Esercizi di Calcolo Differenziale

Corrado Mascia & Eugenio Montefusco

Corso di laurea in Informatica

Carissima/o,
nelle pagine che seguono lo studente potrà trovare alcuni esercizi di Calcolo Differenziale per il corso di laurea in Informatica.
Molti degli esercizi sono seguiti dalle rispettive soluzioni, ma invito il lettore a impegnarsi a risolvere i quesiti senza "sbirciare" avanti nel testo: leggere e capire uno svolgimento è decisamente lontano dal saper risolvere autonomamente un esercizio! Il mio suggerimento è di usare la soluzione solamente per verificare la correttezza del proprio svolgimento...
Ovviamente questa piccola raccolta non esaurisce la totalità dei possibili esercizi, ma certo rappresenta una rassegna abbastanza varia e, speriamo, stimolante.
Buon lavoro e in bocca al lupo!

1 I numeri reali

Esercizio 1 *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni*

$$\big||x|-1\big| \le 1, \qquad \begin{cases} |x| \le 2, \\ |x-1| \le 1, \end{cases}, \qquad \left|e^{\sin(x^7)}\right| \le -1,$$

$$\left|x^{10^{10}}\right| < 1, \qquad 2x^2+1 \le |x^2+1|+|x^2|, \qquad 2x^2-1 \le |x^2+1|-|x^2|.$$

Soluzione. 1. Ricordando che $|a-\ell| \le r$ se e solo se $\ell - r \le a \le \ell + r$, si ha

$$\big||x|-1\big| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = 1-1 \le |x| \le 1+1 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \le 2.$$

Quindi

$$\big||x|-1\big| \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-2,2].$$

2. La seconda:

$$\begin{cases} |x| \le 2, \\ |x-1| \le 1, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in [-2,2], \\ x \in [0,2], \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-2,2] \cap [0,2] = [0,2].$$

3. La condizione $\left|e^{\sin(x^7)}\right| \le -1$ non è mai verificata, dato che il modulo di un qualsiasi numero reale è sempre non negativo (e quindi mai minore o uguale di -1).
4. Dato che il prodotto dei moduli è il modulo del prodotto, $|x^k| = |x|^k$, e quindi

$$|x^{10^{10}}| = |x|^{10^{10}} \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-1,1].$$

5. Facilissima! Dalla definizione di modulo, segue $|x^2+1| = x^2+1$ e $|x^2| = x^2$, quindi

$$2x^2+1 \le |x^2+1|+|x^2| \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2+1 \le (x^2+1)+x^2 = 2x^2+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Non mi inganni così facilmente... lo so bene che non è vero che il modulo della differenza è sempre minore della differenza dei moduli! Utilizzando, come in 5., le uguaglianze $|x^2+1| = x^2+1$ e $|x^2| = x^2$,

$$2x^2-1 \le |x^2+1|-|x^2| \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2-1 \le (x^2+1)-x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2-1 \le 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x^2 \le 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-1,1].$$

□

Esercizio 2 *Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ vale $|a+b| = |a|+|b|$?*

Soluzione. Se $a, b \ge 0$, allora $a+b \ge 0$ e si ha $|a+b| = a+b = |a|+|b|$. Nel caso $a, b \le 0$, la situazione è analoga: dato che $a+b \le 0$,

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b = |a+|b|,$$

quindi vale l'uguaglianza. Se $a < 0 < b$, ci sono due possibilità: o $a + b \geq 0$ o $a + b < 0$. Se $a + b \geq 0$, allora, dato che $-|a| < 0 < |a|$,

$$|a + b| = a + b = -|a| + |b| < |a| + |b|$$

e quindi non vale l'uguaglianza. Se $a + b < 0$, allora, dato che $-|b| < 0 < |b|$,

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| - |b| < |a| + |b|.$$

In definitiva:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad \Longleftrightarrow \qquad a, b \geq 0 \quad \text{oppure} \quad a, b \leq 0.$$

□

Esercizio 3 *Dire quali tra i seguenti insiemi sono limitati e quali non lo sono:*

$$\{0\} \cup \{1\}, \qquad (-\infty, 0) \cup [1, 2], \qquad [-1, 1] \cap [0, +\infty), \qquad \mathbb{N}.$$

Soluzione. L'insieme $\{0\} \cup \{1\}$ è limitato e non è un intervallo; $(-\infty, 0) \cup [1, 2]$ non è limitato e non è un intervallo; $[-1, 1] \cap [0, +\infty)$ coincide con $[0, 1]$ quindi è un intervallo ed è limitato; l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è limitato e non è un intervallo.
□

Esercizio 4 *Dire quale dei seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo*

$$A = \{x : |x| \geq 1\}, \qquad B = \{x : |x| \leq 2\}, \qquad A \cup B, \qquad A \cap B.$$

Soluzione. Dato che $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e $B = [-2, 2]$, si ha

$$A \cup B = \mathbb{R} \qquad A \cap B = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

Quindi: A non è limitato e non è un intervallo, B è limitato ed è un intervallo, $A \cup B$ non è limitato ed è un intervallo, $A \cap B$ è limitato, e non è un intervallo.
□

Esercizio 5 *Dire quale dei seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo*

$$C = \{x : x^2 - 1 \geq 0\}, \qquad D = \left\{x : |x - 2| \leq \frac{3}{2}\right\}, \qquad C \cup D, \qquad C \cap D.$$

Soluzione. Si tratta, prima di tutto, di determinare gli insiemi C e D. Dato che

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \geq 1,$$

$$|x - 2| \leq \frac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{3}{2} \leq x \leq 2 + \frac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2},$$

si ha

$$C = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), \qquad D = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right].$$

Se ne deduce che

$$C \cup D = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \qquad C \cap D = \left[1, \frac{7}{2}\right].$$

Quindi: C non è limitato e non è un intervallo, D è limitato ed è un intervallo, $C \cup D$ non è limitato e non è un intervallo, $C \cap D$ è limitato ed è un intervallo.
□

Esercizio 6 *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi*

$$C = \{x : 2 + x - x^2 > 0\}, \qquad D = \{x : x \geq 1\}, \qquad C \cup D, \qquad C \cap D.$$

Si tratta di massimo e di minimo?

Soluzione. Tramite la famosa formula risolutiva per polinomi di secondo grado

$$2 + x - x^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-1, 2\}.$$

Quindi

$$C = (-1, 2), \qquad D = [1, +\infty), \qquad C \cup D = (-1, +\infty), \qquad C \cap D = [1, 2).$$

Dall'espressione esplicita di questi insiemi è immediato dedurre che:
(i) $\inf C = -1$ e $\sup C = 2$, l'insieme C non ha né massimo né minimo;
(ii) $\inf D = \min D = 1$ e $\sup D = +\infty$, l'insieme D non ha massimo;
(iii) $\inf C \cup D = -1$ e $\sup C \cap D = +\infty$, l'insieme C non ha né massimo né minimo;
(iv) $\inf C \cap D = \min D = 1$ e $\sup C \cap D = 2$, l'insieme D non ha massimo.
□

Esercizio 7 *Siano I e J due intervalli di $\mathbb{R}$. È vero che $I \cup J$ è un intervallo? È vero che $I \cap J$ è un intervallo?*

Soluzione. L'unione di due intervalli potrebbe non essere un intervallo: ad esempio, se $I = (0,1)$ e $J = (2,3)$, allora $I \cup J = (0,1) \cup (2,3)$, che non è un intervallo. L'intersezione di due intervalli, al contrario, è sempre un intervallo (a patto di considerare anche insiemi composti da un solo punto e l'insieme vuoto come intervalli "degeneri"). Ad esempio, se $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$, allora $I \cap J = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}]$. Gli altri casi si trattano in maniera analoga...
□

Esercizio 8 *Dimostrare che*

$$A, B \text{ limitati} \qquad \Rightarrow \qquad A \cup B \text{ limitato}.$$

$$A, B \text{ limitati}, \quad A \cap B \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad A \cap B \text{ limitato}.$$

Soluzione. Per ipotesi, esistono $R', R'' > 0$ tali che $A \subset [-R', R']$ e $B \subset [-R'', R'']$. Allora

$$A \cup B \subset [-R', R'] \cup [-R'', R''] = [-R, R] \qquad \text{dove } R := \max\{R', R''\}.$$

Pertanto l'unione di insiemi limitati è limitata. Per l'intersezione è ancora più facile: se R' è tale che $A \subset [-R', R']$, allora

$$A \cup B \subset A \subset [-R', R'],$$

che mostra che anche l'intersezione di insiemi limitati è limitata.

□

2 Successioni e oltre...

Esercizio 9 *Verificare le seguenti affermazioni usando la definizione di limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

Soluzione. 1. Fissato $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi, con la scelta

$$n_\varepsilon := \begin{cases} 0 & \varepsilon > 2, \\ \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right] + 1 & \varepsilon \in (0,2], \end{cases}$$

dove $[\cdot]$ denota la funzione parte intera, la proprietà richiesta nella definizione di limite è verificata.

2. Fissato $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon \iff \varepsilon n^2 - n + \varepsilon > 0.$$

Consideriamo la disequazione di secondo grado $\varepsilon x^2 - x + \varepsilon > 0$. Dato che il discriminante $\Delta_\varepsilon := 1 - 4\varepsilon^2$ è negativo se e solo se $\varepsilon > 1/2$ (si ricordi che $\varepsilon > 0$), ci sono due casi da considerare:

$$\text{se } \varepsilon > \frac{1}{2}, \qquad \varepsilon x^2 - x + \varepsilon > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$\text{se } 0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}, \quad \varepsilon x^2 - x + \varepsilon > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{\Delta_\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{\Delta_\varepsilon}}{2\varepsilon}, +\infty\right).$$

Perciò, scegliendo

$$n_\varepsilon := \begin{cases} 0 & \varepsilon > 1/2, \\ \left[\frac{1+\sqrt{\Delta_\varepsilon}}{2\varepsilon}\right] + 1 & \varepsilon \in (0,1/2], \end{cases}$$

dove $[\cdot]$ denota la funzione parte intera, la proprietà richiesta nella definizione di limite è verificata.

□

Esercizio 10 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - n^2}{2^n + n^3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n-2}{5n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \arctan(n).$$

Soluzione. 1. Dividendo a numeratore e a denominatore per 2^n,

$$\frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} = \frac{\frac{3^n}{2^n} - \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n^3}{2^n}}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^n} = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^n}{2^n} - \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n^3}{2^n}} = +\infty.$$

2. Facilissimo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{5n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5n} - \frac{2}{5n^2}\right) = \frac{1}{5} + 0 + 0 = \frac{1}{5}.$$

3. Dato che $-1 \le \sin x \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0.$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$, per il Teorema dei carabinieri, lo stesso è vero per la successione $\sin n/n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

4. Dato che $|\sin x| \le |x|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \le \frac{1}{n+1}.$$

La successione $1/(n+1)$ tende a zero per $n \to +\infty$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

5. Dato che $1/(n+1)$ tende a zero per $n \to +\infty$ e la funzione $\ln x$ tende a $-\infty$ per $x \to 0$, il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\infty.$$

Volendo proprio giustificare in maniera rigorosa quanto appena affermato, si può ricorrere alla definizione di limite. Dato $M \in \mathbb{R}$,

$$\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \le M \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \le e^M \quad \Longleftrightarrow \quad n \ge e^{-M} - 1.$$

Quindi, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste $n_M := [e^{-M} - 1] + 1$ tale che, se $n \ge n_M$, allora $\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \le M$.

6. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2 + n} + n$,

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}.$$

Dividendo a numeratore e a denominatore per n, passare al limite è facile come bere un bicchier d'acqua:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

7. La funzione $\arctan x$ tende a $\pi/2$ quando $x \to +\infty$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

Se si vuole dimostrare (un po' più seriamente) questo limite, si può procedere come segue: fissato $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, cerchiamo gli n per cui

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctan n < \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

La seconda disequazione è verificata per ogni n, dato che $\arctan x < \pi/2$ per ogni x. Applicando la funzione tangente alla prima disequazione

$$n > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

e il gioco è fatto. Ai volenterosi precisare la conclusione...
□

Esercizio 11 *Dire se le seguenti successioni sono monotone o no*

$$a_n = (1 - n^{17} + n^{49}), \quad a_n = (n^3 - 4n^2), \quad a_n = \frac{100n}{n^2+1}, \quad a_n = (-n^2 + n + 6).$$

Soluzione. 1. La successione $a_n = (1 - n^{17} + n^{49})$ può essere riscritta nella forma seguente

$$a_n = 1 + n^{17}(n^{32} - 1).$$

Dato che le successioni n^{17} e $n^{32} - 1$ sono positive e crescenti per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, anche la successione $n^{17}(n^{32} - 1)$ è crescente per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, e quindi lo è anche la successione a_n. Resta da verificare che $a_0 \leq a_1$: basta sostituire nell'espressione di a_n per ottenere $a_0 = a_1 = 0$. La successione a_n è crescente.

2. I primi termini della successione $a_n = (n^3 - 4n^2)$ sono

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = -8, \quad a_3 = 15.$$

Dato che $a_0 > a_1$ e $a_2 < a_3$ la successione non è né crescente né decrescente, quindi non è monotona.

3. I primi termini della successione $a_n = \dfrac{100\,n}{n^2+1}$ sono

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 50, \quad a_2 = 40.$$

Dato che $a_0 < a_1$ e $a_1 > a_2$ la successione non è né crescente né decrescente, quindi non è monotona.

4. La successione $a_n = (-n^2+n+6)$ è decrescente, infatti

$$a_{n+1} - a_n = \left[-(n+1)^2 + n + 1 + 6\right] - \left[-n^2 + n + 6\right] = -2n \le 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

□

Esercizio 12 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + n^3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + n^\alpha}, \ \alpha > 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + a_n}, \ a_n \text{ t.c. } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0.$$

Soluzione. 1. Dividendo a numeratore e a denominatore per 3^n,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2/3)^n}{1 + n^3/3^n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n}{1 + \lim\limits_{n\to+\infty} (n^3/3^n)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

2. Dividendo a numeratore e a denominatore per 3^n,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2/3)^n}{1 + n^\alpha/3^n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n}{1 + \lim\limits_{n\to+\infty} (n^\alpha/3^n)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

3. Dividendo a numeratore e a denominatore per 3^n (originale, vero?)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n + a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2/3)^n}{1 + a_n/3^n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n}{1 + \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n/3^n)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

□

Esercizio 13 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 2^n}{2^n + n!}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{100} + \sin n}{100^n + \cos n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-n}}{1 + e^{-n}}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^n}{1 + e^n},$$

Soluzione. 1. Dividendo a numeratore e a denominatore per $n!$, e ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 2^n}{2^n + n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{n!} + \frac{2^n}{n!}}{\frac{2^n}{n!} + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

2. Dividendo a numeratore e a denominatore per 100^n, e utilizzando i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{100}}{100^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{100^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{100^n} = 0$$

si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{100}+\sin n}{100^n+\cos n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^{100}}{100^n}+\frac{\sin n}{100^n}}{1+\frac{\cos n}{100^n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

3. Dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{1+e^{-n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4. Moltiplicando a numeratore e a denominatore per e^{-n},

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{n}}{1+e^{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}-1}{e^{-n}+1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

□

Esercizio 14 *Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza da*

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

(i) Scrivere i primi 4 termini della successione $\{a_n\}$.

(ii) Mostrare che $a_{n+1} \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Mostrare che a_n è inferiormente limitata. (Suggerimento: dimostrare che $a_n^2 \ge 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.)

(iv) Calcolare il limite di a_n per $n \to +\infty$.

Soluzione. (i) Utilizzando la definizione

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12},$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}.$$

(ii) Notiamo prima di tutto che, se $a_n > 0$, allora $a_{n+1} > 0$ quindi, dato che $a_0 = 2 > 0$, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, dato che

$$a_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{2}{a_n}\right)^2 - 2 = \frac{(a_n+2)^2 - 8a_n^2}{4a_n^2} = \frac{(a_n-2)^2}{4a_n^2} \ge 0,$$

si ha $a_n^2 \ge 2$ per ogni n.

Perciò, per ogni n,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{2-a_n^2}{2a_n} \le 0.$$

(iii) Si è già osservato che, se $a_n > 0$, allora $a_{n+1} > 0$. Quindi, dato che $a_0 = 2 > 0$, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Dato che a_n è decrescente e inferiormente limitata, ammette limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}.$$

Dato che $a_n > 0$ per ogni n, $\ell \geq 0$; inoltre, dato che $a_n^2 \geq 2$ per ogni n, si ha anche $\ell \geq 2$, cioè $\ell \geq \sqrt{2}$. Passando al limite nella relazione che definisce la successione

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right),$$

quindi

$$2\ell^2 = \ell^2 + 2 \qquad \iff \qquad \ell^2 = 2.$$

Sapendo che $\ell > 0$, ne segue che $\ell = \sqrt{2}$.

□

Esercizio 15 *Dato $q \in (0,1)$, e ricordando che*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

si calcoli il valore di

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} q^k, \qquad \sum_{k=n}^{\infty} q^k \quad \textit{per } n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+2}.$$

Soluzione.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q};$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1 - q = \frac{1}{1-q} - 1 - q = \frac{1-(1-q^2)}{1-q} = \frac{q^2}{1-q};$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - (1 + q + \ldots + q^{n-1}) = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+2} = \sum_{h=2}^{\infty} q^h = \frac{q^2}{1-q}.$$

□

3 ABC delle funzioni

Esercizio 16 *Disegnare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni, dire se sono inferiormente e/o superiormente limitate e determinarne l'insieme immagine.*

$$f(x) = -x^2, \quad f(x) = x^5, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = \frac{x+|x|}{2},$$

$$f(x) = 4+4x-x^2, \quad f(x) = x+4, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soluzione. Possiamo osservare facilmente che
(i) $-x^2$ è limitata superiormente da 0 ed è illimitata inferiormente, l'insieme immagine è $\{x \le 0\}$;
(ii) x^5 è illimitata superiormente ed inferiormente, e l'insieme immagine è $\mathbb{R}$;
(iii) e^{-x^2} è limitata superiormente da 1 e limitata inferiormente da 0, l'insieme immagine è $(0,1]$;
(iv) $\frac{x+|x|}{2}$ è limitata inferiormente da 0 ed è illimitata superiormente, l'insieme immagine è $[0,+\infty)$;
(v) $4+4x-x^2$ è limitata superiormente da 8 ed è illimitata inferiormente, l'insieme immagine è $(-\infty,8]$;
(vi) $x+4$ è illimitata superiormente ed inferiormente, e l'insieme immagine è $\mathbb{R}$;
(vii) $\frac{1}{1+x^2}$ è limitata superiormente da 1 e limitata inferiormente da 0, l'insieme immagine è $(0,1]$.
□

Esercizio 17 *Disegnare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni e dire se sono invertibili. In caso affermativo scriverne l'espressione esplicita.*

$$f(x) = |4+4x-x^2|, \quad f(x) = x^3+x^2, \quad f(x) = \ln(x+1)+1,$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ \frac{1}{x^2} & |x| \ge 1 \end{cases}, \quad f(x) = x^5+1.$$

Soluzione. Cominciamo subito dalle funzioni che non sono invertibili, procederemo mostrando due (o più) punti sui quali la funzione assume lo stesso valore.
E' facile verificare che la funzione $f(x) = |4+4x-x^2|$ si annulla nei punti $2(1\pm\sqrt{2})$ (basta risolvere un'equazione di secondo grado...), notiamo inoltre che le funzioni quadratiche (le parabole) generalmente non sono invertibili.
La funzione $f(x) = x^3+x^2$ possiede due zeri nei punti $0,-1$, basta risolvere un'equazione algebrica molto facile.
La funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ \frac{1}{x^2} & |x| \ge 1 \end{cases}$$

ha un aspetto che può spaventare, mentre non presenta grandi difficoltà, basta notare che è una funzione pari e che assume il valore $1/4$ nei punti $\pm 1/4$ e ± 2...

Le due restanti funzioni sono invertibili, come provato sulle dispense, possiamo quindi mostrare aemplicemente le espressioni delle funzioni inverse.
Per la funzione $f(x) = \ln(x+1)+1$ possiamo procedere come segue

$$y = \ln(x+1)+1$$

$$y-1 = \ln(x+1)$$

$$e^{y-1} = x+1$$

$$x = e^{y-1}-1.$$

Calcoli analoghi mostrano che l'inversa di $f(x) = x^5+1$ ha l'espressione $\sqrt[5]{y-1}$.
□

Esercizio 18 *Scrivere le funzioni composte $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$ e determinarne l'insieme di definizione nei seguenti casi.*

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2+3x,$$
$$f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = x^2-2.$$

Soluzione. Dato che le funzioni f e g sono definite su $\mathbb{R}$, anche le composizioni h e k sono definite su $\mathbb{R}$. La loro espressione esplicita è

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2+3x) = e^{x^2+3x} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$k(x) = g(f(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 + 3(e^x) = e^{2x}+3e^x \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per la seconda coppia di funzioni, bisogna stare più attenti. La composizione $h = f \circ g$ è definita per $x \in \mathbb{R}$ tali che $x^2-2 \geq -2$, quindi per $x \in \mathbb{R}$. La composizione $k = g \circ f$ è definita per $x \geq -2$. L'espressione di h e k è

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2-2) = \sqrt{(x^2-2)+2} = \sqrt{x^2} = |x| \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$k(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 2 = (x+2)-2 = x \qquad x \in [-2, +\infty).$$

□

Esercizio 19 *Dire, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, se e quante soluzioni esistono delle seguenti equazioni.*

$$x^2 - 3x = \lambda, \quad |3-x^4| = \lambda, \quad x + \ln(x) = \lambda, \quad 1 + \frac{1}{x+3} = \lambda.$$

