

TOÁN 11	ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA
1D5-1	

PHẦN A. CÂU HỎI

Câu 1. (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.
 D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Tính tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ theo x_0 và Δx (trong đó Δx là số gia của đối số tại x_0 và Δy là số gia tương ứng của hàm số) được kết quả là

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0 + \Delta x}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$. B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
 C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. D. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$.

Câu 4. Số gia Δy của hàm số $f(x) = x^4$ tại $x_0 = -1$ ứng với số gia của biến số $\Delta x = 1$ là

- A. 2. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 5. Tính số gia Δy của hàm số $y = \frac{1}{x}$ theo Δx tại $x_0 = 2$.

- A. $\Delta y = \frac{4 + \Delta x}{2(2 + \Delta x)}$. B. $\Delta y = \frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$. C. $\Delta y = \frac{1}{(\Delta x)^2}$. D. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$.

Câu 6. (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R}

thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- A. $f'(2) = 3$. B. $f'(x) = 2$. C. $f'(x) = 3$. D. $f'(3) = 2$.

Câu 7. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 + 1$ gọi Δx là số gia của đối số tại x và Δy là số gia tương ứng của hàm số, tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- A. $3x^2 - 3x\Delta x + (\Delta x)^3$. B. $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.
 C. $3x^2 + 3x\Delta x - (\Delta x)^2$. D. $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^3$.

Câu 8. (THPT Chuyên ĐHS - Hà Nội - Lần 1 năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = \frac{1}{3}$. D. $f'(0) = 3$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{-5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A. Không tồn tại. B. 0 C. $-\frac{7}{50}$. D. $-\frac{9}{64}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.
 B. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại $x_0 = 3$.
 C. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.
 D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Câu 12. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ theo x là:

- A. $\frac{3}{\sqrt{3x+1}}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$. C. $\frac{3x}{2\sqrt{3x+1}}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}$.

Câu 13. Cho $f(x) = x^{2018} - 1009x^2 + 2019x$. Giá trị của $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x}$ bằng:

- A. 1009. B. 1008. C. 2018. D. 2019.

Câu 14. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases} \quad \text{Mệnh đề sai là}$$

- A. $f'(1) = 2$. B. f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
 C. $f'(0) = 2$. D. $f'(2) = 4$.

Câu 15. (TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 1 - 2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định

nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
 B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
 C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 16. (THPT HOÀNG HOA THÁM - HƯNG YÊN - 2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a + b$ bằng:

A. 2. B. 5. C. -2. D. -5.

Câu 17. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 2 - 2018) Cho hàm số $f(x) = |x - 1|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(1) = 0$. B. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
C. $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. D. $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

Câu 18. (ĐẶNG THỨC HỨA - NGHỆ AN - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi

hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$. B. $T = 0$. C. $T = -6$. D. $T = 4$.

Câu 19. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1 - 2x} - 2012}{x} = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối

giản, a là số nguyên âm. Tổng $a + b$ bằng

A. -4017. B. -4018. C. -4015. D. -4016.

Câu 20. (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.

Câu 21. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên \mathbb{R} ?

A. $y = |x - 1|$. B. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. C. $y = \sin x$. D. $y = \sqrt{2 - \cos x}$.

Câu 22. (THPT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

A. 0. B. $f'(2)$. C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$.

Câu 23. (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo

hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = -2$. D. Không tồn tại.

Câu 24. (THPT Chuyên Hùng Vương-Bình Phước-lần 2-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Trong các khẳng định

(I): Tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(II): Nếu $f(a) = f(b)$ thì luôn tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

(III): Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a; b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 25. (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta

luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

- A. $S = 2(3 - 2\sqrt{2})$. B. $S = 2(1 + 4\sqrt{2})$. C. $S = 2(3 - 4\sqrt{2})$. D. $S = 2(3 + 2\sqrt{2})$.

Câu 26. (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 2 năm 2017 - 2018) Cho hàm số

$y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- A. 20. B. 17. C. 18. D. 25.

PHẦN B. LỜI GIẢI

Câu 1. Chọn D

Ta có định lý sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 2. Chọn D

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Câu 3. Chọn A

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Câu 4. Chọn C

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = (-1 + 1)^4 - 1^4 = -1.$$

Câu 5. Chọn D

$$\text{Ta có } \Delta y = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x(2 + \Delta x)}.$$

Câu 6. Chọn D

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Câu 7. Chọn B

Ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1) = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta^2 x + \Delta^3 x = \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta^2 x)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Câu 8. Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và $x_0 \in D$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ thì giới hạn gọi là đạo hàm của hàm số tại } x_0$$

$$\text{Vậy kết quả của biểu thức } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2.$$

Câu 9. Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + |x|}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + x} = 3; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 - x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 + |x|} = 3$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + |x|} = 3.$$

Kết luận: $f'(0) = 3$.

Câu 10. Chọn D

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4x^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x-1}{(\sqrt{3x+1}+2x)} = \frac{-5}{4} = f(1)$$

\Rightarrow Hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} + \frac{5}{4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{3x+1} - 3x - 5}{4(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16(3x+1) - (3x+5)^2}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1} + 3x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1} + 3x+5)} = -\frac{9}{64} \end{aligned}$$

Câu 11. Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = -1 = f(3).$$

$$\text{Đạo hàm của hàm số tại } x_0 = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12 - 0}{x - 3} = -1 = f'(3)$$

Suy ra: Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Câu 12. Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)+1} - \sqrt{3x+1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3(x+\Delta x)+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

Câu 13. Chọn D.

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = f'(1)$.

Mà $f'(x) = 2018x^{2017} - 2018x + 2019 \Rightarrow f'(1) = 2019$.

Vậy giá trị của $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = 2019$.

Câu 14. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2.$$

Vậy $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1) = 2$. Suy ra hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$. Vậy B sai.

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x}{-2} = -1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1. \text{ Do đó, hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm tại } x = 1.$$

Câu 16. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 + bx - a - b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x^2 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)[a(x + 1) + b]}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [a(x + 1) + b] = 2a + b \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2a + b = 2$.

Câu 17. Ta có $f(1) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = -1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1.$$

Do đó hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 18. Ta có $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 19. * Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1-2x} - 2012}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x\sqrt[3]{1-2x} \right) + 2012 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1-2x} - 1)}{x} = 2012 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{x}$$

* Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$ ta có $f(0) = 1$. Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{7(\sqrt[3]{1-2x})^6} \Rightarrow f'(0) = -\frac{2}{7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{x} = -\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1-2x} - 2012}{x} = -\frac{4024}{7} \Rightarrow \begin{cases} a = -4024 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow a + b = -4017.$$

Câu 20. Chọn B

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 21. Chọn A

Ta có: $y = |x-1|$, do đó: $y = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$ khi đó: $y' = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$

$$\text{Tại } x=1: y'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

$$y'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1.$$

Do $y'(1^+) \neq y'(1^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại 1.

Các hàm số còn lại xác định trên \mathbb{R} và có đạo hàm trên \mathbb{R} .

Câu 22. Chọn C

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$.

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow I = 2f'(2) - f(2).$$

Câu 23. Chọn D

Ta có: $f(0) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$.

Ta thấy $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Câu 24. Chọn C

(I) đúng (theo định lý Lagrange).

(II) đúng vì với $f(a) = f(b)$,

theo (I) suy ra tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

(III) đúng vì với $\alpha, \beta \in (a; b)$ sao cho $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ và có đạo hàm trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

Theo (II) suy ra luôn tồn tại một số $c \in (\alpha; \beta)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Câu 25. Chọn B

+ Khi $0 < x < x_0$: $f(x) = a\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0; x_0)$ nên liên tục trên khoảng $(0; x_0)$.

+ Khi $x > x_0$: $f(x) = x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0; +\infty)$.

+ Tại $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a\sqrt{x} - a\sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{a}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 + 12 - (x_0^2 + 12)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x + x_0) = 2x_0.$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0.$$

Khi đó $f'(x_0) = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$ và $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ 2x & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên

tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \Leftrightarrow a = 4x_0\sqrt{x_0} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: Hàm số } f \text{ liên tục tại } x_0 \text{ nên } x_0^2 + 12 = a\sqrt{x_0} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x_0 = 2 \text{ và } a = 8\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } S = a + x_0 = 2(1 + 4\sqrt{2}).$$

Câu 26. Chọn A

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số có đạo hàm tại điểm } x = 2 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4.$$

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$ thì hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 + 2a + b = -2 \Rightarrow b = -6.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = 20.$$

TOÁN 11	QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM – PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN
1D5-2	

Contents

PHẦN A. CÂU HỎI.....	1
DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI ĐIỂM	1
DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP (đa thức, chứa căn, phân thức, hàm hợp).....	2
Dạng 2.1 Tính đạo hàm	2
Dạng 2.2 Một số bài toán tính đạo hàm có thêm điều kiện	5
DẠNG 3. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN	7
Dạng 3.1 Tiếp tuyến tại điểm	7
Dạng 3.2 Tiếp tuyến khi biết hệ số góc, quan hệ song song, vuông góc với đường thẳng cho trước	9
Dạng 3.3 Tiếp tuyến đi qua một điểm	12
Dạng 3.4 Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến	13
DẠNG 4. BÀI TOÁN QUẢNG ĐƯỜNG, VẬN TỐC	16
PHẦN B. LỜI GIẢI	18
DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI ĐIỂM	18
DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP (đa thức, chứa căn, phân thức, hàm hợp)....	19
Dạng 2.1 Tính đạo hàm	19
Dạng 2.2 Một số bài toán tính đạo hàm có thêm điều kiện	21
DẠNG 3. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN	23
Dạng 3.1 Tiếp tuyến tại điểm	23
Dạng 3.2 Tiếp tuyến khi biết hệ số góc, quan hệ song song, vuông góc với đường thẳng cho trước	27
Dạng 3.3 Tiếp tuyến đi qua một điểm	33
Dạng 3.4 Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến	37
DẠNG 4. BÀI TOÁN QUẢNG ĐƯỜNG, VẬN TỐC	46

PHẦN A. CÂU HỎI

DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI ĐIỂM

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{4}{x-1}$. Khi đó $y'(-1)$ bằng

- A.** -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$ tại $x = 2$ ta được:

A. $f'(2) = \frac{1}{36}$. B. $f'(2) = \frac{11}{6}$. C. $f'(2) = \frac{3}{2}$. D. $f'(2) = \frac{5}{12}$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$ tại điểm $x_0 = 0$ là:

A. $y'(0) = 5$. B. $y'(0) = 6$. C. $y'(0) = 0$. D. $y'(0) = -6$.

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x} + x$ tại điểm $x_0 = 4$ là:

A. $y'(4) = \frac{9}{2}$. B. $y'(4) = 6$. C. $y'(4) = \frac{3}{2}$. D. $y'(4) = \frac{5}{4}$.

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là:

A. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. B. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. C. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. D. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$.

Câu 6. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019) Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f'(0)$?

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Tính $y'(3)$

A. $\frac{5}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. Không tồn tại. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{4}$. D. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}$. Tính giá trị biểu thức $f'(0)$.

A. -3. B. -2. C. $\frac{3}{2}$. D. 3.

DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP (đa thức, chứa căn, phân thức, hàm hợp)

Dạng 2.1 Tính đạo hàm

Câu 10. (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương) Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.

A. $y' = 3x^2 + 2x$. B. $y' = 3x^2 + 2$. C. $y' = 3x^2 + 2x + 1$. D. $y' = x^2 + 2$.

Câu 11. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $y = x \Rightarrow y' = 1$. B. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$.
C. $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x$. D. $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$.

Câu 12. Hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 2018$ có đạo hàm là

- A. $y' = 3x^2 - 4x + 2018$. B. $y' = 3x^2 - 2x - 4$.
C. $y' = 3x^2 - 4x - 4$. D. $y' = x^2 - 4x - 4$.

Câu 13. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019) Đạo hàm của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (với m là tham số) bằng

- A. $3x^2 - 6mx - 3 + 3m^2$. B. $-x^2 + 3mx - 1 - 3m$.
C. $-3x^2 + 6mx + 1 - m^2$. D. $-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$.

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ là

- A. $y' = -4x^3 + 8x$. B. $y' = 4x^2 - 8x$. C. $y' = 4x^3 - 8x$. D. $y' = -4x^2 + 8x$

Câu 15. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + a^2$ (a là hằng số) bằng.

- A. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} + 2a$. B. $2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.
C. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$. D. $2x^3 + 5x^2 - \sqrt{2}$.

Câu 16. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $\frac{1}{\sqrt{2x}}$?

- A. $f(x) = 2\sqrt{x}$. B. $f(x) = \sqrt{x}$. C. $f(x) = \sqrt{2x}$. D. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 5)\sqrt{x}$.

- A. $y' = \frac{7}{2}\sqrt[5]{x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.
C. $y' = 3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

- A. $\frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. B. $\frac{1+3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. C. $\frac{1-3x}{x^2+1}$. D. $\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Tính giá trị của biểu thức $S = f(1) + 4f'(1)$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 6$. D. $S = 8$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2+5x-4}$. Đạo hàm y' của hàm số là

- A. $y' = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$. B. $y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$.
C. $y' = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$. D. $y' = \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

Câu 21. Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng J và $v(x) \neq 0$ với $\forall x \in J$. Mệnh đề nào sau đây *sai*?

