UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Calcolo Differenziale

Eugenio Montefusco

22. Modelli dinamici a tempi discreti

Il modello di Malthus

Sia X_n il numero di individui in una popolazione al tempo n,

Il modello di Malthus

Sia X_n il numero di individui in una popolazione al tempo n, detto $\delta > 0$ il tasso di fertilità e $\mu > 0$ il tasso di mortalità, abbiamo che

Il modello di Malthus

Sia X_n il numero di individui in una popolazione al tempo n, detto $\delta > 0$ il tasso di fertilità e $\mu > 0$ il tasso di mortalità, abbiamo che

$$X_{n+1} = X_n + \delta X_n - \mu X_n = (1+k)X_n \qquad k \in \mathbb{R}$$

Il modello di Malthus

Sia X_n il numero di individui in una popolazione al tempo n, detto $\delta > 0$ il tasso di fertilità e $\mu > 0$ il tasso di mortalità, abbiamo che

$$X_{n+1} = X_n + \delta X_n - \mu X_n = (1+k)X_n \qquad k \in \mathbb{R}$$

Il modello di Malthus (1766-1834) è una successione per ricorrenza lineare del primo ordine

$$X_{n+1} = X_0(1+k)^n$$

Risultati generali

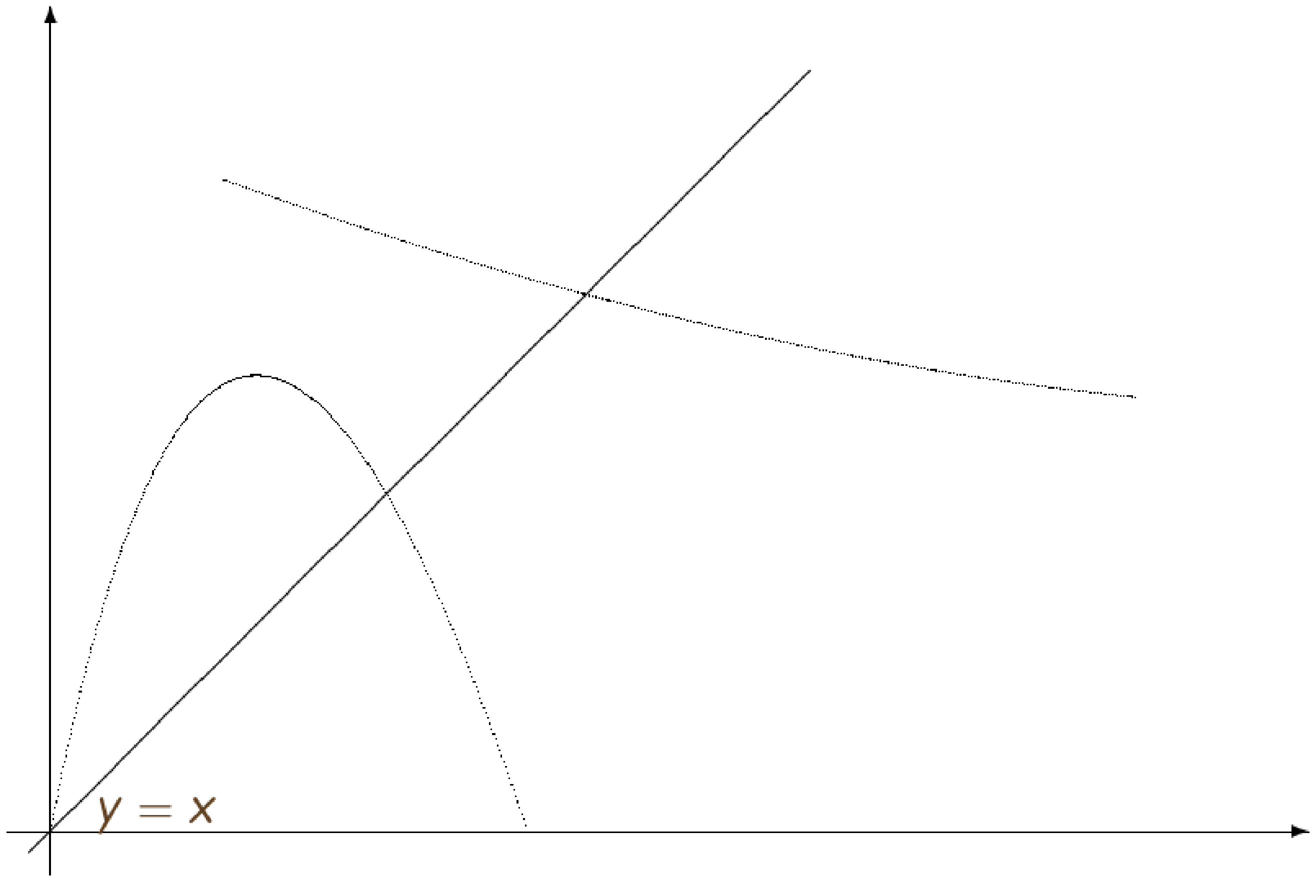
Teorema.
Sia f una funzione continua e si consideri il sistema del primo ordine

