Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

14. Calcolare derivate I

La derivata

Ripartiamo dalla nozione di **derivata**.

La derivata è il limite del rapporto incrementale e una funzione f è derivabile in un punto x se esiste finite il seguente limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le derivate elementari

Ricordiamo alcune delle derivate calcolate precedentemente

Le derivate elementari

Ricordiamo alcune delle derivate calcolate precedentemente

$$\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$$

Le derivate elementari

Ricordiamo alcune delle derivate calcolate precedentemente

$$\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Le derivate elementari

Ricordiamo alcune delle derivate calcolate precedentemente

$$\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Le derivate elementari

Ricordiamo alcune delle derivate calcolate precedentemente

$$\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

Derivare somme

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

Derivare somme

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

Derivare somme

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

Derivare somme

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Derivare somme

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\begin{aligned}
&\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

Esempi

La formula appena ricavata ci permette di calcolare, per esempio, la derivata di un polinomio

$$\left(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)'$$

Esempi

La formula appena ricavata ci permette di calcolare, per esempio, la derivata di un **polinomio**

$$\left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)'$$

$$= \left(a_k x^k\right)' + \left(a_{k-1}x^{k-1}\right)' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)'$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

La formula appena ricavata ci permette di calcolare, per esempio, la derivata di un polinomio

$$
\begin{aligned}
&\left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)' \\
&\quad = \left(a_k x^k\right)' + \left(a_{k-1}x^{k-1}\right)' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' \\
&\quad = a_k\left(x^k\right)' + a_{k-1}\left(x^{k-1}\right)' + \cdots + a_1(x)' + a_0(1)'
\end{aligned}
$$

Esempi

La formula appena ricavata ci permette di calcolare, per esempio, la derivata di un polinomio

$$
\begin{aligned}
&\left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)' \\
&\quad = \left(a_k x^k\right)' + \left(a_{k-1}x^{k-1}\right)' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' \\
&\quad = a_k \left(x^k\right)' + a_{k-1}\left(x^{k-1}\right)' + \cdots + a_1(x)' + a_0(1)' \\
&\quad = a_k k x^{k-1} + a_{k-1}(k-1)x^{k-2} + \cdots + a_1
\end{aligned}
$$

Esempi

$$\left(3x^2 + x - 5\right)'$$

$$(2e^x + \sin(x))'$$

$$\left(\cos(x) + x^2\right)'$$

Derivare prodotti

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

Derivare prodotti

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}$$

$$+ \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$
\begin{aligned}
\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h} \\
&\qquad + \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

Derivare prodotti

Siano f e g due funzioni derivabili, allora

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}$$
$$+ \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quindi

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempi

$$(\sin(x)\cos(x))' =$$

$$\left(x^2 e^x\right)' =$$

$$\left(f^2(x)\right)' =$$

Derivare reciproci

Sia f una funzione derivabile non nulla, allora

$$\frac{(1/f)(x+h) - (1/f)(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right)$$

Derivare reciproci

Sia f una funzione derivabile non nulla, allora

$$\frac{(1/f)(x+h)-(1/f)(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right)$$

$$= \frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} = -\frac{1}{f(x+h)f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivare reciproci

Sia f una funzione derivabile non nulla, allora

$$\frac{(1/f)(x+h)-(1/f)(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}\right)$$
$$= \frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} = -\frac{1}{f(x+h)f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ricordando ancora che una funzione derivabile è continua possiamo scrivere

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Derivare quozienti

Siano f e g due funzioni derivabili (g non nulla), applicando le precedenti formule troviamo che

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Derivare quozienti

Siano f e g due funzioni derivabili (g non nulla), applicando le precedenti formule troviamo che

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)'$$
$$= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Derivare quozienti

Siano f e g due funzioni derivabili (g non nulla), applicando le precedenti formule troviamo che

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

Derivare quozienti

Siano f e g due funzioni derivabili (g non nulla), applicando le precedenti formule troviamo che

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Esempi

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$$

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' =$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' =$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Charles Hermite

1822 - 1901