

TOÁN 11	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
BÀI 1	

Mục lục

Phần A. CÂU HỎI.....	1
Dạng 1. Tập xác định của hàm số lượng giác.....	1
Dạng 2. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác.....	7
Dạng 3. Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác.....	7
Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm số lượng giác.....	9
Dạng 5. Tập giá trị, MIN_MAX của hàm số lượng giác.....	12
Dạng 5.1 Biến đổi thông thường, sử dụng bất đẳng thức cơ bản của sin, cos.....	12
Dạng 5.2 Đặt ẩn phụ.....	13
Dạng 5.3 Áp dụng bất đẳng thức đại số.....	14
Dạng 6. Đồ thị của hàm số lượng giác.....	14
Phần B. LỜI GIẢI THAM KHẢO.....	17
Dạng 1. Tập xác định của hàm số lượng giác.....	17
Dạng 2. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác.....	21
Dạng 3. Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác.....	22
Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm số lượng giác.....	24
Dạng 5. Tập giá trị, MIN_MAX của hàm số lượng giác.....	28
Dạng 5.1 Biến đổi thông thường, sử dụng bất đẳng thức cơ bản của sin, cos.....	28
Dạng 5.2 Đặt ẩn phụ.....	29
Dạng 5.3 Áp dụng bất đẳng thức đại số.....	31
Dạng 6. Đồ thị của hàm số lượng giác.....	31

Phần A. CÂU HỎI

Dạng 1. Tập xác định của hàm số lượng giác

Câu 1. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là:

- A. $R \setminus \{0\}$ B. $R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ C. R D. $R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$

Câu 2. (THPT CHUYÊN BẮC NINH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Hàm số $y = \frac{2 \sin x + 1}{1 - \cos x}$ xác định khi

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ B. $x \neq k\pi$ C. $x \neq k2\pi$ D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Câu 3. (THPT THIẾU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot x + \sin 5x + \cos x$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 4. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1-3\cos x}{\sin x}$

A. $x \neq k2\pi$.

B. $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq k\pi$.

Câu 5. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Chọn khẳng định sai?

A. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là \mathbb{R} .

C. Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là \mathbb{R} .

D. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 6. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỔ NĂM 2018-2019) Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 2}$ là

A. $(-2; +\infty)$

B. $(2; +\infty)$

C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

D. \mathbb{R} .

Câu 7. (GKI THPT NGHĨA HÙNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019) Hàm số nào có tập xác định là \mathbb{R} :

A. $y = \frac{\cos^2 x + 2}{\cot^2 x + 1}$

B. $y = \sqrt{2 + 2\cos x}$

C. $y = \cot 3x - \tan x$

D. $y = \sin \sqrt{x+2}$

Câu 10. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

A. $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 11. (THPT NGÔ GIA TỰ VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 12. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$

Câu 13. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019) Tập xác định của hàm số $y = \cot 2x - \tan x$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 14. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập xác định của hàm số $y = 2 \sin x$ là

A. $[0; 2].$

B. $[-1; 1].$

C. $\mathbb{R}.$

D. $[-2; 2].$

Câu 15. (THPT HOA LƯU A - LẦN 1 - 2018) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 16. (THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018) Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\cos x}$ là tập nào sau đây?

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 17. (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Xét bốn mệnh đề sau:

(1) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}.$

(2) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}.$

(3) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(4) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Số mệnh đề đúng là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 18. (THPT LƯƠNG VĂN TỤY - NINH BÌNH - LẦN 1 - 2018) Tập xác định của hàm số $y = -\tan x$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 19. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ là

A. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 20. (THPT HẢI AN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 21. (THPT CHU VĂN AN - THÁI NGUYÊN - 2018) Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4} + \pi \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}.$

Câu 22. (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Tập $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập xác định của hàm số nào sau đây?

A. $y = \cot x.$

B. $y = \cot 2x.$

C. $y = \tan x.$

D. $y = \tan 2x$

Câu 23. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{5}{\cos x + 1}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 24. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - 2x}{\sin 2x}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 25. (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - 2018) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 26. (THPT HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k2\pi \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; x \neq k\pi \right\}.$

Câu 27. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 3 - 2018) Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}.$

Câu 28. (THPT CHUYÊN BIÊN HÒA - HÀ NAM - 2018) Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 29. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NAM ĐỊNH - LẦN 2 - 2018) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Câu 30. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC - LẦN 1 - 2018) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sin x}{\tan x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ m\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi; m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + m\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi; m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 31. (THPT HÒA VANG - ĐÀ NẴNG - 2018) Tập xác định D của hàm số $y = \frac{2\tan x - 1}{3\sin x}$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 32. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos 3x}{\cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}$ là:

A. $R \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $R \setminus \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 33. Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{5\sin 2x + 3}{12\sin x} + \frac{\sqrt{\cos^2 x + 5}}{\cos x}$ là:

A. $D = R \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = R \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = R \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = R \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $\frac{1 - \cos x}{2\sin x + 1}$ là:

A. $D = R \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = R \setminus \left\{ \frac{7\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = R \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = R \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{7\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 35. Tập xác định của hàm số $\sqrt{\frac{5 - 3\cos 2x}{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}}$ là:

A. $D = R \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = R$.

C. $D = R \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = R \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 36. Tập xác định của hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ là:

A. $D = R \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = R \setminus \left\{ \frac{7\pi}{6} + k\pi, k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = R \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = R \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 37. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}$ là:

A. $D = R \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = R \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\text{C. } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{D. } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 38. Hàm số $y = \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)}{\cot^2 x + 1}$ có tập xác định là:

$$\text{A. } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{B. } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{C. } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi; k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{D. } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dạng 2. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

Câu 39. (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho các hàm số: $y = \sin 2x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$. Có bao nhiêu hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 40. (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Chu kỳ của hàm số $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ là số nào sau đây?

A. 0.

B. 2π .C. 4π .D. π .

Câu 41. (THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI - HÀ TĨNH - 2018) Chu kỳ của hàm số $y = \sin x$ là

A. $k2\pi$.B. π .C. 2π .D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 42. (SGD&ĐT BẮC NINH - 2018) Trong các hàm số $y = \tan x$; $y = \sin 2x$; $y = \sin x$; $y = \cot x$, có bao nhiêu hàm số thỏa mãn tính chất $f(x + k\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 43. (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Trong bốn hàm số: (1) $y = \cos 2x$, (2) $y = \sin x$; (3) $y = \tan 2x$; (4) $y = \cot 4x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π ?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 44. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Trong bốn hàm số: (1) $y = \cos 2x$, (2) $y = \sin x$; (3) $y = \tan 2x$; (4) $y = \cot 4x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π ?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 45. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm chu kỳ của hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$.

A. 5π .B. $\frac{\pi}{2}$.C. 4π .D. 2π

Câu 46. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm chẵn?

$$\text{A. } y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{B. } y = |\sin x|$$

$$\text{C. } y = 1 - \sin x$$

$$\text{D. } y = \sin x + \cos x$$

Dạng 3. Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác

Câu 47. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Chọn phát biểu **đúng**:

- A. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cot x$ đều là hàm số chẵn.
 B. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cot x$ đều là hàm số lẻ.
 C. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ đều là hàm số chẵn.
 D. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ đều là hàm số lẻ.

Câu 48. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018) Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. B. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
 C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 49. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \cot 4x$. B. $y = \tan 6x$. C. $y = \sin 2x$. D. $y = \cos x$.

Câu 50. (THPT THẠCH THANH 2 - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
 C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Câu 51. (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin|2016x| + \cos 2017x$. B. $y = 2016 \cos x + 2017 \sin x$.
 C. $y = \cot 2015x - 2016 \sin x$. D. $y = \tan 2016x + \cot 2017x$.

Câu 52. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Đồ thị hàm số nào sau đây không có trục đối xứng?

- A. $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \cos x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. B. $y = f(x) = \tan^2 3x$.
 C. $y = f(x) = \cos 3x$. D. $y = f(x) = x^2 + 5x - 2$.

Câu 53. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = -2 \cos x$. B. $y = -2 \sin x$. C. $y = 2 \sin(-x)$. D. $y = \sin x - \cos x$.

Câu 54. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$ thì $y = f(x)$ là

- A. Hàm số chẵn. B. Hàm số lẻ.
 C. Không chẵn không lẻ. D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 55. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, ta được $y = f(x)$ là:

- A. Hàm số chẵn. B. Hàm số lẻ.
 C. Không chẵn không lẻ. D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 56. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3 \sin^2 x$ và $g(x) = \sin \sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

- A. Hai hàm số $f(x); g(x)$ là hai hàm số lẻ.
 B. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn; hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ.
 C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ; hàm số $g(x)$ là hàm số không chẵn không lẻ.
 D. Cả hai hàm số $f(x); g(x)$ đều là hàm số không chẵn không lẻ.

Câu 57. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \sin^{2007} x + \cos nx$, với $n \in \mathbb{Z}$. Hàm số $y = f(x)$ là:

- A. Hàm số chẵn. B. Hàm số lẻ.
C. Không chẵn không lẻ. D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^{2004n} x + 2004}{\cos x}$, với $n \in \mathbb{Z}$. Xét các biểu thức sau:

- 1, Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.
- 2, Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
- 3, Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
- 4, Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
- 5, Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
- 6, Hàm số đã cho là hàm số không chẵn không lẻ.

Số phát biểu đúng trong sáu phát biểu trên là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = |x| \sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

- A. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
B. Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
C. Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
D. Hàm số có tập giá trị là $[-1; 1]$.

Câu 60. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.

- A. $m > 0$. B. $m < -1$. C. $m = 0$. D. $m = 2$.

Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm số lượng giác

Câu 61. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI - LẦN 2 - 2018) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng nào dưới đây.

- A. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
C. $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. D. $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 62. (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $y = \tan x$ nghịch biến trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos x$ đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
C. $y = \sin x$ đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. D. $y = \cot x$ nghịch biến trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 63. (SGD - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
B. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
D. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ có tiệm cận ngang.

Câu 64. (LÊ QUÝ ĐÔN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. B. $\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right)$. C. $\left(\frac{7\pi}{4}; 3\pi\right)$. D. $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$.

Câu 65. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH - HKII - 2018) Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

B. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm chẵn.

D. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ có tiệm cận ngang.

Câu 66. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

B. Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.

C. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 67. (THPT HẬU LỘC 2 - TH - 2018) Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Câu 68. Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 69. Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Câu 70. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 71. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 1 - \sin x$ trên một chu kì tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 72. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sin x - \cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1; 1]$.

D. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Câu 73. Chọn câu đúng?

A. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng.

B. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

D. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Câu 74. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ giảm.

(II) $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là:

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả 2 sai. D. Cả 2 đúng.

Câu 75. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $y = |\tan x|$ đồng biến trong $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- B. $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.
- D. $y = |\tan x|$ luôn nghịch biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 5. Tập giá trị, MIN_MAX của hàm số lượng giác

Dạng 5.1 Biến đổi thông thường, sử dụng bất đẳng thức cơ bản của sin, cos

Câu 76. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin x + 1$ là

- A. -1. B. 1. C. $-\frac{1}{2}$. D. 3.

Câu 77. (SGD&ĐT BẮC NINH - 2018) Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là:

- A. $[-2; 2]$. B. $[0; 2]$. C. $[-1; 1]$. D. $[0; 1]$.

Câu 78. (THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ - HÒA BÌNH - 2018) Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là?

- A. \mathbb{R} . B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $[-1; 1]$.

Câu 79. (SGD - HÀ TĨNH - HK 2 - 2018) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 - \sin x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $M = 1; m = -1$. B. $M = 2; m = 1$. C. $M = 3; m = 0$. D. $M = 3; m = 1$.

Câu 80. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 3 - 2018) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin 2x - 5$ lần lượt là:

- A. 3; -5. B. -2; -8. C. 2; -5. D. 8; 2.

Câu 81. (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc

- A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ C. $[-1; 1]$. D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Câu 82. (THPT HOA LƯU A - LẦN 1 - 2018) Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2$.

- A. $[-2; \sqrt{3}]$. B. $[-\sqrt{3}-3; \sqrt{3}-1]$. C. $[-4; 0]$. D. $[-2; 0]$

(THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{2 + \sin^3 x}$.

Câu 83.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 84. (THPT NGUYỄN HUỆ - NINH BÌNH - 2018) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (3 - 5 \sin x)^{2018}$ là M, m . Khi đó giá trị $M + m$ là

- A. $2^{2018}(1 + 2^{4036})$. B. 2^{2018} . C. 2^{4036} . D. 2^{6054} .

Câu 85. (THPT LÊ HOÀN - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + 4 \text{ bằng.}$$

- A. 7. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 86. (THPT NGUYỄN ĐỨC THUẬN - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Xét bốn mệnh đề sau:

(1): Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

(2): Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

(3): Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là \mathbb{R} .

(4): Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

Tìm số phát biểu đúng.

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 87. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 0$. D. $T = -1$.

Câu 88. (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$

- A. $\sqrt{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $6 - \sqrt{2}$. D. $6 + \sqrt{2}$.

Dạng 5.2 Đặt ẩn phụ

Câu 89. (THPT THANH CHUÔNG - NGHỆ AN - 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^2 x + \sin x + 1$ bằng

- A. 2. B. $\frac{11}{4}$. C. 1. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 90. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x + \cos x$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

- A. $M + m = \frac{7}{8}$. B. $M + m = \frac{8}{7}$. C. $M + m = \frac{9}{8}$. D. $M + m = \frac{9}{7}$.

Câu 91. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x - \sin x + 2$.

- A. $\min y = \frac{7}{4}; \max y = 4$. B. $\min y = \frac{7}{4}; \max y = 2$.

C. $\min y = -1; \max y = 1.$

D. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = 2.$

Dạng 5.3 Áp dụng bất đẳng thức đại số

Câu 92. Hàm số $y = 2 \cos x + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $5 + 2\sqrt{2}.$

B. $5 - 2\sqrt{2}.$

C. $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}.$

D. $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$

Câu 93. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x}$

A. $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{22}}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{11}}{2}.$

D. $1 + \sqrt{5}.$

Câu 94. Cho hàm số $y = \frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min y = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $\min y = \frac{2}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}$

C. $\min y = \frac{2}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $\min y = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}.$

Câu 95. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{\cos^2 x + 7 \sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + 7 \cos^2 x}$ là

A. $1 + \sqrt{7}$

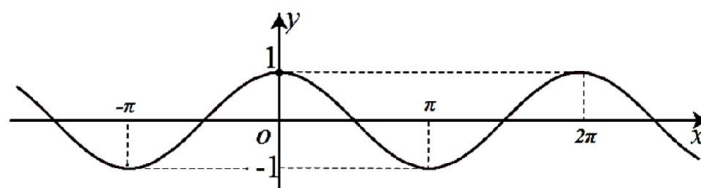
B. $-1 + \sqrt{7}$

C. 4

D. 14

Dạng 6. Đồ thị của hàm số lượng giác

Câu 96. (LỚP 11 THPT NGÔ QUYỀN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = 1 - \sin x$

B. $y = \cos x$

C. $y = \sin x$

D. $y = 1 + \sin x$

Câu 97. (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - 2018) Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ có đồ thị (C). Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị **không thể** thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị (C)?

A. $y = \sin x - \cos x.$

B. $y = \left| \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \right|.$

C. $y = -\sin x - \cos x.$

D. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$

Câu 98. (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Cho các mệnh đề sau

(I) Hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số chẵn.

(II) Hàm số $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.

(III) Hàm số $f(x) = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

(IV) Hàm số $f(x) = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

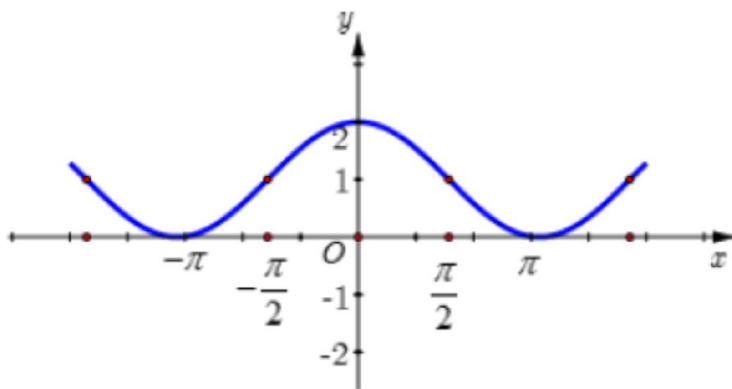
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 99. (THPT LƯƠNG VĂN TỤY - NINH BÌNH - LẦN 1 - 2018) Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \cos x + 1$.

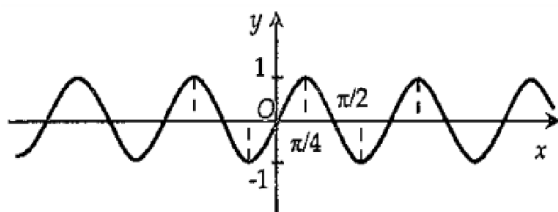
B. $y = 2 - \sin x$.

C. $y = 2 \cos x$.

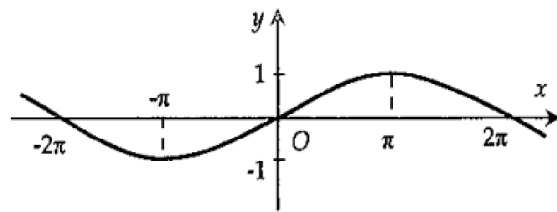
D. $y = \cos^2 x + 1$.

Câu 100. Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 \sin 2x$?

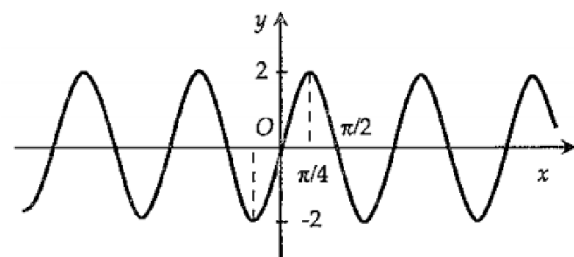
A.



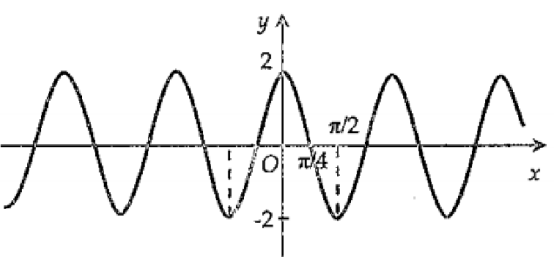
B.



C.



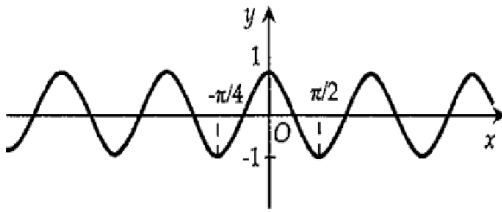
D.



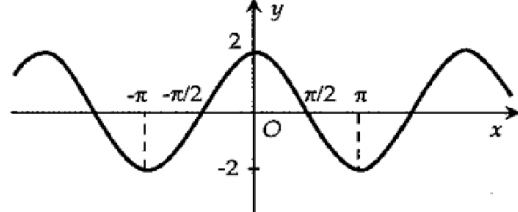
Lời giải

Câu 101. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$?

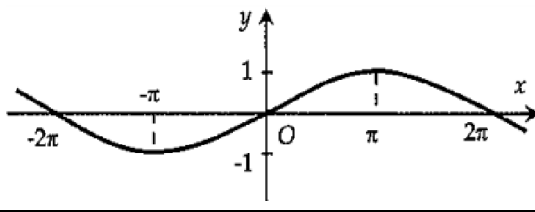
A.



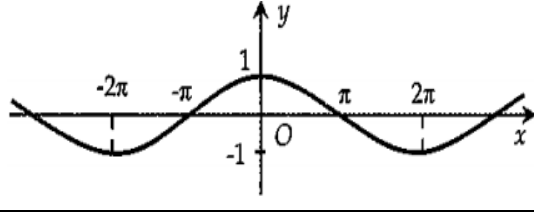
B.



C.

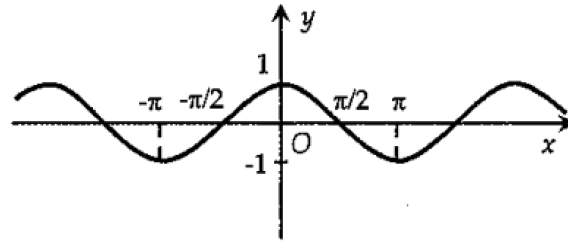


D.

