CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

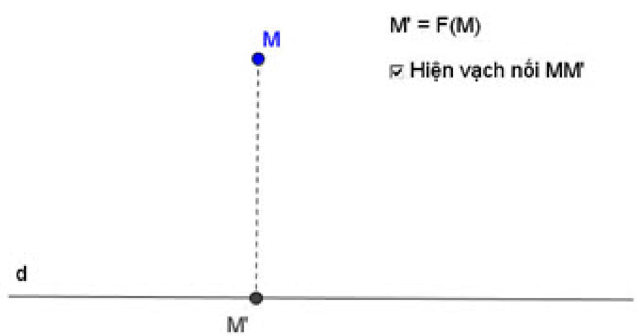
BÀI 1. PHÉP BIẾN HÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Đặt vấn đề: Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và điểm M. Dựng hình chiếu vuông góc M’ của điểm M lên đường thẳng d.

Ta đã biết rằng với mỗi điểm M có một điểm M’ duy nhất là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d cho trước (hình 1.1).



Hình 1.1

Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa: *Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M’ của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.*

Nếu kí hiệu phép biến hình là F thì ta viết F(M) = M’ hay M’ = F(M) và gọi điểm M’ là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu H ’ = F(H) là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc H. Khi đó ta nói F biến hình H thành hình H ’, hay hình H ’ là ảnh của hình H qua phép biến hình F.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

2. Biểu thức tọa độ

Gọi $M(x;y)$ là điểm nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có: $M' = f(M)$.

Với $M'(x';y')$ sao cho: $\begin{cases} x' = g(x;y) \\ y' = h(x;y) \end{cases} \quad (1)$

Hệ (1) được gọi là biểu thức tọa độ của phép biến hình f.

3. Điểm bất động của phép biến hình

- Một điểm $M \in (P)$ gọi là điểm bất động đối với phép biến hình f nếu $f(M) = M$.

- Nếu $f(M)=M$ với mọi điểm $M\in(P)$ thì f được gọi là phép đồng nhất.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép biến hình

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa hoặc biểu thức tọa độ của phép biến hình.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;-2)$, M' là ảnh của M qua phép biến hình f có biểu thức tọa độ: $\begin{cases}x'=2x+y-1\\y'=x-y+2\end{cases}$. Tìm tọa độ $(x';y')$ của M'.

Giải

Thay tọa độ điểm M vào biểu thức tọa độ của M', ta được: $\begin{cases}x'=2.1+(-2)-1=-1\\y'=1-(-2)+2=5\end{cases}$

Vậy $M'(-1;5)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x-y+1=0$. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép biến hình có biểu thức tọa độ là: $\begin{cases}x'=2x-y\\y'=3x-2y\end{cases}$.

Giải

Ta có: $\begin{cases}x'=2x-y\\y'=3x-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2x'-y'\\y=3x'-2y'\end{cases}\qquad(*)$

Thay (*) vào phương trình của d, ta được: $2x'-y'-3x'+2y'+1=0\Leftrightarrow x'-y'-1=0$.

Do đó, phương trình của d', ảnh của đường thẳng d là: $x-y-1=0$.

Dạng 2. Tìm điểm bất động của phép biến hình

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa hoặc biểu thức tọa độ của phép biến hình.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép biến hình f có biểu thức tọa độ là: $\begin{cases}x'=2x+y-1\\y'=x+2y-1\end{cases}$. Tìm các điểm bất động của phép biến hình f.

Giải

$M(x;y)$ là điểm bất động khi $M'=f(M)=M$. Do đó, nếu $M'(x';y')$ thì $\begin{cases}x'=x\\y'=y\end{cases}$.

Thay vào biểu thức tọa độ, ta được: $\begin{cases}x=2x+y-1\\y=x+2y-1\end{cases}$ hay $x+y-1=0$.

Vậy các điểm bất động của f nằm trên đường thẳng có phương trình $x+y-1=0$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M’ được xác định bởi: $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ với O là điểm cố định. Hỏi f có mấy điểm sao cho $M = f(M)$

A. Duy nhất 1 điểm

B. Ít nhất một

C. Ít nhất là hai

D. không có điểm nào

Hướng dẫn giải

Đáp án A

$M = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv M$.

Vậy có duy nhất 1 điểm có ảnh là chính nó, đó là gốc tọa độ O.

Câu 2. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M’ được xác định bởi $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ ($\vec{v}$ là vectơ cho sẵn khác $\vec{0}$). Hỏi điểm nào nằm trên đoạn thẳng AB có ảnh qua f là chính nó

A. A

B. B

C. trung điểm của AB

D. không có điểm nào

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Gọi M thuộc đoạn thẳng AB có ảnh qua f là chính nó, ta có $M = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}\left(\neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow$ không có điểm M nào.

Câu 3. Cho đường thẳng Δ cố định. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M’ sao cho $\begin{cases} MM' \perp \Delta \text{ tai } H \\ \overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{M'H} \end{cases}$ Giả sử $A' = f(A), B' = f(B)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $AB > A'B'$

B. $AB < A'B'$

C. $AB = A'B'$

D. Chỉ A đúng

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Vì $A' = f(A)$ và $B' = f(B)$ nên Δ là đường trụng trực của AA' và BB’. Trong hình thang ABB’A’, ta có $A'B' = AB$.

Câu 4. Trong hệ trục tọa độ Oxy, $\vec{a} = (1;2)$; $M(x,y); M'(x',y')$. Biểu thức tọa độ của phép biến hình f biến M thành M’ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ có công thức nào sau đây:

A. $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Vì $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ nên $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$. Điểm nào sau đây có ảnh qua f là chính nó

A. $(0;0)$ **B.** $(1;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(x \in \mathbb{R}, 0)$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

M là ảnh qua f chính là $M \Leftrightarrow M = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Ảnh của $\Delta : x + y = 0$ qua f có phương trình là:

A. $y = \frac{1}{2}x$ **B.** $(1;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(x \in \mathbb{R}, 0)$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Từ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$, thay vào $x + y = 0$

Ta có: $x' - y' = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$. Gọi $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Tính độ dài của $A'B'$ ta được:

A. 10 **B.** 3 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{10}$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Vì $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ nên A' có tọa độ $\begin{cases} x_{A'} = 1 - 2 = -1 \\ y_{A'} = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

Tương tự ta tìm được $B(-4;2)$. Do đó: $A'B' = \sqrt{10}$

Câu 8. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$. Ảnh của elip $(E): \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ qua f là (E') có phương trình

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1$ **D.** $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Vì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = x' \\ y = -\frac{y'}{2} \end{cases}$ thay vào $(E): \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ta được $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 9. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$. Ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4 = 0$ qua f có phương trình

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ **C.** $x^2 + 2y^2 = 1$ **D.** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Vì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = x' \\ y = -\frac{y'}{2} \end{cases}$ thay vào $(C): x^2 + y^2 - 4 = 0$ ta được $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$

Câu 10. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$. Gọi $M''(x'',y'')$ là ảnh của M' qua f. Tọa độ của M'' tính theo (x,y) của M là:

A. $\begin{cases} x'' = 4x \\ y'' = y \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x'' = 2x \\ y'' = y \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x'' = 3x \\ y'' = y \end{cases}$

Hướng dẫn giải

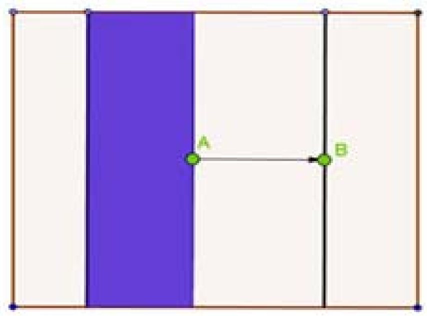
Đáp án A

Vì $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ nên $\begin{cases} x'' = 2x' \\ y'' = y' \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} x'' = 2\left(2x\right) = 4zx \\ y'' = y \end{cases}$

BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Khi đẩy một cánh cửa trượt sao cho chốt cửa dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí B ta thấy từng điểm của cánh cửa cũng được dịch chuyển một đoạn bằng AB và theo hướng từ A đến B (h.1.2). Khi đó ta nói cánh cửa được tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

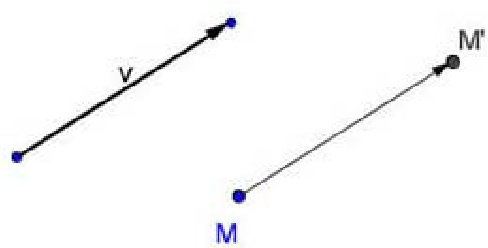


Hình 1.2

I. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được ký hiệu là $T_{\vec{v}}, \vec{v}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.



Hình 1.3

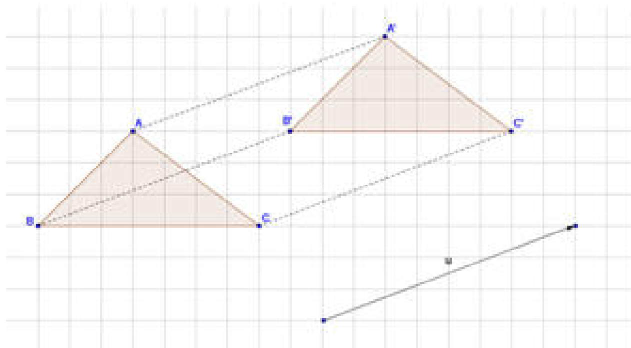
Như vậy: $T_{\vec{v}}\left(M\right) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là phép đồng nhất.

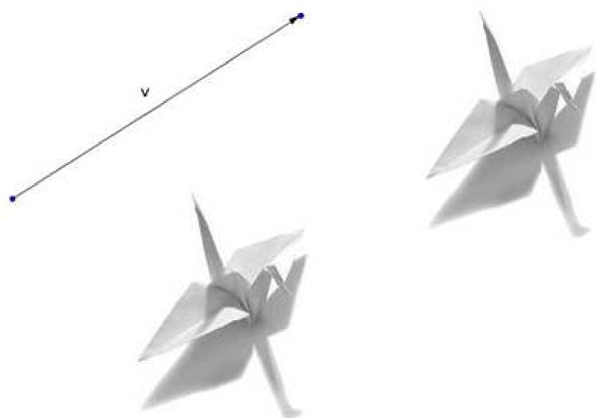
Ví dụ:

a)Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến các điểm A, B, C tương ứng thành các điểm A', B', C' (H.1.4a)

b) Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến hình H thành hình H' (h.1.4b).



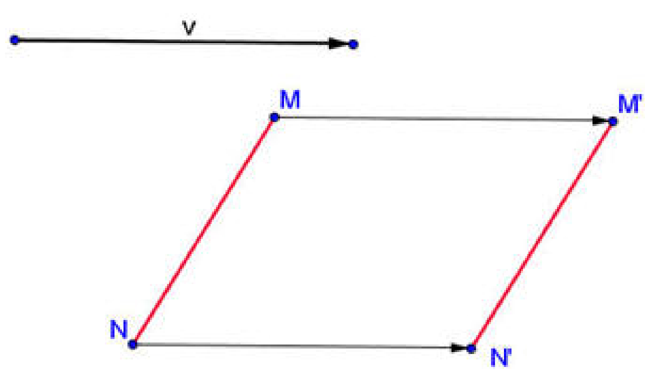
Hình 1.4 a



Hình 1.4 b

II. Tính chất

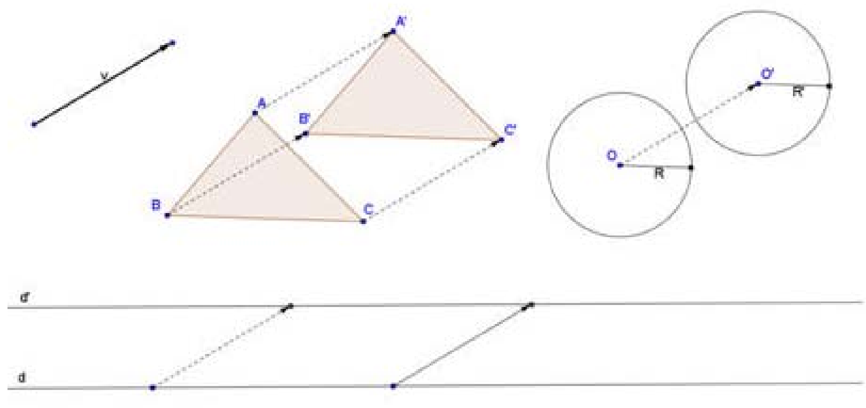
Tính chất 1. Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$



Nói cách khác, phép tính tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Từ tính chất 1 ta chứng minh được tính chất sau.

Tính chất 2

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.7).



Hình 1.7

III. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$ và vectơ $\vec{v}=(a;b)$. Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)$. Ta có:

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

Đây là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép tịnh tiến

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa, tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(2;-1)$ và đường thẳng d có phương trình $5x+3y-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1. Vì $d'=T_{\vec{v}}(d)$ nên $d'/\!/d$. Do đó $d':5x+3y+c=0$. Lấy $M(-1;2)\in d$. Khi đó $M'=T_{\vec{v}}(M)=(-1+2;2-1)=(1;1)$. Mà $M'\in d'$ nên: $5.1+3.1+c=0\Leftrightarrow c=-8$. Vậy $d':5x+3y-8=0$.

Cách 2. Ta có: $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+1 \end{cases}$

Thế x, y vào phương trình của d’, ta được: $5.(x'-2)+3.(y'+1)-1=0 \Leftrightarrow 5x'+3y'-8=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d': 5x+3y-8=0$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;2)$.

Giải

Cách 1. Biểu thức tọa độ của $T_{\vec{v}}$ là: $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-2 \end{cases}$.

Thay vào phương trình của (C) ta được:

$$(x'-3)^2+(y'-2)^2-4(x'-3)+2(y'-2)-4=0 \Leftrightarrow x'^2+y'^2-10x'-2y'+17=0$$

Vậy ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ là: $(C'): x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

Cách 2. Đường tròn có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $r=3$. Ảnh $I'=T_{\vec{v}}(I)$ có tọa độ $(x'=2+3; y'=1)=(5;1)$. Đường tròn ảnh (C’) có tâm $I'(5;1)$ và bán kính $r'=r=3$ nên có phương trình: $(x-5)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

Dạng 2. Dùng phép tịnh tiến để tìm tập hợp điểm di động

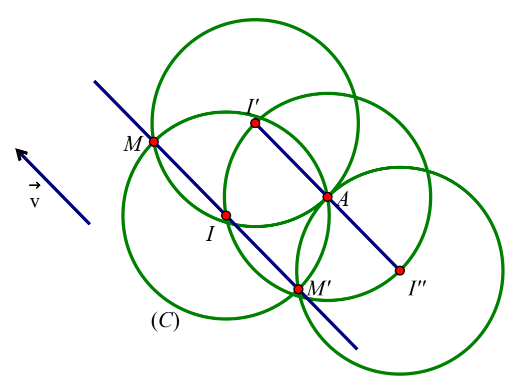
Phương pháp giải: Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép tịnh tiến.

Ví dụ: Cho đường tròn (C) qua điểm A cố định và có bán kính R không đổi. Một đường thẳng d có phương không đổi đi qua tâm I của (C). Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M và M’. Tìm tập hợp các điểm M và M’.

Giải

Tập hợp các điểm I là đường tròn (I), tâm A, bán kính R.

Vì IM có phương không đổi (phương của d) và $IM=R$ (không đổi) nên $\overrightarrow{IM}=\vec{v}$ (vectơ hằng). Do đó: $M=T_{\vec{v}}(I)$. Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn (I’), ảnh của (I) qua $T_{\vec{v}}$.



Tương tự, $\overrightarrow{IM'}=-\vec{v}$ nên $M'=T_{-\vec{v}}(I)$. Vậy tập hợp những điểm M’ là đường tròn (I’’) ảnh của (I) qua $T_{-\vec{v}}$.

Dạng 3. Dùng phép tịnh tiến để dựng hình

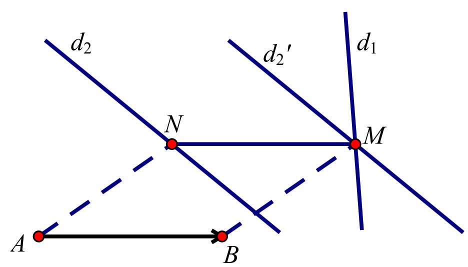
Phương pháp giải: Muốn dựng một điểm, N chẳng hạn, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định điểm M và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ sao cho $T_{\vec{v}}(M) = N$.

Bước 2. Tìm cách dựng điểm M rồi suy ra N.

Ví dụ: Cho hai điểm cố định A, B phân biệt và hai đường thẳng $d_1; d_2$ không song song với nhau. Giả sử điểm M thuộc d_1 và điểm N thuộc d_2 sao cho ABMN là hình bình hành. Hãy dựng điểm N.

Giải



Giả sử bài toán đã giải xong, ta có $M \in d_1, N \in d_2$ và ABMN là hình bình hành.

Vì ABMN là hình bình hành nên $\overline{NM} = \overline{AB}$, suy ra $M = T_{\overline{AB}}(N)$.

Gọi d_2' là ảnh của d_2 qua $T_{\overline{AB}}$ thì $M = d_1 \cap d_2'$.

Cách dựng M:

- Dựng $d_2' = T_{\overline{AB}}(d_2)$.
- Gọi $d_2' \cap d_1 = M$, M là điểm phải dựng.

Vì d_1 không song song với d_2 (giả thiết) nên d_2' cắt d_1 tại một điểm duy nhất. Bài toán luôn luôn có một lời giải.

Để dựng N, ta dựng ảnh của M trong $T_{\overline{BA}}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng d. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành chính nó?

A. Không có phép nào | **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép | **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Vectơ tịnh tiến có giá song song với d.

Câu 2. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào | **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Vì phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Vectơ tịnh tiến có giá không song song với d.

Câu 4. Cho hai đường thẳng song song a và a', một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng a' và biến đường thẳng c thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử c cắt a và a' tại A và A'. Vectơ tịnh tiến phải là $\overrightarrow{AA'}$.

Câu 5. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a // a', b // b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng a' và biến mỗi đường thẳng b và b' thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử b cắt a và a' tại A và A'. Vectơ tịnh tiến phải là $\overrightarrow{AA'}$.

Câu 6. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a // a', b // b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử a và b cắt nhau tại M, a’ và b’ cắt nhau tại M’. Vectơ tịnh tiến phải là $\overrightarrow{MM'}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đồ thị của hàm số $y = \sin x$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đồ thị đó thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Các phép tịnh tiến theo vectơ $2k\pi$, với k là số nguyên.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{u}(3;-1)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1;-4)$ thành:

A. điểm $M'(4;-5)$

B. điểm $M'(-2;-3)$

C. điểm $M'(3;-4)$

D. điểm $M'(4;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phải có $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(3;2)$ thành điểm $A'(2;3)$ thì nó biến điểm $B(2;5)$ thành:

A. điểm $B'(5;2)$

B. điểm $B'(1;6)$

C. điểm $B'(5;5)$

D. điểm $B'(1;1)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phải có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $M(4;2)$ thành điểm $M'(4;5)$ thì nó biến điểm $A(2;5)$ thành:

A. điểm $A'(5;2)$ **B.** điểm $A'(1;6)$ **C.** điểm $A'(2;8)$ **D.** điểm $A'(2;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phải có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(4;6)$ biến đường thẳng a có phương trình $x+y-1=0$ thành:

A. đường thẳng $x+y+9=0$

B. đường thẳng $x+y-9=0$

C. đường thẳng $x-y+9=0$

D. đường thẳng $-x+y+9=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến đó biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'-x=4$ và $y'-y=6$ hay $x=x'+4$ và $y=y'+6$. Nếu $M\in a$ thì $x+y+1=0$ nên $x'+4+y'+6-1=0$ hay $x'+y'+9=0$. Vậy M' nằm trên đường thẳng $x+y+9=0$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(3;0)$ thì nó biến đường thẳng nào sau đây thành chính nó?

A. $x+y-1=0$ **B.** $x-y-100=0$ **C.** $2x+y-4=0$ **D.** $2x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}=(1;1)$, đường thẳng biến thành chính nó khi và chỉ khi nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(1;2)$ thì nó biến đường thẳng a có phương trình $2x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $2x-y+1=0$ **B.** $2x-y=0$ **C.** $2x-y+6=0$ **D.** $2x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lấy điểm $M(0;1)$ nằm trên a, M biến thành $M'(-1;4)$ mà M' nằm trên đường thẳng có phương trình $2x-y+6=0$ nên đó là đường thẳng ảnh của a.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x-2y=0$ và $3x-2y+1=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}(-1;-1)$ **B.** $\vec{u}(1;-1)$ **C.** $\vec{u}(1;-2)$ **D.** $\vec{u}(-1;2)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Lấy điểm $O(0;0)$ nằm trên a, một điểm $M(x;y)$ nằm trên a' nếu $3x-2y+1=0$.

Vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(x;y)$ với điều kiện $3x-2y+1=0$. Vectơ $\vec{u}(-1;-1)$ ở phương án A thỏa mãn điều kiện đó.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $2x-3y-1=0$ và $2x-3y+5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây **không** biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}(0;2)$ **B.** $\vec{u}(-3;0)$ **C.** $\vec{u}(3;4)$ **D.** $\vec{u}(1;-1)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu vectơ tịnh tiến là $\vec{u}(a;b)$ thì điểm $M(x;y)$ biến thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+a$, $y'=y+b$ hay $x=x'-a, y=y'-b$. Vậy đường thẳng $2x-3y-1=0$ biến thành đường thẳng $2(x'-a)-3(y'-b)-1=0$ hay $2x'-3y'-2a+3b-1=0$. Muốn đường thẳng này trùng với đường thẳng $a':2x-3y+5=0$ ta phải có $-2a+3b-1=5$ hay $-2a+3b=6$. Vectơ $\vec{u}$ ở phương án D không thỏa mãn điều kiện đó.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x-4y+5=0$ và $3x-4y=0$. Phép tịnh tiến theo $\vec{u}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Khi đó độ dài bé nhất của vectơ $\vec{u}$ bằng bao nhiêu?

A. 5 **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng a và a'.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng a có phương trình $3x-2y-5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(1;-2)$ biến đường thẳng đó thành đường thẳng a' có phương trình:

A. $3x-2y-4=0$ **B.** $3x+2y=0$ **C.** $3x-2y+10=0$ **D.** $3x-2y-7=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến có biểu thức tọa độ $x'=x+1; y'=y-2$. Như vậy $x=x'-1; y=y'+2$, thay vào phương trình của a ta được phương trình của a’ là $3(x'-1)-2(y'-2)-5=0$, vậy a’ có phương trình $3x-2y-4=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol có đồ thị $y=x^2$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(2;-3)$ biến parabol đó thành đồ thị của hàm số:

A. $y=x^2+4x+1$ **B.** $y=x^2-4x+1$ **C.** $y=x^2-4x-1$ **D.** $y=x^2+4x-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép tịnh tiến biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ mà $x=x'-2; y=y'+3$ nếu M thuộc parabol đã cho thì $y'+3=(x'-2)^2$ hay $y'=x'^2-4x'+1$. Vậy M thuộc parabol có đồ thị như phương án B.

Câu 19. Cho hai đường thẳng song song a và b. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Không tồn tại phép tịnh tiến nào biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

C. Có đúng hai phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

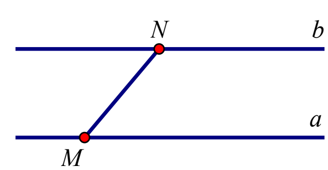
D. Có vô số phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trên các đường thẳng a và b ta lần lượt lấy các điểm M và N bất kì.

Ta thấy ngay phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b.



Câu 20. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Hợp của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u}$ là một phép đồng nhất.

B. Hợp của hai phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}+\vec{v}$.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ là một phép dời hình không có điểm bất động.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ luôn biến đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Giả sử ta có phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm M thành điểm M_1 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến điểm M_1 thành điểm M_2. Ta có: $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$.

