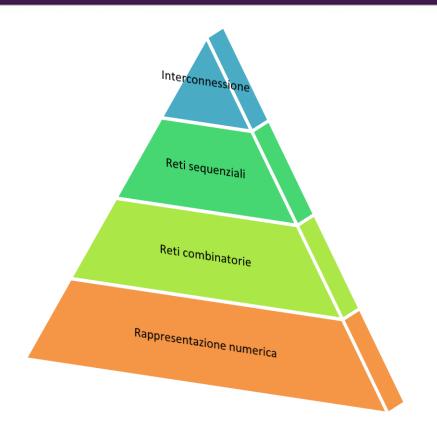


## ARGOMENTI DELLA LEZIONE

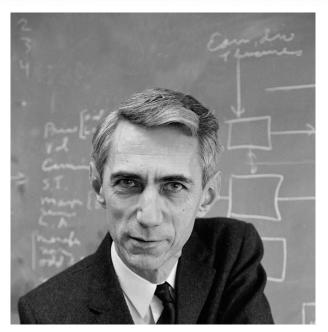
- ☐ Richiamo della rappresentazione numerica nei calcolatori: numeri interi e numeri reali
- ☐ Reti combinatorie
  - ☐ Codificatore e Decodificatore
  - Addizionatore e Sottrattore
  - ☐ Comparatore aritmetico e logico
- ☐ Reti sequenziali
  - ☐ Registro di memorizzazione
  - ☐ Registro Contatore
  - ☐ Registro a scorrimento
- Interconnessione
  - ☐ Multiplexer e demultiplexer, mesh, bus





#### Generalità

- ☐ A Mathematical Theory of Communication (1948)
  - ☐ Definizione delle componenti fondamentali delle comunicazioni digitali



**CLAUDE SHANNON** 

# **TEORIA DELL'INFORMAZIONE**Un sistema di comunicazione

- □ La teoria enunciata da Shannon poneva l'attenzione su **come inviare un messaggio**, rappresentato da una concatenazione di parole, simboli (o segnali), e **ricostruirlo in modo esatto** (o con una buona approssimazione) quando ricevuto da una postazione remota
- Claude Shannon propose uno schema di **sistema di comunicazione** nel quale indicò gli elementi fondamentali costituenti (la sorgente, trasmettitore, canale, ricevitore, destinatario)

**SORGENTE** 

Trasmettitore

CANALE

Ricevente

DESTINATARIO

SISTEMA DI COMUNICAZIONE DEFINITO DA CLAUDE SHANNON

# TEORIA DELL'INFORMAZIONE Un sistema di comunicazione

- ☐ La **sorgente** indica l'insieme delle parole possibili
- ☐ Il trasmettitore è l'entità che codifica una parola in un segnale
- ☐ Il canale è il mezzo attraverso il quale si propaga il segnale codificato
- ☐ Il **Ricevente** è l'intermediario che decodifica il segnale nella corrispondente parola
- ☐ Il **destinatario**, colui al quale si indirizza la collezione di simboli



SISTEMA DI COMUNICAZIONE DEFINITO DA CLAUDE SHANNON

#### **Alfabeto**

- ☐ Shannon non prese in considerazione il significato dei termini né del messaggio, ma nel definire la sorgente evidenziò che questa può essere specificata come un insieme di simboli possibili
- Lo scienziato statunitense comprese che in un sistema efficiente è importante garantire unicamente che siano i singoli segnali a giungere a destinazione in maniera corretta

 $\Sigma := \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, Z\}$ 

 $\Sigma := \{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P, \Sigma, T, Y, \Phi, X, \Psi, \Omega\}$ 

 $\Sigma := \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$ 

 $\Sigma := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 

#### Alfabeto binario

- Per una comunicazione affidabile Shannon scelse come **alfabeto** quello costituito da due soli simboli 1 e 0, i bit (o 'unità minima di informazione')
- Shannon dimostrò che sfruttando l'alfabeto binario era possibile costituire delle **parole** rappresentanti un messaggio

#### **ESEMPIO**

Per specificare, definire, riprodurre o memorizzare dieci parole differenti bisogna - in un sistema di comunicazione con alfabeto binario-associare almeno  $\lceil \log_2 10 \rceil = \lceil 3.32 \rceil = 4$  bit

0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000 e 1001.

#### Vantaggi dell'alfabeto binario

- Gli studi di Shannon si concentrarono anche sulla definizione dei criteri (cioè delle formule matematiche) grazie ai quali è possibile ricevere le parole originarie trasmesse lungo un canale affetto da rumore
- La base binaria si dimostrò quella più utile e più robusta nel caso di interferenze
  - Nel caso di errori, in un sistema di comunicazione a cifre binarie il messaggio originale può essere deducibile, cioè rimane 'visibile' anche oltre il disturbo. Inoltre la modifica di una cifra in un sistema non binario induce ad un numero di errori elevato
- Avere un alfabeto binario di riferimento inoltre è comodo perché molti dei componenti negli elettronici (porte logiche, commutatori elettronici, amplificatori) operano proprio con due livelli distinti di corrente elettrica (segnale alto, 1, e segnale basso, 0)

#### **ESEMPIO**

Una parola formata da tre simboli binari 000 può essere alterata e ricevuta, al più, come 111; con una distanza 7 dal valore reale (000,001,010,011,100,101,110,111)

Viceversa, nel caso si sfruttasse un alfabeto decimale il valore 000 potrebbe diventare 999, con una distanza mille (una differenza più marcata e ambigua) 000,001,002,003,...,997,998,999

#### Alfabeto binario conseguenze

- Oltre a queste nozioni Shannon introdusse il concetto di **ridondanza**, cioè un numero di dati (o caratteri) rappresentanti una parola maggiore di quello richiesto, che sono aggiunti per garantire l'integrità dei messaggi nel caso di eventuali disturbi, e di **codifica economica**, cioè una riscrittura delle parole con un numero minimo di caratteri.
- Dal concetto di ridondanza si derivarono i codici per il rilevamento e per la correzione degli errori (ECC); molto impiegati nelle trasmissioni lungo la rete internet o nell'archiviazione dei dati sui supporti digitali.
- Lo studio inerente ai codici economici, invece, portò alla compressione dati, strategia usata per accelerare i tempi di trasmissione dei segnali e per sfruttare al meglio lo spazio dei dispositivi di memorizzazione

