UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 6 – Numeri naturali

Docente: Pietro Cenciarelli

Peano e l'extraterrestre

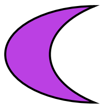
benvenuto!

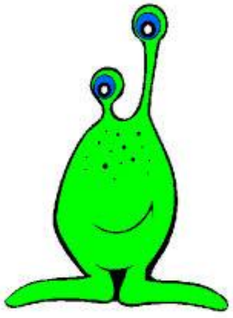
?

Gli assiomi di Peano

(1889)

- esiste un numero che si chiama *zero*

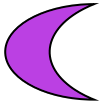


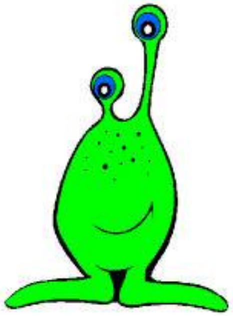


Gli assiomi di Peano

(1889)

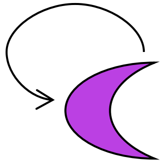
- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)



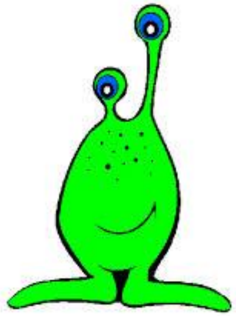


Gli assiomi di Peano

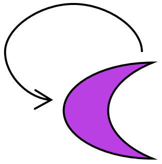
- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore che indichiamo con succ (n)



succ () = 

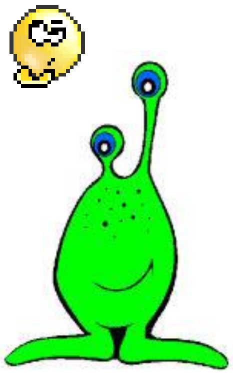


Gli assiomi di Peano



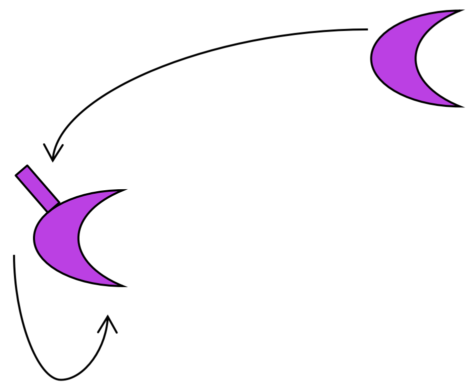
- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)
- *zero* non è successore di nessuno

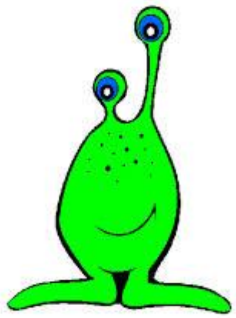
succ () = 



Gli assiomi di Peano

- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore che indichiamo con succ (n)
- *zero* non è successore di nessuno

