Université de Montpellier

L2 HAX305X

Analyse numérique élémentaire
TP3 : Interpolation polynômiale

---

1 Interpolation de Lagrange

Pour l'interpolation on impose que p et f coincident en certains nœuds : les points d'interpolation.

Opérateur	Description
`np.polyfit(x,y,n)`	calcule les coefficients du polynôme p de degré n passant aux points (x,y)
`np.polyval(p,x)`	évalue le polynôme p aux points x
`np.interp(xi,x,y)`	calcule l'interpolation 1D **linéaire par morceaux** entre x,y aux points xi

Rappel : Le polynôme de degré n pour n+1 points d'interpolation (y_i) i=0..n est donné par :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \quad \text{où } L_i(x) = \prod_{j\neq i, j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Exercice 1 En relevant toutes les 10 secondes la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique, on a obtenu :

t	0	10	20	30
v	2.00	1.89	1.72	1.44

1. Tracer le polynôme linéaire par morceaux et les données et calculer une approximation de la vitesse pour $t = 15$.
2. Trouver une approximation de la vitesse en $t = 15$ via un polynôme interpolant de degré 3 et tracer également le polynôme.

Exercice 2 Phénomène de Runge
Voici un polynôme d'interpolation célèbre introduit par Carl Runge. On va interpoler la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle [-5,5].
1. Calculer numériquement les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré n=4, 5, 10 sur l'intervalle [-5,5] de f avec des nœuds équirépartis. Calculer le maximum de l'erreur d'interpolation pour les différentes valeurs de n.
En traçant sur un graphique la fonction et les polynômes, on peut observer le phénomène de non convergence (phénomène de Runge). L'approximation par le polynôme n'est pas toujours uniforme.

```
n = [4, 5, 10]
Y = np.arange(-5, 5.01, 1/100)
F = 1 / (1 + Y**2)

plt.plot(Y, F, label='Fonction reelle')

for i in range(len(n)):
    X =
    F =
    Fi =
    P =
    E =

    plt.plot(Y, P, label=f'n={n[i]}, E={E}')

plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

2. Répéter avec les nœuds de Tchebychev définis par (a=-5 et b=5)

$$x_i = \frac{1}{2}(a + b + (b - a)\cos(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2})), \quad i = 0, ..., n$$

Quelle remarque pouvez vous faire ?

2 Interpolation d'Hermite

L'acronyme `pchip` est l'abbréviation de piecewise cubic Hermite interpolating polynomial.

Opérateur	Description
`pchip interpolate(x,y,u)`	calcule le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré 3 par morceaux pour les points d'interpolation (x_i, y_i) et évalué en u_i

Exercice 3 Les valeurs suivantes

Débit	0	35	0.125	5	0	5	1	0.5	0.125	0

représentent des mesures du débit sanguin dans une section de l'artère carotide pendant un battement cardiaque. La fréquence d'acquisition des données est constante et égale à 10/T, où T = 1 s est la période du battement. Représenter ces données avec des fonctions d'Hermite cubiques.

3 Dérivation numérique

Exercice 4 Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + arcsin(x))$.
Pour $x_0 = 0.5$, calculer des approximations de $f'(x_0)$ à l'ordre 2 avec $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$.
Dans chacun des cas, calculer l'erreur en valeur absolue. Montrer qu'elle se comporte en $O(h^2)$ en représentant un graphe log-log de l'erreur en fonction du pas h.