UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

16. Il campo dei numeri complessi

Richiami

- Per eseguire il procedimento di eliminazione di Gauss e risolvere un sistema di equazioni lineari, l'ambito naturale è quello di un campo
- Numeri razionali e reali formano un campo. Esistono anche campi finiti
- Oggi: **I numeri complessi.**

I numeri complessi

I numeri complessi vengono introdotti per permettere alcune operazioni impossibili con i numeri reali. Sembrano inizialmente un concetto inutilmente astratto, ma tornano comodi in molte circostanze concrete.

Sono utili anche in ambiti vicini all'informatica (funzioni d'onda, trattamento di segnali, descrizione di fenomeni periodici, elettronica, ottica, **quantum computation**). In grafica si utilizzano generalizzazioni ancora più bizzarre, come i quaternioni.

L'introduzione fondamentale è quella dell'unità immaginaria, cioè di un numero i che soddisfa $i^2 = -1$. Il resto delle proprietà dei numeri complessi si ottiene imponendo che la struttura sia un anello.

Operazioni in $\mathbb{C}$ – I

Abbiamo tre richieste essenziali

- ogni numero reale deve essere presente tra i numeri complessi
- i deve essere un numero complesso e $i^2 = -1$
- i numeri complessi devono costituire un anello

E' importante quindi imparare a sommare e moltiplicare i numeri a disposizione. La regola aurea è quando non sai farlo, non farlo!

Ad esempio, cosa si ottiene sommando 1 e i? Naturalmente, si ottiene $1 + i$!

Sappiamo già sommare o moltiplicare due numeri reali. Moltiplicare un numero reale b per l'unità immaginaria i fornisce come risultato bi. Sommare un numero reale a ad un numero della forma bi fornisce come risultati $a + bi$.

Abbiamo sicuramente bisogno di tutti i numeri della forma $a + bi$, dove a, b sono numeri reali. Abbiamo bisogno d'altro?

Operazioni in $\mathbb{C}$ – II

Per sommare numeri complessi, sicuramente no. In effetti

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i.$$

Ad esempio, $(2+3i)+(3-4i)=5-i$. L'inverso additivo di $a+bi$ è $-a-bi$.

Nell'eseguire la moltiplicazione, possiamo distribuire il prodotto rispetto alla somma:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=a(c+di)+bi(c+di)=ac+adi+b(ic)+(bi)(di).$$

Qui, dobbiamo decidere se vogliamo un anello commutativo, ed effettivamente lo vogliamo, quindi

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bd(i^2)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Inverso in $\mathbb{C}$

Non è affatto chiaro che ogni numero complesso diverso da 0 possieda un inverso moltiplicativo. L'osservazione fondamentale è che

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Ricordate che a, b sono numeri reali, e quindi questo prodotto è 0 solamente quando a, b sono entrambi 0.

Ora, se a, b non sono entrambi zero, possiamo scrivere

$$(a+bi)(a-bi)\frac{1}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

pertanto l'inverso di $a+bi$ si ottiene moltiplicando $a-bi$ per $(a^2+b^2)^{-1}$.

Riassumendo:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Coniugazione complessa

Per trovare l'inverso di $z = a + bi$ abbiamo moltiplicato per il numero $a - bi$. Questo elemento si chiama coniugato di z e si indica con

$$\overline{z} = a - bi.$$

Si vede facilmente che $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$

Inoltre $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$ è un numero reale positivo. La sua radice quadrata si chiama norma complessa di z. Ad esempio

$$|3 + 4i|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

e quindi $|3 + 4i| = 5$. Ovviamente, la norma complessa di un numero reale è il suo valore assoluto. Si ha inoltre

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Norma complessa

Quanto vale $|zw|$ in termini di $|z|$ e $|w|$? Abbiamo

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\,\overline{w} = z\bar{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2,$$

e quindi $|zw| = |z||w|$. Ad esempio $|3+4i| = 5$, ed effettivamente

$$|(3+4i)(3+4i)| = |9+12i+12i-16| = |-7+24i| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25.$$

Se $z = a+bi$ e $w = c+di$, l'equazione appena scritta si legge anche

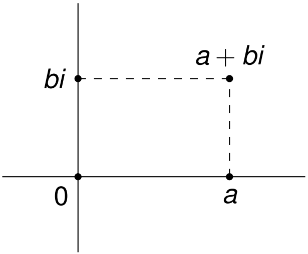
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2,$$

e ci informa che il prodotto di somme di due quadrati è ancora una somma di due quadrati, se mai dovesse interessarci.

Il prodotto di numeri di norma complessa 1 è ancora un numero di norma complessa 1.