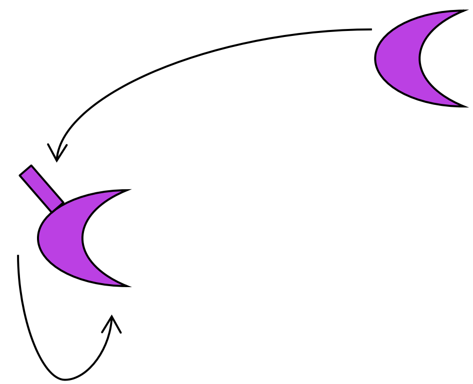


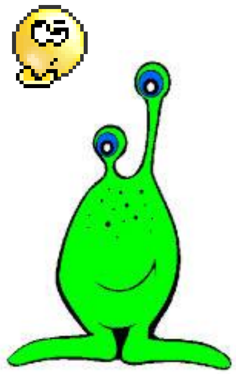


UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Gli assiomi di Peano

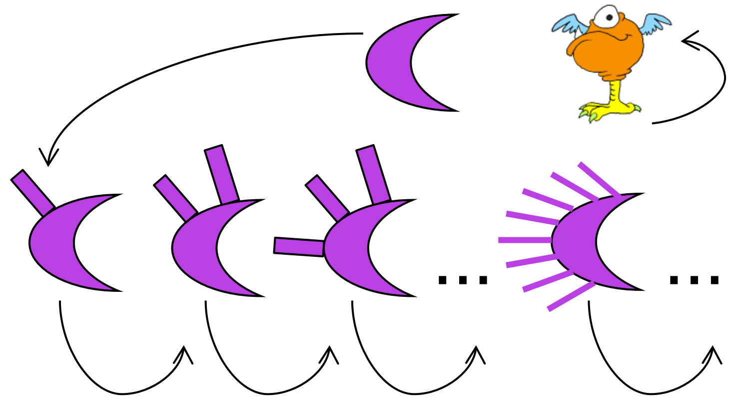
- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)
- *zero* non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m

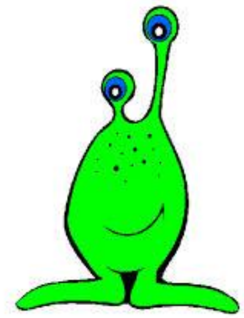




Gli assiomi di Peano

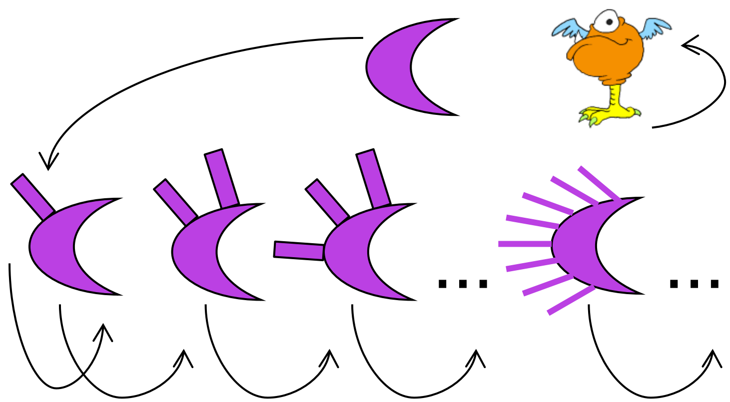
- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore che indichiamo con succ (n)
- *zero* non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m

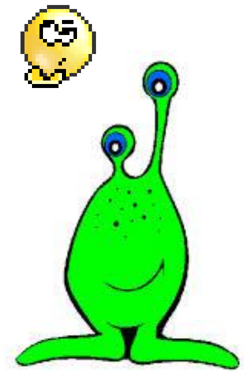




Gli assiomi di Peano

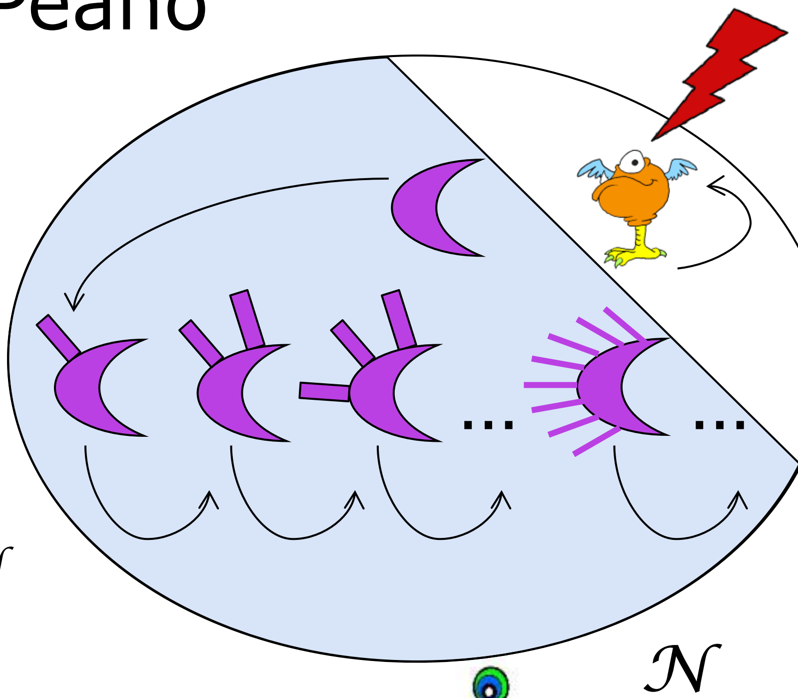
- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)
- *zero* non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m
- se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre
  $n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$