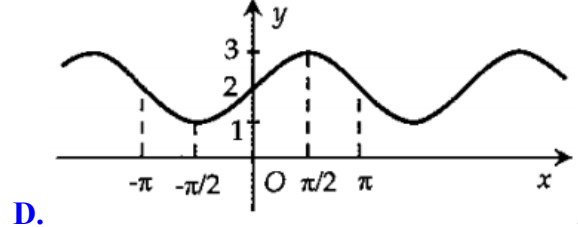
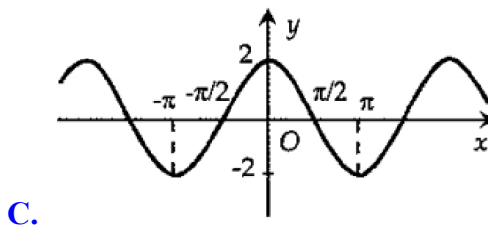
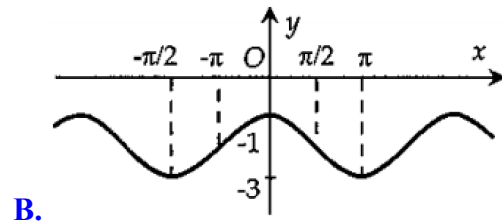
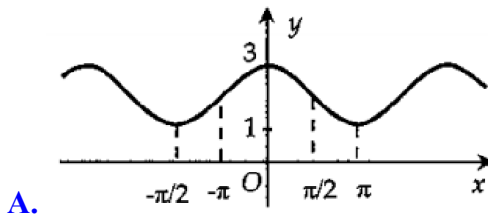


Lời giải

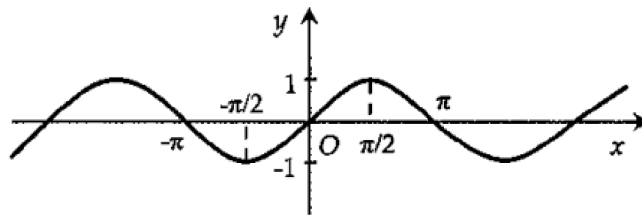
Câu 102. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ :



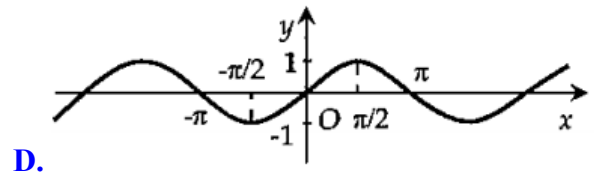
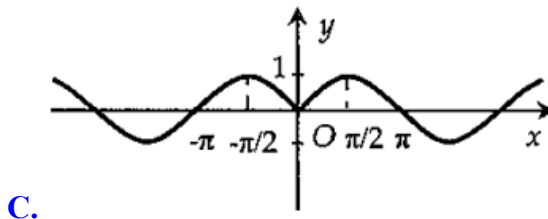
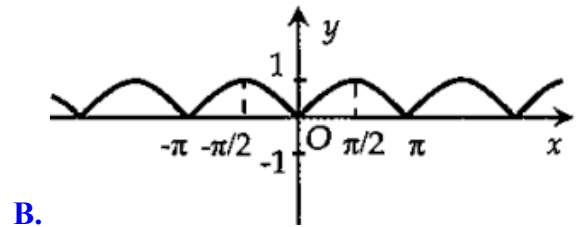
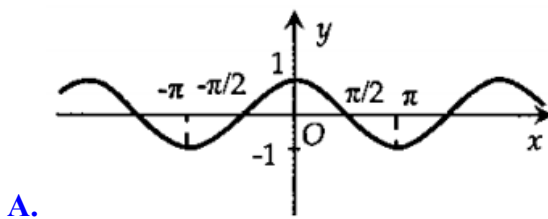
Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?



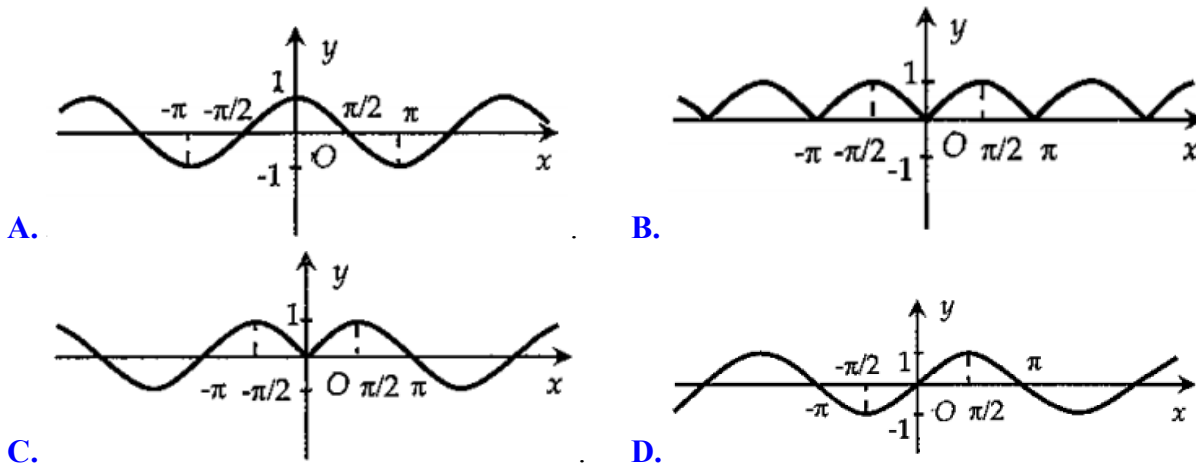
Câu 103. Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?



Câu 104. Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = |\sin x|$?

**Phần B. LỜI GIẢI THAM KHẢO****Dạng 1. Tập xác định của hàm số lượng giác****Câu 1. Chọn B**

Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 2. Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Chọn C

Hàm số xác định khi: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 4. $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.**Câu 5. Hàm số $y = \cot x$ xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.**

Hàm số $y = \sin x$ xác định với mọi x nên tập xác định là \mathbb{R} .

Hàm số $y = \cos x$ xác định với mọi x nên tập xác định là \mathbb{R} .

Hàm số $y = \tan x$ xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên tập xác định là

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 6. Chọn D

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $\sin x - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$

Câu 7. Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Chọn C.

+) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, suy ra tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Câu 9. Chọn B

$y = \sqrt{2+2\cos x}$ được xác định $\Leftrightarrow 2+2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$ (luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2+2\cos x}$ là \mathbb{R} .

Câu 10. Điều kiện $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

Câu 11. Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12. Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1-\cos x}{\sin x - 1}$ là

$$\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

Câu 13. Chọn D

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 14. Hàm số $y = 2\sin x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

Câu 15. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Câu 16.} \quad \text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Các mệnh đề đúng là:

(1) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

(2) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

(3) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 18. Hàm số $y = -\tan x$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 19. Hàm số xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20. Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin x \geq 0 \\ 1 + \sin x \geq 0 \end{cases}$.

Hàm số xác định khi $1 + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 21. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Hàm số $y = \cot 2x$ xác định khi $2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Câu 23. Đk: $\cos x + 1 \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 24. Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 25. Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi và chỉ khi $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Suy ra $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 26. Hàm số $y = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$ xác định khi: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 27. Hàm số xác định:

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 28. Hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 29. Hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 30. Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}, m, n \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Vậy Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + m\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi; m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 31. Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 32. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi $\cos 3x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Câu 33. Đáp án **B.**

Hàm số $f(x) = \frac{5\sin 2x + 3}{12\sin x} + \frac{\sqrt{\cos^2 x + 5}}{\cos x}$ xác định khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 34. Đáp án **A.**

$$\text{ĐK: } 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\frac{1}{2} \neq \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 35. Đáp án **A.**

Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ nên $5 - 3\cos 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $\left| 1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right| \geq 0$.

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

$$\text{A. } \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \neq -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 36. Đáp án B.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 + \cos x \geq 0$ và $1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \geq 0$.

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 37. Đáp án A.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $2 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sin x \geq 0 \\ \tan^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq \pm 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Câu 38. Đáp án D.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \cot^2 x + 1 \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 2. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

Câu 39. Chọn C

Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Câu 40. Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Câu 41. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn có chu kỳ là 2π .

Câu 42. □ Ta có hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ và hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nên cả hai hàm số này đều không thỏa yêu cầu.

□ Xét hàm số $y = \sin 2x$: Ta có $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

□ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π nên không thỏa yêu cầu.

Câu 43. Do hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên hàm số (1) $y = \cos 2x$ tuần hoàn chu kỳ π .
Hàm số (2) $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Do hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (3) $y = \tan 2x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{2}$.

Do hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (4) $y = \cot 4x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{4}$.

Câu 44. Do hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên hàm số (1) $y = \cos 2x$ tuần hoàn chu kỳ π .
Hàm số (2) $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Do hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (3) $y = \tan 2x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{2}$.

Do hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (4) $y = \cot 4x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{4}$.

Câu 45. Chu kỳ của $\sin \frac{x}{2}$ là $T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ và Chu kỳ của $\cos \frac{3x}{2}$ là $T_2 = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} = \frac{4\pi}{3}$

Chu kì của hàm ban đầu là bội chung nhỏ nhất của hai chu kì T_1 và T_2 vừa tìm được ở trên.

Chu kì của hàm ban đầu $T = 4\pi$

Dạng 3. Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác

Câu 46. Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

Và $y(-x) = \left|\sin(-x)\right| = \left|-\sin x\right| = \left|\sin x\right| = y(x)$

Vậy hàm số trên là hàm số chẵn

Câu 47. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, hàm số $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$ là các hàm số lẻ.

Câu 48. Ta có các kết quả sau:

+ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

+ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

+ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

+ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 49. Xét hàm $y = \cos x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Khi đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

Vậy $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 50. B sai vì hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 51. Xét hàm số $y = f(x) = \sin|2016x| + \cos 2017x$. Tập xác định. $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin|-2016x| + \cos(-2017x) = \sin|2016x| + \cos 2017x = f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 52. Các hàm số $y = f(x) = \tan^2 3x$; $y = f(x) = \cos 3x$ thỏa mãn điều kiện $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên nó là các hàm số chẵn trên các tập số thực. Do đó, đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Hàm số $y = f(x) = x^2 + 5x - 2$ có trục đối xứng là $x = -\frac{5}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \cos x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ không có trục đối xứng.

Câu 53. Chọn **A**.

Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn **A**.

Xét **A**: Do tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = -2\cos(-x) = -2\cos x = f(x)$. Vậy hàm số $y = -2\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 54. Chọn **B**.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3} = \frac{-\sin 2x}{2\cos x-3} = -f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 55. Chọn **D**.

Ta có $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2x - \cos 2x) = 0$.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = 0$ vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 56. Chọn **D**.

a, Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3\sin^2 x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $x = -3 \in D$ nhưng $-x = 3 \notin D$ nên D không có tính đối xứng. Do đó ta có kết luận hàm số $f(x)$ không chẵn không lẻ.

b, Xét hàm số $g(x) = \sin \sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D_2 = [1; +\infty)$. Dễ thấy D_2 không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số $g(x)$ không chẵn không lẻ.

Vậy chọn **D**.

Câu 57. Chọn **C**.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \sin^{2007}(-x) + \cos(-nx) = -\sin^{2007} x + \cos nx \neq \pm f(x)$.

Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

Câu 58. Chọn B.

Hàm số đã xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy phát biểu 1 sai.

Ở đây ta cần chú ý: các phát biểu 2; 3; 4; 5; 6 để xác định tính đúng sai ta chỉ cần đi xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

Ta có tập xác định của hàm số trên là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng.

$$f(-x) = \frac{\sin^{2004n}(-x) + 2004}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2004n}x + 2004}{\cos x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Suy ra đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy. Vậy chỉ có phát biểu 2 và 3 là phát biểu đúng. Từ đây ta chọn **B**.

Câu 59.

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên tập $D = \mathbb{R}$ nên ta loại **A**.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

$f(-x) = |-x|\sin(-x) = -|x|\sin x = -f(x)$. Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O. Vậy ta chọn đáp án **B**.

Câu 60. Chọn C.

Cách 1:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = 3m \sin 4(-x) + \cos 2(-x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$.

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow -3m \sin 4x + \cos 2x = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow 4m \sin 4x = 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm số lượng giác

Câu 61. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

Câu 62. Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ thì hàm số $y = \tan x$ đồng biến.

Câu 63. Mệnh đề A sai vì hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Mệnh đề C sai vì hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

Mệnh đề D sai vì hàm số $y = \sin x$ không có tiệm cận ngang.

Mệnh đề B đúng vì hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$.

Câu 64. Dựa vào định nghĩa đường tròn lượng giác ta thấy hàm số lượng giác cơ bản $y = \sin x$ đồng biến ở góc phần tư thứ nhất và góc phần tư thứ tư.

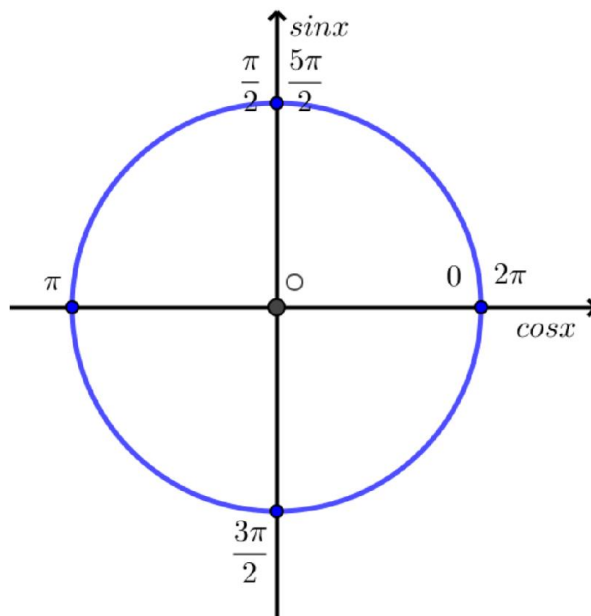
Dễ thấy khoảng $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} \right)$ là phần thuộc góc phần tư thứ tư và thứ nhất nên hàm số đồng biến.

Câu 65. Đáp án B đúng: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp án A sai do $y = \sin x$ tuần hoàn chu kì là $T = 2\pi$.

Đáp án C sai do $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

Đáp án D sai do hàm số $y = \sin x$ không có tiệm cận ngang.



Câu 66.

Quan sát đường tròn lượng giác, ta thấy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 67. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $\pi \Rightarrow$ đáp án A sai.

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $2\pi \Rightarrow$ đáp án B sai.

Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ đáp án D sai.

Câu 68. Chọn **A.**

Cách 1: Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 69. Chọn **B.**

Theo lý thuyết ta có hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đây ta có với $k = 0$ hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Tiếp theo ta đến với hàm số $y = \tan nx$; ($n \in \mathbb{Z}$), ... Ta có ví dụ 3.

Câu 70. Chọn **A.**

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính

đơn điệu của hàm số trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \tan x$ ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số $y = \tan 2x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 71. Chọn D.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ta có hàm số $y = \sin x$:

* Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

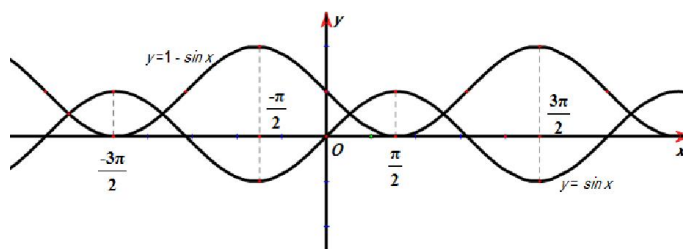
* Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Từ đây suy ra hàm số $y = 1 - \sin x$:

* Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

* Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Từ đây ta chọn **D**.

Dưới đây là đồ thị của hàm số $y = 1 - \sin x$ và hàm số $y = \sin x$ trên \mathbb{R} .



Câu 72. Chọn B.

Ta có $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đây ta có thể loại đáp án C, do tập giá trị của hàm số là $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn

$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

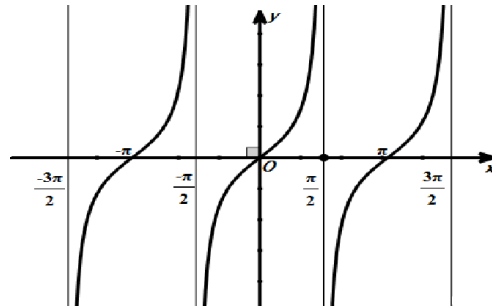
Ta có:

* Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

* Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Từ đây ta chọn **A.**

Câu 73. Chọn B.

Với A ta thấy hàm số $y = \tan x$ không xác định tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ nên tồn tại các điểm làm



cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Từ đây loại C và **D.**

Câu 74. Chọn B.

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

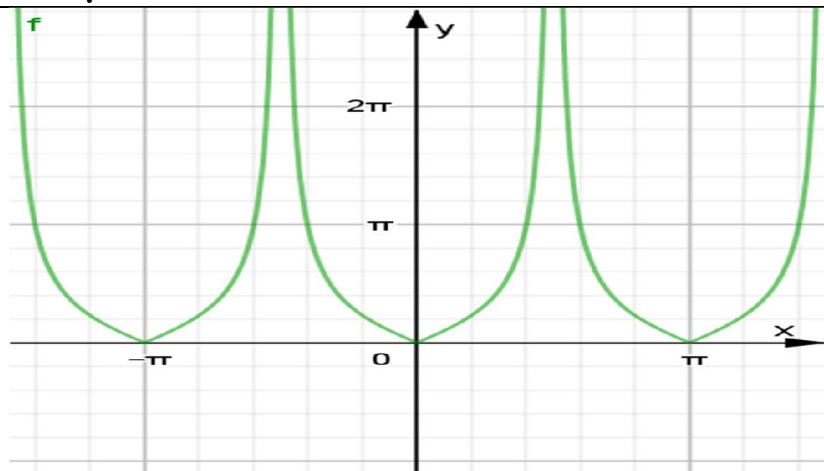
$$\text{Lúc này ta có } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sin x_2} - \frac{1}{\sin x_1} = \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}$$

Ta thấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \sin x_1 - \sin x_2 > 0$

$$0 > \sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \text{ Vậy } y = \frac{1}{\sin x} \text{ là hàm tăng.}$$

Tương tự ta có $y = \frac{1}{\cos x}$ là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

Câu 75. Chọn B.



Ta được đồ thị như hình vẽ trên. Ta thấy hàm số $y = |\tan x|$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ và đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Nên ta loại A và D.

Với B ta có $f(-x) = |\tan(-x)| = |\tan x| = f(x) \Rightarrow$ hàm số $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn B.

Dạng 5. Tập giá trị, MIN_MAX của hàm số lượng giác

Dạng 5.1 Biến đổi thông thường, sử dụng bất đẳng thức cơ bản của sin, cos

Câu 76. Chọn D.

Vì $\sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = 2 \sin x + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y = 3$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin x + 1$ là 3.

Câu 77. Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $[-1; 1]$.

Câu 78. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $\cos x \in [-1; 1]$.

Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1; 1]$.

Câu 79. Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $1 \leq 2 - \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $1 \leq y \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $M = 3$ và $m = 1$.

Câu 80. Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -8 \leq 3 \sin 2x - 5 \leq -2 \Rightarrow -8 \leq y \leq -2$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là $-2; -8$.

Câu 81. ✓ Trong nửa khoảng $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

Hàm số $y = \sin x$ giảm nên $\sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x < \sin \frac{5\pi}{4} \Rightarrow -1 \leq \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

✓ Trong nửa khoảng $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$:

Hàm số $y = \sin x$ tăng nên $\sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x < \sin \frac{7\pi}{4} \Rightarrow -1 \leq \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

✓ Vậy khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 82. Xét $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2 = 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - 2 = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2$

Ta có $-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq y \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-4; 0]$.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2 + \sin^3 x} \leq \sqrt{3}$.

Câu 83.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là: $m = 1$.

Dấu “=” xảy ra khi $\sin x = -1$ hay $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 84. Vì $-2 \leq 3 - 5 \sin x \leq 8$ nên suy ra $0 \leq (3 - 5 \sin x)^{2018} \leq 8^{2018} = 2^{6054}$.

Do đó $m = 0$ và $M = 2^{6054}$.

Vậy $M + m = 2^{6054}$.

Câu 85. Ta có $\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \leq 1 \Rightarrow 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \leq 3 \Rightarrow 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + 4 \leq 7$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 7.

Câu 86. Dễ thấy các phát biểu (1); (2); (3) đúng.

Xét (4): $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \text{ĐKXĐ: } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 87. $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1$

Do $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \in [-1; 1]$ nên $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \in [-1; 3]$.

Vậy $-1 \leq y \leq 3$. (Ta thấy $y = -1$ khi $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$, $y = 3$ khi $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$).sss

Câu 88. Ta có $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5 = \cos 2x - \sin 2x + 6 = \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 6$.

Do $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$ nên $-\sqrt{2} + 6 \leq \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 6 \leq \sqrt{2} + 6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$ là $6 - \sqrt{2}$.

Dạng 5.2 Đặt ẩn phụ

Câu 89. $y = \cos^2 x + \sin x + 1 = -\sin^2 x + \sin x + 2$.

Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$.

Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -t^2 + t + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Tung độ đỉnh của parabol $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$ là giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt được

tại $t = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow y \leq \sqrt{5+2\sqrt{2}} \Rightarrow y_{\max} = \sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

Câu 90. $y = \cos 2x + \cos x$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

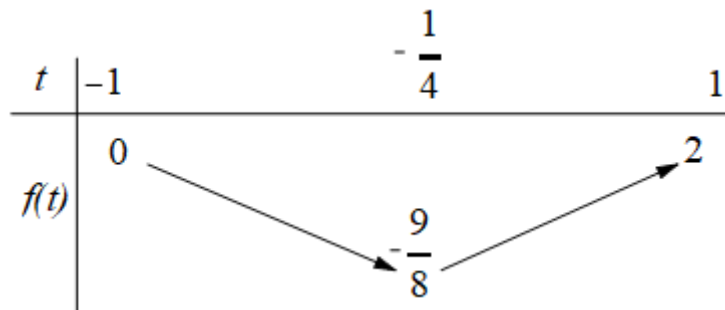
$$y = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

Đặt: $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$.

$$f(t) = 2t^2 + t - 1.$$

Đồ thị của hàm số f là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$.

BBT:



Dựa vào BBT ta có: $M = \max_{[-1;1]} f(t) = 2$, $m = \min_{[-1;1]} f(t) = -\frac{9}{8}$.

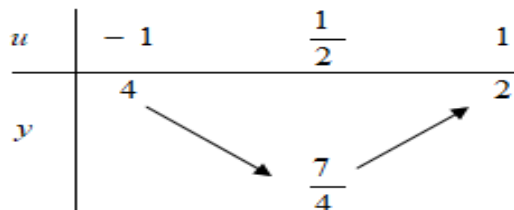
$$\text{Vậy } M + m = \frac{7}{8}.$$

Câu 91. Chọn A.

Đặt $\sin x = u$; $u \in [-1; 1]$

Xét hàm số: $y = u^2 - u + 2$ trên $[-1; 1]$.

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$. Từ đây có bảng biến thiên



Ta kết luận: $\min_{[-1;1]} f(u) = \frac{7}{4}$ và $\max_{[-1;1]} y = 4 \Leftrightarrow u = -1$.