#### **ESEMPIO ECC**

#### **BIT DI PARITÀ**

Si accoda alla parola il bit 1 se il numero di 1 è dispari altrimenti si accoda 0

10101000 1 11101000 1 **ANOMALIA** 

ESEMPIO COMPRESSIONE DATI
ALGORITMO RLE

00000000000011111111110000011000 0,13;1,8;0,5;1,2;0,3 31 caratteri contro 20 (guadagno 20/31 cioè 35.48%)

# TEORIA DELL'INFORMAZIONE Significato avulso dalla parola rappresentante

Poiché Shannon non focalizzò l'attenzione sull'associazione tra il significato e la parola rappresentante, nella teoria dell'informazione questa relazione è di tipo non esclusivo ovvero il significato muta in accordo al dominio di utilizzo: la parola 0 può identificare il colore nero se si considera una immagine o il silenzio se si riproduce un suono o il valore zero se si fa riferimento a numeri

#### **ASCII STANDARD**



00010000 10110000 01010000

01111010



#### RAPPRESENTAZIONE NUMERICA

#### Numero: definizione e rappresentazione

- Un **numero** è un elemento astratto che rappresenta un insieme ben preciso di unità; serve a contare, e quindi a indicare la quantità di qualcosa o il posto che questo occupa all'interno di una serie. I numeri sono ordinati in una successione infinita, nella quale ogni elemento conta un'unità in più rispetto al precedente
- Un numero può essere rappresentato in vari modi impiegando simboli diversi

| 1 7          | 11 ∢₹              | 21 <b>≪∀</b>     | 31 <b>⋘</b> ₹     | 41 <b>ÆY</b>     | 51 <b>Æ</b> Y      |
|--------------|--------------------|------------------|-------------------|------------------|--------------------|
| 2            | 12 <b>&lt; TY</b>  | 22 <b>« TY</b>   | 32 <b>⋘\™</b>     | 42 <b>4</b> TY   | 52 <b>4</b> TY     |
| 3 <b>777</b> | 13 <b>&lt; ???</b> | 23 <b>《 YYY</b>  | 33 <b>⋘ १११</b> ४ | 43 <b>47 111</b> | 53 <b>A</b> TTT    |
| 4            | 14 <b>₹₹</b>       | 24               | 34 <b>⋘♡</b>      | 44               | 54 <b>X</b>        |
| 5            | 15 ◀₩              | 25 🕊             | 35 ⋘₩             | 45               |                    |
| 6 <b>YYY</b> | 16 <b>∢₹₹</b> ₹    | 26 <b>44 777</b> | 36 ⋘∰             | 46 <b>****</b>   | 55 <b>-</b>        |
| 7 <b>ESF</b> | 17 <b>₹₹</b>       | 27               |                   | 47               | 56 <b>4 T</b>      |
| 8 ₩          | 18 <b>∢₩</b>       | 28 <b>⋘₩</b>     | 38 ₩₩             | 48               | 57 <b>4</b>        |
| 9 7          | 19 <b>◆辨</b>       | 29 🐠 🏋           | 39 ₩₩             | 49 42            | 58 - <b>₹</b> ₩    |
|              |                    |                  | l '               | - :              | 59 <b>-</b> 🔆 👬    |
| 10 🕊         | 20 ₩               | 30 ⋘             | 40                | 50 🍂             | 59 <b>-522 777</b> |

| 1 | T   | 8    | VIII |  |  |
|---|-----|------|------|--|--|
| 2 | II  | 9    | IX   |  |  |
| 3 | III | 10   | Х    |  |  |
| 4 | IV  | 50   | L    |  |  |
| 5 | V   | 100  | С    |  |  |
| 6 | VI  | 500  | D    |  |  |
| 7 | VII | 1000 | М    |  |  |

|    | II | Ш  | IIII | IIII | Т  | Т  | Ш  | Ш        |
|----|----|----|------|------|----|----|----|----------|
| 1  | 2  | 3  | 4    | 5    | 6  | 7  | 8  | 9        |
|    | _  | 30 | 40   |      |    | 上  | ≟  | <b>≝</b> |
| 10 | 20 | 30 | 40   | 50   | 60 | 70 | 80 | 90       |

## RAPPRESENTAZIONE NUMERICA

#### Rappresentazione nel sistema posizionale

- Nei sistemi posizionali un numero è rappresentato considerando una base specifica
- ☐ In campo matematico si usa la base 10
- ☐ In campo informatico si fa riferimento al sistema binario, ottale e esadecimale

$$N = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i \quad \text{con } 0 \le a_i \le b - 1 \text{ e scelta } b > 1$$

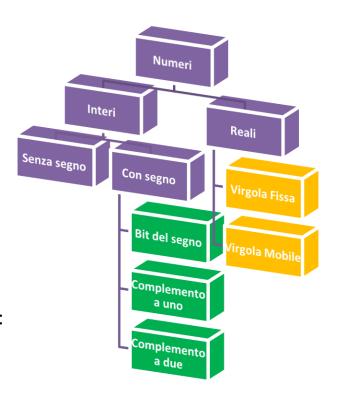
$$(2312) = 2 \cdot 10^{3} + 3 \cdot 10^{2} + 1 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{0}$$
$$= 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 = 2312$$

| Valore            | Base |
|-------------------|------|
| 110582            | 10   |
| 11010111111110110 | 2    |
| 327766            | 8    |
| 1AFF6             | 16   |