Soluzione. (i) Le soluzioni di $x^2-3x = \lambda$ corrispondono alle radici del polinomio di secondo grado $x^2-3x-\lambda$. Come è noto, il numero di soluzioni di un polinomio di secondo grado ax^2+b+c dipendono dal segno della quantità $\Delta := b^2-4ac$. In questo caso, $\Delta := 3+4\lambda$, quindi

$$\lambda < -\frac{9}{4} : 0 \text{ soluzioni}, \qquad \lambda = -\frac{9}{4} : 1 \text{ soluzione}, \qquad \lambda > -\frac{9}{4} : 2 \text{ soluzioni}.$$

(ii) A partire dal grafico di x^4 è possibile dedurre il grafico della funzione $|3-x^4|$, deducendo che

$$\lambda < 0: \quad 0 \text{ soluzioni}, \qquad \lambda = 0: \quad 2 \text{ soluzioni}, \qquad 0 < \lambda < 3: \quad 4 \text{ soluzioni},$$

$$\lambda = 3: \quad 3 \text{ soluzioni}, \qquad \lambda > 3: \quad 2 \text{ soluzioni}.$$

(iii) Il grafico qualitativo della funzione $x + \ln x$ si può dedurre sommando punto per punto i valori delle funzioni x e $\ln x$ In particolare si riconosce che la funzione $x + \ln x$ è strettamente crescente e ha per insieme immagine tutta la retta reale $\mathbb{R}$. Perciò, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ c'è un unico x_λ tale che $x_\lambda + \ln x_\lambda = \lambda$.
(iv) Se $\lambda = 1$, l'equazione non ha soluzione:

$$1 + \frac{1}{x+3} = \lambda = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x+3} = 0 \quad \text{impossibile!}$$

Per $\lambda \neq 1$, c'è un'unica soluzione, che può essere determinata esplicitamente risolvendo l'equazione

$$1 + \frac{1}{x+3} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x+3} = \lambda - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -3 + \frac{1}{\lambda - 1}.$$

□

Esercizio 20 *Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni.*

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad f(x) = \sqrt{\cos(x)}, \quad f(x) = \ln(1-x).$$

Soluzione. 1. L'insieme di definizione è $\{x : \sin x \neq 0\}$ e cioè $\mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. L'argomento di $\sqrt{\cdot}$ deve essere non negativo. Dato che

$$\cos x \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z},$$

l'insieme di definizione di $\sqrt{\cos x}$ è

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right].$$

3. L'unica condizione da imporre perché la funzione sia ben definita è che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo: $1 - x > 0$. Quindi l'insieme di definizione è $(-\infty, 1)$.
□

Esercizio 21 *Provare che la somma di due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescenti è crescente. È vero che il prodotto di due funzioni crescenti è crescente? E la composizione?*

Soluzione. Per ipotesi, se $x < y$, allora $f(x) \leq f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$. Sommando termine a termine queste disequazioni, si ottiene

$$x < y \qquad \Rightarrow \qquad f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y),$$

che è quanto richiesto.

Il prodotto di funzioni crescente non è detto che sia crescente. Ad esempio, se $f(x) = g(x) = x$, le funzioni f e g sono crescenti, ma il loro prodotto $fg(x) = f(x)g(x) = x^2$ non lo è.

La composizione di funzioni crescenti è crescente. Infatti se f ed g sono funzioni crescenti, per x, y nel dominio di definizione di $f \circ g$, si ha, per la monotonia di g

$$x < y \quad \Rightarrow \quad g(x) \leq g(y),$$

e, per la monotonia di f

$$g(x) \leq g(y) \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) \leq f(g(y)).$$

Riscrivendo solo il primo e l'ultimo termine di questa catena di implicazioni

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) \leq f(g(y)).$$

□

4 Ancora sulle funzioni...

Esercizio 22 *Dire se (e perché) le seguenti affermazioni sono vere, false o insensate.*

$$e^{x^4} > 2 \Rightarrow x^4 > \ln(2),$$

$$e^{x^4} > 0 \Rightarrow x^4 > \ln(0),$$

$$\sin(x) > 1/2 \Leftrightarrow x > \arcsin(1/2),$$

$$\tan(x^2) > 1 \Rightarrow x > 1,$$

$$e^{\tan(x)} > 2 \Rightarrow x > \arctan(\ln(2)).$$

Soluzione. 1. Dato che la funzione $\ln x$ è strettamente crescente, è vero che $x < y$ implica $\ln x < \ln y$. Inoltre $\ln(e^x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi

$$e^{x^4} > 2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(e^{x^4}\right) > \ln 2 \quad \Rightarrow \quad x^4 > \ln(2).$$

2. La seconda implicazione invece è insensata: il logaritmo naturale ln non è definito in 0 e quindi l'espressione $\ln 0$ non ha senso.

3. Le affermazioni $\sin x > 1/2$ e $x > \arcsin(1/2)$ non sono equivalenti. Infatti: $\arcsin(1/2) = \pi/6$, quindi la seconda delle due è equivalente a $x \in (\pi/6, +\infty)$, ma

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > \frac{1}{2} \qquad -\frac{3\pi}{2} \notin (\pi/6, +\infty).$$

Più precisamente

$$\sin x > 1/2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right).$$

che è ben diversa dalla condizione $x \in (\pi/6, +\infty)$.

4. L'implicazione è falsa: ad esempio

$$x = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan(x^2) = \sqrt{3} > 1.$$

5. La funzione ln è strettamente crescente, quindi

$$e^{\tan(x)} > 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan x = \ln\left(e^{\tan(x)}\right) > \ln 2.$$

Sia $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ tale che $\tan x_0 = \ln 2$, allora

$$\tan x = \ln\left(e^{\tan(x)}\right) > \ln 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(x_0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

(convincersene disegnando il grafico di $\tan x$) e questa è una condizione ben diversa da $\{x \geq \arctan(\ln(2))\}$. Quindi l'implicazione è falsa.

□

Esercizio 23 *Trovare il periodo più piccolo per le seguenti funzioni*

$$\sin(2x), \quad \sin(4x), \quad \sin(nx),\ n \in \mathbb{N},$$

$$|\sin(2x)|, \quad |\sin(4x)|, \quad |\sin(nx)|,\ n \in \mathbb{N},$$

e disegnarne i grafici per $x \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. Le informazioni in nostro possesso ci dicono che la funzione sin è periodica con periodo minimo 2π, da cui possiamo scrivere che

$$\sin(2(x+T)) = \sin(2x+2T) = \sin(2x),$$

dove l'ultima uguaglianza vale se e soltanto se $2T = 2k\pi$, con k numero intero, per cui possiamo affermare che il periodo più piccolo della funzione è π. Analogamente possiamo mostrare che il pi'u piccolo periodo di $\sin(4x)$ è $\pi/2$ e che il periodo più piccolo di $\sin(nx)$ è $2\pi/n$.
Per le funzioni con il modulo il ragionamento è leggermente diverso, anche se basterà, come prima, risolvere il primo caso. Cominciamo osservando che le formule sugli archi associati ci dicono che

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

questo implica che

$$|\sin(x)| = |\sin(x+\pi)|,$$

cioè che la funzione $|\sin(x)|$ ha periodo π, tale numero è il periodo più piccolo perché l'equazione $|\sin(x)| = 0\,(= \sin(0))$ ha come soluzioni solo i multipli interi di π. Adesso possiamo procedere come sopra e provare che il periodo più piccolo di $|\sin(2x)|$ è $\pi/2$, il periodo più piccolo di $|\sin(4x)|$ è $\pi/4$ e il periodo più piccolo di $|\sin(nx)|$ è π/n, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
□

Esercizio 24 *Dire se le seguenti funzioni sono periodiche*

$$\sin(x^2), \quad \sin(x) + \cos(3x).$$

In caso affermativo calcolarne il periodo minimo.

Soluzione. (i) La funzione $\sin(x^2)$ non è periodica. Infatti, ponendo $x_k := \sqrt{k\pi}$ per $k \in \mathbb{N}$, si ha $\sin(x^2) = 0$ se e solo se $x \in \{\pm x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Supponiamo, per assurdo, che esista $T > 0$ tale che $\sin((x+T)^2) = \sin(x^2)$. In particolare, scegliendo $x = 0$, $\sin(T^2) = \sin(0) = 0$, quindi T deve essere della forma $\sqrt{h\pi}$ per qualche $h \in \mathbb{N}$, $h \neq 0$. Quanti zeri cadono nell'intervallo $[0, T]$? Contiamoli: $0, \sqrt{\pi}, \ldots, \sqrt{h\pi} = T$, quindi $h+1$ zeri. Contiamo ora gli zeri che cadono nell'intervallo $[T, 2T]$:

$$T = \sqrt{h\pi} \leq \sqrt{k\pi} \leq 2\sqrt{h\pi} = 2T \qquad \Longleftrightarrow \qquad h \leq k \leq 4h,$$

quindi si tratta di $4h - h + 1 = 3h + 1$ zeri. Ma, dato che la funzione è periodica di periodo T, il numero di zeri deve essere lo stesso di quelli che cadono in $[0, T]$. Quindi $3h + 1 = h + 1$, cioè $h = 0$, che contraddice la richiesta $T > 0$.

(ii) La funzione $\sin x + \cos(3x)$ è periodica di periodo 2π, infatti:

$$\sin(x+2\pi) + \cos(3(x+2\pi)) = \sin(x+2\pi) + \cos(3x+6\pi)\sin(x) + \cos(3x).$$

Come si fa a vedere, per via elementare, che $T = 2\pi$ è il periodo minimo? L'ardua risposta al lettore...