Hay $\min y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ và $\max y = 4 \Leftrightarrow \sin x = -1$.

Dạng 5.3 Áp dụng bất đẳng thức đại số

Câu 92. Chọn D

Ta có $y = 2\cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = (2 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2}\sin x$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$y^2 = \left[(2 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2}\sin x\right]^2 \leq \left[(2 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2\right] \cdot [\cos^2 x + \sin^2 x] = 5 + 2\sqrt{2}$$

Câu 93.

Đáp án B Chọn B.

$$\text{Ta có } y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x} \Leftrightarrow y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x}$; $\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$ ta có:

$$1 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + 1 \cdot \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

$$\text{Hay } y \leq \frac{\sqrt{22}}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 1 + \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 94. Chọn D.

Cách 1: Ta thấy $2 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $1 + \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2 - \cos x}$ và $\frac{1}{1 + \cos x}$

là hai số dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta có

$$\frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \geq \frac{2}{\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)}}$$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)} \leq \frac{2 - \cos x + 1 + \cos x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y \geq \frac{2}{\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)}} \geq \frac{4}{3}$$

Câu 95. Đáp án C.

Ta có $y^2 \leq (1^2 + 1^2)(\cos^2 x + 7\sin^2 x + \sin^2 x + 7\cos^2 x) \Leftrightarrow y^2 \leq 2(1 + 7) = 16 \Rightarrow y \leq 4$. Dấu bằng

xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 4.

Dạng 6. Đồ thị của hàm số lượng giác

Câu 96. Chọn B

+ Chọn $x = \pi$ nhìn vào đồ thị ta được $y = -1$. Thay $x = \pi$ vào lần lượt các phương án ta loại C và D

+ Chọn $x = \frac{3\pi}{2}$ nhìn vào đồ thị ta được $y = 0$. Thay $x = \frac{3\pi}{2}$ vào phương án A ta nhận được $y = 2$

\Rightarrow loại A nên đáp án là **B**.

Câu 97. Ta có $\max_{x \in \mathbb{R}} (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} = M$, $\min_{x \in \mathbb{R}} (\sin x + \cos x) = -\sqrt{2} = m$, $M - m = 2\sqrt{2}$. Vì phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất nên chọn đáp án D (chênh lệch giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng 2).

Câu 98. * Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in D, \text{ ta có: } -x \in D \text{ và } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-\sin x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số lẻ.

Do đó (I) sai.

* Xét hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(x) = 3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$$

$$\text{Đặt } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}. \text{ Ta có } f(x) = 5\sin(x + \alpha) \leq |5|$$

$$\Rightarrow \max f(x) = 5 \text{ khi } \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.

Do đó (II) đúng.

* Xét hàm số $f(x) = \tan x$. Ta có hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Do đó (III) sai.

* Xét hàm số $f(x) = \cos x$. Ta có $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Do đó (IV) sai.

Vậy trong bốn mệnh đề đã cho có một mệnh đề đúng.

Câu 99. Do đồ thị đi qua ba điểm $(-\pi; 0)$, $(0; 2)$, $(\pi; 0)$ nên chọn phương án A

Câu 100.

Chọn **C**.

Ta thấy $-2 \leq 2\sin 2x \leq 2$ nên ta có loại A và **B**.

Tiếp theo với C và D ta có:

Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Ta thấy với $x = 0$ thì $y = 0$ nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án **C**.

Câu 101.

Chọn D

Ta thấy $-1 \leq \cos \frac{x}{2} \leq 1$ nên ta loại **B**.

Tiếp theo ta có hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ có chu kì tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Ta thấy với $x = 0$ thì $y = \cos \frac{x}{2} = \cos 0 = 1$ nên ta chọn **D**.

Câu 102. Chọn A

Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên trục Oy lên trên 2 đơn vị (xem lại sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản ở bên trên).

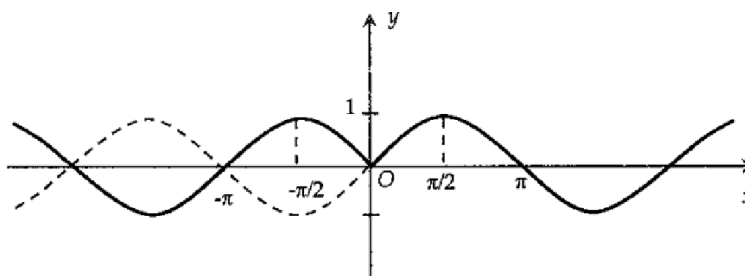
Câu 103. Chọn C

Suy diễn đồ thị hàm số $y = \sin |x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$:

Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm bên phải trục Oy .

Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy .

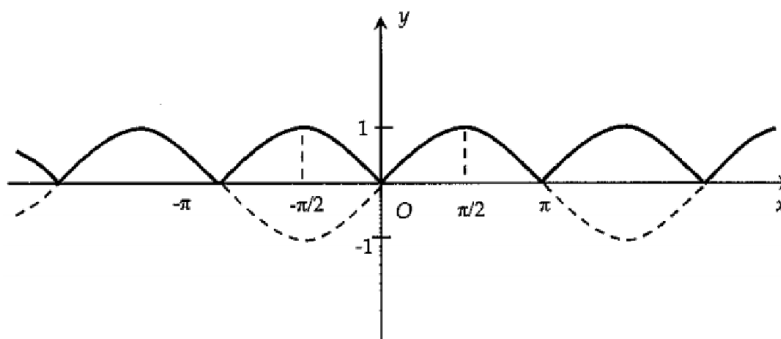
Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của đồ thị hàm số $y = \sin x$.

**Câu 104. Chọn B.**

Cách 1: Suy diễn đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$:

Giữ nguyên phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = \sin x$.

Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Cách 2: Ta thấy $|\sin x| \geq 0, \forall x$ nên đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ hoàn toàn nằm trên trục Ox .

Từ đây ta chọn **B**.

TOÁN 11	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN
BÀI 2	

Mục lục

Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$	1
Dạng 1.1 Không có điều kiện nghiệm.....	1
Dạng 1.2 Có điều kiện nghiệm.....	3
Dạng 2. Phương trình $\cos x = a$	6
Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm.....	6
Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm.....	8
Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$	10
Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm.....	10
Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm.....	11
Dạng 4. Phương trình $\cot x = a$	12
Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm.....	12
Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm.....	12
Dạng 5. Một số bài toán tổng hợp.....	12
Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$	15
Dạng 1.1 Không có điều kiện nghiệm.....	15
Dạng 1.2 Có điều kiện nghiệm.....	15
Dạng 2. Phương trình $\cos x = a$	21
Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm.....	21
Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm.....	22
Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$	24
Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm.....	24
Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm.....	25
Dạng 4. Phương trình $\cot x = a$	26
Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm.....	26
Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm.....	27
Dạng 5. Một số bài toán tổng hợp.....	27

Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$

Dạng 1.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 1. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$ là

- A. $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. C. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi$.

Câu 3. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018) Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$.

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = \frac{k\pi}{2}$.

Câu 4. (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Tìm nghiệm của phương trình $2\sin x - 3 = 0$

- A. $x \in \emptyset$. B. $\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

- C. $\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = -\arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. (THPT YÊN LẠC - LẦN 4 - 2018) Phương trình $\sin x = 1$ có một nghiệm là

- A. $x = \pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 6. (THPT HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 7. (THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI - HÀ TĨNH - 2018) Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin 30^\circ$ là

- A. $S = \{30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 B. $S = \{\pm 30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $S = \{\pm 30^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $S = \{30^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. (THPT YÊN LẠC - LẦN 3 - 2018) Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

- A. $-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM - 2018) Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{1}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 11. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019) Phương trình $2\sin x + 1 = 0$ có nghiệm là:

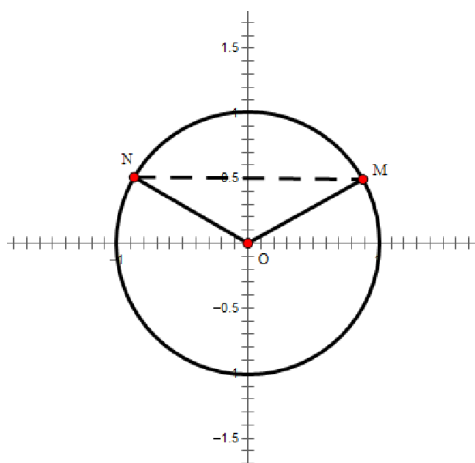
A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

Câu 12. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dạng 1.2 Có điều kiện nghiệm

Câu 13. (THPT SƠN TÂY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 2 điểm M, N ?



A. $2\sin 2x = 1$. B. $2\cos 2x = 1$. C. $2\sin x = 1$. D. $2\cos x = 1$.

- Câu 14.** Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình trên.
- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.
- Câu 15.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?
- A. 6. B. 2. C. 1. D. 7.
- Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?
- A. 7 B. 6 C. 3 D. 5
- Câu 17.** (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ trên $[0; 2\pi]$.
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 18.** Phương trình $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?
- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.
- Câu 19.** (GKI THPT NGHĨA HÙNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Số nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.
- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.
- Câu 20.** (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 3 - 2018) Số nghiệm thực của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là:
- A. 12. B. 11. C. 20. D. 21.
- Câu 21.** (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng
- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.
- Câu 22.** (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Tính tổng S của các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- A. $S = \frac{5\pi}{6}$. B. $S = \frac{\pi}{3}$. C. $S = \frac{\pi}{2}$. D. $S = \frac{\pi}{6}$.
- Câu 23.** (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI - LẦN 2 - 2018) Phương trình $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?
- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.
- Câu 24.** (THPT THANH MIỆN I - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Cho phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$. Tổng các nghiệm thuộc $[0; \pi]$ của phương trình là:
- A. π . B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{4\pi}{3}$.

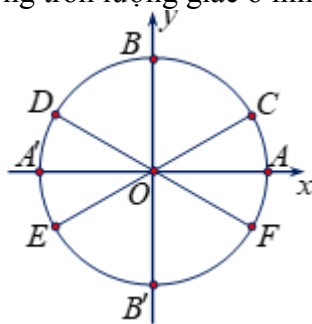
Câu 25. (CHUYÊN TRẦN PHÚ - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có hai công thức nghiệm dạng $\alpha + k\pi$, $\beta + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) với α, β thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó, $\alpha + \beta$ bằng

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $-\frac{\pi}{2}$. C. π . D. $-\frac{\pi}{3}$.

Câu 26. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Tính tổng S của các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. $S = \frac{5\pi}{6}$. B. $S = \frac{\pi}{3}$. C. $S = \frac{\pi}{2}$. D. $S = \frac{\pi}{6}$.

Câu 27. (THPT THẠCH THANH 2 - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



- A. Điểm D , điểm C . B. Điểm E , điểm F .
C. Điểm C , điểm F . D. Điểm E , điểm D .

Câu 28. (THPT LÊ HOÀN - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 29. (THPT MỘ ĐỨC - QUẢNG NGÃI - 2018) Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm $x \in (0; 2\pi)$?

- A. 2 nghiệm. B. 1 nghiệm. C. 4 nghiệm. D. Vô số nghiệm.

Câu 30. (SỞ GD&ĐT BÌNH THUẬN - 2018) Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 20179. B. 20181. C. 16144. D. 16145.

Câu 31. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $2\sin x - 1 = 0$ là:

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 32. (THPT Thanh Miện - Hải Dương - Lần 1 - 2018 - BTN) Cho phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$. Tổng các nghiệm thuộc $[0; \pi]$ của phương trình là:

A. $\frac{4\pi}{3}$.

B. π .

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 33. (Chuyên Bắc Ninh - Bắc Ninh - Lần 1 - 2018 - BTN) Tính tổng S của các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $S = \frac{\pi}{6}$.

B. $S = \frac{\pi}{3}$.

C. $S = \frac{\pi}{2}$.

D. $S = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 34. (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2017 - 2018 - BTN) Số nghiệm thực của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là:

A. 12.

B. 11.

C. 20.

D. 21.

Câu 35. (THPT Ninh Giang – Hải Dương – Lần 2 – Năm 2018) Phương trình: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$ có mấy nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$.

A. 8.

B. 6.

C. 2.

D. 4.

Dạng 2. Phương trình $\cos x = a$

Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 36. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là:

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 37. (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

Câu 38. (THPT SƠN TÂY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Giải phương trình $\cos x = 1$.

A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 39. (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ có tất cả các nghiệm là:

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 40. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 41. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Nghiệm của phương trình

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 42. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\cos \frac{x}{3} = 0$.

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{3\pi}{2} + k6\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 43. (XUÂN TRƯỜNG - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 44. (PHAN ĐĂNG LƯU - HUẾ - LẦN 1 - 2018) Phương trình $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 45. (THPT TRẦN PHÚ - ĐÀ NẴNG - 2018) Giải phương trình $2\cos x - 1 = 0$

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. & \text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \\ \text{C. } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. & \text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Câu 46. (THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018) Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. & \text{B. } x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ \text{C. } x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. & \text{D. } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Câu 47. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 3 - 2018) Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có tập nghiệm là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}. & \text{B. } \left\{ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}. \\ \text{C. } \left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}. & \text{D. } \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{array}$$

Câu 48. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NAM ĐỊNH - LẦN 2 - 2018) Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. & \text{B. } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \\ \text{C. } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi. & \text{D. } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{array}$$

Câu 49. (THPT NGUYỄN ĐỨC THUẬN - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Phương trình lượng giác: $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \end{array}$$

Câu 50. (THPT NGÔ QUYỀN - HẢI PHÒNG - 2018) Tìm công thức nghiệm của phương trình $2\cos(x + \alpha) = 1$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). & \text{B. } \begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \\ \text{C. } \begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) & \text{D. } \begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{array}$$

Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm

- Câu 51. (LỚP 11 THPT NGỖ QUYỀN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.
- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
 C. $m \in (1; +\infty)$ D. $m \in (-\infty; -1)$
- Câu 52. (THPT LÊ XOAY VĨNH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Tổng các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $4\sin^2 2x - 1 = 0$ bằng:
- A. π . B. $\frac{\pi}{3}$. C. 0. D. $\frac{\pi}{6}$.
- Câu 53. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là
- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3
- Câu 54. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019)** Biết các nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ có dạng $x = \frac{\pi}{m} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{n} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; với m, n là các số nguyên dương. Khi đó $m + n$ bằng
- A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.
- Câu 55.** Phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là
- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3
- Câu 56. (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018)** Nghiệm của phương trình $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ có dạng $x = -\frac{\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{k}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $m - n$ bằng
- A. 5. B. -3. C. -5. D. 3.
- Câu 57. (THPT HẬU LỘC 2 - TH - 2018)** Nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là:
- A. $x = \pi$. B. $x = \frac{11\pi}{12}$. C. $x = \frac{2\pi}{3}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.
- Câu 58. (CHUYÊN ĐHSPTHN - 2018)** Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$ (1); $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (2). Tập các nghiệm của phương trình (1) đồng thời là nghiệm của phương trình (2) là
- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 59. (CHUYÊN ĐHSPTHN - 2018)** Tìm số đo ba góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.
- A. $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$. B. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}, \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}; \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Câu 60. (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Số nghiệm của phương trình $2\cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 61. (CTN - LẦN 1 - 2018) Số nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ thuộc đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ là?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 62. (SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH - 2018) Phương trình $\cos 2x + \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 63. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x = 0$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ bằng T . Khi đó T có giá trị là:

- A. $T = \frac{7\pi}{6}$. B. $T = 2\pi$. C. $T = \frac{4\pi}{3}$. D. $T = \pi$.

Câu 64. (THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Số nghiệm của phương trình

$2\cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$

Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 65. (THPT KIẾN AN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x = m$, $(m \in \mathbb{R})$.

- A. $x = \arctan m + k\pi$ hoặc $x = \pi - \arctan m + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
 B. $x = \pm \arctan m + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \arctan m + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
 D. $x = \arctan m + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 66. (CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. \emptyset . C. $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 67. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

- A. $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 68. Phương trình $\tan(3x - 15^\circ) = \sqrt{3}$ có các nghiệm là:

- A. $x = 60^\circ + k180^\circ$. B. $x = 75^\circ + k180^\circ$. C. $x = 75^\circ + k60^\circ$. D. $x = 25^\circ + k60^\circ$.

Câu 69. Phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 70. Giải phương trình: $\tan^2 x = 3$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. D. vô nghiệm.

Câu 71. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 72. (THPT Trần Hưng Đạo-TP.HCM-2018) Giải phương trình $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x = \frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm

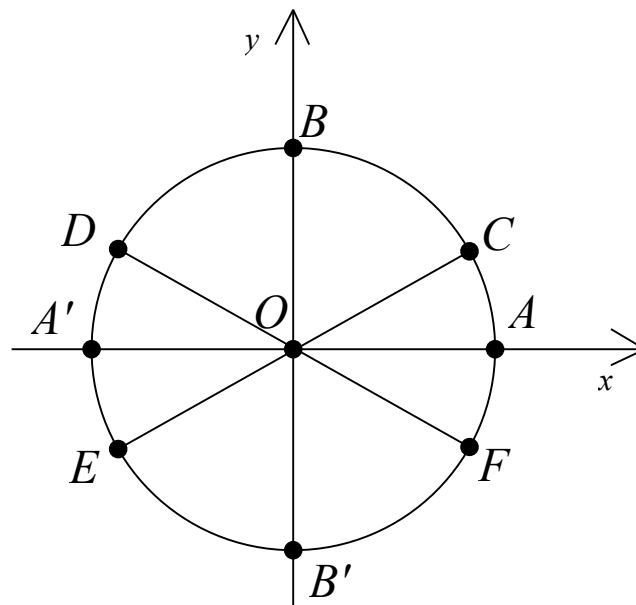
Câu 73. Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình: $\tan x = \tan 3x$ (1)

- A. 55π . B. $\frac{171\pi}{2}$. C. 45π . D. $\frac{190\pi}{2}$.

Câu 74. Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

- A. $\tan 2x = 1$. B. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$. C. $\cot x = 0$. D. $\cot x = -\sqrt{3}$.

Câu 75. (THPT LƯƠNG VĂN TỤY - NINH BÌNH - LẦN 1 - 2018) Nghiệm của phương trình $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



- A. Điểm F, điểm D. B. Điểm C, điểm F.

C. Điểm C, điểm D, điểm E, điểm F.

D. Điểm E, điểm F.

Câu 76. Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ là?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 77. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng:

A. $\frac{5\pi}{2}$.B. π .C. $\frac{3\pi}{2}$.D. 2π .

Câu 78. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ trên khoảng $(-90^\circ; 90^\circ)$ bằng.

A. 0° .B. -30° .C. 30° .D. -60° .Dạng 4. Phương trình $\cot x = a$

Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 79. Phương trình lượng giác $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

B. Vô nghiệm.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 80. (Sở GD Kiên Giang-2018-BTN) Phương trình $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ C. $x = \arccot \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 81. Giải phương trình $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$.

A. $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.B. $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.C. $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.D. $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm

Câu 82. (THPT Hồng Quang - Hải Dương - Lần 1 - 2018 - BTN) Nghiệm của phương trình

$\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ có dạng $x = -\frac{\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{k}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $m - n$

bằng

A. 3.

B. 5.

C. -3.

D. -5.

Câu 83. Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2018.

B. 6340.

C. 2017.

D. 6339.

Dạng 5. Một số bài toán tổng hợp

Câu 84. (GKI THPT NGHĨA HÙNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 99$. B. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. C. $\cot 2018x = 2017$. D. $\sin 2x = -\frac{3}{4}$.

Câu 85. Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) làm nghiệm

A. $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$. B. $\cos x = \sin 2x$.

C. $\cos 4x = -\cos 6x$. D. $\tan 2x = -\tan \frac{\pi}{4}$.

Câu 86. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Phương trình $\sin x = \cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là:

A. 3 B. 5 C. 2 D. 4

Câu 87. (TRƯỜNG THPT LƯƠNG TÀI SỐ 2 NĂM 2018-2019) Giải phương trình

$$\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{x}{2} + 2\right) = 0$$

A. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Câu 88. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Phương trình $8\cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2}$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 89. (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ trên $[0; 2\pi]$.

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 90. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 2 - 2018) Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\tan x = 3$. B. $\sin x + 3 = 0$.
C. $3\sin x - 2 = 0$. D. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Câu 91. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Trong khoảng $(0; \pi)$, phương trình $\cos 4x + \sin x = 0$ có tập nghiệm là S . Hãy xác định S .

A. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}\right\}$. B. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{10}\right\}$.

$$C. S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}. \quad D. S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}.$$

Câu 92. (CHUYÊN ĐHS PHN - 2018) Phương trình $\cos 3x \cdot \tan 5x = \sin 7x$ nhận những giá trị sau của x làm nghiệm

$$A. x = \frac{\pi}{2}. \quad B. x = 10\pi; x = \frac{\pi}{10}. \quad C. x = 5\pi; x = \frac{\pi}{10}. \quad D. x = 5\pi; x = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 93. (THPT LỤC NGẠN - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

$$A. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \quad B. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$C. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \quad D. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 94. (THPT NGUYỄN HUỆ - TT HUẾ - 2018) Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-x^2} \sin 2x = 0$ là

$$A. 2. \quad B. 5. \quad C. 4. \quad D. 3.$$

Câu 95. (THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH TRIỀU - ĐỒNG THÁP - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin x = \cos x$ có bao nhiêu nghiệm $x \in (0; 5\pi)$?

$$A. 3. \quad B. 4. \quad C. 5. \quad D. 6.$$

Câu 96. (SỞ GD&ĐT LÀO CAI - 2018) Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \cos x$ là

$$A. x = k\pi; x = k\frac{\pi}{2}. \quad B. x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$C. x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \quad D. x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Câu 97. (THPT HÒA VANG - ĐÀ NẴNG - 2018) Phương trình $\sin 2x + \cos x = 0$ có tổng các nghiệm trong khoảng $(0; 2\pi)$ bằng

$$A. 2\pi. \quad B. 3\pi. \quad C. 5\pi. \quad D. 6\pi.$$

Câu 98. (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Số nghiệm chung của hai phương trình $4\cos^2 x - 3 = 0$ và $2\sin x + 1 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

$$A. 2. \quad B. 4. \quad C. 3. \quad D. 1.$$

Câu 99. (THPT HAI BÀ TRƯNG - HUẾ - 2018) Giải phương trình $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$.

$$A. x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad B. x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}. \quad C. x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \quad D. x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 100. (THPT Trần Hưng Đạo-TP.HCM-2018) Tìm số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos 2x$ thuộc đoạn $[0; 20\pi]$.

$$A. 20. \quad B. 40. \quad C. 30. \quad D. 60.$$

Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$

Dạng 1.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 1. Phương trình tương đương $\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3. Ta có: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Câu 4. Ta có: $2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2} > 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Câu 5. Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Do đó $x = \frac{\pi}{2}$ là một nghiệm của phương trình $\sin x = 1$.

