UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Probabilità

Marco Isopi

7. Calcolo combinatorio II

Scopo della lezione

Obiettivi della lezione:

1. introdurre nozioni combinatorie di base e vedere alcune applicazioni al modello classico;
2. imparare a contare in situazioni dove l'ordine non conta.

Nella lezione precedente abbiamo visto alcuni problemi di conteggio in cui si teneva conto dell'ordine degli oggetti.

Ci occuperemo ora di problemi di conteggio in cui l'ordine non conta e confronteremo i risultati che otterremo con le situazioni in cui invece l'ordine è importante.

Supponiamo di avere 13 oggetti distinti e di doverne scegliere un gruppo da 4.

In quanti modi possiamo farlo?

La prima risposta che potrebbe venirci in mente è $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$.

Ma non è la risposta corretta.

Coefficienti binomiali

Gli stessi oggetti scelti in ordine diverso formano lo stesso gruppo.

Ci sono 4! modi di ordinare i membri del gruppo. Quindi se scrivessimo una lista di tutte le 17160 scelte ordinate, ogni gruppo vi comparirebbe 24 volte.

I gruppi non ordinati sono quindi $\frac{17160}{24} = 715$.

In generale sono possibili $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ scelte di k oggetti fra n.

Coefficienti binomiali

Useremo la notazione $\binom{n}{k}$ per indicare $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Il simbolo $\binom{n}{k}$ è detto **coefficiente binomiale** e conta il numero di modi in cui si possono scegliere k oggetti da n oggetti.

Alcune proprietà

Vediamo ora alcune proprietà algebriche dei coefficienti binomiali la cui verifica è immediata dalla definizione.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Inoltre è utile definire $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$.

Un primo esempio

Troviamo la probabilità di avere il re di cuori in una mano di poker.

Una mano di poker è composta di 5 carte scelte fra 52.
Il numero totale di mani è quindi $\binom{52}{5}$.

Le mani che contengono il re di cuori sono $\binom{51}{4}$. Infatti una volta imposta la presenza del re di cuori bisogna scegliere le 4 restanti carte fra 51.

Abbiamo quindi

$$\mathbf{P}(K_{\text{cuori}}) = \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{51!}{4!47!} \cdot \frac{5!47!}{52!} = \frac{5}{52}.$$

Un primo esempio

Per trovare la probabilità di *non* avere il re di cuori contiamo le mani che non contengono il re di cuori.

Dobbiamo scegliere 5 carte fra 51 (tutte meno il re di cuori). Le scelte possibili sono $\binom{51}{5}$.

Abbiamo quindi

$$\mathbf{P}(\text{no } K_{\text{cuori}}) = \frac{\binom{51}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{51!}{4!47!} \cdot \frac{5!47!}{52!} = \frac{47}{52}$$

Avremmo potuto anche basarci sulla risposta alla domanda precedente, cioè

$$\mathbf{P}(\text{no } K_{\text{cuori}}) = 1 - \mathbf{P}(K_{\text{cuori}}) = 1 - \frac{5}{52} = \frac{47}{52}$$

Scelte ordinate e non

Sia $9 \cdot 8 \cdot 7$ che $\binom{9}{3}$ contano il numero di modi di scegliere 3 oggetti fra 9. Ma la prima scelta è ordinata e la seconda no.

Per calcolare la probabilità di un evento nel modello classico occorre trovare la cardinalità di due insiemi, quello dei casi favorevoli e quello dei casi possibili. In molti casi è possibile contare sia le scelte ordinate che le scelte non ordinate.

È però indispensabile essere coerenti. Se nel contare i casi favorevoli abbiamo operato una scelta, dobbiamo operare la stessa scelta nel contare i casi possibili.

Troviamo la probabilità di ottenere una mano servita di soli cuori giocando a poker.

Contiamo il modi di scegliere 5 carte di cuori da 13 e dividiamo per il numero di modi di scegliere 5 carte da 52.

$$\mathbf{P}(\text{tutti cuori}) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{13!}{5!\,8!} \cdot \frac{5!\,47!}{52!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

Avremmo potuto anche decidere di contare mani ordinate.

Immaginiamo di contare scegliendo le carte una alla volta.

Troviamo:

$$\mathbf{P}(\text{tutti cuori}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

Scelte ordinate e non

Naturalmente le due risposte coincidono.

Un errore comune rispetto al quale bisogna sempre stare in guardia è usare criteri diversi per contare le quantità al numeratore e al denominatore.

Ulteriori esempi

Vediamo adesso alcuni esempi più complessi.

Bisogna formare un gruppo di 7 persone pescando fra 6 uomini, 7 donne e 8 bambini.

Calcoliamo la probabilità che contenga 2 uomini, 4 donne e 1 bambino.
I casi possibili sono ovviamente $\binom{21}{7}$.

Per i casi favorevoli, 2 uomini possono essere scelti in $\binom{6}{2}$ modi, 4 donne in $\binom{7}{4}$ modi e un bambino in 8 modi. Pertanto

$$\mathbf{P}(2U, 4D, 1B) = \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{4} \cdot 8}{\binom{21}{7}}$$

Se invece chiediamo solo che ci siano esattamente 2 uomini, questi possono essere scelti in $\binom{6}{2}$ modi, e gli altri 5 in $\binom{15}{5}$.

Quindi

$$\mathbf{P}(2\mathrm{U}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{15}{5}}{\binom{21}{7}}.$$

Ulteriori esempi

Un'urna contiene 40 palle bianche, 50 palle rosse e 60 nere.
20 palle vengono estratte senza reinserimento.

Calcoliamo la probabilità di estrarre 10 bianche, 4 rosse, sei nere.
I casi possibili sono $\binom{150}{20}$.

Per i casi favorevoli dobbiamo scegliere 10 palle bianche fra 40, 4 rosse fra 50 e 6 nere fra 60.

$$\mathbf{P}(10B, 4R, 6N) = \frac{\binom{40}{10}\binom{50}{4}\binom{60}{6}}{\binom{150}{20}}$$

Ulteriori esempi

Se invece chiediamo solo che ci siano esattamente 10 palle bianche, queste possono essere scelte in $\binom{40}{10}$ modi, e le altre 10 in $\binom{110}{10}$.

$$\mathbf{P}(10B) = \frac{\binom{40}{10}\binom{100}{10}}{\binom{150}{20}}.$$