UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

04. Successioni

Cos'è una successione

Definizione.
Una **successione** a valori reali (o complessi) è una legge che ad ogni numero $n \in \mathbb{N}$ associa un numero reale (o complesso) e si indica nel seguente modo

Definizione.
Una **successione** a valori reali (o complessi) è una legge che ad ogni numero $n \in \mathbb{N}$ associa un numero reale (o complesso) e si indica nel seguente modo

$$\begin{aligned} a : \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longmapsto a(n) \end{aligned}$$

Cos'è una successione

Definizione.
Una **successione** a valori reali (o complessi) è una legge che ad ogni numero $n \in \mathbb{N}$ associa un numero reale (o complesso) e si indica nel seguente modo

$$\begin{aligned} a : \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

Esempi

Comportamento asintotico

Intorni

Definizione.
Dato un punto $p \in \mathbb{R}$ chiameremo **intorno** di p un qualunque intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$a < p < b$$

Intorni

Definizione.
Dato un punto $p \in \mathbb{R}$ chiameremo **intorno** di p un qualunque intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$a < p < b$$

chiameremo intorno di $+\infty$ una qualsiasi semiretta aperta del tipo $(a, +\infty)$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Dato un punto $p \in \mathbb{R}$ chiameremo **intorno** di p un qualunque intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$a < p < b$$

chiameremo intorno di $+\infty$ una qualsiasi semiretta aperta del tipo $(a, +\infty)$ e intorno di $-\infty$ una qualsiasi semiretta aperta $(-\infty, b)$.

Definizione.

Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che a_n ha **limite** l se

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che a_n ha **limite** l se

per ogni J_l intorno di l $\quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

Definizione.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che a_n ha **limite** l se

per ogni J_l intorno di l $\quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \in J_l \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Definizione.
Data una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ diremo che a_n ha **limite** l se

$$\text{per ogni } J_l \text{ intorno di } l \qquad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che}$$

$$a_n \in J_l \qquad \forall n \geq \overline{n}$$

In tal caso scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \qquad a_n \longrightarrow l$$

Esempi

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$,

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

i. se $a_n \longrightarrow +\infty$, allora

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

i. se $a_n \longrightarrow +\infty$, allora $b_n \longrightarrow +\infty$

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

i. se $a_n \longrightarrow +\infty$, allora $b_n \longrightarrow +\infty$
ii. se $c_n \longrightarrow -\infty$, allora

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

i. se $a_n \longrightarrow +\infty$, allora $b_n \longrightarrow +\infty$
ii. se $c_n \longrightarrow -\infty$, allora $b_n \longrightarrow -\infty$

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

i. se $a_n \longrightarrow +\infty$, allora $b_n \longrightarrow +\infty$
ii. se $c_n \longrightarrow -\infty$, allora $b_n \longrightarrow -\infty$
iii. se $a_n, c_n \longrightarrow l$, allora

Due teoremi importanti!

Teorema (Unicità del limite).
Il limite di una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se esiste, è unico!

Teorema dei due carabinieri (Banach & Caccioppoli).
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni, tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_0$$

i. se $a_n \longrightarrow +\infty$, allora $b_n \longrightarrow +\infty$
ii. se $c_n \longrightarrow -\infty$, allora $b_n \longrightarrow -\infty$
iii. se $a_n, c_n \longrightarrow l$, allora $b_n \longrightarrow l$

Proprietà dei limiti

Supponiamo che $a_n \longrightarrow l_a$, $b_n \longrightarrow l_b$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

Proprietà dei limiti

Supponiamo che $a_n \longrightarrow l_a$, $b_n \longrightarrow l_b$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $ka_n \longrightarrow kl_a$

Proprietà dei limiti

Supponiamo che $a_n \longrightarrow l_a$, $b_n \longrightarrow l_b$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $ka_n \longrightarrow kl_a$

ii. $a_n + b_n \longrightarrow l_a + l_b$

Proprietà dei limiti

Supponiamo che $a_n \longrightarrow l_a$, $b_n \longrightarrow l_b$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $ka_n \longrightarrow kl_a$

ii. $a_n + b_n \longrightarrow l_a + l_b$

iii. $a_n b_n \longrightarrow l_a l_b$

Proprietà dei limiti

Supponiamo che $a_n \longrightarrow l_a$, $b_n \longrightarrow l_b$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $ka_n \longrightarrow kl_a$

ii. $a_n + b_n \longrightarrow l_a + l_b$

iii. $a_n b_n \longrightarrow l_a l_b$

iv. $a_n / b_n \longrightarrow l_a / l_b$,

Proprietà dei limiti

Supponiamo che $a_n \longrightarrow l_a$, $b_n \longrightarrow l_b$ e $k \in \mathbb{R}$, allora

i. $ka_n \longrightarrow kl_a$

ii. $a_n + b_n \longrightarrow l_a + l_b$

iii. $a_n b_n \longrightarrow l_a l_b$

iv. $a_n / b_n \longrightarrow l_a / l_b$, se $l_b \neq 0$

Esempi

Successioni monotone

Definizione.

Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

Successioni monotone

Definizione.
Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$

Successioni monotone

Definizione.

Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$

ii. **non decrescente** se $a_n \leq a_{n+1}$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$
ii. **non decrescente** se $a_n \leq a_{n+1}$
iii. **non crescente** se $a_n \geq a_{n+1}$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Definizione.

Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$
ii. **non decrescente** se $a_n \leq a_{n+1}$
iii. **non crescente** se $a_n \geq a_{n+1}$
iv. (strettamente) **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$

Successioni monotone

Definizione.
Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$
ii. **non decrescente** se $a_n \leq a_{n+1}$
iii. **non crescente** se $a_n \geq a_{n+1}$
iv. (strettamente) **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$

Teorema di regolarità delle successioni monotone.
Ogni $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ successione **monotona**

Successioni monotone

Definizione.

Una successione $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice

i. (strettamente) **crescente** se $a_n < a_{n+1}$
ii. **non decrescente** se $a_n \leq a_{n+1}$
iii. **non crescente** se $a_n \geq a_{n+1}$
iv. (strettamente) **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$

Teorema di regolarità delle successioni monotone.

Ogni $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ successione **monotona** possiede limite.

Stefan Banach

1892 - 1945

Protagonisti

Renato Caccioppoli

1904 - 1959