Câu 6. Ta có $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$

Câu 7. Ta có $\sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 30^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 8. Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 9. Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 10. Ta có: $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

Câu 11. Chọn B

Ta có: $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Câu 12. $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Dạng 1.2 Có điều kiện nghiệm

Câu 13. Chọn C

Ta thấy 2 điểm M và N là các giao điểm của đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm $\frac{1}{2}$ với đường tròn lượng giác \Rightarrow M và N là các điểm biểu diễn tập nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow$ Đáp án. **C.**

Câu 14. Chọn B

$$\text{Ta có: } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

+ Xét $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \pi + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị k .

+ Xét $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên có hai giá trị k là: $k = 0; k = 1$.

- Với $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.
- Với $k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.

Do đó trên khoảng $(0; \pi)$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng $(0; \pi)$ là: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$.

Câu 15. Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$

$$\text{Vì } \sin 2x \in [-1; 1] \text{ nên } \frac{m^2 - 5}{3} \in [-1; 1] \Leftrightarrow m^2 \in [2; 8] \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq m \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị.

Câu 16. $3\sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1-m}{3}$, để có nghiệm ta có $-1 \leq \frac{1-m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$

Nên có 7 giá trị nguyên từ -2; đến 4.

Câu 17. Ta có $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Vì } \cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2} \quad (k_1 \in \mathbb{Z}).$$

$$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

Câu 18. Ta có $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

+ TH1: $x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{13}{12}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$. Suy

ra trường hợp này có nghiệm $x = \frac{4\pi}{9}$ thỏa mãn.

+ TH2: $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$. Suy ra

trường hợp này có nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 19. Chọn D
Tự luận

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Xét $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq k2\pi \leq \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0$$

Chỉ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{3} \in [0; 2\pi]$

- Xét $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq k2\pi \leq \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0$$

Chỉ có một nghiệm $x = \frac{2\pi}{3} \in [0; 2\pi]$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 20. Phương trình tương đương: $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq k \leq \frac{61}{12}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{Z}$. Do đó phương trình có 6 nghiệm.

+ Với $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq k \leq \frac{53}{12}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -1 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$. Do đó, phương trình có 6 nghiệm.

+ Rõ ràng các nghiệm này khác nhau từng đôi một, vì nếu

$$-\frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \Leftrightarrow k - k' = \frac{2}{3} \text{ (vô lí, do } k, k' \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 12 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$.

Câu 21. Ta có $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

Họ nghiệm $x = \pi + k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0; \pi)$.

$$x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình này bằng π .

Câu 22. Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}$.

Câu 23. Ta có: $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 24. $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$

Các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ nên có tổng là $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

Câu 25. Ta có: $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$

Vậy $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ và $\beta = -\frac{\pi}{3}$. Khi đó $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 26. Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}$.

Câu 27. Ta có $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6}$.

Điểm biểu diễn của $x = -\frac{\pi}{6}$ là F , điểm biểu diễn $x = \frac{7\pi}{6}$ là E .

Câu 28. Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Suy ra số nghiệm thuộc $[\pi; 2\pi]$ của phương trình là 1.

Câu 29. Ta có: $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Do $x \in (0; 2\pi)$ nên ta có $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 30. Ta có

$$\sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}$$

Do đó có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145.

Câu 31. Chọn A

+ Phương trình tương đương $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

+ Với $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ nên $0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{5\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{7}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\}.$

Suy ra: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}.$

+ Với $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ nên $0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{5\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{5}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0.$

Suy ra: $x = \frac{5\pi}{6}.$

Do đó $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}.$

Vậy số nghiệm của phương trình là 3.

Câu 32. Chọn B

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ nên có tổng là $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi.$

Câu 33. Chọn A

Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}.$

Câu 34. Chọn A

Phương trình tương đương: $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq k \leq \frac{61}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{Z}.$ Do đó phương trình có 6 nghiệm.

+ Với $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq k \leq \frac{53}{12}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -1 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$. Do đó, phương trình có 6 nghiệm.

+ Rõ ràng các nghiệm này khác nhau từng đôi một, vì nếu

$$-\frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \Leftrightarrow k - k' = \frac{2}{3} \text{ (vô lí, do } k, k' \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 12 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$.

Câu 35. Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } x \in (0; 3\pi) \text{ nên } x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Dạng 2. Phương trình $\cos x = a$

Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 36. Chọn D

$$\text{Phương trình } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 37. Chọn A

$$\text{Ta có: } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 38. Chọn D.

$$\text{Ta có } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 39. Chọn C

$$\text{Phương trình } \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 40. Chọn A

Theo công thức nghiệm đặc biệt thì $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Do đó Chọn **A**.

$$\text{Câu 41. Phương trình } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Câu 42. } \cos \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Câu 43. Phương trình } 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Câu 44. } 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 45. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 46. Phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 47. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 48. Ta có: $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 49. Phương trình tương đương với $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Câu 50. $2 \cos(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos(x + \alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \alpha = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm

Câu 51. Chọn A

Do $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình: $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$ có nghiệm khi $|m| \leq 1$ và vô nghiệm khi $|m| > 1$.

Câu 52. Ta có: $4 \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Do } x = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} \\ x_2 = -\frac{\pi}{12} \\ x_3 = -\frac{5\pi}{12} \\ x_4 = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Câu 53. Phương trình:

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$. Vậy số nghiệm phương trình là 2

Câu 54. Chọn D.

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow m + n = 3 + 3 = 6.$$

Câu 55. Chọn B

Phương trình:

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$. Vậy số nghiệm phương trình là 2

Câu 56. Ta có $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 6 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m - n = 5.$$

Câu 57. Phương trình $2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$.

$$\text{Xét } x \in [0; \pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \\ 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \end{cases} \text{ mà } k \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 58. Ta có $\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác ta có tập các nghiệm của phương trình (1) đồng thời là nghiệm của phương trình (2) là $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 59. Ta có: $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Do số đo một góc là nghiệm nên $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tam giác có số đo ba góc là: $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ hoặc $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

Câu 60. $2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Mà $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

Câu 61. Ta có $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Xét $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, do $x \in [-2\pi; 2\pi]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Rightarrow k = -1; k = 0$.

Xét $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, do $x \in [-2\pi; 2\pi]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Rightarrow k = 1; k = 0$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

Câu 62. Ta có $\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi + x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Vì $-\pi < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$

Câu 63. Ta có: $\cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in (0; 2\pi)$ nên $0 < \frac{k2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 < k < 3$.

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}$.

Vậy $T = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$.

Câu 64. Chọn D

$2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Mà $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$

Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 65. Ta có: $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 66. Ta có $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 67. Ta có $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Trình bày lại

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (*)$$

Ta có $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Kết hợp điều kiện (*) suy ra $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 68. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \tan(3x - 15^\circ) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \tan(3x - 15^\circ) = \tan 60^\circ \Leftrightarrow 3x - 15^\circ = 60^\circ + k180^\circ \\ &\Leftrightarrow x = 25^\circ + k60^\circ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Câu 69. Chọn D

$$\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Câu 70. Chọn C

$$\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 71. Chọn A

$$\sqrt{3} + 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 72. Chọn D

$$\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm

Câu 73. Chọn C

$$\text{Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (*)$$

Khi đó, phương trình (1) $3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ so sánh với đk (*)

$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, x \in [0; 30] \Rightarrow k = \{0; \dots; 4\} \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi; \dots; 9\pi\}$$

Vậy, tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình (1) là: 45π .

Câu 74. Chọn A

$$\text{A. } \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

(Với $k = 0$ nên nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{8}$)

$$\text{B. } \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

\Rightarrow Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{7\pi}{12}$.

$$\text{C. } \cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Nghiệm dương bé nhất là } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$D. \cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn $k = 1 \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $x = \frac{\pi}{8}$ nên ta chọn đáp án **A**.

Câu 75. $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

Với $0 < x < 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3}.$

Câu 76.

Lời Giải.

Chọn C

Ta có $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Do $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \xrightarrow[\text{casio}]{\text{approx}} -0,027 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1\}.$

Câu 77. Chọn C

Ta có: $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; \pi)$, suy ra $0 \leq \frac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}$

Suy ra các nghiệm của phương trình trên $[0; \pi)$ là $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Suy ra $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

Câu 78.

Lời Giải.

Chọn A

Ta có $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$

Do $x \in (-90^\circ; 90^\circ) \rightarrow -90^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3}$

$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 1 \rightarrow x = -60^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 30^\circ \end{cases} \rightarrow -60^\circ + 30^\circ = 30^\circ.$

Dạng 4. Phương trình $\cot x = a$

Dạng 2.1 Không có điều kiện nghiệm

Câu 79. Chọn D

Ta có $3 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 80. Chọn C

Ta có $2 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Câu 81.

Lời Giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } \cot(3x-1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x-1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = \frac{-\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18}.$$

Dạng 2.2 Có điều kiện nghiệm**Câu 82. Chọn B**

$$\text{Ta có } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m=6 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow m-n=5.$$

Câu 83. Chọn A

$$\text{Ta có } \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có } 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2018\pi \xrightarrow{\text{xấp xỉ}} -\frac{1}{6} \leq k \leq 2017,833.$$

$3 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; \dots; 2017\}$. Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của k tương ứng với có 2018 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 5. Một số bài toán tổng hợp**Câu 84. Chọn B**

$$\text{Vì } \frac{2\pi}{3} > 1 \text{ là nên phương trình } \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ vô nghiệm.}$$

Câu 85. Chọn B

$$\text{A. } \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - (\frac{\pi}{4} - 2x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{B. } \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{C. } \cos 4x = -\cos 6x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 6x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pi - 6x + k2\pi \\ 4x = -(\pi - 6x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{D. } \tan 2x = -\tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

So sánh ta được đáp án là **B.**

Câu 86. Chọn C.

Ta có $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Trong $[-\pi; \pi]$ phương trình có hai nghiệm

Câu 87. Chọn D

Vì $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} + 2 > 0$

Vậy phương trình tương đương

$$2 \cos \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 88. Ta có:

$$8 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \sin 8x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 89. Ta có $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vì $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2} (k_1 \in \mathbb{Z}).$

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

Câu 90. Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên phương trình $\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -3$ vô nghiệm.

Câu 91. Ta có $\cos 4x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin(-x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 4x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in (0; \pi)$ nên $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10}\right\}.$

Câu 92. Điều kiện $5x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} (*)$

Phương trình tương đương $\cos 3x \cdot \sin 5x - \sin 7x \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$

Ta thấy $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10}$ không thỏa mãn điều kiện (*) nên loại đáp án A, B, C

Vậy đáp án đúng là D

Câu 93. $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 94. $\sqrt{4-x^2} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.

Câu 95. Ta có $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vì $x \in (0; 5\pi)$ nên ta có $0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{19}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

Do đó, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$

Suy ra phương trình có 5 nghiệm thuộc $(0; 5\pi)$ là $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}.$

Câu 96. $\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}.$

Câu 97. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \sin x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

$$x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$\Rightarrow S = 5\pi.$$

Câu 98. ☐ Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ phương trình $2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$ có hai nghiệm là $-\frac{\pi}{6}$ và $\frac{7\pi}{6}$

☐ Cả hai nghiệm này đều thỏa phương trình $4 \cos^2 x - 3 = 0.$

☐ Vậy hai phương trình có 2 nghiệm chung.

Câu 99. Ta có: $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x \Leftrightarrow \cos 6x - \cos 8x = \cos 2x - \cos 8x.$

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 100. Chọn C

Ta có $\sin x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases}$.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Xét $x \in [0; 20\pi]$:

Với $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, ta có $0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{119}{12}$, do $k \in \mathbb{Z}$ nên.

Với $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, ta có $0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{115}{12}$, do $k \in \mathbb{Z}$ nên.

Với $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, ta có $0 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{41}{4}$, do $k \in \mathbb{Z}$ nên.

Vậy phương trình đã cho có 30 nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$.

TOÁN 11	MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP
BÀI 3	

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	2
Dạng 1. Giải và biện luận Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác	2
Dạng 1.1 Không cần biết đổi	2
Dạng 1.2 Biến đổi quy về phương trình bậc hai	3
Dạng 1.3 Có điều kiện của nghiệm	4
Dạng 2. Giải và biện luận Phương trình bậc nhất đối với sin và cos	6
Dạng 2.1 Không cần biến đổi	6
Dạng 2.2 Cần biến đổi	7
Dạng 2.3 Có điều kiện của nghiệm	8
Dạng 2.3.1 Điều kiện nghiệm	8
Dạng 2.3.2 Định m để phương trình có nghiệm	9
Dạng 2.3.3 Sử dụng điều kiện có nghiệm để tìm Min-Max	11
Dạng 3. Giải và biện luận Phương trình đẳng cấp	11
Dạng 3.1 Không có điều kiện của nghiệm	11
Dạng 3.3 Có điều kiện của nghiệm	13
Dạng 3.3 Định m để phương trình có nghiệm	14
Dạng 4. Giải và biện luận Phương trình đối xứng	14
Dạng 4.1 Không có điều kiện của nghiệm	14
Dạng 4.2 Có điều kiện của nghiệm	15
Dạng 5. Biến đổi đưa về phương trình tích	16
Dạng 5.1 Không có điều kiện của nghiệm	16
Dạng 5.2 Có điều kiện của nghiệm	17
Dạng 6. Giải và biện luận phương trình lượng giác chứa ẩn ở mẫu	18
Dạng 7. Giải và biện luận Một số bài toán về phương trình lượng giác khác	20
Dạng 8. Giải và biện luận Phương trình lượng giác chứa tham số	20
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO	23
Dạng 1. Giải và biện luận Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác	23
Dạng 1.1 Không cần biết đổi	23
Dạng 1.2 Biến đổi quy về phương trình bậc hai	24
Dạng 1.3 Có điều kiện của nghiệm	25
Dạng 2. Giải và biện luận Phương trình bậc nhất đối với sin và cos	29
Dạng 2.1 Không cần biến đổi	29
Dạng 2.2 Cần biến đổi	29

Dạng 2.3 Có điều kiện của nghiệm	31
Dạng 2.3.1 Điều kiện nghiệm.....	31
Dạng 2.3.2 Định m để phương trình có nghiệm.....	34
Dạng 2.3.3 Sử dụng điều kiện có nghiệm để tìm Min-Max	36
Dạng 3. Giải và biện luận Phương trình đẳng cấp	37
Dạng 3.1 Không có điều kiện của nghiệm	37
Dạng 3.3 Có điều kiện của nghiệm	40
Dạng 3.3 Định m để phương trình có nghiệm.....	42
Dạng 4. Giải và biện luận Phương trình đối xứng.....	42
Dạng 4.1 Không có điều kiện của nghiệm	42
Dạng 4.2 Có điều kiện của nghiệm	44
Dạng 5. Biến đổi đưa về phương trình tích	47
Dạng 5.1 Không có điều kiện của nghiệm	47
Dạng 5.2 Có điều kiện của nghiệm	48
Dạng 6. Giải và biện luận phương trình lượng giác chứa ẩn ở mẫu.....	53
Dạng 7. Giải và biện luận Một số bài toán về phương trình lượng giác khác.....	57
Dạng 8. Giải và biện luận Phương trình lượng giác chứa tham số.....	60

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Giải và biện luận Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng 1.1 Không cần biết đổi

Câu 1. (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 4.

Câu 2. Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pi + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Nghiệm của phương trình $\sin^2 x = -\sin x + 2$ là:

Câu 4.

A. $x = k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$.

Nghiệm của phương trình $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ là:

Câu 5.

A. $x = k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = -\pi + k2\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $3\cos^2 x = -8\cos x - 5$ là:

A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = k2\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$. D. $x = k\pi$.

Câu 7. [Sở GD và ĐT Cần Thơ - mã 301 - 2017-2018-BTN] Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ là

A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình lượng giác $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ có nghiệm là:

A. $x = k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Dạng 1.2 Biến đổi quy về phương trình bậc hai

Câu 9. (THPT CHUYÊN BẮC NINH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Nghiệm của phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. (LỚP 11 THPT NGÔ QUYỀN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Cho phương trình $2\cos 2x - \cos x + 1 = 0$. Khi đặt $t = \cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2 + t + 1 = 0$ B. $t + 1 = 0$ C. $-4t^2 - t + 3 = 0$ D. $4t^2 - t - 1 = 0$

Câu 11. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019) Phương trình $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0$ có nghiệm là

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $\frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $k\pi$. D. $\pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Câu 12. (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm nghiệm của phương trình $\cos 2x - 2\sin x = -3$?

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 13. (CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018)** Cho phương trình $\cos 2x + \sin x + 2 = 0$. Khi đặt $t = \sin x$, ta được phương trình nào dưới đây.
 A. $2t^2 + t + 1 = 0$. B. $t + 1 = 0$. C. $-2t^2 + t + 3 = 0$. D. $-2t^2 + t + 2 = 0$.
- Câu 14. (PHAN ĐĂNG LƯU - HUẾ - LẦN 1 - 2018)** Giải phương trình $3\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$.
 A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 15. (PHAN ĐĂNG LƯU - HUẾ - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x + \sqrt{3} \cot x - \sqrt{3} - 1 = 0$ là:
 A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 16. (THPT LÊ HOÀN - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Cho phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$. Khi đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?
 A. $4t^2 + 8t - 5 = 0$. B. $4t^2 - 8t - 3 = 0$. C. $4t^2 - 8t + 3 = 0$. D. $4t^2 - 8t + 5 = 0$.
- Câu 17. (THPT MỘ ĐỨC - QUẢNG NGÃI - 2018)** Cho phương trình: $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ (*). Bằng cách đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$) thì phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?
 A. $-2t^2 + t = 0$. B. $t^2 + t - 2 = 0$. C. $-2t^2 + t - 2 = 0$. D. $-t^2 + t = 0$.
- Câu 18. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH - HKI I - 2018)** Giải phương trình $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0$.
 A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x = k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Dạng 1.3 Có điều kiện của nghiệm

- Câu 19.** Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện: $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.
 A. $x = -\frac{\pi}{2}$. B. $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.
- Câu 20. (THPT Chuyên Bắc Ninh - Lần 2 - 2017 - 2018)** Tìm nghiệm của phương trình lượng giác $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \pi$.
 A. $x = \pi$. B. $x = \frac{\pi}{4}$. C. $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = 0$.
- Câu 21.** Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là:
 A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{3\pi}{2}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

- Câu 22. (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - 2018 - BTN)** Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 10\pi]$ của phương trình $\sin^2 2x + 3 \sin 2x + 2 = 0$.
- A. $\frac{105\pi}{2}$. B. $\frac{105\pi}{4}$. C. $\frac{297\pi}{4}$. D. $\frac{299\pi}{4}$.
- Câu 23. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Phương trình $\cos 2x + 4 \sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$?
- A. 5 B. 4 C. 2 D. 3
- Câu 24. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019)** Phương trình $\cos 2x + 2 \cos x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2019)$?
- A. 320. B. 1009. C. 1010. D. 321.
- Câu 25. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018)** Phương trình $\cos 2x + 4 \sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$?
- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 26. (TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 1 - 2018)** Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2 \cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.
- A. $S = \frac{11\pi}{6}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 5\pi$. D. $S = \frac{7\pi}{6}$.
- Câu 27. (CHUYÊN ĐHSPTN - 2018)** Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $\cos^2 x + \frac{5}{2} \cos x + 1 = 0$ là
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 28. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 2 - 2018)** Tìm nghiệm của phương trình lượng giác $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \pi$.
- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x = \pi$. D. $x = \frac{\pi}{4}$.
- Câu 29. (SGD - HÀ TĨNH - HK 2 - 2018)** Phương trình $\cos 2x + \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$?
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 30. (THPT CAN LỘC - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2 \sin x$ với $x \in [0; 2\pi]$ là:
- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.
- Câu 31. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018)** Phương trình $4 \tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$ có m nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{2017\pi}{2}; \frac{2017\pi}{2}\right)$?
- A. $m = 2017$. B. 4032. C. $m = 4034$. D. $m = 2018$.
- Câu 32. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018)** Trong khoảng $(0; 2\pi)$, phương trình $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$ có tất cả m nghiệm. Tìm m .
- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

- Câu 33. (QUẢNG XƯƠNG - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 10\pi]$ của phương trình $\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0$.
- A. $\frac{105\pi}{2}$. B. $\frac{105\pi}{4}$. C. $\frac{297\pi}{4}$. D. $\frac{299\pi}{4}$.
- Câu 34. (SỞ GD&ĐT YÊN BÁI - 2018)** Tính tổng tất cả T các nghiệm thuộc đoạn $[0; 200\pi]$ của phương trình $2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$
- A. $T = 10150\pi$. B. $T = 10050\pi$. C. $T = \frac{10403\pi}{2}$. D. $T = \frac{20301\pi}{2}$.
- Câu 35. (THPT LÊ HOÀN - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3|\cos x| - 1 = 0$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là:
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 36. (THPT LƯƠNG ĐẮC BẰNG - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos x + 5)(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$
- A. $S = \frac{11\pi}{12}$. B. $S = \frac{5\pi}{2}$. C. $S = 2\pi$. D. $S = \frac{7\pi}{12}$.