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

i possibili limiti sono le soluzioni dell'equazione

$$L = f(L)$$

Il metodo della ragnatela



Risultati generali

Teorema.
Si consideri il sistema del primo ordine

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

e sia L un equilibrio del sistema,

Risultati generali

Teorema.
Si consideri il sistema del primo ordine

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

e sia L un equilibrio del sistema, allora

- L è localmente attrattivo (o **stabile**) se $|f'(L)| < 1$

Teorema.
Si consideri il sistema del primo ordine

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

e sia L un equilibrio del sistema, allora

- L è localmente attrattivo (o **stabile**) se $|f'(L)| < 1$
- L è localmente espansivo (o **instabile**) se $|f'(L)| > 1$

Il modello di Verhulst

Arricchiamo (o complichiamo?) il nostro modello aggiungendo un termine "frenante"

$$X_{n+1} = (1+k)X_n\left(1-\frac{X_n}{M}\right)$$

Il modello di Verhulst

Arricchiamo (o complichiamo?) il nostro modello aggiungendo un termine "frenante"

$$X_{n+1} = (1+k)X_n\left(1-\frac{X_n}{M}\right)$$

ponendo $W_n = \frac{(1+k)M}{k}X_n$ si ottiene

Il modello di Verhulst

Arricchiamo (o complichiamo?) il nostro modello aggiungendo un termine "frenante"

$$X_{n+1} = (1+k)X_n\left(1 - \frac{X_n}{M}\right)$$

ponendo $W_n = \dfrac{(1+k)M}{k} X_n$ si ottiene

$$W_{n+1} = rW_n(1 - W_n) \qquad r > 0$$

L'equazione logistica

Il modello di Verhulst è più noto come equazione logistica

$$W_{n+1} = rW_n\,(1 - W_n)$$

L'equazione logistica

Il modello di Verhulst è più noto come equazione **logistica**

$$W_{n+1} = rW_n(1 - W_n)$$

gli equilibri del sistema sono

$$W_n = 0 \qquad W_n = \left[1 - \frac{1}{r}\right] \in (0,1)$$

L'equazione logistica

Il modello di Verhulst è più noto come equazione **logistica**

$$W_{n+1} = rW_n\,(1 - W_n)$$

gli equilibri del sistema sono

$$W_n = 0 \qquad W_n = \left[1 - \frac{1}{r}\right] \in (0,1)$$

Cosa possiamo dire per n che diverge?

L'equazione logistica

Se $r \in (0,1)$ e $W_0 > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} W_{n+1} = rW_n - rW_n^2 < rW_n &= r^2 W_{n-1} - r^2 W_{n-1}^2 \\ &< r^2 W_{n-1} = r^3 W_{n-2} - r^3 W_{n-2}^2 \\ &< r^3 W_{n-2} < \cdots < r^{n+1} W_0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

L'equazione logistica

Se $r \in (0,1)$ e $W_0 > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} W_{n+1} = rW_n - rW_n^2 < rW_n &= r^2 W_{n-1} - r^2 W_{n-1}^2 \\ &< r^2 W_{n-1} = r^3 W_{n-2} - r^3 W_{n-2}^2 \\ &< r^3 W_{n-2} < \cdots < r^{n+1} W_0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