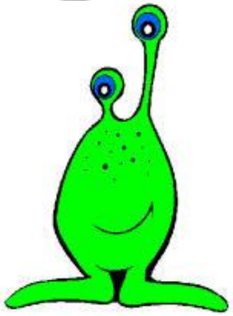




Gli assiomi di Peano

- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore che indichiamo con succ (n)
- zero non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m
- se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre $n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$

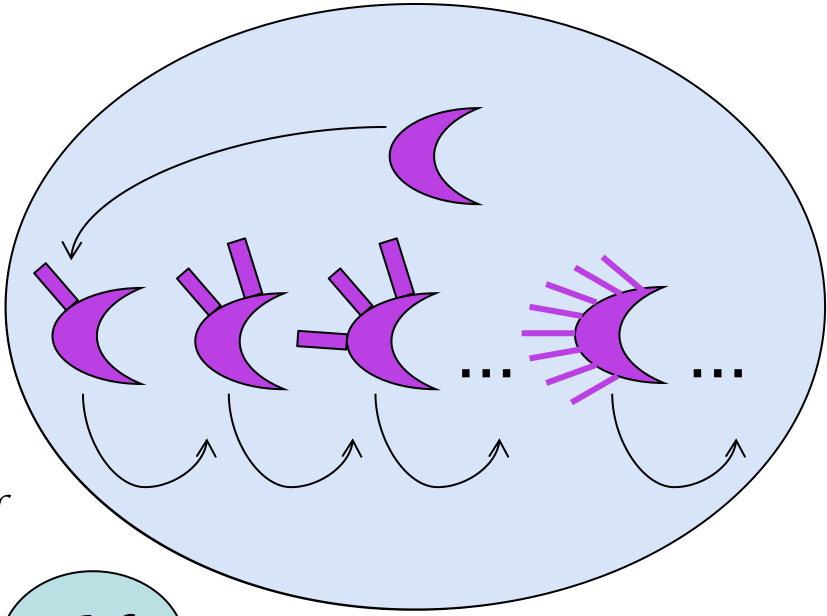




UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Gli assiomi di Peano

- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)
- zero non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m
- se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in$ A e inoltre
  n $\in$ A implica succ (n) $\in$ A, allora $A = \mathcal{N}$

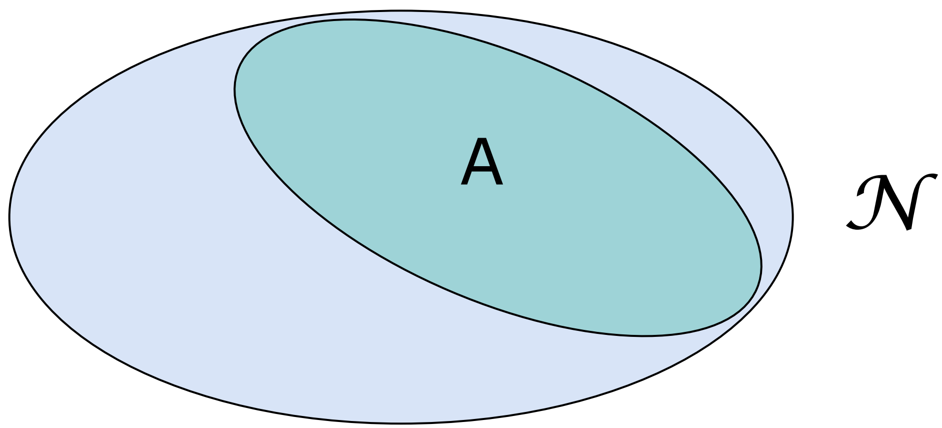


Il principio di induzione

- esiste un numero che si chiama *zero*
- ogni numero n ha un successore
  che indichiamo con succ (n)
- zero non è successore di nessuno
- se succ (n) = succ (m) allora n = m
- se A ⊆ $\mathcal{N}$ è tale che *zero* ∈ A e inoltre
  n ∈ A implica succ (n) ∈ A, allora A = $\mathcal{N}$