A. $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x).$

B. $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{v'(x)}{v^2(x)}.$

C. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x).$

D. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}.$

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}.$

A. $y' = 2x - \frac{1}{x^2}.$

B. $y' = x - \frac{1}{x^2}.$

C. $y' = x + \frac{1}{x^2}.$

D. $y' = 2x + \frac{1}{x^2}.$

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

A. $y' = \frac{2}{(x-1)^2}.$

B. $y' = \frac{2}{(x-1)}.$

C. $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}.$

D. $y' = \frac{-2}{(x-1)}.$

Câu 24. Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 5}$ có đạo hàm bằng:

A. $y' = \frac{1}{(x^2 + 5)^2}.$

B. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 5)^2}.$

C. $y' = \frac{-1}{(x^2 + 5)^2}.$

D. $y' = \frac{-2x}{(x^2 + 5)^2}.$

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3}.$

A. $y' = \frac{-7x^2 + 2x + 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$

B. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$

C. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)}.$

D. $y' = \frac{8x^3 + 3x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Ta có $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{-a+2b}{(b-1)^2}.$

B. $\frac{a-2b}{(b-1)^2}.$

C. $\frac{a+2b}{(b-1)^2}.$

D. $\frac{-a-2b}{(b-1)^2}.$

Câu 27. Cho $f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3}$. Tính $f'(x)$.

A. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{x-3}.$

B. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{(x-3)^2}.$

C. $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + 1$

D. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}.$

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

A. $y' = \frac{8x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}.$

B. $y' = \frac{8x^2 + 4x + 1}{2\sqrt{x^2+x}}.$

C. $y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$

D. $y' = \frac{6x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}.$

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 7)^7$ là

A. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

B. $y' = 7(-x^2+3x+7)^6$.

C. $y' = (-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

D. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

B. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

C. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

Câu 31. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

B. $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{8}{3}}$.

D. $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Câu 32. (CHUYÊN TRẦN PHÚ - HẢI PHÒNG - LẦN 2 - 2018) Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng:

A. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

B. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

C. $6x^5 + 16x^3$.

D. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Câu 33. (THPT NGUYỄN ĐỨC THUẬN - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

D. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Dạng 2.2 Một số bài toán tính đạo hàm có thêm điều kiện

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là

A. $[-1; 5]$.

B. \emptyset .

C. $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 3x - 5$ với m là tham số. Tìm tập hợp M tất cả các giá trị của m để $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

A. $M = (-3; 3)$.

B. $M = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

C. $M = \mathbb{R}$.

D. $M = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2017$. Bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = (-1; 1)$.

B. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$?

A. $-1 < x < 0$.

B. $x < 0$.

C. $x > 0$.

D. $x < -1$.

- Câu 38. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019)** Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là
- A. $[3; +\infty)$. B. \emptyset . C. $[4\sqrt{2}; +\infty)$. D. $[1; +\infty)$.
- Câu 39.** Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + \frac{3}{2}(m+2)x^2 + 3x - 1$, m là tham số. Số các giá trị nguyên m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là
- A. 5. B. Có vô số giá trị nguyên m . C. 3. D. 4.
- Câu 40.** Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của m để $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là
- A. 1. B. 5. C. 4. D. 3.
- Câu 41.** Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- A. $0 \leq m \leq \frac{12}{5}$. B. $0 < m < \frac{12}{5}$. C. $0 \leq m < \frac{12}{5}$. D. $0 < m \leq \frac{12}{5}$.
- Câu 42.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là
- A. $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$. C. $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$. D. $\left(1; \frac{7}{5}\right)$.
- Câu 43.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?
- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 44. (Thi thử SGD Hưng Yên)** Cho $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}, \forall x > \frac{1}{4}$. Tính $\frac{a}{b}$.
- A. -16. B. -4. C. -1. D. 4.
- Câu 45. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 6)** Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$. B. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$. C. $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$. D. $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.
- Câu 46. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Nghiệm của phương trình $y' \cdot y = 2x + 1$ là:
- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. Vô nghiệm. D. $x = -1$.
- Câu 47. (THPT NGUYỄN HUỆ - NINH BÌNH - 2018)** Cho $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $y' = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ là:
- A. -4. B. -1. C. 0. D. 1.
- Câu 48.** Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là
- A. $\{-1; 3\}$. B. $\{1; 3\}$. C. $\{-3; 1\}$. D. $\{-3; -1\}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + \frac{b}{x}$ có $f'(1) = 1, f'(-2) = -2$. Khi đó $f'(\sqrt{2})$ bằng:

- A. $\frac{12}{5}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. 2. D. $-\frac{12}{5}$.

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ có đạo hàm dương trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. vô số.

DẠNG 3. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Dạng 3.1 Tiếp tuyến tại điểm

Câu 51. (Kim Liên - Hà Nội - L1 - 2018-2019) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng

- A. 5. B. $-\frac{1}{5}$. C. -5. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 52. (THI HK I QUẢNG NAM 2017) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$.
B. $y = 4x + 2$.
C. $y = 4x + 6$.
D. $y = 4x - 2$.

Câu 53. (Quảng Nam-HKI-1718) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x + 6$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 54. (THPT THUẬN THÀNH 1) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- A. $y = 7x + 13$. B. $y = -7x + 30$. C. $y = 3x + 9$. D. $y = -x - 2$.

Câu 55. (GIỮA KÌ I LƯƠNG THẾ VINH CƠ SỞ II 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = x - \frac{2}{3}$. D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Câu 56. (LƯƠNG TÀI 2 BẮC NINH LẦN 1-2018-2019) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

- A. $y = -9x + 16$. B. $y = -9x + 20$. C. $y = 9x - 20$. D. $y = 9x - 16$.

- Câu 57. (Yên Định 1 - Thanh Hóa - 2018-2019)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là
A. $y = 0$. **B.** $y = 3x$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = -12x$.
- Câu 58. (Chuyên Thái Bình lần 2 - 2018-2019)** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
A. $y = -2x + 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = -3x - 2$.
- Câu 59. (LÊ HỒNG PHONG HKI 2018-2019)** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1.
A. $y = 12x + 14$. **B.** $y = 12x - 14$. **C.** $y = 12x + 10$. **D.** $y = -20x - 22$.
- Câu 60. (THPT Yên Dũng 3 - Bắc Giang lần 1- 18-19)** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.
A. $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x - 2$. **C.** $y = 3x - 3$. **D.** $y = 3x + 2$.
- Câu 61. (Trường THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên, năm 2019)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là
A. $y = -2x + 3$. **B.** $y = -2x - 3$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = 2x + 3$.
- Câu 62. (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019)** Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng
A. $k = -5$. **B.** $k = 10$. **C.** $k = 25$. **D.** $k = 1$.
- Câu 63. (Trường THPT Thăng Long Lần 1 năm 2018-2019)** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là
A. -1 . **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.
- Câu 64. (HKI-Chuyên Long An-2019)** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .
A. $-\frac{1}{2}$. **B.** -2 . **C.** 2 . **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 65. (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa lần 2 -2018-2019)** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.
A. $x + y - 1 = 0$. **B.** $x - y - 2 = 0$. **C.** $x + y + 3 = 0$. **D.** $x - y - 1 = 0$.
- Câu 66. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương thi thử lần 1 (2018-2019))** Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là
A. 1 . **B.** -1 . **C.** -3 . **D.** 0 .
- Câu 67. (Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy . Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là

A. -2.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Câu 68. (THPT Cẩm Bình 2018-2019) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có

hoành độ $x = 2$ làA. $y = 2x + 9$.B. $y = -2x + 9$.C. $y = 2x - 9$.D. $y = -2x - 9$.

Câu 69. (THPT Cộng Hiền - Lần 1 - 2018-2019) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:

A. $y = x - 3$.B. $y = \frac{1}{3}(x-1)$.C. $y = 3x$.D. $y = 3(x-1)$.

Câu 70. (THPT Mai Anh Tuấn Thanh Hóa - Lần 1 - Năm học 2018-2019) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là.

A. 1

B. 6

C. 12

D. 9

Câu 71. (Bình Giang-Hải Dương lần 2-2019) Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là

A. $y = 8x - 4$.B. $y = x + 3$.C. $y = -8x + 12$.D. $y = 8x + 4$.

Câu 72. (Thi thử lần 4-chuyên Bắc Giang_18-19) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$

A. 9.

B. 5.

C. 1.

D. -1.

Câu 73. (Thi HK2 THPT Chuyên Bắc Giang 2018-2019) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

A. $y = -8x - 16$.B. $y = 8x - 19$.C. $y = -8x + 16$.D. $y = 8x + 19$.

Câu 74. (THPT Trần Phú - Lần 1 - 2018-2019) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

A. $y = 3x + 1$.B. $y = -3x - 1$.C. $y = -3x + 1$.D. $y = -3x + 3$.

Dạng 3.2 Tiếp tuyến khi biết hệ số góc, quan hệ song song, vuông góc với đường thẳng cho trước

Câu 75. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 76. (HK1-Trần Phú Hà Nội-1819) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C) . Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 77. (Bình Minh - Ninh Bình - Lần 4 - 2018) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

- Câu 78.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, (C)$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là
- A.** $y = -3x - 1; y = -3x + 11$. **B.** $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.
C. $y = -3x + 5; y = -3x - 5$. **D.** $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.
- Câu 79.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1} (C)$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ
- A.** $x = 0$. **B.** $x = -2$. **C.** $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.
- Câu 80.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$ là
- A.** $y = 9x + 6, y = 9x - 28$. **B.** $y = 9x, y = 9x - 26$.
C. $y = 9x - 6, y = 9x - 28$. **D.** $y = 9x + 6, y = 9x - 26$.
- Câu 81.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x - y + 7 = 0$ là
- A.** $y = 9x + 25$. **B.** $y = -9x - 25$. **C.** $y = 9x - 25$ **D.** $y = -9x + 25$.
- Câu 82.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ của đồ thị hàm số là:
- A.** $y = 9(x + 3)$. **B.** $y = 9(x - 3)$. **C.** $y = 9x + 5$ và $y = 9(x - 3)$ **D.** $y = 9x + 5$.
- Câu 83.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x - 3y + 6 = 0$.
- A.** $y = \frac{1}{3}x - 1$. **B.** $y = \frac{1}{3}x + 1$. **C.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. **D.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
- Câu 84.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ đồ thị (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:
- A.** 1. **B.** Không tồn tại cặp điểm nào.
C. Vô số cặp điểm **D.** 2.
- Câu 85.** Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$.
- A.** $m = 3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$.
- Câu 86.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?
- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.
- Câu 87.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là
- A.** $y = -2x + 2$. **B.** $y = -2x - 2$.

C. $y = -2x + 10, y = -2x - \frac{2}{3}$.

D. $y = -2x - 10, y = -2x + \frac{2}{3}$.

Câu 88. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A. $y + 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$. C. $y - 16 = -9(x - 3)$. D. $y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 89. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết nó song song với đường thẳng $y = 9x + 6$.

A. $y = 9x + 6, y = 9x - 6$. B. $y = 9x - 26$.

C. $y = 9x + 26$. D. $y = 9x - 26, y = 9x + 6$.

Câu 90. (THPT Minh Khai - lần 1) Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 91. (Đề thi HSG 12-Sở GD&ĐT Nam Định-2019) Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 92. (Kinh Môn - Hải Dương L2 2019) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 2$ là

A. $y = 3x + 2$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x + 14$. D. $y = 3x + 5$.

Câu 93. (Thi thử SGD Hưng Yên) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 94. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2; 0)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; -4)$.

Câu 95. Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -3x$.

A. $y = -3x + 11; y = -3x - 1$. B. $y = -3x - 6; y = -3x - 11$.

C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x + 6$.

Câu 96. Cho đường cong (C): $y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C) có hệ số góc bằng 7?

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 97. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tổng các phần tử của S là

A. 3. B. 8. C. 5. D. 2.

Câu 98. (Cụm liên trường Hải Phòng-L1-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 99. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - Lần 1 - 2019) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính giá trị của $2a + b$.

A. -23 hoặc -24 B. -23. C. -24. D. 0.

Câu 100. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019) Đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

A. -4 hoặc -2. B. -4 hoặc 0. C. 0 hoặc 2. D. -2 hoặc 2.

Câu 101. (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Tính tổng S tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = 1$. C. $S = 0$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Dạng 3.3 Tiếp tuyến đi qua một điểm

Câu 102. (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 0)$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 103. (THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ - HÒA BÌNH - 2018) Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến kẻ từ $M(2; -1)$ đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$.

A. $y = -2x + 3$. B. $y = -1$. C. $y = x - 3$. D. $y = 3x - 7$.

Câu 104. (ĐẶNG THỨC HỨA - NGHỆ AN - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1 < m_0 < 0$. B. $0 < m_0 < 1$. C. $1 < m_0 < 2$. D. $-2 < m_0 < -1$.

Câu 105. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .

A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 106. Cho đường cong $(C): f(x) = \frac{(b^2+2)x}{(a^2+1)-x}$, (với a, b là các tham số thực đã biết). Các tiếp tuyến của đường cong $(C): y = |f(|x|)|$ đi qua điểm $M(0; (a^2+2)^2(b^2+2))$ là

A. $\begin{cases} y = -(a^2+2)(b^2+1)x + (a^2+2)^2(b^2+1) \\ y = (a^2+2)(b^2+1)x + (a^2+2)^2(b^2+1) \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = (b^2+2)[(a^2+2)^2 - (a^2+1)x] \\ y = (b^2+2)[(a^2+2)^2 + (a^2+1)x] \end{cases}$
C. $y = (a^2+1)(b^2+2)x \pm (a^2+2)^2(b^2+2)$. D. $y = \pm(a^2+1)(b^2+2)x + (a^2+2)^2(b^2+2)$.

Câu 107. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Biết $a = \frac{m}{n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Khi đó giá trị $m+n$ là:

A. 2. B. 7. C. 5. D. 3.

Câu 108. (Thi thử chuyên Hà Tĩnh lần 1 (13/4/2019)) Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua $A(3; 2)$?