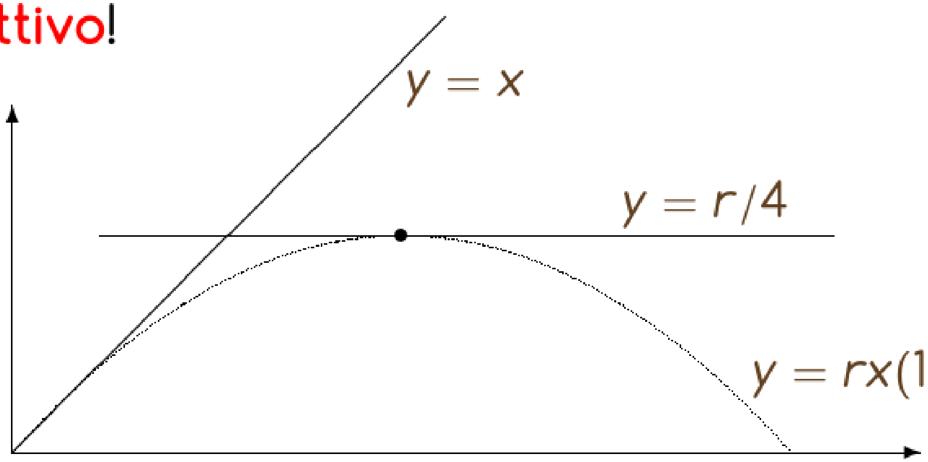
quindi in questo caso abbiamo che 0 è un equilibrio **attrattivo**!

L'equazione logistica

Se $r \in (0,1)$ e $W_0 > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} W_{n+1} = rW_n - rW_n^2 < rW_n &= r^2 W_{n-1} - r^2 W_{n-1}^2 \\ &< r^2 W_{n-1} = r^3 W_{n-2} - r^3 W_{n-2}^2 \\ &< r^3 W_{n-2} < \cdots < r^{n+1} W_0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quindi in questo caso abbiamo che 0 è un equilibrio **attrattivo**!

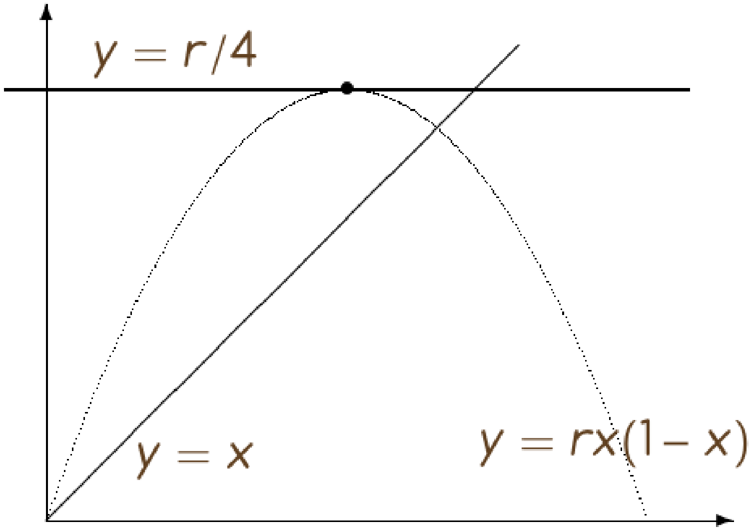


L'equazione logistica

Se $r \in (1, 3)$ abbiamo che $1 - 1/r$ è un equilibrio attrattivo!