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre
$n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$



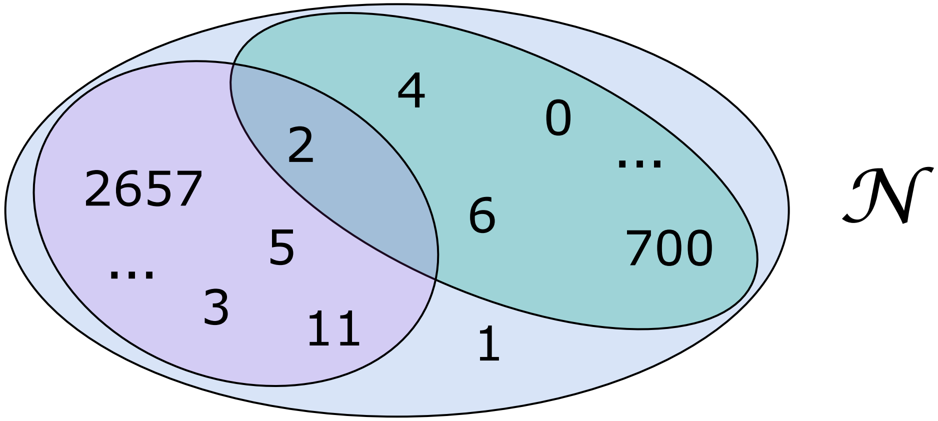
sottoinsiemi di $\mathcal{N}$ — predicati su $\mathcal{N}$

$$\{n \in \mathcal{N} : P(n)\} \longleftarrow P(n)$$

$$A \subseteq \mathcal{N} \longrightarrow n \in A$$

Il principio di induzione

se A ⊆ $\mathcal{N}$ è tale che *zero* ∈ A e inoltre
n ∈ A implica succ (n) ∈ A, allora A = $\mathcal{N}$



sottoinsiemi di $\mathcal{N}$ | predicati su $\mathcal{N}$

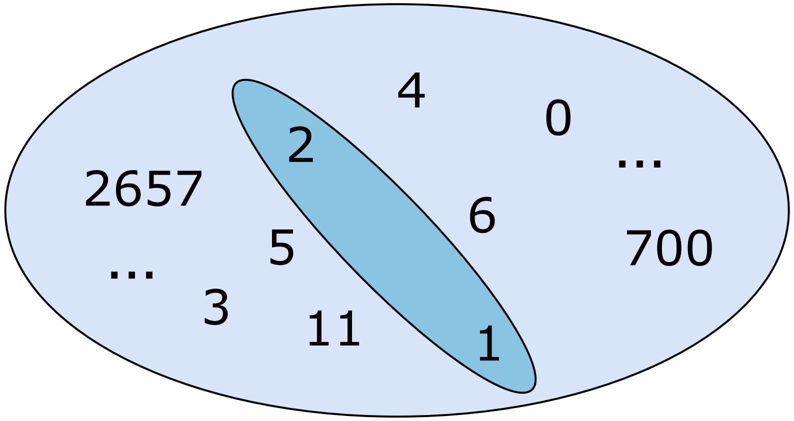
{0, 2, 4, 6, …, 700, …} | n *è un numero pari*

{2, 3, 5, …, 11, …, 2657, …} | n *è un numero primo*

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Il principio di induzione

se A ⊆ $\mathcal{N}$ è tale che *zero* ∈ A e inoltre
n ∈ A implica succ (n) ∈ A, allora A = $\mathcal{N}$



