UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

# Algebra

Alessandro D'Andrea

## 21. Combinazioni lineari

# Richiami



- I fenomeni lineari sono descritti da applicazioni lineari tra spazi vettoriali
- L'iniettività di un'applicazione lineare è controllata dal suo nucleo.
- Il calcolo del nucleo di un'applicazione lineare $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si traduce nella risoluzione di un sistema lineare omogeneo
- Oggi: **Calcolo dell'immagine di un'applicazione lineare $K^m \to K^n$ a partire dalla sua matrice**
- **Dipendenza e indipendenza lineare. Generatori di sottospazi vettoriali**

# Combinazioni lineari - I

Se $V$ è uno spazio vettoriale (su campo $K$), un sottoinsieme $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale quando

- $0 \in U$;
- se $u \in U$, allora $\lambda u \in U$ per ogni scelta di $\lambda \in K$;
- se $u, u' \in U$, allora $u + u' \in U$.

Se di un sottospazio vettoriale $U$ conosciamo solo due elementi $u_1, u_2$, quali altri elementi appartengono ad $U$?

- Sicuramente sia i multipli di $u_1$ che i multipli di $u_2$
- Quindi anche le somme di multipli di $u_1$ e di multipli di $u_2$
- Gli elementi della forma $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, dove $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, sono tutti in $U$, e ne formano un sottospazio vettoriale.

Gli elementi di questa forma sono detti combinazioni lineari di $u_1$ e $u_2$.

# Combinazioni lineari - II

Se $u_1, \ldots, u_n$ sono elementi di uno spazio vettoriale $V$, allora ogni elemento della forma

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

è detto combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_n$. Se un sottospazio vettoriale $U \subset V$ contiene gli elementi $u_1, \ldots, u_n$, allora deve contenere ogni loro combinazione lineare.

- La somma di combinazioni lineari di $u_1, \ldots, u_n$ è ancora una combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_n$.
  - $(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) = (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) u_n$.
- Ogni multiplo di una combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_n$ è ancora una combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_n$.
  - $\lambda(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = (\lambda\alpha_1) u_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n) u_n$.
- $0 = 0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_n$ è una combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_n$.

L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $u_i, \ldots, u_n$ costituisce un sottospazio vettoriale di $V$.

# Generatori di sottospazi

Se $U_1, U_2 \subset V$ sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $V$, allora anche la loro intersezione $U_1 \cap U_2$ è un sottospazio vettoriale. *[E' facile, e si spiega facilmente!]*

Se $X$ è un sottoinsieme di $V$, l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali che contengono $X$ è ancora un sottospazio vettoriale, e continua a contenere $X$: è il più piccolo sottospazio vettoriale di $V$ che contiene $X$.

Tale sottospazio vettoriale si chiama sottospazio vettoriale generato da $X$ e si indica col simbolo $\langle X \rangle$.

- Come sono fatti gli elementi che appartengono a $\langle X \rangle$?

# Sottospazio generato da $X \subset V$



- Sicuramente ogni elemento di $X$ è un elemento di $\langle X \rangle$.
- Ogni multiplo di un elemento di $X$ appartiene a $\langle X \rangle$.
- Ogni combinazione lineare di (un numero finito di) elementi di $X$ appartiene a $\langle X \rangle$.

L'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $X$ è un sottospazio vettoriale di $V$, e quindi coincide con $\langle X \rangle$.

**Esempi**:

- Il sottospazio vettoriale generato da un singolo elemento $u \in V$ è l'insieme $Ku$ dei suoi multipli. E' una retta se $u \neq 0$, ed è $\{0\}$ se $u = 0$.
- Il sottospazio vettoriale generato da due vettori $u, v$ è l'insieme delle loro combinazioni lineari. E' $\{0\}$ se entrambi i vettori sono nulli; è una retta se esattamente uno dei vettori è 0 oppure sono uno multiplo dell'altro; è un piano altrimenti.

# Immagine di un'appl. lineare



Abbiamo già visto (nel caso $K = \mathbb{R}$) che se $T : K^m \to K^n$ è lineare, allora

$$T(x_1, \ldots, x_m) = x_1 T(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_m T(0, \ldots, 0, 1).$$

L'immagine di $T$ è il sottospazio vettoriale di $K^n$ formato da tutti i valori assunti da $T$, al variare dei suoi argomenti.

L'immagine di $T$ è quindi l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $T(1, 0, \ldots, 0), \ldots, T(0, \ldots, 0, 1)$.

L'immagine di $T$ è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $T(1, 0, \ldots, 0), \ldots, T(0, \ldots, 0, 1)$.

In termini della matrice associata a $T$, l'immagine di $T$ è il sottospazio vettoriale di $K^n$ generato dalle colonne della matrice di $T$.