L'equazione logistica

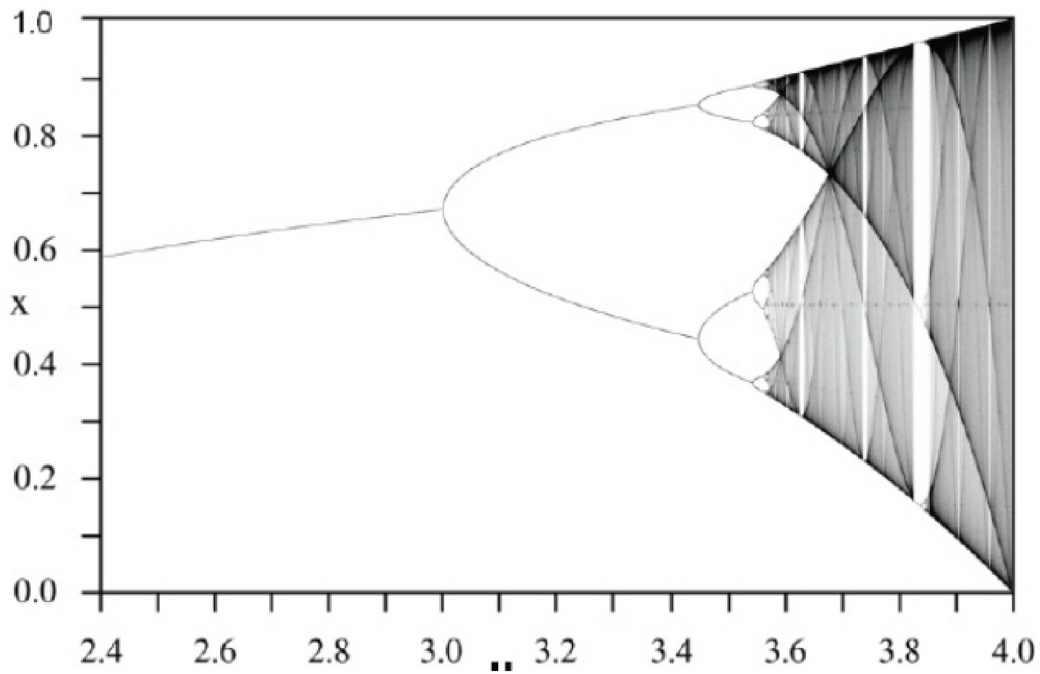
Se $r \in (1,3)$ abbiamo che $1 - 1/r$ è un equilibrio attrattivo!



L'equazione logistica

Se $r > 3$ non esistono equilibri attrattivi, l'equazione logistica possiede soluzioni periodiche di vari periodi e dinamica caotica per $r = 4$!

Se $r > 3$ non esistono equilibri attrattivi, l'equazione logistica possiede soluzioni periodiche di vari periodi e dinamica caotica per $r = 4$!

