Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

18. Derivate successive

La derivata

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivata

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Definizione.

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **derivabile due volte** se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f'}{\Delta x}$$

La derivata seconda

Definizione.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **derivabile due volte** se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f'}{\Delta x} = f''(x)$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Definizione.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **derivabile due volte** se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f'}{\Delta x} = f''(x)$$

A volte scriveremo anche

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = f^{(2)}(x)$$

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una **legge oraria**, allora

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una **legge oraria**, allora

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una **legge oraria**, allora

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una **legge oraria**, allora

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

$$s''(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta t}$$

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una **legge oraria**, allora

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

$$s''(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una **legge oraria**, allora

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

$$s''(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$$

Un esempio importante

Sia $s(t)$ una legge oraria, allora

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

$$s''(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$$

quindi abbiamo introdotto le quantità velocità e accelerazione

Derivate successive

Definizione.

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **derivabile k volte** se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f^{k-1}(x+h) - f^{k-1}(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f^{k-1}}{\Delta x}$$

Derivate successive

Definizione.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **derivabile k volte** se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f^{k-1}(x+h) - f^{k-1}(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f^{k-1}}{\Delta x} = f^{(k)}(x)$$

Definizione.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **derivabile k volte** se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f^{k-1}(x+h) - f^{k-1}(x)}{h} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta f^{k-1}}{\Delta x} = f^{(k)}(x)$$

A volte scriveremo anche

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^2}(x)$$

Punti stazionari

Teorema.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e x_0 un punto stazionario, allora

- se $f' < 0$ a sinistra di x_0 e $f' > 0$ a destra di x_0 allora x_0 è un punto di minimo locale per f
- se $f' > 0$ a sinistra di x_0 e $f' < 0$ a destra di x_0 allora x_0 è un punto di massimo locale per f
- se f' non cambia segno intorno a x_0 allora x_0 non è un massimo o minimo locale stretto per f

Punti stazionari

Corollario.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte e x_0 un punto stazionario, allora

- se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale stretto per f
- se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale stretto per f

Funzioni convesse

Definizione.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **convessa** se

Funzioni convesse

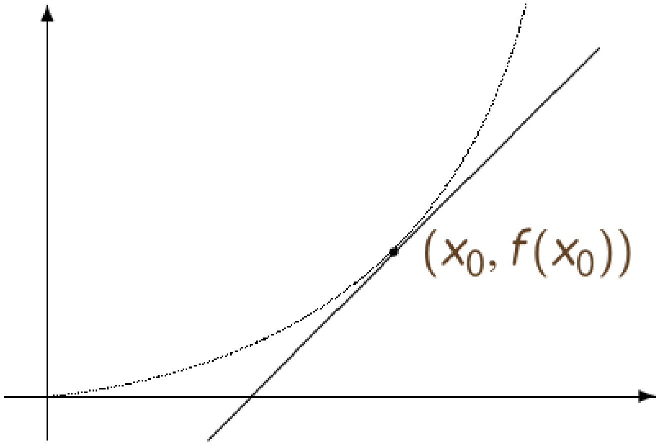
Definizione.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **convessa** se

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, diremo che f è **convessa** se

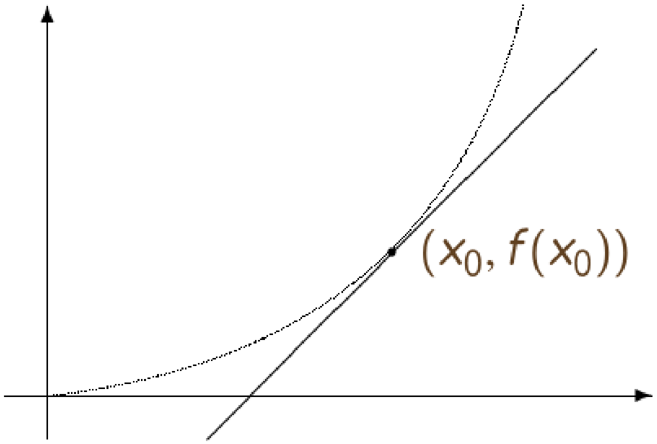
$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Funzioni convesse

Teorema.
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, f è **convessa** se e solo se

