*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2023/2024 *Nome*______________________________

Scritto di ALGEBRA del 21/06/2024

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Si dimostri che per ogni numero naturale n il numero $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ è divisibile per sette.

Soluzione. Basta osservare che $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$, $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n$ e che $9 \equiv 2 \pmod 7$ sicché

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7.$$

(**b**) Sia p un numero primo e sia a un numero intero non nullo. Sia $v_p(a)$ il massimo esponente non negativo r da dare a p affinché p^r divida a. Questo significa che per $r = v_p(a)$ si ha $p^r | a$ ma $p^{r+1} \not| \, a$. Per esempio, $v_3(4) = 0$ e $v_3(18) = 2$. Si dimostri che se a e b sono entrambi non nulli, allora $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

Soluzione. Sia $r = v_p(a)$ ed $s = v_p(b)$. Siccome p^r divide a e p^s divide b certamente p^{r+s} divide ab sicché $v_p(ab) \geq v_p(a) + v_p(b)$. Se fosse $v_p(ab) \geq v_p(a) + v_p(b) + 1$ allora dovremmo concludere che o $r + 1$ divide a oppure che $s + 1$ divide b. Ciò è tuttavia impossibile per ipotesi pertanto $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

(**c**) Ricordo che risolvere una congruenza lineare della forma $aX \equiv b \pmod n$ consiste nell'elencare tutte le soluzioni modulo n a due a due incongrue modulo n. Dunque, in generale, una siffatta congruenza può avere più di una soluzione modulo n e risolvere la congruenza significa elencare tutte tali soluzioni modulo n. Questo detto, si risolva la congruenza

$$12X \equiv 15 \pmod{21}.$$

Soluzione. Dividendo ambo i membri per il massimo comune divisore tra coefficiete modulo e semplificando si ottiene la congruenza ridotta $X \equiv 3 \pmod 7$ risolta da tutti gli interi della forma $3 + 7n$. Di queste soluzioni $3 + 21n$, $10 + 21n$ e $17 + 21n$ sono le soluzioni a due a due non congrue modulo 21 della congruenza originale.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine 3 si consideri il sottoinsieme

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \big| a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(**a**) Si dimostri che T è uno spazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione.

Soluzione. Si può applicare il criterio di sottospazio oppure risolvere la parte (**a**) e (**b**) contemporaneamente come spiegato al punto successivo.

(**b**) Sia T lo spazio vettoriale del punto precedente e sia $f : T \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}.$$

Si determini una base del nucleo di f e si stabilisca se f è suriettiva.

Soluzione. L'insieme T è costituito dalle combinazioni lineari a coefficienti reali a, b e c delle tre matrici

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto T è lo spazio vettoriale generato dalla matrici I, H e G ed è dunque uo spazio vettoriale come volevasi dimostrare. Essendo I, H e G linearmente indipendenti (come si controlla), T ha dimensione 3. Le matrici nel nucleo di f sono quelle per cui $b = c = 0$ sicché il nucleo di f è costituito da multipli della matrice I (matrici scalari). Il nucleo di f ha pertanto dimensione 1.

(**c**) Si dica come sono fatte le matrici di T che sono diagonalizzabili.

Soluzione. L'insieme degli autovalori (distinti) di una matrice triangolare coincide con l'insieme degli elementi diagonali (distinti) della matrice; la molteplicità algebrica di ogni autovalore coincide con il numero di volte con cui esso appare sulla diagonale. Siccome ogni matrice di T è una matrice triangolare, ogni matrice di T ha lo scalare a come autovalore di molteplicità 3. Si controlla subito che affinché l'autovalore a abbia molteplicità geometrica 3 è necessario e basta che $b = c = 0$. Concludiamo che le matrici diagonalizzabili in T sono precisamente le matrici scalari.