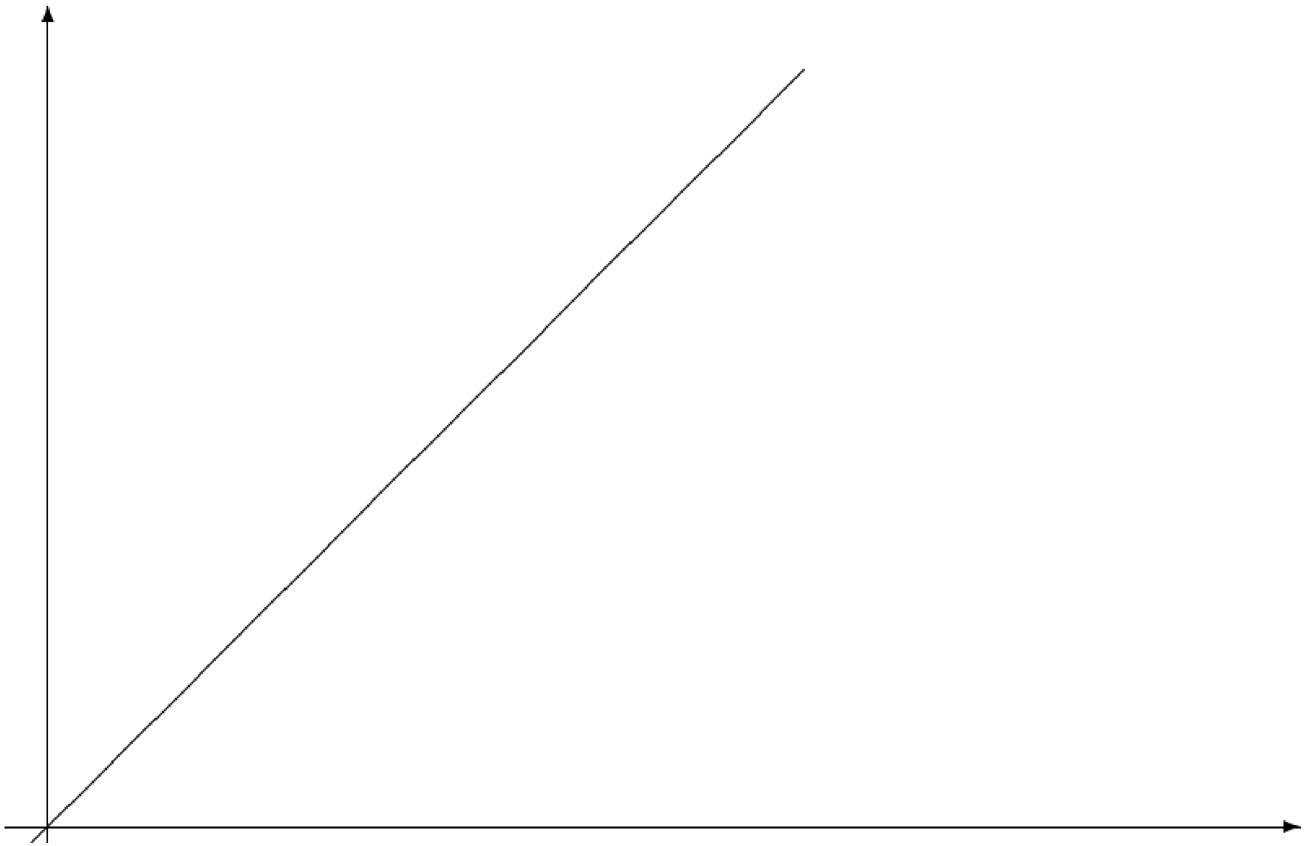


Un ultimo esempio

Si studi il sistema $X_{n+1} = \dfrac{(1+k)X_n}{1+kX_n}$, con $k > 0$

Un ultimo esempio

Si studi il sistema $X_{n+1} = \dfrac{(1+k)X_n}{1+kX_n}$, con $k > 0$



Protagonisti

Thomas Robert Malthus

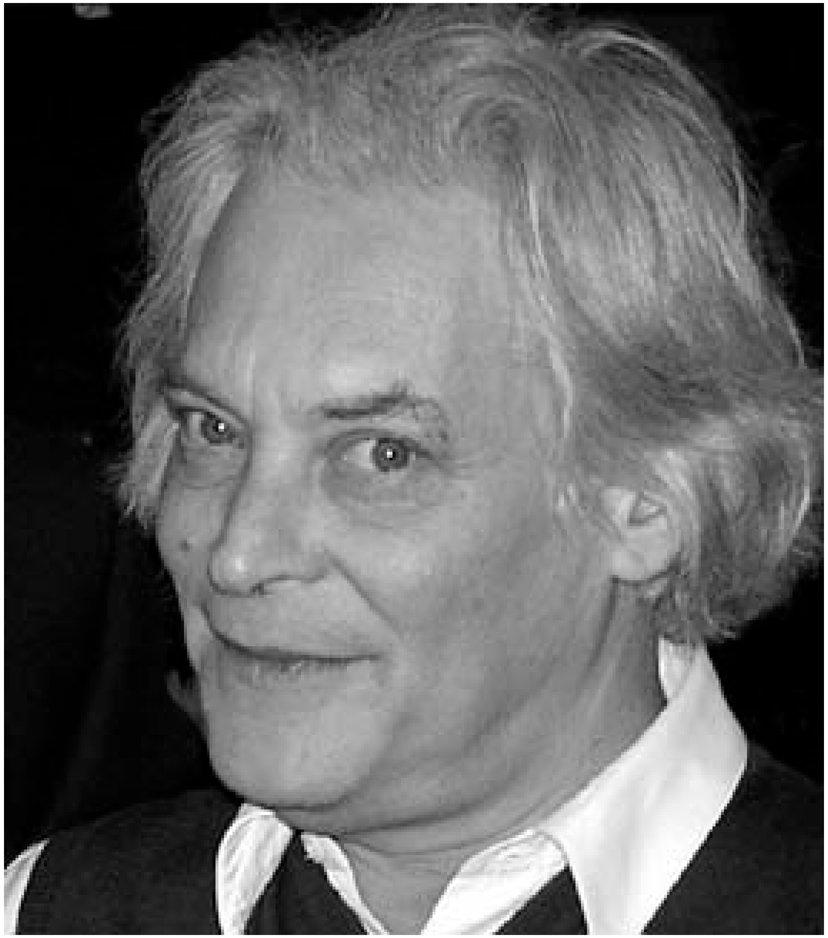
1766 - 1834

Protagonisti

Pierre François Verhulst

1804 - 1849

Protagonisti



Mitchell Jay Feigenbaum

1944 -