Do đó $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{u} + \vec{v}$.

Như thế phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ biến M thành M_2.

Vậy: Hợp của hai phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

+ Hợp của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u}$ theo kết quả trên là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0}$, đó là một phép đồng nhất.

+ Câu D sai vì: Nếu Δ là đường thẳng song song với giá của vectơ $\vec{u}$ thì ảnh của Δ là chính nó.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , ta xét phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \left(a;b\right)$ biến điểm $M\left(x;y\right)$ thành điểm $M'\left(x';y'\right)$. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến này là:

A. $\begin{cases} x' = x + b \\ y' = y + a \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x' = y + a \\ y' = x + b \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 22. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M\left(x;y\right)$ thành điểm $M'\left(x';y'\right)$ sao cho $x' = 2x;\ y' = -y + 2$. Phép biến hình f biến đường thẳng $\Delta: x + 3y + 5 = 0$ thành đường thẳng d có phương trình là:

A. $x + 2y - 4 = 0$ **B.** $x - 6y + 22 = 0$ **C.** $2x - 4y + 5 = 0$ **D.** $3x + 2y - 4 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra: $x = \frac{x'}{2}$ và $y = -y' + 2$.

Thế vào phương trình của Δ ta được: $\frac{x'}{2} + 3\left(-y' + 2\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow x' - 6y' + 22 = 0$.

Vậy ảnh của Δ là đường thẳng có phương trình $x - 6y + 22 = 0$.

Câu 23. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+2y;\ y'=-2x+y+1$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC với $A(1;2), B(-2;3), C(4;1)$. Phép biến hình f biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(5;1)$ **B.** $(-3;4)$ **C.** $(8;3)$ **D.** $(0;6)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trọng tâm của ΔABC là $G(1;2)$. Gọi G' là ảnh của G ta có: $G'(1+2.2;-2.1+2+1)=(5;1)$.

Câu 24. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+2y;\ y'=-2x+y+1$. Xét hai điểm $A(-1;2)$ và $B(5;4)$. Phép biến hình f biến trung điểm I của đoạn thẳng AB thành điểm I' có tọa độ là:

A. $(8;0)$ **B.** $(-3;2)$ **C.** $(6;-8)$ **D.** $(-8;2)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(2;3)$. Gọi I' là ảnh của I ta có: $I'=(2+2.3;-2.2+3+1)=(8;0)$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $4x-y+3=0$. Ảnh của đường thẳng qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(2;-1)$ có phương trình là:

A. $4x-y+5=0$ **B.** $4x-y+10=0$ **C.** $4x-y-6=0$ **D.** $x-4y-6=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'+1 \end{cases}$

Thế vào phương trình của Δ ta được: $4(x'-2)-(y'+1)+3=0 \Leftrightarrow 4x'-y'-6=0$.

Vậy ảnh của Δ là đường thẳng Δ' có phương trình: $4x-y-6=0$.

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(3;2)$ biến (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-6x+11$ **B.** $y=x^2-4x+3$ **C.** $y=x^2+4x+6$ **D.** $y=x^2+2x-4$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $y' - 2 = (x' - 3)^2 \Leftrightarrow y' = x'^2 - 6x' + 11$.

Vậy ảnh của (P) là parabol (P') có phương trình: $y = x^2 - 6x + 11$.

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho T là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ với biểu thức tọa độ là: $x = x' + 3;\ y = y' - 5$. Tọa độ của vectơ tịnh tiến $\vec{u}$ là:

A. $(5;-3)$ **B.** $(3;5)$ **C.** $(-3;5)$ **D.** Một kết quả khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết ta có: $(x = x' + 3;\ y = y' - 5) \Leftrightarrow (x' = x - 3;\ y' = y + 5)$.

Suy ra: $\vec{u} = (-3;5)$.

Câu 28. Cho hai hình vuông H_1 và H_2 bằng nhau. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Luôn có thể thực hiện được một phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

C. Có nhiều nhất hai phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

D. Có vô số phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi I và J là tâm của H_1 và H_2.

+ Nếu H_1 và H_2 có các cạnh không song song thì không tồn tại phép tịnh tiến nào biến hình vuông này thành hình vuông kia.

+ Nếu H_1 và H_2 có các cạnh tương ứng song song thì các phép tịnh tiến theo các vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{JI}$ sẽ biến hình vuông này thành hình vuông kia.

+ Không thể có nhiều hơn hai phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

Câu 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol: $(P): y = x^2$ và $(Q): y = x^2 + 2x + 2$. Để chứng minh có một phép tịnh tiến T biến (Q) thành (P), một học sinh lập luận qua ba bước như sau:

1. Gọi vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=(a;b)$, áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến:

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$$

2. Thế vào phương trình của (Q) ta được:

$$y'-b=(x'-a)^2+2(x'-a)+2 \Leftrightarrow y'=x'^2+2(1-a)x'+a^2-2a+b+2$$

   Suy ra ảnh của (Q) qua phép tịnh tiến T là parabol (R) $y=x^2+2(1-a)x+a^2-2a+b+2$

3. Buộc (R) trùng với (P) ta được hệ: $\begin{cases} 2(1-a)=0 \\ a^2-2a+b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

   Vậy có duy nhất một phép tịnh tiến biến (Q) thành (P), đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1;-1)$.

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Lập luận hoàn toàn đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta xét phép biến hình f biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ định bởi: $\begin{cases} x'=-y+a \\ y'=x+b \end{cases}$, trong đó a và b là các hằng số.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. f biến gốc tọa độ O thành điểm $A(a;b)$.

B. f biến điểm $I(b;-a)$ thành gốc tọa độ O.

C. f là một phép biến hình không có gì đặc sắc.

D. f là một phép dời hình.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay hai câu (A) và (B) đều đúng.

Gọi $M(\alpha;\beta)$ và $N(u;v)$ là hai điểm bất kì; $M'(\alpha';\beta')$ và $N'(u';v')$ là các ảnh của M, N qua phép biến hình f.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} \alpha' = -\beta + a \\ \beta' = \alpha + b \end{cases}$ và $\begin{cases} u' = -v + a \\ v' = u + b \end{cases}$

Do đó: $M'N'^2 = \left[(-v+a) - (-\beta+a)^2 \right] + \left[(u+b) - (\alpha+b)^2 \right]$

$$M'N'^2 = (\beta - v)^2 + (u-\alpha)^2 = (u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 = MN^2$$

Suy ra: $M'N' = MN$

Vậy f là một phép dời hình.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $3x - 4y + 1 = 0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $3x - 4y + 5 = 0$ **B.** $3x - 4y - 2 = 0$ **C.** $3x - 4y + 3 = 0$ **D.** $3x - 4y - 10 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{i} = (1;0)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $3(x-1) - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 2 = 0$.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x - y + 3 = 0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái hai đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $2x - y + 7 = 0$ **B.** $2x - y - 2 = 0$ **C.** $2x - y + 8 = 0$ **D.** $2x - y - 6 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái 2 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-2;0)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $2(x+2) - y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 7 = 0$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y = 5x - 3$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y = 5x + 4$ **B.** $y = 5x - 12$ **C.** $y = 5x$ **D.** $y = 5x - 7$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;3)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $y-3=5x-3 \Leftrightarrow y=5x$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-4x+3$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 4 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=-4x+14$ **B.** $y=-4x+1$ **C.** $y=-4x-2$ **D.** $y=-4x-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 4 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;-4)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $y+4=-4x+3 \Leftrightarrow y=-4x-1$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $5x-y+1=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về phía trái 2 đơn vị, sau đó tiếp tục thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $5x-y+14=0$ **B.** $5x-y-7=0$ **C.** $5x-y+5=0$ **D.** $5x-y-12=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Từ giả thiết suy ra Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-2;3)$.

Do đó đường thẳng Δ' có phương trình là: $5(x+2)-(y-3)+1=0 \Leftrightarrow 5x-y+14=0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-3x+2$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=(-1;2)$ và $\vec{v}=(3;1)$, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng d có phương trình là:

A. $y=-3x+1$ **B.** $y=-3x-5$ **C.** $y=-3x+9$ **D.** $y=-3x+15$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra d là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(-1+3;2+1) \Rightarrow \vec{a}=(2;3)$

Do đó đường thẳng có phương trình là: $y-3=-3(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+9$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 - 2x + 3$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-1;2)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = x^2 + 4$ **B.** $y = x^2 + 4 - 3$ **C.** $y = x^2 + 2x + 2$ **D.** $y = x^2 - 4x + 5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến, ta có: $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $y' - 2 = (x' + 1)^2 - 2(x' + 1) + 3 \Leftrightarrow y' = x'^2 + 4$.

Vậy phương trình của (P') là: $y = x^2 + 4$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = -2x^2 + x - 1$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 2 đơn vị, biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = -2x^2 + 9x - 11$ **B.** $y = -2x^2 - x + 3$ **C.** $y = -2x^2 + 3x + 2$ **D.** $y = -2x^2 - 5x + 6$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 2 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2;0)$. Do đó phương trình của (P') là: $y = -2(x - 2)^2 + (x - 2) - 1 \Leftrightarrow y = -2x^2 + 9x - 11$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = -x^2 + 2x + 3$. Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về dưới 3 đơn vị, biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = -x^2 + 2x$ **B.** $y = -x^2 + 5x - 2$ **C.** $y = -x^2 - 3x + 4$ **D.** $y = -x^2 + 7x + 5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về bên dưới 3 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (0;-3)$.

Do đó phương trình của (P') là: $y + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về phía trái 3 đơn vị, sau đó tiếp tục thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 1 đơn vị. Ảnh của (P) là một parabol (Q) có phương trình là:

A. $y=x^2+4x-3$ **B.** $y=x^2+6x+8$ **C.** $y=x^2-2x+3$ **D.** $y=x^2-8x+5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra: (Q) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\left(-3;-1\right)$.

Do đó phương trình của (P') là: $y+1=\left(x+3\right)^2 \Leftrightarrow y=x^2+6x+8$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-x+1$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=\left(1;-2\right)$ và $\vec{v}=\left(2;3\right)$, parabol (P) biến thành parabol (Q) có phương trình là:

A. $y=x^2-7x+14$ **B.** $y=x^2+3x+2$ **C.** $y=x^2+5x+2$ **D.** $y=x^2-9x+5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Từ giả thiết ta suy ra, (Q) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=\left(3;1\right)$.

Do đó phương trình của (Q) là: $y-1=\left(x-3\right)^2-\left(x-3\right)+1 \Leftrightarrow y=x^2-7x+14$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $y=x^2$ và $y=x^2-2x+3$. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Không thể thực hiện được một phép tịnh tiến nào biến parabol này thành parabol kia.

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến parabol này thành parabol kia.

C. Có đúng hai phép tịnh tiến biến parabol này thành parabol kia.

D. Có vô số phép tịnh tiến biến parabol này thành parabol kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Theo giả thiết (P): $y=x^2$ và (Q): $y=x^2-2x+3$.

Phương trình của (Q) có thể viết lại thành: $y=\left(x-1\right)^2+2$

Parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ O và parabol (Q) có đỉnh là $I\left(1;2\right)$. Như thế, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{OI}$ biến (P) thành (Q) và phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u}=\overrightarrow{IO}$ biến (Q) thành (P).

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x-8=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(3;-1)$, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T’) có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x+2y+8=0$ **B.** $x^2+y^2+4x-y-5=0$

C. $x^2+y^2-4x+4y-3=0$ **D.** $x^2+y^2+6x-4y+2=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'+1 \end{cases}$

Thế vào phương trình của (T) ta có: $(x'-3)^2+(y'+1)^2-2(x'-3)-8=0 \Leftrightarrow x'^2+y'^2-8x'+2y'+8=0$.

Vậy phương trình của (T’) là: $x^2+y^2-8x+2y+8=0$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của (T). Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(5;-1)$ biến điểm I thành điểm I’ có tọa độ là:

A. $(-7;2)$ **B.** $(7;0)$ **C.** $(3;-2)$ **D.** $(5;3)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phương trình đường tròn (T) viết lại: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

Như thế (T) có tâm $I(2;1)$.

Suy ra, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(5;-1)$ biến điểm I thành điểm $I'(7;0)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (T_1) và (T_2) bằng nhau có phương trình lần lượt là $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ và $(x+3)^2+(y-4)^2=16$. Giả sử f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến (T_1) thành (T_2), khi đó tọa độ của $\vec{u}$ là:

A. $(-4;6)$ **B.** $(4;-6)$ **C.** $(3;-5)$ **D.** $(8;-10)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai đường tròn (T_1) và (T_2) có tâm lần lượt là: $I_1(1;-2)$ và $I_2(-3;4)$.

Vậy phép tịnh tiến T biến $\left(T_1\right)$ thành $\left(T_2\right)$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{I_1I_2}=\left(-4;6\right)$.

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-x-2y-3=0$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 4 đơn vị, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-9x-2y+17=0$ **B.** $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

C. $x^2+y^2+5x-4y-5=0$ **D.** $x^2+y^2+7x-2y+1=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 4 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\left(4;0\right)$. Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình: $\left(x-4\right)^2+y^2-\left(x-4\right)-2y-3=0\Leftrightarrow x^2+y^2-9x-2y+17=0$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-x-2y-3=0$. Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về dưới 2 đơn vị, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2y-9=0$ **B.** $x^2+y^2-2x+6y+2=0$

C. $x^2+y^2+x-4y-5=0$ **D.** $x^2+y^2+2x-7=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 2 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\left(0;-2\right)$. Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình: $x^2+\left(y+2\right)^2+2x-4\left(y+2\right)-3=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-7=0$.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+4x-6y-5=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=\left(1;-2\right)$ và $\vec{v}=\left(1;-1\right)$. Đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-18=0$ **B.** $x^2+y^2-x+8y+2=0$

C. $x^2+y^2+x-6y-5=0$ **D.** $x^2+y^2-4y-4=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=(1;-2)$ và $\vec{v}=(1;-1)$ tức là thực hiện theo phép tịnh tiến vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(1+1;-2-1)=(2;-3)$.

Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình: $(x-2)^2+(y+3)^2+4(x-2)-6(y+3)-5=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-18=0$.

Câu 49. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm A, B phân biệt. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Khi đó tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ là tập nào sau đây?

A. Tập $\varnothing$.

B. Đường tròn tâm A bán kính R.

C. Đường tròn tâm B bán kính R.

D. Đường tròn tâm I bán kính R với $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải

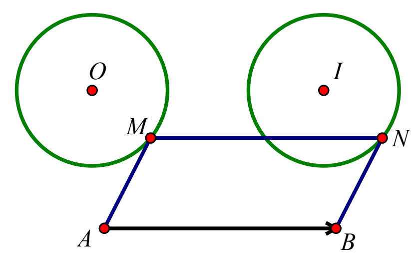
ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$

Như thế phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích của N là đường tròn $(I;R)$ với $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AB}$.



Câu 50. Cho đoạn thẳng AB và đường thẳng Δ không song song với đường thẳng AB. Một điểm M thay đổi trên Δ. Khi đó tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}$ là tập nào sau đây?

A. Tập $\varnothing$.

B. Đường thẳng qua A song song với Δ.

C. Đường thẳng qua B song song với Δ.

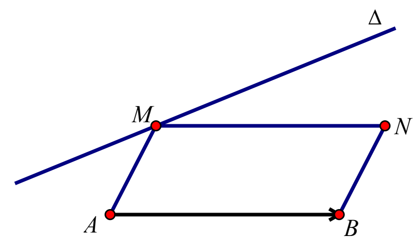
D. Đường thẳng ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$



Như thế phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường thẳng Δ thì quỹ tích của N là đường thẳng Δ' ảnh của Δ qua phép tịnh tiến trên.

Câu 51. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD bằng nhau thi luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến đoạn thẳng này thành đoạn thẳng kia.

B. Nếu có hai tam giác đều ABC và DEF bằng nhau thì luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

C. Nếu có hai hình vuông ABCD và MNPQ bằng nhau thì luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

D. Nếu có hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ bằng nhau thì luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

+ Nếu hai đoạn thẳng AB và CD bằng nhau và nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì mới thực hiện được một phép tịnh tiến biến đoạn thẳng này thành đoạn thẳng kia.

+ Nếu có hai tam giác đều ABC và DEF bằng nhau và có các cặp cạnh nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì mới thực hiện được phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

+ Trường hợp hai hình vuông bằng nhau cũng giống như hai tam giác bằng nhau.

+ Với hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ ta luôn thực hiện được hai phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$ hoặc vectơ $\overrightarrow{O'O}$ biến đường tròn này thành đường tròn kia.

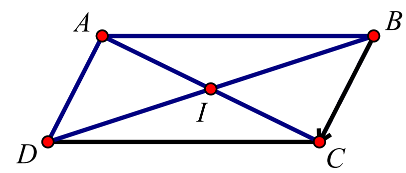
Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD với $A(1;4)$, $B(-2;1)$, $C(7;-1)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là:

A. $(-9;3)$ **B.** $(5;-4)$ **C.** $(9;-2)$ **D.** $(8;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Dễ thấy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (9;-2)$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD.



Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD với $A(1;-4)$, $B(8;2)$ và giao điểm của hai đường chéo AC và BD là $I(3;-2)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là:

A. $(3;12)$ **B.** $(5;3)$ **C.** $(-3;-2)$ **D.** $(7;-5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Do I là trung điểm của AC nên ta có: $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 6 - 1 = 5 \\ y_C = 2y_I - y_A = -4 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (-3;-2)$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng song song a và b có phương trình lần lượt là $2x - y + 4 = 0$ và $2x - y - 1 = 0$. Nếu phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = (m;-3)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b thì giá trị của m bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trên đường thẳng a ta lấy điểm $A(0;4)$. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = (m;-3)$ biến điểm A thành điểm A’ định bởi: $\begin{cases} x' = 0 + m \\ y' = 4 + (-3) \end{cases} \Rightarrow A'(m;1)$.

Vì T biến a thành b nên: $A' \in b \Leftrightarrow 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

BÀI 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Định nghĩa

1. – Cho đường thẳng d. Phép đối xứng qua đường thẳng d, kí hiệu là $Đ_d$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua d (Khi đó d là đường trung trực của đoạn MM').

- Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi đơn giản là phép đối xứng trục.
- Đường thẳng d gọi là trục của phép đối xứng, hay đơn giản là trục đối xứng.
- Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d. Ta có: $Đ_d(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$.

2. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu $Đ_d$ biến (H) thành chính nó. Khi đó (H) gọi là hình có trục đối xứng.

II. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $M(x;y)$ và $M' = Đ_d(M) = (x';y')$.

- Nếu d là trục Ox thì: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$.
- Nếu d là trục Oy thì: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

III. Tính chất

Phép đối xứng trục:

1. Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm tương ứng.
3. Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
4. Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
5. Biến một đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính của đường tròn đã cho.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng trục

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa, tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $M(-4;3)$ và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$. Tìm ảnh của M và d qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là d_1 là đường thẳng $2x + y - 1 = 0$.

Giải

- Gọi $d' = Đ_{d_1}(d)$. Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;1)$, vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (-1;2)$.

Ta có: $\vec{u}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Rightarrow d \perp d_1$.

Vậy: $d' \perp d_1$ và d' trùng với d.

- Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với $d_1: 2x + y - 1 = 0$, thì $\Delta: x - 2y + c = 0$.

Cho Δ qua $M(-4;3)$, ta có: $x = 10$. Vậy $\Delta: x - 2y + 10 = 0$.

Gọi I là giao điểm của Δ và d_1 thì tọa độ của I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 10 = 0 \end{cases}$.

Suy ra $I\left(-\frac{8}{5}; \frac{21}{5}\right)$. Mà I là trung điểm của MM' nên $M'\left(\frac{4}{5}; \frac{27}{5}\right)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và đường elip $(E): x^2 + 4y^2 = 1$.

a. Tìm ảnh của (C) qua $Đ_d$ với $d: x + y = 0$.

b. Tìm ảnh của (E) qua $Đ_{Oy}$.

Giải

a. Ảnh của (C) qua $Đ_d$: Gọi Δ là đường thẳng qua $I(-1;2)$ và vuông góc với $d: x + y = 0$, ta có $\Delta: x - y + 3 = 0$.

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là: $H\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Gọi $I' = Đ_d(I)$, ta có: $\begin{cases} x' = 2x_H - x \\ y' = 2y_H - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Do đó: $I'(-2;1)$.

Mặt khác, (C') có bán kính $R' = 3$ nên $(C'): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

b. Ảnh (E') của (E) qua $Đ_{Oy}$: Biểu thức tọa độ của $Đ_{Oy}$ là: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$.

Do đó, $(E'): (-x')^2 + 4y'^2 = 1$ hay $x^2 + 4y^2 = 1$.

Cách khác: (E) có trục đối xứng là Oy, nên (E) không đổi qua $Đ_{Oy}$. Do đó $(E'): x^2 + 4y^2 = 1$.

Dạng 2. Tìm trục đối xứng của một hình

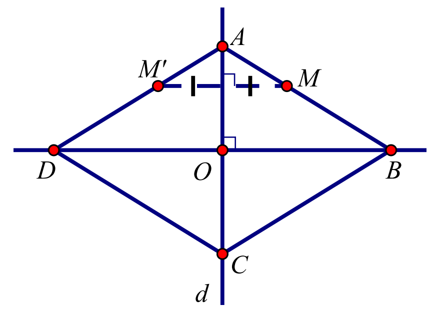
Phương pháp giải: Dùng định nghĩa trục đối xứng của một hình, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Chỉ ra một đường thẳng d là trục đối xứng của hình (H).

Bước 2. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc hình (H), ảnh M' của M qua $Đ_d$ cũng thuộc (H).

Ví dụ 1: Tìm các trục đối xứng của hình thoi.

Giải



Cho hình thoi ABCD. Đặt ABCD là (H) và đường thẳng AC là d, ta có:

Với mọi điểm M thuộc cạnh AB thì $M \in (H)$.

Vì d là trung trực của đoạn thẳng BD nên ảnh M' của M qua $Đ_d$ thuộc cạnh AD. Do đó, $M' \in (H)$.

Tương tự,, nếu $M \in BC \Rightarrow M' \in DC \Rightarrow M' \in (H)$.

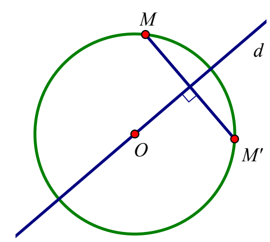
Tóm lại với mọi M thuộc hình thoi ABCD thì ảnh M' của M qua $Đ_{AC}$ thuộc hình thoi ABCD. Vậy, AC là trục đối xứng của hình thoi ABCD.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh BD là trục đối xứng của hình thoi ABCD.

Tóm lại, hình thoi có hai trục đối xứng, đó là hai đường chéo của nó.

Ví dụ 2. Tìm các trục đối xứng của một hình tròn.

Giải



Gọi d là một đường thẳng đi qua tâm đường tròn. Với mọi điểm M thuộc đường tròn ta vẽ dây $MM' \perp d$ thì M' là ảnh của M qua $Đ_d$. Suy ra, d là trục đối xứng của đường tròn.

Dạng 3. Tìm tập hợp điểm

Phương pháp giải:

Bước 1. Chọn $Đ_d : M \mapsto M'$.

Bước 2. Xác định tập hợp điểm M, suy ra tập hợp điểm M'.

Ví dụ: Cho hình vuông ABCD có A và C cố định, B di động trên một đường tròn (C) cho trước. Tìm tập hợp những điểm D.

Giải

Ta có: $Đ_{AC} : B \mapsto D$. Mà $B \in (C)$ nên $D \in (C')$, ảnh của (C) qua $Đ_{AC}$.

Vậy tập hợp những điểm D là đường tròn (C'), ảnh của (C) qua $Đ_{AC}$.

Dạng 4. Dùng phép đối xứng trục để dựng hình

Phương pháp giải:

Bước 1. Xác định $Đ_d : M \mapsto M'$.