□

5 Limiti di funzioni e continuità

Esercizio 25 *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^7+x-1}{x+1},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x-1},\qquad \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x+1}\right),\qquad \lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+x^2)}{3x^3+2x^2},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x},\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

Soluzione. 1. È conseguenza immediata delle proprietà dei limiti

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^7+x-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^7+x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

2. Sia il numeratore che il denominatore tendono a zero per $x\to 1$, quindi non è possibile applicare direttamente le proprietà dei limiti. Ma, dato che

$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1),$$

il problema è presto risolto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)=7.$$

3. Per $x\to 0$, l'argomento del logaritmo, $1/(1+x)$ tende a 1. Dato che il logaritmo è una funzione continua, basta calcolare il logaritmo nel valore limite 1:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)=\ln 1=0.$$

4. Consideriamo separatamente il limite destro ed il limite sinistro. Per valori di $x>3$, la funzione $\frac{2x}{x-3}$ è positiva. Dato che il numeratore tende a 6 e il denominatore a 0, il limite da destra è $+\infty$. Per il limite sinistro, la situazione è analoga con l'unica differenza che, per valori di $x<3$ e sufficientemente vicini a 3, la funzione $\frac{2x}{x-3}$ è negativa, quindi, da sinistra, la funzione diverge a $-\infty$. Riassumendo

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty\qquad\text{e}\qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=+\infty\qquad\text{e}$$

5. Per ricondursi al limite noto $\lim\limits_{t\to 0}(e^t-1)/t=1$ basta moltiplicare e dividere per $2x$ e osservare che, per $x\to 0$, anche $2x^2\to 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot 2x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\lim_{x\to 0}2x=1\cdot 0=0$$

6. Per ricondursi al limite noto $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ basta moltiplicare e dividere per x^3+x^2 e osservare che, per $x\to 0$, anche $x^3+x^2\to 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+x^2)}{3x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^3+x^2)}{x^3+x^2}\cdot\frac{x^3+x^2}{3x^3+2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^3+x^2)}{x^3+x^2}\cdot\frac{x+1}{3x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3+x^2)}{x^3+x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{3x+2} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

7. Direttamente alle proprietà dei limiti e dalla continuità di $\sin x$, segue

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x\to 1} \sin x}{\lim_{x\to 1} x} = \sin 1.$$

8. Dato che $-1 \le \sin x \le 1$, si ha

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Per $x \to +\infty$, il primo e l'ultimo termine tendono a 0, quindi, per il Teorema dei carabinieri (per funzioni),

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

□

Esercizio 26 *(i) Calcolare i limiti destro e sinistro seguenti*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{|\cos x|}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

(ii) Dire se esistono i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

(iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ con $\ell \neq 0$. Dimostrare che il limite seguente esiste finito e calcolarlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

(iv) Se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ è ancora vero che esiste il limite in (iii)? E se $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$?

Soluzione. (i) Dalla definizione del modulo, segue

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1.$$

Dato che $\cos x \ge 0$ per ogni $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = 1 \qquad \forall\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1.$$

(ii) Il primo dei due limiti non esiste, dato che il limite destro è diverso dal limite sinistro. Al contrario, il secondo limite esiste (e vale 1), perché i limiti destro e sinistro coincidono.

(iii) Supponiamo $\ell > 0$ (l'altro caso si risolve con lo stesso tipo di ragionamento). Scegliendo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, per definizione di limite, si deduce che esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \ell/2$. In particolare

$$\exists \delta > 0 \qquad \text{tale che} \qquad f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0 \qquad \forall\, x \in (-\delta, \delta),\ x \neq 0.$$

Dalla definizione di modulo discende

$$\frac{f(x)}{|f(x)|} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \forall\, x \in (-\delta, \delta),\ x \neq 0.$$

Quindi la funzione $f/|f|$ è pari ad 1 in un intorno di $x = 0$, in particolare ammette limite e tale limite vale 1.

(iv) Se il limite $\ell = 0$, in generale il limite non esiste. Per un controesempio, basta considerare la funzione $f(x) = x$, già studiata nei punti (i) e (ii). Se, invece, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, la situazione è molto simile a quella del punto (iii), dato che

$$\exists \delta > 0 \qquad \text{tale che} \qquad f(x) > 0 \qquad \forall\, x \in (-\delta, \delta),\ x \neq 0.$$

Anche in questo caso, la funzione $f/|f|$ è pari ad 1 in un intorno di $x = 0$ e, quindi, tende ad 1 per $x \to 0$.

□

Esercizio 27 *Dimostrare che la funzione parte positiva* $f(x) = \max\{x, 0\}$ *verifica*

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Si può concludere che la parte positiva è una funzione continua?

Soluzione. Procedo per casi. Se $x, y \geq 0$, allora $f(x) = x$ e $f(y) = y$, quindi $|f(x) - f(y)| = |x - y|$; se $x, y < 0$, allora $f(x) = f(y) = 0$ e quindi $|f(x) - f(y)| = 0 \leq |x - y|$; infine se $x < 0 < y$ (l'altro caso è analogo), si ha $f(x) = 0$ e $f(y) = y$, da cui $|f(x) - f(y)| = y \leq |x - y| = -x + y$.
La disequazione mostra che la funzione parte positiva è una funzione lipschitziana in $\mathbb{R}$ e, pertanto, è continua in $\mathbb{R}$.

□

Esercizio 28 *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Giustificare l'affermazione "f è una funzione continua su $\mathbb{R}$".

(ii) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è strettamente crescente.

(iii) Calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

(iv) Determinare l'insieme immagine $f(\mathbb{R})$.

Soluzione. (i) Dato che le funzioni e^x e 1 sono continue e la somma di funzioni continue è continua, anche le funzioni $e^x - 1$ e $e^x + 1$ sono funzioni continue. Inoltre il rapporto di funzioni continue, dove è definito, è continuo, quindi la funzione f è continua in $\mathbb{R}$ (si noti che il denominatore $e^x + 1$ è sempre diverso da zero).

(ii) Bisogna verificare che $x < y$ se e solo se $f(x) < f(y)$. In effetti

$$\begin{aligned}
\frac{e^x-1}{e^x+1} < \frac{e^y-1}{e^y+1} \quad &\iff \quad (e^x-1)(e^y+1) < (e^y-1)(e^x+1) \\
&\iff \quad e^x - e^y < e^y - e^x \\
&\iff \quad 2e^x < 2e^y \quad \iff \quad x < y,
\end{aligned}$$

grazie al fatto che la funzione e^x è strettamente crescente.

(iii) Ricordando che $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, ecco i limiti richiesti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)}{\lim_{x\to-\infty}(e^x+1)} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(1-e^{-x})}{\lim_{x\to-\infty}(1+e^{-x})} = \frac{1}{1} = 1.$$

(nel secondo si è moltiplicato a numeratore e a denominatore per e^{-x}.

(iv) Dato che la funzione f è crescente e i suoi limiti a $-\infty$ e $+\infty$, rispettivamente, sono -1 e 1, si ha

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -1, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Perciò, $f(\mathbb{R}) \subset (-1,1)$. Grazie al Teorema del valore intermedio, ogni valore tra $(-1,1)$ fa parte dell'insieme immagine, quindi $f(\mathbb{R}) = (-1,1)$. Più precisamente, se $\eta \in (-1,1)$, per definizione di estremo superiore η non è né un maggiorante, né un minorante di $f(\mathbb{R})$, cioè esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) \le \eta \le f(b)$. Se $f(a) = \eta$ o $f(b) = \eta$, allora $\eta \in f(\mathbb{R})$; se, invece, $f(a) < \eta < f(b)$, il Teorema del valore intermedio garantisce l'esistenza di $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = \eta$.
□

Esercizio 29 *(i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari che ammetta limiti destro e sinistro per $x \to 0$. Dimostrare che*

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\lim_{x\to0^+} f(x).$$

(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari e continua. Dimostrare che $f(0) = 0$.

Soluzione. (i) Per ipotesi, la funzione ha limite destro in 0, cioè esiste $\ell \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (0,\delta).$$

Dato che la funzione ammette limite sinistro in 0, esiste $\ell' \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta' > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - \ell'| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (-\delta',0).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per $x \in (-\delta, 0) \cap (-\delta', 0)$, oltre a $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$, vale anche

$$|f(x) + \ell| = |-f(-x) + \ell| = |f(-x) - \ell| < \varepsilon,$$

dato che $-x \in (0, \delta)$. Quindi

$$|\ell' + \ell| = |\ell' - f(x) + f(x) + \ell| \leq |\ell' - f(x)| + |f(x) + \ell| < 2\varepsilon \qquad \forall\, x \in (-\delta, 0) \cap (-\delta', 0).$$

Rileggendo il primo e l'ultimo termine della disequazione:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |\ell' + \ell| < 2\varepsilon,$$

quindi $|\ell' + \ell| \leq 0$ e, per le proprietà del modulo, $\ell' + \ell = 0$, cioè $\ell' = -\ell$.
(ii) Se la funzione è continua in 0, i limite destro ℓ e sinistro ℓ' coincidono tra loro e con il valore della funzione in 0. Dato che la funzione è dispari, per il punto (i), è verificata anche la condizione $\ell' = -\ell$. Quindi $\ell' = -\ell = -\ell'$, da cui segue $\ell' = \ell = 0$.
□

Esercizio 30 *(i) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ sono verificate le disequazioni*

$$-e^{-t} \leq e^{-t} \sin t \leq e^{-t}.$$

(ii) Ricordando che $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} \sin t.$$

(iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dimostrare che

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-t} = 0.$$

(iv) Trovare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che la funzione $f(t)\, e^{-t}$ non tenda a 0 per $t \to +\infty$.

Soluzione. (i) Dato che $-1 \leq \sin t \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, le disequazioni sono verificate per ogni $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Dato che

$$-e^{-t} \leq e^{-t} \sin t \leq e^{-t}, \quad \lim_{t \to +\infty} (-e^{-t}) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0,$$

per il Teorema dei carabinieri (per funzioni), se ne deduce che la funzione $e^{-t} \sin t$ tende a 0 per $n \to +\infty$.
(iii) Sia $M > 0$ tale che $-M \leq f(t) \leq M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora

$$-Me^{-t} \leq f(t)e^{-t} \leq Me^{-t}, \quad \lim_{t \to +\infty} (-e^{-t}) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0,$$

e, di nuovo grazie al Teorema dei carabinieri, si ha che

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-t} = 0,$$

(iv) Se $f(t) = e^t$, allora $f(t)e^{-t} = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $f(t)e^{-t}$ tende ad 1 (e non a 0) per $t \to +\infty$.
□

6 Alcuni esercizi di ripasso

Esercizio 31 *Dire quale dei seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo*

$$A = \{x : -x^3 + x \geq 0\}, \qquad B = \{x : |2x+1| \leq 1\}, \qquad A \cup B, \qquad A \cap B.$$

Soluzione. Risolvendo alcune semplici disequazioni è facile vedere che

$$A = [-1,0] \cup [1,+\infty), \qquad B = [-1,0],$$

quindi segue facilmente che $A \cup B = A$ e $A \cap B = B$. A questo punto è sufficiente osservare che B è un intervallo chiuso e limitato e che A è l'unione di una semiretta e di un intervallo chiuso e limitato per aver risposto a tutte le domande dell'esercizio.
□

Esercizio 32 *Siano I e J due semirette destre di $\mathbb{R}$, cioè insiemi della forma $[a,+\infty)$ o $(a,+\infty)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. È vero che $I \cup J$ è una semiretta destra? È vero che $I \cap J$ è una semiretta destra?*

Soluzione. La risposta è affermativa ad entrambe le domande, come sempre il problema è scrivere una dimostrazione corretta... Siano $i = \inf I$ e $j = \inf J$, e per semplicità, supponiamo che $i < j$, allora segue facilmente che $I \cup J = (i,+\infty)$ o $[i,+\infty)$, così come $I \cap J = (j,+\infty)$ o $[j,+\infty)$ a secondo che l'estremo inferiore appartenga o meno all'insieme, quindi in entrambi i casi abbiamo concluso!
□

Esercizio 33 *Dimostrare che*

$$A, B \text{ superiormente limitati} \qquad \Rightarrow \qquad A \cup B \text{ superiormente limitato.}$$

$$A, B \text{ superiormente limitati}, \quad A \cap B \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad A \cap B \text{ superiormente limitato.}$$