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 109. (Tham khảo 2018) Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các giá trị các phần tử của S là

A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Dạng 3.4 Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến

Câu 110. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 111. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C), biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác $\triangle OAB$ cân tại O, với O là gốc tọa độ. Tính $a+b$.

A. -1. B. -2. C. 0. D. -3.

Câu 112. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 113. Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 114. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 2 năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. B. 0. C. 2. D. -3.

Câu 115. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương thi thử lần 1 (2018-2019)) Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C). Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$. Phương trình của AB là

- A. $x - y - 2 = 0$. B. $x + y - 8 = 0$. C. $x - 3y + 4 = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.

Câu 116. (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng, lần 1) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C) , điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A , B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là H . Tính độ dài đường thẳng OH .

- A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{58}$.

Câu 117. (THPT Chuyên Thái Bình - lần 3 - 2019) Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{11}{5}$.

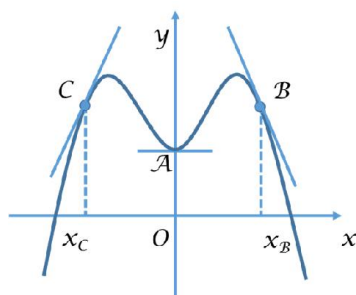
Câu 118. (Thi thử chuyên Hà Tĩnh lần 1 (13/4/2019)) Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(1) > -3$. B. $f(1) < -3$. C. $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. D. $f(1) \geq -\frac{11}{4}$.

Câu 119. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B . Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng.

- A. $4 + 2\sqrt{2}$. B. 4. C. $4\sqrt{2}$. D. $4 + \sqrt{2}$.

Câu 120. (Đề Thi Thử - Sở GD Nam Định - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, biết tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$. B. $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.
C. $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$. D. $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$

Câu 121. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+3)x^2 + 3$ (C). Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn qua $A(-1; -1)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) là $\Delta_1: y = -1$ và Δ_2 tiếp xúc với (C) tại N và cắt (C) tại điểm P ($P \neq N$) có hoành độ là $x = 3$.

- A. Không tồn tại m . B. $m = 2$. C. $m = 0$; $m = -2$. D. $m = -2$.

Câu 122. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) . Số phần tử của S là

A. 9. B. 7. C. 3. D. 5.

Câu 123. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $-\frac{1}{2}$. B. -2 C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 124. (Chuyên Lê Thánh Tông-Quảng Nam-2018-2019) Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 125. Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. 9. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 126. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y = x + 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = -x + 2$. D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Câu 127. (Nông Công - Thanh Hóa - Lần 1 - 1819) Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị các hàm số $y = f(x); y = g(x); y = \frac{f(x)}{g(x)}$ tại $x = 2$ và thỏa mãn $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$. Khi đó:

A. $f(2) \geq \frac{1}{2}$.
 B. $f(2) > \frac{1}{2}$
 C. $f(2) < \frac{1}{2}$.
 D. $f(2) \leq \frac{1}{2}$.

Câu 128. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) và hai đường thẳng $d_1: y - 2 = 0$ và $d_2: x - 2 = 0$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt các đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất. Khi đó độ dài của đoạn AB bằng

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $4\sqrt{2}$.

Câu 129. (THPT Yên Dũng 3 - Bắc Giang lần 1- 18-19) Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị (C) . M_1 thuộc (C) và có hoành độ là 1, tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại M_2 , tiếp tuyến của (C) tại

M_2 cắt (C) tại M_3, \dots . Cứ như thế mãi và tiếp tuyến của (C) tại $M_n(x_n; y_n)$ thỏa mãn $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0$. Tìm n

A. 675. B. 672. C. 674. D. 673.

Câu 130. Cho hàm số $y = x^3 + 1$ có đồ thị (C) . Trên đường thẳng $d: y = x + 1$ tìm được hai điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ mà từ mỗi điểm đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) . Tính giá trị biểu thức $S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3}$

A. $\frac{113}{15}$. B. $\frac{41}{15}$. C. $\frac{14}{15}$. D. $\frac{59}{15}$.

Câu 131. (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - Lần 2 - Năm học 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^3 - 2019x$ có đồ thị là (C) . Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} với $(n = 4, 5, \dots)$. Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n sao cho $2019x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

A. $n = 675$. B. $n = 685$. C. $n = 673$. D. $n = 674$.

Câu 132. (Nho Quan A - Ninh Bình - lần 2 - 2019) Cho đồ thị $y = x^3 - 2019x$ có đồ thị (C) . Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại M_3 khác M_2, \dots , tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; 6; \dots$). Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ của điểm M_n . Tìm n để $2019x_n + y_n + 2^{2013} = 0$.

A. $n = 685$. B. $n = 679$. C. $n = 672$. D. $n = 675$.

Câu 133. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

A. $y = 2x - 6$. B. $y = 4x - 6$. C. $y = x + 1$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 134. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 2019$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f(2019) > \frac{1}{4}$. B. $f(2019) < \frac{1}{4}$. C. $f(2019) \leq \frac{1}{4}$. D. $f(2019) \geq \frac{1}{4}$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN QUẢNG ĐƯỜNG, VẬN TỐC

Câu 135. (THUẬN THÀNH SỐ 2 LẦN 1_2018-2019) Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là

A. 24 m/s^2 . B. 12 m/s^2 . C. 17 m/s^2 . D. 14 m/s^2 .

Câu 136. (Độ Cẩn Vĩnh Phúc-lần 1-2018-2019) Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng

A. $22(m/s)$. B. $19(m/s)$. C. $9(m/s)$. D. $11(m/s)$.

- Câu 137. (Chuyên Thái Bình lần 2 - 2018-2019)** Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng bao nhiêu?
- A. $88(m/s^2)$. B. $228(m/s^2)$. C. $64(m/s^2)$. D. $76(m/s^2)$.
- Câu 138. (ĐỘI CÁN VINH PHÚC LẦN 1 2018-2019)** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng.
- A. $22(m/s)$.
B. $19(m/s)$.
C. $9(m/s)$.
D. $11(m/s)$.
- Câu 139. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-HKI 18-19)** Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$. Trong khoảng thời gian $t = 0$ đến $t = 5$ chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?
- A. $t = 1$. B. $t = 4$. C. $t = 2$. D. $t = 0$.
- Câu 140. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019)** Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:
- A. $12m/s^2$. B. $17m/s^2$. C. $24m/s^2$. D. $14m/s^2$.
- Câu 141. (THI THỬ L4-CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ-HÒA BÌNH-2018-2019)** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây) là:
- A. $80(m/s)$. B. $90(m/s)$. C. $100(m/s)$. D. $70(m/s)$.
- Câu 142. (Đề thử nghiệm THPT QG 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $216(m/s)$. B. $30(m/s)$. C. $400(m/s)$. D. $54(m/s)$.
- Câu 143. (THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - Lần 1 - Năm học 2018_2019)** Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ (m), t là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là
- A. $48 m/s^2$. B. $28 m/s^2$. C. $18 m/s^2$. D. $54 m/s^2$.
- Câu 144. (Bình Giang-Hải Dương lần 2-2019)** Bạn An thả bóng cao su từ độ cao 10m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.
- A. $70 m$. B. $40 m$. C. $80 m$. D. $50 m$.

- Câu 145. (Chu Văn An - Hà Nội - lần 2 - 2019)** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được tính từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc vật đạt vận tốc lớn nhất bằng
- A.** 20 m. **B.** 28 m. **C.** 32 m. **D.** 36 m.

PHẦN B. LỜI GIẢI

DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI ĐIỂM

- Câu 1. Chọn A**

$$\text{Ta có } y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$$

- Câu 2. Chọn A**

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{36}.$$

- Câu 3. Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+x)(x^2+5x+6) \\ \Rightarrow y' &= (2x+1)(x^2+5x+6) + (x^2+x)(2x+5) \\ \Rightarrow y'(0) &= 6. \end{aligned}$$

- Câu 4. Chọn D**

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 1 = \frac{5}{4}.$$

- Câu 5. Chọn A**

$$\text{Ta có: } y' = 5\cos x + 3\sin x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

- Câu 6. Chọn A**

☐ Phương pháp tự luận:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2.$$

$$\Rightarrow f'(1) = 6; f'(-1) = 6; f'(0) = -2 \Rightarrow f'(1) + f'(-1) + 4f'(0) = 4.$$

☐ Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng Casio

$$\text{Bấm } \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=1} + \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=-1} - 4 \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=0} = 4.$$

- Câu 7. Chọn B**

$$\text{Ta có } y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$y'(3) = \frac{-3}{(3-1)^2} = -\frac{3}{4}.$$

- Câu 8. Chọn B**

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}$$

Câu 9. Chọn C

Cách 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2+4} - (3x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2} = \frac{12-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2}.$$

DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP (đa thức, chứa căn, phân thức, hàm hợp)

Dạng 2.1 Tính đạo hàm

Câu 10. Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 + 2$.

Câu 11. Chọn C

+ Ta có: $y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do đó các mệnh đề A, B, D đúng.

Vì $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$ nên mệnh đề C sai.

Câu 12. Chọn C**Câu 13. Chọn D****Câu 14. Chọn C**

$$y' = (x^4 - 4x^3 - 3)' = 4x^3 - 8x.$$

Câu 15. Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Câu 16. Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = (\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Câu 17. Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 \cdot \sqrt{x} + (x^3 - 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^2 \sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2} \sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 18. Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{(x+3)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 19. Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

$$\text{Vậy } S = f(1) + 4f'(1) = 4.$$

Câu 20. Chọn A

Ta có $y' = \left(\sqrt{2x^2 + 5x - 4} \right)' = \frac{(2x^2 + 5x - 4)'}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}} = \frac{4x + 5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$

Câu 21. Chọn B

Câu 22. Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Có $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Câu 23. Chọn C

$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Câu 24. Chọn D

$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 5)^2}$

Câu 25. Chọn B

$y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(4x-3)(x^2+2x+3) - (2x+2)(2x^2-3x+7)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2+2x+3)^2}$

Câu 26. Chọn D

Ta có: $f'(x) = \frac{2(x-b) - 2x - a}{(x-b)^2} = \frac{-a-2b}{(x-b)^2}$

Câu 27. Chọn D

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3} \right)' = \left(\sqrt{1-4x} \right)' + \left(\frac{1-x}{x-3} \right)'$$

$$= \frac{(1-4x)'}{2\sqrt{1-4x}} + \frac{(1-x)'(x-3) - (1-x)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$$

Câu 28. Chọn A

Ta có: $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2 + x}}$

$$= \frac{4x^2 + 4x + 4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{8x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Vậy $y' = \frac{8x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Câu 29. Chọn A

Ta có: $y' = 7(-x^2 + 3x + 7)^6 (-x^2 + 3x + 7)' = 7(-2x + 3)(-x^2 + 3x + 7)^6$.

Câu 30. Chọn A

$y' = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)' \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^2 = 6 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^2$.

Câu 31. Ta có $y' = \frac{1}{3} (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}-1} (x^2 + x + 1)' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

Câu 32. $y' = 2(x^3 - 2x^2) \cdot (x^3 - 2x^2)' = 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3.$

Câu 33. Ta có $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

$$f'(x) = (\sqrt{2-3x^2})' = \frac{(2-3x^2)'}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

Dạng 2.2 Một số bài toán tính đạo hàm có thêm điều kiện

Câu 34. Chọn D

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \Rightarrow y' = x^2 - 4x - 5$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty).$$

Câu 35. Chọn D

$$y = x^3 + mx^2 + 3x - 5 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2mx + 3.$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m < -3 \vee 3 < m.$$

Câu 36. Chọn A

$$y = x^3 - 3x + 2017 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3, \quad y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Câu 37. Chọn C

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Câu 38. Chọn B

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m+2)x - 6(m+2).$

$$\Delta'_{y'} = 27m^2 + 54m.$$

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Câu 39. Chọn A

$$y' = 3(m+2)x^2 + 3(m+2)x + 3 \geq 0 \Rightarrow (m+2)x^2 + (m+2)x + 1 \geq 0 \quad (1)$$

Để phương trình (1) luôn thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $m+2=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow y'=1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Nhận)

$$\text{TH2: } m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2 \Rightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 < m \leq 2$$

Kết hợp hai trường hợp: $m = -2; -1; 0; 1; 2.$

Câu 40. Chọn B

$$f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6mx - 12$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx - 12 \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ 9m^2 - 36 \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$ Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$ Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 41. Chọn C

Ta có $f'(x) = mx^2 - mx + (3-m)$

+ Nếu $m = 0$ thì $f'(x) = 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn)

+ Nếu $m \neq 0$ thì $f'(x) = mx^2 - mx + (3-m)$ là tam thức bậc hai,

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m(3-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}$$

Vậy $0 \leq m < \frac{12}{5}$.

Câu 42. Chọn C

Tập xác định: $D = \left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Ta có $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}, \forall x \in \left(1; \frac{9}{5}\right)$.

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7 < 0 \\ 1 < x < \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{9}{5}.$$

Câu 43. Chọn C

Tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. Vậy $f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0$.

Với $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, ta có: $\frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

Kết hợp với điều kiện $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, ta có: $x \in \left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $x \in \emptyset$.

Vậy $S = \emptyset$.

Câu 44. Chọn C

Với $\forall x > \frac{1}{4}$, ta có:

$$\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{(3-2x)' \sqrt{4x-1} - (3-2x)(\sqrt{4x-1})'}{(4x-1)} = \frac{-2\sqrt{4x-1} - \frac{6-4x}{\sqrt{4x-1}}}{(4x-1)} = \frac{-4x-4}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}.$$

Do đó $a = -4, b = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$.