$\mathcal{N}$

sottoinsiemi di $\mathcal{N}$

predicati su $\mathcal{N}$

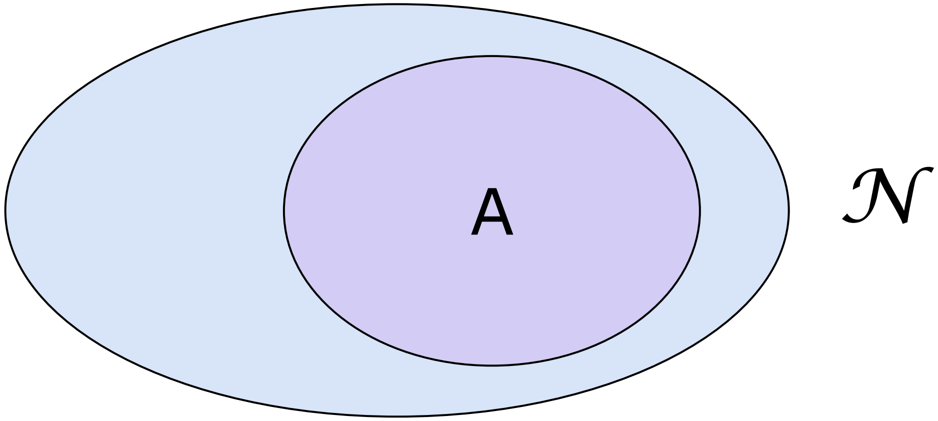
{1, 2}

0 < 2n < 5

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre
$n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$



sottoinsiemi di $\mathcal{N}$

$A = ?$

predicati su $\mathcal{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

UNITELMA SAPIENZA

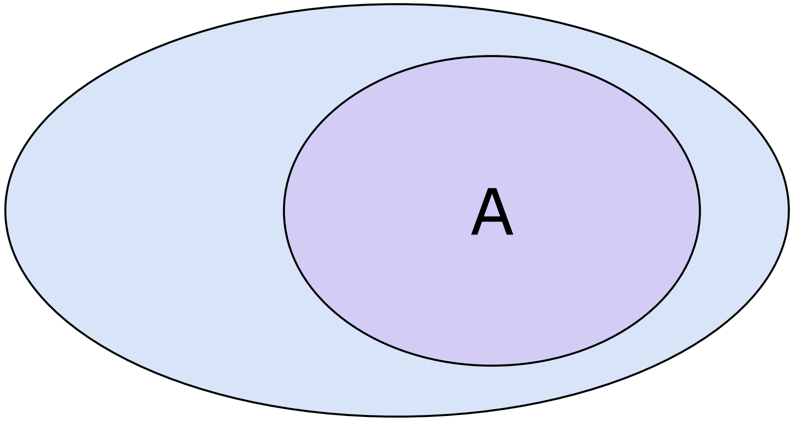
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che ***zero* ∈ A** e inoltre
$n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$

$$\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0\,(0+1)}{2}$$

… quindi $0 \in A$



$\mathcal{N}$

sottoinsiemi di $\mathcal{N}$

A = ?

predicati su $\mathcal{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre $n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$

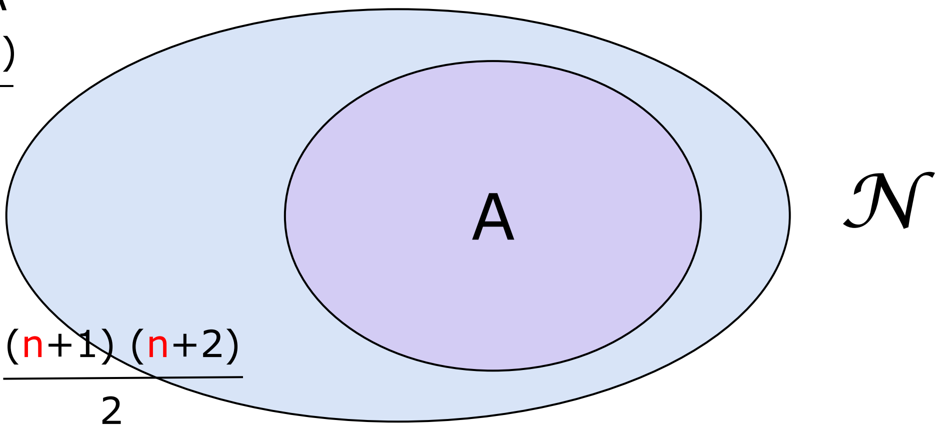
supponiamo che $n \in A$

ovvero: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$

allora:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=0}^{n} i$$

$$= (n+1) + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$



sottoinsiemi di $\mathcal{N}$

A = ?