Soluzione. Cominciamo osservando che $A \cap B \subseteq A \cup B$ per definizione, quindi basta dimostrare che l'unione di due insiemi superiormente limitati è superiormente limitata per concludere l'esercizio.
Per ipotesi sappiamo che $A \subseteq (-\infty, R]$ e $B \subseteq (-\infty, S]$ per qualche $R, S > 0$. Allora abbiamo che $A \cup B \subseteq (-\infty, R] \cup (-\infty, S] = (-\infty, \max\{R, S\}]$ e l'ultimo insieme è un insieme superiormente limitato!
□

Esercizio 34 *Disegnare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni, dire se sono inferiormente e/o superiormente limitate e determinarne l'insieme immagine.*

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad f(x) = 2\,e^{1-x}, \quad f(x) = \sin x - \cos x, \quad f(x) = |\sin x|.$$

Esercizio 35 *Scrivere le funzioni composte $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$ e determinarne l'insieme di definizione nei seguenti casi.*

$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = x^3 - x,$$

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = 1 + x^2.$$

Soluzione. Condsideriamo la prima coppia di funzioni. Entrambe sono ben definite su tutta la retta reale, quindi le loro composizioni erediteranno tale proprietà, tale funzioni sono

$$h(x) = f(g(x)) = \cos(x^3 - x), \qquad k(x) = \cos^3(x) - \cos(x).$$

Per le funzioni restanti le cose sono leggermente diverse, cominciamo scrivendone le espressioni

$$h(x) = \ln(1 + x^2), \qquad k(x) = 1 + \ln^2(x),$$

è evidente che la prima funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, mentre la seconda ha come dominio massimale l'insieme $\{x \neq 0\}$.
□

Esercizio 36 *Dire, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, se e quante soluzioni esistono delle seguenti equazioni.*

$$|2 - x^2| = \lambda, \quad \ln x + e^x = \lambda, \quad |1 - x^3| + 1 = \lambda, \quad x^{11} + x^7 + x^5 + x + 1 = \lambda.$$

Soluzione. Osserviamo subito che le funzioni $\ln(x) + e^x$ e $x^{11} + x^7 + x^5 + x + 1$ sono due funzioni iniettive e suriettive nei loro domini di definizione. Infatti sono delle funzioni strettamente crescenti la cui immagine è l'asse reale, quindi possiamo affermare con certezza che le relative equazioni possiedeono una ed una sola soluzione $\forall \lambda \in \mathbb{R}$!
Ora studiamo l'equazione $|2 - x^2| = \lambda$. La funzione dentro il valore assoluto è una parabola con la concavità verso il basso e vertice nel punto $(0, 2)$, il valore assoluto capovolge la parte del grafico che si trova sotto l'asse delle ascisse, quindi abbiamo la seguente casistica
se $\lambda < 0$ l'equazione non ha soluzione,
se $\lambda = 0$ l'equazione ha due soluzioni ($\pm\sqrt{2}$),
se $0 < \lambda < 2$ l'equazione possiede quattro soluzioni,
se $\lambda = 2$ l'equazione ha tre soluzioni, se $\lambda > 2$ l'equazione ha due soluzioni.
Ci è rimasto una sola equazione e cominciamo scrivendola nel seguente modo

$$|1 - x^3| = \lambda - 1,$$

in questo modo è evidente, per le proprietà del modulo, che non esistono soluzioni per $\lambda < 1$. La funzione interna al valore assoluto è una cubica decrescente, per cui segue che se $\lambda = 1$ l'equazione possiede soltanto la soluzione $x = 1$, mentre se $\lambda > 1$ si hanno due soluzioni.
□

Esercizio 37 *Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni decrescenti. La funzione composta $h(x) = f(g(x))$ è crescente o decrescente? Che succede nel caso in cui f sia decrescente e g crescente?*

Soluzione. Senza perderci in chiacchiere buttiamoci nella mischia e supponiamo che $x < y$, per ipotesi allora abbiamo che $g(x) > g(y)$, visto che g è decrescente, allora segue che $f(g(x)) < f(g(y))$ poiché anche f è decrescente e inverte l'ordine dell'input, quindi possiamo concludere che la funzione h è crescente! Se le due funzioni hanno comportamento discorde la funzione composta risulterà decrescente, ma lasciamo questo esercizio al volenteroso studente...
□

Esercizio 38 *Dire se le seguenti funzioni sono periodiche*

$$\sin x + \cos x, \qquad \sin(3x+1).$$

In caso affermativo calcolarne il periodo minimo.

Soluzione. La prima funzione può essere trasformata nel seguente modo

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin(x+\pi/4),$$

il che prova che la funzione è periodica ed ha periodo 2π, visto che la traslazione non altera le proprietà di periodicità delle funzioni.
Per la seconda funzione il discorso è leggermente più impegnativo, ci chiediamo se esiste $T > 0$ tale che $f(x) = f(x+T)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè $\sin(3x+1) = \sin(3(x+T)+1)$. A questo scopo scriviamo

$$\sin(3(x+T)+1) = \sin(3x+3T+1) = \sin(3x+1+3T),$$

l'ultimo termine è $\sin(3x+1)$ se e solo se $3T = 2k\pi$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$, la conclusione è che la funzione è periodica e il più piccolo periodo è $T = 2\pi/3$.
□

Esercizio 39 *Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti relazioni*

$$\begin{cases} |2x| \geq 1 \\ |x+1| < 1 \end{cases}.$$

Soluzione. La prima disequazione equivale a $|x| \geq 1/2$, per la definizione di valore assoluto è evidente che la relazione è soddisfatta dai numeri $x \in \mathbb{R}$ la cui distanza dallo zero è maggiore o uguale ad $1/2$, quindi l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty)$.
Analogamente la seconda disequazione è risolta da tutti i numeri che distano meno di 1 dal numero -1, quindi l'insieme dele soluzioni è l'intervallo aperto $(-2, 0)$.
□

Esercizio 40 *Per ciascuno dei seguenti insiemi dire se è limitato o no e se è un intervallo o meno*

$$A = \{x : |x-1| > 0\}, \quad B = (0,3], \quad A \cup B, \quad A \cap B.$$

Soluzione. L'insieme A è composto di tutti numeri reali la cui distanza da 1 è positiva, cioè da tutti i reali tranne 1 stesso! Quindi abbiamo che $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, chiaramente A non è un intervallo, visto che ha un buco, e tanto meno è limitato. Al contrario B è un intervallo limitato e non è né aperto né chiuso.
Da quanto scritto sopra segue che $A \cup B = \mathbb{R}$, il quale è un intervallo illimitato, mentre $A \cap B = (0, 1) \cup (1, 3]$ un insieme limitato che non è un intervallo.
□

Esercizio 41 *Siano* $E = \{x - 1/x : x > 0\}$, $F = \{n - 1/n : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. *Determinare* $\inf E$, $\sup E$, $\inf F$ *e* $\sup F$.

Soluzione. Cominciamo cercando di studiare l'insieme E. La cosa più facile è studiare il sup dell'insieme: osserviamo che $x - 1/x > x - 1$ per ogni $x > 1$, e poiché $x - 1$ può essere arbitrariamente grande possiamo concludere che $\sup(E) = +\infty$. La ricerca dell'estremo inferiore può essere fatta studiando l'equazione $x - 1/x = \lambda$, ovvero

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0,$$

visto che $E \subset \mathbb{R}^+$. In E l'equazione ha la sola soluzione $x_0 = (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4})/2$, tale numero appartiene ad E per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, da cui abbiamo che $\inf(E) = -\infty$!
L'estremo superiore dell'insieme F è ugualmente $+\infty$, per il ragionamento di sopra, invece il discorso è diverso per l'estremo inferiore. Infatti possiamo ugualmente studiare l'equazione di secondo grado, ricordando che cerchiamo soluzioni nell'insieme dei numeri naturali non nulli. Infatti abbiamo che $\inf(F) = \min(F) = 0$, visto che il numero $x_0 > 1$ per ogni $\lambda > 0$ e che $\lambda = 0$ fornisce $x_0 = 1$!
□

Esercizio 42 *Date le funzioni* $f(u) = 2 - 1/u$ *e* $g(x) = x + 1$, *costruire la funzione* $F(x) = f(g(x))$, *determinarne l'insieme di definizione e disegnarne il grafico.*
Disegnare il grafico di $|F(x)|$ *e determinarne l'insieme immagine.*
Verificare che F *è invertibile e determinare l'espressione esplicita della funzione inversa.*

Soluzione. La funzione $F(x)$ si ottiene rapidamente come segue

$$F(x) = f(g(x)) = 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1},$$

chiaramente l'insieme di definizione massimale della funzione è l'insieme $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, a causa del denominatore della frazione.
INSERIRE I GRAFICI DELLE FUNZIONI

Per concludere calcoliamo subito l'espressione della funzione inversa

$$2-\frac{1}{x+1}=y$$

$$\frac{1}{x+1}=2-y$$

$$x+1=\frac{1}{2-y}$$

$$x=\frac{1}{2-y}-1=\frac{y-1}{2-y}=F^{-1}(y).$$

□

Esercizio 43 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n^3+n+1}{4n^4+1},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n^4+1}{2^n+4^n+2}.$$

Calcolare

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k.$$

Soluzione. Affrontiamo prima i limiti e poi la serie. Quindi abbiamo subito

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n^3+n+1}{4n^4+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4(1+2n^{-1}+n^{-3}+n^{-4})}{n^4(4+n^{-4})}=\frac{1}{4},$$

semplificando opportunamente e ricordando alcuni limiti notevoli. Per quanto riguarda il secondo limite abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n^4+1}{2^n+4^n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n(1+2^{-n}n^4+2^{-n})}{2^n(1+2^n+2^{1-n})}=0,$$

e possiamo concludere analogamente.
Per la serie dobbiamo spendere qualche parola in più, infatti siamo in grado di calcolare soltanto una classe di serie, quella geometrica. Dopo questa osservazione possiamo scrivere che

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k-1=\frac{1}{1-3/5}-1=\frac{3}{2}.$$

□

Esercizio 44 *Usando solo la definizione di limite e l'assioma di Archimede verificare che*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n^2}{n^2}=-1.$$

Soluzione. La definizione di limite dice che $\forall \varepsilon > 0$ deve esistere un indice n_ε tale che

$$\left| \frac{1-n^2}{n^2} - (-1) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

La quantità dentro il modulo è sempre positiva, per cui si riduce alla disequazione

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

tale relazione equivale a

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

che è soddisfatta da tutti i naturali più grandi di $\varepsilon^{-1/2}$, tale insieme è non vuoto (anzi composto di infiniti numeri) per il principio di Archimede! In particolare possiamo trovare che

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1 \in \mathbb{N},$$

dove le parentesi quadrate indicano la parte intera del numero reale all'interno.
□