Câu 45. $y = \sqrt{1+3x-x^2} \Rightarrow y^2 = 1+3x-x^2$

$$\Rightarrow 2y \cdot y' = 3-2x \Rightarrow 2 \cdot (y')^2 + 2y \cdot y'' = -2 \Rightarrow (y')^2 + y \cdot y'' = -1$$

Câu 46. Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Khi đó ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Nghiệm của phương trình $y' \cdot y = 2x+1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2-1} = 2x+1$ suy ra $x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1$.

Tuy nhiên do điều kiện xác định nên phương trình vô nghiệm.

Trình bày lại

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Khi đó ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Nghiệm của phương trình $y' \cdot y = 2x+1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2-1} = 2x+1$. ĐK: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$: Không thỏa mãn.
KL: phương trình vô nghiệm.

Câu 47. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2 - 2x + 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \Rightarrow a = 1; b = -1.$

Câu 48. Chọn A

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3.$$

Câu 49. Chọn B

$$f'(x) = 3ax^2 - \frac{b}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 3a - b \\ f'(-2) = 12a - \frac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 1 \\ 12a - \frac{b}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{-8}{5} \end{cases}.$$

$$f'(\sqrt{2}) = 6a - \frac{b}{2} = -\frac{2}{5}.$$

Câu 50. Chọn B

Tập xác định: $D = (-\infty; -5m) \cup (-5m; +\infty).$

$$\text{Ta có } y' = \frac{5m - 2}{(x + 5m)^2}$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -10 \leq -5m \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2\}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn YCBT

DẠNG 3. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Dạng 3.1 Tiếp tuyến tại điểm

Câu 51. Chọn B

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-5}{(2x - 3)^2}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = \frac{-5}{(2 \cdot (-1) - 3)^2} = \frac{-1}{5}$$

Câu 52. Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 8x, y'(-1) = 4.$$

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2).$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là:

$$y = y'(-1)(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

Câu 53. Chọn C

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$, $y'(-1) = 4$

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là:

$$y = y'(-1)(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

Câu 54. Chọn B

$$x = 3 \Rightarrow y = 9;$$

$$y' = \frac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -7.$$

Phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y = -7(x-3) + 9 \Leftrightarrow y = -7x + 30$.

Câu 55. Chọn C

$$y' = x^2 + 2x - 2$$

$$y'(1) = 1 + 2 - 2 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

$$y = y'(1)(x-1) + \frac{1}{3} = x - 1 + \frac{1}{3} = x - \frac{2}{3}$$

Câu 56. Chọn D

$$y' = 3x^2 - 3$$

Ta có $y(2) = 2$ và $y'(2) = 9$. Do đó PTTT cần tìm là: $y = 9(x-2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16$

Câu 57. Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3 - 8x$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = y'_{(0)} \cdot (x-0) + y_{(0)} \Rightarrow \Delta: y = 3x$.

Câu 58. Chọn C

$$+) y' = -3x^2 + 3$$

$+) \text{ Giao điểm của } (C) \text{ với trục tung có tọa độ là } (0; -2).$

$+) \text{ Tiếp tuyến của } (C) \text{ tại điểm } (0; -2) \text{ có phương trình là:}$

$$y = y'(0)(x-0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Câu 59. Chọn A

Tập xác định \mathbb{R} .

$$y' = 4x^3 - 16x \Rightarrow y'(-1) = 12.$$

$$M(-1; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = 2.$$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(-1; 2)$ có phương trình là $y = y'(-1)(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 12x + 14$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y = 12x + 14$.

Câu 60. Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

$$y(0) = -2, y'(0) = 3$$

\Rightarrow phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 3(x-0) - 2$
 $\Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Câu 61. Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -2.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2x - 3$.

Câu 62. Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng $k = y'(1) = 1$.

Câu 63. Chọn D

Ta có: $y' = \frac{-1}{(3x-2)^2}$.

Gọi M là tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $\Rightarrow M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ số góc cần tìm là: $k = y'(0) = -\frac{1}{4}$.

Câu 64. Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Với $y = 3$, ta có: $\frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$$k = y'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -2.$$

Câu 65. Chọn C

Đặt $y = f(x) = x^2 + x - 2$

Ta có $y' = f'(x) = 2x + 1$

Tại $x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = -1 \\ y_0 = f(-1) = -2 \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -(x+1) - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3 \Leftrightarrow x + y + 3 = 0.$$

Câu 66. Chọn C

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là $f'(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3$.

Câu 67. Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Theo bài ra ta có $I(0; -1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại I là $y'(0) = \frac{-2}{(0-1)^2} = -2$.

Câu 68. Chọn B

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$, $y'(2) = -2$. Khi $x = 2$ thì $y = 5$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
 $y = -2(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -2x + 9$.

Câu 69. Chọn B

Giao điểm của (H) và trục hoành là điểm $M(1; 0)$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$ nên $y'(1) = \frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến với (H) tại điểm M là: $y = y'(1)(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x-1)$.

Câu 70. Chọn C

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) là $y' = -3x^2 + 6x + 9 = 12 - 3(x+1)^2 \leq 12$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là 12

Câu 71. Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 8(x-1) + 4 = 8x - 4$.

Câu 72. Chọn B

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2; 3)$ là: $y = -2(x-2) + 3 = -2x + 7$.

Do đó $a = -2$; $b = 7 \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 73. Chọn B

Ta có $y(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 5 = -3$.

$y' = 4x^3 - 12x \Rightarrow y'(2) = 4 \cdot (2)^3 - 12 \cdot 2 = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = y'(2) \cdot (x-2) + y(2)$.

$\Rightarrow y = 8(x-2) - 3 = 8x - 19$.

Câu 74. Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà $y_0 = -2$.

Khi đó $\frac{x_0+1}{x_0-2} = -2 \Rightarrow x_0 + 1 = -2(x_0 - 2) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow M(1; -2)$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(1) = -3$. Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$

tại $M(1; -2)$ là $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$.

Dạng 3.2 Tiếp tuyến khi biết hệ số góc, quan hệ song song, vuông góc với đường thẳng cho trước

Câu 75. Chọn D

Gọi $M(a; a^3 + 1)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1(C)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y = 3a^2(x-a) + a^3 + 1 \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3 + 1(\Delta).$$

$$\Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = 3 \\ -2a^3 + 1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Vậy, có duy nhất điểm M thỏa mãn yêu cầu là $M(-1; 0)$.

Câu 76. Chọn A

$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ nên

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$$

$$+ \text{ Với } x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2} : \text{ phương trình tiếp tuyến là } y = 3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 3x - 4\sqrt{2}$$

$$+ \text{ Với } x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2} : \text{ phương trình tiếp tuyến là } y = 3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3x + 4\sqrt{2}$$

Câu 77. Chọn A

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 6x.$$

Vì tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ nên $y'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1, \text{ suy ra PTTT là: } y = -9(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = -9x - 8.$$

$$\text{Với } x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -3, \text{ suy ra PTTT là: } y = -9(x-3) - 3 \Leftrightarrow y = -9x + 24.$$

Câu 78. Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Theo giả thiết ta có

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 : \text{ Phương trình tiếp tuyến: } y = -3(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1.$$

$$\text{Với } x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 : \text{ Phương trình tiếp tuyến: } y = -3(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11.$$

Ta thấy cả hai tiếp tuyến đều thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 79. Chọn C

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $y' = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy hoành độ tiếp điểm cần tìm là: $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Câu 80.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Hệ số góc: $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 3; x_0 = -1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;1)$: $y = 9(x-3) + 1 = 9x - 26$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(-1;-3)$: $y = 9(x+1) - 3 = 9x + 6$.

Câu 81. Chọn C

Gọi (Δ) là tiếp tuyến của đồ thị (C) và $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$y' = 3x^2 - 6x$

Theo giả thiết: (Δ) song song với $(d): y = 9x + 7 \Rightarrow k_{\Delta} = k_d = 9 = y'(x_0)$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$: $(\Delta): y = 9(x+1) - 2 = 9x + 7$ (loại)

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$: $(\Delta): y = 9(x-3) + 2 = 9x - 25$.

Câu 82. Chọn B

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ nên $3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -4, f'(-1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9x + 5$ (không thỏa)

Với $x = 3 \Rightarrow y = 0, f'(3) = 9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x-3)$

Câu 83. Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Ta có $x - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow \text{PTTT: } y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Câu 84. Chọn C

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với $x_1 \neq x_2$.

Tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau nên $y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1-1)^2} = \frac{1}{(x_2-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \begin{cases} x_1-1 = x_2-1 \\ x_1-1 = -x_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=2$$

Vậy trên đồ thị hàm số tồn tại vô số cặp điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1+x_2=2$ thì các tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau.

$$* y_1+y_2 = \frac{x_1+1}{x_1-1} + \frac{x_2+1}{x_2-1} = \frac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-1} = 2. \text{ Như vậy } x_1+x_2=2 \text{ và } y_1+y_2=2 \text{ hay đoạn thẳng } AB$$

có trung điểm là tâm đối xứng $I(1;1)$ của đồ thị.

Câu 85. Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m+1}{(x+1)^2}.$$

Gọi $M(0; -m) \in (C_m)$; k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại M và $d: y = 3x + 1$.

Do tiếp tuyến tại M song song với d nên $k = 3 \Leftrightarrow y'(0) = 3 \Leftrightarrow 1+m = 3 \Leftrightarrow m = -2$

Chú ý: Do đặc thù đáp án của câu này nên trong quá trình giải khi ra $m = -2$ thì ta chọn ngay đáp án, tuy nhiên trên thực tế để giải toán thuộc dạng này ta cần chú ý sau khi tìm ra m ta cần phải viết phương trình tiếp tuyến tại M để kiểm tra lại xem tiếp tuyến có song song với đường thẳng đề bài cho không vì khi hai đường này trùng nhau thì hệ số góc của chúng vẫn bằng nhau.

Câu 86. Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$, khi đó ta có:

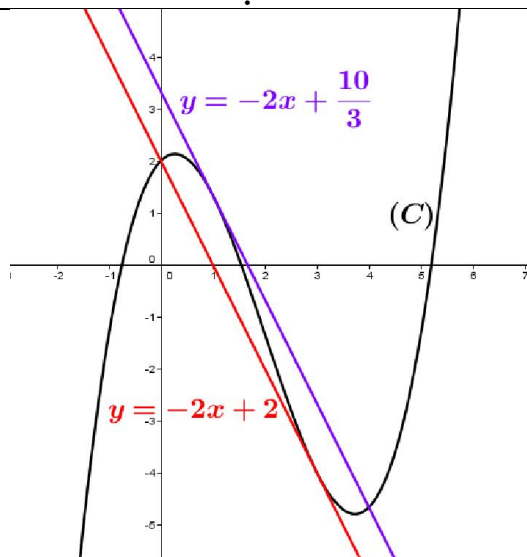
$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1/3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 1$ ta được $M(1;1)$, phương trình tiếp tuyến: $y = 1 \cdot (x-1) + 1 \Leftrightarrow y = x$ (loại).

Với $x_0 = \frac{1}{3}$ ta được $M\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{27}\right)$, phương trình tiếp tuyến: $y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{27} \Leftrightarrow y = x - \frac{4}{27}$.

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 87. Chọn A



Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0)$ là: $f'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 1$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là -2

Tiếp tuyến song song với đường thẳng d thì $x_0^2 - 4x_0 + 1 = -2$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

* **Th1:** $x_0 = 1, y_0 = \frac{4}{3}, f'(x_0) = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -2x + \frac{10}{3}$ (loại)

* **Th2:** $x_0 = 3, y_0 = -4, f'(x_0) = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -2x + 2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2x + 2$

Câu 88. Chọn C

+ Ta có $y' = x^2 + 6x$, $y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$ ($y_0 = 16$)

+ Vậy $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -9(x + 3) + 16$ hay $y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 89. Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Gọi hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến Δ là x_0 .

Tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết song song với đường thẳng $y = 9x + 6$

$$\Rightarrow y'(x_0) = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y(-1) = -3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 3 \Rightarrow y = 9x + 6$ (loại).

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y(3) = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 1 \Rightarrow y = 9x - 26$ (thỏa mãn).

Câu 90. Chọn D

Giả sử tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ tại $M(x_0; y_0)$ có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ nên $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

+ Với $x_0 = 1, y_0 = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = x$ (loại)

+ Với $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{5}{27} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = x - \frac{4}{27}$ hay $27x - 27y - 4 = 0$.

Vậy có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 91. Chọn D

$$y' = -4x^3 + 4x.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên có hệ số góc bằng 0.

$$\text{Suy ra } y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -4x_0^3 + 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 0$, tiếp tuyến là: $y = 0$ (loại).

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$ (thỏa mãn).

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy có một tiếp tuyến song song với trục hoành có phương trình $y = 1$.

Câu 92. Chọn C

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với $\Delta: y = 3x + 2$ nên gọi tọa độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ ta có

$$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 + 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow (d): y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2 \text{ (Loại)}.$$

$$x_0 = -3 \Rightarrow (d): y = 3(x + 3) + 5 = 3x + 14 \text{ (Nhận)}.$$

Câu 93. Chọn A

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có $y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C), khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3x_0^2 - 6x_0$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 25$ khi

$$3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases}$$

+ Với $M(-1; -2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x + 7$.

+ Với $M(3; 2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x - 25$.

Vậy tiếp tuyến của (C) song song với $y = 3x + 1$ là $y = 9x + 7$, nên ta có 1 tiếp tuyến cần tìm

Câu 94. Chọn B

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 3$

$$\text{Ta có: } y'(x) = x^2 - 1$$

$$\text{Xét phương trình: } y'(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Do M có hoành độ âm nên $x = -2$ thỏa mãn, $x = 2$ loại.

