UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

21. Attesa condizionata.

$P(X=x|A) \quad P(A)>0$

Attesa condizionata di X rispetto all'evento A

$$E(X|A) = \sum_x x P(X=x|A)$$

Dado 6 facce

$A = \{\text{dispari}\}$ $X = \text{punteggio}$

$$P(X=x|A) = \frac{P(X=x \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

se $x = 1, 3, 5$; altrimenti $= 0$

$$E(X|A) = \sum_x x\, P(X=x|A) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

$$E(X) = \sum_{x} x P(X = x) =$$

partizione di S

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

$$= \sum_{x} x \left[\sum_{i=1}^{n} P(X = x | A_i) P(A_i) \right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{x} x P(X = x | A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E(X | A_i)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X | A_i) P(A_i)$$

$p = \frac{3}{5} \longrightarrow A$ finisce in 5 minuti

$p = \frac{3}{10} \longrightarrow B$ si blocca per 2 minuti

$p = \frac{1}{10} \longrightarrow C$ si blocca per 3 minuti

T = tempo necessario per finire

$E(T) = ?\,;\ E(T|A) = 5$

$E(T|B) = 2 + E(T)\,;\ E(T|C) = 3 + E(T)$

$$E(T) = E(T|A)P(A) + E(T|B)P(B) +$$

$$E(T|C)P(C) = 5 \cdot \frac{3}{5} + \left(E(T)+2\right) \cdot \frac{3}{10} +$$

$$\left(E(T)+3\right)\frac{1}{10} ; \quad E(T) = \frac{13}{2}$$

X, Y $\quad P(X=x \mid Y=y) = \dfrac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}$

$$E(X \mid Y=y) = \sum_x x\, P(X=x \mid Y=y) = f(y)$$

$f(Y)$ è a sua volte una v. a.

$$E(X \mid Y) := f(Y)$$

due dadi a 4 facce X = punteggio del primo

$Z = \max(X, Y)$ Y = punteggio del secondo

$$P(Z = k \mid X = 2) = \frac{P(X = 2 \cap Z = k)}{P(X = 2)}$$

$$= 4\,P(X = 2 \cap Z = k)$$

$P(X = 2 \cap Z = 1) = 0$; $P(X = 2 \cap Z = 2) =$

$P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = \frac{1}{8}$

$P(X = 2 \cap Z = 3) = P(X = 2 \cap Y = 3) = \frac{1}{16} = P(X = 2 \cap Z = 4)$

$$P(Z=1 \mid X=2)=0; \quad P(Z=2 \mid X=2)=\frac{1}{2}$$

$$P(Z=3 \mid X=2)=\frac{1}{4}=P(Z=4 \mid X=2)$$

$$E(Z \mid X=2)=1 \cdot 0+2 \cdot \frac{1}{2}+3 \cdot \frac{1}{4}+4 \cdot \frac{1}{4}=$$

$$\frac{11}{4}$$

$E(Z \mid X=1) = \frac{5}{2}$; $E(Z \mid X=3) = \frac{13}{4}$

$E(Z \mid X=4) = 4$

$$E(aX+bY|Z)=aE(X|Z)+bE(Y|Z)$$

$$E(c|Z)=c$$

se $Y \geq 0 \implies E(Y|Z) \geq 0$

$X, Y \quad E(Y g(X)|X) = g(X)E(Y|X)$

Dado 6 facce, dadi a 4 facce

$Y=$ punteggio finale $E(Y)$?

$N \sim$ 6 facce $\qquad X_i \sim$ 4 facce

$$Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=$$

$$E(Y)=E\left(E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right)=$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \,\Big|\, N=n\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\,E(X_1) = \frac{5n}{2}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N\right) = \frac{5}{2} N$$

$$E(Y) = E\left(\frac{5}{2}N\right) = \frac{5}{2}E(N) = \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{35}{4}$$