Dạng 2. Giải và biện luận Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

Dạng 2.1 Không cần biến đổi

- Câu 37. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019)** Tập xác định của hàm số sau $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x}$.
- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Câu 38. (SGD&ĐT BẮC NINH - 2018)** Phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$ có tập nghiệm là
- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- C. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Câu 39. (XUÂN TRƯỜNG - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018)** Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ là:
- A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 40. (CHUYÊN VINH PHÚC - LẦN 1 - 2018) Tất cả các họ nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1$ là

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 41. (PHAN ĐĂNG LƯU - HUẾ - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}.$ B. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}.$

C. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}.$ D. $\left\{\frac{7\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}.$

Câu 42. (THPT HAI BÀ TRUNG - HUẾ - 2018) Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}.$

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Dạng 2.2 Cần biến đổi

Câu 43. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 2 - 2018) Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$ B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$ C. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$ D. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi.$

Câu 44. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin 2x.$

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ B. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ D. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$ là:

Câu 45.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$ B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi.$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

Câu 46. Phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Câu 47. Phương trình: $3\sin 3x + \sqrt{3}\sin 9x = 1 + 4\sin^3 3x$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$

Câu 48. (THPT Yên Định - Thanh Hóa - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$ là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Dạng 2.3 Có điều kiện của nghiệm

Dạng 2.3.1 Điều kiện nghiệm

Câu 49. (THPT Đức Thọ - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 50. (THPT Chuyên Hạ Long - QNinh - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình:

$\sqrt{2}\cos 3x = \sin x + \cos x$

A. 3π . B. $\frac{3\pi}{2}$. C. π . D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 51. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $T = \frac{3\pi}{4}$. B. $T = \frac{7\pi}{8}$. C. $T = \frac{21\pi}{8}$. D. $T = \frac{11\pi}{4}$.

Câu 52. Biến đổi phương trình $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ về dạng $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $b + d$.

A. $b + d = \frac{\pi}{2}$. B. $b + d = \frac{\pi}{4}$. C. $b + d = -\frac{\pi}{3}$. D. $b + d = \frac{\pi}{12}$.

Câu 53. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 54. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 5) Phương trình $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[0; 4035\pi]$?

A. 2016.

B. 2017.

C. 2011.

D. 2018.

Câu 55. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Tìm góc $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\}$ để phương trình $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x = 0$ tương đương với phương trình $\cos(2x - \alpha) = \cos x$.

A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$.B. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.C. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.D. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Câu 56. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Cho phương trình $\sin x + \cos x = 1$ có hai họ nghiệm có dạng $x = a + k2\pi$ và $x = b + k2\pi$ ($0 \leq a, b < \pi$). Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

A. $a + b = \frac{2\pi}{3}$.B. $a + b = \frac{3\pi}{5}$.C. $a + b = \frac{\pi}{2}$.D. $a + b = \pi$.

Câu 57. (THPT THANH MIỆN I - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2\pi; 2\pi]$.

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 58. (LIÊN TRƯỜNG - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018) Tổng các nghiệm của phương trình $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$ trên $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{7\pi}{6}$.B. $\frac{7\pi}{3}$.C. $\frac{7\pi}{2}$.D. 2π .

Câu 59. (THPT HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $T = \frac{7\pi}{8}$.B. $T = \frac{21\pi}{8}$.C. $T = \frac{11\pi}{4}$.D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 60. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x + \sqrt{3} \cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3} \cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$.B. $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{12}; 0\right)$.C. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{12}\right]$.D. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$.

Dạng 2.3.2 Định m để phương trình có nghiệm

Câu 61. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tìm điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm?

A. $a^2 + b^2 > c^2$ B. $a^2 + b^2 \leq c^2$ C. $a^2 + b^2 = c^2$ D. $a^2 + b^2 \geq c^2$

Câu 62. (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm m để phương trình $3 \sin x - 4 \cos x = 2m$ có nghiệm?

A. $-\frac{5}{2} < m \leq \frac{5}{2}$ B. $m \leq -\frac{5}{2}$ C. $m \geq \frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$

Câu 63. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình

$(m+1) \sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm?

A. 4036

B. 2020

C. 4037

D. 2019

- Câu 64. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình $m \cos x - (m+2) \sin x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm.
- A. 0 B. 3 C. vô số D. 1
- Câu 65. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019)** Để phương trình $m \sin 2x + \cos 2x = 2$ có nghiệm thì m thỏa mãn:
- A. $m \leq 1$. B. $\begin{cases} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \geq \sqrt{2} \\ m \leq -\sqrt{2} \end{cases}$. D. $m \geq 1$.
- Câu 66. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4 \sin x + (m-4) \cos x - 2m + 5 = 0$ có nghiệm là:
- A. 5 B. 6 C. 10 D. 3
- Câu 67. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1) \sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm?
- A. 4036. B. 2020. C. 4037. D. 2019.
- Câu 68. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Số các giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{4m-4} \cdot \sin x \cdot \cos x + \sqrt{m-2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m-9}$ có nghiệm là
- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4
- Câu 69.** Tìm điều kiện của m để phương trình $(2m-1) \cos 2x + 2m \sin x \cos x = m-1$ vô nghiệm?
- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$. D. $0 < m < \frac{1}{2}$.
- Câu 70. (THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH - PHÚ YÊN - 2018)** Cho phương trình $2m \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = m+5$, với m là một phần tử của tập hợp $E = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm?
- A. 3. B. 2. C. 6. D. 4.
- Câu 71. (THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018)** Tìm m để phương trình sau có nghiệm $m = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$:
- A. $-2 \leq m \leq 0$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $\frac{2}{11} \leq m \leq 2$.
- Câu 72. (THPT CÁN LỘC - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4 \sin x + (m-4) \cos x - 2m + 5 = 0$ có nghiệm là:
- A. 5. B. 6. C. 10. D. 3.
- Câu 73. (THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU - ĐỒNG THÁP - 2018)** Tìm giá trị nguyên lớn nhất của a để phương trình $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2$ có nghiệm
- A. $a = 3$. B. $a = 2$. C. $a = 1$. D. $a = -1$.
- Câu 74. (CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả giá trị nguyên của m để phương trình $8 \sin^2 x + (m-1) \sin 2x + 2m - 6 = 0$ có nghiệm.

A. 3. B. 5. C. 6. D. 2.

Câu 75. (THPT LƯƠNG VĂN TỤY - NINH BÌNH - LẦN 1 - 2018) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình

$$(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$$

A. 4037. B. 4036. C. 2019. D. 2020.

Câu 76. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tìm m để phương trình

$$m = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \text{ có nghiệm.}$$

A. $-2 \leq m \leq 0$ B. $0 \leq m \leq 1$ C. $\frac{2}{11} \leq m \leq 2$ D. $-2 \leq m \leq -1$

Dạng 2.3.3 Sử dụng điều kiện có nghiệm để tìm Min-Max

Câu 77. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ có M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của y . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $M^2 - m^2 = -3$. B. $M^2 - m^2 = \frac{-3}{4}$. C. $M^2 - m^2 = 3$. D. $M^2 - m^2 = 2$.

Câu 78. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019) Số giá trị nguyên trong tập giá trị của hàm số $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ là:

A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 79. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

A. $m = -\frac{1}{2}; M = 1$ B. $m = 1; M = 2$ C. $m = -2; M = 1$ D. $m = -1; M = 2$

Câu 80. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sin x - 2\cos x - 3}{2\sin x + \cos x - 4}$ là?

A. $\frac{2}{11}$ B. $\frac{2}{11}$ C. 3 D. 2

Câu 81. (LỚP 11 THPT NGÔ QUYỀN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 3.

A. 5 B. 4 C. 3 D. 7

Dạng 3. Giải và biện luận Phương trình đẳng cấp

Dạng 3.1 Không có điều kiện của nghiệm

Câu 82. (TRƯỜNG THPT LƯƠNG TÀI SÓ 2 NĂM 2018-2019) Khi đặt $t = \tan x$ thì phương trình $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 1$ trở thành phương trình nào sau đây?

A. $2t^2 - 3t - 1 = 0$ B. $3t^2 - 3t - 1 = 0$ C. $2t^2 + 3t - 3 = 0$ D. $t^2 + 3t - 3 = 0$

Câu 83. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$.

- A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$.

Câu 84. Phương trình: $3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3}\sin 4x \cos 4x$ có nghiệm là:

- A. $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$. B. $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$.
C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 85. Cho phương trình $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$.
B. Nếu chia 2 vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2\cot^2 x + 3\cot x + 1 = 0$.
C. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - 3\sin 2x + 3 = 0$.
D. $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

Câu 86. Phương trình: $(\sqrt{3} + 1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0$ có các nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$). B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = -1 + \sqrt{3}$).
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = 1 - \sqrt{3}$). D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = -2 + \sqrt{3}$).

Câu 87. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}$.

- A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. B. $(\cos x - 1)\left(\tan x - \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}\right) = 0$.
C. $(\tan x + 2 + \sqrt{3})(\cos^2 x - 1) = 0$. D. $\sin x = 0$.

Câu 88. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right\} \subset S$. B. $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\} \subset S$. C. $\left\{\frac{\pi}{3}; \pi\right\} \subset S$. D. $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\} \subset S$.

Câu 89. Cho phương trình $(\sqrt{2} - 1)\sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2} + 1)\cos^2 x - \sqrt{2} = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$.
B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x + 2\cot x - 1 = 0$.
C. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$.
D. $x = \frac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.

Câu 90. (Chuyên Bắc Ninh - Bắc Ninh - Lần 1 - 2018 - BTN) Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

Câu 91. Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có các nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$

Câu 92. Giải phương trình $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 93. (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$.

- A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$.

Dạng 3.3 Có điều kiện của nghiệm

Câu 94. (Chuyên KHTN - Lần 3 - Năm 2018) Phương trình $4\sin^2 2x - 3\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 95. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0$ trên $(-2\pi; 2\pi)$?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 2.

Câu 96. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x + (1 - \sqrt{3})\cos^2 x = 1$ là:

- A. $-\frac{2\pi}{3}$. B. $-\frac{\pi}{12}$. C. $-\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

Nghiệm dương nhỏ nhất của pt $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$ là:

Câu 97.

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 98. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ B. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ C. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ D. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Câu 99. (THPT CHUYÊN KHTN - LẦN 3 - 2018) Phương trình $4\sin^2 2x - 3\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Dạng 3.3 Định m để phương trình có nghiệm

Câu 100. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 6) Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2$ có nghiệm?

- A. 2. B. $\frac{11}{3}$. C. 4. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 101. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $3 \sin^2 x + m \sin 2x - 4 \cos^2 x = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \geq 4$. D. $m = 4$.

Dạng 4. Giải và biện luận Phương trình đối xứng

Dạng 4.1 Không có điều kiện của nghiệm

Câu 102. Phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Câu 103. Giải phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 104. Cho phương trình $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x + 4 = 0$. Đặt $t = \sin x + \cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- A. $2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$. B. $4t^2 + 3\sqrt{2}t + 4 = 0$.
C. $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 2 = 0$. D. $4t^2 + 3\sqrt{2}t - 4 = 0$.

Câu 105. Cho phương trình $5 \sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình đã cho?

- A. $1 + \tan^2 x = 0$. B. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $\tan x = 1$. D. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 106. Phương trình $2 \sin 2x - 3\sqrt{6} |\sin x + \cos x| + 8 = 0$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 5\pi + k\pi \end{cases}$.

Câu 107. Từ phương trình $(1 + \sqrt{3})(\cos x + \sin x) - 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} - 1 = 0$, nếu ta đặt $t = \cos x + \sin x$ thì giá trị của t nhận được là:

A. $t = \sqrt{3}$. B. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{2}$.
 C. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{3}$. D. $t = 1$.

Câu 108. Phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Dạng 4.2 Có điều kiện của nghiệm

Câu 109. (SGD Bà Rịa - Vũng Tàu - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $P = 1$.

Câu 110. Nếu $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -1 . D. 1 .

Câu 111. Cho x thỏa mãn $6(\sin x - \cos x) + \sin x \cos x + 6 = 0$. Tính $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. B. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
 C. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 112. (SỞ GD VÀ ĐT HƯNG YÊN NĂM 2018) Từ phương trình $(1 + \sqrt{5})(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 1 - \sqrt{5} = 0$ ta tìm được $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 113. Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng:

A. 1 . B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. -1 .

Câu 114. Nếu $(1 + \sqrt{5})(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 1 - \sqrt{5} = 0$ thì $\sin x$ bằng bao nhiêu?

A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 C. $\sin x = -1$ hoặc $\sin x = 0$. D. $\sin x = 0$ hoặc $\sin x = 1$.

Câu 115. Cho x thỏa mãn phương trình $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1$. Tính $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
 B. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 D. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 116. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$ là:

- A. $-\pi$. B. $-\frac{3\pi}{2}$. C. -2π . D. $-\frac{\pi}{2}$.

Câu 117. (THPT Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2017 - 2018 - BTN) Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ là:

- A. 4π . B. 3π . C. π . D. 2π .

Câu 118. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = 3 + \sin 2x_0$ là

- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 119. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - THÁNG 4 - 2018) Phương trình $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $\sqrt{2} \leq m \leq 2$. B. $1 \leq m \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 120. (THPT PHAN CHU TRINH - ĐẮC LẮC - 2018) Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ là:

- A. 2π . B. 4π . C. 3π . D. π .

Câu 121. Từ phương trình $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$, ta tìm được $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng:

- A. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 1.

Câu 122. Cho x thỏa mãn $2\sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$. Tính $\sin 2x$.

- A. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. B. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sin 2x = \frac{1}{2}$. D. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 5. Biến đổi đưa về phương trình tích

Dạng 5.1 Không có điều kiện của nghiệm

Câu 123. (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Giải phương trình $\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0$.

$$\begin{array}{llll} \text{A.} \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} & \text{B.} \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} & \text{C.} \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} & \text{D.} \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \end{array}$$

Câu 124. (THPT YÊN LẠC - LẦN 4 - 2018) Tập tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0$ là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. & \text{B. } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ \text{C. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. & \text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Dạng 5.2 Có điều kiện của nghiệm

Câu 125. (LÊ QUÝ ĐÔN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 6. & \text{B. } 5. & \text{C. } 4. & \text{D. } 2. \end{array}$$

Câu 126. (THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 5x \cos 7x = \cos 4x \sin 8x$ trên $(0; 2\pi)$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{19\pi}{3}. & \text{B. } \frac{9\pi}{2}. & \text{C. } 5\pi. & \text{D. } 7\pi. \end{array}$$

Câu 127. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018) Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 0. & \text{B. } 1. & \text{C. } 2. & \text{D. } 3. \end{array}$$

Câu 128. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc đoạn $[0; 13\pi]$ của phương trình $2\cos^3 x + \cos^2 x + \cos 2x = 0$. Tính tổng các phần tử của S .

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{380\pi}{3} & \text{B. } \frac{420\pi}{3} & \text{C. } 120\pi & \text{D. } \frac{400\pi}{3} \end{array}$$

Câu 129. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 3x - \cos 2x + 9\sin x - 4 = 0$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 5\pi. & \text{B. } \frac{11\pi}{3}. & \text{C. } \frac{25\pi}{6}. & \text{D. } 6\pi. \end{array}$$

Câu 130. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho phương trình $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 2\sin x) = 3 - 4\cos^2 x$. Gọi T là tập hợp các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của phương trình trên. Tính tổng các phần tử của T .

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{570}{3}\pi. & \text{B. } \frac{875}{3}\pi. & \text{C. } \frac{880}{3}\pi. & \text{D. } \frac{1150}{3}\pi. \end{array}$$

Câu 131. (THPT CHUYÊN BIÊN HÒA - HÀ NAM - 2018) Số nghiệm của phương trình $2\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ trong $[0; 2018\pi]$ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 1008. & \text{B. } 2018. & \text{C. } 2017. & \text{D. } 1009. \end{array}$$

Câu 132. (THPT CHUYÊN THĂNG LONG - ĐÀ LẠT - 2018) Số nghiệm của phương trình $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ trong khoảng $(0; 5\pi)$ là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 5. & \text{B. } 4. & \text{C. } 3. & \text{D. } 6. \end{array}$$

Câu 133. (THPT NGUYỄN HUỆ - NINH BÌNH - 2018) Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình

$$8 \cot 2x (\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{1}{2} \sin 4x \text{ trên đường tròn lượng giác là:}$$

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 0.

Câu 134. (THPT TỨ KỲ - HẢI DƯƠNG - LẦN 2 - 2018) Số nghiệm thuộc $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ của phương trình

$$\sqrt{3} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) \text{ là:}$$

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 135. (CHUYÊN ĐHSPTN - 2018) Số nghiệm thuộc khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình

$$\cos(\pi + x) + \sqrt{3} \sin x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ là}$$

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 2.

Câu 136. (SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN - 2018) Với $-\pi < x < \pi$ số nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ là

- A. 3. B. 6. C. 8. D. 0.

Câu 137. (THPT HOÀNG MAI - NGHỆ AN - 2018) Phương trình $(1 + \cos 4x) \sin 2x = 3 \cos^2 2x$ có tổng các nghiệm trong đoạn $[0; \pi]$ là:

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. π . D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 138. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm số nghiệm của phương trình $3 \sin^2 2x + \cos 2x - 1 = 0, x \in [0; 4\pi)$.

- A. 8 B. 2 C. 4 D. 12

Câu 139. (THPT BÌNH GIANG - HẢI DƯƠNG - 2018) Phương trình $\sin 3x + 2 \cos 2x - 2 \sin x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(-\frac{7\pi}{8}; 0\right)$.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Dạng 6. Giải và biện luận phương trình lượng giác chứa ẩn ở mẫu

Câu 140. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Nghiệm của phương trình $\frac{\cos 2x + 3 \sin x - 2}{\cos x} = 0$ là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$$C. \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$D. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 141. (THPT HẢI AN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{2 \sin x - 1} = 0.$$

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 142. (THPT LÊ HOÀN - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Số vị trí điểm biểu diễn các nghiệm của

phương trình $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 143. (THPT LÊ HOÀN - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương

trình $\frac{(2 \cos x - 1)(\sin 2x - \cos x)}{\sin x - 1} = 0$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ta được kết quả là:

A. $T = \frac{2\pi}{3}$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Câu 144. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỎ NĂM 2018-2019) Tính tổng các nghiệm thuộc $[0; 100\pi]$ của

phương trình $\frac{3 - \cos 2x + \sin 2x - 5 \sin x - \cos x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$.

A. $\frac{7475}{3}\pi$. B. $\frac{7375}{3}\pi$. C. 4950π . D. $\frac{7573}{3}\pi$.

Câu 145. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho phương trình $\frac{\cos 4x - \cos 2x + 2 \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = 0$.

Tính diện tích đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 146. (PHAN ĐĂNG LƯU - HUẾ - LẦN 1 - 2018) Số nghiệm của phương trình

$\frac{\sin x \sin 2x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là:

A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 147. (THPT CHUYÊN BẮC NINH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Tính tổng tất cả các nghiệm của

phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $[1; 70]$

A. 188π B. 263π C. 363π D. 365π

Câu 148. (THPT GANG THẾP - LẦN 3 - 2018) Số nghiệm của phương trình

$$\frac{\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{\sin x} = 0 \text{ trong khoảng } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ là}$$

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 149. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Để phương trình $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số a phải thỏa mãn điều kiện:

- A. $a \neq \pm\sqrt{3}$. B. $\begin{cases} |a| > 1 \\ |a| \neq \sqrt{3} \end{cases}$. C. $|a| \geq 4$. D. $|a| \geq 1$.

Câu 150. (CTN - LẦN 1 - 2018) Các nghiệm của phương trình $2(1 + \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$ được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Dạng 7. Giải và biện luận Một số bài toán về phương trình lượng giác khác

Câu 151. (THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018) Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$

- A. $\left(\frac{1285}{4}\right)^2 \pi$. B. $(643)^2 \pi$. C. $(642)^2 \pi$. D. $\left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi$.

Câu 152. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) \sin x + \cot x = 4$ là

- A. $-\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{2}$.

Câu 153. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Phương trình $\sin x = \frac{x}{2019}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 1290. B. 1287. C. 1289. D. 1288.

Câu 154. (THPT CHU VĂN AN - HÀ NỘI - 2018) Phương trình $\cos 2x \cdot \sin 5x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 155. (THPT TRẦN NHÂN TÔNG - QN - LẦN 1 - 2018) Số nghiệm của phương trình: $\sin^{2015} x - \cos^{2016} x = 2(\sin^{2017} x - \cos^{2018} x) + \cos 2x$ trên $[-10; 30]$ là:

- A. 46. B. 51. C. 50. D. 44.

Dạng 8. Giải và biện luận Phương trình lượng giác chứa tham số

- Câu 156. (THPT CHUYÊN AN GIANG - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$ có nghiệm thực?
- A. 13. B. 15. C. 7. D. 9.
- Câu 157. (THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\cos 2x + m|\sin x| - m = 0$ có nghiệm?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.
- Câu 158. (THPT HOÀNG MAI - NGHỆ AN - 2018)** Tìm m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m+1 = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- A. $0 \leq m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m \leq 1$. D. $-1 \leq m \leq 0$.
- Câu 159. (THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - LẦN 3 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$ có nghiệm thực?
- A. 13. B. 15. C. 7. D. 9.
- Câu 160. (ĐỀ THI THỬ LỚP 11 TRƯỜNG THPT YÊN PHONG LẦN 1 NĂM 2018 - 2019)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình: $2 \sin x + (m-1)\cos x = -m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- A. 3. B. 1. C. 2. D. Vô số.
- Câu 161. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4 \cos^3 x - \cos 2x + (m-3)\cos x - 1 = 0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 162. (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 163. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 5 - 2018)** Cho phương trình $(1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) = m \sin^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.
- A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
C. $m \in (-1; 1)$. D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.
- Câu 164. (ĐẶNG THỨC HỨA - NGHỆ AN - LẦN 1 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$ có đúng bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?
- A. 3. B. 5. C. 7. D. 1.