Với $x = -2$ thay vào phương trình $(C) \Rightarrow y = 0$. Vậy điểm M cần tìm là: $M(-2; 0)$

Câu 95. Chọn A

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y = -3x$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến Δ là $k = -3$.

Tiếp tuyến Δ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có phương trình dạng $y = -3(x - x_0) + y_0$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

$$y'(x_0) = k \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow M_0(2; 5)$$

$$\Rightarrow \text{Tiếp tuyến } \Delta: y = -3(x - 2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11.$$

$$+ \text{ Với } x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M_0(0; -1)$$

$$\Rightarrow \text{Tiếp tuyến } \Delta: y = -3(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x + 11$ và $y = -3x - 1$.

Câu 96. Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $4x^3 - 9x^2 + 4x = 7$.

Phương trình có 1 nghiệm nên có 1 tiếp tuyến có hệ số góc bằng 7.

Câu 97. Chọn C

Vì tiếp tuyến song song với trục Ox nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 0$.

$$\text{Gọi tiếp điểm là } M(x_0; y_0) \in (C), \text{ khi đó } y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = m - 2 \\ x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Để có đúng một tiếp tuyến song song với trục } Ox \text{ thì } \begin{cases} m = 2 \\ m - 3 \neq 0 \\ m = 3 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3; m = 2$$

Vậy tổng các giá trị của m là $3 + 2 = 5$.

Câu 98. Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x.$$

Vì tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$ nên có:

$$3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = -1 \Rightarrow y(-1) = -2.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y = 9(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 9x + 11.$$

$$+ \text{ Với } x = 3 \Rightarrow y(3) = 2. \text{ Phương trình tiếp tuyến: } y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25.$$

Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 99. Chọn B

Ta có: $d: 12x + y = 0 \Rightarrow d: y = -12x$. Hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = -12$.

Do tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k_t = k_d = -12$.

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x - 12.$$

Giải sử $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó:

$$y'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = -12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 1) \\ M(1; -12) \end{cases}$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(0; 1)$ là: $y = -12(x - 0) + 1 = -12x + 1$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(1; -12)$ là: $y = -12(x - 1) - 12 = -12x$ (loại do trùng với d).

Vậy $y = -12x + 1$, như vậy $a = -12$, $b = 1 \Rightarrow 2a + b = -23$.

Câu 100. Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$.

Có $y' = 3x^2 + 3$.

$$y' = 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 3)$ là: $y = 6x - 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M'(-1; -5)$ là: $y = 6x + 1$.

$$\text{Đề đường thẳng } y = 6x + m + 1 \text{ là tiếp tuyến của } (C) \text{ thì } \begin{cases} m + 1 = -3 \\ m + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \end{cases}$$

Câu 101. Chọn A

Ta không xét $m = 0$ vì giá trị này không ảnh hưởng đến tổng S .

Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ (I) có nghiệm.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ 3x^2 - 6mx + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2mx) - mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ x^2 - 2mx = -m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mx^2 + 2mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m - 2m^2 = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2mx - 2m^2 + 2m = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + m)(1 - m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x = -m \end{cases}$$

Với $m = 1$ thay vào (2) $\Rightarrow x = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Với } x = -m \text{ thay vào (2)} \Rightarrow -3m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Dạng 3.3 Tiếp tuyến đi qua một điểm

Câu 102. Phương trình đường thẳng qua điểm $A(-1; 0)$ có dạng: $y = a(x + 1) = ax + a$ (d).

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x = ax + a \\ 3x^2 - 6x + 2 = a \end{cases}$ có nghiệm. Dễ thấy hệ có ba nghiệm $(a; x)$ phân biệt nên có ba tiếp tuyến.

Câu 103. Phương trình đường thẳng qua $M(2; -1)$ có dạng $y = k(x - 2) - 1 = kx - 2k - 1$ (d).

(d) là tiếp tuyến của parabol $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} kx - 2k - 1 = \frac{x^2}{4} - x + 1 \\ k = \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ k = \frac{x}{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ k = -1 \\ x = 4 \\ k = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } (d): y = -x + 1 \text{ hoặc } (d): y = x - 3.$$

Câu 104. Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1$, gọi $B(-1; 2m - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; 2m - 4)$.

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -m + 2$.

Mặt khác: hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Do đó ta có: $3(x_0)^2 + 6m_0x_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2$

$$\Leftrightarrow 3 - 6m_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2 \Leftrightarrow -4m_0 = -2 \Leftrightarrow m_0 = \frac{1}{2}.$$

Câu 105. Chọn C

$$f'(x) = \frac{1 - x + x - 2}{(1 - x)^2} = \frac{-1}{(1 - x)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0) : y - \frac{x_0 - 2}{1 - x_0} = \frac{-1}{(1 - x_0)^2}(x - x_0)$

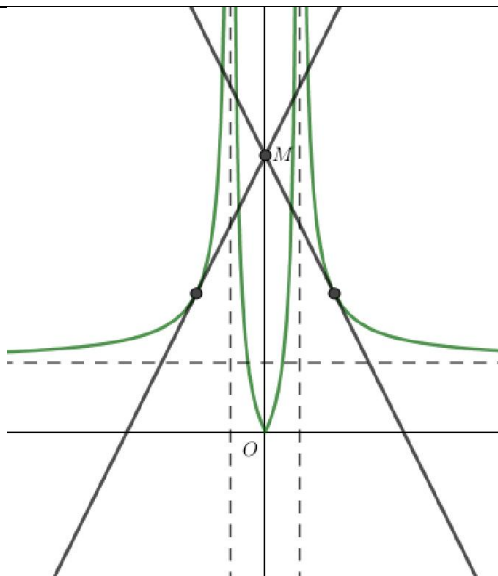
Tiếp tuyến đi qua $A(m; 1) \Rightarrow 1 - \frac{x_0 - 2}{1 - x_0} = \frac{-1}{(1 - x_0)^2}(m - x_0) \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + m + 3 = 0 (x_0 \neq 1) (1)$

Để có 1 tiếp tuyến qua $A(m; 1) \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $x_0 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0; 2 - 6 + m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m < \frac{3}{2}; m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}. \text{ Ta có } 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

Câu 106. Chọn B



Bằng các phép biến đổi đồ thị ta nhận được đồ thị hàm số như hình trên. Dễ thấy hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục tung là trục đối xứng. Dựa vào đồ thị hàm số ta chỉ cần tìm tiếp tuyến khi $x > a^2 + 1$, tiếp tuyến còn lại đối xứng với tiếp tuyến tìm được qua trục tung.

Khi $x > a^2 + 1$, ta có $y = \frac{(b^2 + 2)x}{x - (a^2 + 1)}$; $y' = -\frac{(b^2 + 2)(a^2 + 1)}{[x - (a^2 + 1)]^2}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có dạng

$$y = -\frac{(b^2 + 2)(a^2 + 1)}{[x_0 - (a^2 + 1)]^2}(x - x_0) + \frac{(b^2 + 2)x_0}{x_0 - (a^2 + 1)} \quad (d).$$

Theo giả thiết $M \in (d)$ suy ra

$$(a^2 + 2)^2(b^2 + 2) = \frac{(b^2 + 2)(a^2 + 1)x_0}{[x_0 - (a^2 + 1)]^2} + \frac{(b^2 + 2)x_0}{x_0 - (a^2 + 1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = a^2 + 2 \\ x_0 = a^2 + \frac{2}{a^2 + 3} \end{cases}$$

Vì $x_0 > a^2 + 1$ cho nên $x_0 = a^2 + 2$, suy ra phương trình tiếp tuyến là

$$y = (b^2 + 2)[(a^2 + 2)^2 - (a^2 + 1)x].$$

Tiếp tuyến đối xứng với (d) qua trục tung có phương trình

$$y = (b^2 + 2)[(a^2 + 2)^2 + (a^2 + 1)x].$$

Câu 107. Chọn C

TXĐ: $R \setminus \{1\}$.

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Tiếp tuyến tại tiếp điểm có hoành độ x_0 ($x_0 \neq 1$) của (C) có phương trình.

$$y = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{-x_0 + 2}{x_0 - 1} \quad (\Delta)$$

$$\text{đt } (\Delta) \text{ đi qua } A(a; 1) \Rightarrow 1 = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(a - x_0) - \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + a + 3 = 0 \quad (*) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Có duy nhất 1 tiếp tuyến qua A pt (*) có duy nhất 1 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ 2.1^2 - 6.1 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m + n = 5$$

Câu 108. Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Phương trình tiếp tuyến d với đồ thị hàm số tại $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 \quad (1)$$

đi qua $A(3; 2)$ nên ta được phương trình

$$2 = (3x_0^2 - 6x_0)(3 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 12x_0^2 + 18x_0 = 0 \Leftrightarrow 2x_0(x_0 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

+) $x_0 = 0$ thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến d_1 là $y = 2$.

+) $x_0 = 3$ thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến d_2 là $y = 9x - 25$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua $A(3; 2)$.

Ta cũng có thể sử dụng đồ thị của hàm số để suy ra đáp án

Câu 109. Chọn C

$$\text{ĐK: } x \neq 1; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d qua A có hệ số góc k là $y = k(x - a) + 1$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-a)+1 = \frac{-x+2}{x-1} \quad (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} \quad (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta có: } \frac{-1}{(x-1)^2}(x-a)+1 = \frac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow -x+a+x^2-2x+1 = -x^2+3x-2, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 \quad (3)$$

Để đồ thị hàm số có một tiếp tuyến qua A thì hệ là số nghiệm của hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất \Leftrightarrow phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 \quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 2 - 6 + a + 3 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a; 1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp

$$\text{tuyến có dạng: } y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \quad (d)$$

Vì $A \in d$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$1 = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} (a - x_0) + \frac{-x_0 + 2}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0(1) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Để chỉ có một tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Dạng 3.4 Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến

Câu 110. Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 6$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số là

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 3 = 3(x_0 + 1)^2 + 3 \geq 3$$

Vậy hệ số góc lớn nhất là 3 đạt được tại $M(3; 19)$.

Câu 111. Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0; \forall x \in D$.

Tam giác $\triangle OAB$ cân tại O , suy ra hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 .

Do $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0; \forall x \in D \Rightarrow k_{tt} = -1$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $(x_0; y_0); x_0 \in D$, ta có: $\frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1$.

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x$ (loại vì $A \equiv B \equiv O$).
- Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x - 2$ (nhận).

Vậy $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3$.

Câu 112.

Lời giải

Chọn A

Giả sử tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$ cắt Ox tại A , Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do tam giác OAB vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc tiếp tuyến là $f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$.

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2} : d : y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}.$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2} : d : y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Câu 113. Chọn D

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ tại tiếp điểm

$M(x_0; y_0)$ là:

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$$

$$\text{Hệ số góc luôn dương} \Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Câu 114. Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D.$$

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y = ax + b$ hay $d: y = -x - 2 \Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

Câu 115. Chọn D

$$+ y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(a; y_A)$ của đồ thị (C) là $f'(a) = \frac{3}{2}a^2 - 3a$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $B(b; y_B)$ của đồ thị (C) là $f'(b) = \frac{3}{2}b^2 - 3b$

($a \neq b$ vì A và B phân biệt).

$$\text{Mà tiếp tuyến tại } A \text{ và } B \text{ song song nên } f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 - 3a = \frac{3}{2}b^2 - 3b$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(a^2 - b^2) - 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow 3(a - b)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ (l)} \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2 - a.$$

$$+ A\left(a; \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right); B\left(b; \frac{1}{2}b^3 - \frac{3}{2}b^2 + 2\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\left(a - b; \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2\right) = \frac{1}{2}(a - b)(2; a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b)$$

$$\Rightarrow \text{véc tơ pháp tuyến của đường thẳng } AB \text{ là } \vec{n}(a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b; -2) = (a^2 - 2a - 2; -2).$$

Phương trình đường thẳng AB đi qua $A\left(a; \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)$ có véc tơ pháp tuyến \vec{n} là

$$(a^2 - 2a - 2)(x - a) - 2\left[y - \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)\right] = 0.$$

$$\text{Mà đường thẳng } AB \text{ đi qua } D(5; 3) \Rightarrow (a^2 - 2a - 2)(5 - a) - 2\left[3 - \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Với $a = -1$, phương trình đường thẳng AB là $x + 1 - 2y = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$.

Với $a = 3$, phương trình đường thẳng AB là $x - 3 - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$.

Cách trắc nghiệm

Để thấy AB đi qua điểm uốn $I(1;1) \Rightarrow$ đường thẳng AB trùng với đường thẳng ID .

$\Rightarrow \overrightarrow{ID}(4;2) = 2(2;1) \Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến \vec{n} của đường thẳng AB là $\vec{n}(1;-2)$.

Câu 116. Chọn D

- $M \in d: y = 1 - 2x \Rightarrow M(m; 1 - 2m)$.
- Phương trình đường thẳng đi qua M có dạng: $y = kx + 1 - 2m - km$.
- Điều kiện để qua M có hai tiếp tuyến với (C) là:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = kx + 1 - 2m - km \\ k = -\frac{4}{(x-1)^2} \end{cases} \quad \text{có 2 nghiệm phân biệt.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} = -\frac{4x}{(x-1)^2} + 1 - 2m + \frac{4m}{(x-1)^2} \quad \text{có 2 nghiệm phân biệt.}$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 2(2-m)x - m - 2 = 0 \quad (*) \quad \text{có 2 nghiệm phân biệt khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

- Khi đó, 2 nghiệm của phương trình $(*)$ là hoành độ của hai điểm A , **B.**

$$+) \text{ Cho } m = 2: 2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow A(\sqrt{2}; 5 + 4\sqrt{2}), B(-\sqrt{2}; 5 - 4\sqrt{2})$$

\Rightarrow Phương trình đường thẳng $AB: y = 4x + 5$.

$$+) \text{ Cho } m = 3: 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A'(-1; -1), B'(\frac{5}{3}; 7)$$

\Rightarrow Phương trình đường thẳng $A'B': y = 3x + 2$.

