UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Metodi matematici per l'Informatica

Modulo 3.2 – Relazioni (parte II)

Docente: Pietro Cenciarelli

UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *transitiva* se, per ogni a, b e $c \in A$, se a R b e b R c, allora a R c.

$\{(a, b) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) : a \subseteq b\}$ ☺

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n \leq m\}$ ☺

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n < m\}$ ☺

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq A \times A$ è *transitiva* se, per ogni a, b e c $\in$ A,
se a R b e b R c, allora a R c.

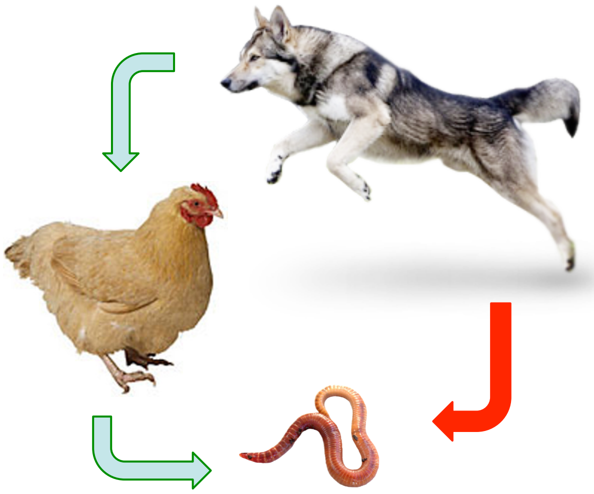
$\{(a, b) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) : a \subseteq b\}$ ☺

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n \leq m\}$ ☺

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n < m\}$ ☺

$\{(a, b) \in A \times A : a \text{ mangia } b\}$ ☹



Chiusura

Un insieme B è detto *chiusura* di un insieme A *rispetto ad una proprietà* P quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. B gode della proprietà P, ovvero P(B)
2. $A \subseteq B$
3. per ogni insieme C, se P(C) e $A \subseteq C$ allora $B \subseteq C$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n \leq m\}$

$\{(n, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : n < m\} \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\} =$

$\leq$ è la *chiusura riflessiva* di $<$

Nota: non esiste una chiusura *antiriflessiva* di $\leq$!

Quando esiste un insieme B tale che P(B) e $A \subseteq B$, diciamo che A è *P-maggiorabile*. Nota: A P-maggiorabile $\not\Rightarrow$ $\exists$ chiusura di A rispetto a P

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Chiusura

Un insieme B è detto *chiusura* di un insieme A *rispetto ad una proprietà* P quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. B gode della proprietà P, ovvero P(B)
2. A ⊆ B
3. per ogni insieme C, se P(C) e A ⊆ C allora B ⊆ C

La chiusura di un insieme rispetto a una proprietà, *se esiste,* è unica!

Infatti: supponiamo che B e B′ sono entrambe chiusure di A rispetto a P;

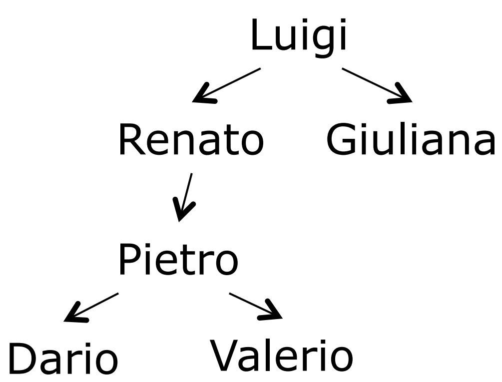
per le proprietà 1 e 2, vale P(B′) e A ⊆ B′; dunque, per la proprietà 3, B ⊆ B′;

simmetricamente si ha B′ ⊆ B, e dunque B = B′.

Chiusura

Un insieme B è detto *chiusura* di un insieme A *rispetto ad una proprietà* P quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. B gode della proprietà P, ovvero P(B)
2. $A \subseteq B$
3. per ogni insieme C, se P(C) e $A \subseteq C$ allora $B \subseteq C$



A = *essere genitore di*

B = *essere antenato di*

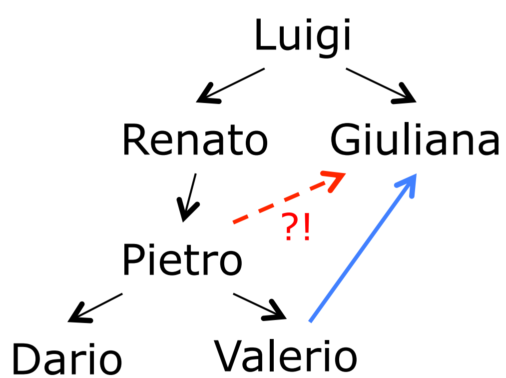
$= A \cup \{$(Renato, Dario), (Luigi, Valerio), … $\}$

B è la *chiusura transitiva* di A

Chiusura

Un insieme B è detto *chiusura* di un insieme A *rispetto ad una proprietà* P quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. B gode della proprietà P, ovvero P(B)
2. $A \subseteq B$
3. per ogni insieme C, se P(C) e $A \subseteq C$ allora $B \subseteq C$



R = *essere più basso di* (transitiva)

B = *essere antenato di* (transitiva)

$R \cup B$ = *essere antenato o più basso di*

(Pietro, Valerio), (Valerio, Giuliana) $\in R \cup B$

L'unione non preserva la transitività

L'intersezione sì!

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Chiusura

Un insieme B è detto *chiusura* di un insieme A *rispetto ad una proprietà* P quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. B gode della proprietà P, ovvero P(B)
2. $A \subseteq B$
3. per ogni insieme C, se P(C) e $A \subseteq C$ allora $B \subseteq C$

Infatti: siano R e S relazioni transitive; se $(a,b), (b,c) \in R \cap S$ allora $(a,b), (b,c) \in R$ e $(a,b), (b,c) \in S$; per la transitività di R e S, $(a,c) \in R$ e $(a,c) \in S$, e dunque $(a,c) \in R \cap S$.

L'unione non preserva la transitività

L'intersezione sì!

Chiusura e intersezione

Un insieme B è detto *chiusura* di un insieme A *rispetto ad una proprietà* P quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. B gode della proprietà P, ovvero P(B)
2. A ⊆ B
3. per ogni insieme C, se P(C) e A ⊆ C allora B ⊆ C

Se la chiusura rispetto a P esiste per ogni insieme P-maggiorabile, allora P è preservato dall'intersezione   *Non è vero il vice versa!*

$$\begin{tikzcd}
A & & A' \\
& C \arrow[ul, dash, "\subseteq"'] \arrow[ur, dash, "\subseteq"] & \\
& A\cap A' \arrow[uul, dash, "\subseteq"] \arrow[u, dash, "="] \arrow[uur, dash, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

Chiusura e intersezione

Sia P(A) la seguente proprietà: esiste k tale che A = $\{x \in \mathcal{R} : x<k\}$. P è preservato dall'intersezione. $\{5\}$ è P-maggiorabile da un qualunque $A_k = \{x \in \mathcal{R} : x<k\}$ con $k>5$, ma non ne esiste la chiusura rispetto a P perché la famiglia degli insiemi A_k con $k>5$ non ha elemento minimo.

Se la chiusura rispetto a P esiste per ogni insieme P-maggiorabile, allora P è preservato dall'intersezione *Non è vero il vice versa!*

Se la chiusura rispetto a P esiste per ogni insieme P-maggiorabile, allora P è preservato dall'intersezione infinita. E viceversa!

Esercizio: quali proprietà di una relazione $R \subseteq AXA$ non sono preservate dall'intersezione?