*Cognome*______________________________

Informatica teledidattica 2023/2024 *Nome*______________________________
Scritto di ALGEBRA del 18/04/2024

L'esame ha la durata di due ore. Rispondere negli spazi predisposti e giustificare le risposte in modo chiaro ed esauriente. Risposte non giustificate non saranno accreditate.

****

Esercizio 1.

(**a**) Si calcoli il resto della divisione per 11 del numero $77777^{98765432}$.

(**b**) Sia n un numero dispari positivo maggiore o uguale a 3. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}_n$ i cui elementi sono $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$. Dimostrare che la somma di tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_n$ è pari a $\bar{0}$.

(**c**) Ricordo che risolvere una congruenza lineare della forma $aX \equiv b \pmod{n}$ consiste nell'elencare tutte le soluzioni modulo n a due a due incongrue modulo n. Dunque, in generale, una siffatta congruenza può avere più di una soluzione modulo n e risolvere la congruenza significa elencare tutte tali soluzioni modulo n. Questo detto, si risolvano le congruenze

$$15X \equiv 4 \pmod{133} \quad \text{e} \quad 1288X \equiv 21 \pmod{1575}.$$

Esercizio 2.

(**a**) Siano $E = \langle u \rangle$ ed $F = \langle v, w \rangle$ i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ generati rispettivamente dai vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in E$ e $f(x) = 0$ per ogni $x \in F$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, calcolare ua base di autovettori per f.

(**b**) Stabilire, motivando la risposta, quali dei seguenti insiemi sono spazi vettoriali:

(i) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$, (ii) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right),\ a, b \in \mathbb{R}\}$, (iii) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ |x \geq 0 \right\}$,
(iv) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \ |A = (a_{i,j}),\ a_{1,2} = 0\}$.

(**c**) Determinare un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ tale che F abbia dimensione 3 ed F contenga il sottospazio

$$E = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$