# Un esempio

Consideriamo nuovamente l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Allora l'immagine di $T$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generato dai vettori $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(-3, 5)$.

D'accordo: **ma di quale sottospazio si tratta?**

Nel caso specifico, sappiamo (senza averlo davvero dimostrato) che i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono: $\{0\}$, le rette per l'origine, tutto $\mathbb{R}^2$. In questo caso il sottospazio contiene elementi non nulli, e non sono ciascuno multiplo dell'altro. Pertanto im $T = \mathbb{R}^2$.

Questo vuol dire, tra le altre cose, che posso generare l'immagine di $T$ con soli due elementi — ad esempio, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, oppure anche $(1, 2)$ e $(-3, 5)$.

**Quali ragionamenti posso fare in generale?**

# Obiettivi



Se ho un sottospazio vettoriale $U \subset K^n$ individuato da un insieme di generatori voglio:

- Trovare dei generatori canonici, che siano cioè migliori degli altri. In che senso migliori?
  - che siano in numero minimo
  - che mi dicano qual è la struttura geometrica del sottospazio
  - che mi indichino se il sottospazio che sto considerando è uguale ad un altro sottospazio (ad esempio: se è tutto $K^n$)

Ad esempio, una retta si genera con un singolo elemento, e non voglio doverla generare con tre elementi; allo stesso modo un piano si genera con due elementi, e quindi averne altri rende la descrizione ridondante.

In un corso di algebra lineare, irridondante si dice linearmente indipendente. Prima di spiegare cosa significhi questa espressione, vi mostro in un esempio come ottenere un insieme minimale di generatori.

# Il procedimento di eliminazione



Quando abbiamo avuto bisogno di risolvere un sistema di equazioni lineari, abbiamo fatto ricorso al procedimento di eliminazione di Gauss.

Nel procedimento di eliminazione, si eseguono alcuni tipi di manipolazione alle righe di una matrice. Le manipolazioni sono tutte invertibili (si può sempre tornare indietro alla matrice originaria eseguendo una nuova manipolazione).

Le manipolazioni sono

- scambio (= permutazione) delle righe
- moltiplicazione di una delle righe per un elemento invertibile
- somma ad una riga di un altra riga (o di un suo multiplo)

Ogni singola manipolazione produce righe che sono combinazioni lineari delle righe che si avevano precedentemente.

# Sottospazio generato dalle righe



Quando si esegue uno delle manipolazioni del procedimento di eliminazione il sottospazio vettoriale generato dalle righe della matrice non cambia.

Chiamiamo $R$ il sottospazio vettoriale generato dalle righe prima di effettuare la manipolazione, ed $R'$ quello generato dalle righe dopo aver effettuato la manipolazione.

Ogni riga dopo la manipolazione è combinazione lineare delle righe prima della manipolazione (alcune non hanno subito cambiamenti) e quindi ciascuna delle righe dopo la manipolazione appartiene ad $R$.

Ma $R$ è un sottospazio vettoriale, e quindi ogni combinazione lineare delle righe dopo la manipolazione è contenuto in $R$. Riassumendo, $R' \subset R$.

Tuttavia, si può applicare nuovamente il ragionamento alla manipolazione che riporta la matrice al suo stato originario, e dedurre che $R \subset R'$. In conclusione, $R = R'$.

# Un esempio - I



Nonostante abbiamo introdotto il procedimento di eliminazione — varie lezioni fa – allo scopo di risolvere sistemi di equazioni lineari, possiamo ora utilizzarlo per un'altra finalità: trovare generatori più semplici dello spazio vettoriale generato dalle righe di una matrice data.

Torniamo all'esempio che stavamo considerando: l'immagine di $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è generata dai vettori $(1, 2), (2, 4), (-3, 5)$. Scriviamoli nelle righe di una matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio vettoriale generato dalle righe della matrice che si ottiene al termine del procedimento di eliminazione coinciderà con quello generato da $(1, 2), (2, 4), (-3, 5)$.

# Un esempio - II

Eseguiamo allora il procedimento di eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dalle tre righe originarie coincide con il sottospazio generato dai vettori $(1,0),(0,1),(0,0)$. Ora, è evidente che $(0,0)$ non gioca alcun ruolo, quindi si ottiene il sottospazio vettoriale generato da $(1,0),(0,1)$, che è chiaramente tutto $\mathbb{R}^2$.

Abbiamo rigorosamente dimostrato che l'immagine di $T$ è tutto $\mathbb{R}^2$.

# Prossimi obiettivi



Nelle prossime lezioni ci occuperemo di

- introdurre un concetto rigoroso di irridondanza
- dimostrare concretamente che la procedura appena descritta produce un insieme minimale di generatori
- definire un concetto di dimensione che permetta di comprendere geometricamente la struttura di un sottospazio vettoriale
- applicare queste nozioni allo studio delle applicazioni lineari.