UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Algebra

Alessandro D'Andrea

22. Dipendenza lineare

Richiami

- Un modo semplice di indicare un sottospazio vettoriale è quello di darne generatori
- I generatori possono essere scelti in maniera non ottimale, ridondante
- Oggi: **Dipendenza e indipendenza lineare**
- **Un'applicazione lineare $K^m \to K^n$ non può essere iniettiva se $m > n$**

Indipendenza lineare - I

Il nostro obiettivo è quello di fornire una descrizione efficiente di un sottospazio U di uno spazio vettoriale V: il modo naturale è quello di fornire generatori $u_1, \ldots, u_n$ del sottospazio vettoriale U.

Comunque, anche quando $u_1, \ldots, u_n$ generano U, potrebbero non essere tutti davvero necessari. Ad esempio, se uno tra i vettori $u_1, \ldots, u_n$ è 0, allora posso rimuoverlo poiché non gioca alcun ruolo nelle combinazioni lineari.

Allo stesso modo, se due tra i vettori $u_1, \ldots, u_n$ sono uguali, posso rimuoverne uno senza cambiare il sottospazio vettoriale generato.

Il concetto che descrive la minimalità, o l'irridondanza, di un insieme di generatori è quello di indipendenza lineare.

Indipendenza lineare - II

Sia V uno spazio vettoriale (su campo K). Degli elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V si dicono *linearmente indipendenti* se l'unico modo di avere

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

è quello di scegliere $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Attenzione: comunque siano scelti $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, la combinazione lineare

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$$

fornisce sempre il vettore nullo come risultato.

Chiedere che $v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente indipendenti è un'altra cosa: nessuna altra scelta dei coefficienti della combinazione lineare deve fornire il vettore nullo come risultato.

Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **non** sono linearmente indipendenti, allora si dicono linearmente dipendenti.

Prime proprietà

Conseguenze immediate:

- La lineare indipendenza dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ non dipende dall'ordine in cui sono elencati.
- Se uno tra i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è nullo, allora i vettori sono linearmente dipendenti.
  - Ad esempio, se $v_1 = 0$, allora $1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$.
- Se due tra i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono uguali, allora i vettori sono linearmente dipendenti.
  - Ad esempio, se $v_1 = v_2$, allora $1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$.
- Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, e ne rimuovo uno, quelli che rimangono sono linearmente indipendenti.
  - Una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli dei vettori che rimangono sarebbe anche una combinazione lineare nulla dei vettori iniziali.
- Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti, e ne aggiungo altri, quelli che ottengo sono ancora linearmente dipendenti.

Una riformulazione - I

- Dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri.
- Dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Le due affermazioni sono chiaramente equivalenti. Dimostro la seconda: se v_1 è combinazione lineare di $v_2, \ldots, v_n$, allora

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n,$$

e quindi

$$1 \cdot v_1 - \alpha_2 \cdot v_2 - \ldots - \alpha_n \cdot v_n = 0,$$

che è una combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli (il primo è 1).

Pertanto, se uno dei vettori è combinazione lineare degli altri, allora i vettori sono linearmente dipendenti.

Una riformulazione - II

- Dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Viceversa, se i vettori sono linearmente dipendenti, allora esiste una combinazione lineare nulla

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

a coefficienti non tutti nulli.

Se, ad esempio, $\alpha_1 \neq 0$, allora moltiplico tutto per α_1^{-1} e ottengo

$$v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n = 0$$

e quindi

$$v_1 = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n\right)$$

è una combinazione lineare di $v_2, \ldots, v_n$.

