

Cognome_____

Informatica teledidattica 2023/2024
Scritto di ALGEBRA del 12/07/2024

Nome_____

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

Esercizio 1.

(a) Si dimostri che se a è un intero dispari, allora il numero $a^2 - 1$ è divisibile per otto.

(b) Si determini il più piccolo intero positivo a che renda compatibile il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} X \equiv 3 \pmod{91} \\ X \equiv 2a \pmod{39} \end{cases}.$$

(c) Dimostrare che se n è un intero positivo e a è un intero, allora sussiste l'identità

$$a^n - 1 = (a - 1) (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}).$$

Utilizzando tale identità, si dimostri che per ogni numero primo p , se né a né $a - 1$ sono multipli di p , allora

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine 3 si consideri il sottoinsieme $S = \{M_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ dove

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Si dimostri che S è uno spazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione.

(b) Sia S lo spazio vettoriale del punto precedente e sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita da

$$f(M_{a,b}) = b.$$

Si determini una base del nucleo di f e si stabilisca se f è suriettiva.

(c) Stabilire per quali valori di a e b la matrice $M_{a,b}$ è invertibile.