# RAPPRESENTAZIONE NUMERICA Inumeri nei sistemi di elaborazione automatica

- Gli elaboratori elettronici sono in grado di eseguire funzioni logico-aritmetiche su operandi rappresentanti mediante stringhe binarie di dimensione prestabilita.
- Gli operandi hanno il significato matematico di:
  - Numeri interi, per cui si ha una rappresentazione:
    - ☐ Senza segno
    - ☐ Con segno
      - ☐ Bit del segno
      - ☐ Complemento a uno
      - ☐ Complemento a due
  - ☐ **Numeri reali**, per cui si ha una rappresentazione:
    - ☐ Virgola Fissa
    - ☐ Virgola Mobile



# RAPPRESENTAZIONE NUMERICA Parola di rappresentazione

- Lo spazio a disposizione per immagazzinare le informazioni relative a un numero binario è limitato dalla dimensione della parola di rappresentazione
- La dimensione della parola è prefissata nel momento in cui si progetta l'elaboratore e ne condiziona ogni componente (dalla dimensione dei registri alla circuiteria necessaria per prelevare una parola in una sola fase dalla Memoria Centrale)
- Gli elaboratori elettronici attuali sono dotati di parole di 32 bit (dispositivi mobili); 64bit (computer) 128bit (supercalcolatori)

PAROLA DI 8 BIT



PAROLA DI 16 BIT

# RAPPRESENTAZIONE NUMERICA Intervallo di rappresentazione

- ☐ In una parola di dimensione *n* bit, tutte le informazioni relative al numero, segno compreso, devono occupare non più di *n* bit
- ☐ La dimensione della parola limita l'intervallo di rappresentazione dei valori numerici
- ☐ Dopo una operazione aritmetica il numero da rappresentare può eccedere la dimensione della parola provocando un **overflow** o un **trabocco**

PAROLA DI 16 BIT

PAROLA DI 16 BIT CON OVERFLOW/TRABOCCO



#### Sistema binario

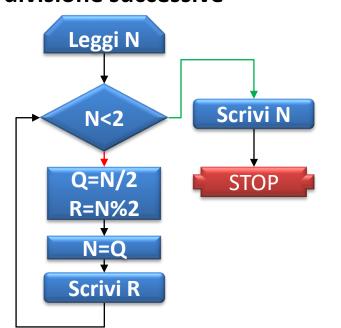
- Un intero senza segno è un valore intero assunto positivo
- ☐ Gli *n* bit della parola sono usati <u>tutti</u> per rappresentare le cifre del numero
- ☐ Una parola a *n* bit permette di trattare un qualsiasi numero il cui **intervallo di rappresentazione** (o *range*) è [0;2<sup>n</sup>-1]

| $\lceil \log_2 N \rceil$ |                   |
|--------------------------|-------------------|
| $N = \sum a_i 2^i$       | $0 \le a_i \le 1$ |
| $\overline{i=0}$         |                   |

| DECIMALE | BINARIO (dimensione della parola a 3bit) |
|----------|--|
| 0        | 000                                      |
| 1        | 001                                      |
| 2        | 010                                      |
| 3        | 011                                      |
| 4        | 100                                      |
| 5        | 101                                      |
| 6        | 110                                      |
| 7        | 111                                      |

#### Rappresentazione in base due

Un metodo per convertire un valore da una base decimale ad una binaria è quello delle divisione successive



| 82   | Quoziente | Resto   |  |  |  |
|------|-----------|---------|--|--|--|
| 82:2 | 41        | 0 LSB   |  |  |  |
| 41:2 | 20        | 1       |  |  |  |
| 20:2 | 10        | 0       |  |  |  |
| 10:2 | 5         | 0       |  |  |  |
| 5:2  | 2         | 1       |  |  |  |
| 2:2  | 1         | 0       |  |  |  |
| 1MSB |           |         |  |  |  |
|      |           | 1010010 |  |  |  |

 $(82)_{10} = (01010010)_2$ 

#### Conversione da base binaria a decimale e viceversa

| 133   | Quoziente | Resto    |  |  |
|-------|-----------|----------|--|--|
| 133:2 | 66        | 1 LSB    |  |  |
| 66:2  | 33        | 0        |  |  |
| 33:2  | 16        | 1        |  |  |
| 16:2  | 8         | 0        |  |  |
| 8:2   | 4         | 0        |  |  |
| 4:2   | 2         | 0        |  |  |
| 2:2   | 1         | 0        |  |  |
| 1MSB  |           |          |  |  |
|       |           | 10000101 |  |  |

| Numero bin | 1  | 0                     | 0                     | 0  | 0                     | 1                     | 0  | 1                     |
|------------|----|-----------------------|-----------------------|----|-----------------------|-----------------------|----|-----------------------|
| Peso       | 7  | 6                     | 5                     | 4  | 3                     | 2                     | 1  | 0                     |
|            | 27 | <b>2</b> <sup>6</sup> | <b>2</b> <sup>5</sup> | 24 | <b>2</b> <sup>3</sup> | <b>2</b> <sup>2</sup> | 21 | <b>2</b> <sup>0</sup> |

$$N=1\cdot 2^{7}+0\cdot 2^{6}+0\cdot 2^{5}+0\cdot 2^{4}+0\cdot 2^{3}+1\cdot 2^{2}+0\cdot 2^{1}+1\cdot 2^{0}$$

 $(133)_{10} = (10000101)_2$ 

#### Rappresentazioni con base non binaria

- Per rappresentazioni generiche con base maggiore a 10 si introducono, per convenzione, caratteri alfabetici in maiuscolo
  - Sistema esadecimale 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
  - Sistema in base venti 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,G,H,I,L
- È importante usare simboli per evitare ambiguità

ES: Nel sistema esadecimale 10 indica il valore 16 (cioè  $1\cdot16^1+0\cdot16^0$ ); mentre il valore 10 è espresso con la lettera A

$$(10)_{16}$$
=16 e  $(A)_{16}$ =10

Superati i simboli alfabetici si ricorre a simboli speciali definibili dall'utente (le associazioni tra simboli e numero devono essere noti)

| VALORE | BASE | RAPPRESENTAZIONE                |
|--------|------|---------------------------------|
| 2502   |      |                                 |
|        | 10   | (2502) <sub>10</sub>            |
|        | 16   | (9C6) <sub>16</sub>             |
|        | 8    | (4706) <sub>8</sub>             |
|        | 2    | (0000100111000110) <sub>2</sub> |

