

L2 HAX305X

ANALYSE NUMÉRIQUE ÉLÉMENTAIRE
TP4 : Intégration numérique

Rappel sur les méthodes de Newton-Cotes sur $[x_i, x_{i+1}]$:

Méthode des rectangles :

$$\text{à gauche} \quad I_i(f) = h_i f(x_i)$$

$$\text{à droite} \quad I_i(f) = h_i f(x_{i+1})$$

Méthode du point milieu : $I_i(f) = h_i f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

Méthode des trapèzes : $I_i(f) = \frac{h_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$

Méthode de Simpson : $I_i(f) = \frac{h_i}{6}\left(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right)$

Exercice 1 Calculer $\int_1^3 \frac{(\sin x)^2}{x} dx$ en utilisant successivement

- la méthode des rectangles sur 5 sous-intervalles,
- la méthode des trapèzes sur 5 sous-intervalles,
- la méthode de Simpson sur 5 sous-intervalles,
- la méthode de Gauss à 3 points

Comparer les résultats.

Opérateur	Description
<code>np.sum(x)</code>	somme toutes les composantes du vecteur x
<code>np.random.rand(n, m)</code>	retourne une matrice (n,m) contenant des nombres aleatoires de loi uniforme compris entre 0 et 1
<code>np.mean(x)</code>	retourne la moyenne pour un vecteur x

Exercice 2 1. L'orbite décrite par une planète autour du soleil est une ellipse. La longueur de cette trajectoire est $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_1^2 \sin^2(t) + r_2^2 \cos^2(t)} dt$. Calculer l'approximation de l'intégrale I par la méthode de Monte Carlo avec 10000 variables et déterminer la longueur de l'orbite de Mercure avec les données numériques : $r_1 = 57,9 \cdot 10^6 \text{ km}$ et $r_2 = 56,7 \cdot 10^6 \text{ km}$.

2. Comparer le résultat avec la méthode des rectangles à gauche.

Exercice 3 Programmer la méthode des rectangles à droite pour l'approximation de

$$I = \int_0^1 x^{-3/4}(1+x^2)dx = \frac{40}{9}$$

.

Reprendre les mêmes calculs avec l'intégrale obtenue après changement de variable $x = u^4$:

$$I = 4 \int_0^1 (1+u^8)du$$

Comparer les ordres de convergence avec $N=[100\ 200\ 400\ 800\ 1600]$, le nombre de sous intervalles en traçant un graphe loglog de l'erreur pour chaque formule en fonction de N .