Piano di Argand - I

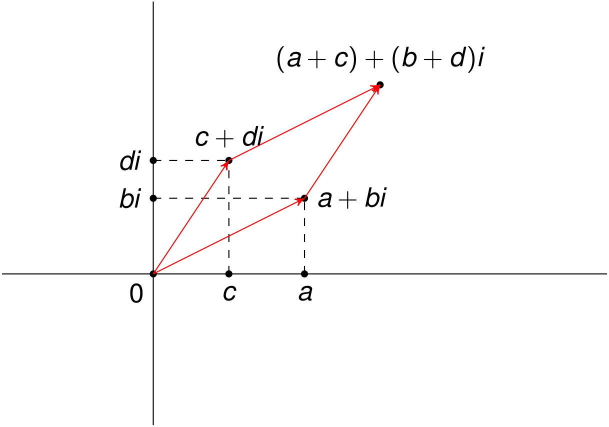
I numeri complessi si rappresentano spesso nel piano di Argand.



e si sommano con la regola del parallelogramma

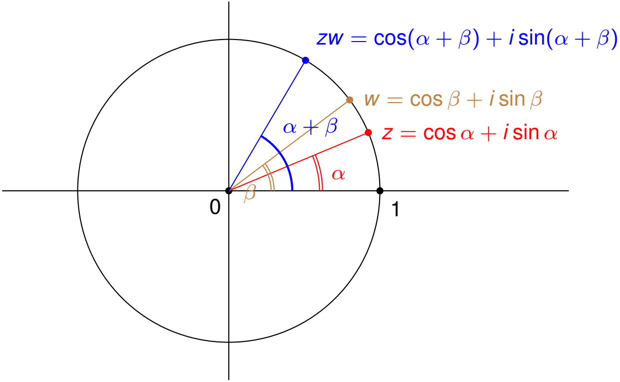
Piano di Argand - II

Ad, esempio: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.



Piano di Argand - III

La moltiplicazione è più interessante. Ad esempio, se
$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\sin\beta$, allora



come si vede calcolando $zw = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$
$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$.

Esponenziale complessa

I numeri complessi di norma 1 sono tutti della forma $\cos\theta + i\sin\theta$ e si preferisce spesso abbreviare la notazione in

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Se avete mai visto scrivere

$$e^{i\pi} = -1,$$

ora sapete da dove salta fuori; chiaramente, $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.

Si può fare l'esponenziale di qualsiasi numero complesso, e non solamente dei multipli di i. Ad esempio

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos b + i\sin b).$$

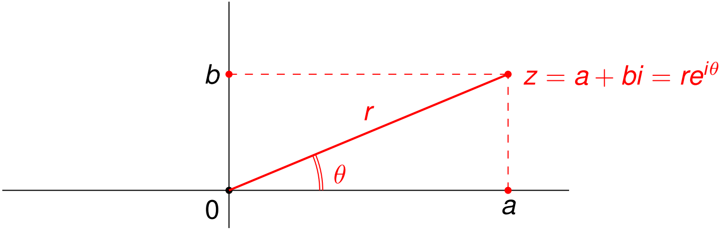
L'esponenziale complessa soddisfa $e^{z+w} = e^z e^w$, $e^0 = 1$, $e^{-z} = 1/e^z$.

Forma polare

Se $z = a + bi$, allora $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ è la sua norma, e $z/|z|$ è automaticamente un numero complesso di norma 1, quindi della forma $e^{i\theta}$. Pertanto si scrive

$$z = re^{i\theta},$$

che è detta forma polare del numero complesso.



Prodotto in forma polare

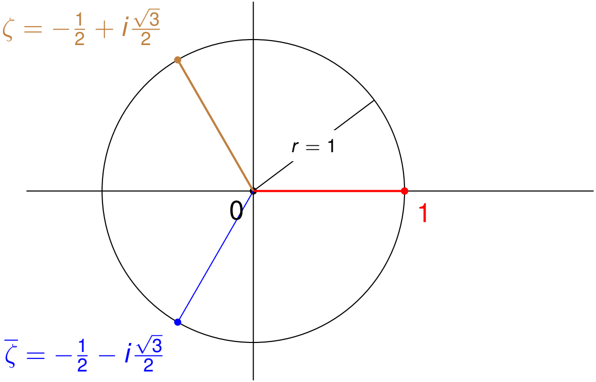
Se i numeri complessi $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ sono dati in forma polare, il calcolo del loro prodotto diventa particolarmente semplice:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

In altre parole, per moltiplicare due numeri complessi, bisogna moltiplicare le loro lunghezze (= norme complesse) e sommare i loro angoli (= argomenti).

Ad esempio, se vogliamo trovare tutti i numeri complessi il cui cubo sia $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot i}$, dobbiamo trovare quei numeri complessi la cui lunghezza al cubo dia 1, e il cui angolo triplicato dia 0.

Radici cubiche dell'unità



In effetti, risolvendo $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$ si ottengono, oltre a $z = 1$, anche

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso

Concludo con un'informazione sorprendente: una volta aggiunta la radice quadrata di -1 non rimane nulla da aggiungere!

Comunque scegliamo un polinomio a coefficienti complessi (non costante) è sempre possibile trovare tra i numeri complessi le sue radici.

Questa è una delle proprietà più importanti del campo dei numeri complessi, e si esprime dicendo che $\mathbb{C}$ **è algebricamente chiuso**. Il teorema che lo garantisce è solitamente detto teorema fondamentale dell'algebra.