- H là điểm cố định nên H là giao điểm của hai đường thẳng AB và $A'B'$:

$$\begin{cases} 4x_H - y_H = -5 \\ 3x_H - y_H = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = 7 \end{cases} \Rightarrow H(3; 7)$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{58}$$

Câu 117. Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$ là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \end{cases}.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2 + 3x + m = 0$ phải có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 4.1.m > 0 \\ 0^2 + 3.0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m > -9 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Với điều kiện trên, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, ở đó

x_B, x_C là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + m = 0$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C lần lượt là

$$k_B = f'(x_B) = 3x_B^2 + 6x_B + m; \quad k_C = f'(x_C) = 3x_C^2 + 6x_C + m.$$

Để hai tiếp tuyến này vuông góc thì $k_B \cdot k_C = -1$.

$$\text{Suy ra: } (3x_B^2 + 6x_B + m)(3x_C^2 + 6x_C + m) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_B x_C)^2 + 18x_B^2 x_C + 3mx_B^2 + 18x_B x_C^2 + 36x_B x_C + 6mx_B + 3mx_C^2 + 6mx_C + m^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_B x_C)^2 + 18x_B x_C (x_B + x_C) + 3m(x_B^2 + x_C^2) + 36x_B x_C + 6m(x_B + x_C) + m^2 + 1 = 0.$$

$$\text{Ta lại có theo Vi-et: } \begin{cases} x_B + x_C = -3 \\ x_B x_C = m \end{cases}. \text{ Từ đó } x_B^2 + x_C^2 = (x_B + x_C)^2 - 2x_B x_C = 9 - 2m.$$

$$\text{Suy ra: } 9m^2 + 18m(-3) + 3m(9 - 2m) + 36m + 6m(-3) + m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} + \frac{9 - \sqrt{65}}{8} = \frac{9}{4}.$$

Câu 118. Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = \frac{f'(x)[g(x)+1] - g'(x)[f(x)+3]}{[g(x)+1]^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{f'(1)[g(1)+1] - g'(1)[f(1)+3]}{[g(1)+1]^2}$$

Vì $y'(1) = f'(1) = g'(1) \neq 0$ nên ta có

$$\frac{f'(1)[g(1)+1] - g'(1)[f(1)+3]}{[g(1)+1]^2} = f'(1) \Leftrightarrow \frac{g(1)+1 - [f(1)+3]}{[g(1)+1]^2} = 1$$

$$\Rightarrow g(1)+1 - [f(1)+3] = [g(1)+1]^2 \Rightarrow f(1) = -[g(1)]^2 - g(1) - 3 = -\frac{11}{4} - \left[g(1) + \frac{1}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow f(1) \leq -\frac{11}{4}$$

Câu 119. Chọn A

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1).$$

$$\text{Giả sử } M\left(a; \frac{a+1}{a-1}\right) \in (C) \quad (a > 1) \Rightarrow \text{phương trình tiếp tuyến tại } M: y = \frac{-2}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{a+1}{a-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x + (a-1)^2 y - (a^2 + 2a - 1) = 0 \quad (\Delta).$$

Hai đường tiệm cận của (C) là $x=1; y=1$.

$$\text{Ta có } (\Delta) \cap (x=1) \text{ tại } A\left(1; \frac{a+3}{a-1}\right), (\Delta) \cap (y=1) \text{ tại } B(2a-1; 1).$$

$$AB = \sqrt{(2a-2)^2 + \left(\frac{-4}{a-1}\right)^2} = \frac{2}{|a-1|} \sqrt{(a-1)^4 + 4} = \frac{2}{a-1} \sqrt{(a-1)^4 + 4}.$$

$$d(O, (\Delta)) = \frac{|a^2 + 2a - 1|}{\sqrt{4 + (a-1)^4}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{\Delta OAB} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|a-1|} \sqrt{(a-1)^4 + 4} \cdot \frac{|a^2 + 2a - 1|}{\sqrt{4 + (a-1)^4}} = \frac{a^2 + 2a - 1}{a-1} = \frac{(a-1)^2 + 4(a-1) + 2}{a-1} \\ &= a - 1 + \frac{2}{a-1} + 4 \geq 4 + 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{2}{a-1}} = 4 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Câu 120. Chọn D

Ý nghĩa hình học, đạo hàm cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 là hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$. Quan sát hình vẽ ta thấy hệ số góc tiếp tuyến tại A bằng 0. Hệ số góc tiếp tuyến tại B dương (tiếp tuyến đi lên từ trái qua phải); Hệ số góc tiếp tuyến tại C âm (tiếp tuyến đi xuống từ trái qua phải).

Câu 121. Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số không thể có tiếp tuyến là đường thẳng song song với trục tung. Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua A .

Phương trình đường thẳng Δ : $y = k(x+1) - 1$

Để Δ tiếp xúc với (C) thì hệ sau phải có nghiệm:

$$(I): \begin{cases} x^3 - 3(m+3)x^2 + 3 = k(x+1) - 1 & (1) \\ 3x^2 - 6(m+3)x = k & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3(m+3)x^2 + 4 = 3x^2(x+1) - 6(m+3)x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - (3m+6)x^2 - 6(m+3)x - 4 = 0 \quad (*)$$

Một tiếp tuyến $\Delta_1: y = -1$, suy ra: $k = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6(m+3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2(m+3) \end{cases}$$

Với $x = 0, k = 0$ thay vào (1), không thỏa mãn.

Với $x = 2(m+3), k = 0$ thay vào (1) ta được:

$$8(m+3)^3 - 12(m+3)^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow (m+3)^3 = 1 \Leftrightarrow m = -2$$

Thử lại, với $m = -2$ thay vào hệ (I), ta được:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = k(x+1) - 1 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3 = (3x^2 - 6x)(x+1) - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow k = 0$, tiếp tuyến: $y = -1$.

Với $x = -1 \Rightarrow k = 9$, tiếp tuyến: $y = 9(x+1) - 1 = 9x + 8$.

Với $m = -2$ xét sự tương giao của đồ thị hàm số với đường thẳng $\Delta_2: y = 9x + 8$.

Xét phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 3 = 9x + 8 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm còn lại có hoành độ bằng 5. Không thỏa mãn đề bài.

Câu 122. Chọn B.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua A .

Ta có phương trình của d có dạng: $y = kx + m - k$.

$$d \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \text{hệ sau có nghiệm: } \begin{cases} kx + m - k = x^3 + 3x^2 + 1 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x^3 + 6x + 1 (*) \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases}$$

Đề qua A có thể được đúng 3 tiếp tuyến tới (C) thì phương trình $(*)$ phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CD} \text{ với } f(x) = -2x^3 + 6x + 1.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -6x^2 + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$f(1) = 5 = f_{CD}; f(-1) = -3 = f_{CT}.$$

Suy ra $-3 < m < 5$.

Vậy số phần tử của S là 7.

Câu 123. Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Với } y = 3, \text{ ta có: } \frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$$k = y'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -2.$$

Câu 124. Chọn D

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là:

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$$

$$\text{Hệ số góc luôn dương} \Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Câu 125. Chọn D

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}. \text{ Theo đề } x_0 = 2; y_0 = 1; y'(x_0) = -1.$$

Suy ra pttt Δ là: $y = -x + 3$.

Tiếp tuyến Δ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A(3; 0), B(0; 3)$. Do đó diện tích tam giác được tạo

$$\text{bởi } \Delta \text{ và các trục tọa độ bằng: } S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{9}{2}.$$

Câu 126. Chọn A

$$\text{Ta có } y = \frac{2x+3}{x+2} \quad (C)$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$y' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Gọi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$(d): y = \frac{1}{(x_0+2)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{2x_0+3}{x_0+2}$$

$$\text{Ta có } (d) \cap Ox = A(-2x_0^2-6x_0-6; 0); (d) \cap Oy = B\left(0; \frac{2x_0^2+6x_0+6}{(x_0+2)^2}\right)$$

Ta thấy tiếp tuyến (d) chắn trên hai trục tọa độ tam giác OAB luôn vuông tại O

$$\text{Đề tam giác } OAB \text{ cân tại } O \text{ ta có } OA = OB \Rightarrow |-2x_0^2-6x_0-6| = \left| \frac{2x_0^2+6x_0+6}{(x_0+2)^2} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Ta có hai tiếp tuyến thỏa mãn $(d): y = x$ và $(d): y = x+2$.

Câu 127. Chọn D

$$\text{Ta có: } k_1 = f'(2), k_2 = g'(2); k_3 = \frac{f'(2) \cdot g(2) - f(2) \cdot g'(2)}{g^2(2)} = \frac{k_1 \cdot g(2) - k_2 \cdot f(2)}{g^2(2)}$$

Mà $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$ nên ta có:

$$k_3 = \frac{2k_3 \cdot g(2) - 2k_3 \cdot f(2)}{g^2(2)} \Leftrightarrow f(2) = -\frac{1}{2} \cdot g^2(2) + g(2) = -\frac{1}{2} \cdot [g(2)-1]^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 128. Chọn A

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2}. \text{ Tiếp tuyến tại điểm } M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right) (x_0 \neq 2) \text{ của } (C) \text{ có phương trình là:}$$

$$(d): y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}.$$

$$*) A = d \cap d_1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2} \Rightarrow \frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) = \frac{1}{x_0-2} \Rightarrow x = 2x_0-2$$

$$\Rightarrow A(2x_0-2; 2).$$

$$*) B = d \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(2-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2} \Leftrightarrow y = \frac{2x_0-2}{x_0-2} \Rightarrow B\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right).$$

$$*) \text{ Suy ra: } AB = \sqrt{4(x_0 - 2)^2 + \frac{2}{(x_0 - 2)^2}} \geq \sqrt{2 \cdot 2(x_0 - 2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{(x_0 - 2)}} = 2\sqrt[4]{2}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } 4(x_0 - 2)^2 = \frac{2}{(x_0 - 2)^2} \Leftrightarrow x_0 = 2 \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Vậy } \min AB = 2\sqrt[4]{2}.$$

Câu 129. Chọn C

$$\text{Có: } y' = 3x^2 - 2018.$$

Gọi d_n là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_n .

$$\text{Có điểm } M_1(1; -2017) \Rightarrow d_1: y + 2017 = y'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow d_1: y = -2015x - 2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là:

$$x^3 - 2018x = -2015x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Có điểm } M_2(-2; 4028) \Rightarrow d_2: y - 4028 = y'(-2) \cdot (x + 2) \Leftrightarrow d_2: y = -2006x + 16.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và (C) là:

$$x^3 - 2018x = -2006x + 16 \Leftrightarrow x^3 - 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Có điểm } M_3(4; -8008) \Rightarrow d_3: y + 8008 = y'(4) \cdot (x - 4) \Leftrightarrow d_3: y = -1970x - 128.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và (C) là:

$$x^3 - 2018x = -1970x - 128 \Leftrightarrow x^3 - 48x + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = -8 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra ta có dãy } (x_n): \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -8 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow x_n = (-2)^{n-1} = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^n \Rightarrow y_n = x_n^3 - 2018x_n.$$

$$\begin{aligned} \text{Giả thiết: } 2018x_n + y_n + 2^{2019} &= 0 \Leftrightarrow 2018x_n + x_n^3 - 2018x_n + 2^{2019} = 0 \\ \Leftrightarrow x_n^3 &= -2^{2019} \Leftrightarrow x_n^3 = (-2)^{2019} \Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = (-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n-3 = 2019 \Leftrightarrow n = 674. \end{aligned}$$

Câu 130. Chọn B

Giả sử $M \in d: y = x + 1$, ta gọi $M(a; a + 1)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(a; a + 1)$ có hệ số góc k có phương trình là: $y = k(x - a) + a + 1$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = k(x - a) + a + 1 \\ 3x^2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a = 0 \\ 3x^2 = k \end{cases} \quad (*)$$

Từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt \Leftrightarrow hàm số $y = g(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $g(x_1) = 0$ hoặc $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 6x^2 - 6ax = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $g(x_1) = 0$ hoặc $g(x_2) = 0$.

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a \neq 0 \\ g(0) = 0 \\ g(a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -a = 0 \\ -a^3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$.

$$\text{Vậy: } S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}(0 + 2^2 + 0 \cdot 2) + \frac{1}{3} = \frac{41}{15}.$$

Câu 131. Chọn D

Ta có $M_n(x_n; y_n)$, với $y_n = x_n^3 - 2019x_n, \forall n \geq 1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} với $n \geq 2$ là $(d_{n-1}): y = k_{n-1}(x - x_{n-1}) + y_{n-1}$, trong đó $k_{n-1} = 3x_{n-1}^2 - 2019$.

Mà $M_n \in (d_{n-1})$ với $n \geq 2$ nên ta có $y_n = k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + y_{n-1}$

$$\Leftrightarrow y_n - y_{n-1} = (3x_{n-1}^2 - 2019)(x_n - x_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow x_n^3 - 2019x_n - x_{n-1}^3 + 2019x_{n-1} = (3x_{n-1}^2 - 2019)(x_n - x_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 2019) = (3x_{n-1}^2 - 2019)(x_n - x_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} - 2x_{n-1}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})^2(x_n + 2x_{n-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n - x_{n-1} = 0 \text{ (loại vì } M_n \neq M_{n-1}) \text{ hoặc } x_n + 2x_{n-1} = 0 \text{ (nhận)}$$

$$\Leftrightarrow x_n = -2x_{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Suy ra $x_n = (-2)^{n-1} x_1 = (-2)^{n-1}$ với $n \geq 1$ (vì $x_1 = 1$).