Bước 2. Xác định M, suy ra M' (hoặc ngược lại) bằng $Đ_d$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng cho đường thẳng d cố định và hai điểm A, B cố định, phân biệt nằm hai bên đường thẳng d. Hãy dựng điểm M trên d sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Giải

Gọi $B' = Đ_d(B)$. Với điểm M tùy ý trên d, ta có: $|MA - MB| = |MA - MB'| \le AB'$.

Do đó: $|MA - MB|_{max} \Leftrightarrow |MA - MB| = AB' \Leftrightarrow A, M, B'$ thẳng hàng.

Cách dựng: - Dựng $B' = Đ_d(B)$.

- Giao điểm của d và AB' là điểm phải dựng.

Bài toán có một nghiệm duy nhất khi AB' không song song với d.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến một đường thẳng d cho trước thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là d hoặc bất kì đường thẳng nào vuông góc với d.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục đối xứng là bất kì đường thẳng nào vuông góc với d và d'.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trục đối xứng là đường thẳng song song và cách đều d và d’.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d’. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. Không có phép nào | **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép | **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng d và d’.

Câu 5. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào | **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép | **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép đối xứng qua đường thẳng d.

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b và biến c thành chính nó?

A. Không có phép nào | **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép | **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trục đối xứng là đường thẳng song song, cách đều d và d’.

Câu 7. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c không vuông góc với chúng cũng không song song với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào | **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép | **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 8. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c không vuông góc và cũng không song song với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b và biến c thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 9. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a // a', b // b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Chỉ có một phép đối xứng trục biến a thành a', nhưng phép đó không biến b thành b'.

Câu 10. Trong các hình dưới đây, hình nào có một và chỉ một trục đối xứng?

A. Đường elip.

B. Đường tròn.

C. Đường hypebol.

D. Đường parabol.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 11. Trong các hình dưới đây, hình nào có ba trục đối xứng?

A. Đoạn thẳng.

B. Đường tròn.

C. Tam giác đều.

D. Hình vuông.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 12. Trong các hình dưới đây, hình nào có bốn trục đối xứng?

A. Hình bình hành.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình thoi.

D. Hình vuông.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 13. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có trục đối xứng?

A. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau.

B. Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tùy ý.

C. Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tùy ý.

D. Hình gồm một tam giác cân và đường tròn nội tiếp.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 14. Trong các hình dưới đây hình nào **không** có vô số trục đối xứng?

A. Đường tròn. **B.** Đường thẳng.

C. Hình gồm hai đường thẳng song song. **D.** Hình đa giác đều n cạnh.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Hình đa giác đều n cạnh có n trục đối xứng.

Câu 15. Trong các hình dưới đây hình nào **không** có trục đối xứng?

A. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$. **B.** Đồ thị của hàm số $y = \cos x$.

C. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$. **D.** Đồ thị của hàm số $y = |x|$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng trục biến điểm $A(2;1)$ thành $A'(2;5)$ có trục đối xứng là:

A. Đường thẳng $y = 3$. **B.** Đường thẳng $x = 3$.

C. Đường thẳng $y = 6$. **D.** Đường thẳng $x + y - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trục đối xứng là trung trực của AA’.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(1;-4)$ thành điểm $M'(-4;1)$ thì nó có trục đối xứng là:

A. Đường thẳng $x+y=0$.

B. Đường thẳng $x-y=0$.

C. Đường thẳng $x+y-1=0$.

D. Đường thẳng $x-y-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trục đối xứng là trung trực của MM'.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(2;3)$ thành điểm $M'(3;2)$ thì nó biến điểm $C(1;-6)$ thành điểm:

A. $C'(6;1)$.

B. $C'(1;6)$.

C. $C'(-6;-1)$.

D. $C'(-6;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là đường thẳng $y=x$. Phép đối xứng đó biến điểm $M(a;b)$ thành điểm $M'(b;a)$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(3;1)$ thành điểm $M'(-1;-3)$ thì nó biến điểm $N(-3;-4)$ thành điểm:

A. $N'(3;4)$.

B. $N'(3;-4)$.

C. $N'(4;-3)$.

D. $N'(4;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là đường thẳng $y=-x$. Phép đối xứng đó biến điểm $M(a;b)$ thành điểm $M'(-b;-a)$.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $A(0;1)$ thành điểm $A'(-1;0)$ thì nó biến điểm $B(-5;5)$ thành điểm:

A. $B(-5;5)$.

B. $B'(5;5)$.

C. $B'(5;-5)$.

D. $B'(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ biến đường thẳng $4x-5y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $-4x+5y+1=0$.

B. $5x-4y+1=0$.

C. $5x+4y+1=0$.

D. $4x+5y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ là $x'=-y$ và $y'=-x$. Bởi vậy từ phương trình $4x-5y+1=0$ ta suy ra $-4y'+5x'+1=0$.

Vậy đường thẳng $4x-5y+1=0$ biến thành đường thẳng $5x-4y+1=0$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x-y=0$ biến đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn có phương trình:

A. $x^2+y^2-2y-1=0$.

B. $x^2+y^2+2x-1=0$.

C. $x^2+y^2+2y-1=0$.

D. $x^2+y^2-2x-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng đã cho là $x'=y$ và $y'=x$. Bởi vậy, từ phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ ta suy ra $y'^2+x'^2-2y'-1=0$, đó là tập hợp những điểm $(x';y')$ thỏa mãn phương trình đường tròn $x^2+y^2-2y-1=0$.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. Phép đối xứng qua trục Ox biến đường tròn đó thành đường tròn (C’) có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0$.

B. $x^2+y^2-2x-3y-1=0$.

C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0$.

D. $x^2+y^2-2x+3y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Chỉ việc thay y bằng $-y$ trong phương trình đường tròn đã cho.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. Phép đối xứng qua trục Oy biến đường tròn đó thành đường tròn (C’) có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0$.	**B.** $x^2+y^2-2x-3y-1=0$.

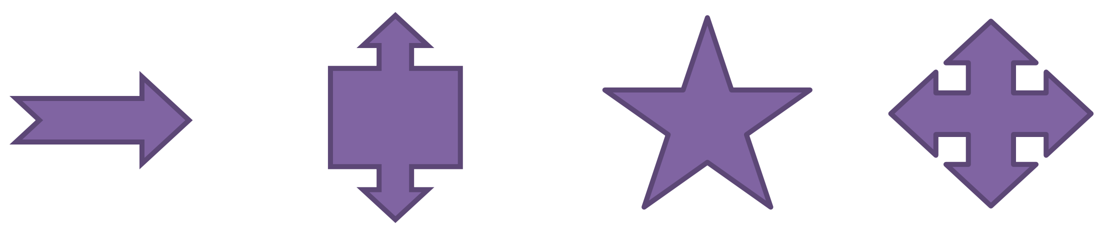
C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0$.	**D.** $x^2+y^2-2x+3y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Chỉ việc thay x bằng $-x$ trong phương trình đường tròn đã cho.

Câu 25. Quan sát các hình dưới đây, hãy cho biết kết luận nào là đúng?



H1	H2	H3	H4

A. Hình H_1 không có trục đối xứng, hình H_2 có 1 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 2 trục đối xứng.

B. Hình H_1 có 1 trục đối xứng, hình H_2 có 2 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 2 trục đối xứng.

C. Hình H_1 có 1 trục đối xứng, hình H_2 có 2 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 4 trục đối xứng.

D. Hình H_1 không có trục đối xứng, hình H_2 có 2 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 4 trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 26. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

B. Phép đối xứng trục có vô số điểm bất động.

C. Một tam giác nào đó có thể có đúng hai trục đối xứng.

D. Một hình có thể không có trục đối xứng nào, có thể có một hay nhiều trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay các câu A, B, D đều đúng.

Câu C sai vì: Một tam giác thường không có trục đối xứng nào, một tam giác cân (không đều) chỉ có 1 trục đối xứng, một tam giác đều có 3 trục đối xứng.

Câu 27. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d’ song song với d.

B. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của tam giác đều aBC có tâm $O \in a$ (tâm đường tròn ngoại tiếp) là chính nó.

C. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của một đường tròn là chính nó.

D. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của đường thẳng d vuông góc với a là chính nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

- Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d’ song song với d, điều này chỉ đúng khi $d // a$.

- Câu B chỉ đúng khi a đi qua đường cao của tam giác đều ABC.

- Câu C chỉ đúng khi a đi qua tâm của đường tròn.

- Câu D đúng. Vì nếu lấy M là một điểm bất kì thuộc d thì ảnh của M qua phép đối xứng $Đ_a$ là điểm $M' \in d$. Vậy ảnh của d là chính nó.

Câu 28. Ta xem các mẫu tự in **I, J, H, L, P** như các hình. Những hình nào có đúng hai trục đối xứng?

A. I, J **B. I, H** **C. J, L** **D. H, P**

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 29. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Đường tròn có vô số trục đối xứng.

B. Đa giác đều n cạnh có đúng n trục đối xứng.

C. Hình thoi có hai trục đối xứng.

D. Một tam giác nào đó có thể có đúng hai trục xứng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

- Ta thấy ngay các câu A, B, C đều đúng.

- Theo câu 2, không có tam giác nào có hai trục đối xứng.

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-3y-6=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục hoành có phương trình là:

A. $2x+3y+6=0$. **B.** $2x+3y-6=0$. **C.** $4x-y-6=0$. **D.** $3x+2y-6=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x;-y)$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành. Do đó đường thẳng đối xứng của $\Delta: 2x-3y+6=0$ qua trục hoành có phương trình là: $2x+3y+6=0$.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $5x+y-3=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục tung có phương trình là:

A. $5x+y+3=0$. **B.** $5x-y+3=0$. **C.** $x+5y+3=0$. **D.** $x-5y+3=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;y)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung. Do đó đường thẳng đối xứng của $\Delta: 5x+y-3=0$ qua trục tung có phương trình là: $-5x+y-3=0 \Leftrightarrow 5x-y+3=0$

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+1=0$ và điểm $A(3;2)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ?

A. $M(-1;4)$. **B.** $N(-2;5)$. **C.** $P(6;-3)$. **D.** $Q(1;6)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2)$. Gọi d là đường thẳng qua $A(3;2)$ vuông góc với Δ thì $\vec{a}$ là vectơ pháp tuyến của d. Phương trình của d là: $1(x-3)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-7=0$.

Tọa độ của điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow H(1;3)$.

Gọi B là điểm đối xứng của A qua Δ, thì H là trung điểm của AB nên: $\begin{cases} x_B=2x_H-x_A=-1 \\ y_B=2y_H-y_A=4 \end{cases} \Rightarrow B(-1;4)$.

Chú ý: Vì đây là bài tập trắc nghiệm, nên để chọn câu đúng cho nhanh ta chỉ cần kiểm tra các lựa chọn. Ví dụ nếu chọn $M(-1;4)$ ta thấy ngay trung điểm của AM là $I(1;3)\in\Delta$, sau đó chỉ cần kiểm tra vectơ $\overrightarrow{AM}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2)$ của Δ.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-2x+3$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-2x-3$. **B.** $y=x^2+2x-3$. **C.** $y=-x^2+2x-3$. **D.** $y=-x^2+4x-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lí luận như câu 2 phương trình của (P') là: $y=-x^2+2x-3$.

Chú ý: Có thể dùng kiến thức sau: đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=2x^2+x+5$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=-2x^2+x-5$. **B.** $y=2x^2-x+5$. **C.** $y=-2x^2-x-5$. **D.** $y=-2x^2+x-5$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;y)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung. Do đó phương trình của (P') là: $y=2(-x)^2+(-x)+5 \Leftrightarrow y=2x^2-x+5$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x+y-5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2x-y-5=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+y-5=0$.

C. $x^2+y^2+2x-y-5=0$. **D.** $x^2+y^2-x-2y+5=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay y bởi $-y$ ta được phương trình của đường tròn (T') là: $x^2+y^2-2x-y-5=0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=16$.

B. $(x+2)^2+(y+3)^2=16$.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.

D. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thay x bởi $-x$ ta được phương trình của đường tròn (T') là:

$(-x-2)^2+(y+3)^2=16 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=16$

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $A(4;3)$ thành điểm A' có tọa độ là:

A. $(-4;-3)$.

B. $(4;-3)$.

C. $(-4;3)$.

D. $(3;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có thể chứng minh được rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(y;x)$ thì đối xứng nhau qua a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy.

Suy ra: $A'(3;4)$.

Ghi chú: Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là đường thẳng có phương trình $y=x$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm $P(5;-2)$ thành điểm P' có tọa độ là:

A. $(5;2)$.

B. $(-5;2)$.

C. $(2;-5)$.

D. $(-2;5)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có thể chứng minh được rằng: Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-y;-x)$ thì đối xứng qua b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai của hệ tọa độ Oxy.

Suy ra: $P'(2;-5)$.

Ghi chú: Đường phân giác của góc phần tư thứ hai là đường thẳng có phương trình $y=-x$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường tròn (T) có phương trình $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=9$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T’) có phương trình là:

A. $\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2=9$.

B. $\left(x+2\right)^2+\left(y-3\right)^2=9$.

C. $\left(x-3\right)^2+\left(y+2\right)^2=9$.

D. $\left(x+3\right)^2+\left(y+2\right)^2=9$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi y và y bởi x ta được phương trình của (T’) là:

$\left(y-2\right)^2+\left(x+3\right)^2=9 \Leftrightarrow \left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2=9$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường thẳng Δ có phương trình $3x-4y+5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $4x-3y-5=0$. **B.** $3x+4y-5=0$. **C.** $4x-3y+5=0$. **D.** $3x+4y+5=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi y và y bởi x ta được phương trình của Δ' là: $3y-4x+5=0 \Leftrightarrow 4x-3y-5=0$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Ta xét đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-6x+4y-2=0$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T’) có phương trình là:

A. $x^2+y^2+6x-4y-2=0$.

B. $x^2+y^2+4x-6y-2=0$.

C. $x^2+y^2-6x+2y+2=0$.

D. $x^2+y^2-4x+6y-2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Thay x bởi $-y$ và y bởi $-x$ ta được phương trìn của (T’) là:

$\left(-y\right)^2+\left(-x\right)^2-6\left(-y\right)+4\left(-x\right)-2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-2=0$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Ta xét đường thẳng Δ có phương trình $y=5x+3$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$.   **B.** $y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$.   **C.** $y=-5x+3$.   **D.** $y=5x-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi $-y$ và y bởi $-x$ ta được phương trình của Δ' là: $(-x)=5(-y)+3 \Leftrightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường thẳng có phương trình $x+2=0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $M(4;-3)$ thành điểm M’ có tọa độ là:

A. $(-6;-3)$.   **B.** $(-8;-3)$.   **C.** $(8;3)$.   **D.** $(6;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trước hết ta nhận thấy rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(2x_0-x;y)$ thì đối xứng qua đường thẳng có phương trình $x=x_0$.

Phương trình của a viết lại: $x=-2 \Leftrightarrow x_0=-2$.

Do đó, với điểm $M(4;-3)$ thì điểm M’ đối xứng của M qua a có hoành độ là $x'=2(-2)-4=-8$.

Suy ra: $M'(-8;-3)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường thẳng có phương trình $y-3=0$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm $P(-2;5)$ thành điểm P’ có tọa độ là:

A. $(-2;-5)$.   **B.** $(2;-5)$.   **C.** $(-2;1)$.   **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Trước hết ta nhận thấy rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x;2y_0-y)$ thì đối xứng qua đường thẳng có phương trình $y=y_0$.

Phương trình của b viết lại: $y=3$.

Do đó, với điểm $P(-2;5)$ thì điểm M’ đối xứng của M qua b có tung độ là: $y'=2.3-5=1$.

Suy ra: $M'(-2;1)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=x_1$ và $x=x_2$ $(x_1 \neq x_2)$; $M(x;y)$ là một điểm bất kì. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M’ và phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm M’ thành điểm M’’. Như thế phép biến hình biến điểm M thành điểm M’’ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

A. $\left(2\left(x_1+x_2\right);0\right)$. **B.** $\left(2\left(x_2-x_1\right);0\right)$. **C.** $\left(\left(x_1+x_2\right);0\right)$. **D.** $\left(\left(x_2-x_1\right);0\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Gọi $I\left(x_1;0\right)$ và $J\left(x_2;0\right)$ là các giao điểm của hai đường thẳng a và b với trục hoành.

Như thế phép biến hình biến điểm M thành điểm M’’ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{IJ}$.

Ta có: $\vec{u}=2\overrightarrow{IJ}=\left(2\left(x_2-x_1\right);0\right)$.

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=y_1$ và $y=y_2$ $\left(y_1\neq y_2\right)$; $M\left(x;y\right)$ là một điểm bất kì. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M’ và phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm M’ thành điểm M’’. Như thế phép biến hình biến điểm M thành điểm M’’ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

A. $\left(0;2\left(y_2-y_1\right)\right)$. **B.** $\left(0;2\left(y_2+y_1\right)\right)$. **C.** $\left(0;y_2+y_1\right)$. **D.** $\left(0;y_2-y_1\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Lí luận như câu 45 ta được $\vec{u}=\left(0;2\left(y_2-y_1\right)\right)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=2$ và $x=5$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự). Điểm $M\left(-2;6\right)$ biến thành điểm N có tọa độ là:

A. $\left(-4;6\right)$. **B.** $\left(5;6\right)$. **C.** $\left(4;6\right)$. **D.** $\left(9;6\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Theo bài 46 thì phép biến hình biến điểm M thành điểm N là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=\left(2.\left(5-2\right);0\right)\Rightarrow\vec{u}=\left(6;0\right)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta được $N\left(4;6\right)$.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=-1$ và $y=3$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự). Điểm $P(7;1)$ biến thành điểm Q có tọa độ là:

A. $(7;6)$. **B.** $(7;-5)$. **C.** $(7;3)$. **D.** $(7;9)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép biến hình biến điểm P thành điểm Q là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(0;2.(3+1))\Rightarrow\vec{u}=(0;8)$

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta được: $Q(7;9)$.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=-2$ và $x=3$; Δ là đường thẳng có phương trình $2x+y=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $2x+y-10=0$. **B.** $2x+y+5=0$. **C.** $2x+y-20=0$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phép biến hình biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(2.(3+2);0)\Rightarrow\vec{u}=(10;0)$.

Phép tịnh tiến này biến Δ thành Δ' có phương trình: $2(x-10)+y=0\Leftrightarrow 2x+y-20=0$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=2$ và $y=3$; Δ là đường thẳng có phương trình $3x-2y+1=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $3x-2y+5=0$. **B.** $3x-2y-5=0$. **C.** $3x-2y+10=0$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép biến hình biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(0;2.(3-2))\Rightarrow\vec{u}=(0;2)$.

Phép tịnh tiến này biến Δ thành Δ' có phương trình: $3x-2(y-2)+1=0\Leftrightarrow 3x-2y+5=0$.

Câu 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=4$ và $x=2$; (T) là đường tròn có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+(y+2)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y+4)^2=4$. **D.** $(x+5)^2+(y+1)^2=4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép biến hình biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(2.(2-4);0)\Rightarrow\vec{u}=(-4;0)$.

Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình:

$(x+4-1)^2+(y+2)^2=4\Leftrightarrow(x+3)^2+(y+2)^2=4$.

Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=1$ và $y=-2$; (T) là đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-6y+1=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2x+6y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-2x+8y+4=0$.

C. $x^2+y^2-2x+12y-4=0$. **D.** $x^2+y^2+4x+12y-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép biến hình biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(0;2.(-2-1))\Rightarrow\vec{u}=(0;-6)$.

Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình:

$x^2+(y+6)^2-2x-6(y+6)+1=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y+1=0$.

Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;6)$, $B(-1;2)$, $C(6;1)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $\left(\frac{2}{3};4\right)$. **B.** $(3;-3)$. **C.** $\left(\frac{7}{3};-3\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{3};-4\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $G\left(\frac{7}{3};3\right)\Rightarrow G'\left(\frac{7}{3};-3\right)$.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-4)$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(-2;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết suy ra: $G(2;1)\Rightarrow G'(-2;1)$.

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;4)$, $B(-2;3)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC và a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $\left(\frac{4}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{4}{3};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $G\left(\frac{4}{3};1\right)\Rightarrow G'\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, các đường có phương trình sau đây, đường nào nhận trục hoành làm trục đối xứng:

A. $y=x^2-2x$. **B.** $y=-4x+3$.

C. $x^2+y^2-4x+1=0$. **D.** $x^2+y^2+4x+12y-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Khi thay y bởi $-y$ thì phương trình $x^2+y^2-4x+1=0\,(*)$ không thay đổi nên đường tròn có phương trình (*) nhận trục hoành làm trục đối xứng.

Câu 57. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y=5x-3$. **B.** $y=x^2-4x+5$. **C.** $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Do phương trình $y=x^4-x^2+1$ không thay đổi khi ta thay x bởi $-x$ nên đồ thị của hàm số này nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 58. Cho hai điểm B và C cố định trên đường tròn $(O;R)$. Điểm A thay đổi trên $(O;R)$. Gọi H là trực tâm của ΔABC và H' là điểm đối xứng của H qua đường thẳng BC. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. H' luôn nằm trên đường tròn $(O';R)$ đối xứng của $(O;R)$ qua đường thẳng BC.

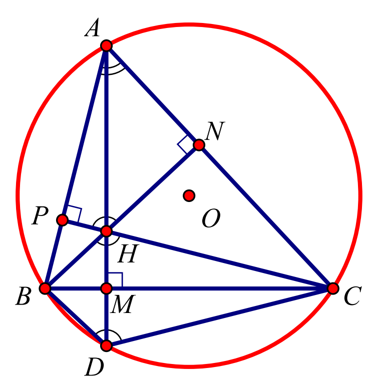
B. H' luôn nằm trên một đường thẳng cố định song song với BC.

C. H' luôn nằm trên đường trung trực của cạnh BC.

D. H' luôn nằm trên đường tròn $(O;R)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.



Trong một tam giác, điểm đối xứng của trực tâm H qua một cạnh của nó thì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Đây là một kiến thức cơ bản. Tuy nhiên ta có thể chứng minh lại bài toán này như sau:

Kẻ các đường cao AM, BN, CP và gọi D là điểm đối xứng của H qua BC.

Ta có tứ giác ANHP là một tứ giác nội tiếp, suy ra: $\widehat{PAN}+\widehat{PHN}=180^o$ hay $\widehat{BAC}+\widehat{BHC}=180^o$.

Mặt khác, có D là điểm đối xứng của H qua BC nên $\widehat{BDC}=\widehat{BHC}$.

Do đó: $\widehat{BAC}+\widehat{BDC}=180^o$.

Suy ra D nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.

Câu 59. Trong mặt phẳng cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B phân biệt nằm cùng một bên đường thẳng Δ. Một điểm M thay đổi trên Δ, khi đó vị trí của M để $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. M trùng với hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

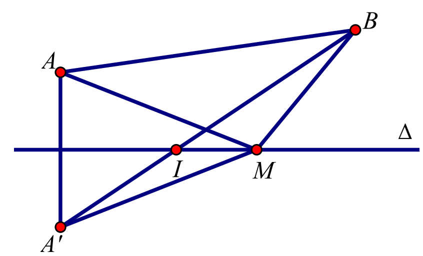
B. M trùng với hình chiếu vuông góc của B trên Δ.

C. M trùng với giao điểm của Δ và đường trung trực của AB.

D. M trùng với giao điểm của Δ và đường thẳng BA’ với A’ là điểm đối xứng của A qua Δ.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.



Đây là bài toán cơ bản về giá trị nhỏ nhất.

Do A’ là điểm đối xứng của A qua Δ nên: $MA = MA'$

Do đó: $MA + MB \geq MA' + MB \geq A'B$

Như thế: $\min\left(MA + MB\right) = A'B$

Xảy ra khi: A’, B, M thẳng hàng, khi đó M trùng với điểm I là giao điểm của A’B và Δ.

