Université de Montpellier

L2 HAX305X

Analyse numérique élémentaire
TP2 : Résolution d'équations non linéaires

Opérateur	Description
`scipy.optimize.fsolve(f,a)`	trouve les racines de f(x)=0 avec une estimation de la racine a
`np.roots(p)`	trouve les racines du polynôme p en lui donnant les coefficients

Exercice 1 **1.** Utiliser la fonction `roots` pour trouver la valeur de $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + ...}}}$

2. Utiliser la fonction `fsolve` pour trouver la valeur de $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + ...}}}$

Rappel sur les méthodes itératives :

Méthode de la dichotomie : a_0, b_0 donnés

$$\text{Si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0, \text{ alors } a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$\text{sinon } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$$

Méthode de la sécante : x_0, x_1 donnés

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Méthode de Newton : x_0 donné

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Méthode du point fixe : x_0 donné

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad \text{avec "} g(x) = x \iff f(x) = 0\text{"}$$

Exercice 2 L'équation de Kepler, développée dans les deux premières décennies du dix-septième siècle, est une équation non linéaire dont la résolution permet celle d'un problème de mécanique céleste.
En analysant les relevés de position de la planète Mars autour du Soleil, l'astronome Johannes Kepler détermina que la trajectoire d'un satellite, c'est-à-dire un corps en orbite autour d'un autre corps plus massif sous l'effet de l'attraction gravitationnelle, avait la forme d'une ellipse dont l'un des foyers est occupé par le corps massif. Ici on choisit l'excentricité $e = 1/2$ et l'anomalie moyenne égale à 1. On considère donc l'équation de Kepler :

$$x - \frac{1}{2}sinx = 1$$

1. Complèter la méthode de la dichotomie pour déterminer la valeur approchée de x sur $[1, 2]$ à 10^{-8} près.

```
a=1;
b=2;
def f(x):


epsilon=10**(-8);

if f(a) * f(b) >= 0:
     print(".                                    ")

while (b - a) > epsilon:
    m =
     if

     else:


print(                                                            )
```

2. Programmer la méthode de Newton pour déterminer la valeur approchée de x avec $x_0 = 2$ à 10^{-8} près.
3. Calculer $\dfrac{|x_{n+1} - x_{n+2}|}{|x_n - x_{n+1}|}$ et $\dfrac{|x_{n+1} - x_{n+2}|}{|x_n - x_{n+1}|^2}$. Qu'en déduisez vous par rapport à ces quantités ?
4. Soit $f(x) = x - \dfrac{1}{2} sin x - 1$ et $\epsilon = 10^{-8}$.
Utiliser la méthode du point fixe avec $x_0 = 2$ et comme condition d'arrêt le fait que $f(x_k - \epsilon) \leq 0$ et $f(x_k + \epsilon) \geq 0$. Que pensez vous de ce critère d'arrêt ?

Exercice 3 **1.** Représenter la fonction $f(x) = xe^{-x}$ sur l'intervalle $[-1, 5]$.
2. Appliquer la méthode de Newton à la fonction f à partir de $x_0 = 1.5$. Calculer les 10 premières valeurs obtenues. Qu'en déduisez vous ?

Exercice 4 Programmer le dernier exemple du cours et retrouver le tableau de la dernière slide.