SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Operazioni sui numeri in virgola mobile

Prof. Daniele Gorla

Moltiplicazione

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

$$< s_1 , e_1 , m_1 > \; \times \; < s_2 , e_2 , m_2 > \; = \; < s , e , m >$$

dove

1. $s = \begin{cases} 0 & \text{se } s_1 = s_2 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

2. m ed e sono la mantissa e l'esponente normalizzati di $1{,}m_1 \times 1{,}m_2 \times b^{e_1+e_2-B}$

   dove B è il bias

   N.B.: attenzione all'overflow degli esponenti!!

Come in rappresentazione scientifica, dove, per esempio:
$2{,}5\times10^2 \;\times\; 3\times10^3 \;=\; 7{,}5\times10^5$

Il "$-B$" serve per non sommare due volte il bias all'esponente del risultato

---

Esempio

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

Siano
- A = < 0 , 10000 , 1101000000 >
- B = < 1 , 01101 , 1010000000 >

Calcolare: A × B

Convertiamo A e B in base 10 (per effettuare le verifiche di correttezza):

A → $11{,}101_2 = (2 + 1 + ½ + ⅛)_{10} = (3 + 0{,}5 + 0{,}125)_{10} = 3{,}625_{10}$

B → $-0{,}01101_2 = -(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5})_{10} = -(0{,}25+0{,}125+0{,}03125)_{10} = -0{,}40625_{10}$

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

A = < 0 , 10000 , 1101000000 > ($3{,}625_{10}$)
B = < 1 , 01101 , 1010000000 > ($-0{,}40625_{10}$)

Calcolare A × B

Somma degli esponenti (meno il bias):

```
10000 +
01101 =
----------
11101 –
01111 =
----------
01110
```

Prodotto delle mantisse:

```
   1,1101 ×
    1,101 =
------------------------
    11101
   00000-
  11101-
 11101-
------------------------
 10,1111001
```

Risultato (normalizzato):
R = < 1 , 01111 , 0111100100 >

Verifica:
R → $-1{,}01111001_2$
$= -(1+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-8})_{10}$
$= -1{,}47265625_{10}$
$= (3{,}625 \times -0{,}40625)_{10}$

Divisione

$$< s_1 , e_1 , m_1 > \;\div\; < s_2 , e_2 , m_2 > \;=\; < s , e , m >$$

dove

1. $s = \begin{cases} 0 & \text{se } s_1 = s_2 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

2. m ed e sono la mantissa e l'esponente normalizzati di

$$(1{,}m_1 \div 1{,}m_2) \times b^{e_1 - e_2 + B}$$

<u>N.B.:</u> non la vedremo in dettaglio, perché la divisione delle mantisse è complessa…

Addizione (1)

$$< s_1 , e_1 , m_1 > + < s_2 , e_2 , m_2 > = < s , e , m >$$

1. sia $e_1 = e_2$
   - $s = \begin{cases} s_1 & \text{se } m_1 \geq m_2 \\ s_2 & \text{altrimenti} \end{cases}$
   - m ed e sono le normalizzazioni di m' ed e' definiti come:

$$e' = e_1 \; (= e_2)$$

$$m' = \begin{cases} 1{,}m_1 + 1{,}m_2 & \text{se } s_1 = s_2 \\ 1{,}m_1 - 1{,}m_2 & \text{se } s_1 \neq s_2 \text{ e } m_1 \geq m_2 \\ 1{,}m_2 - 1{,}m_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

OSS.: questo è il procedimento che usiamo in notazione scientifica:

ES.: $5{,}3\times10^2 + 2{,}1\times10^2 = 7{,}4\times10^2$ $\quad 5{,}3\times10^2 - 2{,}1\times10^2 = 3{,}2\times10^2$