$$f''(x) \geq 0$$



Esempi

e^x

$\ln(x)$

$ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$

Esempi

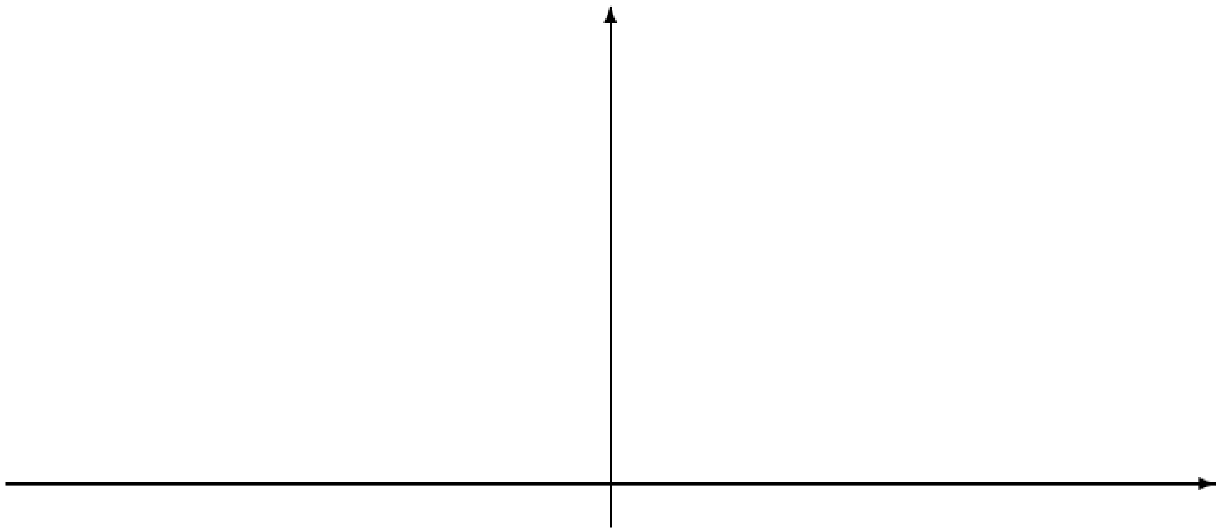
$$e^{-x^2}$$

$$\sin(x)$$

$$\left(\ln(1+x^2)\right)' =$$

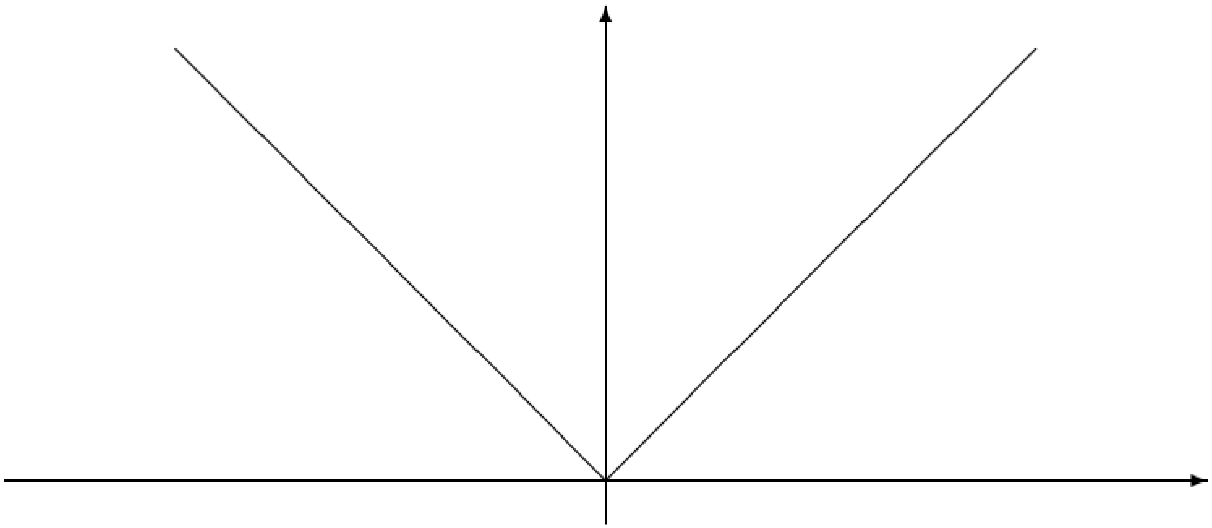
Ancora sulla convessità

$f(x) = |x|$



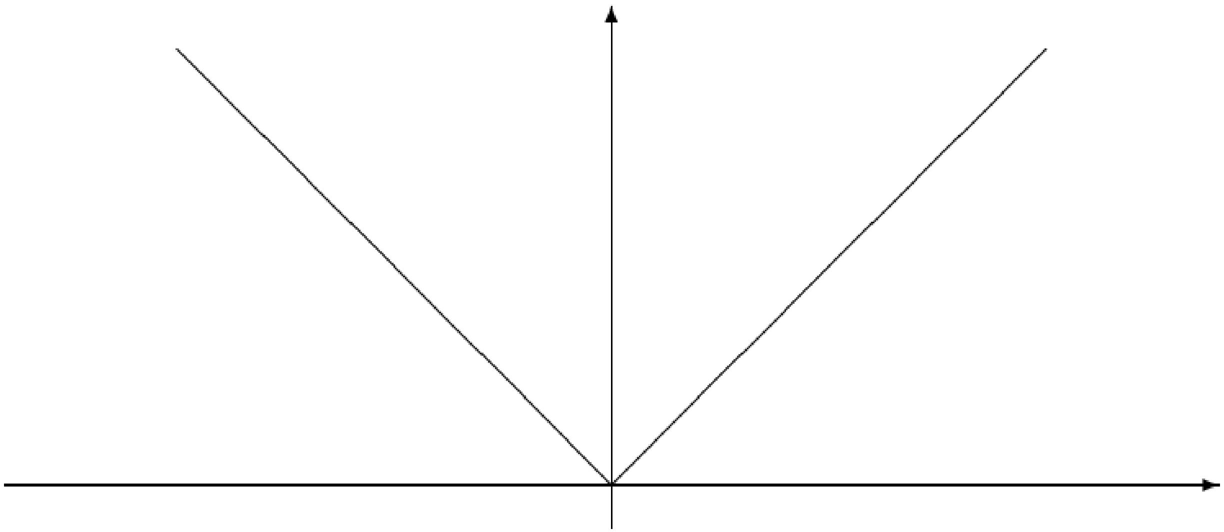
Ancora sulla convessità

$$f(x) = |x|$$



Ancora sulla convessità

$$f(x) = |x|$$



$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \qquad \forall x \in (x_1, x_2)$$