Câu 60. Cho đoạn thẳng AB và Δ là đường thẳng cố định song song với BC. Trên Δ lấy điểm M bất kì. Khi đó vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. M trùng với hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

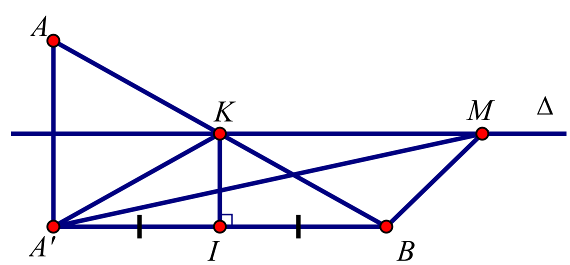
B. M trùng với hình chiếu vuông góc của B trên Δ.

C. M trùng với hình chiếu vuông góc của I trên Δ với I là trung điểm của AB.

D. Không thể xác định được vị trí của M.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.



Chu vi của ΔMAB là: $p = MA + MB + AB$.

Mà AB cố định nên p đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

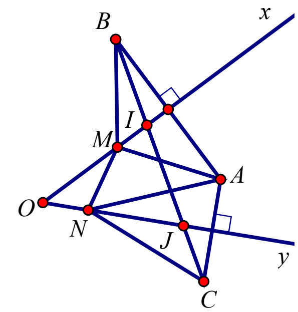
Theo bài 59, khi đó M ở vị trí K với K là giao điểm của Δ và A’B, A’ là điểm đối xứng của A qua Δ.

Câu 61. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Một điểm M thay đổi trên tia Ox và một điểm N thay đổi trên tia Oy. Để xác định vị trí của M và N sao cho ΔAMN có chu vi nhỏ nhất, một học sinh chứng minh qua ba bước như sau:

Bước 1: Gọi p là chu vi tam giác AMN ta có:

$$p = AM + AN + MN$$

Bước 2: Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ điểm A biến thành điểm B. Suy ra $AM = BM$, và thực hiện phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ điểm A biến thành điểm C. Suy ra $AN = CN$.



Do đó: $p = BM + MN + CN$

Bước 3: Như thế p đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi các điểm B, M, N, C thẳng hàng. Khi đó M trùng với điểm I giao điểm của Ox và BC, N trùng với điểm J giao điểm của Oy và BC.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

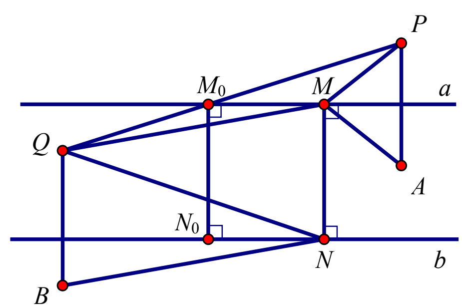
A. Chứng minh chính xác. **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 62. Cho hai đường thẳng song song a và b; A và B là hai điểm hai bên đường thẳng b trong đó điểm A nằm trong dãy định bởi a và b (A và B đều không nằm trên a và b). Muốn dựng một đoạn thẳng MN vuông góc với cả a, b với $M \in a$ và $N \in b$ sao cho $AM + MN + NB$ có độ dài nhỏ nhất. Một học sinh lập luận qua ba bước như sau:



Bước 1: Trước hết ta thấy rằng MN có độ dài không đổi, nên ta chỉ cần xác định vị trí của M, N để $AM + BN$ nhỏ nhất.

Bước 2: Thực hiện phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NM}$, điểm B biến thành điểm Q; suy ra $BN = QM$. Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_a$ điểm A biến thành điểm P, suy ra $AM = PM$.

Do đó: $AM + BN = PM + QM \geq PQ$.

Bước 3: Đẳng thức xảy ra khi điểm M nằm trên đoạn thẳng PQ, như thế M trùng với điểm M_0 là giao điểm của PQ và đường thẳng a; khi đó N trùng với điểm N_0 là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng b.

Để ý rằng khi thực hiện phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NM}$ mà điểm Q trùng với điểm A thì ta kết luận ngay vị trí của điểm M cần xác định là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng a.

Tóm lại bài toán luôn thực hiện được.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh chính xác. **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 63. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O. Nhận định nào sau đây là đúng?

A. Không có phép đối xứng trục nào biến a thành b.

B. Có duy nhất một phép đối xứng trục biến a thành b.

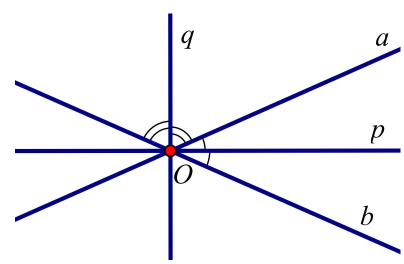
C. Có đúng hai phép đối xứng trục biến a thành b.

D. Có vô số phép đối xứng trục biến a thành b.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi p và q là phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b. Ta thấy ngay có hai phép đối xứng trục biến a thành b là các phép đối xứng trục $Đ_p$ và $Đ_q$.



BÀI 4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa

- Phép đối xứng qua điểm O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$.

$$Đ_O(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$$

- Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng, hay đơn giản là tâm đối xứng.
- Phép đối xứng qua một điểm còn gọi đơn giản là phép đối xứng tâm.

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(a;b)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì: $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$.

Công thức này gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $Đ_I$.

3. Tâm đối xứng của một hình

Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình H nếu phép đối xứng $Đ_O$ biến hình H thành chính nó, nghĩa là $Đ_O(H)=H$.

Ví dụ:

a. Các hình như hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi đề có tâm đối xứng. Đó là giao điểm của hai đường chéo của mỗi hình.

b. Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của nó.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. tìm ảnh của 1 điểm, một đường qua phép đối xứng tâm

$\boxed{1}$ Tìm ảnh của các điểm sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $A(-2;3)$, $I(1;2)$ $\Rightarrow A'(4;1)$

2) $B(3;1)$, $I(-1;2)$ $\Rightarrow B'(-5;3)$

3) $C(2;4)$, $I(3;1)$ $\Rightarrow C'(4;-2)$

Giải :

a) Gỉa sử : $A'=Đ_I(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'}=-\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow (x'-1;y'-2)=-(-3;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=3 \\ y'-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=1 \end{cases} \Rightarrow A'(4;1)$

$\boxed{2}$ Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $(\Delta): x+2y+5=0, I(2;-1)$ $\Rightarrow (\Delta'): x+2y-5=0$

2) $(\Delta): x-2y-3=0, I(1;0)$ $\Rightarrow (\Delta'): x-2y+1=0$

3) $(\Delta): 3x+2y-1=0, I(2;-3)$ $\Rightarrow (\Delta'): 3x+2y+1=0$

Giải

PP : Có 3 cách

<u>Cách 1</u>: Dùng biểu thức toạ độ

<u>Cách 2</u>: Xác định dạng $\Delta' // \Delta$, rồi dùng công thức tính khoảng cách $d(\Delta;\Delta') \to \Delta'$.

<u>Cách 3</u>: Lấy bất kỳ $A,B \in \Delta$, rồi tìm ảnh $A',B' \in \Delta' \Rightarrow \Delta' \equiv A'B'$

1) <u>Cách 1</u>: Ta có : $M(x;y) \xmapsto{Đ_I} M' \begin{cases} x' = 4-x \\ y' = -2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-x' \\ y = -2-y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow x+2y+5=0 \Leftrightarrow (4-x')+2(-2-y')+5=0 \Leftrightarrow x'+2y'-5=0$

$\Leftrightarrow M'(x';y') \in \Delta' : x+2y-5=0$

Vậy : $(\Delta) \xmapsto{Đ_I} (\Delta'): x+2y-5=0$

<u>Cách 2</u>: Gọi $\Delta' = Đ_I(\Delta) \Rightarrow \Delta'$ song song $\Delta \Rightarrow \Delta'$: x + 2y + m = 0 $(m \neq 5)$.

Theo đề : $d(I;\Delta) = d(I;\Delta') \Leftrightarrow \dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow 5 = |-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \text{ (loại)} \\ m=-5 \end{array}\right.$

$\to (\Delta'): x+2y-5=0$

<u>Cách 3</u>: Lấy : $A(-5;0), B(-1;-2) \in \Delta \Rightarrow A'(9;-2), B'(5;0) \Rightarrow \Delta' \equiv A'B': x+2y-5=0$

$\boxed{3}$ Tìm ảnh của các đường tròn sau qua phép đối xứng tâm :

1) $(C): x^2+(y-2)^2=1, E(2;1)$ $\Rightarrow (C'): (x-4)^2+y^2=1$

2) $(C): x^2+y^2+4x+2y=0, F(1;0)$ $\Rightarrow (C'): x^2+y^2-8x-2y+12=0$

3) (P) : $y = 2x^2-x+3$, tâm O(0;0) $\Rightarrow (P'): y = -2x^2-x-3$

HD : *a*) *Có* 2 cách giải :

<u>Cách 1</u>: Dùng biểu thức toạ độ .

<u>Cách 2</u>: Tìm tâm $I \xmapsto{Đ_E} I', R' = R = ($*đã* cho) .

b) Tương tự .

Dạng 2. Chứng minh một hình H có tâm đối xứng

Phương pháp giải:

Bước 1. Xác định điểm cố định O.

Bước 2. Chứng minh rằng, với mọi điểm M thuộc H, điểm $M' = Đ_O(M)$ cũng thuộc H.

Ví dụ 1: Trong hệ tọa độ Oxy, gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{x}$. Chứng minh rằng (C) có tâm đối xứng là O, gốc của hệ tọa độ Oxy.

Giải

Gọi $M(x;y)\in(C)$ thì có: $y=\frac{1}{x}$.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua $Đ_O$ thì từ $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$, ta có: $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OM'}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-x'\\y=-y'\end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $-y'=\frac{1}{-x'}\Leftrightarrow y'=\frac{1}{x'}$. Hệ thức này chứng tỏ $M'\in(C)$.

Tóm lại, với mọi điểm M thuộc (C), M’ là ảnh của M qua $Đ_O$ cũng thuộc (C). Vậy, (C) có tâm đối xứng là O.

Ví dụ 2: Cho hai điểm cố định A và B có $AB=2$. Tìm tập hợp những điểm M’ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MM'}$, biết rằng $MA^2+MB^2=4$.

Giải

Để tìm tập hợp những điểm M’ ta phải tìm tập hợp những điểm M.

Ta có $MA^2+MB^2=4$. Gọi O là trung điểm của AB thì O cố định. Mà $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{AB^2}{2}$ nên $2MO^2=4-\frac{AB^2}{2}=2\Leftrightarrow MO=1$. Do đó, tập hợp những điểm M là đường tròn (C) tâm O có bán kính $R=1$.

Bây giờ ta tìm tập hợp những điểm M’.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MM'}$ (giả thiết) (1)

Mà O là trung điểm của AB nên: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$.

Do đó $M'=Đ_O(M)$.

Theo trên, M thuộc (C) nên M’ thuộc (C’) là ảnh của (C) qua $Đ_O$. Mà (C’) chính là (C). Vậy tập hợp những điểm M’ là đường tròn tâm O, trung điểm của AB, bán kính $R=1$.

Dạng 3. Dùng phép đối xứng tâm để dựng hình

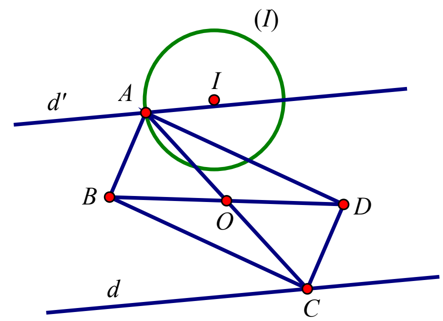
Phương pháp giải: Muốn dựng điểm N, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định hai điểm M và O sao cho $N=Đ_O(M)$.

Bước 2. Tìm các dựng điểm M suy ra N.

Ví dụ: Dựng hình bình hành ABCD, biết rằng hai đỉnh B và D cố định, đỉnh A thuộc một đường tròn (I) đã cho và đỉnh C thuộc một đường thẳng d đã cho.

Giải



Gọi O là trung điểm của BD thì O cố định và $Đ_O(A) = C$.

Ta dựng A trước. Vì $C = Đ_O(A)$ nên $A = Đ_O(C)$. Mà $C \in d$ nên $A \in d'$, ảnh của d qua $Đ_O$. Do đó: $A = (I) \cap d'$.

Đã có A, ta dựng $C = Đ_O(A)$.

Tóm lại: Hình bình hành ABCD đã dựng xong.

Bài toán có 2; 1; 0 lời giải tùy theo d' và (I) có 2; 1; 0 giao điểm.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến một đường thẳng a cho trước thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm đối xứng là điểm bất kì nằm trên a.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tâm đối xứng phải nằm trên cả d và d' nên không có.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến d thành d'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm đối xứng là các điểm cách đều d và d’.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d’. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào.
B. Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép.
D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm đối xứng là giao điểm của d và d’.

Câu 5. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d’. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến đường thẳng d thành d’?

A. Không có phép nào.
B. Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép.
D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Vì phép đối xứng tâm biến d thành đường thẳng song song hoặc trùng với d.

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến đường thẳng a thành đường thẳng b và biến đường thẳng c thành chính nó?

A. Không có phép nào.
B. Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép.
D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử c cắt a và b lần lượt tại A và B. Phép đối xứng tâm cần tìm là phép đối xứng qua trung điểm của AB.

Câu 7. Cho bốn đường thẳng a, b, a’, b’ trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a’ và b’?

A. Không có phép nào.
B. Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép.
D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Đó là phép đối xứng qua tâm hình bình hành tạo thành bởi bốn đường thẳng đã cho.

Câu 8. Trong các hình dưới đây hình nào **không** có tâm đối xứng?

A. Đường elip.

B. Đường hypebol.

C. Đường parabol.

D. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 9. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có tâm đối xứng?

A. Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp.

B. Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp.

C. Hình lục giác đều.

D. Hình gồm một đường tròn và một hình vuông nội tiếp.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 10. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có vô số tâm đối xứng?

A. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$.

B. Đồ thị của hàm số $y = \sin x + 1$.

C. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

D. Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x}$ là đường hypebol, chỉ có duy nhất một tâm đối xứng là điểm gốc tọa độ.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng tâm biến điểm $A(5;2)$ thành điểm $A'(-3;4)$ thì nó biến điểm $B(1;-1)$ thành điểm:

A. $B'(1;7)$

B. $B'(1;6)$

C. $B'(2;5)$

D. $B'(1;-5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trung điểm của BB' phải là trung điểm của AA'.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm có tâm là điểm gốc tọa độ. Khi đó nó biến đường thẳng $3x - 4y + 13 = 0$ thành đường thẳng:

A. $3x+4y+13=0$ **B.** $3x+4y-13=0$ **C.** $3x-4y-13=0$ **D.** $-3x+4y+13=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép đối xứng qua O biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-x;-y)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm với tâm là điểm $I(1;-1)$. Khi đó nó biến đường thẳng $2x-3y+5=0$ thành đường thẳng:

A. $2x-3y-7=0$ **B.** $2x-3y+7=0$ **C.** $2x+3y+7=0$ **D.** $2x-3y+4=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điểm I phải cách đều đường thẳng đã cho và ảnh của nó.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình $3x+4y-1=0$ và $3x+4y+5=0$. Nếu phép đối xứng tâm biến a thành b thì tâm đối xứng phải là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $I(2;-2)$ **B.** $I(2;2)$ **C.** $I(-2;2)$ **D.** $I(2;0)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tâm đối xứng phải cách đều hai đường thẳng đã cho.;

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $I(a;b)$. Thực hiện phép đối xứng tâm I biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm này là:

A. $\begin{cases} x'=2b-x \\ y'=2a-y \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x'=a-2x \\ y'=b-2y \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x'=a-2y \\ y'=b-2x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2+x$. Phương trình của parabol (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là:

A. $y=-x^2+x$. **B.** $y=x^2-x$. **C.** $y=-x^2-x$. **D.** $y=x^2-2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;-y)$ thì đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O. Do đó phương trình của parabol (Q) là: $-y=(-x)^2+(-x)\Leftrightarrow y=-x^2+x$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x+2y-2=0$. Ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x+2y+2=0$. **B.** $x-2y+3=0$. **C.** $x+2y+6=0$. **D.** $2x-y+4=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=-2-y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4-x' \\ y=-2-y' \end{cases}$

Thế vào phương trình của Δ ta được: $(4-x')+2(-2-y')-2=0\Leftrightarrow -x'-2y'-2=0\Leftrightarrow x'+2y'+2=0$

Vậy phương trình ảnh của Δ là: $x+2y+2=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2=9$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T’) có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x+4y+11=0$. **B.** $x^2+y^2+4x+6y+5=0$.

C. $x^2+y^2-2x+4y=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+2y-2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=-2-y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4-x' \\ y=-2-y' \end{cases}$

Thế vào phương trình của (T) ta được: $(4-x')^2+(-2-y')^2=9\Leftrightarrow x'^2+y'^2-8x'+4y'+11=0$.

Vậy phương trình của (T’) là: $x^2+y^2-8x+4y+11=0$.

Câu 19. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng?

A. $y=2x^2-3x+1$. **B.** $y=x^3+x-5$. **C.** $y=x^3\tan x$. **D.** $y=\sin x\sqrt{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta đã biết đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Trong các hàm số dưới đây chỉ có hàm số $y=\sin x\sqrt{x^2+1}$ là hàm số lẻ, nên đồ thị của hàm số này nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-8x+10y+32=0$. Phương trình của đường tròn (C') đối xứng của (C) qua gốc tọa độ O có phương trình là:

A. $(x+4)^2+(y-5)^2=9$.

B. $(x-4)^2+(y-5)^2=16$.

C. $(x+4)^2+(y+5)^2=4$.

D. Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi $-x$ và y bởi $-y$ ta được phương trình của (C') là:

$x^2+y^2+8x-10y+32=0 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y-5)^2=9$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-2x$ và điểm $I(-3;1)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=-x^2-14x-46$. **B.** $y=-x^2+14x-5$. **C.** $y=-x^2-7x+12$. **D.** $y=-x^2+6x+3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases} x'=-6-x \\ y'=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6-x' \\ y=2-y' \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $2-y'=(-6-x')^2-2(-6-x') \Leftrightarrow y'=-x'^2-14x'-46$.

Vậy phương trình của (P') là: $y=-x^2-14x-46$.

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;3)$, $C(7;2)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến trọng tâm G của tam giác ABC thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;5)$. **B.** $(2;-5)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(0;-5)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trọng tâm của ΔABC là $G\left(2;3\right)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta được $G'\left(0;-5\right)$.

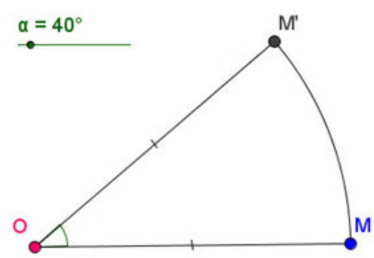
BÀI 5. PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM' OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α (h.1.27).

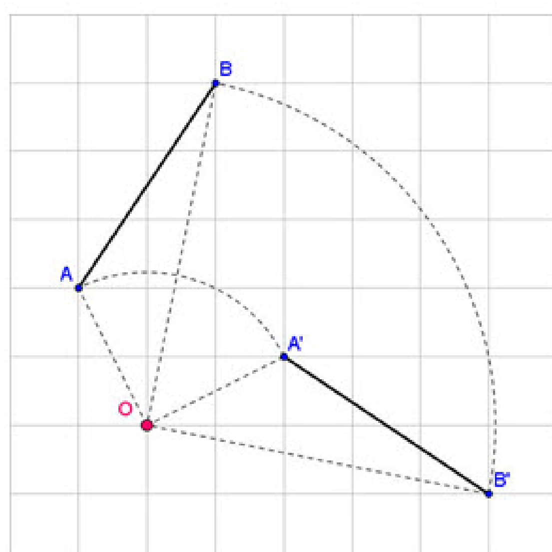


Hình 1.27

Điểm O được gọi là tâm quay còn α được gọi là góc quay của phép quay.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q(O;\alpha)$

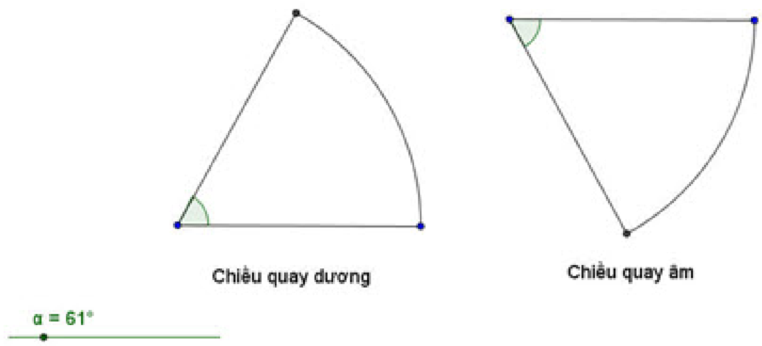
Ví dụ 1. Trên hình 1.28 ta có các điểm A', B', O tương ứng là ảnh của các điểm A, B, O qua phép quay tâm O, và góc quay $-\frac{\pi}{2}$



Hình 1.28

Nhận xét:

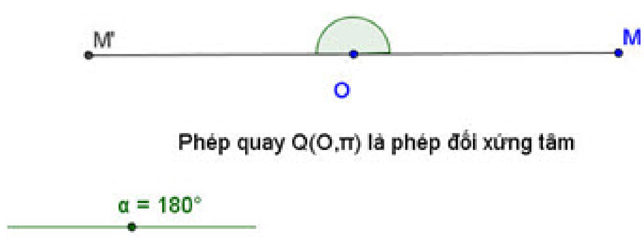
1) Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 1.30

2) Với k là số nguyên ta luôn có phép quay $Q_{(O,\, 2k\pi)}$ là phép đồng nhất.

Phép quay $Q_{(O,\, (2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O (h. 1.32).



Hình 1.32

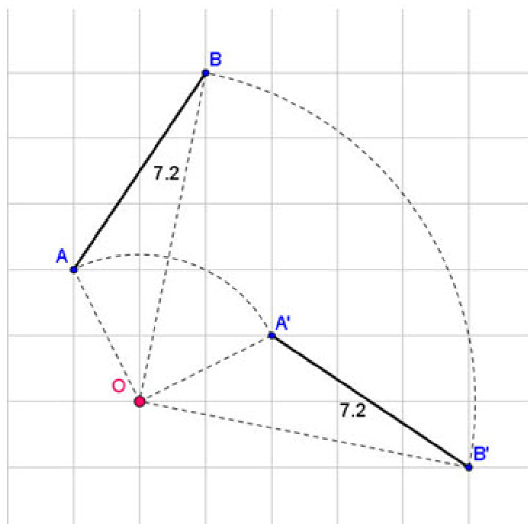
II. TÍNH CHẤT

Quan sát chiếc tay lái (vô lăng) trên tay người lái xe ta thấy khi người lái xe quay tay lái một góc nào đó thì hai điểm A và B trên tay lái cũng quay theo. (h.1.34). Tuy vị trí A và B thay đổi nhưng khoảng cách giữa chúng không thay đổi. Điều đó được thể hiện trong tính chất sau của phép quay.

Hình 1.34

Tính chất 1.

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.



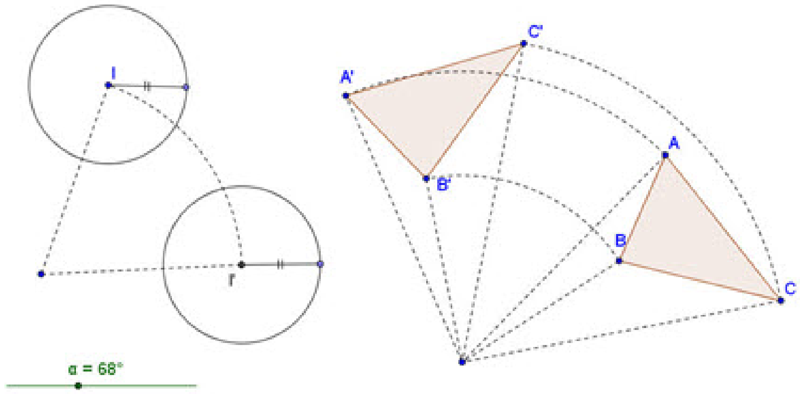
Hình 1.35

(Phép quay tâm O, góc (OA; OA’) biến điểm A thành A’, B thành B’.