Hơn nữa:

$$2019x_n + y_n + 2^{2019} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019x_n + x_n^3 - 2019x_n + 2^{2019} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)^{3(n-1)} = (-2)^{2019}.$$

$$\Leftrightarrow 3n = 2022$$

$$\Leftrightarrow n = 674.$$

Câu 132. Chọn C

$$y' = 3x^2 - 2019.$$

Gọi $M_k(x_k; x_k^3 - 2019x_k) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_k là:

$$\Delta_k: y = (3x_k^2 - 2019)(x - x_k) + x_k^3 - 2019x_k.$$

$$M_{k+1} \in (C) \cap \Delta_k, (x_{k+1} \neq x_k).$$

Suy ra $x_{k+1}^3 - 2019x_{k+1} = (3x_k^2 - 2019)(x_{k+1} - x_k) + x_k^3 - 2019x_k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = x_k \\ x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_k + x_k^2 - 2019 = 3x_k^2 - 2019 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_{k+1} = -2x_k$ (vì $x_{k+1} \neq x_k$) nên (x_n) là một cấp số nhân với $x_1 = 1$, công bội $q = -2$.

$$x_n = x_1(-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}. \text{ Suy ra } y_n = (-2)^{3n-3} - 2019(-2)^{n-1}.$$

$$\text{Do đó } 2019x_n + y_n + 2^{2013} = 0 \Leftrightarrow 2019(-2)^{n-1} + (-2)^{3n-3} - 2019(-2)^{n-1} + 2^{2013} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = (-2)^{2013} \Leftrightarrow 3n-3 = 2013 \Leftrightarrow n = 672$$

Câu 133. Chọn D

Đạo hàm hai vế $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ (1) ta có $4f'(2x) - 2f'(1-2x) = 24x$ (2).

$$\text{Thay } x = 0, x = \frac{1}{2} \text{ lần lượt vào (1) ta được } \begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2.$$

$$\text{Thay } x = 0, x = \frac{1}{2} \text{ lần lượt vào (2) ta được } \begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 4.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$.

Câu 134. Chọn C

$$\text{Đặt } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ Ta có } h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 2019$ tương ứng là $f'(2019), g'(2019), h'(2019) = \frac{f'(2019) \cdot g(2019) - g'(2019) \cdot f(2019)}{[g(2019)]^2}$ (1).

$$\text{Vì } f'(2019) = g'(2019) = h'(2019) \neq 0 \text{ nên (1) } \Leftrightarrow 1 = \frac{g(2019) - f(2019)}{[g(2019)]^2} \text{ (2).}$$

$$\text{Đặt } t = g(2019) \text{ thì (2) trở thành } 1 = \frac{t - f(2019)}{t^2} \text{ (} t \neq 0 \text{).}$$

$$\Rightarrow f(2019) = -t^2 + t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ (nhận, vì } t \neq 0 \text{).}$$

$$\text{Vậy } f(2019) \leq \frac{1}{4}.$$

DẠNG 4. BÀI TOÁN QUẢNG ĐƯỜNG, VẬN TỐC

Câu 135. Chọn B

$$\text{Ta có: } s'(t) = 3t^2 - 6t + 5 \Rightarrow a(t) = s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow a(3) = 12 \text{ m/s}^2.$$

Câu 136. Chọn D

$$\text{Vận tốc của chất điểm tại thời điểm } t_0 = 2 \text{ (giây) là: } v(2) = s'(2) = 11 \text{ (m/s)}$$

Câu 137. Chọn B

$$\text{Ta có } a(t) = S'' = (2t^4 + 6t^2 - 3t + 1)'' = 24t^2 + 12$$

$$\text{Vậy tại thời điểm } t = 3 \text{ thì gia tốc của chuyển động bằng: } a(3) = 24 \cdot 3^2 + 12 = 228 \text{ (m/s}^2 \text{).}$$

Câu 138. Chọn D

Phương trình vận tốc của chất điểm được xác định bởi $v = s' = 4t + 3$.

Suy ra vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng $v(2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11$.

Câu 139. Chọn C

$$\text{Ta tính } v'(t) = -4t^3 + 16t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2(L) \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có $v(0) = 500, v(2) = 516, v(5) = 75$

Hàm số $v(t)$ liên tục trên $[0; 5]$ nên chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$.

Câu 140. Chọn A

Ta có: Vận tốc của chuyển động $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Gia tốc của chuyển động $a(t) = v'(t) = 6t - 6$. Khi $t = 3 \Rightarrow a(t) = 12 \text{ m/s}^2$.

Câu 141. Chọn B

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 24t$.

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây) là: $v(10) = -\frac{3}{2}10^2 + 24 \cdot 10 = 90 \text{ (m/s)}$.

Câu 142. Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có: $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s) .

Câu 143. Chọn B

$$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$$

$$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$$

$$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $a(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 6 = 48 \text{ m/s}^2$.

Câu 144. Chọn A

Đặt $h_1 = 10 \text{ (m)}$. Sau lần chạm đất đầu tiên, quả bóng nảy lên độ cao là $h_2 = \frac{3}{4}h_1$.

Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao h_2 , chạm đất và nảy lên độ cao $h_3 = \frac{3}{4}h_2$, rồi rơi từ độ cao h_3 và tiếp

tục như vậy. Sau lần chạm đất thứ n từ độ cao h_n quả bóng nảy lên độ cao $h_{n+1} = \frac{3}{4}h_n$. Tổng

quãng đường bóng đi được từ lúc thả đến khi dừng:

$$S = (h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots) + (h_2 + h_3 + \dots + h_{n+1} + \dots) = \frac{h_1}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{h_2}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \left(h_1 + \frac{3}{4}h_1 \right) = 70 \text{ (m)}$$

Câu 145. Chọn B

Ta có $v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$. Ta đi tìm $\max_{(0; +\infty)} v(t)$.

$$v'(t) = -3t + 6 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

BBT

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	0	6	$-\infty$

$$\Rightarrow \max_{(0; +\infty)} v(t) = v(2) = 6.$$

$$\text{Vậy quãng đường vật đi được là: } s = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 20 = 28 \text{ m.}$$

TOÁN 11	ĐẠO HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
1D5-3	

PHẦN A. CÂU HỎI

- Câu 1.** Cho hàm số $u(x)$ có đạo hàm tại x là u' . Khi đó đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 u$ tại x là
A. $y' = \sin 2u$. **B.** $y' = u' \sin 2u$. **C.** $y' = 2 \sin 2u$. **D.** $y' = 2u' \sin 2u$.
- Câu 2.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - \cos x$
A. $y' = 2 \cos x + \sin x$. **B.** $y' = \cos 2x + \sin x$.
C. $y' = 2 \cos 2x + \sin x$. **D.** $y' = 2 \cos x - \sin x$.
- Câu 3.** Đạo hàm của hàm số $y = 4 \sin 2x + 7 \cos 3x + 9$ là
A. $8 \cos 2x - 21 \sin 3x + 9$. **B.** $8 \cos 2x - 21 \sin 3x$.
C. $4 \cos 2x - 7 \sin 3x$. **D.** $4 \cos 2x + 7 \sin 3x$.
- Câu 4.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + 3$ là:
A. $f'(x) = \sin x - \cos x$. **B.** $f'(x) = \cos x + \sin x + 3$.
C. $f'(x) = \cos x - \sin x$. **D.** $f'(x) = -\sin x - \cos x$.
- Câu 5.** Đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x + 1$ là
A. $y' = -\sin 2x$. **B.** $y' = 2 \sin 2x$. **C.** $y' = -2 \sin 2x + 1$. **D.** $y' = -2 \sin 2x$.
- Câu 6.** Đạo hàm của hàm số $y = \cos(2x + 1)$ là:
A. $y' = 2 \sin(2x + 1)$ **B.** $y' = -2 \sin(2x + 1)$ **C.** $y' = -\sin(2x + 1)$ **D.** $y' = \sin(2x + 1)$.
- Câu 7.** Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là:
A. $f'(x) = 2 \sin x$. **B.** $f'(x) = 2 \cos x$.
C. $f'(x) = -\sin(2x)$. **D.** $f'(x) = \sin(2x)$.
- Câu 8.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = \tan x$.
A. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $y' = \cot x$. **D.** $y' = -\cot x$.
- Câu 9.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x \sin x$
A. $y = \sin x - x \cos x$. **B.** $y = x \sin x - \cos x$. **C.** $y = \sin x + x \cos x$. **D.** $y = x \sin x + \cos x$.
- Câu 10.** Đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{x^2 + 1}$ là
A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$. **B.** $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$.
C. $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$. **D.** $y' = -\frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$.
- Câu 11.** Đạo hàm của hàm số $y = \tan x - \cot x$ là
A. $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$. **B.** $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$. **C.** $y' = \frac{4}{\cos^2 2x}$. **D.** $y' = \frac{1}{\sin^2 2x}$.

Câu 12. (KSNLGV - THUẬN THÀNH 2 - BẮC NINH NĂM 2018 - 2019) Tính đạo hàm của hàm số

$$y = \sqrt{\cos 2x}.$$

A. $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}.$ B. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$ C. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$ D. $y' = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}.$

Câu 13. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là?

A. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}.$ B. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}.$
C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}.$ D. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}.$

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right)$ là:

A. $-4\cos 4x.$ B. $4\cos 4x.$ C. $4\sin 4x.$ D. $-4\sin 4x$

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - 2\cos x + 1$.

A. $y' = -2\cos 2x + 2\sin x.$ B. $y' = 2\cos 2x + 2\sin x.$
C. $y' = 2\cos 2x - 2\sin x.$ D. $y' = -\cos 2x - 2\sin x$

Câu 16. Biết hàm số $y = 5\sin 2x - 4\cos 5x$ có đạo hàm là $y' = a\sin 5x + b\cos 2x$. Giá trị của $a - b$ bằng:

A. $-30.$ B. $10.$ C. $-1.$ D. $-9.$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = a\cos x + 2\sin x - 3x + 1$. Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

A. $|a| < \sqrt{5}.$ B. $|a| \geq \sqrt{5}.$ C. $|a| > 5.$ D. $|a| < 5.$

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

A. $y = \sin 3x.$ B. $y = -3\sin 3x.$ C. $y = 3\sin 3x.$ D. $y = -\sin 3x.$

Câu 19. (THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018) Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$

A. $f'(\pi) = 3\sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi).$ B. $f'(\pi) = 0.$
C. $f'(\pi) = 3a\sin^2(a\pi).$ D. $f'(\pi) = 3a \cdot \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi).$

Câu 20. (THPT THĂNG LONG - HÀ NỘI - 2018) Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'(x)$.

A. $f'(x) = 2\sin 2x.$ B. $f'(x) = \cos 2x.$ C. $f'(x) = 2\cos 2x.$ D. $f'(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x.$

Câu 21. (SGD&ĐT BẮC NINH - 2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 4x}{2} + 3\sin 4x$.

A. $y' = 12\cos 4x - 2\sin 4x.$ B. $y' = 12\cos 4x + 2\sin 4x.$
C. $y' = -12\cos 4x + 2\sin 4x.$ D. $y' = 3\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x.$

Câu 22. (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x - \cos 3x$

A. $f'(x) = 2\sin 4x - 3\sin 3x.$ B. $f'(x) = 2\sin 4x + 3\sin 3x.$
C. $f'(x) = \sin 4x + 3\sin 3x.$ D. $f'(x) = 2\sin 2x + 3\sin 3x$

- Câu 23. (CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1 - 2018)** Cho $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - x$. Khi đó $f'(x)$ bằng
A. $1 - \sin 2x$. **B.** $-1 + 2 \sin 2x$. **C.** $-1 + \sin x \cdot \cos x$. **D.** $1 + 2 \sin 2x$.
- Câu 24. (THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018)** Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ biết $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
A. -2 . **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0 . **D.** $-\frac{1}{2}$.
- Câu 25. (THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI - HÀ TĨNH - 2018)** Cho hàm số $y = \cos 3x \cdot \sin 2x$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1 . **D.** 1 .
- Câu 26. (THPT HẢI AN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018)** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.
A. 1 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 3 .
- Câu 27. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH - HKI I - 2018)** Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là?
A. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$. **B.** $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.
C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$. **D.** $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

PHẦN B. LỜI GIẢI

Câu 1. Chọn BTa có $y' = (\sin^2 u)' = 2 \sin u \cdot (\sin u)' = 2 \sin u \cdot \cos u \cdot u' = u' \sin 2u$.**Câu 2. Chọn C** $y = \sin 2x - \cos x \Rightarrow y' = 2 \cos 2x + \sin x$.**Câu 3. Chọn B**Ta có: $y' = 8 \cos 2x - 21 \sin 3x$.**Câu 4. Chọn C.****Câu 5. Chọn D**Ta có $y = \cos 2x + 1 \Rightarrow y' = (\cos 2x + 1)' = -(2x)' \sin 2x + (1)' = -2 \sin 2x$.**Câu 6. Chọn B** $y = \cos(2x + 1) \Rightarrow y' = -(2x + 1)' \cdot \sin(2x + 1) = -2 \sin(2x + 1)$ **Câu 7. Chọn D** $f'(x) = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.**Câu 8. Chọn B**Ta có: $y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.**Câu 9. Chọn C**Áp dụng công thức tính đạo hàm của một tích $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ ta có $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$