#### Operazione di somma

- ☐ La somma tra numeri interi senza segno, comporta come risultato (considerando la somma di cifre ad uguale posizione) :
  - ❖ 1 se una delle due cifre è 1 e l'altra è zero e non c'è riporto
  - ❖ 0 altrimenti (con un riporto nel caso in cui entrambe le cifre sono 1)

| Cifra addendo1 | Cifra<br>addendo2 | Risultato | Riporto |
|----------------|-------------------|-----------|---------|
| 0              | 0                 | 0         | 0       |
| 0              | 1                 | 1         | 0       |
| 1              | 0                 | 1         | 0       |
| 1              | 1                 | 0         | 1       |

#### Operazione di somma

#### Esempio

| 0  | 0  | 0  | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |     |   | Riporto    |
|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|---|------------|
| 0  | 0  | 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 44  | + | Operando 1 |
| 0  | 0  | 0  | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 874 | = | Operando 2 |
| 0  | 0  | 0  | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 918 |   | Risultato  |
|    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |   |            |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |     |   | posizione  |



#### Modalità di rappresentazione

- ☐ La rappresentazione dei numeri interi richiede di riservare un bit relativo al segno (+ oppure -) o di scegliere una codifica che consenta di discriminare in maniera chiara e precisa i valori negativi da quelli positivi
- ☐ I tre metodi usati sono:
  - ☐ bit del segno
  - complemento a uno
  - complemento a due (affermato in quasi tutti i calcolatori elettronici)



#### Bit del segno

- ☐ Il formato **bit del segno** ha il bit più significativo della parola riservato al segno del numero:
  - ❖ 1 per identificare il segno -
  - ❖ 0 per identificare il segno +
- ☐ Per la rappresentazione:
  - si codifica il numero in binario
  - si antepone il bit del segno
- ☐ Una parola di lunghezza *n* ha un intervallo di valori rappresentabili pari a:

$$[-2^{n-1}+1; 2^{n-1}-1]$$

$$(+15)_{10} = (00001111)_2$$

$$(-12)_{10} = (10001100)_2$$

$$(+0)_{10} = (00000000)_2$$

$$(-0)_{10} = (10000000)_2$$

# A.S.

## INTERI CON SEGNO

#### Complemento a uno

- ☐ I numeri positivi nel complemento a uno hanno uguale codifica del bit del segno (con bit più significativo settato a 0)
- I numeri negativi nel complemento a uno sono ottenuti complementando (ovvero ¬0=1 e ¬1=0) tutte le cifre che costituiscono la parola
- ☐ Il segno di un numero è individuato dal valore del primo bit, infatti tutti i numeri positivi iniziano con il bit 0, mentre quelli negativi iniziano con il bit 1

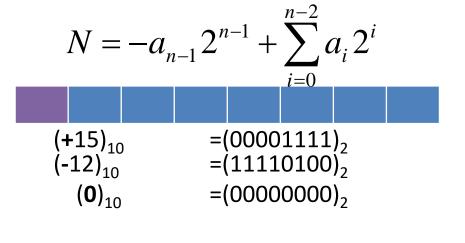
$$(+15)_{10}$$
 =  $(00001111)_2$   
 $(-15)_{10}$  =  $(11110000)_2$ 

$$(+0)_{10} = (00000000)_2$$
  
 $(-0)_{10} = (11111111)_2$ 



#### Complemento a due

- ☐ Nel formato **complemento a due** il bit più significativo ha peso negativo
- ☐ I numeri positivi nel complemento a due hanno uguale codifica del bit del segno (con bit più significativo settato a 0)
- ☐ I numeri negativi nel complemento a due si ottengono complementando l'intero positivo e sommando a questo ultimo il valore 1
- Si ha una sola rappresentazione dello zero
- L'intervallo di valori rappresentabile è [-2<sup>n-1</sup>; 2<sup>n-1</sup>-1]



 $(-12)_{10}$  Valore assoluto:  $(00001100)_2$ 

Complementare: (11110011)<sub>2</sub>

Somma di 1: (11110100)<sub>2</sub>

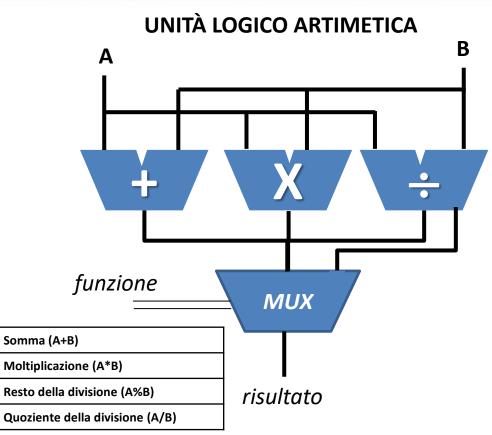
### **Complemento a due: operazioni**

00

10

11

☐ Sui numeri si interviene mediante operazioni elementari (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, modulo) nella A.L.U. o complesse (integrazione, derivazione, calcolo di convoluzione,...) nei coprocessori matematici



#### Complemento a due: somma

- ☐ La somma tra numeri in complemento a due, stabilisce come risultato (considerando la somma di cifre ad uguale posizione):
  - ❖ 1 se una delle due cifre è 1 e l'altra è zero e non c'è riporto
  - ❖ 0 altrimenti (con un riporto nel caso in cui entrambe le cifre sono 1)

| Cifra addendo1 | Cifra<br>addendo2 | Risultato | Riporto |
|----------------|-------------------|-----------|---------|
| 0              | 0                 | 0         | 0       |
| 0              | 1                 | 1         | 0       |
| 1              | 0                 | 1         | 0       |
| 1              | 1                 | 0         | 1       |