Khi đó, ta có: A’B’ = AB)

Tính chất 2.

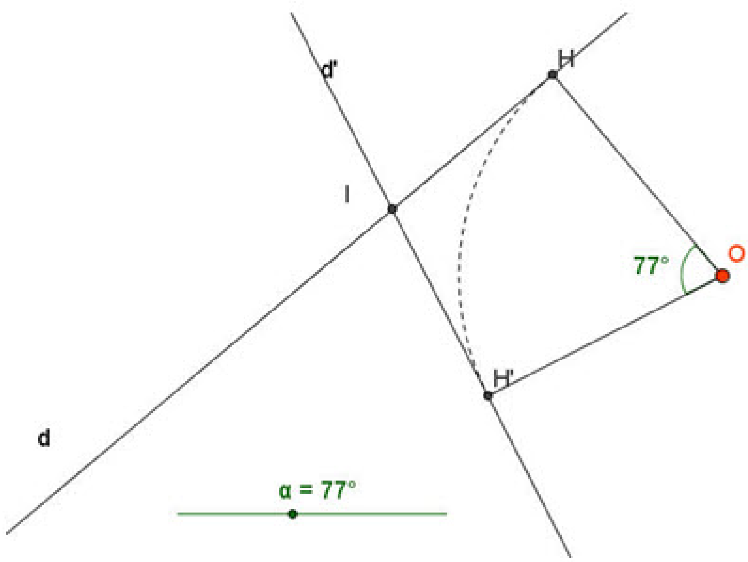
Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.36).



Hình 1.36

Nhận xét

Phép quay góc α với 0 < α < π, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho góc giữa d và d' bằng α ($0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng π - α (nếu $\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$) (h.1.37).



Hình 1.37

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh điểm M' là ảnh của điểm M trong một phép quay

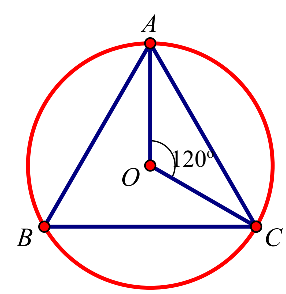
Phương pháp giải: Ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm một điểm cố định O và một góc φ không đổi.

Bước 2. Chứng minh: $\begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \varphi \end{cases}$

Ví dụ 1: Cho ABC là tam giác đều (các đỉnh được ghi theo chiều dương). Hãy xác định phép quay biến C thành A).

Giải



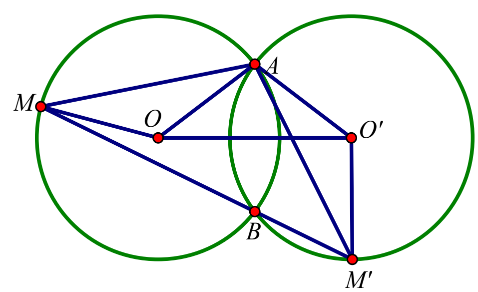
- Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có: $\begin{cases} OA = OC \\ (OC, OA) = 120^o \end{cases}$

Vậy $Q(O;120^o): C \mapsto A$.

- Ta còn có phép quay $Q(B;60^o): C \mapsto A$.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua B, cắt $(O;R)$ tại M cắt $(O';R)$ tại M'. Chứng minh rằng M' là ảnh của M trong phép quay tâm A, góc quay $\varphi = \widehat{OAO'}$.

Giải



Xét tam giác MAM' ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}$; $\widehat{M_1}' = \widehat{O_1}'$ (góc nội tiếp và nửa góc ở tâm cùng chắn một cung). Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_1}'$ (vì $\Delta OAO'$ cân tại A), suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_1}'$.

Vậy, tam giác MAM' cân tại A, suy ra: $AM = AM' \quad (1)$

Mặt khác: $\Delta OMA = \Delta O'M'A \ (c.c.c)$, suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{M'AO'}$. Mà:

$\widehat{MAM'} = \widehat{MAO} + \widehat{OAM'} = \widehat{M'AO'} + \widehat{OAM'} = \widehat{OAO'}$.

Do đó: $\widehat{MAM'} = \varphi \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} AM = AM' \\ (AM, AM') = \varphi \end{cases}$

Vậy M’ là ảnh của M trong phép quay tâm A, góc quay $\varphi = \widehat{OAO'}$.

Dạng 2. Tìm ảnh của một đường thẳng, đường tròn qua một phép quay

Phương pháp giải:

- Tìm ảnh của một đường thẳng qua một phép quay $Q(I;\alpha)$.

Bước 1. Lấy trên đường thẳng một điểm cố định M_0 và điểm di động M.

Bước 2. Gọi M_0' và M’ lần lượt là ảnh của M_0 và M trong phép quay $Q(I;\alpha)$.

Bước 3. Chứng minh rằng M’ thuộc một đường thẳng d’ cố định.

Kết luận: d’ chính là ảnh của d qua phép quay $Q(I;\alpha)$.

- Tìm ảnh của một đường tròn qua một phép quay $Q(I;\alpha)$.

Bước 1. Gọi O’ là ảnh của O, tâm đường tròn đã cho, qua $Q(I;\alpha)$, ta có O’ cố định.

Bước 2. Lấy điểm M tùy ý trên đường tròn (O). Gọi M’ là ảnh của M qua $Q(I;\alpha)$, chứng minh rằng $O'M' = OM$.

Bước 3. Chứng minh rằng M’ thuộc đường tròn $(O';R)$.

Kết luận: $(O';R)$ chính là ảnh của $(O;R)$ qua $Q(I;\alpha)$.

Ví dụ 1: Cho phép quay tâm O, góc quay $\varphi = 60^o$ và đường thẳng d. Tìm ảnh của d qua $Q(I;\alpha)$.

Giải

Gọi H là hình chiếu của O lên d, ta có H cố định. Gọi H’ là ảnh của H qua $Q(O;60^o)$. Ta có:

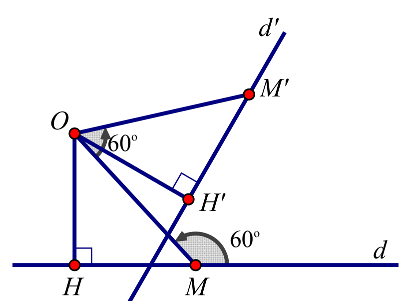
$$\begin{cases} OH' = OH \\ (OH, OH') = 60^o \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác, gọi M là điểm di động trên d và M’ là ảnh của M qua $Q(O;60^o)$, ta có:

$$\begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = 60^o \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$\left.\begin{matrix} OH = OH' \\ OM = OM' \\ \widehat{HOM} = \widehat{H'OM'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta OH'M' = \Delta OHM \ (c.g.c)$$



Do đó: $\widehat{OH'M'} = 90^o$

Vậy tập hợp điểm M’ là đường thẳng d’ vuông góc với

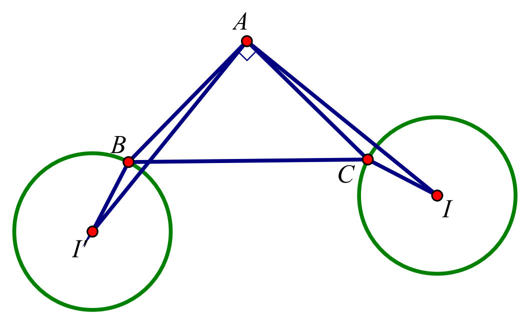
OH’ tại H’.

Lưu ý:

1. Góc của d và d’ bằng 60^o.
2. $\begin{cases} HM = H'M' \\ (HM, H'M') = 60^o \end{cases}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có A cố định (các đỉnh được vẽ theo chiều dương). Biết rằng C thuộc đường tròn $(I;R)$ cho sẵn. Tìm ảnh của đường tròn $(I;R)$ qua phép quay $Q(A;-90^o)$.

Giải



Vì tam giác ABC vuông cân tại A, có các đỉnh ghi theo chiều dương nên: $\begin{cases} AC = AB \\ (AC, AB) = -90^o \end{cases}$

Suy ra B là ảnh của C qua $Q(A;-90^o)$.

Gọi I’ là ảnh của I qua phép quay $Q(A;-90^o)$, ta có I’ cố định và: $\begin{cases} AI = AI' \\ (AI, AI') = -90^o \end{cases}$

Mặt khác: $Q(A;-90^o): \left.\begin{matrix} I \mapsto I' \\ C \mapsto B \end{matrix}\right\} \Rightarrow I'B = IC$. Do đó $I'B = R$ (bán kính của $(I;R)$)

Tóm lại, ta có: I’ cố định, $I'B = R$ (không đổi) nên tập hợp những điểm B là đường tròn tâm I’, bán kính R. Đó là ảnh của đường tròn $(I;R)$.

Dạng 3. Dựng hình bằng phép quay

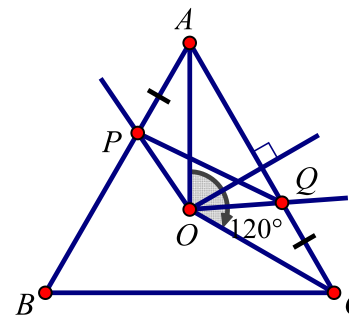
Phương pháp giải: Muốn dựng điểm N qua phép quay, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định điểm M và phép quay $Q(O;\varphi): M \mapsto N$.

Bước 2. Tìm cách dựng điểm M, suy ra điểm N bằng phép quay trên.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC có các đỉnh được vẽ theo chiều dương. Lấy điểm P trên cạnh AB. Hãy dựng điểm Q trên cạnh CA sao cho $|\overrightarrow{CQ}| = |\overrightarrow{AP}|$.

Giải



Giả sử bài toán đã dựng xong ta có: $Q \in AC$ sao cho $\left|\overrightarrow{CQ}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|$.

Trước hết ta phải xác định phép quay biến C thành A và Q thành P. Ta có: $\left|\overrightarrow{CQ}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow CQ = AP$ $\quad (1)$

Mặt khác, $P \in AB$ và $Q \in CA$ nên:

$\left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{AP}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 120^o$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} CQ = AP \\ \left(CQ, AP\right) = 120^o \end{cases}$

Gọi O là tâm của phép quay biến C thành A và Q thành P, ta có: $\begin{cases} OC = OA & (3) \\ \left(OC, OA\right) = 120^o & (4) \end{cases}$

Từ (3) suy ra O thuộc đường trung trực của CA; từ (4) suy ra O thuộc cung chứa góc 120^o vẽ trên dây CA. Mà ABC là tam giác đều nên O chính là trọng tâm của nó.

Tóm lại, ta đã xác định được phép quay tâm O, góc quay 120^o, biến C thành A, biến Q thành P. Suy ra $Q\left(O; -120^o\right): P \mapsto Q$ và $O \mapsto O$, nên biến OP thành OQ. Vậy Q là giao điểm của cạnh CA và OQ là ảnh của đường thẳng OP qua phép quay $Q\left(O; -120^o\right)$. Bài toán chỉ có một nghiệm hình.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng bất kì d và d’. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm của phép quay là điểm cách đều hai đường thẳng d và d’.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song a và a’, một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng a’ và biến đường thẳng c thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay góc quay 180^o, tâm quay là trung điểm của đoạn thẳng do a và a' chắn ra trên c.

Câu 3. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a // a', b // b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép quay biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay góc quay 180^o, tâm quay là tâm hình bình hành tạo bởi bốn đường thẳng đã cho.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC với trọng tâm G. Phép quay tâm G với góc quay nào dưới đây biến tam giác ABC thành chính nó?

A. 30^o.

B. 45^o.

C. 60^o.

D. 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 5. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Phép quay tâm O với góc quay nào dưới đây biến hình vuông ABCD thành chính nó?

A. 30^o.

B. 45^o.

C. 90^o.

D. 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-1)$.

B. $M'(1;1)$.

C. $M'(-1;1)$.

D. $M'(1;0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 7. Khi nào thì hợp thành của hai phép quay $Q(O;\varphi)$ và $Q(O;\phi)$ là phép đồng nhất?

A. Khi $\varphi = \phi = 90^o$.

B. Khi $\varphi = \phi = k\pi$, với k nguyên.

C. Khi $\varphi + \phi = 2k\pi$, với k nguyên.

D. Không khi nào.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Hợp thành là phép quay tâm O góc quay $\varphi+\phi$.

Câu 8. Khi nào thì hợp thành của hai phép quay $Q(O;\varphi)$ và $Q(O;\phi)$ là phép đối xứng tâm?

A. Khi $\varphi=\phi=0^{o}$.

B. Khi $\varphi=\phi=k\pi$, với k nguyên.

C. Khi $\varphi+\phi=2k\pi$, với k nguyên.

D. Không khi nào.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hợp thành là phép quay tâm O góc quay $\varphi+\phi$.

Câu 9. Cho phép quay $Q(O;\varphi)$ biến điểm A thành điểm A' và biến điểm M thành điểm M'. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$.

B. $(OA,OA')=(OM,OM')=\varphi$.

C. $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}\right)=\varphi$.

D. $AM=A'M'$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta xét phép quay $Q(O;\varphi)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $\varphi=90^{o}$ thì Q biến trục hoành x'Ox thành trục tung y'Oy.

B. Nếu $\varphi=270^{o}$ thì Q biến trục tung y'Oy thành trục hoành x'Ox.

C. Nếu $\varphi=-90^{o}$ thì Q biến trục tung y'Oy thành trục hoành x'Ox.

D. Nếu $\varphi=180^{o}$ thì Q biến trục hoành x'Ox thành chính nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta thấy ngay các câu A, B, C đều đúng.

Nếu $\varphi=180^{o}$ thì Q biến trục hoành x'Ox thành trục ngược hướng với trục x'Ox.

Câu 11. Trong câu này ta chỉ xét các phép quay với góc quay φ thỏa điều kiện $0^{o}<\varphi<180^{o}$. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Không tồn tại phép quay nào biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

B. Có duy nhất một phép quay biến đường thẳng a thành đường thằng b.

C. Có đúng hai phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

D. Có vô số phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

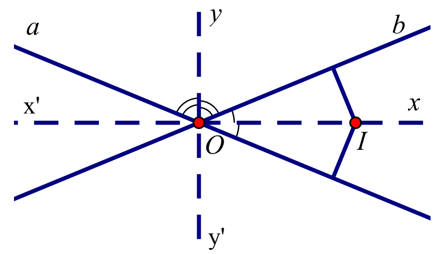
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Giả sử a và b ở vị trí như hình vẽ.

Gọi α là góc tạo bởi a và b.

+ Ta thấy phép quay $Q(O;\alpha)$ biến a thành b và phép quay $Q\left(O;180^o-\alpha\right)$ biến b thành a.



+ Mặt khác, chẳng hạn như trên tia Ox ta lấy một điểm I bất kì nào đó, thì phép quay $Q\left(I;180^o-\alpha\right)$ sẽ biến b thành a.

Như thế, với hai đường thẳng a và b cắt nhau sẽ có vô số phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia.

Câu 12. Cho tam giác ABC đều tâm O (O là tâm của đường tròn ngoại tiếp). Ta thực hiện phép quay tâm O biến tam giác ABC thành chính nó. Một số đo của góc quay φ là:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

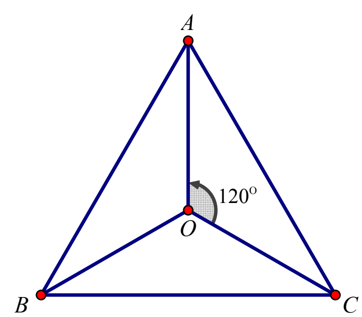
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trong tam giác đều ABC tâm O, ta có: $\widehat{COA}=120^o$.

Như vậy phép quay tâm O với góc quay $\varphi=120^o$ sẽ biến tam giác ABC thành chính nó.

Dĩ nhiên phép quay tâm O với góc quay bằng $k180^o$ cũng biến tam giác ABC thành chính nó.



Câu 13. Cho hình vuông ABCD tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q\left(O;45^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
2. Phép quay $Q\left(O;60^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
3. Phép quay $Q\left(O;90^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
4. Phép quay $Q\left(O;180^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai đường chéo của hình vuông vuông góc với nhau tại O. Dễ thấy các phép quay $Q\left(O;k90^{o}\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Câu 14. Cho ngũ giác đều ABCDE tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q\left(O;72^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.
2. Phép quay $Q\left(O;90^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.
3. Phép quay $Q\left(O;144^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.
4. Phép quay $Q\left(O;216^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

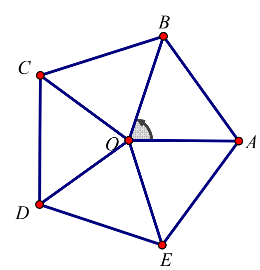
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOE}=\widehat{EOA}=72^{o}$.

Do đó các phép quay tâm O với góc quay bằng $k72^{o}$ đều biến ngũ giác đều ABCDE thành chính nó.

Như thế các câu 1, 3, 4 đều đúng,, câu 2 sai.



Câu 15. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q\left(O;60^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.
2. Phép quay $Q\left(O;120^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.
3. Phép quay $Q\left(O;180^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.
4. Phép quay $Q\left(O;240^{o}\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tương tự như câu 38; do đó các phép quay tâm O với góc quay bằng $k60^o$ đều biến lục giác đều ABCDEF thành chính nó.

Như thế tất cả các câu 1, 2, 3, 4 đều đúng.

Câu 16. Cho phép quay $Q(O;\varphi)$ biến điểm M thành điểm M’. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Phép quay $Q(O;\varphi)$ là một phép dời hình.

B. Phép quay $Q(O;\varphi)$ có O là một điểm bất động.

C. Ta luôn có $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'}=\varphi$.

D. Ta luôn có $OM=OM'$ và $(OM,OM')=\varphi$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $2x+y+5=0$ và $x-2y-3=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay hai đường thẳng a và b có phương trình $2x+y+5=0$ và $x-2y-3=0$ là vuông góc với nhau. Suy ra $\varphi=90^o$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x+3y+5=0$ và $x+7y-4=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đường thẳng $a: 4x+3y+5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{u}=(4;3)$.

Đường thẳng $b: x+7y-4=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{v}=(1;7)$.

Gọi α là góc tạo bởi a và b ta có: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\dfrac{|4.1+3.7|}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\alpha=45^o$.

Vậy $\varphi=45^o$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(4;1)$. Phép quay $Q\left(O;90^o\right)$ biến điểm M thành điểm M’ có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;-4)$. **D.** $(-1;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nhận thấy:

+ $OM=OM'=\sqrt{17}$.

+ $\overrightarrow{OM}=(4;1), \overrightarrow{OM'}=(-1;4)\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=0$

Do đó $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OM'}$.

Vậy, phép quay $Q\left(O;90^o\right)$ biến điểm M thành điểm $M'(-1;4)$.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$. Phép quay $Q(O;\alpha)$ biến điểm M thành điểm M’ có tọa độ là:

A. $(x\cos\alpha; y\sin\alpha)$. **B.** $(y\cos\alpha; x\sin\alpha)$.

C. $(x\cos\alpha-y\sin\alpha; x\sin\alpha+y\cos\alpha)$. **D.** $(x\cos\alpha+y\sin\alpha; x\sin\alpha-y\cos\alpha)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Theo tính chất của phép quay ta có: $OM = OM'$.

Đặt $(Ox, OM) = \beta$, thế thì: $x = OM\cos\beta, y = OM\sin\beta$.

Ta có; $(Ox, OM') = \alpha + \beta$.

Do đó:

$+\ x' = OM'\cos(\alpha+\beta)$

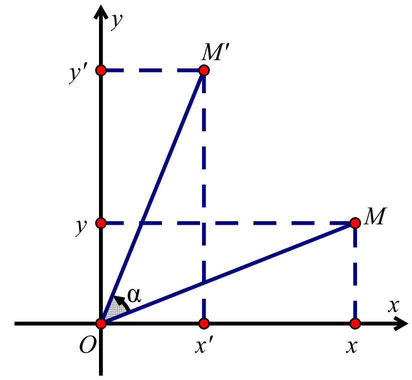
$\quad = OM(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$\quad x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$+\ y' = OM'\sin(\alpha+\beta)$

$\quad = OM(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

$\quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$



Vậy: $M'(x\cos\alpha - y\sin\alpha; x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;2)$, $C(7;-9)$. Phép quay $Q(O;90^o)$ biến trọng tâm G của ΔABC thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;-1)$. **D.** $(-3;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có $G(2;-1)$. Suy ra $G'(1;2)$.

Câu 22. Cho tam giác đều ABC có tâm O và các đường cao AA', BB', CC' (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của đường cao AA' qua phép quay $Q(O;240^o)$ là:

A. AA'. **B.** BB'.

C. CC'. **D.** Một đoạn thẳng qua O song song với BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q(O;240^o)$ biến A thành B; A' thành B'.

Vậy ảnh của AA' là BB'.

Câu 23. Cho hình vuông ABCD tâm O (các đỉnh ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh AB qua phép quay $Q(O;270^o)$ là:

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q\left(O;270^{o}\right)$ biến A thành B, B thành C.

Vậy ảnh của AB là BC.

Câu 24. Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{ABC}=60^{o}$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua qua phép quay $Q\left(A;60^{o}\right)$ là:

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q\left(A;60^{o}\right)$ biến C thành B; D thành C.

Vậy ảnh của CD là BC.

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông tại B và góc tại A bằng 60^{o} (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Về phía ngoài tam giác vẽ tam giác đều ACD. Ảnh của cạnh BC qua phép quay $Q\left(A;60^{o}\right)$ là:

A. AD. **B.** AI với I là trung điểm của CD.

C. CJ với J là trung điểm của AD. **D.** DK với K là trung điểm của AB.

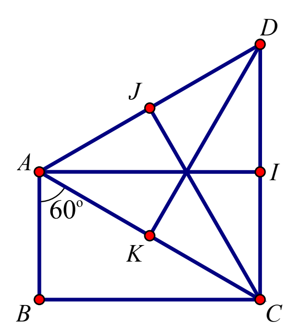
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết suy ra ABC là nửa tam giác đều, do đó $AC=2AB$.

Phép quay $Q\left(A;60^{o}\right)$ biến B thành K; C thành D.

Vậy ảnh của BC là DK.



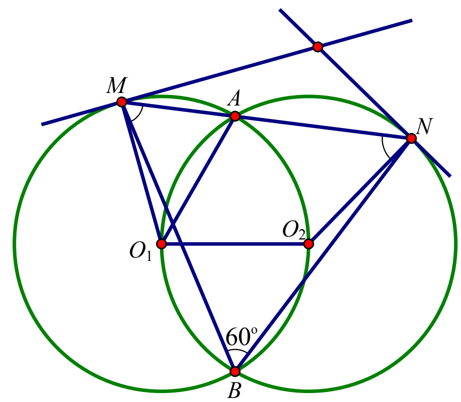
Câu 26. Cho hai đường tròn $\left(O_1\right),\left(O_2\right)$ bằng nhau; mỗi đường tròn đi qua tâm của đường tròn kia, cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường cát tuyến đi qua giao điểm A của chúng cắt một đường tròn ở M và cắt đường tròn kia ở N. Góc tạo bởi hai tiếp tuyến tại M, N của hai đường tròn bằng:

A. 45^{o}.   **B.** 60^{o}.   **C.** 90^{o}.   **D.** 120^{o}.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

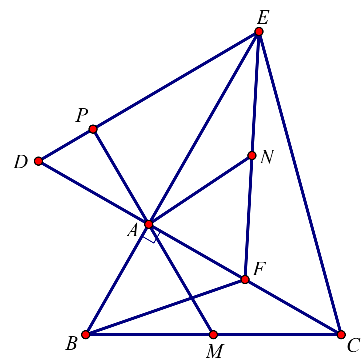
Từ giả thiết ta thấy ΔBO_1O_2 là tam giác đều, do đó $\widehat{O_1BO_2} = 60^{\text{o}}$, suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{IO_1B} = 60^{\text{o}}$ và $\widehat{ANB} = \widehat{IO_2B} = 60^{\text{o}}$. Như thế ΔBMN đều và $\widehat{MBN} = 60^{\text{o}}$.