predicati su $\mathcal{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre
$n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$

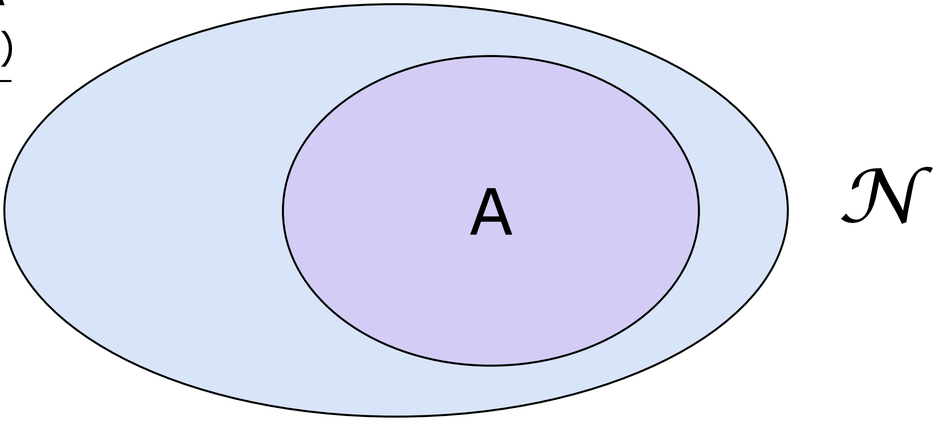
supponiamo che $n \in A$

ovvero: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$

allora:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

ovvero: $n+1 \in A$



sottoinsiemi di $\mathcal{N}$

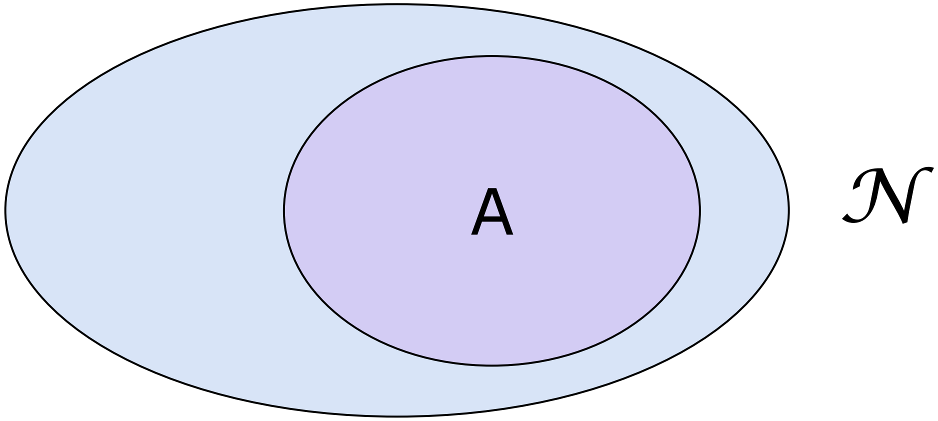
$A = ?$

predicati su $\mathcal{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre
$n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$



sottoinsiemi di $\mathcal{N}$

predicati su $\mathcal{N}$

$A = \mathcal{N}$

per ogni n vale $P(n)$

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Il principio di induzione

se $A \subseteq \mathcal{N}$ è tale che *zero* $\in A$ e inoltre
$n \in A$ implica succ $(n) \in A$, allora $A = \mathcal{N}$

se P è un predicato su $\mathcal{N}$ tale che vale P(0) e inoltre P(n) implica P(n+1), allora *per ogni* n vale P(n)

$$\frac{P(0) \qquad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n.\ P(n)}$$