Complemento a due: somma

#### Esempio

| 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |       |   | Riporto    |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|------------|
| 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6444  | + | Operando 1 |
| 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 7018  | = | Operando 2 |
| 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 13462 |   | Risultato  |
|    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |   |            |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |       |   | posizione  |

# Complemento a due: somma

☐ La somma tra numeri in complemento a due può dar luogo ad un trabocco (condizione che non deve destrare preoccupazione) o un overflow (requisito che indica un valore risultante errato) che - in entrambi i casi - si evidenzia con un bit di riporto oltre alla dimensione della parola

#### Complemento a due: somma (trabocco)

- La somma di due numeri binari in complemento a due può comportare un **trabocco** (*carry*) non influente sul risultato finale
  - ☐ Può accadere quando gli operandi hanno segno opposto

| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   |     |    | Riporto    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|----|------------|
|   | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15  | +  | Sottraendo |
|   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | -5  |    | Minuendo   |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | =10 | 10 | Risultato  |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |    |            |
|   | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |     |    | Posizione  |

#### Complemento a due: somma (overflow)

- La somma di due numeri binari in complemento a due può comportare una condizione di non rappresentabilità del risultato (overflow) a causa della dimensione prefissata della parola
  - ☐ Accade quando i numeri hanno uguale segno e, oltre ad un bit di riporto oltre alla lunghezza della parola, c'è un cambio del segno nel risultato

| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |      |        | Riporto    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|--------|------------|
|   | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -137 | +      | Sottraendo |
|   | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -95  | =      | Minuendo   |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 42   | (-232) | Risultato  |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |      |        |            |
|   | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |      |        | posizione  |

## Complemento a due: sottrazione

- ☐ Laa sottrazione tra numeri in complemento a due, prevede come risultato (considerando le cifre ad uguale posizione) :
  - ❖ 1 se una delle due cifre è 1 e l'altra è zero; ma se la prima cifra è minore della seconda si deve richiedere un prestito alle cifre successive
  - ❖ 0 altrimenti

| Cifra1 | Cifra2 | Risultato | Prestito |
|--------|--------|-----------|----------|
| 0      | 0      | 0         | 0        |
| 0      | 1      | 1         | 1        |
| 1      | 0      | 1         | 0        |
| 1      | 1      | 0         | 0        |

## Complemento a due: sottrazione

#### Esempio 58-44

| 11101 <b>0</b> - | 1110 <b>1</b> 0 - | 111 <b>0</b> 10 - | 11 <mark>01</mark> 10 - | 11 <b>0</b> 110 - | 1 <mark>01</mark> 110 - |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|
| 10110 <b>0</b> = | 1011 <b>0</b> 0=  | 101 <b>1</b> 00=  | 101100=                 | 10 <b>1</b> 100=  | 101100=                 |
|                  |                   |                   |                         |                   |                         |
| 0                | 10                | 10                | 110                     | 110               | 1110                    |

| 1 <b>0</b> 1110 - | <b>1</b> 01110 - |
|-------------------|------------------|
| 1 <b>0</b> 1100=  | <b>1</b> 01100=  |
|                   |                  |
| 01110             | 001110           |

| 1 | 4 |
|---|---|
|   |   |

| Cifra1 | Cifra2 | Risultato | Prestito |
|--------|--------|-----------|----------|
| 0      | 0      | 0         | 0        |
| 0      | 1      | 1         | 1        |
| 1      | 0      | 1         | 0        |
| 1      | 1      | 0         | 0        |

## Complemento a due: sottrazione (caso pratico)

☐ Gli elaboratori elettronici moderni risolvono la sottrazione per il complemento a due effettuando la somma di un numero con il suo opposto (si risparmia sulla circuiteria a scapito di un tempo di esecuzione - poco - più lungo)

Esempio 58 + (-44)

## Complemento a due: moltiplicazione

- ☐ La moltiplicazione tra
  numeri in base binaria ha
  un procedimento analogo a
  quella che avviene nel
  calcolo decimale
- ☐ Si effettua il calcolo dei prodotti parziali, spostandoli di k posizioni in relazione alla k-esima posizione della cifra del moltiplicatore, per poi applicare la loro somma

|   |   |   | 1  | 0 | 0 | 0 | •   |
|---|---|---|----|---|---|---|-----|
|   |   |   | _1 | 0 | 0 | 1 | _ = |
|   |   |   |    |   |   |   | _   |
|   |   |   | 1  | 0 | 0 | 0 | +   |
|   |   | 0 | 0  | 0 | 0 |   | +   |
|   | 0 | 0 | 0  | 0 |   |   | +   |
| 1 | 0 | 0 | 0  |   |   |   | _ = |
| 1 | 0 | 0 | 1  | 0 | 0 | 0 | _   |
|   |   |   |    |   |   |   |     |

## A Second

## **NUMERI REALI**

### **Definizione**

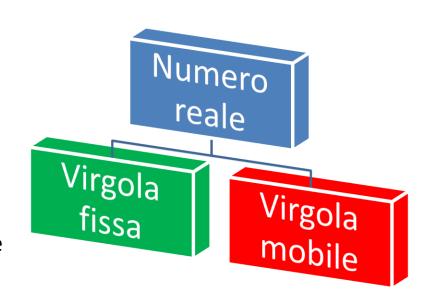
- ☐ Un **numero reale**, in generale,
  - è definibile da una tripla
  - $\Re = \langle S; I; F \rangle$  dove:
    - ☐ S è il segno
    - ☐ I è la parte intera
    - ☐ F la parte frazionaria
- La parte frazionaria è distinta da quella intera con una virgola o (nella notazione scientifica internazionale) con un punto

