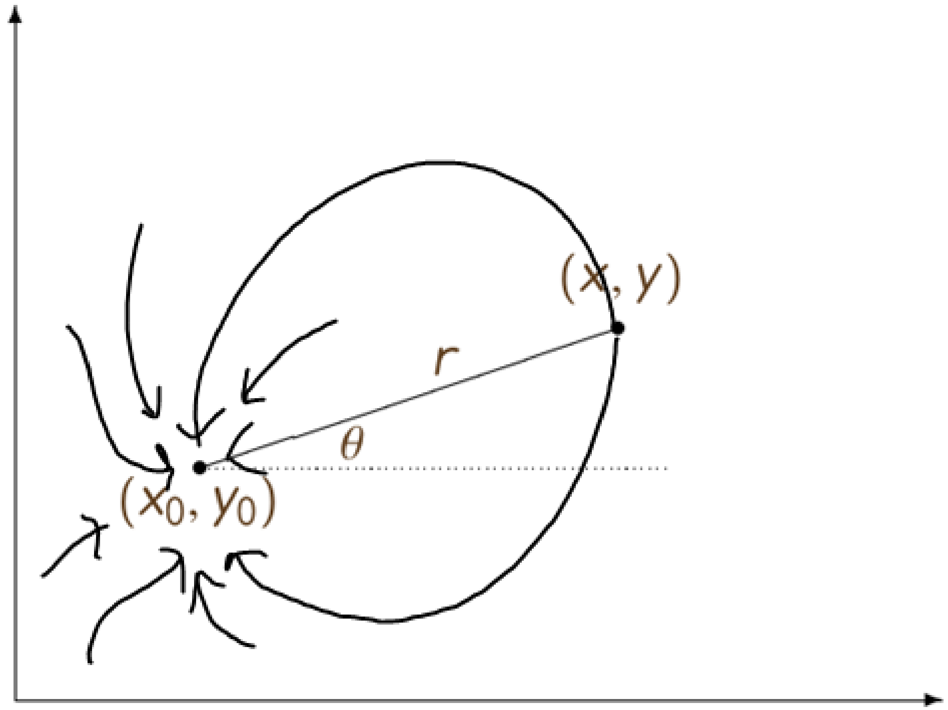
Movimenti nel piano

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Come ci si può avvicinare ad un punto nel piano?



Limiti

$x = r\cos(\vartheta) \quad y = r\,\mathrm{sen}(\vartheta)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^3(\vartheta)\,\mathrm{sen}(\vartheta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r^2\cos^3(\vartheta)\,\mathrm{sen}(\vartheta) = 0$$

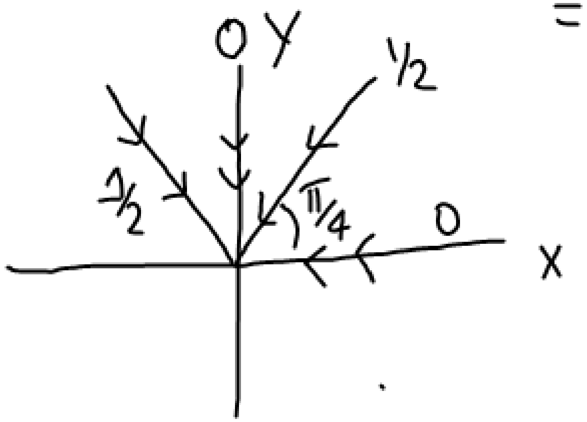
$$r^2 \geq r^2\cos^3(\vartheta)\,\mathrm{sen}(\vartheta) \geq -r^2$$

(r,ϑ)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{sen}(\vartheta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \cos(\vartheta)\,\mathrm{sen}(\vartheta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\vartheta)$$

$\nexists$



Limiti

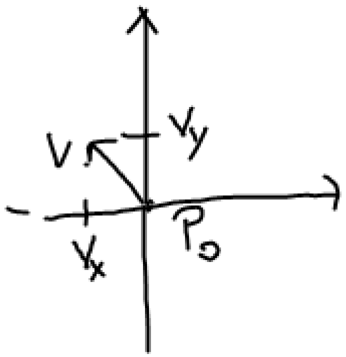
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} \overset{(r,\vartheta)}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^2} = +\infty$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \operatorname{sen}^2(\vartheta)\cos^2(\vartheta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \operatorname{sen}^2(\vartheta)\cos^2(\vartheta) = 0$$

Derivate direzionali

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} \qquad P_0 = (x_0, y_0)$$



$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$V = (V_x, V_y)$

$$\frac{f(x_0 + tV_x, y_0 + tV_y) - f(x_0, y_0)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

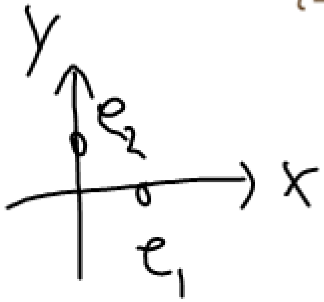
Derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} \qquad P_0 = (x_0, y_0)$$

direzioni "speciali" $e_1(1,0)$ e $e_2(0,1)$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= f_y(x_0, y_0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}
\end{aligned}\right]$$

Derivate parziali



Derivate parziali

$ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad (ax+by)_x = a \quad (ax+by)_y = b$

$e^{-(x^2+y^2)}$ $\quad \left(e^{-(x^2+y^2)}\right)_x = -2x\, e^{-(x^2+y^2)} \quad \left(e^{-(x^2+y^2)}\right)_y = -2y\, e^{-x^2-y^2}$

$$(-x^2-y^2)_x = -2x$$

$\sin(x)\cos(y)$

$$(\text{sen}(x)\cos(y))_x = \cos(x)\cos(y) \quad (\text{sen}(x)\cos(y))_y = -\text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$$

Il gradiente

Il **gradiente** è il vettore che ha come componenti le derivate parziali

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

vale che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v = v_x f_x(P_0) + v_y f_y(P_0)$$

$$\nabla f(P_0) = (f_x(P_0), f_y(P_0))$$

$$v = (v_x, v_y)$$

Differenziabilità

Definizione.
Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** in un punto $(x_0, y_0) \in D$ se

$$f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \right]$$

$$= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2} \right) = o(r)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(\partial) \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}(\partial) \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = r\cos(\partial) \\ y - y_0 = r\,\mathrm{sen}(\partial) \end{cases}$$

Differenziabilità

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Definizione.
Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** in un punto $(x_0, y_0) \in D$ se

$$f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \right]$$
$$= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2} \right)$$

$P_0(x_0,y_0)$

Teorema.
Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ che ha derivate parziali continue in un intorno di un punto $(x_0, y_0) \in D$ è differenziabile in (x_0, y_0).

Esempi

$x^2 + y^2$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

$$(x_0, y_0) = (0,0)$$

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)$$

$$\boxed{z = 0}$$

e^{x+y^2}

$$\nabla f = \left(e^{x+y^2}, 2y\, e^{x+y^2}\right)$$

$$z = 1 + x + 0 = 1 + x$$

$\sin(xy)$

$$\nabla f(x,y) = \left(y\cos(xy), x\cos(xy)\right)$$

Esempi

$\frac{x+y^2}{x^2+1}$ $\quad \nabla f = \left(\frac{x^2+1-(x+y^2)2x}{(x^2+1)^2}, \frac{2y}{x^2+1} \right)$

$\ln(1+x^2+y^2)$ $\quad \nabla f = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right)$

$y\ln(x)$ $\quad \nabla f = \left(\frac{y}{x}, \ln(x) \right)$

$D = \{x > 0\}$