Thực hiện phép quay Q tâm B với góc quay $\varphi = 60^{\text{o}}$. Phép quay này biến O_2 thành O_1 nên biến đường tròn (O_2) thành đường tròn (O_1); biến N thành M, nên biến tiếp tuyến tại N của (O_2) thành tiếp tuyến tại M của (O_1).

Suy ra góc hợp bởi hai tiếp tuyến tại M và N là 60^{o}.

Câu 27. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ta vẽ các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE; gọi M là trung điểm của BC. Để chứng minh đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng DE, một học sinh lập luận qua ba bước như sau:



Bước 1: Thực hiện phép quay Q tâm A góc quay . Phép quay này biến B thành F là trung điểm của AC; biến C thành E; do đó Q biến BC thành FE.

Bước 2: Như thế Q biến trung điểm M của BC thành trung điểm N của FE. Suy ra $\widehat{MAN} = 90^{\text{o}}$ hay $AM \perp AN$.

Bước 3: Mặt khác AN là đường trung bình của ΔDEF nên $AN // DE$; do vậy $AM \perp DE$.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh hoàn toàn đúng.   **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.   **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

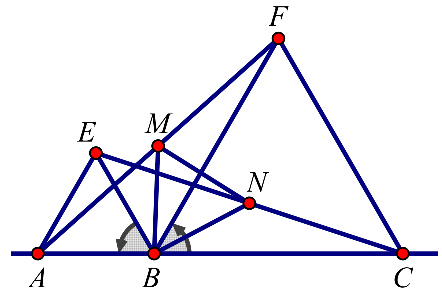
ĐÁP ÁN A.

Câu 28. Biết B nằm giữa A và C; trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC dựng các tam giác đều ABE, BCF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AF, CE. Để chứng minh tam giác AMN đều, một học sinh chứng minh qua ba bước như sau:

Bước 1: Thực hiện phép quay Q tâm B với góc quay $\varphi = 60^o$.

Phép quay Q biến E thành A; biến C thành F.

Bước 2: Do đó Q biến đoạn thẳng EC thành đoạn thẳng AF. Như thế Q biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF.



Bước 3: Từ kết quả trên suy ra: $BN = BM$ và $\widehat{NBM} = 60^o$.

Kết luận: Tam giác BMN là tam giác đều.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Chứng minh hoàn toàn đúng. **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

BÀI 6. KHÁI NIỆM PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm về phép dời hình

Các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều có một tính chất chung là bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Người ta dùng tính chất đó để định nghĩa phép biến hình sau đây.

Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nếu phép dời hình F biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M’, N’ thì MN = M’N’.

Nhận xét

1) Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

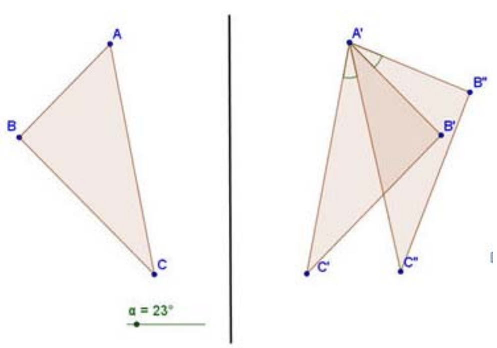
2) Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

Ví dụ 1.

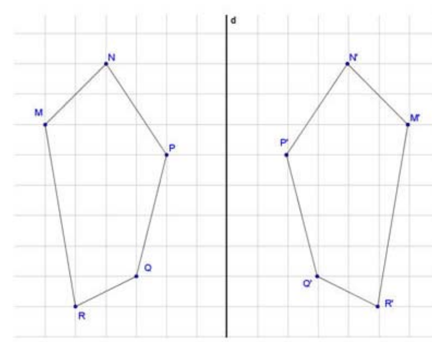
a) Tam giác A’B’’C’’ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình (h.1.39a).

b) Ngũ giác MNPQR là ảnh của ngũ giác M’N’P’Q’R’ qua phép dời hình (h.1.39b).

c) Hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép dời hình (h.1.40)



Hình 1.39 a

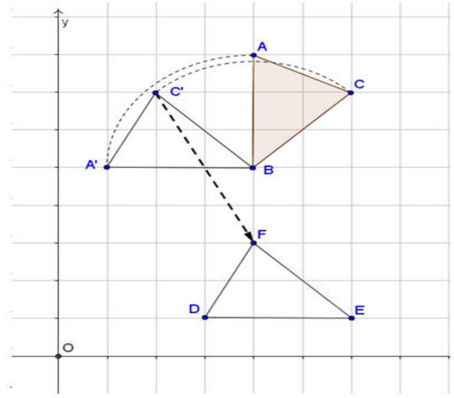


Hình 1.39 b

Ví dụ 2.

Trong hình 1.42 tam giác DEF là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B góc 90^0và phép tịnh tiến theo vectơ

$\vec{v} = \overrightarrow{C'F} = (2; -4)$.



Hình 1.42

II. Tính chất

Phép dời hình:

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;

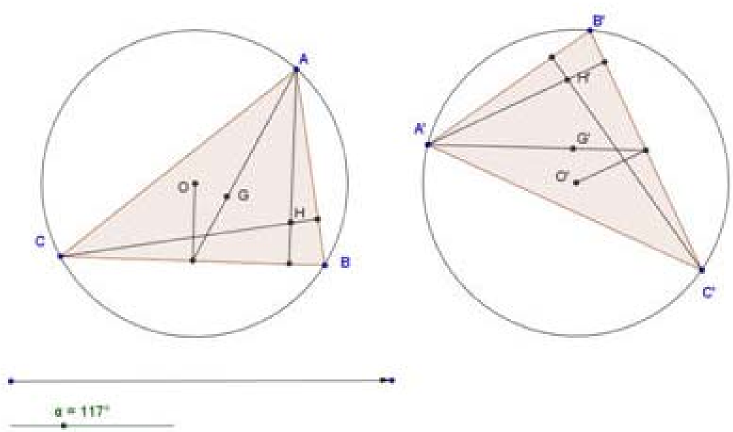
2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;

3)Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý.

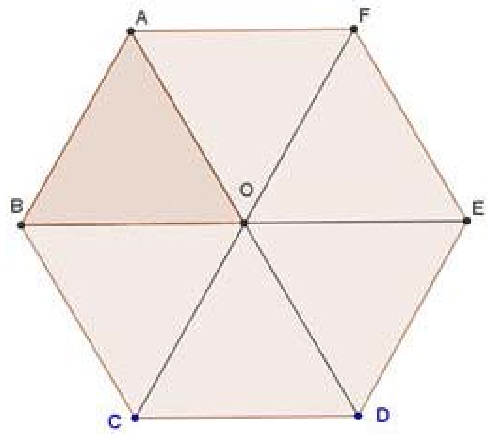
a) Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C' (h.1.44).



Hình 1.44

b) Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

Ví dụ 3. Cho lục giác đều ABCDEF, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó (h.1.45). Tìm ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 60^0 và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$.

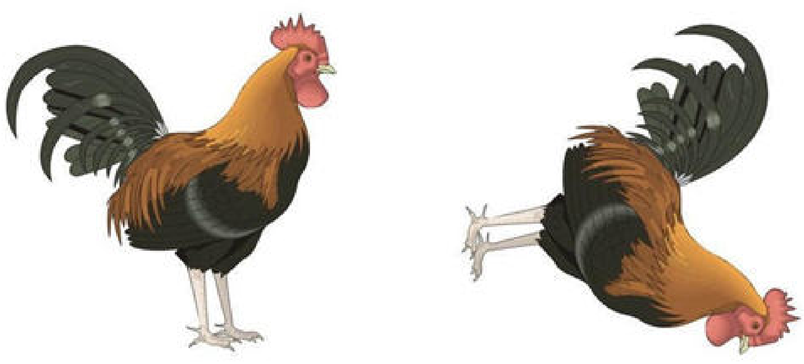


Hình 1.45

Giải

Gọi phép dời hình đã cho là F. Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác OAB qua phép dời hình F. Ta có phép quay tâm O, góc 60^0biến O, A và B lần lượt thành O, B, C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$ biến O, B và C lần lượt thành E, O và D. Từ đó suy ra F(O) = E, F(A) = O, F(B)=D. Vậy ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình F là tam giác EOD.

II. Khái niệm hai hình bằng nhau



Hình 1.47

Quan sát hình hai con gà trong tranh dân gian (h.1.47), vì sao có thể nói hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau?

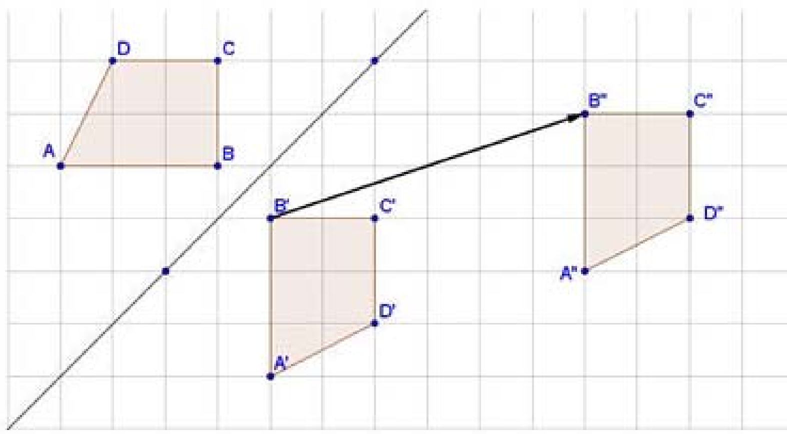
Chúng ta đã biết phép dời hình biến một tam giác thành tam giác bằng nó. Người ta cũng chứng minh được rằng với hai tam giác bằng nhau luôn có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Vậy hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Người ta dùng tiêu chuẩn đó để định nghĩa hai hình bằng nhau.

Định nghĩa

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

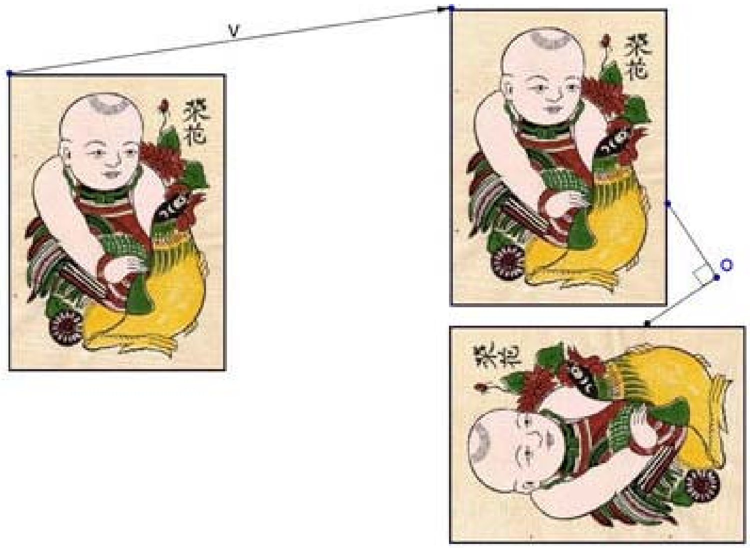
Ví dụ 4

a) Trên hình 1.48, hai hình thang ABCD và A’’B’’C’’D’’ bằng nhau vì có một phép dời hình biến hình thang ABCD thành hình thang A’’B’’C’’D’’.



Hình 1.48

b) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{B}$, phép quay tâm O góc 90^0 biến hình $\mathscr{B}$ thành hình $\mathscr{C}$. Do đó phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép quay tâm O góc 90^0 biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{C}$. Từ đó suy ra hai hình $\mathscr{A}$ và $\vec{v}$ bằng nhau (h.1.49).



Hình 1.49

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Vectơ tịnh tiến là $2\overrightarrow{HK}$ có H, K lần lượt nằm trên trục của phép thứ nhất và phép thứ hai sao cho HK vuông góc với các trục đó.

Câu 2. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng cắt nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm quay là giao điểm của hai trục d và d’ của hai phép đối xứng trục, góc quay bằng hai lần góc (d,d').

Câu 3. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng vuông góc với nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép đối xứng qua giao điểm của hai trục đối xứng.

Câu 4. Hợp thành của hai phép tịnh tiến là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Vectơ tịnh tiến bằng tổng hai vectơ tịnh tiến của hai phép đã cho.

Câu 5. Hợp thành của hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OO'}$, trong đó O là tâm của phép đối xứng thứ nhất, O' là tâm của phép đối xứng thứ hai.

Câu 6. Khi nào thì hợp thành của hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$ là phép đồng nhất?

A. Không khi nào.

B. Khi $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.

C. Khi $\vec{u} = \vec{v}$.

D. Khi $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Vì hợp thành là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

Câu 7. Khi nào thì hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ là phép đồng nhất?

A. Khi hai đường thẳng a và b trùng nhau.

B. Khi hai đường thẳng a và b song song.

C. Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau.

D. Không khi nào.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Khi a và b trùng nhau, nếu $Đ_a$ biến điểm M thành điểm N thì $Đ_b$ biến điểm N thành điểm M.

Câu 10. Cho hình vuông ABCD. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_{AC} và D_{BD}. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$.

B. Phép quay tâm D với góc quay $\frac{\pi}{2}$.

C. Phép đối xứng qua giao điểm của AC và BD.

D. Phép đối xứng qua đường thẳng BD.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nhận xét rằng F biến A thành C và B thành D.

Câu 11. Gọi F là hợp thành của hai phép đối xứng tâm D_O và $D_{O'}$. Khi đó F là:

A. phép đối xứng qua trung điểm của OO'.

B. phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OO'}$.

C. phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

D. phép đối xứng qua trung trực của OO'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hãy xác định ảnh của điểm O qua phép F.

Câu 12. Cho hình chữ nhật ABCD với M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi F là hợp thành của phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và phép đối xứng qua đường thẳng BC. Khi đó F là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đối xứng qua điểm M.

B. Phép đối xứng qua điểm N.

C. Phép đối xứng qua tâm O của hình chữ nhật.

D. Phép đối xứng qua đường thẳng MN.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bằng cách tìm ảnh của các điểm A và D qua phép F sẽ thấy các phương án A, B, C đều không đúng.

Câu 13. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q là phép quay tâm A biến điểm B thành điểm D, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng AD. Khi đó hợp thành của hai phép Q và Đ là:

A. Phép đối xứng qua tâm hình vuông. **B.** Phép đối xứng qua đường thẳng AC.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng AB. **D.** Phép đối xứng qua điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép hợp thành đó biến B thành D, biến D thành B và biến A thành A nên các phương án A, C, D đều không đúng.

Câu 14. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D, Q' là phép quay tâm C biến D thành B. Hợp thành của hai phép Q và Q' là:

A. Phép đối xứng qua điểm B. **B.** Phép đối xứng qua đường thẳng AC.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng AB. **D.** Phép đối xứng qua điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép hợp thành đó biến điểm B thành điểm B nên phương án B và D không đúng. Nó lại không biến điểm A thành điểm A nên phương án C không đúng.

Câu 15. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D, Q' là phép quay tâm C biến B thành D. Hợp thành của hai phép Q và Q' là:

A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$. **B.** Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AD}$.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng AB. **D.** Phép đối xứng qua điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép hợp thành đó biến điểm A thành điểm A', đối xứng với A qua D nên phương án B đúng.

Câu 16. Cho hình vuông ABCD, I là trung điểm cạnh AB. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép: Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ và phép đối xứng tâm D_I. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng qua điểm A. **B.** Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$.

C. Phép quay tâm D với góc quay $\frac{\pi}{2}$. **D.** Phép đối xứng qua đường thẳng BD.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép hợp thành đó biến điểm A thành điểm A, nên chỉ có phương án A đúng.

Câu 17. Cho hình vuông ABCD. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_{AB} và D_{CD}. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng qua điểm A.

B. Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AD}$.

C. Phép đối xứng qua điểm B.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 18. Cho tam giác cân ABC đỉnh A, đường cao AH, với $\widehat{BAC} = \varphi$. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_{AB} và D_{AH}. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép quay $Q(A;\varphi)$.

B. Phép đối xứng qua đường thẳng AC.

C. Phép đối xứng qua điểm A.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép hợp thành đó biến điểm A thành điểm A, và biến B thành D.

Câu 19. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Nếu phép dời hình biến điểm B thành điểm C và biến điểm A thành chính nó thì đó là:

A. Phép đối xứng qua trung trực của BC.

B. Phép quay tâm A góc quay (AB, AC).

C. Phép đối xứng qua trung trực của BC hoặc phép quay tâm A góc quay (AB, AC).

D. Phép đối xứng qua trung điểm cạnh BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Có thể xảy ra phương áng A hoặc phương án B.

Câu 20. Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Nếu phép dời hình biến điểm B thành điểm C, biến điểm C thành B thì đó là:

A. Phép đối xứng qua trung trực của BC.

B. Phép đối xứng qua trung điểm cạnh BC.

C. Phép quay tâm A góc quay (AB, AC).

D. Phép đối xứng qua trung trực của BC hoặc đối xứng qua trung điểm BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Có thể xảy ra phương án A hoặc phương án B.

Câu 21. Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 60^{o}. Nếu phép dời hình biến điểm A thành điểm B và điểm B thành điểm D thì nó biến điểm D thành:

A. Điểm C. **B.** Điểm A.

C. Điểm C hoặc điểm A. **D.** Điểm đối xứng với D qua C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nếu phép dời hình đó biến điểm D thành điểm D' thì hai tam giác ABD và BDD' phải bằng nhau. Vậy D' phải trùng với C hoặc A.

Câu 22. Cho hình chữ nhật ABCD, tâm O với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Nếu phép dời hình biến điểm A thành điểm N, M thành O và O thành P thì nó biến điểm Q thành:

A. Điểm D. **B.** Điểm C.

C. Điểm Q. **D.** Điểm B.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nếu phép dời hình đó biến điểm Q thành điểm Q' thì hai hình chữ nhật AMOQ và tứ giác NOPQ' phải bằng nhau. Vậy Q phải trùng với C.

Câu 23. Cho hình vuông ABCD, tâm O với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Nếu phép dời hình biến điểm A thành M, B thành P thì nó biến điểm M thành:

A. Điểm O. **B.** Điểm C.

C. Điểm Q. **D.** Điểm B.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép dời hình đó biến điểm M thành điểm M' thì vì M là trung điểm AB nên M' là trung điểm MP, nên M trùng với O.

Câu 24. Cho hình chữ nhật ABCD, tâm O với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Nếu phép dời hình biến tam giác AMQ thành tam giác NOP thì nó biến điểm O thành:

A. Điểm D. **B.** Điểm B.

C. Điểm Q. **D.** Điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu phép dời hình đó biến điểm O thành điểm O’ thì vì bốn điểm A, M, Q, O là bốn đỉnh của hình chữ nhật nên bốn điểm N, O, P, O’ cũng là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Suy ra O’ trùng với đỉnh C.

Câu 25. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép quay $Q(O;\varphi)$ với $\varphi = 180^o$ là phép đối xứng tâm $Đ_O$.

B. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ là một phép dời hình.

C. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ có một điểm bất động duy nhất là điểm O.

D. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ nếu biến điểm M thành điểm M’ thì ta có $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta thấy ngay các câu A, B, Cđều đúng.

Phép đối xứng tâm $Đ_O$ nếu biến điểm M thành điểm M’ thì ta có $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$.

Câu 26. Chọn mệnh đề đúng:

A. Hợp của hai phép quay là một phép quay.

B. Hợp của hai phép đối xứng tâm là một phép đối xứng tâm.

C. Một phép đối xứng tâm không thể có nhiều hơn một điểm bất động.

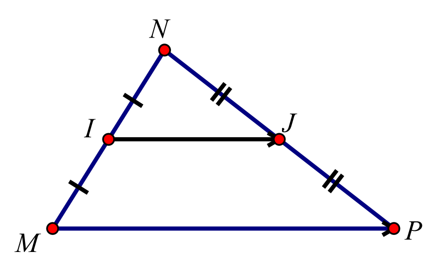
D. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ trong trường hợp nào đó có thể là một phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

- Hợp của hai phép quay là một phép quay, chỉ đúng khi hai phép quay này có cùng tâm quay.

- Ta hãy xét hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ với I và J khác nhau.



Với M là một điểm bất kì, ta gọi: $Đ_I(M) = N$ và $Đ_J(N) = P$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{NJ}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = 2\left(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$: không đổi.

Như thế phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{IJ}$ biến điểm M thành điểm P.

Vậy: hợp của hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ với I và J khác nhau là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = 2\vec{IJ}$.

- Phép đối xứng tâm $Đ_O$ có một điểm bất động duy nhất là O.

- Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ không thể là một phép đối xứng tâm.

Câu 27. Ta xét các mệnh đề:

1. Tam giác đều có 3 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.
2. Hình vuông có 4 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.
3. Ngũ giác đều có 5 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.
4. Lục giác đều có 6 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có 1 mệnh đề đúng. **B.** Có 2 mệnh đề đúng.

C. Có 3 mệnh đề đúng. **D.** Cả 4 mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

+ Đa giác đều n cạnh thì có n trục đối xứng.

+ Đa giác đều nếu số cạnh n chẵn thì có một tâm đối xứng, và nếu số cạnh n lẻ thì không có tâm đối xứng.

Như thế trong 4 câu trên có hai câu 4 và 4 là đúng.

Câu 28. Một hình H được gọi là có một tâm đối xứng nếu:

A. Tồn tại một phép tịnh tiến biến H thành chính nó.

B. Tồn tại một phép quay biến H thành chính nó.

C. Tồn tại một một phép đối xứng trục biến H thành chính nó.

D. Tồn tại phép đối xứng tâm biến H thành chính nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 29. Cho hai điểm phân biệt I và J. Thực hiên phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm M’, sau đó tiếp tục thực hiện phép đối xứng tâm $Đ_J$ biến điểm M’ thành điểm M’’. Như vậy phép biến hình biến điểm M thành M’’ là:

A. Một phép tịnh tiến. **B.** Một phép đối xứng tâm.

C. Một phép quay. **D.** Một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Theo cách chứng minh trong câu 29 thì hợp của hai phép đối xứng tâm với hai tâm phân biệt là một phép tịnh tiến.

Câu 30. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Ta thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục, phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M' và phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm M' thành điểm M''. Như vậy phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là:

A. Một phép tịnh tiến. **B.** Một phép đối xứng tâm.

C. Một phép quay. **D.** Một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi α là góc tạo bởi a và b, I và J lần lượt là trung điểm của MM' và M'M''.

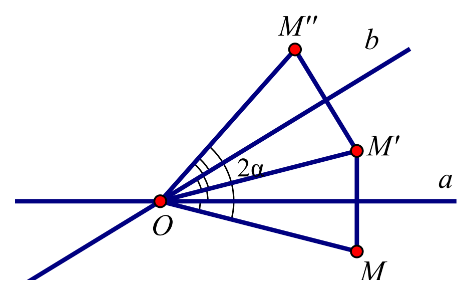
Theo tính chất của phép quay ta có:

+ $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = 2\widehat{IOM'}$.

+ $OM' = OM''$ và $\widehat{M'OM''} = 2\widehat{M'OJ}$.

Suy ra $OM = OM''$ và $\widehat{MOM''} = 2\widehat{IOJ} = 2\alpha$.

Như vậy phép biến hình biến M thành M'' là phép quay tâm O với góc quay 2α; tức là hợp của hai phép đối xứng trục với hai trục cắt nhau là một phép quay.



Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình H gồm có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y = 2x$ và $y = -2x$.

Ta xét các mệnh đề sau:

1. Trục hoành là trục đối xứng của hình H.
2. Trục tung là trục đối xứng của hình H.
3. Gốc tọa độ O là tâm đối xứng của hình H.

Trong các mệnh đề trên:

A. Không có mệnh đề nào đúng. **B.** Có một mệnh đề đúng.

C. Có hai mệnh đề đúng. **D.** Tất cả ba mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta thấy hai đường thẳng $a: y = 2x$ và $b: y = -2x$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành và trục tung và đi qua gốc tọa độ O. Suy ra cả ba mệnh đề 1, 2, 3 đều đúng.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $I(-1;2)$ và $J(2;4)$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ (theo thứ tự), điểm $M(1;-3)$ biến thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(2;-7)$. **B.** $(4;-1)$. **C.** $(7;1)$. **D.** $(0;-8)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{IJ}$. Suy ra $\vec{u}=(6;4)$.

Do đó: $M'=(6+1;4-3)=(7;1)$. Vậy $M'(7;1)$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;1)$ và $B(2;-1)$ và parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), parabol (P) biến thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-8x+12$. **B.** $y=x^2-4x+8$. **C.** $y=x^2+6x+4$. **D.** $y=x^2+4x-10$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\vec{u}=(4;-4)$.

Do đó: Phương trình (P') là $y+4=(x-4)^2 \Leftrightarrow y=x^2-8x+12$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$ và đường thẳng a có phương trình $y=-4x+1$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), đường thẳng a biến thành đường thẳng a' có phương trình là:

A. $y=4x+5$. **B.** $y=-4x+17$. **C.** $y=4x-12$. **D.** $y=-4x-4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\vec{u}=(2;8)$.

Do đó: Phương trình (a') là $y-8=-4(x-2)+1 \Leftrightarrow y=-4x+17$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;0)$, $B(1;1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+4x=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.　　**B.** $x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

C. $x^2+y^2+6x-2y-1=0$.　　**D.** $x^2+y^2+4y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\vec{u}=(4;2)$.

Do đó: Phương trình của đường tròn (T') là:

$(x-4)^2+(y-2)^2+4(x-4)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

Câu 36. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Đường thẳng đi qua tâm của một hình tròn thì chia hình tròn đó thành hai hình bằng nhau.

B. Đường thẳng đi qua tâm của một hình vuông thì chia hình vuông đó thành hai hình bằng nhau.

C. Đường thẳng đi qua tâm của một tam giác đều thì chia tam giác đều đó thành hai hình bằng nhau.

D. Đường thẳng đi qua tâm của một hình bình hành thì chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

+ Câu A hiển nhiên đúng.

+ Tâm O của hình vuông cũng là tâm đối xứng của nó, nên mọi đường thẳng qua tâm O của hình vuông đều chia hình vuông thành hai hình bằng nhau.

+ Trường hợp hình bình hành cũng tương tự như hình vuông.

+ Nếu ΔABC đều có tâm O, thì O không phải là tâm đối xứng của nó. Như thế những đường thẳng đi qua O không chứa các đường cao của ΔABC sẽ chia tam giác này thành hai hình không bằng nhau.

Câu 37. Cho hình H gồm có hình bình hành ABCD tâm I và hình bình hành EFGK tâm J. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Không tồn tại đường thẳng nào chia H thành hai hình bằng nhau.

B. Có vô số đường thẳng chia H thành hai hình bằng nhau.

C. Đường trung trực của đoạn thẳng IJ chia H thành hai hình bằng nhau.

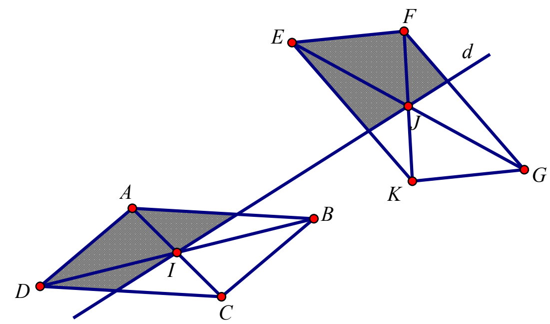
D. Đường thẳng qua I và J chia H thành hai hình bằng nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta đã biết, giao điểm của hai đường chéo của một hình bình hành cũng là tâm đối xứng của hình bình hành đó. Do đó, bất kì đường thẳng nào đi qua tâm của một hình bình hành đều chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Thế nên với hai hình bình hành ABCD và EFGK bất kì, nếu gọi I và J là các tâm đối xứng của chúng thì đường thẳng đi qua I và J sẽ chia mỗi hình bình hành ABCD và EFGK thành hai hình bằng nhau.



Câu 38. Cho hình H gồm có lục giác đều ABCDEF tâm I và hình thoi MNPQ tâm J. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Không tồn tại đường thẳng nào chia H thành hai hình bằng nhau.

B. Có vô số đường thẳng chia H thành hai hình bằng nhau.

C. Đường trung trực của đoạn thẳng IJ chia H thành hai hình bằng nhau.

D. Đường thẳng qua I và J chia H thành hai hình bằng nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Lý luận tương tự như câu 37.

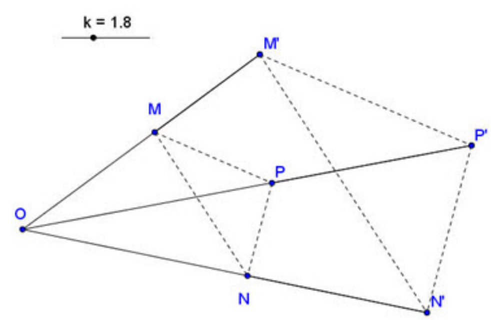
BÀI 7. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

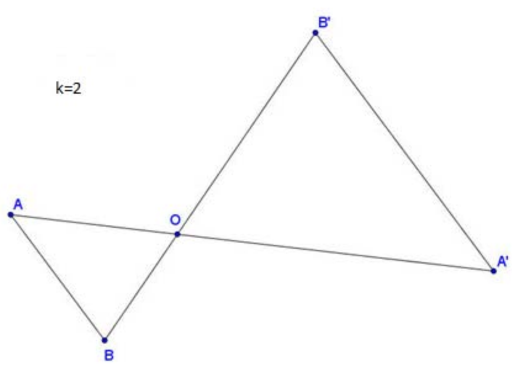
Định nghĩa

Cho điểm O và số $k \neq 0$ *.Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k (h.1.50).*

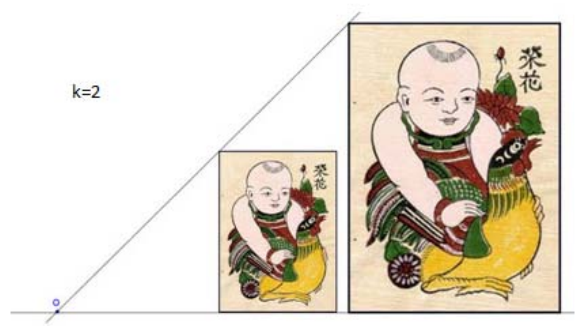


Hình 1.50

Phép vị tự tâm O, tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O;k)}$



Hình 1.51 a



Hình 1.51b

Ví dụ 1

a) Trên hình 1.51a các điểm A', B', O lần lượt là ảnh của các điểm A, B, O qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

b) Trong hình 1.51b phép vị tự tâm O, tỉ số 2 biến hình H thành hình H '.

1. Cho tam giác ABC. Gọi E và F tương ứng là trung điểm AB và AC. Tìm một phép tự biến B và C tương ứng thành E và F.

Nhận xét

1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

2) Khi k = 1, phép vị tự là phép đồng nhất

3) Khi k = -1, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.

4) $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O,\frac{1}{k})}(M')$.

II. TÍNH CHẤT

Tính chất 1

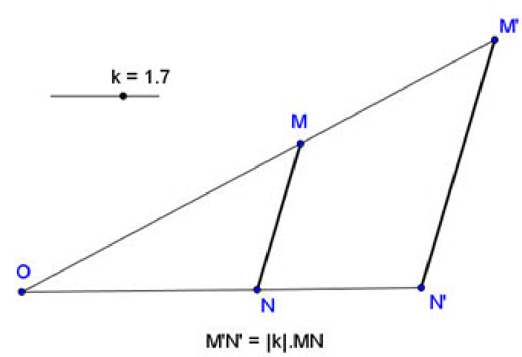
Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|.MN$.

Chứng minh

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k. Theo định nghĩa của phép vị tự ta có: $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON'} = k.\overrightarrow{ON}$ (h.1.52). Do đó:

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k.\overrightarrow{MN}$$

Từ đó suy ra M'N' = |k|.MN.



Hình 1.52

Ví dụ 2. Gọi A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tỉ số k. Chứng mir
$\overrightarrow{AB} = t.\overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t.\overrightarrow{A'C'}$

Giải

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k, ta có: $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = k.\overrightarrow{AC}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} = t.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'} = t\frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t.\overrightarrow{A'C'}$

Tính chất 2

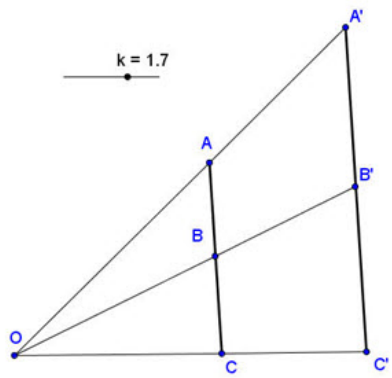
Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy (h.1.53).

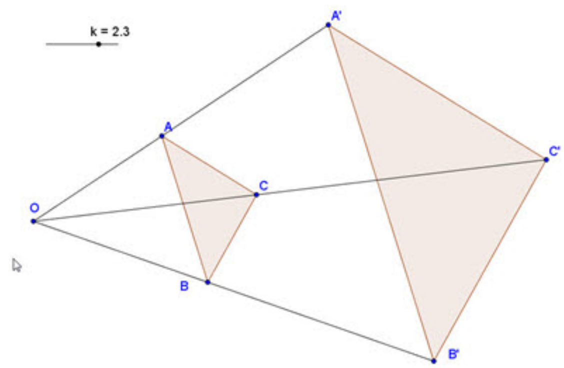
b)Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó (h.1.54).

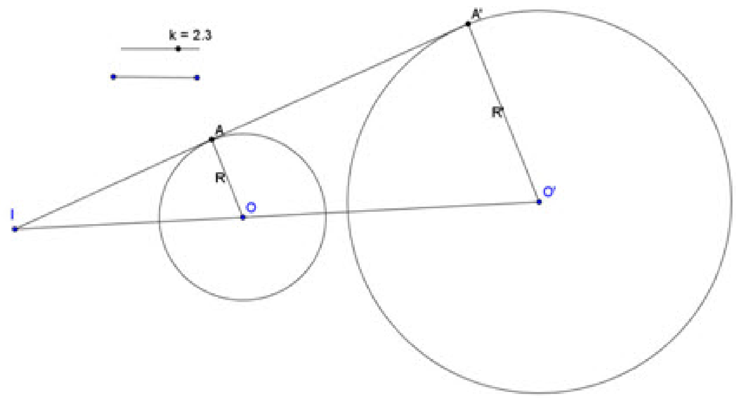
d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ (h.1.55)



Hình 1.53



Hình 1.54



Hình 1.55

II. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Ta đã biết phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Ngược lại, ta có định lý sau:

Định lý

Với hai đường tròn bất kỳ luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự đó được gọi là *tâm vị tự của hai đường tròn.*

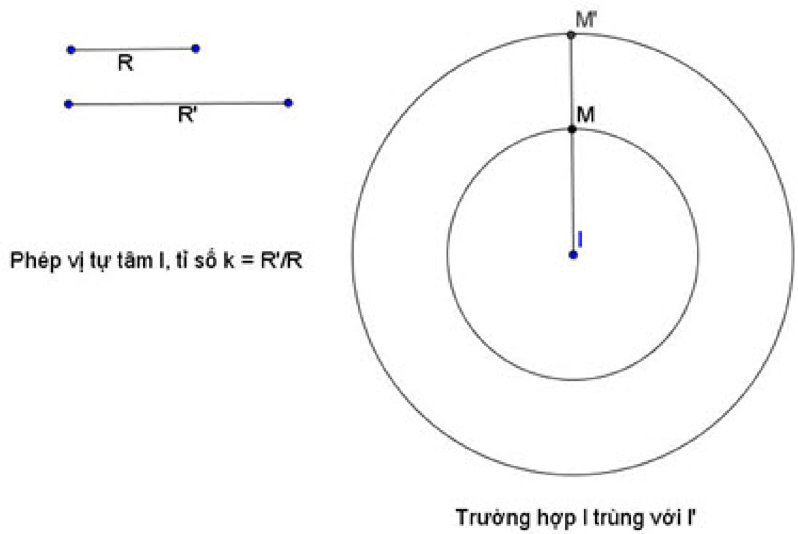
Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (I; R) và (I';R').

Có ba trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp I trùng với I'

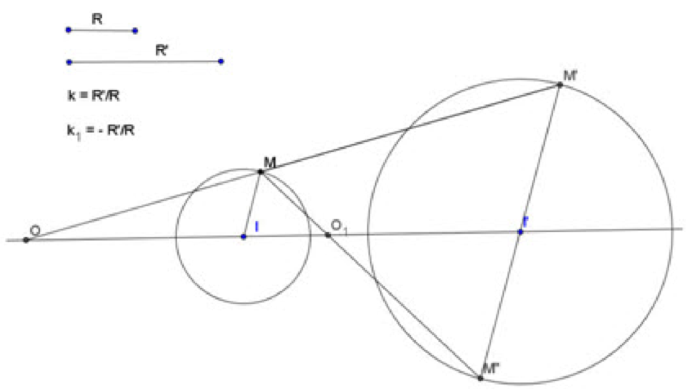
Khi đó, phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I; R') (h.1.58).



Hình 1.58

+ *Trường hợp I khác I’ và* $R \neq R'$

Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường trong (I; R). đường thẳng qua I’ song song với IM cắt đường tròn (I’; R’) tại M’ và M’’. Giả sử M, M’ nằm cùng phía đối với đường thẳng II’ còn M, M’’ nằm khác phía đối với đường thẳng II’. Giả sử đường thẳng MM’ cắt đường thẳng II’ tại điểm O nằm ngoài đoạn thẳng II’, còn đường thẳng MM’’ cắt đường thẳng II’ tại điểm O_1 nằm trong đoạn thẳng II’.



Hình 1.59

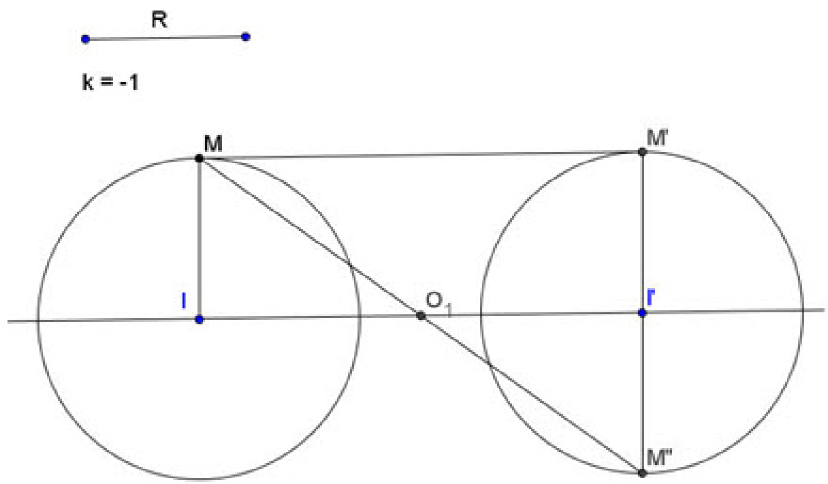
Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$

sẽ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I’; R’). Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là *tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên.*

+ *Trường hợp I khác I’ và R = R’.*

Khi đó $MM'//II'$ nên chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R}{R} = -1$

biến đường tròn (I;R) thành đường tròn (I’; R’). Nó chính là phép đối xứng tâm O_1.



Hình 1.60

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định phép vị tự biến điểm M cho sẵn thành điểm M' cho sẵn

Phương pháp giải: Ta có các trường hợp sau:

a. Nếu cho sẵn tâm O, ta tìm tỉ số k bằng $\dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}$.

b. Nếu cho sẵn k, ta tìm O là điểm chia đoạn MM' theo tỉ số k.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Hãy xác định tâm phép vị tự có tỉ số $k=3$ biến G thành A.

Giải

Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Ta có: $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OG}$ (tính chất trọng tâm). Hệ thức này chứng tỏ $V(O;3):G\mapsto A$. Vậy, tâm của phép vị tự phải tìm là trung điểm O của BC.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O. Tìm tỉ số của phép vị tự tâm G biến H thành O.

Giải

Theo định lí Ơ-le, ta có O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{GO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Hệ thức này chứng tỏ $V\left(G,-\frac{1}{2}\right)(H)=O$. Vậy, tỉ số của phép vị tự phải tìm là $-\frac{1}{2}$.

Dạng 2. Dùng phép vị tự để tìm tập hợp điểm

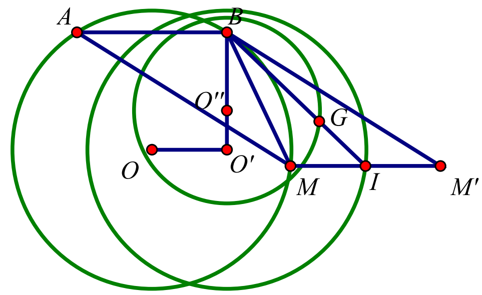
Phương pháp giải: Để tìm tập hợp những điểm N, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định phép vị tự $V(O;k):M\mapsto N$.

Bước 2. Tìm tập hợp H những điểm M, suy ra tập hợp những điểm N là H', ảnh của H qua phép vị tự $V(O;k)$.

Ví dụ 1: Cho đường tròn cố định (O), tâm O, bán kính R. Trên (O) lấy hai điểm cố định và phân biệt A, B. Gọi M là điểm di động trên (O) và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$. Tìm tập hợp các trọng tâm G của tam giác BMM'.

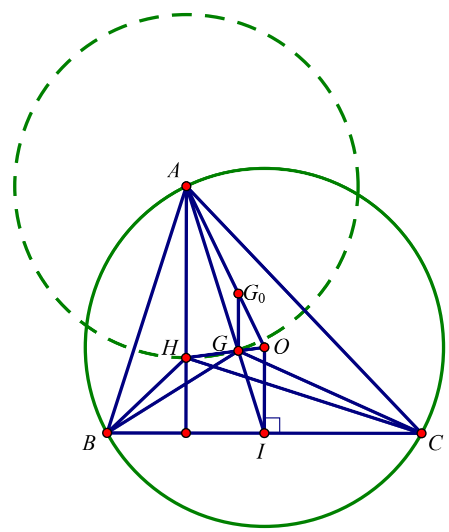
Giải



Gọi I là trung điểm của MM'. Ta có: $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Mà G là trọng tâm của tam giác BMM' nên $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$, suy ra $V\left(B;\frac{2}{3}\right):I\mapsto G$. Do đó ta tìm tập hợp những điểm I trước. Vì $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, nên $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(M)=I$. Từ đó, tập hợp (O') của những điểm I là đường tròn tâm O', với $\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và bán kính R. Mà $V\left(B;\frac{2}{3}\right):I\mapsto G$ nên tập hợp những điểm G là đường tòn tâm O'', ảnh của (O') qua phép vị tự $V\left(B;\frac{2}{3}\right)$ với $\overrightarrow{BO''}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO'}$ và bán kính $R'=\frac{2}{3}R$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) cố định, tâm O, bán kính R. Gọi A là điểm cố định trên (O); B và C là hai điểm di động trên (O) sao cho $\widehat{BAC}=\alpha\left(0^o<\alpha<90^o\right)$. Tìm tập hợp các trực tâm H của tam giác ABC.

Giải



Tam giác ABC nội tiếp trong (O) có bán kính R nên $BC=2R\sin\alpha$.

Gọi I là trung điểm của BC thì $OI=R\cos\alpha$. Tập hợp các điểm I là đường tròn $(O;R\cos\alpha)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, suy ra $G=V\left(A;\frac{2}{3}\right)(I)$.

Do đó, tập hợp những điểm G là đường tròn tâm G_0, với $G_0=V\left(A;\frac{2}{3}\right)(O)$ hay $\overrightarrow{AG_0}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\ (*)$ và bán kính $r=\frac{2}{3}R\cos\alpha$.

Mặt khác, theo định lí Ơ-le trong tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ nên $H=V(O;3)(G)$.

Gọi H_0 là ảnh của G_0 thì $\overrightarrow{OH_0}=3\overrightarrow{OG_0}$, suy ra: $\overrightarrow{OH_0}=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG_0}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AO}\left(\text{do }(*)\right)=\overrightarrow{OA}$.

Do đó $H_0 \equiv A$. Vậy, tập hợp những điểm H là đường tròn tâm A, bán kính $r' = 3r = 2R\cos\alpha$

Chú ý:

a. Kết quả bài toán này cho thấy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

b. Nếu dùng kết quả $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ (đã chứng minh trong bài phép đối xứng, phép tịnh tiến) thì ta có ngay $AH = 2OI = 2R\cos\alpha$ và suy ra tập hợp các điểm H như trên.

Dạng 3. Dùng phép vị tự để dựng hình

Phương pháp giải: Ta thực hiện các bước sau:

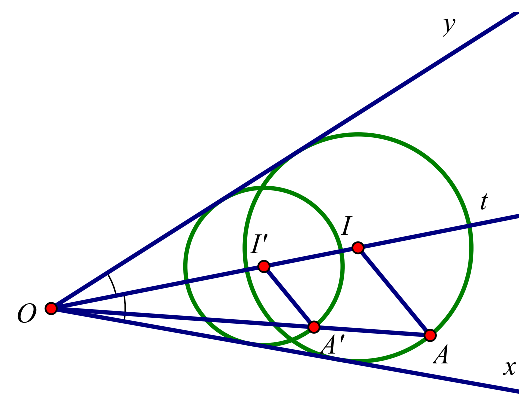
Bước 1. Xác định phép vị tự biến hình H phải dựng thành hình H'.

Bước 2. Dựng hình H' rồi suy ra hình H.

Ví dụ 1. Cho góc nhọn xOy trong đó có điểm A cho sẵn. Hãy dựng đường tròn qua A, tiếp xúc với Ox và Oy.

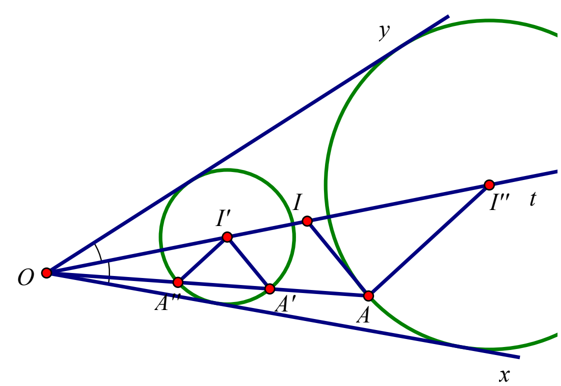
Giải

Giả sử bài toán đã giải xong, ta có đường tròn (I), tâm I đi qua A, tiếp xúc với Ox và Oy.



Phân tích:

Vì (I) tiếp xúc với Ox và Oy nên I thuộc phân giác Ot của $\widehat{xOy}$. Gọi A' là ảnh của A qua $V(O;k)$ với $k > 0$ và $I' = V(O;k)(I)$ thì $I'A' \parallel IA$. Do đó, I' thuộc đường thẳng qua A' và song song với AI.



Cách dựng:

- Ta dựng (I') trước: Dựng (I') tiếp xúc với Ox và Oy, có tâm I'.

- Đường thẳng OA cắt (I') tại A'.