- -1.75 <-;1;75>
- +11.504 <+;11;504>
  - -146.9 <-;146;9>



## NUMERI REALI Rappresentazione degli elaboratori elettronici

- Negli elaboratori elettronici i numeri reali possono essere rappresentati in due modi: virgola fissa (fixed point) o virgola mobile (floating point)
- ☐ Il motivo principale per l'introduzione dei numeri reali (o floating point) sta nella possibilità di utilizzare un intervallo di numeri più ampio per effettuare i calcoli riducendo però il numero di valori disponibili a parità di bit utilizzati per la codifica
- ☐ Non tutti i numeri reali possono essere rappresentati, ma solo un sottoinsieme limitato (aumenta il range, ma diminuisce la precisione)





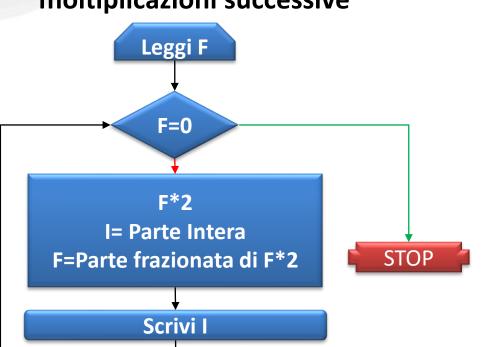
## Virgola Fissa

- ☐ I numeri in **virgola Fissa** offrono una possibile rappresentazione dei valori reali
- Per operare con questo formato è necessario dapprima stabilire la lunghezza della parola e poi determinare la suddivisone in due campi: uno per la parte intera (rappresentabile ad esempio con il complemento a due) e un'altra per la parte frazionaria

| Parte Intera   | Parte frazionaria          |
|----------------|----------------------------|
|                |                            |
| k              | n-k                        |
| +3,75<br>-1,75 | 0011   1100<br>1111   1100 |

## Virgola fissa: moltiplicazioni successive

☐ Il calcolo della parte frazionaria può essere svolto con l'algoritmo delle moltiplicazioni successive



| Valore       | Parte<br>Intera | Parte<br>frazionaria |
|--------------|-----------------|----------------------|
| 0.375·2=0.75 | 0               | 0,75                 |
| 0.75·2=1.5   | 1               | 0.5                  |
| 0.5·2=1.0    | 1               | 0                    |
| 0            |                 |                      |
|              |                 |                      |
|              |                 | .011                 |

Verifica:

 $0.2^{-1}+1.2^{-2}+1.2^{-3}=0+0.25+0.125=0.375$ 

# A Second

## **NUMERI REALI**

## Virgola Fissa

| Parte Intera |                  |  |  |                       | Parte frazionaria |                       |     |             |     |     |  |  |               |
|--------------|------------------|--|--|-----------------------|-------------------|-----------------------|-----|-------------|-----|-----|--|--|---------------|
| S            | 2 <sup>k-1</sup> |  |  | <b>2</b> <sup>2</sup> | 2 <sup>1</sup>    | <b>2</b> <sup>0</sup> | 2-1 | <b>2</b> -2 | 2-3 | 2-4 |  |  | <b>2</b> -n+k |

| Par | te Int | era |   | Parte f | razion | aria |   |
|-----|--------|-----|---|---------|--------|------|---|
| 0   | 1      | 0   | 1 | 1       | 1      | 0    | 0 |
|     |        |     |   |         |        |      |   |

| Pai | rte Int | era |   | Parte frazionaria |   |   |   |  |
|-----|---------|-----|---|-------------------|---|---|---|--|
| 1   | 1       | 1   | 0 | 1                 | 0 | 1 | 0 |  |

-2,625

+5,75

## Virgola Mobile

☐ La rappresentazione in Virgola Mobile è definita dalla tripla:

$$\mathfrak{R} = (-1)^S \cdot M \cdot 10^E$$

☐ È il metodo più usato nei moderni elaboratori elettronici ed è standardizzato come IEEE754

## Virgola Mobile: standard IEEE 754

- Nella rappresentazione in Virgola Mobile in base 2 la prima decisione da prendere è quanti bit devono essere assegnati a esponente e mantissa
- ☐ La notazione scientifica, stabilita dall'IEEE754, definisce quattro formati:
  - ☐ Mezza precisione (16bit)
  - ☐ Singola precisione (32bit)
  - **□** Doppia precisione (64bit)
  - ☐ Quadrupla precisione (128bit)
  - ☐ Ottupla precisione (256bit)

$$\mathfrak{R} = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$$

Formati standard IEEE-754

Singola precisione

| Seano  | Fsnonente | Mantissa  |
|--------|-----------|-----------|
| Segilo | Laponente | เาตาเมรรด |
| 1 bit  | 8 bit     | 23 bit    |

#### Doppia precisione

| Segno | Esponente | Mantissa |
|-------|-----------|----------|
| 1 bit | 11 bit    | 52 bit   |

### Virgola Mobile: standard IEEE 754

- ☐ La notazione scientifica adotta una forma standard
- La forma standard elimina gli zeri iniziali per avere esattamente una cifra diversa da zero a sinistra della virgola decimale (Es: il numero 34.56 ha forma standard: 3.456)
- Pertanto, un numero in Virgola Mobile in base due normalizzato ha una mantissa la cui cifra più a sinistra è diversa da zero
  - ☐ Per i numeri floating point normalizzati in base due, si ha una cifra uguale ad 1

#### 

23bit

8bit

## Virgola Mobile: standard IEEE 754

**Osservazione.** Poiché il bit più a sinistra di una mantissa in base due normalizzata è sempre 1, non è necessario codificarlo (così si risparmia un bit); perciò il bit iniziale, in alcune architetture, diventa un bit nascosto (hidden bit)

| +0101010,110010001 (42.783203)                 |                  |                                |              |  |  |  |  |  |
|--|------------------|--------------------------------|--------------|--|--|--|--|--|
|  | S                | S M E                          |              |  |  |  |  |  |
| Normalizzato con bit                           | (0) <sub>2</sub> | (101010110010001) <sub>2</sub> | 00000101 (5) |  |  |  |  |  |
| nascosto<br>+1,0101011001000100·2 <sup>5</sup> |                  | 23bit                          | 8bit         |  |  |  |  |  |