Vậy $y = x \sin x \Rightarrow y' = \sin x + x \cos x$

Câu 10. Chọn A

$$y' = -\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' \cdot \sin \sqrt{x^2 + 1} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}.$$

Câu 11. Chọn B

$$y = \tan x - \cot x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Câu 12. Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-2 \sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$\text{Vậy } y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Câu 13. Chọn A.

$$\text{Ta có: } y' = 2 \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 2 \cdot \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}.$$

Câu 14. Chọn D

Ta có

$$y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - 4x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = -\cos 4x \quad y' = (-\cos 4x)' = 4 \sin 4x.$$

Câu 15. Chọn B

$$y' = 2 \cos 2x + 2 \sin x.$$

Câu 16. Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 10 \cos 2x + 20 \sin 5x. \text{ Suy ra: } \begin{cases} a = 20 \\ b = 10 \end{cases}. \text{ Vậy } a - b = 10$$

Câu 17. Chọn B

$$f'(x) = 2 \cos x - a \sin x - 3 = 0 \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow 4 + a^2 \geq 9 \Leftrightarrow a^2 \geq 5 \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{5}.$$

Câu 18. Chọn B

Xét hàm số $y = \cos 3x$.

$$\text{Ta có } y' = (\cos 3x)' = -(3x)' \sin 3x = -3 \sin 3x.$$

$$\text{Vậy } y' = -3 \sin 3x.$$

$$\text{Câu 19. } f(x) = \sin^3 ax \Rightarrow f'(x) = 3a \sin^2 ax \cos ax.$$

$$\Rightarrow f'(\pi) = 3a \sin^2 a\pi \cdot \cos a\pi = 0.$$

$$\text{Câu 20. Ta có } f(x) = \sin 2x, \text{ suy ra } f'(x) = 2 \cos 2x.$$

$$\text{Câu 21. Ta có } y' = -2 \sin 4x + 12 \cos 4x.$$

$$\text{Câu 22. } f'(x) = 2 \sin 2x \cdot (\sin 2x)' + 3 \sin 3x = 2 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x + 3 \sin 3x = 2 \sin 4x + 3 \sin 3x.$$

$$\text{Câu 23. Ta có } f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - x = -\cos 2x - x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin 2x - 1.$$

$$\text{Câu 24. Ta có } f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Câu 25. Ta có } y' = (\cos 3x)' \cdot \sin 2x + \cos 3x \cdot (\sin 2x)' = -3 \sin 3x \cdot \sin 2x + 2 \cos 3x \cdot \cos 2x.$$

$$\text{Do đó } y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \sin \pi \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \pi \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 1.$$

Câu 26. Có: $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1.$
 $\Rightarrow y' = 0.$

Câu 27. Ta có: $y' = 2 \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 2 \cdot \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}.$

TOÁN 11	VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO
1D5-4.5	

PHẦN A. CÂU HỎI

DẠNG 1. VI PHÂN

- Câu 1.** Vi phân của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + 1$ là
- A. $dy = (x^2 - x + 6)dx$. B. $dy = x^2 - x + 5$.
- C. $dy = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 5\right)dx$. D. $dy = (x^2 - x + 5)dx$.
- Câu 2.** Tính vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$
- A. $df(2) = 1$. B. $df(2) = 10$. C. $df(2) = 1,1$. D. $df(2) = -1,1$.
- Câu 3.** Vi phân của hàm số $y = x \sin x + \cos x$ là
- A. $dy = (2 \sin x + x \cos x)dx$. B. $dy = x \cos x dx$.
- C. $dy = x \cos x$. D. $dy = (\sin x + \cos x)dx$.
- Câu 4.** Tìm vi phân của hàm số $y = \sqrt{1+x^2}$.
- A. $dy = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$. B. $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. C. $dy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. D. $dy = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
- Câu 5.** Vi phân của hàm số $f(x) = \frac{4x+5}{-x+1}$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,002$ là
- A. $df(2) = 0,018$. B. $df(2) = 0,002$. C. $df(2) = 9$. D. $df(2) = 0,009$.

DẠNG 2. ĐẠO HÀM CẤP CAO

- Câu 6.** (Chuyên Lào Cai Lần 3 2017-2018) Cho hàm số $y = x^5 - 3x^4 + x + 1$ với $x \in \mathbb{R}$. Đạo hàm y'' của hàm số là
- A. $y'' = 5x^3 - 12x^2 + 1$. B. $y'' = 5x^4 - 12x^3$.
- C. $y'' = 20x^2 - 36x^3$. D. $y'' = 20x^3 - 36x^2$.
- Câu 7.** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = -3 \cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
- A. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. B. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. C. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.
- Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = (3x-7)^5$. Tính $f''(2)$.
- A. $f''(2) = 0$. B. $f''(2) = 20$. C. $f''(2) = -180$. D. $f''(2) = 30$.
- Câu 9.** Cho $y = \sqrt{2x-x^2}$, tính giá trị biểu thức $A = y^3 \cdot y''$.
- A. 1. B. 0. C. -1. D. Đáp án khác.
- Câu 10.** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{3x+1}{x+2}$ là

A. $y'' = \frac{10}{(x+2)^2}$ B. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^4}$ C. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^3}$ D. $y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$

Câu 11. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos^2 x$ là

A. $y'' = -2\cos 2x$. B. $y'' = -2\sin 2x$. C. $y'' = 2\cos 2x$. D. $y'' = 2\sin 2x$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Phương trình $y'' = 0$ có nghiệm.

A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \cos x$. Khi đó $f^{(2017)}(x)$ bằng

A. $\sin x$. B. $-\cos x$. C. $\cos x$. D. $-\sin x$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Khi đó $y''(x)$ bằng

A. $y'' = \frac{1}{2}\cos 2x$. B. $P = 2\sin 2x$. C. $y'' = 2\cos 2x$. D. $y'' = 2\cos x$.

Câu 15. Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

A. $y^{(2)} = \frac{2}{x^3}$. B. $y^{(2)} = \frac{-2}{x^2}$. C. $y^{(2)} = \frac{-2}{x^3}$. D. $y^{(2)} = \frac{2}{x^2}$.

Câu 16. (CHUYÊN KHTN - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(1)$ bằng

A. 6. B. 8. C. 3. D. 2.

Câu 17. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 6) Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$. B. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$. C. $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$. D. $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.

Câu 18. (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng

A. -2. B. 2. C. $2\sqrt{3}$. D. $-2\sqrt{3}$.

Câu 19. (THPT HOÀNG HOA THÁM - HÙNG YÊN - 2018) Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8$ là kết quả nào sau đây?

A. -8. B. 0. C. 8. D. $16\sin 4x$.

Câu 20. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018) Cho hàm số $y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 454492. B. 2454493. C. 454491. D. 454490.

Câu 21. (THPT THẮNG LONG - HÀ NỘI - 2018) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Tính $f''(-1)$.

A. $-\frac{8}{27}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{8}{27}$ D. $-\frac{4}{27}$.

Câu 22. (THPT NGUYỄN ĐỨC THUẬN - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn đúng.

A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $4y - y'' = 0$. C. $4y + y'' = 0$. D. $y = y' \tan 2x$.

Câu 23. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018) Đạo hàm bậc 21 của hàm số

$f(x) = \cos(x+a)$ là

A. $f^{(21)}(x) = -\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

B. $f^{(21)}(x) = -\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

C. $f^{(21)}(x) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

D. $f^{(21)}(x) = \sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 24. (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x = 0$.

A. $f^{(6)}(0) = -60480$. B. $f^{(6)}(0) = -34560$. C. $f^{(6)}(0) = 60480$. D. $f^{(6)}(0) = 34560$.

Câu 25. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018) Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Tính $y^{(2018)}(\pi)$

A. $y^{(2018)}(\pi) = 2^{2017}$. B. $y^{(2018)}(\pi) = 2^{2018}$. C. $y^{(2018)}(\pi) = -2^{2017}$. D. $y^{(2018)}(\pi) = -2^{2018}$.

PHẦN B. LỜI GIẢI

DẠNG 1. VI PHÂN

Câu 1. Chọn B

$$dy = (x^2 - x + 5)dx.$$

Câu 2. Chọn C

$$f'(x) = 6x - 1$$

$$df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$$

Câu 3. Chọn B

$$dy = (x \sin x + \cos x)' dx = ((1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) - \sin x) dx = x \cos x dx.$$

Câu 4. Chọn B

$$\text{Ta có } dy = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \frac{1+x^{2'}}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Câu 5. Chọn A

$$f'(x) = \frac{9}{(-x+1)^2}.$$

Vi phân của hàm số $f(x) = \frac{4x+5}{-x+1}$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,002$ là

$$df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = 9 \cdot 0,002 = 0,018.$$

DẠNG 2. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Câu 6. Chọn D

$$\text{Ta có } y = x^5 - 3x^4 + x + 1 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^3 + 1 \Rightarrow y'' = 20x^3 - 36x^2.$$

Câu 7. Chọn C

$$y = -3 \cos x \Rightarrow y' = 3 \sin x; y'' = 3 \cos x.$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Câu 8. Chọn C

$$f(x) = (3x-7)^5$$

$$f'(x) = 15(3x-7)^4.$$

$$f''(x) = 180(3x-7)^3.$$

$$\text{Vậy } f''(2) = -180.$$

Câu 9. Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad y'' = \frac{-1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$$

$$\text{Do đó: } A = y^3 \cdot y'' = -1.$$

Câu 10. Chọn D

$$\text{Ta có } y = 3 - \frac{5}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2}; y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$$

Câu 11. Chọn A

$$y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x.$$

Câu 12. Chọn C

$$\text{TXĐ } D = \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x + 1, \quad y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 13. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos^{(n)}(x) &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \text{ suy ra } \cos^{(2017)}(x) = \cos\left(x + \frac{2017\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + 1008\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x. \end{aligned}$$

Câu 14. Chọn C

$$y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2 \cos 2x$$

Câu 15. Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{x^2} \text{ nên } y^{(2)} = -\frac{(x^2)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

Câu 16. $f'(x) = 3x^2 + 2, \quad f''(x) = 6x \Rightarrow f'''(1) = 6.$

Câu 17. $y = \sqrt{1+3x-x^2} \Rightarrow y^2 = 1+3x-x^2$
 $\Rightarrow 2y \cdot y' = 3-2x \Rightarrow 2 \cdot (y')^2 + 2y \cdot y'' = -2 \Rightarrow (y')^2 + y \cdot y'' = -1$

Câu 18. $y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x; \quad y'' = -2 \cos 2x; \quad y^{(3)} = -4(-\sin 2x) = 4 \sin 2x.$
 $\Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$

Câu 19. Ta có: $y = \sin^2 2x \Rightarrow y = \frac{1-\cos 4x}{2}; \quad y' = 2 \sin 4x; \quad y'' = 8 \cos 4x; \quad y^{(3)} = -32 \sin 4x.$

$$\text{Khi đó } y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8 = -32 \sin 4x + 8 \cos 4x + 32 \sin 4x + 8(1 - \cos 4x) - 8 = 0$$

Câu 20. Ta có $y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$

$$\text{Mặt khác theo quy nạp ta chứng minh được } (\sin ax)^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - ax\right)$$

$$\text{Do đó } y^{(10)}(x) = \frac{1}{2}((-1)^9 4^{10} \cdot \sin(5\pi - 4x) - (-1)^9 \cdot 2^{10} \cdot \sin(5\pi - 2x))$$

$$= \frac{1}{2}(-4^{10} \cdot \sin 4x + 2^{10} \sin 2x)$$

$$\Rightarrow y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 454490.13$$

Câu 21. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}.$$

$$\text{Khi đó } f''(-1) = -\frac{8}{27}.$$

Câu 22. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 2 \cos 2x \text{ và } y'' = -4 \sin 2x.$$

$$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0.$$

Câu 23. $f'(x) = -\sin\left(x+a\right) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = -\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+a+\frac{2\pi}{2}\right)$$

...

$$f^{(21)}(x) = \cos\left(x+a+\frac{21\pi}{2}\right) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$$

Câu 24. Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}$.

$$\text{Khi đó } f^{(6)}(x) = 6!a_6 + b_7x + b_8x^2 + \dots + b_{18}x^{12} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 720a_6.$$

$$\text{Ta có } (3x^2 - 2x - 1)^9 = -(1 + 2x - 3x^2)^9 = -\sum_{k=0}^9 C_9^k (2x - 3x^2)^k$$

$$= -\sum_{k=0}^9 C_9^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (-3x^2)^i = -\sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_9^k C_k^i 2^{k-i} (-3)^i x^{k+i}.$$

$$\text{Số hạng chứa } x^6 \text{ ứng với } k, i \text{ thỏa mãn } \begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 9 \\ k+i=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (k; i) \in \{(6; 0), (5; 1), (4; 2), (3; 3)\}$$

$$\Rightarrow a_6 = -\left[C_9^6 C_6^0 2^6 (-3)^0 + C_9^5 C_5^1 2^4 (-3)^1 + C_9^4 C_4^2 2^2 (-3)^2 + C_9^3 C_3^3 2^0 (-3)^3\right] = -84$$

$$\Rightarrow f^{(6)}(0) = 720 \cdot (-64) = -60480.$$

Câu 25. Ta có $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

$$\text{Khi đó } y' = \sin 2x; \quad y'' = 2 \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y''' = -2^2 \sin 2x = 2^2 \sin\left(2x + \pi\right) \dots$$

$$y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right].$$

$$\text{Vậy } y^{(2018)} = 2^{2017} \cdot \sin\left(2\pi + \frac{2017\pi}{2}\right) = 2^{2017} \cdot \sin\left(1010\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2^{2017}.$$