- Câu 165. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 3 - 2018)** Số các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x - 1)(2 \cos^2 x - (2m + 1) \cos x + m) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là:
- A. 1. B. 2. C. 3. D. vô số.
- Câu 166. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để pt $2 \cos 3x = m - 2 \cos x + \sqrt[3]{m + 6 \cos x}$ có nghiệm?
- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.
- Câu 167. (THPT KINH MÔN - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018)** Tìm m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- A. $-1 \leq m \leq 3$. B. $-\frac{3}{2} \leq m$. C. $1 \leq m \leq 3$. D. $m \leq \frac{3}{2}$.
- Câu 168. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số để phương trình sau vô nghiệm với ẩn x , ($x \in \mathbb{R}$): $4 \cos x - 3 \sin x = (m^3 - 4m + 3)x + m - 4$.
- A. Vô số B. 2 C. 3 D. 1
- Câu 169. (LỚP 11 THPT NGÔ QUYỀN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019)** Cho phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình có đúng 7 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$
- A. 2 B. 4 C. 1 D. 8
- Câu 170. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018)** Cho phương trình $\cos 2x - (2m - 3) \cos x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- A. $1 \leq m < 2$. B. $m < 2$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 1$.
- Câu 171. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos 2x - 5 \sin x + m = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.
- A. $-1 \leq m < 6$. B. $-4 \leq m < 6$. C. $m \in \{-4\} \cup [-1; 6)$. D. $-4 \leq m \leq -1$.
- Câu 172. (CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1 - 2018)** Tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m - 1) \cos x - m + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là
- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $0 \leq m < 1$. D. $0 \leq m \leq 1$.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Giải và biện luận Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng 1.1 Không cần biết đổi

Câu 1. Ta có $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} & (L) \\ \cos x = -\frac{1}{2} & (N) \end{cases}$.

Với $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là 2.

Câu 2. **Chọn A**

Ta có $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$. Đặt $\cos 2x = t$ với điều kiện $-1 \leq t \leq 1$, ta được phương trình bậc hai theo t là

$$t^2 + t - \frac{3}{4} = 0. (*)$$

Phương trình (*) có hai nghiệm $t_1 = \frac{1}{2}$ và $t_2 = -\frac{3}{2}$ nhưng chỉ có $t_1 = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy ta có

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3. **Chọn C**

$$2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 3 > 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 4. **Chọn B**

Đặt $t = \sin x$. Điều kiện $|t| \leq 1$

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 = -t + 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{TM}) \\ t = -2 & (L) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 5. **Chọn D**

$$\text{Ta có } 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 6. **Chọn A**

$$3\cos^2 x = -8\cos x - 5 \Leftrightarrow 3\cos^2 x + 8\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{5}{3} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 7. **Chọn D**

$$\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = 3 \end{cases}$$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $\sin x = 3$ phương trình vô nghiệm.

Câu 8. Chọn B

Ta có $\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 2 \end{cases}$.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên chỉ có $\sin x = 0$ thỏa mãn. Vậy ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Dạng 1.2 Biến đổi quy về phương trình bậc hai

Câu 9. Chọn D

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} + \sin^2 2x\right) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2(VN) \end{cases}$$

Với $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Chọn D

$$2\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Đặt $t = \cos x$, phương trình trở thành $4t^2 - t - 1 = 0$

Câu 11. Chọn A

$$\text{Ta có: } \cos 2x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1(1) \\ \sin x = \frac{3}{2}(2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Phương trình (2) vô nghiệm.

Câu 12. Chọn A

$$+) \text{ Ta có } \cos 2x - 2\sin x = -3 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x = -3$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -2 < -1 (VN) \end{cases}$$

$$+) \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Câu 13. Ta có: } \cos 2x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin x$ ta được phương trình: $-2t^2 + t + 3 = 0$.

$$\text{Câu 14. Ta có } 3\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Câu 15. ĐK } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Phương trình tương đương } \tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 16. Ta có: $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$
 $\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}.$

Đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, $|t| \leq 1$ ta được phương trình: $1 - 2t^2 + 4t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0.$

Câu 17. $\cos 2x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow -2t^2 + t = 0.$

Câu 18. Ta có $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

□ Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

□ Với $\sin x = \frac{3}{2} > 1$ (vô nghiệm).

Dạng 1.3 Có điều kiện của nghiệm

Câu 19. Chọn B

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ nên nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}.$

Câu 20. Chọn C.

Ta có $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, do $0 < x < \pi$ nên ta được $x = \frac{\pi}{2}.$

Với $x = k2\pi$, do $0 < x < \pi$ nên không có x nào thỏa mãn.

Câu 21. Chọn A

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -3 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

Câu 22. Chọn A

Ta có: $\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Theo đề bài: $0 \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{41}{4} \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 10$.

Vậy tổng các nghiệm là: $S = \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) + \dots + \left(\frac{3\pi}{4} + 9\pi\right) = \frac{105\pi}{2}$.

Câu 23. Chọn A

PT đã cho $\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 4\sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = 3 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Theo đề: $x \in (0; 10\pi) \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{21}{4}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy PT đã cho có 5 nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$.

Câu 24. $\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ hay $\cos x = -2$ (loại)

Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Với $0 < x < 2019 \Leftrightarrow 0 < k2\pi < 2019 \Leftrightarrow 0 < k < 321.49$. Vậy có tổng cộng 321 nghiệm.

Câu 25. PT đã cho $\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 4\sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = 3 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Theo đề: $x \in (0; 10\pi) \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{21}{4}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy PT đã cho có 5 nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$.

Câu 26. Ta có: $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -(2\cos 2x + 5)\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2(2x) - 5\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$.

$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

Do đó: $S = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi$.

Câu 27. + Ta có: $\cos^2 x + \frac{5}{2}\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} & (n) \\ \cos x = -2 & (l) \end{cases}$.

Suy ra: $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in (0; 3\pi)$ nên $0 < \frac{2\pi}{3} + k2\pi < 3\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{7}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra: $k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{3} \right\}$.

+ Với $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in (0; 3\pi)$ nên $0 < -\frac{2\pi}{3} + k2\pi < 3\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{11}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra: $k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$.

Do đó $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3} \right\}$.

Vậy số nghiệm của phương trình là 3.

Câu 28. Ta có $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, do $0 < x < \pi$ nên ta được $x = \frac{\pi}{2}$.

Với $x = k2\pi$, do $0 < x < \pi$ nên không có x nào thỏa mãn.

Câu 29. Ta có: $\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Do $x \in (-\pi; \pi)$ nên $x = \pm \frac{\pi}{3}$.

Câu 30. $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$
 $\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$
 $\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Do $x \in [0; 2\pi]$ nên $x = \left\{0; \pi; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 4 nghiệm.

Câu 31. Ta có $4\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

✓ Với $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) do $x \in \left(-\frac{2017\pi}{2}; \frac{2017\pi}{2}\right)$ nên có $-1008 \leq k \leq 1008$. nên có 2017 nghiệm.

✓ Với $x = \arctan \frac{1}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) do $x \in \left(-\frac{2017\pi}{2}; \frac{2017\pi}{2}\right)$ nên có $-1008 \leq k \leq 1008$ nên có 2017 nghiệm và hai họ nghiệm không có nghiệm nào trùng nhau. Vậy ta có $m = 4034$.

Câu 32. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \in (0; 2\pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \in (0; 2\pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \in (0; 2\pi) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

Vậy trên khoảng $(0; 2\pi)$, phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = \pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$.

Câu 33. Ta có: $\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Theo đề bài: $0 \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{41}{4} \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 10.$

Vậy tổng các nghiệm là: $S = \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) + \dots + \left(\frac{3\pi}{4} + 9\pi\right) = \frac{105\pi}{2}.$

Câu 34. Đặt $t = \sin x$, điều kiện $t \in [-1; 1]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $-2t^2 + 3t + 5 = 0$. Phương trình có hai nghiệm $t = -1$ (nhận), $t = \frac{5}{2}$ (loại).

Với $t = -1$, suy ra $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Ta có $0 \leq x \leq 200\pi \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 200\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{401}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1, 2, \dots, 100\}.$

Khi đó $T = \sum_{k=1}^{100} \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = 100\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi \sum_{k=1}^{100} k = -50\pi + 10100\pi = 10050\pi.$

Câu 35. Ta có: $\cos 2x + 3|\cos x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3|\cos x| - 2 = 0.$

Đặt $t = |\cos x|$, $0 \leq t \leq 1$, ta được phương trình:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ (vì } 0 \leq t \leq 1)$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2}, \text{ ta có: } |\cos x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{3}.$

$$(2\cos x + 5)\left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 5)(-\cos x) + 3 = 0$$

$$\text{Câu 36. } \Leftrightarrow -2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -3 \text{ (VN)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng $(0; 2\pi)$: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}.$

Dạng 2. Giải và biện luận Phương trình bậc nhất đối với sin và cos**Dạng 2.1 Không cần biến đổi****Câu 37. Chọn A**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 38. Ta có: $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 39. Ta có $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 40. Ta có: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 41. Ta có $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 42. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Dạng 2.2 Cần biến đổi

Câu 43. Ta có $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Câu 44. Chọn C

Ta có $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ và $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = -2\sin 2x$.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(-2x).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{6} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét nghiệm $x = -\frac{5\pi}{6} - k2\pi \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}]{k = -1 - k'} x = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$.

Câu 45. Chọn D

Ta có

$$\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}.$$

Câu 46. Chọn C

Phương trình tương đương $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 5x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - 5x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} - k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Câu 47. Chọn A

Ta có $3\sin 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x \Leftrightarrow (3\sin 3x - 4\sin^3 3x) + \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 9x + \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(9x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}.$$

Câu 48. Chọn A

Ta có $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Dạng 2.3 Có điều kiện của nghiệm

Dạng 2.3.1 Điều kiện nghiệm

Câu 49.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Trên $(0; 3\pi) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{8}, x = \frac{15\pi}{8}, x = \frac{23\pi}{8}.$

Câu 50.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\sqrt{2} \cos 3x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in (0; \pi)$ nên nhận $x = \frac{7\pi}{8}, x = \frac{\pi}{16}, x = \frac{9\pi}{16}.$

Câu 51. Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}.$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } 0 < x < 2\pi \longrightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{17}{8} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k=1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{8} \\ k=2 \rightarrow x = \frac{15\pi}{8} \end{cases}.$$

$$\longrightarrow T = \frac{7\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \frac{11}{4}\pi.$$

Câu 52. Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = \sin x + \sqrt{3} \cos x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 3x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{Suy ra } b + d = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 53. Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 7x.$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 7x = \pi - \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \quad 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\bullet \quad 0 < \frac{\pi}{18} + k \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{8}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{18} \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{9} \\ k = 2 \rightarrow x = \frac{7\pi}{18} \end{cases}.$$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn.

$$\text{Câu 54. Ta có } \sqrt{3} \cos x + \sin x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên đoạn $[0; 4035\pi]$, các giá trị $k \in \mathbb{Z}$ thỏa bài toán thuộc tập $\{0; 1; 2; \dots; 2016\}$.

Do đó có 2017 nghiệm của phương trình thuộc đoạn $[0; 4035\pi]$.

$$\text{Câu 55. } \cos(2x - \alpha) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \alpha = x + k2\pi \\ 2x - \alpha = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \alpha + k2\pi \end{cases}$$

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Để hai phương trình tương đương cần có } \begin{cases} \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9} \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Câu 56. Ta có: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra: $a = 0$ và $b = \frac{\pi}{2}$ nên $a + b = \frac{\pi}{2}$.

Câu 57. Ta có $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $x \in [-2\pi; 2\pi]$ nên $-2\pi \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq k \leq \frac{5}{3}$. Do đó có 4 giá trị k , tương ứng có bốn nghiệm x .

Câu 58. $2\cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $0 < x \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow k = 0, k = 1, k = 2$.

Với $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$; $k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$; $k = 2 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{7\pi}{2}$.

Câu 59. Ta có $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vì $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{17}{8}$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{8}; x_2 = \frac{15\pi}{8}$

Vậy $x_1 + x_2 = \frac{11\pi}{4}$.

Câu 60. Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3} \cos 9x = \sin 7x - \sqrt{3} \cos 7x$.

$$\Leftrightarrow \sin \left(9x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(7x - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - \frac{\pi}{3} = 7x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(7x - \frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{8} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Cho } < 0} \begin{cases} k\pi < 0 \Leftrightarrow k < 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\pi \\ \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{8} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{5}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{48} \end{cases} \text{ So sánh hai nghiệm ta được}$$

nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{\pi}{48} \in \left(-\frac{\pi}{12}; 0\right)$.

Dạng 2.3.2 Định m để phương trình có nghiệm

Câu 61. Điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm là: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Câu 62. Chọn D

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow 3^2 + (-4)^2 \geq (2m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 \leq 25 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

Câu 63. Ta có: $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (m+1) \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x + (m-1)\cos 2x = m+1$$

Để phương trình có nghiệm thì điều kiện là: $2^2 + (m-1)^2 \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow m \leq 1$ kết hợp với điều kiện của đề bài ta có: $-2018 \leq m \leq 1$. Suy ra có 2020 số giá trị nguyên để phương trình có nghiệm.

Câu 64. Chọn D

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$m^2 + (m+2)^2 \geq (2m+1)^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy có 1 giá trị nguyên.

Câu 65. Chọn B

$$m \sin 2x + \cos 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \cos 2x = \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\text{có nghiệm khi } \frac{2}{\sqrt{m^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Câu 66. Chọn A

$$4 \sin x + (m-4) \cos x - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin x + (m-4) \cos x = 2m - 5.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm khi } 4^2 + (m-4)^2 - (2m-5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m + 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - \sqrt{57}}{3} \leq m \leq \frac{6 + \sqrt{57}}{3}$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là 10.

Câu 67. Chọn B

$$(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)}{2}(1 - \cos 2x) - \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(1 - \cos 2x) - 2\sin 2x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x + (1-m)\cos 2x = m+1$$

Nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$4 + (1 - m)^2 \geq (m + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4m \leq 4 \Rightarrow m \leq 1$$

Vậy có tất cả 2020 giá trị của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 68. Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 4m - 4 \geq 0 \\ m - 2 \geq 0 \\ 3m - 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq 2 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

$$\sqrt{4m - 4} \cdot \sin x \cdot \cos x + \sqrt{m - 2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m - 9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m - 1} \cdot (2 \sin x \cdot \cos x) + \sqrt{m - 2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m - 9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m - 1} \cdot \sin 2x + \sqrt{m - 2} \cdot \cos 2x = \sqrt{3m - 9}$$

Phương trình có $a = \sqrt{m - 1}$, $b = \sqrt{m - 2}$, $c = \sqrt{3m - 9}$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Ta có:

$$(\sqrt{m - 1})^2 + (\sqrt{m - 2})^2 \geq (\sqrt{3m - 9})^2$$

$$\Leftrightarrow m - 1 + m - 2 \geq 3m - 9$$

$$\Leftrightarrow m \leq 6.$$

Kết hợp điều kiện ta được $3 \leq m \leq 6$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 69. $(2m - 1) \cos 2x + 2m \sin x \cos x = m - 1 \Leftrightarrow (2m - 1) \cos 2x + m \sin 2x = m - 1.$

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $(2m - 1)^2 + m^2 < (m - 1)^2 \Leftrightarrow 2m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}.$

Câu 70. Ta có $2m \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = m + 5 \Leftrightarrow m \sin 2x + 4 \frac{1 + \cos 2x}{2} = m + 5$

$$\Leftrightarrow m \sin 2x + 2 \cos 2x = m + 3.$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + 4 \geq (m + 3)^2 \Leftrightarrow m \leq \frac{-5}{9}.$

Vậy có ba giá trị của $m \in E$ để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 71. Có $2 \cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$PT \Leftrightarrow m(2 \cos x - \sin x + 4) = \cos x + 2 \sin x + 3$$

$$\Leftrightarrow (2m - 1) \cos x - (m + 2) \sin x + 4m - 3 = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm khi $(2m - 1)^2 + (m + 2)^2 \geq (4m - 3)^2$

$$\Leftrightarrow -11m^2 + 24m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq m \leq 2.$$

Câu 72. $4 \sin x + (m - 4) \cos x - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin x + (m - 4) \cos x = 2m - 5.$

Phương trình có nghiệm khi $4^2 + (m - 4)^2 - (2m - 5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m + 7 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - \sqrt{57}}{3} \leq m \leq \frac{6 + \sqrt{57}}{3}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là 10.

Câu 73. $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \sin 2x + 3a \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2$

$$\Leftrightarrow a - a \cos 2x + 4 \sin 2x + 3a + 3a \cos 2x = 4 \Leftrightarrow 4 \sin 2x + 2a \cos 2x = 4 - 4a \quad (*)$$

$$(*) \text{ có nghiệm khi } 4^2 + 4a^2 \geq (4 - 4a)^2 \Leftrightarrow 12a^2 - 32a \leq 0 \Leftrightarrow 12a^2 - 32a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{8}{3}.$$

Do $a \in \mathbb{Z}$ và là số lớn nhất nên $a = 2$.

Câu 74. $8 \sin^2 x + (m-1) \sin 2x + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow 8 \sin^2 x - 4 + (m-1) \sin 2x + 2m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow -4 \cos 2x + (m-1) \sin 2x = 2 - 2m.$$

Phương trình có nghiệm khi: $(-4)^2 + (m-1)^2 \geq (2-2m)^2 \Leftrightarrow 16 + m^2 - 2m + 1 \geq 4 - 8m + 4m^2$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 6m - 13 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{3+4\sqrt{3}}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

$$(m+1) \sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$$

Câu 75. $\Leftrightarrow (m+1) \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-m}{2} \right) \cos 2x - \sin 2x = -\frac{m+1}{2}$$

$$\text{Điều kiện có nghiệm của phương trình } \left(\frac{1-m}{2} \right)^2 + (-1)^2 \geq \left(-\frac{m+1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Suy ra $-2018 \leq m \leq 1$

Suy ra có 2020 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 76. Chọn C

Ta có $2 \cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$m = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow \cos x + 2 \sin x + 3 = m(2 \cos x - \sin x + 4)$$

$$\Leftrightarrow (2m-1) \cos x - (m+2) \sin x + 4m - 3 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$(2m-1)^2 + (m+2)^2 \geq (4m-3)^2 \Leftrightarrow -11m^2 + 24m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq m \leq 2$$

Dạng 2.3.3 Sử dụng điều kiện có nghiệm để tìm Min-Max

Câu 77. Ta có $\sin x + \cos x + 2 > 0, \forall x$ nên hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Xét phương trình ẩn } x: y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1) \sin x + (y-2) \cos x = 1 - 2y.$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm } \Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

$$\text{Vì phương trình luôn có nghiệm, suy ra } \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = -2 = m \\ \max_{x \in \mathbb{R}} y = 1 = M \end{cases} \Rightarrow M^2 - m^2 = 1 - 4 = -3.$$

Câu 78. Chọn B

$$y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \quad (1)$$

• Điều kiện: $2 \cos x - \sin x + 4 \neq 0$ (luôn đúng)

• Gọi y_0 là một giá trị của hàm số (1).

$$\text{Khi đó: } y_o = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$$

$$\Leftrightarrow y_o (2 \cos x - \sin x + 4) = \cos x + 2 \sin x + 3$$

$$\Leftrightarrow (y_o + 2) \sin x + (1 - 2y_o) \cos x = 4y_o - 3 \quad (2)$$

Do phương trình (2) luôn có nghiệm x nên: $(4y_o - 3)^2 \leq (y_o + 2)^2 + (1 - 2y_o)^2$

$$\Leftrightarrow 11y_o^2 - 24y_o + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y_o \leq 2$$

Tập giá trị của hàm số (1) là $\left[\frac{2}{11}; 2\right]$. Các giá trị nguyên là: 1; 2. Vậy có hai giá trị nguyên.

Câu 79. Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y - 1) \sin x + (y - 2) \cos x = 1 - 2y \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq (1 - 2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

Vậy $m = -2$; $M = 1$.

Câu 80. Chọn D

$$P = \frac{\sin x - 2 \cos x - 3}{2 \sin x + \cos x - 4} \Leftrightarrow (2P - 1) \sin x + (2 + P) \cos x + 3 - 4P = 0$$

Áp dụng điều kiện có nghiệm ta có: $(2P - 1)^2 + (2 + P)^2 \geq (3 - 4P)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq P \leq 2$.

Câu 81. Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow m \sin x - y \cos x + 1 - 2y = 0.$$

Điều kiện phương trình (1) có nghiệm là $y^2 + m^2 \geq (1 - 2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$$\Rightarrow y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}.$$

$$\text{Do đó, suy ra } \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < 3 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < m < 4.$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Dạng 3. Giải và biện luận Phương trình đẳng cấp

Dạng 3.1 Không có điều kiện của nghiệm

Câu 82. Chọn D

Do $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta có

$$2 \tan^2 x + 3 \tan x - 2 = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x + 3 \tan x - 3 = 0$$

Đặt $t = \tan x$ thì ta có phương trình $t^2 + 3t - 3 = 0$.

Câu 83. Cách 1: Xét $\cos x = 0$: Phương trình tương đương $2 = 3(k\pi)$

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta có:

$$2 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2: $pt \Leftrightarrow -(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{3}\sin 2x = 2 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 84. Chọn B

$$3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3}\sin 4x \cos 4x \Leftrightarrow 3\frac{1+\cos 8x}{2} + 5\frac{1-\cos 8x}{2} = 2 - \sqrt{3}\sin 8x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 8x - \cos 8x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\cos 8x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 8x \sin \frac{\pi}{6} = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 8x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 85. Chọn B

● Với $x = k\pi \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$. Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy A đúng.

● Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$. Vậy B đúng.

● Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cot^2 x - 3\cot x + 1 = 0$. Vậy C sai.

● Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} - 3\frac{\sin 2x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - 3\sin 2x + 3 = 0$. Vậy D đúng.