Esercizio 45 *Verificare che le successioni $a_n = n^2 - e^{-n}$ e $b_n = n^2 + e^{-n}$ sono strettamente crescenti e determinarne l'estremo superiore.*

Soluzione. Una successione si dice strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ per ogni indice n, quindi dobbiamo dimostrare che vale la disuguaglianza precedente, cioè dobbiamo provare che

$$n^2 - e^{-n} < (n+1)^2 - e^{-(n+1)},$$

che equivale a

$$n^2 - e^{-n} < n^2 + 2n + 1 - e^{-(n+1)},$$

$$e^{-n}(e^{-1} - 1) < 2n + 1,$$

e la relazione è provata, visto che il termine $(e^{-1} - 1)$ è negativo e l'ultima disuguaglianza risulta evidente.
Per la successione b_n il punto di partenza è

$$n^2 + e^{-n} < (n+1)^2 + e^{-(n+1)},$$

cioè

$$n^2 + e^{-n} < n^2 + 2n + 1 + e^{-(n+1)},$$

$$e^{-n}(1 - e^{-1}) < 2n + 1.$$

Notiamo che $0 < e^{-n} \leq 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e che $0 < (1 - e^{-1}) < 1$, quindi il loro prodotto è un numero positivo e minore di 1 per cui la disuguaglianza che desideravamo provare è sicuramente vera!
□

Esercizio 46 *Sia f la funzione definita come segue*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dire perché f è continua in $\mathbb{R}$ e calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Verificare che f è crescente in $I = [0, +\infty)$ e determinare $\inf f(I)$ *e* $\sup f(I)$.
Dire se è vero che l'insieme immagine $f(I)$ è l'intervallo $[\min f(I), \sup f(I))$*, motivando la risposta.*

Soluzione. A lezione abbiamo provato che la somma e il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue, il che prova ch tutti i polinomi sono delle funzioni continue in tutto l'asse, inoltre il quoziente di due funzioni continue è una funzione continua in tutti i punti in cui la funzione a denominatore è diversa da 0, quindi, poiché $x^2+1 \neq 0\; forall x \in \mathbb{R}$, f è una funzione continua in $\mathbb{R}$. Notiamo anche che f è pari (la variabile compare sempre elevata alla seconda potenza), quindi i due limiti richiesti devono essere uguali e valgono

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - x^{-2})}{x^2(1 + x^{-2})} = 1.$$

Osserviamo subito che f è pari, per cui non è possibile che sia crescente su tutto l'asse (provarlo!), però il testo ci chiede di provare la monotonia della funzione solo nella semiretta chiusa I, siano quindi $x, y \in I$ e ricordiamo che i denominatori sono positivi:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$$

$$(x^2 - 1)(y^2 + 1) < (y^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$x^2 - y^2 < y^2 - x^2$$

$$2x^2 < 2y^2,$$

l'ultima relazione è vera in I se e soltanto se $x < y$, il che prova la monotonia della funzione nella semiretta.
Abbiamo mostrato sopra che f è crescente in I, cioè $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. Questo significa che $f(x) > f(0)$, per ogni x, ovvero $\inf_I f = \min_I f = f(0) = -1$. Per quanto riguarda l'estremo superiore dell'insieme immagine, sempre ricordando che la funzione è crescente, abbiamo che $f(x) < f(y)$ se $x < y$, passando al limite per $y \to +\infty$ otteniamo che per ogni $x \in I$ vale

$$f(x) < \sup_I f = \lim_{y\to+\infty} f(y) = 1,$$

ovviamente tale estremo non è un massimo, perché non esiste alcun $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = 1$.
Concludiamo l'esercizio osservando che $f(I) = [\min f(I), \sup f(I))$, perché la funzione è continua e per ogni $\lambda \in (-1, 1)$ possiamo risolvere l'equazione $f(x) = \lambda$ per il teorema dei valori intermedi (scrivere per esteso!) e abbiamo già notato che $f(0) = 0$.
□

7 Ancora sulle funzioni continue

Esercizio 47 *Sia* $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = e^{x^3}$. *Determinare (ovviamente giustificando la risposta)*

$$\inf_{x\in[-1,2]} f(x), \qquad \sup_{x\in[-1,2]} f(x), \qquad f([-1,2]).$$

Soluzione. Osserviamo subito che la funzione è composizione di x^3 e e^x, che sono due funzioni continue e crescenti in $\mathbb{R}$, per cui la nostra f è una funzione continua e crescente nel suo dominio di definizione. A causa delle sue proprietà di monotonia possiamo affermare che $\inf_{[-1,2]} f = f(-1) = 1/e$ e $\sup_{[-1,2]} f = f(2) = e^8$, inoltre, a causa della continuità, l'insieme immagine dell'intervallo sarà l'intervallo chiuso e limitato avente per estremi i valori già trovati $f([-1,2]) = [1/e, e^8]$.
□

Esercizio 48 *Determinare gli estremi superiore ed inferiore della funzione*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

E' vero che l'insieme immagine di f coincide con l'intervallo $(\inf f, \sup f)$*?*

Soluzione. Il dominio massimale della funzione è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e mancando diverse indicazioni nel testo è il dominio della f. Osserviamo subito che per $x > 0$ vale $f(x) > x$, da cui discende facilmente che $\sup f = +\infty$, analogamente possiamo dedurre che $\inf f = -\infty$.
Per quanto riguarda la seconda questione la isposta non è così immediata come si potrebbe pensare, infatti è facile osservare che non esistono soluzioni all'equazione $f(x) = 0$, quindi non è vero che l'insieme immagine di f è $\mathbb{R}$. Studiando l'equazione $f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ si giunge all'equazione di secondo grado

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0,$$

ed è facile vedere che il discriminante dell'equazione è non negativo se e soltanto se $\lambda^2 \geq 4$, quindi esistono soluzioni se e soltanto se $|\lambda| \geq 2$, questo implica che l'insieme immagine di f è $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
□

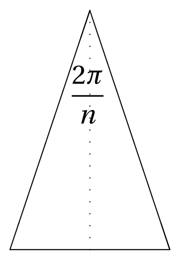
Esercizio 49 *Consideriamo un poligono regolare con n lati inscritto in una circonferenza di raggio $R > 0$.*

(i) Calcolare il valore a_n dell'area di tale $n-$agono;

(ii) calcolare il limite per $n \to +\infty$ di a_n.

(**Suggerimento.** *Il poligono regolare può essere decomposto in n triangoli isosceli con un vertice nel certo della circonferenza e lati uguali di lunghezza R...)*

Soluzione. Cominciamo disegnando uno dei triangoli isosceli aventi come base uno dei lati del n-gono regolare e come altezza l'apotema della figura.



A questo punto usiamo un po' di trigonometria per calcolare l'area del triangolo. Osserviamo che possiamo vedere il triangolo come due triangoli rettangoli accostati per uno dei cateti. Ognuno dei due triangoli rettangoli ha ipotenusa lunga R, quindi i due cateti misurano, rispettivamente $R\sin(\pi/n)/2$ e $R\cos(\pi/n)/2$, visto che l'angolo al vertice misura π/n. Considerando che abbiamo $2n$ triangoli rettangoli che formano il poligono, abbiamo che l'area dell'n-gono vale

$$a_n = 2n\frac{R^2}{2}\cos(\pi/n)\sin(\pi/n) = \frac{n}{2}R^2\sin(2\pi/n),$$

questo esaurisce il primo punto dell'esercizio.
Per terminare osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}R^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi R^2,$$

ricordando i limiti notevoli studiati.
□

8 Andiam, andiam, andiamo a derivar...

Esercizio 50 *(i) Dimostrare che la funzione* $|\sin x|$ *non è derivabile in* $x = 0$.
(ii) Dimostrare che la funzione $|x \sin x|$ *è derivabile in* $x = 0$.
(iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $x = 0$ *e tale che* $f(0) = 0$. *Dimostrare che*

$$|f(x)| \text{ derivabile in } x = 0 \iff f'(0) = 0$$

Soluzione. Per la definizione di derivata dobbiamo provare che non esiste il limite del rapporto incrementale della funzione nel punto $x = 0$. Possiamo scrivere il rapporto in questione così

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\sin(h) - \sin(0)|}{h} = \lim_{h\to 0} \left|\frac{\sin(h)}{h}\right| \frac{|h|}{h},$$

ed è evidente che il limite per $h \to 0^+$ vale 1, mentre il limite sinistro vale -1.
La seconda funzione si comporta diversamente a causa del termine x che moltiplica la funzione $\sin x$ dentro il valore assoluto, infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h \sin(h)|}{h} = \lim_{h\to 0} |\sin(h)| \frac{|h|}{h} = 0,$$

ed il limite vale 0, perché abbiamo a che fare con il limite di un prodotto di una funzione infinitesima per una funzione limitata.
La terza parte dell'esercizio ci chiede di generalizzare il punto precedente. Procediamo come sopra scrivendo il rapporto incrementale come abbiamo fatto prima, così abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h)|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|f(h)|}{|h|} \frac{|h|}{h},$$

ed è chiaro che il limite esiste se e soltanto se la prima frazione ammette limite nullo (cioè f è derivabile in 0 ed ha derivata nulla), visto che la funzione modulo ha il rapporto incrementale limitato ma non convergente.
□

Esercizio 51 *(i) Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pari e derivabile in* 0. *Dimostrare che* $f'(0) = 0$.
(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pari, derivabile in* $\mathbb{R}$. *Dimostrare che* f' *è dispari.*

Soluzione. (i) Per definizione una funzione è pari se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi possiamo scrivere che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-h) - f(0)}{-h},$$

dove i due limiti sono rispettivamente il limite destro e sinistro del rapporto incrementale (il secondo scritto con un po' di originalità...), poiché la funzione è pari abbiamo anche che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{-h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-h) - f(0)}{h} = -f'(0),$$

quindi abbiamo provato che $f'(0) = -f'(0)$, da cui, risolvendo una semplice equazione di primo grado, segue $f'(0) = 0$!

(ii) Sempre ricorrendo alla definizione di funzione pari, segue che

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x_0-h)-f(-x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{f(-x_0-h)-f(-x_0)}{-h} = -\lim_{t\to 0} \frac{f(-x_0+t)-f(-x_0)}{t} = -f'(-x_0),$$

come volevasi dmostrare.

□

Esercizio 52 *(i) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *in* $(x_0, f(x_0))$*, al variare di* $x_0 \in (-1,1)$*.*
(ii) Dire per quali x_0 *tale retta tangente è orizzontale e per quali è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.*
(iii) Determinare la posizione limite della retta tangente per $x_0 \to 1$ *e dare un'interpretazione del risultato.*

Soluzione. Dalla teoria sappiamo che la unione che descrive la retta tangente al grafico di una funzione derivabile in un suo punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$ è $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, applicando al formula al nostro caso otteniamo

$$\frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}(x-x_0) + \sqrt{1-x_0^2}, \quad x_0 \in (-1,1).$$

Per rispondere al punto (ii) dobbiamo semplicemente risolvere alcune equazioni, ovvero calcolare i punti dell'intervallo in cui la derivata di f vale 0 e 1 visto che la condizione di parallelismo per le rette si traduce nell'ugualianza dei coefficienti angolari delle rette. Dunque

$$\frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = 0 \Rightarrow x_0 = 0, \quad \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(iii) Osserviamo subito che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x_0^2} = 0,$$

quindi al limite l'espressione della retta perde significato. Questo perché la funzione descrive una semicirconferenza e nel punto di coordinate $(1,0)$ la tangente è una retta verticale, che non è una funzione!