Addizione (2)

$$< s_1 , e_1 , m_1 > + < s_2 , e_2 , m_2 > = < s , e , m >$$

2. sia $e_1 < e_2$
   - slitta a destra $1{,}m_1$ di $e_2 - e_1$ posizioni (inserendo 0 a sinistra)
     (N.B.: in questo passaggio intermedio, il primo operando *non* è più normalizzato → il suo esponente sarà $0\cdots0$)
     (N.B.: ci può essere perdita di cifre in coda a m_1, al limite m_1 si potrebbe azzerare!!)
   - il primo operando così diventa $< s_1 , 0...0 , m'_1 >$
   - $s = s_2$
   - m ed e sono la normalizzazione di m' ed e' definite come:

$$e' = e_2 \quad \text{ed} \quad m' = \begin{cases} 1, m_2 + 0, m'_1 & \text{se } s_1 = s_2 \\ 1, m_2 - 0, m'_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Addizione (3)

$$< s_1 , e_1 , m_1 > + < s_2 , e_2 , m_2 > = < s , e , m >$$

3. Se $e_1 > e_2$
   - come nel caso (2), ma lavoro sul secondo operando (per portarlo all'esponente del primo)

Sottrazione

Si riduce banalmente all'addizione, nel modo seguente:

$$< s_1 , e_1 , m_1 > - < s_2 , e_2 , m_2 > =$$

$$= < s_1 , e_1 , m_1 > + < \overline{s_2} , e_2 , m_2 >$$

dove $\overline{s}$ denota 1, se $s = 0$, e 0, se $s = 1$.

Esempio (continua)

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

A = < 0 , 10000 , 1101000000 > ($3{,}625_{10}$)
B = < 1 , 01101 , 1010000000 > ($-0{,}40625_{10}$)

Calcolare A + B

Porto l'esponente minore (01101) a quello maggiore (10000)
Per fare ciò, devo spostare la virgola nel secondo operando di
16 (cioè 10000) – 13 (cioè 01101) = 3
posizioni a sinistra, cioè ottengo
B' = < 1 , 00000 , 0011010000 >

A e B' sono discordi, con A di valore assoluto maggiore:

1,110100000 –
0,001101000 =

1,100111000

Risultato normalizzato: R = < 0 , 10000 , 1001110000 >

Verifica: R → $11{,}00111_2$ → $3{,}21875_{10}$

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

A = < 0 , 10000 , 1101000000 > ($3{,}625_{10}$)
B = < 1 , 01101 , 1010000000 > ($-0{,}40625_{10}$)

Calcolare A – B

Considero sempre il numero (non normalizzato) B' trovato per l'operazione precedente (anche qui i numeri devono avere stesso esponente)

Poiché devo fare una sottrazione, calcolo A + –B'. Poiché A e –B' sono concordi, devo fare la somma delle mantisse:

1,1101000000 +
0,0011010000 =

10,0000010000

Il risultato va normalizzato (la somma delle mantisse dà 10,0000010000)
R = < 0 , 10001 , 0000001000 >

Verifica: R → $100{,}00001_2$ → $4{,}03125_{10}$

SAPIENZA Università di Roma Dipartimento di Informatica

A = < 0 , 10000 , 1101000000 > ($3{,}625_{10}$)
B = < 1 , 01101 , 1010000000 > ($-0{,}40625_{10}$)

Calcolare B – A

Considero sempre B'

Anche qui, dovendo fare una sottrazione ed essendo i numeri di partenza discordi, faccio la somma delle mantisse

Il risultato finale sarà, però, negativo, visto che sto sommando due numeri negativi

Risultato: < 1 , 10001 , 0000001000 >

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Casi notevoli:

- $(128 + 0{,}0625)_{10} = (2^7)_{10} + (2^{-4})_{10} \rightarrow 10000000_2 + 0{,}0001_2 \rightarrow$

  $\rightarrow$ < 0 , 10110 , 0000000000 > + < 0 , 01011 , 0000000000 > =
  = < 0 , 10110 , 0000000000 > + < 0 , 00000 , 0000000000> =
  = < 0 , 10110 , 0000000000 >

- $(256 \times 256)_{10} \rightarrow$

  $\rightarrow$ < 0 , 10111 , 0000000000 > × < 0 , 10111 , 0000000000 >

  10111 + 10111 - 01111 = 11111 $\rightarrow$ INFINITY $\rightarrow$ *exponent overflow!*