Câu 86. Chọn A

$\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình, nên ta có:

$$(\sqrt{3}+1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}+1)\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + \sqrt{3}-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} \text{ (Với } \tan \alpha = 2-\sqrt{3}).$$

Câu 87. Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - (\sqrt{3}+1)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{3})\sin^2 x - (\sqrt{3}+1)\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x \left[(1-\sqrt{3})\sin x - (\sqrt{3}+1)\cos x \right] = 0.$$

● $\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 = 0$.

● $(1-\sqrt{3})\sin x - (\sqrt{3}+1)\cos x = 0 \Leftrightarrow (1-\sqrt{3})\sin x = (\sqrt{3}+1)\cos x$.

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = -2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x + 2 + \sqrt{3} = 0.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $(\tan x + 2 + \sqrt{3})(\cos^2 x - 1) = 0$.

Câu 88. Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0.$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\bullet \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = \cos x.$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình chứa các nghiệm $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{2}$. **Chọn D**

Câu 89. Chọn C

$$\text{Ta có } (\sqrt{2}-1)\sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2}+1)\cos^2 x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)\frac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x + (\sqrt{2}+1)\frac{1+\cos 2x}{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)(1-\cos 2x) + \sin 2x + (\sqrt{2}+1)(1+\cos 2x) - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2}\cos 2x + \sin 2x = 0$$

Như vậy, mệnh đề: “Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$ ” **sai**.

Câu 90. Chọn A

Cách 1: Xét $\cos x = 0$: Phương trình tương đương $2 = 3(k\pi)$

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta có:

$$2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2: $pt \Leftrightarrow -(1-2\sin^2 x) + \sqrt{3}\sin 2x = 2 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

Câu 91. Chọn B.

TH1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thỏa mãn phương trình.

TH2: $\cos x \neq 0$.

$$6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$$

$$\Leftrightarrow 6\tan^2 x + 14\sqrt{3}\tan x - 8 = 6\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 6\tan^2 x + 14\sqrt{3}\tan x - 8 = 6(\tan^2 x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{3}\tan x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 92. Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 93. Cách 1: Xét $\cos x = 0$: Phương trình tương đương $2 = 3(k\pi)$

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta có:

$$2 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2: $pt \Leftrightarrow -(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \Leftrightarrow 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Dạng 3.3 Có điều kiện của nghiệm

Câu 94. Chọn A

Để thấy $\cos 2x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Do đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$4 \tan^2 2x - 3 \tan 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Xét (1), vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow k \in \{1\}$ (do $k \in \mathbb{Z}$).

Xét (2), vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow k \in \{1, 2\}$ (do $k \in \mathbb{Z}$).

Do đó, trong khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 95. Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 1 - 3 \tan x + 2 \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \end{cases}$$

● Vì $x \in (-2\pi; 2\pi) \rightarrow -2\pi < \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \rightarrow -\frac{9}{4} < k < \frac{7}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

● Vì $x \in (-2\pi; 2\pi) \rightarrow -2\pi < \arctan \frac{1}{2} + k\pi < 2\pi$.

$\xrightarrow[\text{xấp xỉ}]{\text{CASIO}} -28,565 < k < -24,565 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-28; -27; -26; -25\}$.

Vậy có tất cả 8 nghiệm.

Câu 96. Chọn D

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Cho } < 0} \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{3} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

So sánh hai nghiệm ta được $x = -\frac{\pi}{4}$ là nghiệm âm lớn nhất.

Câu 97. Chọn B

$$\text{Ta có } 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) + 3\sqrt{3}\sin 2x - (1 + \cos 2x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm dương nhỏ nhất là } x = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 98. $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow (3\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin x}{\cos x} = 1 \\ \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{3} \\ \tan x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ nên

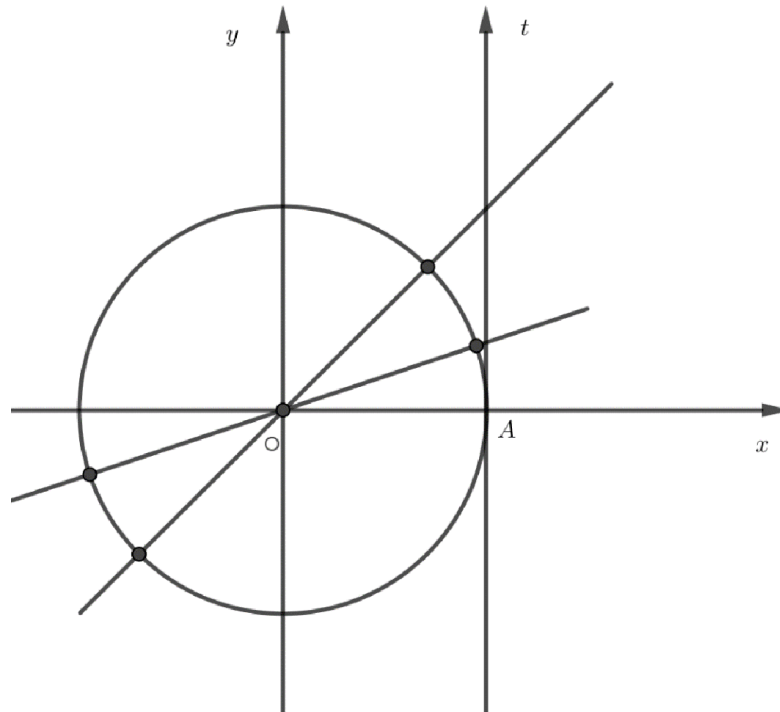
$$x_0 = \arctan \frac{1}{3}.$$

Câu 99. Ta có: $4\sin^2 2x - 3\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 4\tan^2 2x - 3\tan 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x \in (0; \pi) \Leftrightarrow 2x \in (0; 2\pi)$$



Quan sát hình vẽ ta có: Phương trình có 4 nghiệm thuộc $(0; \pi)$.

Dạng 3.3 Định m để phương trình có nghiệm

Câu 100. Ta có:

$$a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \sin 2x + 3a \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 2x + 2a \cos 2x = 4 - 4a (*)$$

Câu 101. Phương trình $\Leftrightarrow 3 \sin^2 x + 2m \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = 0$ (1)

Với $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$, thay vào (1) ta có $3.1 + m.0 - 4.0 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).

Do đó $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ ta được $3 \tan^2 x + 2m \tan x - 4 = 0$.

Đặt $t = \tan x$, ta có $3t^2 + 2mt - 4 = 0$ (2)

Phương trình bài ra có nghiệm khi (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 12 \geq 0$ luôn đúng với $\forall m \in \mathbb{R}$ vì $m^2 + 12 \geq 12 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình bài ra có nghiệm.

Dạng 4. Giải và biện luận Phương trình đối xứng

Dạng 4.1 Không có điều kiện của nghiệm

Câu 102. Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \quad (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow \sin 2x = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$\Rightarrow t = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - t^2}{2} \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 103. Chọn A

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Vì $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $t = 1$, ta được $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 104. Chọn A

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $3\sqrt{2}t + 2(t^2 - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$.

Câu 105. Chọn A

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $5(t^2 - 1) + t + 6 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + t + 1 = 0$: vô nghiệm.

Nhận thấy trong các đáp án A, B, C, D thì phương trình ở đáp án D vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình $1 + \tan^2 x = 0$.

Câu 106. Chọn B

Đặt $|\sin x + \cos x| = t \left(t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \right) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3\sqrt{6}t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{6} \text{ (L)} \\ t = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow |\sin x + \cos x| = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 107. Chọn D

Đặt $t = \sin x - \cos x \left(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $(1 + \sqrt{3})t - (t^2 - 1) - \sqrt{3} - 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Câu 108. Chọn C

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = 1 - \sin x \cos x$$

Đặt $\sin x + \cos x = t \left(|t| \leq \sqrt{2} \right) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Khi đó ta có phương trình

$$t^3 - 3 \frac{t^2 - 1}{2} t = 1 - \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 4.2 Có điều kiện của nghiệm

Câu 109. Chọn C

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ta có $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$, suy ra $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}.$$

Từ đó ta có $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Như vậy $P = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 110. Chọn A

Ta có $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2 \Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 2$.

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x = 2. (*)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó (*) trở thành $2t + t^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = 1.$$

Ta có $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 111. Chọn C

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $6t + \frac{1 - t^2}{2} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 13 \text{ (loại)} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 112. Chọn D

Ta có $(1 + \sqrt{5})(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 1 - \sqrt{5} = 0$

$$\Leftrightarrow -(\sin x - \cos x)^2 + (1 + \sqrt{5})(\sin x - \cos x) - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 1 & (tm) \\ \sin x - \cos x = \sqrt{5} & (l) \end{cases}$$

Do đó $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 113. Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$.

Ta có $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2.$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sqrt{2}t(t^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2} - \cos x.$$

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + (\sqrt{2} - \cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 114. Chọn D

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $(1 + \sqrt{5})t + 1 - t^2 - 1 - \sqrt{5} = 0$.

$$\Leftrightarrow t^2 - (1 + \sqrt{5})t + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \sin x - 1.$$

Mặt khác $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + (\sin x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$.

Câu 115. Chọn B

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $1 - t^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$.

Với $t = 1$, ta được $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $t = 0$, ta được $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Câu 116. Chọn B

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $t = 1 - \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = 1$, ta được $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

TH1. Với $x = k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < 0 \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -2\pi$.

TH2. Với $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{4} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Câu 117. Chọn B

Đặt $t = |\sin x + \cos x|$, ($0 \leq t \leq \sqrt{2}$)

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Phương trình đã cho trở thành:

$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa mãn) hoặc $t = -3$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

Trong khoảng $(0; 2\pi)$ các nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2\pi)$ là 3π .

Câu 118. Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, ta có phương trình

$$\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Với $t = 1$, ta có $\sin x_0 \cos x_0 = \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Rightarrow \sin 2x_0 = 0 \Rightarrow P = 3 + \sin 2x_0 = 3$

Câu 119. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $P = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow P^2 = 2 + \sin x + \cos x + 2\sqrt{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x}$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Khi đó $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Vậy $P^2 = 2 + t + 2\sqrt{1 + t + \frac{t^2 - 1}{2}} = 2 + t + \sqrt{2}|t + 1|$.

TH1: $-\sqrt{2} \leq t \leq -1$ thì $P^2 = (1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}$. Khi đó $1 \leq P^2 \leq 4 - 2\sqrt{2}$.

TH2: $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ thì $P^2 = (1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}$. Khi đó $1 \leq P^2 \leq 4 + 2\sqrt{2}$.

Vậy $1 \leq P^2 \leq 4 + 2\sqrt{2}$ mà $P \geq 0$ nên $1 \leq P^2 \leq 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq P \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

Phương trình có nghiệm khi $1 \leq m \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

Câu 120. Đặt $t = |\sin x + \cos x|$, ($0 \leq t \leq \sqrt{2}$)

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Phương trình đã cho trở thành:

$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa mãn) hoặc $t = -3$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

Trong khoảng $(0; 2\pi)$ các nghiệm của phương trình là: $\left\{ \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2\pi)$ là 3π .

Câu 121. Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \frac{3}{2} \sin 2x$.

$\Leftrightarrow 2 + (\sin x + \cos x)(2 - \sin 2x) = 3 \sin 2x$.

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Phương trình trở thành $2 + t(2 - t^2 + 1) = 3(t^2 - 1)$.

$\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \pm \sqrt{6} \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $t = -1$, ta được $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mà $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 122. Chọn C

Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$. Vì $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $2(t^2 - 1) - 3\sqrt{6}t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ t = \sqrt{6} \text{ (loại)} \end{cases}$.

$\sin 2x = t^2 - 1 = \frac{1}{2}$.

Dạng 5. Biến đổi đưa về phương trình tích

Dạng 5.1 Không có điều kiện của nghiệm

Câu 123. Cách 1: ĐK: $x \in \mathbb{R}$ (*)

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x(3 - 4 \sin^2 x) - 4 \sin x \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \left(3 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 4 \cos 2x \right) = 0 \Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ thỏa mãn (*)}.$$

Cách 2: Phương trình $\Leftrightarrow \sin 3x - 2(\sin 3x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow -\sin 3x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (4 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Câu 124. Cách 1:

$$\text{Ta có: } \sin 2x + 2 \sin^2 x - 6 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x \cos x - 2 \cos x) + (2 \sin^2 x - 6 \sin x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) + 2 (\sin x - 2) (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1) (\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dạng 5.2 Có điều kiện của nghiệm

Câu 125. Ta có $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là 6.

Câu 126. Ta có phương trình $\sin 5x \cos 7x = \cos 4x \sin 8x \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\sin 12x - \sin 2x) = \frac{1}{2} (\sin 12x + \sin 4x)$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (I).$$

$$\text{Vì } x \in (0; 2\pi) \text{ nên từ (I) suy ra } x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là } \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 7\pi.$$

Câu 127. $\sin 2x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = -\frac{3}{2} \quad (\text{loại vì } \sin x \in [-1; 1]) \end{cases}$$

Theo đề: $x \in (0; \pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 128. $2\cos^3 x + \cos^2 x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 3\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; 13\pi]$ nên

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}, \frac{25\pi}{3}, \frac{31\pi}{3}, \frac{37\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}, \frac{23\pi}{3}, \frac{29\pi}{3}, \frac{35\pi}{3}, \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi, 13\pi \right\}$$

Vậy tổng các phân tử của S là: $\frac{400\pi}{3}$.

Câu 129. Ta có: $\cos 3x - \cos 2x + 9\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - (1 - 2\sin^2 x) + 9\sin x - 4 = 0$.

$$\Leftrightarrow \cos x (4(1 - \sin^2 x) - 3) + 2\sin^2 x + 9\sin x - 5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow -\cos x (2\sin x - 1)(2\sin x + 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 5) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(-2\sin x \cdot \cos x - \cos x + \sin x + 5) = 0 \quad (*).$$

Do $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$; $-2\sin x \cdot \cos x = -\sin 2x \geq -1$.

nên: $-2\sin x \cdot \cos x - \cos x + \sin x + 5 = \sin x - \cos x - \sin 2x + 5 \geq 4 - \sqrt{2} > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Với $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x \in (0; 3\pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{12} < k < \frac{17}{12}$.

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6} \right\}.$$

Với $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $x \in (0; 3\pi) \Rightarrow 0 < \frac{5\pi}{6} + k2\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{-5}{12} < k < \frac{13}{12}$.

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right\}.$$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right\}$.

Tổng tất cả các nghiệm là 6π .

Câu 130. Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 2\sin x) = 4\sin^2 x - 1$.

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.$$

*Trường hợp 1: Với $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. (1)

$$x \in [0; 20\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{115}{12}. \text{ Mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}.$$

\Rightarrow Tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của họ nghiệm (1) là:

$$S_1 = \sum_{k=0}^9 \left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi \right) = \frac{295\pi}{3}.$$

*Trường hợp 2: Với $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. (2)

$$x \in [0; 20\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{6} \leq k \leq \frac{119}{6}. \text{ Mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; \dots; 19\}.$$

\Rightarrow Tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$ của họ nghiệm (2) là:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) = \frac{580\pi}{3}.$$

Vậy tổng các phần tử của T là $S_1 + S_2 = \frac{875}{3}\pi$.

Câu 131. Ta có $2\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x (4\sin^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài ra $x \in [0; 2018\pi]$ nên $\frac{\pi}{2} + k\pi \in [0; 2018\pi] \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 2017\}$.

Do đó số nghiệm của phương trình $2\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ trong $[0; 2018\pi]$ là 2018.

Câu 132. $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin x - 2 = 2\sin x \cos x - 4\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x - 2 = 2\cos x (\sin x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 2)(1 - 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

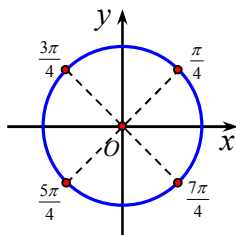
$$x \in (0; 5\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3} \right\}.$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm trong khoảng $(0; 5\pi)$.

Câu 133. Điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

$$8\cot 2x (\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{1}{2}\sin 4x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x \right) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(9 + 7 \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$



Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là 4.

Câu 134. Ta có $\sqrt{3} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = \sin(2x - \pi)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = -2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài ra $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ nên $k\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\pi$.

$$\frac{5\pi}{6} + k2\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\frac{7\pi}{6}.$$

$$-\frac{5\pi}{6} + k2\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow k \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Do đó số nghiệm thuộc $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ của phương trình đã cho là 2.

Câu 135. Ta có:

$$\cos(\pi + x) + \sqrt{3} \sin x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x + \sqrt{3} \sin x = -\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(-2 \sin 2x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

• Với $x = k\pi$, trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $-\frac{4\pi}{3} \leq k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq k < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow k \in \{-1; 0\}. \text{ Suy ra các nghiệm là } x = -\pi, x = 0.$$

• Với $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $-\frac{4\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq k < \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow k \in \{-1; 0\}. \text{ Suy ra các nghiệm là } x = -\frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}.$$

• Với $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $-\frac{4\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq k < \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow k \in \{-1; 0\}. \text{ Suy ra các nghiệm là } x = -\frac{2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}.$$

Suy ra số nghiệm trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình là 6.

Câu 136. Phương trình $\Leftrightarrow (\cos 4x + \cos 2x) + (\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x + 2 \cos 2x \cos x = 0$.

$$\Leftrightarrow 4 \cos x \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Do $-\pi < x < \pi$ nên:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \in (-\pi; \pi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \in (-\pi; \pi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3\pi}{5} \\ x = \pm \frac{\pi}{5} \end{cases}.$$

Câu 137. $(1 + \cos 4x) \sin 2x = 3 \cos^2 2x \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x \cdot \sin 2x - 3 \cos^2 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x (2 \sin 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 \leq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow k = 0; 1.$$

$$\text{Vậy tổng các nghiệm bằng } \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi.$$

Câu 138. Chọn D

$$3 \sin^2 2x + \cos 2x - 1 = 0, x \in [0; 4\pi) \Leftrightarrow 12 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & (1) \\ \cos x = \frac{\sqrt{6}}{6} & (2) \\ \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{6} & (3) \end{cases}$$

Họ nghiệm $x = k\pi$ có 4 nghiệm trong $[0; 4\pi)$

Trong mỗi nửa khoảng $[k2\pi; k2\pi + 2\pi)$ phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ có 2 nghiệm phân biệt. Do đó

$$\cos x = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ có 4 nghiệm trong } [0; 4\pi).$$

Tương tự, trong mỗi nửa khoảng $[k2\pi; k2\pi + 2\pi)$ phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ có 2 nghiệm. Do đó

$$\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ có 4 nghiệm trong } [0; 4\pi).$$

Trong các họ nghiệm của,, không có hai họ nào có phần tử chung nên chọn đáp án **D.**

$$\sin 3x + 2 \cos 2x - 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2 - 4 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Câu 139. Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Do $x \in \left(-\frac{7\pi}{8}; 0\right)$ nên phương trình có các nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{6}; x = -\frac{\pi}{2}; x = -\frac{5\pi}{6}$

Dạng 6. Giải và biện luận phương trình lượng giác chứa ẩn ở mẫu

Câu 140. **Cách 1:** Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ với $l \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (1) \\ \sin x = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta loại phương trình (1). Giải phương trình (2) được

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 141. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Phương trình trở thành:

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 142. Điều kiện xác định: $\tan x \neq -\sqrt{3}$.

Phương trình tương đương: $2 \sin x \cos x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \text{ Do } \tan x \neq -\sqrt{3} \text{ nên } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ loại.}$$

$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác có 1 điểm.

$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác có 1 điểm.

Vậy có 2 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Câu 143. Điều kiện xác định $\sin x \neq 1$.

$$\text{Phương trình tương đương } (2 \cos x - 1) \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ và } \sin x \neq 1 \text{ nên } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ Do đó } T = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 144. Chọn A

Điều kiện xác định: $2 \cos x - \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{6} + l2\pi (l \in \mathbb{Z})$.

Với $\forall x \neq \pm \frac{\pi}{6} + l2\pi (l \in \mathbb{Z})$ phương trình $\frac{3 - \cos 2x + \sin 2x - 5 \sin x - \cos x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 - \cos 2x + \sin 2x - 5 \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 1 + 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 5 \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x \cos x - \cos x) + 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \sin^2 x - \sin x) - (4 \sin x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x + \sin x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \text{ (vì } \cos x + \sin x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Mà } x \in [0; 100\pi] \Rightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 100\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{595}{12}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; \dots; 49.$$

Vậy tổng các nghiệm thuộc $[0; 100\pi]$ của phương trình bằng $\sum_{k=0}^{49} \left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi \right) = \frac{7475\pi}{3}$.

Câu 145. Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình tương đương: $\cos 4x - \cos 2x + 2\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2x = 0$$

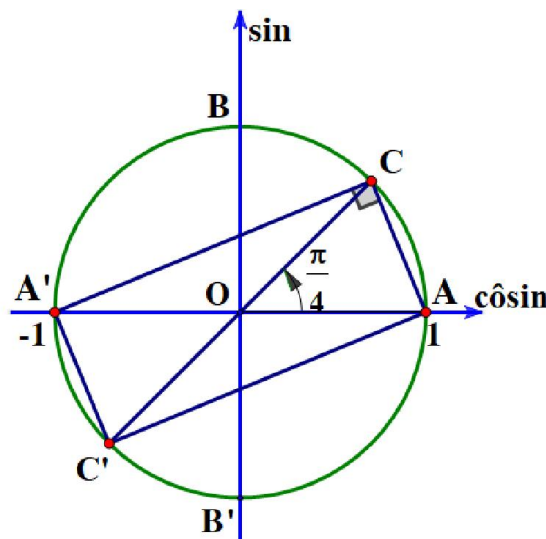
$$\Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện thì phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$.

Biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác ta được các điểm cuối của các cung nghiệm tạo thành một hình chữ nhật. Đó là hình chữ nhật $ACA'C'$ như hình vẽ, trong đó

$$\angle AOC = \frac{\pi}{4}.$$



Từ đó ta có, diện tích đa giác cần tính là $S_{ACA'C'} = 4S_{OAC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Câu 146. Điều kiện $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Ta có: } \frac{\sin x \sin 2x + 2\sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x (\sin x + \cos x) + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin 2x + 1)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Thử lại điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Trên $(-\pi; \pi)$ phương trình đã cho có các nghiệm là: $\frac{\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}$.

Câu 147. Chọn C

ĐK: $\cos x \neq 0$

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - \cos^3 x - 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^4 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad (\text{vì } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k_1 2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi \end{cases}$$

Vì $x \in [1; 70]$ nên $0 \leq k_1; k_2 \leq 10; 1 \leq k_3 \leq 11$

Áp dụng công thức tính tổng 11 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng, ta có

$$S = \frac{11}{2}(\pi + 10.2\pi) + \frac{11}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} + 10.2\pi\right)\right] + \frac{11}{2}\left[\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(-\frac{\pi}{3} + 11.2\pi\right)\right] = 363\pi.$$

Câu 148. * ĐKXD: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \sin^2 x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

* Ta có:

$$\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x} \Leftrightarrow a^2 \cos^2 x = \sin^2 x + a^2 - 2 \Leftrightarrow -a^2 \sin^2 x = \sin^2 x - 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2}{1 + a^2}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{2}{1+a^2} \in [0; 1] \\ \frac{2}{1+a^2} \neq 1 \\ \frac{2}{1+a^2} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1+a^2} \in (0; 1) \\ \frac{2}{1+a^2} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2 > 2 \\ 1+a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1 \\ |a| \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

Câu 150. Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có } 2(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x (\sin x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = (1 - \cos^2 x)(\sin x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)^2 (1 + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

Chỉ có $\sin x = -1$ là thỏa điều kiện ban đầu.

Vậy các nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi 1 điểm trên đường tròn lượng giác.

Dạng 7. Giải và biện luận Một số bài toán về phương trình lượng giác khác

Câu 151. $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x) \Leftrightarrow \sin^{2018} x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^{2018} x(1 - 2\cos^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^{2018} x \cdot \cos 2x - \cos^{2018} x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \end{cases}$$

$$+ \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$+ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \Leftrightarrow \tan^{2018} x = 1 \quad (x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ không là nghiệm}) \Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \text{ là nghiệm của pt.}$$

$$\text{Do } x \in (0; 2018) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2018 \Rightarrow 0 \leq k \leq 1284, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$ bằng

$$\frac{\pi}{4} \cdot 1285 + (1 + 2 + \dots + 1284) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot 1285 + \frac{1284 \cdot 1285}{4} \pi = \left(\frac{1285}{2} \right)^2 \pi.$$

Câu 152. Chọn D.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) \sin x + \cot x = 4 \Leftrightarrow \frac{\sin x \sin \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \sin x + \cot x = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \sin x + \cot x = 4 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 4 \Leftrightarrow \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$$

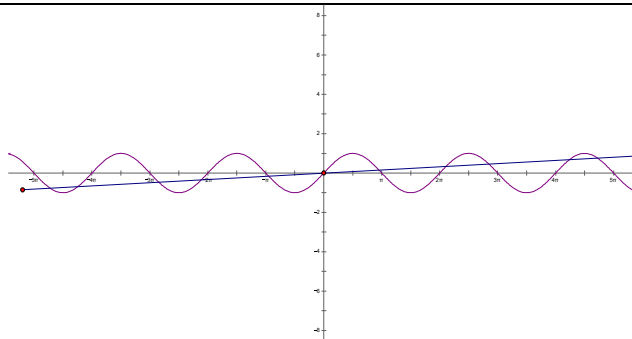
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 + \sqrt{3} \\ \tan x = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + l\pi \end{cases}$$

Với hai họ nghiệm trên dễ thấy nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{12}$; để được nghiệm âm lớn nhất ta đều

cho $k = l = -1$ được nghiệm âm $-\frac{7\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}$ khi đó nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{7\pi}{12}$.

$$\text{Ta có } -\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{2}.$$

Câu 153. Cách 1:



Đk: $-2019 \leq x \leq 2019$

Nhận xét $x = 0$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x = x_0$ là nghiệm của phương trình thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm của phương trình

Ta xét nghiệm của phương trình trên đoạn $[0; 2019]$. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \frac{x}{2019}$

. Ta thấy:

Trên đoạn $[0; 2\pi]$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Trên nửa khoảng $(2\pi; 4\pi]$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Trên nửa khoảng $(4\pi; 6\pi]$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

...

Trên nửa khoảng $(640\pi; 642\pi]$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Trên nửa khoảng $(642\pi; 2019]$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Như vậy trên đoạn $[0; 2019]$ phương trình có một nghiệm $x = 0$ và $321 \times 2 + 1 = 643$ nghiệm dương phân biệt. Mà do $x = x_0$ là nghiệm của phương trình thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm của phương trình nên trên nửa khoảng $[-2019; 0)$ phương trình cũng có 643 nghiệm âm phân biệt.

Do đó trên đoạn $[-2019; 2019]$ phương trình có số nghiệm thực là $643 \times 2 + 1 = 1287$ nghiệm

Vậy số nghiệm thực của phương trình đã cho là 1287 nghiệm.

Cách 2:

Đk: $-2019 \leq x \leq 2019$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \frac{x}{2019}$, ta có $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2019}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \frac{1}{2019} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi$ với $\cos \alpha = \frac{1}{2019}$ và $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chia $(0; 2019]$

thành hợp các nửa khoảng $(k2\pi; 2\pi + k2\pi]$ (với $k = \overline{0; 320}$) và $(642\pi; 2019]$ (vì $2019 \approx 642,67\pi$)

Xét trên mỗi nửa khoảng $(k2\pi; 2\pi + k2\pi]$ (với $k = \overline{1; 320}$), ta có $f'(x) = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \alpha + k2\pi$ và $x_2 = -\alpha + 2\pi + k2\pi$

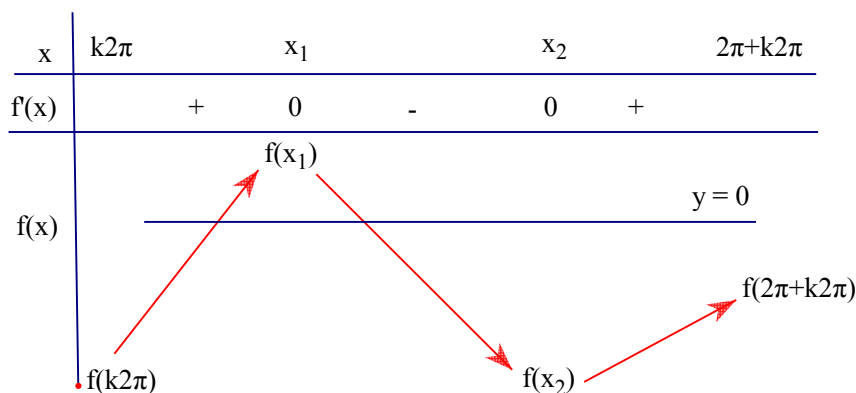
Ta có $f(k2\pi) = -\frac{k2\pi}{2019} < 0$

$f(x_1) = \sin \alpha - \frac{\alpha + k2\pi}{2019} = \frac{\sqrt{2020 \cdot 2018} - \alpha - k2\pi}{2019} > 0$ do $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $k2\pi \leq 642\pi$

$f(x_2) = -\sin \alpha - \frac{-\alpha + 2\pi + k2\pi}{2019} < 0$

$$f(2\pi + k2\pi) = \frac{-k2\pi - 2\pi}{2019} < 0$$

Bảng biến thiên



\Rightarrow Trên $(k2\pi; 2\pi + k2\pi]$ phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt (với $k = \overline{1; 320}$)

Tương tự xét trên nửa khoảng $(0; 2\pi]$ phương trình có một nghiệm và trên nửa khoảng $(642\pi; 2019]$ phương trình có hai nghiệm.

Từ đó số nghiệm của phương trình đã cho là $2 \cdot [320 \cdot 2 + 1 + 2] + 1 = 1287$

Nhận xét: đề hoàn toàn không phù hợp trong đề thi

Câu 154. $\cos 2x \cdot \sin 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin 7x) = -1 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin 7x = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = -\frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{14} + \frac{2k}{7} = -\frac{1}{6} + \frac{2l}{3}$$

$$\Rightarrow -3 + 12k = -7 + 28l$$

$$\Rightarrow k = \frac{-4 + 28l}{12} = \frac{-1 + 7l}{3}$$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ nên $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi$, giải ra ta được $l = 0, 1$.

$\square \quad l = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{12}$ (loại)

$\square \quad l = 1 \Rightarrow k = 2$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Câu 155. Ta có: $\sin^{2015} x - \cos^{2016} x = 2(\sin^{2017} x - \cos^{2018} x) + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin^{2015} x (1 - 2\sin^2 x) + \cos^{2016} x (2\cos^2 x - 1) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2015} x \cdot \cos 2x + \cos^{2016} x \cdot \cos 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2015} x + \cos^{2016} x = 1 \end{cases}$$

Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Vì } x \in [-10; 30] \Rightarrow -10 \leq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \leq 30 \Leftrightarrow -\frac{20}{\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{60}{\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow -6 \leq k \leq 18.$$

$$\text{Với } \sin^{2015} x + \cos^{2016} x = 1. \text{ Ta có } \sin^{2015} x \leq \sin^2 x; \cos^{2016} x \leq \cos^2 x.$$

$$\text{Do đó } 1 = \sin^{2015} x + \cos^{2016} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ suy ra } \begin{cases} \sin x = 0, \cos x = \pm 1 \\ \sin x = 1, \cos x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x \in [-10; 30] \Rightarrow -10 \leq k\pi \leq 30 \Leftrightarrow \frac{-10}{\pi} \leq k \leq \frac{30}{\pi} \Rightarrow -3 \leq k \leq 9.$$

$$\text{Nếu } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x \in [-10; 30] \Rightarrow -10 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 30 \Leftrightarrow -\frac{5}{\pi} - \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{15}{\pi} - \frac{1}{4} \Rightarrow -1 \leq k \leq 4.$$

$$\text{Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là: } 13 + 6 + 25 = 44.$$

Dạng 8. Giải và biện luận Phương trình lượng giác chứa tham số

Câu 156. Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$

$$\text{Đặt } t = \sin 2x, -1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{PT trở thành } -3t^2 + 6t + 12 = m.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -3t^2 + 6t + 12, -1 \leq t \leq 1$$

t	-1	1
$f'(t)$		+
$f(t)$		15

$$\text{Phương trình } \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0 \text{ có nghiệm thực khi } 3 \leq m \leq 15.$$

$$\text{Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số } m.$$

Câu 157. Ta xét phương trình $\cos 2x + m|\sin x| - m = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + m|\sin x| + 1 - m = 0 \quad (1)$

$$\text{Đặt } |\sin x| = t \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ khi đó}$$

$$(1) \Leftrightarrow -2t^2 + mt + 1 - m = 0$$

$$\text{Để phương trình } \cos 2x + m|\sin x| - m = 0 \text{ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm } t \text{ thỏa } 0 \leq t \leq 1$$

$$-2t^2 + mt + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m(t-1) = 2t^2 - 1 \Leftrightarrow m = \frac{2t^2 - 1}{t-1} (*) \quad (\text{Vì } t=1 \text{ không phải là nghiệm của phương trình})$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{2x^2 - 1}{x-1} \text{ trên } [0; 1). \text{ Ta có } y' = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} + 1 \\ x = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

x	0	$\sqrt{2}-1$	1
y'	+	0	-
y			
		$\frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$	
	1		$-\infty$

Để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$. Do m nguyên dương nên $m=1$.

Câu 158. Ta có

$$\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) - m(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = m \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên $\cos x \in (-1; 0)$ nên phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ không có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Vậy nên để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nghĩa là $-1 < m < 0$.

Câu 159. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{m}{4} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}(\sin 2x - 1)^2 + \frac{15}{4} = \frac{m}{4}$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m}{4} \in \left[\frac{3}{4}; \frac{15}{4}\right] \Leftrightarrow m \in [3; 15]$

Vậy có 13 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm thực.

Câu 160. Chọn A

Ta có

$$2\sin x + (m-1)\cos x = -m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x + 1}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x + 1}$$

để phương trình có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) \leq m \leq \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x)$

$$\text{đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{khi đó hàm số } f(x) = \frac{\cos x - 2 \sin x}{\cos x + 1} \text{ trở thành } g(t) = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \frac{-t^2 - 4t + 1}{2} \text{ với } t \in [0; 1]$$

$$g'(t) = -t - 2; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2 \notin [0; 1]$$

$$g(0) = \frac{1}{2}; g(1) = -2$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0; \frac{\pi}{2}]} f(x) = -2; \max_{[0; \frac{\pi}{2}]} f(x) = \frac{1}{2}$$

Vậy $-2 \leq m \leq \frac{1}{2}$. Các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{-2; -1; 0\}$

Câu 161. Ta có: $4 \cos^3 x - \cos 2x + (m-3) \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x + (m-3) \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4 \cos^2 x - 2 \cos x + m - 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Đặt $t = \cos x$, vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0; 1]$.

$$\text{Khi đó phương trình (1)} \Leftrightarrow 4t^2 - 2t + m - 3 = 0 \quad (2).$$

Ycbt \Leftrightarrow phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1, t_2 < 1$.

Cách 1:

$$\text{Đặt } f(t) = 4t^2 - 2t + m - 3, \text{ với } t \in (0; 1].$$

Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1, t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \\ 0 < \frac{-b}{2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{13}{4} \\ m > 3 \\ m > 1 \\ 0 < \frac{1}{4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < \frac{13}{4}. \text{ Vì } m \text{ nguyên nên không có giá trị nào.}$$

Cách 2:

$$(2) \Leftrightarrow m = -4t^2 + 2t + 3 = g(t)$$

Ta có bảng biến thiên của $g(t)$ trên $t \in (0; 1]$.

t	0	$\frac{1}{4}$	1
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	3	$\frac{13}{4}$	1

Từ bảng biến thiên trên phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1, t_2 < 1$

thì $3 < m < \frac{13}{4}$. Vì m nguyên nên không có giá trị nào.

Câu 162. Ta có:

$$\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 2x (\cos 2x - 1) = m \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x (2 \cos^2 2x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + m = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -m - 1.$$

$$\text{Có } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 4x \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos 4x < 1$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \text{ thì } -\frac{1}{2} < -m - 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{1}{2}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1$.

Câu 163. Ta có: $(1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) = m \sin^2 x \Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) - m(1 - \cos^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)[\cos 4x - m \cos x - m(1 - \cos x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 4x = m \end{cases}$$

➤ Xét phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Phương trình $\cos x = -1$ không có nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

➤ Xét $\cos 4x = m$. Ta có $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow 4x \in \left[0; \frac{8\pi}{3}\right]$.

Với $4x \in [0; 2\pi] \setminus \{\pi\}$ và $m \in (-1; 1]$ phương trình $\cos 4x = m$ có 2 nghiệm.

Với $4x \in \left(2\pi; \frac{8\pi}{3}\right]$ và $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ phương trình $\cos 4x = m$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ khi $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Câu 164. $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) + m \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x + (m - 3) \cos x = 0$$

Đặt $\cos x = t$ với $t \in [-1; 1]$. Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 4t^2 - 2t + (m - 3) = 0(*) \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, có 2 nghiệm là $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình $\cos x = t$ có 3 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Với mỗi giá trị $t \in (-1; 0]$ thì phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Với $t = -1$ thì phương trình $\cos x = t$ có 1 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Để pt có đúng 7 nghiệm thỏa mãn thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn điều kiện:
 $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$.

$$(*) \Leftrightarrow m = -4t^2 + 2t + 3$$

x	-1	0	1/4		1
y'		+	0	-	
y	-3	3	13/4		1

Từ bảng biến thiên trên ta có $m \in (1; 3)$. Vậy $m = \{2\}$.

Câu 165. Ta có phương trình tương đương
$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$$

Với $x \in [0; 2\pi]$. Ta có:

$$\square \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ vì } x \in [0; 2\pi] \text{ nên } x = \frac{\pi}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\square \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ vì } x \in [0; 2\pi] \text{ nên } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\square \text{ Với } -1 \leq m \leq 1, \text{ đặt } m = \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi].$$

Nhận xét: Với $x \in [0; 2\pi]$ thì phương trình

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = -\alpha + 2\pi \end{cases} (*).$$

Do đó, phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có

đúng một nghiệm hoặc có 2 nghiệm phân biệt và một nghiệm bằng $\frac{\pi}{2}$.

Trường hợp 1: $\alpha = -\alpha + 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \pi$ (thỏa vì khác $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$). Suy ra $m = \cos \pi = -1$.

Trường hợp 3: $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\alpha + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ (thỏa). Suy ra $m = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Vậy $m \in \{0; -1\}$ nên có 2 giá trị m .

Câu 166. Ta có $2\cos 3x = m - 2\cos x + \sqrt[3]{m + 6\cos x}$
 $\Leftrightarrow 2(4\cos^3 x - 3\cos x) - m + 2\cos x = \sqrt[3]{m + 6\cos x}$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 x + 2\cos x = m + 6\cos x + \sqrt[3]{m + 6\cos x}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{m + 6\cos x}, u = 2\cos x$, phương trình viết lại

$$u^3 + u = t^3 + t \Leftrightarrow (u - t)(u^2 + ut + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow u = t \text{ hay}$$

$$\sqrt[3]{m + 6\cos x} = 2\cos x \Leftrightarrow m = 8\cos^3 x - 6\cos x \Leftrightarrow m = 2\cos 3x$$

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm thì $-2 \leq m \leq 2$, có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 167. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, do $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $t \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành tìm m để phương trình $\frac{4t}{1+t^2} + m \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có } \frac{4t}{1+t^2} + m \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 - m \Leftrightarrow m = \frac{1-t^2}{2} - 2t + \frac{1}{2} = f(t).$$

Hoành độ đỉnh là $t_0 = 2$ loại. Ta có $f(-1) = 3$ và $f(1) = -1$.

Suy ra $-1 \leq f(t) \leq 3$. Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 168. Chọn D

Ta có

$$(4\cos x - 3\sin x)^2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 4\cos x - 3\sin x \leq 5$$

Để phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m^3 - 4m + 3)x + m - 4 > 5 & (1) \\ (m^3 - 4m + 3)x + m - 4 < -5 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta có

$$(m^3 - 4m + 3)x + m - 4 > 5$$

$$\Leftrightarrow (m^3 - 4m + 3)x + m - 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 4m + 3 = 0 \\ m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\ m > 9 \end{cases} \quad \forall N$$

Giải (2) ta có

$$(m^3 - 4m + 3)x + m - 4 < -5$$

$$\Leftrightarrow (m^3 - 4m + 3)x + m + 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 4m + 3 = 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \quad (L) \\ m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (L) \\ m = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (t/m) \\ m < -1 \end{cases}$$

Vậy có duy nhất một giá trị của tham số $m = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ để phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 169. Chọn C

$$\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2 \cos^2 x + 1 + m \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 2 \cos x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad (1) \\ 4 \cos^2 x - 2 \cos x + m - 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (1) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Do $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Bài toán quy về tìm m để phương trình có 5 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Phương trình (2) đặt $t = \cos x$ ($|t| \leq 1$) phương trình trở thành $4t^2 - 2t = 3 - m$ (3). Từ đường

tròn lượng giác để phương trình (2) có 5 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ thì phương

trình (3) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3 - m \\ 3 - m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2.$$

Câu 170. $\cos 2x - (2m - 3)\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - (2m - 3)\cos x + m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \cos x + 2 - m = 0, \text{ vì } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

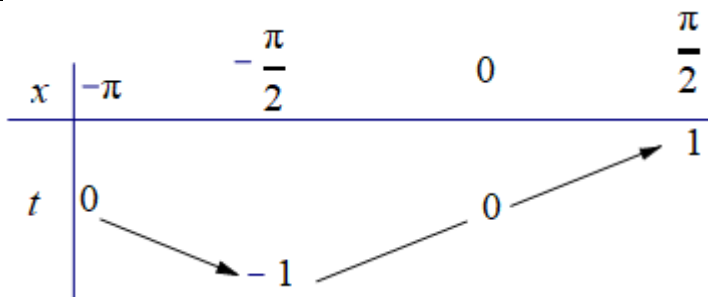
$$\Leftrightarrow \cos x = m - 2$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow -1 \leq m - 2 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Câu 171. $\cos 2x - 5 \sin x + m = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = -m \quad (1).$

$$\text{Đặt } t = \sin x, x \in \left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in [-1; 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow -2t^2 - 5t + 1 = -m \quad (*).$$

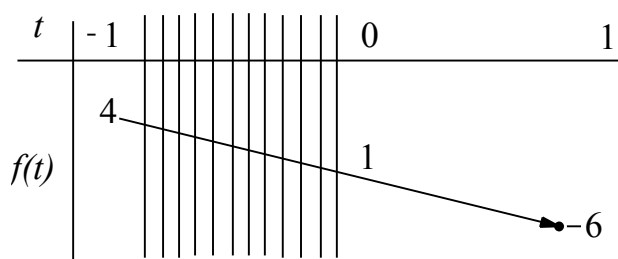


Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $x \in \left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow t \in \{-1\} \cup [0; 1)$.

Xét hàm số: $f(t) = -2t^2 - 5t + 1$, $t \in \{-1\} \cup [0; 1)$.

Đồ thị của hàm số f là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{5}{4}; \frac{33}{8}\right)$.

BBT:



Dựa vào BBT, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m = 4 \\ -6 < -m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ -1 \leq m < 6 \end{cases}$.

Câu 172. Ta có

$$\cos 2x - (2m-1)\cos x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m-1)\cos x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$$

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0 \leq \cos x < 1$ nên loại

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0 \leq m < 1$.