□

Esercizio 53 *Utilizzare la formula di derivazione di funzione composta per calcolare la derivata prima di*

$$\exp(\exp x), \quad \ln(\ln(1+x^2)), \quad \cos(\sin x), \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

(qui $\exp t := e^t$*).*

Soluzione. Procediamo rapidamente senza perderci in chiacchiere...

$$\big(\exp(\exp x)\big)' = \exp(\exp x))\exp x, \qquad \ln(\ln(1+x^2))' = \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)},$$

$$\cos(\sin x)' = -\sin(\sin x)\cos x,$$

$$\left(\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2} = 0.$$

□

Esercizio 54 *Calcolare la derivata centoquarantesima delle seguenti funzioni:*

$$x e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad p(x) \quad \textit{polinomio di grado 142.}$$

Soluzione. Sperando che nessuno cominci a derivare e derivare, usiamo la testa e ragioniamo. Osservato che ogni derivata fa scendere di 1 il grado di un polinomio possiamo subito concludere

$$x^{(142)} = 0, \quad p^{(142)}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Per quanto riguarda le funzioni trascendenti sappiamo che la derivazione equivale all'identità per la funzione esponenziale e che la derivata quarta è l'identità per le funzioni trionometriche semplici, quindi

$$\big(e^x\big)^{(142)} = e^x, \quad (\sin x)^{(142)} = (\sin x)'' = -\sin x, \quad (\cos x)^{(142)} = (\cos x)'' = -\cos x.$$

□

Esercizio 55 *(i) Per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, scrivere la tesi del Teorema di Lagrange per la funzione e^x nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.*
(ii) Usare le formule ottenute in (i) per ottenere, per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, una stima di e per eccesso ed una per difetto .
(iii) Tramite la calcolatrice, determinare esplicitamente il valore delle stime in (ii) per $n = 2, 4$ e 6 e confrontare il risultato con la stima per difetto

$$e \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Soluzione. (i) Applicando il Teorema di Lagrange come richiesto otteniamo, per ogni naturale non nullo, la relazione

$$e^{1/n} - e^0 = \frac{e^{\xi_n}}{n}, \quad \xi_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

(ii) La precedente relazione equivale a scrivere

$$e = \left[\frac{e^{\xi_n}}{n} + 1\right]^n, \quad 0 \leq \xi_n \leq 1/n,$$

poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente vale allora che $1 = e^0 \le e^{\xi_n} \le e^{1/n} < 3$, quindi otteniamo le seguenti stime del numero e

$$\left[\frac{1}{n}+1\right]^n < e < \left[\frac{3}{n}+1\right]^n.$$

□

Esercizio 56 *Utilizzando il Teorema di Lagrange, dimostrare*

$$|\cos x - \cos y| \le |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$|\cos^2 x - \cos^2 y| \le 2|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$|\cos^n x - \cos^n y| \le n|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Grazie al Teorema di Lagrange possiamo scrivere che, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$|\cos x - \cos y| \le |\sin(\xi)||x-y|,$$

per un certo $\xi \in (x, y)$ (o viceversa...), ricordando che $\cos(x)' = -\sin(x)$. La prima affermazione segue osservando che la funzione sin è limitata (e minore di 1) su tutta la retta reale. In modo anaologo possiamo provare le altre disuguaglianze, l'unica difficoltà sta nel calcolare la seguente derivata

$$\left(\cos^n(x)\right)' = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

□

Esercizio 57 *Sia* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u(x) = e^{\lambda x}$.
(i) Dati $a, b \in \mathbb{R}$*, calcolare*

$$\mathscr{L}\, u := u'' + au' + bu.$$

(ii) Dire per quali scelte di $a, b \in \mathbb{R}$*, è possibile trovare* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che la funzione* $\mathscr{L}\, u$ *è nulla.*

Soluzione. Applicando la formula della derivata di una funzione composta e raccogliendo a fattor comune si ottiene

$$\mathscr{L}\, u = [\lambda^2 + a\lambda + b]e^{\lambda x},$$

a questo punto basta osservare che la funzione esponenziale è sempre positiva per convincersi che $\mathscr{L}\, u = 0$, significa che

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2},$$

e che è necessario imporre la condizione $a^2 - 4b \ge 0$ per avere $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Esercizio 58 *Sia $\mu \in \mathbb{R}$ e $u(x) = \cos(\mu x) + \sin(\mu x)$.*
(i) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\mathscr{L}\, u := u'' + au' + bu.$$

(ii) Dire per quali scelte di $a, b \in \mathbb{R}$, è possibile trovare $\mu \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $\mathscr{L}\, u$ è nulla.

Soluzione. Come nell'esercizio precedente calcoliamo l'espressione richiesta con alcuni facili coalcoli e abbiamo

$$\mathscr{L}\, u = [-\mu^2 + a\mu + b]\cos(\mu x) + [-\mu^2 - a\mu + b]\sin(\mu x).$$

Affinché la precedente espressione sia nulla per ogni $x \in \mathbb{R}$, devono essere nulle entrambe le quantità contenute nelle parentesi quadre. Questo implica che

$$\mu = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

e le due richieste devono essere soddisfatte simultaneamente per opportuni valori delle costanti a e b. Uguagliando le due espressioni e portando le radici allo stesso membro abbiamo la seguente alternativa

$$2a = \begin{cases} 0 \\ \pm 2\sqrt{a^2 - 4b} \end{cases},$$

a seconda che le radici siano considerate con segno opposto o meno. La prima alternativa implica immediatamente che $a = 0$, mentre non ci sono richieste per b, però dobbiamo imporre che $b \le 0$, visto che vogliamo che μ sia un numero reale! Nel secondo caso, procedendo in maniera analoga, si ottiene $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$.
□

Esercizio 59 *Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei corrispondenti intervalli*

$$x^3 + x \text{ in } [2,3], \quad e^{-x^2} \text{ in } [-1,3], \quad \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ in } [0,2].$$

Esercizio 60 *Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sia*

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

Determinare x in modo che Q sia minima.

Soluzione. Osserviamo subito che $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$, essendo Q una funzione quadratica, e questo è sufficiente per garantire l'esistenza del minimo che cerchiamo. A questo punto cominciamo a derivare e, ricordando che la derivata è un operatore lineare, troviamo

$$Q'(x) = 2\sum_{k=1}^{n} (x - a_k) = 2\left[nx - \sum_{k=1}^{n} a_k \right],$$

quindi esiste un unico zero della derivata che è il numero

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

tale valore (la media aritmetica dei valori a_k!) è necessariamente l'unico punto di minimo della funzione Q.
$\square$

Esercizio 61 *Un taglialegna genovese vi chiede consiglio per tagliare, da un tronco di legno che ha per sezione un cerchio di diametro d, una trave di sezione rettangolare: "Quali debbono essere la larghezza e l'altezza della sezione, in modo da sfruttare la maggior quantità di legno possibile?"*

9 Proprietà globali e locali

Esercizio 62 *Dire dove sono definite, dove sono continue e dove sono derivabili le seguenti funzioni*

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}, \quad \sqrt{|x|}, \quad \sqrt{x^2-1}.$$

Dove esistono, scriverne le derivate prime.

Soluzione. La funzione $1/x$ ha come dominio di definizione massimale l'insieme $\{x \neq 0\}$, in questo insieme la funzione è continua e derivabile (perché è il reciproco di una funzione continua e derivabile non nulla). La derivata della funzione è

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$$

La funzione $\sqrt{|x|}$ è definita su tutto l'asse reale ed è continua in tutto $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue. Riguardo alla derivabilità notiamo che

$$\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

ricordando il significato di valore assoluto. Allora derivando le due leggi abbiamo

$$\left(\sqrt{|x|}\right)' = \begin{cases} 1/2\sqrt{x} & x > 0 \\ -1/2\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

siccome le due leggi non tendono allo stesso valore per x che tende a zero la funzione non può essere derivabile nell'origine.
□

Esercizio 63 *Calcolare estremo inferiore ed estremo superiore (e, quando esistono, massimo e minimo) per le seguenti funzioni considerate in $I = \mathbb{R}$:*

$$x^2(x^2+1), \quad (x+2)^2(x-1)^2, \quad e^{x^4}, \quad \ln(1+x^2).$$

Ripetere l'esercizio nel caso in cui le funzioni si considerino in $I = [0,1]$.

Soluzione. Chiaramente tutte le funzioni sono continue, derivabili e definite sull'intero asse reale, e quindi anche sull'intervallo $[0,1]$.
Cominciamo studiando la funzione $x^2(x^2+1)$, poiché $\mathbb{R}$ è un intervallo non limitato studiamo il comportamento dalla funzione per valori molto grandi o molto piccoli della variabile

$$\lim_{x\longrightarrow +infty} x^2(x^2+1) = \lim_{x\longrightarrow +infty} (x^4+x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -infty} x^2(x^2+1) = \lim_{x\longrightarrow -infty} (x^4+x^2) = +\infty$$

questo significa che la funzione assume valori arbitrariamente grandi, cioè che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2(x^2+1) = +\infty$$

e che non esiste il massimo della funzione. Il fatto che la funzione sia superiormente illimitata per valori molto grandi e piccoli di $\mathbb{R}$, implica l'esistenza di un minimo assoluto (anche estremo inferiore), tale minimo deve essere un punto stazionario e quindi può essere identificato grazie allo studio della derivata prima

$$\big(x^2(x^2+1)\big)' = 2x\cdot(x^2+1) + x^2\cdot 2x = 2x(2x^2+1) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0$$

essendoci un solo punto stazionario deve essere $x = 0$ un punto di minimo assoluto e il valore di minimo è $0^2(0^2+1) = 0$.
Ragionando nell'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$ sappiamo che, per il teorema di Weierstrass, deve esistere il massimo e minimo assoluto della funzione (che coincidono, rispettivamente, con estremo superiore ed inferiore). abbiamo già trovato il minimo assoluto in tutto $\mathbb{R}$ e siccome il punto di minimo è $x = 0$ che appartiene all'intervallo $[0,1]$ anche in questo intervallo abbiamo che il minimo è 0 ed è assunto in $x = 0$. Il discorso è differente per quanto riguarda il massimo: non essendoci altri punti stazionari tale valore deve essere assunto dove la funzione non è derivabile o in uno dei due estremi dell'intervallo. In questo caso non abbiamo punti in cui la funzione non è derivabile, e l'estremo $x = 0$ è punto di minimo, quindi $x = 1$ deve forzatamente essere punto di massimo di valore $1^2(1^2+1) = 2$.
□

Esercizio 64 *Studiare il grafico delle seguenti funzioni:*

$$1 - e^{-x} \text{ in } (0,+\infty), \quad x(1-e^{-x}) \text{ in } (0,+\infty), \quad x^2 e^{-|x|} \text{ in } \mathbb{R}.$$

Esercizio 65 *Disegnare il grafico della funzione*

$$f(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \quad r > 0.$$

Quanto valgono estremo superiore ed estremo inferiore di f in $(0,+\infty)$?