Un'altra riformulazione

- Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora ogni $v \in V$ si esprime come loro combinazione lineare in al più una maniera.
- Se anche solo un elemento $v \in V$ si esprime come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ in più di una maniera, allora $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Dimostriamo la seconda affermazione: se

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$
$$v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n,$$

sottraendo membro a membro, si ottiene

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n.$$

Se le due espressioni di v come combinazione lineare differiscono in almeno un coefficiente, otteniamo una combinazione lineare nulla dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ a coefficienti non tutti nulli. Pertanto, $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Indipendenza lineare in K^n

Come verifichiamo se $v_1, \dots, v_m \in K^n$ sono vettori linearmente indipendenti? Dobbiamo controllare che l'equazione $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ abbia come unica soluzione $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Questo equivale a risolvere un sistema di equazioni lineari. Vediamo un esempio: i vettori $v_1 = (1, 2, 4)$, $v_2 = (2, -1, 3)$, $v_3 = (3, -4, 2)$ in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti?

Dobbiamo trovare le soluzioni di $x_1(1, 2, 4) + x_2(2, -1, 3) + x_3(3, -4, 2) = (0, 0, 0)$. Sviluppando i prodotti, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Andiamo di eliminazione di Gauss.

Un esempio in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice possiede due pivot, e quindi posso descrivere le soluzioni del sistema utilizzando l'incognita senza pivot come parametro. Questo vuol dire che $(0, 0, 0)$ non è l'unica soluzione del sistema.

E' importante osservare come le colonne della matrice di partenza siano i vettori dei quali andava stabilita la lineare (in)dipendenza.

Un procedimento generale

Se ho dei vettori $v_1, \ldots, v_m \in K^n$, e devo stabilire se siano linearmente dipendenti o indipendenti, procedo come segue:

- Li scrivo come colonne di una matrice (che avrà n righe e m colonne)
- Eseguo il procedimento di eliminazione
- Se ottengo un pivot per ogni colonna, allora i vettori sono linearmente indipendenti
  - In questo caso, il sistema lineare omogeneo, che calcola i coefficienti da dare ad una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$ per ottenere il vettore nullo come risultato, ha per unica soluzione quella banale.
- Se il numero dei pivot è minore del numero di colonne, allora i vettori sono linearmente dipendenti
  - Il sistema lineare omogeneo ha in questo caso altre soluzioni oltre a quella tutta nulla.

Una facile conseguenza - I

Per la particolare forma delle matrici a gradoni, vi è al più un pivot ogni riga e al più un pivot ogni colonna; il numero dei pivot è quindi limitato sia dal numero delle righe che dal numero delle colonne.

Se ho una matrice $m \times n$, il numero dei pivot al termine del procedimento di eliminazione è minore o uguale sia di m che di n.

Se ho m colonne e n righe, e $m > n$, allora il numero di pivot è $\#pivot \leq n < m$, e quindi non posso avere un pivot in ogni colonna

Quando m è maggiore di n, un insieme di m vettori in K^n non è mai linearmente indipendente.

Una facile conseguenza - II

Abbiamo visto che il nucleo di un'applicazione lineare $T : K^m \to K^n$ si calcola risolvendo il sistema lineare omogeneo che ha per coefficienti la matrice associata a T.

Ripetendo il ragionamento appena fatto, T è iniettiva se e solo se al termine dell'eliminazione ho un pivot su ogni colonna

Pertanto, se m è maggiore di n, allora un'applicazione K-lineare $T : K^m \to K^n$ non può mai essere iniettiva.

Una facile conseguenza - III

- Ci si convince facilmente che se un'applicazione lineare è invertibile, anche la sua inversa è invertibile.
  - Se $T(x) = y$ e $T(x') = y'$, allora $T^{-1}(y) = x$ e $T^{-1}(y') = x'$. Ma poiché $T(x + x') = T(x) + T(x') = y + y'$, allora $T^{-1}(y + y') = x + x' = T^{-1}(y) + T^{-1}(y')$.
  - Allo stesso modo si mostra che $T^{-1}(\lambda y) = \lambda T^{-1}(y)$.

Se $T : K^m \to K^n$ è un'applicazione lineare invertibile, allora sia T che la sua inversa $T^{-1} : K^n \to K^m$ sono iniettive. Di conseguenza m non può essere maggiore di n, e n non può essere maggiore di m.

Se $T : K^m \to K^n$ è un'applicazione lineare invertibile, allora $m = n$.

Questa osservazione sarà alla base del concetto di dimensione.