, n+2) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}.$$

Soluzione. Ricordiamo che se d è il massimo comune divisore di a e b allora d divide ogni combinazione lineare a coefficienti interi di a e b: $d|sa+tb \, \forall s,\, t \in \mathbb{Z}$. In particolare d divide $a-b$, $b-a$ e $a+b$. Pertanto, se $d = (n, n+2)$, allora $d|(n+2)-n$ e dunque $d|2$. Sicché $d = 1$ oppure oppure $d = 2$. Se n è dispari, allora $n+2$ è dispari e 2 non è un divisore comune di n ed $n+2$ sicché $d = 1$ in questo caso. Se n è pari, allora anche $n+2$ è pari e quindi $2|d$. Concludiamo che $d = 2$ quando n è pari.

(**b**) Sia n un intero. Si dimostri che se $3 \not| n$, allora $3|n^{18} + n^8 + 1$.

Soluzione. Si tratta di un'applicazione diretta del Teorema di Fermat: se $3 \not| n$, allora 3 è primo con n sicché, per il teorema, $n^2 = n^{3-1} \equiv 1 \pmod 3$. Ma allora, per ogni $k \geq 1$ anche $n^{2k} = (n^2)^k \equiv 1 \pmod 3$. In particolare $n^{18} \equiv n^8 \equiv 1 \pmod 3$ e si conclude facilmente.

(**c**) Dire per quali valori interi di a è compatibile il sistema

$$\begin{cases} 7X \equiv a \pmod{12} \\ 3X \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}.$$

Soluzione. I coefficienti di X sono primi con i rispettivi moduli sicché, prendendo gli inversi, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} X \equiv 7a \pmod{12} \\ X \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}.$$

Gli interi che risolvolo la prima equazione sono della forma $7a + 12n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Per la compatibilità è necessario determinare i valori di a per i quali essi soddisfino la seconda equazione. Dobbiamo pertanto richiedere $7a + 12n \equiv 2 \pmod 4$ che equivale a $3a \equiv 2 \pmod 4$ ed infine, $a \equiv 2 \pmod 4$. Concludiamo che i valori interi di a che rendono compatibile il sistema sono tutti e soli gli interi della forma $2 + 4n$, $n \in \mathbb{Z}$. Quindi a è il doppio di un intero dispari.

Esercizio 2.

(**a**) Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbb{R}$. Esibire una base del nucleo dell'endomorfismo f di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove a secondo membro compare l'usuale prodotto di matrici.

Soluzione. Dopo aver eseguito il prodotto, per la definizione di nucleo si ha

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x-y & y-x \\ z-w & w-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sicché la generica matrice nel nucleo di f è della forma $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ per a e b numeri reali arbitrari. Le matrici $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sono nel nucleo (la prima per $a = 1$ e $b = 0$, mentre la seconda per $a = 0$ e $b = 1$). Inoltre $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sicché F_1 ed F_2 generano il nucleo di f e sono linearmente indipendenti. Concludiamo che $\{F_1, F_2\}$ è una base del nucleo. Alternativamente si sarebbe potuto passare per la definizione di matrice associata ad un endomorfismo.

(**b**) Siano A e B due matrici reali entrambe con 3 righe e 2 colonne. Si dimostri che

$$\text{rango}(A+B) \leq \text{rango}(A) + \text{rango}(B).$$

Soluzione. La realzione data vale in generale. Tuttavia, nel caso speciale, la dimostrazione è molto semplice: se almeno una tra A e B è la matrice nulla, allora la relazione vale banalmente con il segno di uguale. Possiamo dunque supporre $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ è la matrice nulla. In tali ipotesi i ranghi di A e B sono numeri interi positivi, sicché $\text{rango}(A)+\text{rango}(B) \geq 2$. D'altra parte $\text{rango}(A+B) \leq 2$ perché il rango non supera la più piccola delle dimensioni di una matrice. Ciò prova il sussistere della relazione enunciata.

(**c**) Sia a un numero reale e si consideri la matrice $A - aI$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

e I è ma matrice identità di ordine 3. Dire per quali valori di a la matrice $A - aI$ è invertibile.

Soluzione. Osserviamo $A - aI$ è invertibile se e solo se $\det(A - aI) \neq 0$ se e solo se a non è radice del polinomio caratteristico di A se e solo se a non è autovalore di A. Dunque basta determinare gli autovalori di A ed escluderli come valori di a. Ora sono soli conti....gli autovalori di A sono -2,0,2.