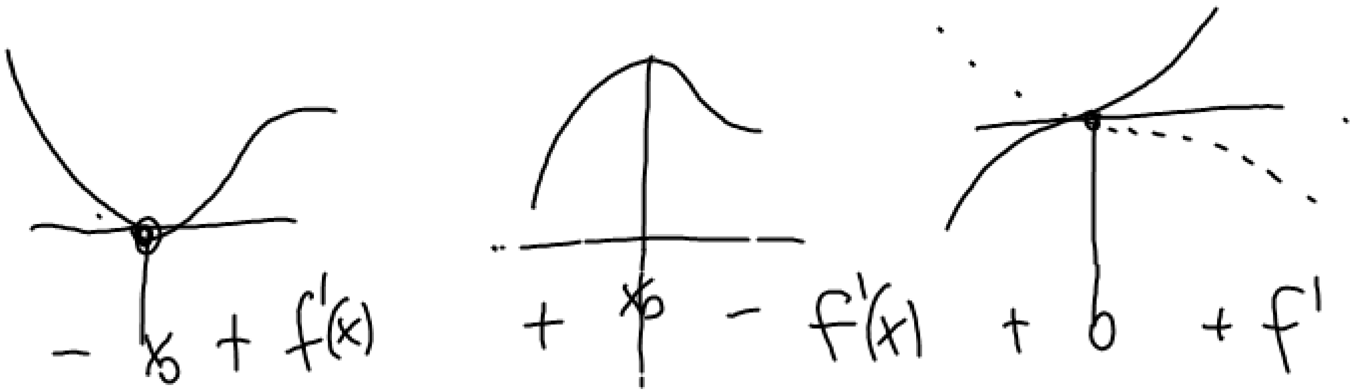
Punti stazionari

Teorema.
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e x_0 un punto stazionario, allora

- se $f' < 0$ a sinistra di x_0 e $f' > 0$ a destra di x_0 allora x_0 è un punto di minimo locale per f
- se $f' > 0$ a sinistra di x_0 e $f' < 0$ a destra di x_0 allora x_0 è un punto di massimo locale per f
- se f' non cambia segno intorno a x_0 allora x_0 non è un massimo o minimo locale stretto per f



Punti stazionari

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Corollario.

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte e x_0 un punto stazionario, allora

- se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale stretto per f
- se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale stretto per f

$-x^2 = f(x)$

$x_0 = 0$

$f'(x) = 2x$

$+ \qquad -$

$f''(x) = -2 < 0$

UNITELMA SAPIENZA — SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Informatica

Esempi

e^x $\quad (e^x)' = e^x \quad (e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow e^x$ è convessa

$\ln(x)$ $\quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad (\ln(x))'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2} < 0$

$\Rightarrow e^x$ è concava.

$ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

$(ax^2+bx+c)'' = (2ax+b)' = 2a$

ax^2+bx+c è convessa se $a>0$

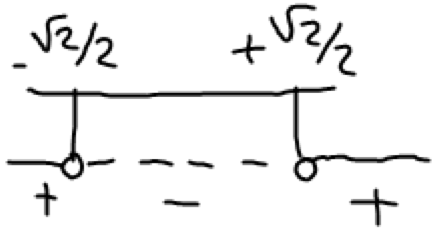
" è concava se $a<0$

$\uparrow$

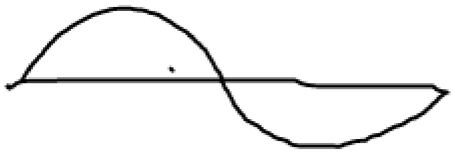
se e solo se.

Esempi

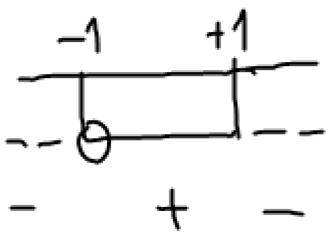
$$(e^{-x^2})'' = (-2x e^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})' = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$$



$$(\sin(x))'' = (\cos(x))' = -\mathrm{sen}(x)$$

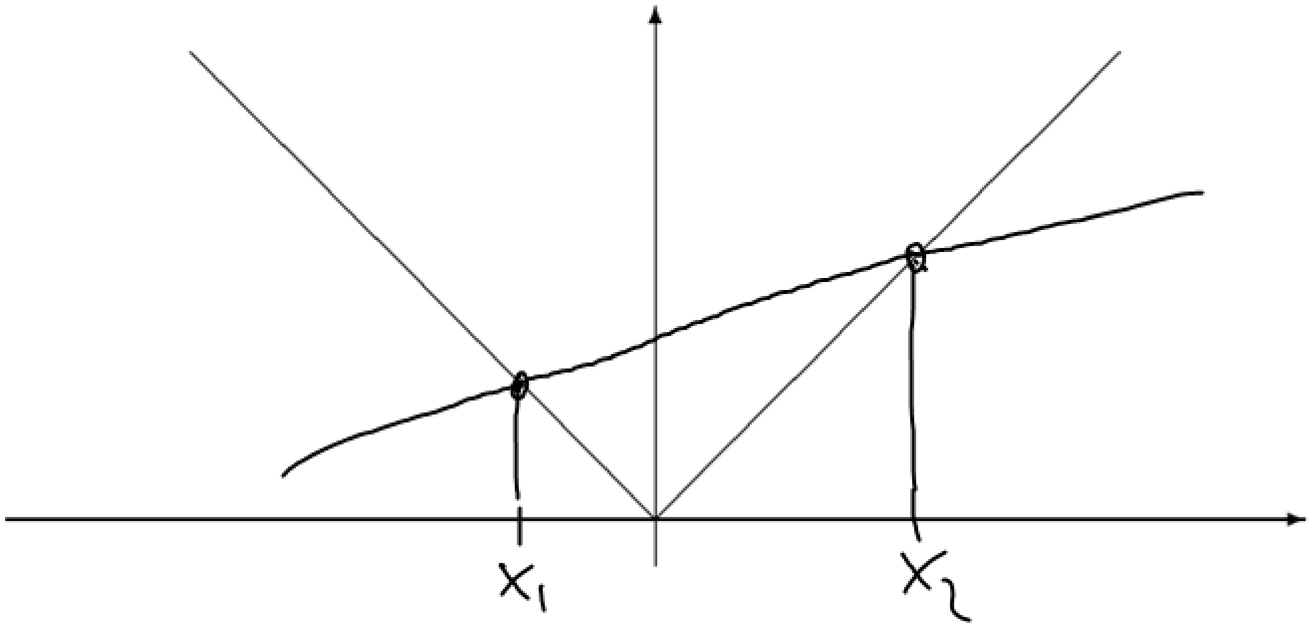


$$(\ln(1+x^2))'' = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$



Ancora sulla convessità

$f(x) = |x|$



$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \qquad \forall x \in (x_1, x_2)$$