V/F	Es. 1	Es. 2	Voto
/12	/10	/10	/32

Sapienza Università di Roma, Corso di Laurea in Informatica - canale telematico (a.a. 2022/2023)

Prova scritta di Calcolo Differenziale - 13 Gennaio 2023

Nome e Cognome (in stampatello):

Numero matricola:

NOTA BENE: devono essere riconsegnati soltanto i fogli contenenti i testi degli esercizi. È vietato usare testi, appunti e strumenti elettronici di ogni tipo. Ogni affermazione negli esercizi a risposta aperta deve essere motivata dettagliatamente! È possibile utilizzare anche il retro dei fogli per inserire i calcoli.
Il tempo a disposizione per la prova è di 2h.

Domande V/F

NOTA BENE: +1 risposta esatta, -0.5 risposta sbagliata, 0 risposta assente

1. Sia data la successione numerica reale

$$a_n = \frac{2n}{n^2+1}$$

1A	a_n è infinitesima	**V**	F
1B	la successione $b_n = (-1)^n a_n$ non ammette limite per $n \longrightarrow \infty$	V	**F**
1C	la successione $c_n = (a_n)^7$ è limitata	**V**	F
1D	a_n è decrescente per $n \geqslant 5$	**V**	F

2. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x}$$

2A	f ammette asintoti orizzontali	**V**	F
2B	f non ammette né massimi né minimi assoluti	**V**	F
2C	f non è decrescente nel suo dominio	**V**	F
2D	l'insieme immagine di f è tutto $\mathbb{R}$	V	**F**

3. Sia

$$f(x) = x^4 - 4x - 1.$$

3A	L'insieme immagine di f è l'insieme $(-4, +\infty)$.	V	**F**
3B	La funzione f è invertibile	V	**F**
3C	La funzione f ha tre zeri reali.	V	**F**
3D	f è convessa nel suo dominio	**V**	F

Esercizio 1 Sia $f : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = e^{-x}(2x+1).$$

(1) Calcolare l'insieme immagine di f.

Con un veloce studio di funzione, si trova che la derivata di f è

$$f'(x) = e^{-x}(1-2x)$$

la quale si annulla in $x = 1/2$ ed è un punto di massimo assoluto per la f. I minimi vanno cercati allora negli estremi del dominio della funzione. Essi sono entrambi punti di minimo, $x = -1$ assoluto, $x = 3$ locale. Allora, siccome f è continua, il suo insieme immagine è compreso tra i valori minimo e massimo di f, pertanto $\mathrm{Im}F = [-e, \frac{2}{\sqrt{e}}]$.

(2) Enunciare il teorema degli zeri (di Bolzano) ed applicarlo per provare che f ammette degli zeri. Quanti sono esattamente gli zeri di f nel suo dominio $[-1,3]$?

Annullando f, semplicemente si trova il solo zero $x = -\frac{1}{2}$.

(3) Enunciare il teorema di Weiestrass e determinare i punti di massimo e di minimo assoluti e relativi di f in $[-1,3]$. *Si veda il punto (i).*

(4) Calcolarne il polinomio di MacLaurin di f di grado 2.

Si trova $P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + 1$

(5) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\log x}$$

Il limite richiesto vale 0.

Esercizio 2
Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x+4)\, e^{\frac{2}{x}}$$

In particolare: determinarne il dominio, eventuali simmetrie, studiarne il segno, studiare i limiti agli estremi del dominio, determinare eventuali asintoti (orizzontali o verticali), studiarne la continuità, derivabilità e la monotonia, determinarne eventuali punti di massimo e minimo (locali e/o assoluti), individuarne intervalli di concavità e convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo di f.

La funzione ha come derivata prima

$$f'(x) = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2}$$

e come derivata seconda la funzione:

$$f''(x) = 4e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{5x+4}{x^4}.$$

La funzione è continua e derivabile nel suo dominio che è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. *La funzione non ha massimi assoluti, ha un massimo relativo per* $x = -2$, *un minimo relativo in* $x = 4$. *Ha l'asse y come asintoto verticale sulla destra, mentre a sinistra di* $x = 0$ *la funzione tende a 0 con tangente orizzontale. L'asintoto obliquo di equazione* $y = x+6$ *non è di immediata ricerca, per questo non era richiesto. La funzione ha un punto di flesso in* $x = -\frac{4}{5}$, f *è concava alla sua sinistra, convessa alla sua destra.*