## NUMERI REALI Virgola Mobile: standard IEEE 754

Osservazione. Lo standard usa anche la polarizzazione dell'esponente (o notazione in eccesso) cioè all'esponente si somma 127, singola precisione, o 1023, doppia precisione, e si sfruttano delle combinazioni speciali (es.:00000000 e 11111111) per rappresentare determinati valori L'uso della polarizzazione dell'esponente semplifica l'ordinamento dei valori in Virgola Mobile attraverso il confronto tra interi

## +0101010,110010001 (42.783203)

|  | S    | EPOLARIZZATO            | M                                |
|--|------|-------------------------|----------------------------------|
| Normalizzato con bit   | 0    | (10000100) <sub>2</sub> | (10101011001000100) <sub>2</sub> |
| nascosto e polarizzato<br>+1,0101011001000100·2 <sup>5+127</sup> | 1bit | 8 bit                   | 23 bit                           |

## Virgola Mobile: standard IEEE 754 casi particolari

☐ La notazione scientifica sfruttando l'esponente polarizzato, inoltre, definisce dei casi particolari utili nel campo matematico

| Singola P | recisione | Doppia precisione |           | Significato                        |
|-----------|-----------|-------------------|-----------|------------------------------------|
| Esponente | Mantissa  | Esponente         | Mantissa  |                                    |
| 0         | 0         | 0                 | 0         | Zero                               |
| 0         | ≠0        | 0                 | ≠0        | ± valore denormalizzato            |
| 1-254     | Qualsiasi | 1-2046            | qualsiasi | ± valore<br>floating point<br>IEEE |
| 255       | 0         | 2047              | 0         | ±∞                                 |
| 255       | ≠0        | 2047              | ≠0        | NaN                                |

## Virgola Mobile: esempio singola precisione

☐ Il numero -5,125 è rappresentabile in singola precisione come segue:

Trasformazione delle parte intera e frazionata in binario:

 $-101,001\cdot2^{0}$ 

Normalizzazione: -01,01001·2<sup>2</sup>

☐ Rappresentazione:

 $\ddot{E}=2+127=129=(10000001)_2$ .

| Esponente polarizzato | Mantissa con bit nascosto |
|-----------------------|---------------------------|
| <b>1</b> 10000001     | 01001000000000000000      |

9bit 23bit

## Virgola Mobile: esempio singola precisione

#### **Verifica**

- ☐ Il segno è 1 quindi il numero è negativo
- □ La mantissa è 1(bit nascosto)+ $2^{-2}$ + $2^{-5}$ =1.28125.
- ☐ Esponente è 10000001=129 quindi 129-127=2
- $\square$  In sintesi: (-1)· 1.28125·2<sup>2</sup>=- 1.28125·4=-5.125

| 01001000000000000000 |
|----------------------|
|                      |

9bit 23bit

## Virgola Mobile: esempio doppia precisione

Il numero +10,125 è rappresentabile in doppia precisione come segue:

Trasformazione delle parte intera e frazionata in binario: +1010,001·20

Normalizzazione:  $+01,010001\cdot2^3$ 

Rappresentazione:

S=segno positivo=(0)<sub>2</sub>

 $\ddot{E}=3+1023=1026=(10000000010)_2$ .

|   | Esponente polarizzato | Mantissa con bit nascosto               |
|---|-----------------------|---|
|   | <b>0</b> 1000000010   | 010001000000000000000000000000000000000 |
| L | 12bit                 | 52bit                                   |

## NUMERI REALI Virgola Mobile: esercizio proposto

**Esercizio proposto** 

Dato il numero reale -110,90625

Rappresentarlo secondo lo standard IEEE754 singola precisione normalizzato e polarizzato e effettuare la verifica



## Virgola Mobile: operazioni somma e sottrazione

- L'algoritmo di addizione (e sottrazione) in Virgola Mobile si divide in quattro fasi fondamentali:
  - 1. Allineamento degli esponenti
  - addizione (o sottrazione) delle mantisse
  - 3. normalizzazione
  - 4. arrotondamento delle mantisse (ed eventuale normalizzazione)

#### Esempio.

I valori sono 17,12 e 423,50:

Rappresentazione:  $1,712 \cdot 10^1$  e  $4,235 \cdot 10^2$ 

Allineamento esponenti: 1,712·10<sup>1</sup> e 42,35·10<sup>1</sup>

Somma: 44,062·10<sup>1</sup>

Normalizzazione: 4,4062·10<sup>2</sup>

## Virgola Mobile: Overflow - Underflow

Un elaboratore elettronico presenta un overflow/underflow aritmetico nel caso una operazione aritmetica che utilizza operandi reali genera un risultato più grande/piccolo di quelli rappresentabili con la parola a disposizione

| •                             |                |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------------------------|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,6252=76252·10 <sup>-4</sup> |                | 7 | 6 |   | 2 | 5 | 5 | 2 |   |
| 12345=12345·10                | O <sub>0</sub> | L | 2 |   | 3 | 4 |   | 5 |   |
|                               | 1              | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|                               |                |   |   |   | 7 | 6 | 2 | 5 | 2 |
|                               | 1              | 2 | 3 | 5 | 2 | 6 | 2 | 5 | 2 |

## Virgola Mobile: operazioni moltiplicazione

- La **moltiplicazione** in virgola mobile si articola in:
  - 1. somma degli esponenti
  - 2. prodotto delle mantisse
  - 3. Normalizzazione (ed eventuale arrotondamento delle mantisse)

#### Esempio.

Dati i valori 980,12 e 50,00:

Rappresentazione: 9,8012·10<sup>2</sup> e 5·10<sup>1</sup>

Somma esponenti: 2+1

Prodotto mantisse: 49,006

Normalizzazione mantissa:4, 9006·10<sup>1</sup>

Rappresentazione: 4,9006·10<sup>1+(3)</sup>

## Virgola Mobile: operazioni in binario

Dati i valori **5,703125** e **10,25**:

$$(5,703125)_{10}$$
=  $(101,101101)_2$ = 1,011011010·2<sup>2</sup>  
 $(10,25)_{10}$ =  $(1010,010000)_2$ = 1,010010000·2<sup>3</sup>