Esercizio 66 *Sia $f(x) = x^3 + 2x + 1$.*
(i) Dimostrare che f è invertibile.
(ii) Indicata con g la funzione inversa di f, calcolare $g'(1)$.

Soluzione. La prima questione è abbastanza facile, ricordando che i quadrati non sono ai negativi, vale che

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2$$

e dal teorema di Lagrange segue che la funzione è strettamente crescente, e quindi invertibile, su tutto $\mathbb{R}$, inoltre si noti che

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$$

per cui la funzione inversa g ha dominio l'intervallo $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Il calcolo della derivata $g'(1)$ è legato alla formula di derivazione delle funzioni inverse, in particolare vale che

$$g'(1) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{con } x_0 \quad \text{tale che } f(x_0) = 1$$

Siccome vale che

$$f(0) = 1 \quad \text{cioè} \quad x_0 = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 2$$

abbiamo che $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.
□

Esercizio 67 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Provare che l'equazione $x^4 + ax + b = 0$ ha al più due radici reali.*

Soluzione. Osserviamo subito che

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x^4 + ax + b = +\infty$$

visto che il termine dominante è, in entrambi i casi, x^4, questo significa che la funzione è superiormente illimitata e non ha massimo. È facile calcolare le derivate della funzione

$$\left(x^4 + ax + b\right)' = 4x^3 + a \qquad \left(x^4 + ax + b\right)'' = 12x^2$$

queste ci dicono che la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$ e che possiede un unico punto stazionario $x_0 = (-a/4)^{1/3}$, il quale è un punto di minimo assoluto. Si noti che la derivata ha un solo zero, quindi in $(-\infty, x_0)$ la funzione è strettamente decrescente mentre in $(x_0, +\infty$ è strettamente crescente.
Allora se il valore di minimo è negativo abbiamo che esistono due radici distinte x_1, x_2 (con $x_1 < x_0 < x_2$) per il teorema di esistenza degli zeri, se il valore di minimo è nullo abbiamo una sola radice, mentre se il minimo è positivo la funzione non si annulla mai.
□

Esercizio 68 *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$ tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:*
(i) $f'(0) \geq 0$;
(ii) esiste $x \in (0,1)$ tale che $f'(x) = 2$;
(iii) f è invertibile in $[0,1]$;
(iv) f è non negativa in $[0,1]$.

Soluzione. Cominciamo osservando che non sappiamo se la funzione è derivabile in 0, tanto meno possiamo dire qualcosa sul segno di tale derivata, quindi (i) è falsa, per esempio basti pensare alla funzione $2\sqrt{x}$.
(ii) è vera per il teorema di Lagrange, infatti le ipotesi del teorema sono soddisfatte e la tesi ci dice che esiste $x \in (0,1)$ tale

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

(iii) è falsa, visto che le sole ipotesi non sono sufficienti a garantire l'invertibilità della funzione, infatti la funzione $2\sin(5\pi x/2)$ verifica tutte le ipotesi pur non essendo invertibile. Tale funzione è un controesempio anche a (iv), che è quindi ugualmente falsa.
□

Esercizio 69 *Dimostrare le seguenti disuguaglianze:*

$$x \le \tan(x) \ per \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ln(1+x) < x \ per \ x \in (0,+\infty).$$

Soluzione. Spesso dimostrare disuguaglianze può essere ricondotto allo studio di alcune proprietà di una funzione, per esempio

$$\ln(1+x) < x \text{ per } x \in (0,+\infty)$$

equivale a provare che

$$\phi(x) = x - \ln(1+x) > 0 \text{ per } x \in (0,+\infty)$$

Notiamo subito che

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \phi(x) = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty$$

siccome ϕ è derivabile studiamo la sua derivata prima

$$\phi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \ge 0$$

da quanto scritto abbiamo che la funzione è monotona crescente, per cui tende al suo estremo inferiore per x che tende a 0, siccome il limite calcolato sopra ci dice che la funzione è infinitesima per $x \longrightarrow 0^+$, segue la disuguaglianza.
□

Esercizio 70 *Disegnare il grafico della funzione* $|x|^\alpha$ *al variare di* $\alpha \ge 0$. *Per quali* α, *la funzione* $|x|^\alpha$ *è convessa?*

Esercizio 71 *(i) Calcolare le derivate prime delle funzioni*

$$arctg(e^x), \quad \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.$$

Dire se la funzione $|x^2 - x|$ *è derivabile in* $x = 1$ *e se è derivabile in* $x = 2$.
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $\sin(x)$ *nel punto* $(1, \sin(1))$.
(ii) Trovare $L > 0$ *tale che*

$$\left|arctg(x) - arctg(y)\right| \le L|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dimostrare che

$$e^{-x^2} \ge 1 - x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

10 Polinomio di Taylor e altre amenità

Esercizio 72 *Sia $I = (a, b)$ e $f \in C^\infty(I)$ tale che $f'(x) = e^{-f(x)}$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che f è strettamente decrescente in I e concava in I.*

Soluzione. Osserviamo che l'esponenziale e f sono due funzioni derivabili infinite volte, per cui la loro composizione è una funzione derivabile quante volte si vuole, quindi possiamo calcolarci le sue derivate. Le proprietà di monotonia di f possono essere dedotte dell'equazione, infatti

$$f'(x) = e^{-f(x)} > 0 \qquad \forall x \in I$$

Ricordando la formula di derivazione delle funzioni composte e ancora l'equazione $f' = e^{-f}$ otteniamo

$$f''(x) = \left(e^{-f(x)}\right)' = -f'(x)e^{-f(x)} = -e^{-2f(x)} < 0 \forall x \in I$$

ricordando che la funzione esponenziale è sempre positiva. L'ultima disuguaglianza prova che la funzione è concava

□

Esercizio 73 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e tale che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. *Provare che $f(x) \geq \ell$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quali funzioni convesse hanno asintoti orizzontali sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$?*

Esercizio 74 *Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \longrightarrow 0$ delle funzioni*

$$x - x\cos(x), \quad \ln(1 + x), \quad x^2 e^x, \quad x\ln(x).$$

Soluzione. Ricordando i seguenti sviluppi di Taylor studiati a lezione

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \qquad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

abbiamo che

$$x - x\cos(x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \ln(1 + x) = x + o(x) \qquad x^2 e^x = x^2 + o(x^2) \qquad x\ln(x) = o(1)$$

□

Esercizio 75 *Trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^n} = C \neq 0.$$

Esercizio 76 *Verificare le seguenti espressioni per $x \to 0$ ($\alpha, \beta > 0$):*

$$x^\alpha\, o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}), \quad o(x^\alpha)\, o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}), \quad \left(1 + x + o(x)\right)^2 = 1 + 2x + o(x).$$

Esercizio 77 *Scrivere il polinomio di Taylor di grado* 2 *e* 3 *in* x_0 *della funzione* f *per i seguenti casi*

$$\begin{array}{lll} f(x) = 1 + 2x + x^2 - 4x^3, & n = 2, & x_0 = 1, \\ f(x) = \sin^2(x), & n = 4, & x_0 = 0, \\ f(x) = \sqrt{1 + x^2}, & n = 3, & x_0 = 0, \\ f(x) = \exp(-x^2), & n = 5, & x_0 = 0, \\ f(x) = x^x, & n = 2, & x_0 = 1. \end{array}$$

Soluzione. Per calcolare un polinomio di Taylor a volte è necessario calcolare alcune derivate e ricordare l'espressione del polinomio

$$T_n^f(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

per esempio nel primo caso abbiamo che

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - 4x^3 \qquad f'(x) = 2 + 2x - 12x^2 \qquad f''(x) = 2 - 24x$$

da cui

$$T_2^f(x, 1) = 1 + 2(x - 1) + \frac{2}{2}(x - 1)^2 = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2$$

In altri casi è sufficiente ricordare lo sviluppo di altre funzioni, per esempio dallo sviluppo

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

abbiamo che

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \ldots$$

da cui

$$T_2^f(x, 0) = x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

□

Esercizio 78 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)\cosh(x)}{x^4}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1 - \sin(3x)}{1 - \cos(2x)}.$$

Soluzione. L'uso del polinomio di Taylor permette, anche se non sempre, di risolvere alcune forme indeterminate. Per esempio calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x)}$$

Ricordando che

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

abbiamo che

$$\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1+x+x^2/2+x^3/6-1+x^2/2-x^4/24}{x-x^3/6}=\frac{x+x^2+x^3/6}{x}\longrightarrow 1$$

dove abbiamo trascurato tutti i termini ininfluenti.
Procedendo in maniera simile abbiamo che

$$\frac{1-\cos(x)\cosh(x)}{x^4}=\frac{1-(1-x^2/2+x^4/24)(1+x^2/2+x^4/24)}{x^4}=\frac{x^4/4-x^4/12+x^8/576}{x^4}$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cosh(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{x^4}{576}\right)=\frac{1}{6}$$

□

Esercizio 79 *(i) Verificare che* $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ *per ogni* $x\in\mathbb{R}$ *dove*

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

(ii) Provare che $(\sinh(x))'=\cosh(x)$ *e* $(\cosh(x))'=\sinh(x)$.
(iii) Scrivere il polinomio di Taylor T_n *di grado* n *in* 0 *di* $\sinh$ *per* $n=3$ *e* 4.
(iv) Dire per quali $n\in\mathbb{N}$, *la quantità*

$$\left|\sinh\left(\frac{1}{10}\right)-T_n\left(\frac{1}{10}\right)\right|$$

è minore di 10^{-6}.

Esercizio 80 *(i) Per* $n\in\mathbb{N}$, *scrivere il polinomio di Taylor* T_n *di* $\cos(x)$ *in* $x_0=0$. *Dire per quali* $x\in\mathbb{R}$, *vale* $\lim_{n\to+\infty}(\cos(x)-T_n(x))=0$.
(ii) Per $n\in\mathbb{N}$, *scrivere il polinomio di Taylor* T_n *di* $\dfrac{1}{1-x}$ *in* $x_0=0$. *Dire per quali* $x\in\mathbb{R}$, *vale*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-x}-T_n(x)\right)=0.$$

Corrado Mascia
Dipartimento di Matematica
Sapienza università di Roma
`www.mat.uniroma1.it/people/mascia`

Eugenio Montefusco
Dipartimento di Matematica
Sapienza università di Roma
`www.mat.uniroma1.it/people/montefusco`