## Virgola Mobile: operazioni in binario

#### Somma

 $(5,703125)_{10}$ =  $(101,101101)_2$ =  $1,011011010\cdot 2^2$  $(10,25)_{10}$ =  $(1010,010000)_2$ =  $1,010010000\cdot 2^3$ 

 $1,011011010 \cdot 2^2 \ e \ 1,010010000 \cdot 2^3$ 

Allineamento esponenti:

 $1,011011010 \cdot 2^2 \ e \ 10,10010000 \cdot 2^2$ 

Somma:

1,011011010+10,100100000

11,11111101.22

Normalizzazione:

1,1111111101·2<sup>3</sup>

Rappresentazione (normalizzata e polarizzata):

<0, 10000010, 11111111101000000...0>

15,953125

## Virgola Mobile: operazioni in binario

#### Moltiplicazione

(5,703125)<sub>10</sub>= (10,25)<sub>10</sub>=  $(101,101101)_2$ = 1,011011010·2<sup>2</sup>  $(1010,010000)_2$ = 1,010010000·2<sup>3</sup>

 $1,01101101 \cdot 2^2 \ e \ 1,01001 \cdot 2^3$ 

Somma esponenti:

2+3=5 cioè 10+11=101

Moltiplicazione mantisse:

1,1101001110101

Risultato:

 $1,1101001110101 \cdot 2^5$ 

Normalizzazione mantissa:

 $1,1101001110101 \cdot 2^{5}$ 

Rappresentazione (normalizzata e polarizzata):

<0, 10000100, 1110100111010100000...0>

## Virgola Mobile: operazioni in binario

#### **Esercizio proposto**

Dati i numeri reali **0,5** e -**0,4375** 

- 1. Rappresentarli in virgola mobile singola precisione in modalità normalizzata e polarizzata
- 2. Effettuare la somma
  - A. Rappresentare il risultato della somma in modalità normalizzata e polarizzata
- 3. Effettuare il prodotto
  - A. Rappresentare il risultato del prodotto in modalità normalizzata con il bit nascosto e polarizzata



## Virgola Mobile: operazioni in binario

#### Esercizio proposto (per casa)

Dati i numeri reali **12,0625** e -**28,1875** 

- 1. Rappresentarli in virgola mobile singola precisione
- 2. Effettuare la somma
  - A. Rappresentare il risultato della somma in modalità normalizzata e polarizzata
- 3. Effettuare il prodotto
  - A. Rappresentare il risultato del prodotto in modalità normalizzata con il bit nascosto e polarizzata



## A Second

## Soluzione

#### -110,90625

#### Parte intera

$$3:2=1x2+1$$

#### Parte frazionata

$$0,625x2=1,25$$

$$0,25x2=0,5$$

$$0.5x2=1$$

#### -1101110,11101

M=11011101110100000000000

$$E=110$$

Rappresentazione normalizzata e polarizzata



## Virgola mobile: operazioni in binario

#### **Esercizio proposto**

Dati i numeri reali 0,5 e -0,4375

☐ Rappresentarli in virgola mobile singola precisione in modalità normalizzata e polarizzata

```
SEGNO=+ SEGNO=- PARTE INTERA=0 = (0)_2 PARTE INTERA=0 = (0)_2 PARTE FRAZIONATA=0,5=(0.1)_2 PARTE FRAZIONATA=0,4375=(0,0111)_2 VALORE=0,1 · 2<sup>0</sup> VALORE=1·2<sup>-1</sup> VALORE=-1,110·2<sup>-2</sup> <0,11111111,1> <1,111100>
```

Virgola mobile: operazioni in binario

#### **Esercizio proposto**

- Dati i numeri reali **0,5** e -**0,4375**
- ☐ Effettuare la somma
  - Rappresentare il risultato della somma in modalità normalizzata e polarizzata

| 110  |  |       |       |   |
|--|--|-------|-------|---|
| VALORE1=+1·2 <sup>-1</sup><br>VALORE2=-1,110·2 <sup>-2</sup> | <b>ALLINEAMENTO</b> VALORE1=+1·2 <sup>-1</sup> VALORE2=-0,1110·2 <sup>-1</sup> |       | SOTT  | NORMALIZZAZIONE<br>0,001=1,0 ·2 <sup>-3</sup> (·2 <sup>-1</sup> )<br>Cioè:<br>+1,0 ·2 <sup>-4</sup> |
|  |  | 0,001 | 0,001 |   |

Virgola mobile: operazioni in binario

#### **Esercizio proposto**

- Dati i numeri reali **0,5** e -**0,4375**
- ☐ Effettuare la somma (variante con il complemento a due

VALORE1=+1·2<sup>-1</sup> VALORE2=-1,11·2<sup>-2</sup>

#### **ALLINEAMENTO**

VALORE1=+1·2<sup>-1</sup>

VALORE2=-0,111·2<sup>-1</sup>

#### **SOTTRAZIONE COMPL 2**

VALORE 1:1000·2<sup>-4</sup> 01000 01000

VALORE 2:0111·2<sup>-4</sup> 00111

11001

#### **NORMALIZZAZIONE**

1.2-4

 $100001 1 \cdot 2^{-4}$ 

Virgola mobile: operazioni in binario

#### **Esercizio proposto**

- Dati i numeri reali **0,5** e -**0,4375**
- ☐ Effettuare il prodotto
  - Rappresentare il risultato della somma in modalità normalizzata e polarizzata

```
VALORE=+1 \cdot 2^{-1}
VALORE=-1,110 \cdot 2^{-2}
```

SOMMA ESPONENTI -3

MOLTIPLICAZIONEù1,1 1,110x1=1,11 NORMALIZZAZIONE Non necessaria

Cioè:

 $-1,11 \cdot 2^{-3}$ 