- Đường thẳng qua A song song với A'I', cắt Ot tại I.

- Đường tròn tâm I, đi qua A là đường tròn phải dựng.

Chứng minh: Vì (I) là ảnh của (I') đi qua A' và tiếp xúc với Ox và Oy nên (I) qua A và tiếp xúc với Ox và Oy.

Biện luận: Vì OA cắt (I') tại 2 điểm phân biệt A' và A'' nên có đường thẳng d đi qua A và song song với A''I'. Đường thẳng d cắt Ot tại I''. Ta có đường tròn (I'') đi qua A và tiếp xúc với Ox và Oy. Bài toán có 2 nghiệm hình.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nhọn. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ có $MN = MQ\sqrt{2}$ sao cho M, N thuộc cạnh BC, P thuộc cạnh CA và Q thuộc cạnh AB.

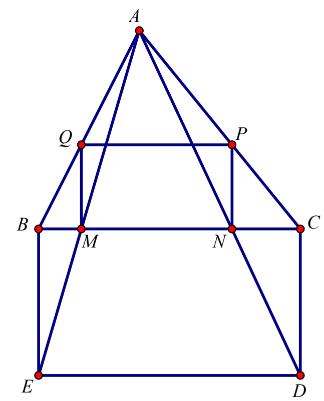
Giải

Giả sử bài toán đã giải xong, ta có hình chữ nhật MNPQ thỏa đề bài.

Phân tích:

Đặt: $\frac{AQ}{AB} = \frac{AM}{AE} = k > 0$, thì phép vị tự $V(A;k)$ biến hình chữ nhật MNPQ thành hình chữ nhật EDCB với $ED = EB\sqrt{2}$

(vì $MN = MQ\sqrt{2}$).



Cách dựng:

- Dựng hình chữ nhật EDCB khác phía với tam giác ABC đối với đường thẳng BC sao cho $ED = EB\sqrt{2}$.

- AD cắt BC tại N, AE cắt BC tại M.

- Qua M và N lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BC, cắt AC tại P và AB tại Q.

- MNPQ là hình chữ nhật phải dựng.

Bài toán chỉ có một nghiệm hình.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho phép vị tự tỉ số $k = 2$ biến điểm A thành điểm B và biến điểm C thành điểm D. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. **B.** $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **C.** $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Cho hình thang ABCD có hai cạnh đáy là AB và CD mà $AB = 3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số là:

A. $k=3$. **B.** $k=-\frac{1}{3}$. **C.** $k=\frac{1}{3}$. **D.** $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm vị tự là giao điểm hai đường chéo của hình thang.

Câu 3. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d’. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành d’?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép vị tự biến d thành d’ thì d’ phải song song hoặc trùng với d.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d’. Có bao nhiêu phép vị tự biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm vị tự là giao điểm của d và d’. Tỉ số vị tự là số k tùy ý khác 0.

Câu 5. Cho hai đường thẳng song song d và d’. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k=100$ biến mỗi đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Lấy hai điểm tùy ý A và A’ lần lượt nằm trên d và d’, rồi lấy điểm O sao cho $\overrightarrow{OA'}=100\overrightarrow{OA}$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=100$ sẽ biến d thành d’.

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song d và d’ và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Lấy đường thẳng a bất kì đi qua O cắt d và d' lần lượt tại A và A'. Gọi k là số sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, số k không phụ thuộc đường thẳng a. Phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.

Câu 7. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O;R)$ thành $(O';R)$?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Đó là phép vị tự có tâm là trung điểm OO', tỉ số vị tự bằng -1.

Câu 8. Cho đường tròn $(O;R)$. Có bao nhiêu phép vị tự với tâm O biến $(O;R)$ thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Tỉ số vị tự là 1 hoặc -1.

Câu 9. Cho đường tròn $(O;R)$. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O;R)$ thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép vị tự tỉ số 1 với tâm I bất kì.

Câu 10. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Với giá trị nào của k thì phép vị tự $V(G;k)$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'?

A. $k=2$.

B. $k=-2$.

C. $k=\frac{1}{2}$.

D. $k=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 11. Cho hai đường tròn (C) và (C’) không bằng nhau và không đồng tâm, cùng tiếp xúc với đường thẳng d. Có bao nhiêu phép vị tự biến (C) thành (C’) và biến d thành chính nó?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm vị tự là giao điểm của d với đường thẳng đi qua hai tâm của hai đường tròn.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(3;-1)$ có tỉ số $k=-2$. Khi đó nó biến điểm $M(5;4)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-11)$.

B. $M'(-7;11)$.

C. $M'(1;9)$.

D. $M'(1;-9)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta phải có: $\overrightarrow{IM'}=-2\overrightarrow{IM}$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tỉ số $k=2$ và biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $A'(-5;1)$. Khi đó nó biến điểm $B(0;1)$ thành điểm:

A. $B'(0;2)$.

B. $B'(12;-5)$.

C. $B'(-7;7)$.

D. $B'(11;6)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta phải có $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}$.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(1;1)$ tỉ số $k=-\frac{1}{3}$. Khi đó nó biến đường thẳng $5x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $15x+3y+10=0$.

B. $15x-3y-23=0$.

C. $15x+3y-23=0$.

D. $5x-3y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điều kiện cần là hai đường thẳng phải có cùng vectơ chỉ phương nên có thể loại ngay ba phương án A, C, D.

Câu 15. Cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình: $x+4y-1=0$ và $x+4y+3=0$. Phép vị tự có tâm $O(0;0)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b phải có tỉ số vị tự k bằng bao nhiêu?

A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=-\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đường thẳng Ox cắt a và b lần lượt tại $A(1;0)$ và $B(-3;0)$. Nếu k là tỉ số vị tự thì $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$. Vậy $k=-3$.

Câu 16. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số 2 và phép vị tự V' tâm O tỉ số $\frac{1}{2}$. Hợp thành của V và V' là:

A. Phép đối xứng qua trung điểm của OO'.

B. Phép đối xứng qua đường thẳng trung trực của OO'.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lấy điểm M bất kì, M' là ảnh của M qua V, M'' là ảnh của M' qua V' thì $\overrightarrow{MM''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.

Câu 17. Cho hình bình hành ABCD. Gọi phép biến hình F là hợp thành của phép vị tự $V(A;2)$ và phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CD}}$. Khi đó F là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép vị tự $V(B;2)$. **B.** Phép vị tự $V(C;2)$.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{CD}$. **D.** Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thấy ngay rằng hợp thành của hai phép đó biến điểm B thành chính nó.

Câu 18. Cho tam giác đều ABC, với A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Nếu phép đồng dạng biến A thành B', B thành C thì nó biến điểm C' thành:

A. Điểm A'. **B.** Trung điểm B'C. **C.** Điểm C'. **D.** Trung điểm BA'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nếu phép đồng dạng biến C' thành M thì vì C' là trung điểm của AB nên M phải là trung điểm B'C.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC, với A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Nếu phép đồng dạng biến A thành B', B thành C thì nó biến điểm C thành:

A. Điểm A'. **B.** Điểm C'.

C. Điểm đối xứng với C' qua B'. **D.** Điểm A' hoặc điểm đối xứng với C' qua B'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu phép đồng dạng biến C thành M thì vì tam giác ABC là tam giác đều nên tam giác B'CM là tam giác đều.

Câu 20. Cho hình chữ nhật ABCD với P và Q lần lượt là trung điểm của AB và BC. Nếu phép đồng dạng biến tam giác ADC thành tam giác QBP thì nó biến điểm D thành:

A. Tâm của hình chữ nhật. **B.** Trung điểm cạnh AD.

C. Trung điểm cạnh DC. **D.** Điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép đồng dạng biến B thành M thì vì bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của hình chữ nhật, nên Q, M, P, B cũng là bốn đỉnh của hình chữ nhật.

Câu 21. Phép vị tự tâm O với tỉ số k $(k \neq 0)$ là một phép biến hình biến điểm M thàn điểm M' sao cho:

A. $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$. **B.** $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. **C.** $OM' = kOM$. **D.** $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 22. Trong các phép biến hình sau đây, phép biến hình nào không có tính chất: Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó?

A. Phép đối xứng tâm. **B.** Phép tịnh tiến.

C. Phép đối xứng trục. **D.** Phép vị tự.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Giả sử ta có phép đối xứng trục $Đ_a$ và a là một đường thẳng cho trước. Ta xét đường thẳng Δ và gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng trục $Đ_a$.

- Nếu $\Delta // a$ thì $\Delta' // a$.

- Nếu $\Delta \equiv a$ thì $\Delta' \equiv a$.

- Nếu $\Delta \perp a$ thì $\Delta' \equiv \Delta$.

- Nếu Δ cắt a tại điểm I thì Δ' cắt a tại I.

Như thế nói chung: Phép đối xứng trục không có tính chất biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

Câu 23. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Tồn tại duy nhất một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

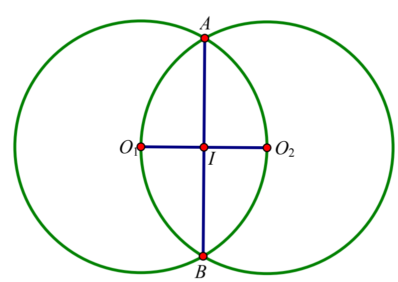
B. Tồn tại hai phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

C. Tồn tại một phép đối xứng trục biến đường tròn này thành đường tròn kia.

D. Tồn tại một phép đối xứng tâm biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.



Từ giả thiết suy ra hai đường tròn (O_1) và (O_2) bằng nhau. Ta thấy ngay:

- Có duy nhất một phép vị tự biến (O_1) thành (O_2), đó là phép vị tự trong.

- Có hai phép đối xứng trục biến đường tròn này thành đường tròn kia, với trục đối xứng là đường thẳng O_1O_2 hoặc đường thẳng qua hai giao điểm A, B của hai đường tròn.

- Gọi I là giao điểm của O_1O_2 và AB thì $Đ_I$ là phép đối xứng tâm duy nhất biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Câu 24. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác MNP là phép vị tự:

A. Tâm A, tỉ số $k = 2$.

B. Tâm O, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ với O là tâm của ΔABC.

C. Tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ với G là trọng tâm của ΔABC.

D. Tâm H, tỉ số $k = -2$ với H là trực tâm của ΔABC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Theo tính chất của trọng tâm ta có: $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Do đó phép vị tự $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ biến ΔABC thành ΔMNP nên biến đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP.

Ghi chú: Nhận thấy H là trực tâm tam giác ABC và O là trực tâm ΔMNP, nên H và O là hai điểm đối xứng với nhau qua phép vị tự $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$. Từ đó ta suy ra phép vị tự $V\left(H; \frac{1}{2}\right)$ biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Câu 25. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Phép vị tự $V(O;k)$ với $k \neq \pm 1$ luôn có một điểm bất động duy nhất.

B. Một phép vị tự có thể có vô số điểm bất động.

C. Phép vị tự là một phép dời hình.

D. Phép vị tự $V(O;k)$ nếu biến hai điểm M, N thành hai điểm M’, N’ thì $M'N' = |k|MN$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 26. Cho đường thẳng Δ và điểm $O \notin \Delta$. Một điểm M thay đổi trên Δ. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng OM. Khi M thay đổi trên Δ tập hợp các điểm N là:

A. Một đường thẳng qua O.

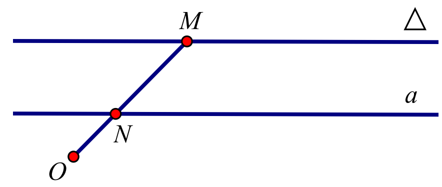
B. Một đường thẳng a song song với Δ mà $d(O;a) = \frac{1}{2}d(O;\Delta)$.

C. Một đường thẳng b song song với Δ mà $d(O;b) = 2d(O;\Delta)$.

D. Một đường thẳng c song song với Δ mà $d(O;c) = \frac{1}{3}d(O;\Delta)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.



Từ giả thiết suy ra $ON = \frac{1}{2}OM$.

Như thế phép vị tự $V\left(O;\frac{1}{2}\right)$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên Δ thì quỹ tích của N là đường

a ảnh của Δ qua phép vị tự trên.

Dễ thấy $d\left(O;a\right) = \frac{1}{2}d\left(O;\Delta\right)$.

Câu 27. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I và Δ là đường thẳng song song với đường thẳng AB. Một điểm M thay đổi trên Δ, gọi G là trọng tâm của ΔMAB. Khi M thay đổi trên Δ tập hợp các điểm G là:

A. Một đường thẳng đi qua I.

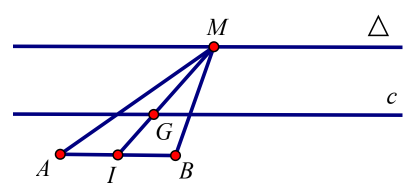
B. Một đường thẳng a song song với Δ mà $d\left(I;a\right) = \frac{1}{2}d\left(I;\Delta\right)$.

C. Một đường thẳng b song song với Δ mà $d\left(I;b\right) = \frac{2}{3}d\left(I;\Delta\right)$.

D. Một đường thẳng c song song với Δ mà $d\left(I;c\right) = \frac{1}{3}d\left(I;\Delta\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.



Theo tính chất của trọng tâm ta có: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.

Như thế phép vị tự $V\left(I;\frac{1}{3}\right)$ biến điểm M thành điểm G.

Vậy khi M thay đổi trên Δ thì quỹ tích của G là đường thẳng c, ảnh của Δ qua phép vị tự trên.

Dễ thấy: $d\left(I;c\right) = \frac{1}{3}d\left(I;\Delta\right)$.

Câu 28. Để chứng minh rằng phép vị tự biến một đường tròn thành một đường tròn, một học sinh lập luận qua ba bước như sau:

Bước 1: Giả sử $V\left(O;k\right)$ là phép vị tự tâm O tỉ số k. Ta xét đường tròn $\left(I;R\right)$.

Xác định điểm I’ là ảnh của I qua phép vị tự $V\left(O;k\right)$, tức là $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$, thì I’ là một điểm cố định.

Bước 2: Với M là một điểm bất kì, ta xác định điểm M’ là ảnh của M qua phép vị tự $V(O;k)$, tức là $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Suy ra: $I'M' = kIM$.

Bước 3: Do đó:

$M \in (I;R) \Leftrightarrow I'M' = kR \Leftrightarrow M'$ thuộc đường tròn $(I';kR)$.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh hoàn toàn đúng. **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy lập luận sai từ bước 2: Từ $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, suy ra $I'M' = |k| IM$.

Câu 29. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định. Một điểm M thay đổi trên $(O;R)$, gọi N là trung điểm của đoạn thẳng AM. Khi M thay đổi trên $(O;R)$, tập hộp các điểm N là:

A. Đường tròn tâm A bán kính R.

B. Đường tròn tâm O bán kính 2R.

C. Đường tròn tâm I bán kính $\frac{R}{2}$ với I là trung điểm của AO.

D. Đường tròn đường kính AO.

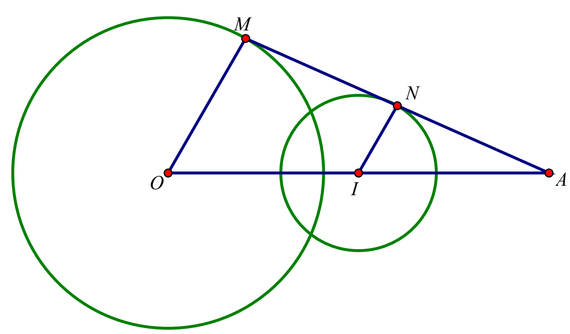
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Như thế phép vị tự $V\left(A;\frac{1}{2}\right)$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích điểm N là đường tròn (T) ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự trên.



Ta thấy (T) là đường tròn có tâm I là trung điểm của AO và bán kính là $\frac{R}{2}$.

Câu 30. Cho đường tròn $(O;R)$ và A là một điểm cố định trên đường tròn. Một điểm M di động trên đường tròn, gọi A’ là điểm đối xứng của A qua M. Tập hợp các điểm A’ khi M thay đổi trên $(O;R)$ là:

A. Đường tròn tâm A bán kính R.

B. Đường tròn tâm O bán kính 2R.

C. Đường tròn tâm B bán kính $2R$ với AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$.

D. Đường tròn tâm B bán kính $\frac{2R}{3}$ với AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$.

Hướng dẫn giải

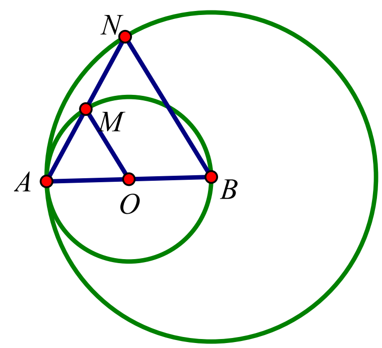
ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AM}$.

Như thế phép vị tự $V(A;2)$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích của N là đường tròn (T) ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự trên.

Ta thấy (T) là đường tròn có tâm B với AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$ và bán kính là 2R.



Câu 31. Cho đoạn thẳng AB với trung điểm I và đường tròn $(O;R)$ sao cho đường thẳng AB và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Một điểm M thay đổi trên $(O;R)$, gọi G là trọng tâm tam giác MAB. Khi M thay đổi trên $(O;R)$, tập hợp các điểm G là:

A. Một cung tròn qua hai điểm A và B.

B. Đường tròn tâm I bán kính $\frac{R}{3}$.

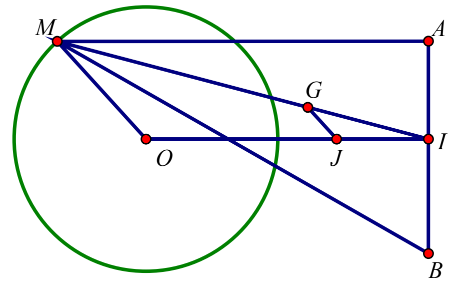
C. Đường tròn tâm J bán kính $\frac{R}{3}$ với $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$.

D. Đường tròn đường kính IO.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.



Như thế phép vị tự $V\left(I;\frac{1}{3}\right)$ biến điểm M thành điểm G.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích của G là đường tròn (T) ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự trên.

Ta thấy (T) là đường tròn tâm J bán kính $\frac{R}{3}$ với $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;5)$. Phép vị tự $V(O;3)$ biến điểm A thành điểm A' có tọa độ là:

A. $(-6;15)$. **B.** $(15;6)$. **C.** $(-15;6)$. **D.** $(-6;-15)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$.

Mà $A(-2;5)$, suy ra $\overrightarrow{OA'}=(-6;15)$.

Vậy $A'(-6;15)$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;4)$, $B(-3;2)$, $C(7;0)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Phép vị tự $V(O;-2)$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(4;6)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;-4)$. **D.** $(6;-8)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $G(1;2)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OG'}=-2\overrightarrow{OG}=(-2;-4)$.

Vậy $G'(-2;-4)$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2+2x+4$. Phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = 2x^2 + x + 4$. **B.** $y = -2x^2 - x + 2$. **C.** $y = -x^2 + 4x - 2$. **D.** $y = -4x^2 + x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{OM'}$.

Suy ra: $\begin{cases} x = -2x' \\ y = -2y' \end{cases}$

Thay vào phương trình của (P) ta được:

$-2y' = (-2x')^2 + (-2x') + 3 \Leftrightarrow -2y' = 4x'^2 - 2x' + 4 \Leftrightarrow y' = 2x'^2 - x' + 2$.

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y = 2x^2 - x + 2$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x + 4y - 1 = 0$. Phép vị tự $V(O;2)$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $x + 2y - 1 = 0$. **B.** $x - 2y + 1 = 0$. **C.** $3x + 6y + 5 = 0$. **D.** $2x + 4y + 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Giả sử phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM'}$

Suy ra: $\begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$

Thay vào phương trình của Δ ta được: $2.\frac{x'}{2} + 4.\frac{y'}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' - 1 = 0$.

Vậy phương trình của Δ' là $x + 2y - 1 = 0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tòn (T) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$. Phép vị tự $V(O;4)$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x-8)^2+(y+4)^2=64$.

B. $(x-4)^2+(y+2)^2=16$.

C. $(x-12)^2+(y+8)^2=16$.

D. $(x+8)^2+(y-4)^2=64$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép vị tự $V(O;4)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=4\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OM'}$

Suy ra: $\begin{cases} x=\frac{x'}{4} \\ y=\frac{y'}{4} \end{cases}$

Thay vào phương trình của (T) ta được: $\left(\frac{x'}{4}-2\right)^2+\left(\frac{y'}{4}+1\right)^2=4 \Leftrightarrow (x'-8)^2+(y'+4)=64$.

Vậy phương trình của (T') là: $(x-8)^2+(y+4)^2=64$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y^2=8x$, gọi F là tiêu điểm của (P). Phép vị tự $V(O;-4)$ biến F thành điểm F' có tọa độ là:

A. $(8;0)$.

B. $(-4;0)$.

C. $(-8;0)$.

D. $(-1;0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phương trình $y^2=8x$ có dạng $y^2=2px$. Suy ra $p=4$.

Do đó tiêu điểm của (P) là: $F(2;0)$.

Phép vị tự $V(O;-4)$ biến điểm F thành F' nên: $\overrightarrow{OF'}=-4\overrightarrow{OF}$. Suy ra $F'(-8;0)$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol (P) và (Q) có phương trình $y^2=12x$ và $y^2=-4x$. Nếu $V(O;k)$ là phép vị tự biến (P) thành (Q) thì tỉ số k của phép vị tự này bằng:

A. $k=-\frac{1}{2}$.

B. $k=-\frac{1}{3}$.

C. $k=-2$.

D. $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

+ $(P): y^2 = 12x \Rightarrow$ tiêu điểm của (P) là $F(3;0)$.

+ $(Q): y^2 = -4x \Rightarrow$ tiêu điểm của (Q) là $F'(-1;0)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OF'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$.

Vậy phép vị tự tâm O biến (P) thành (Q) có tỉ số vị tự là $k = -\frac{1}{3}$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;-2)$. Phép vị tự $V(I;3)$ biến điểm $M(-3;2)$ thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(-11;10)$. **B.** $(6;-8)$. **C.** $(11;-10)$. **D.** $(-6;2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}$.

Do đó: $\begin{cases} x'-1 = 3(-3-1) \\ y'+2 = 3(2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -11 \\ y' = 10 \end{cases}$

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và tam giác ABC với $A(0;7)$, $B(-3;2)$, $C(9;3)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Phép vị tự $V\left(I;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;4)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};4\right)$. **D.** $(1;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trọng tâm của tam giác ABC là $G(2;4)$.

Ta có: $\overrightarrow{IG'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IG}$

Do đó: $\begin{cases} x'-1 = -\frac{1}{2}(2-1) \\ y'-2 = -\frac{1}{2}(4-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = 1 \end{cases}$

Vậy $G'\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;0)$ và parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Phép vị tự $V(I;2)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y^2 = 8(x+1)$. **B.** $y^2 = 2(x-1)$. **C.** $y^2 = 4x+3$. **D.** $y^2 = -4(x+1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép vị tự $V(I;2)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì ta có: $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM'}$.

Do đó: $\begin{cases} x-1 = \frac{1}{2}(x'-1) \\ y-0 = \frac{1}{2}(y'-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} + \frac{1}{2} \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}$

Thay vào phương trình của (P) ta được: $\left(\frac{y'}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{x'}{2} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y'^2 = 8(x'+1)$.

Vậy phương trình của (P') là: $y^2 = 8(x+1)$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(5;-2)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Phép vị tự $V(A;-2)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 100$. **B.** $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 64$.

C. $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$. **D.** $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 25$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phương trình của (C) viết lại là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Suy ra (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R = 5$.

Phép vị tự $V(A;-2)$ biến điểm I thành điểm $I'(a;b)$ với $\overrightarrow{AI'} = -2\overrightarrow{AI}$.

Suy ra: $\begin{cases} a-5 = -2(3-5) \\ b+2 = -2(-1+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -4 \end{cases}$

Bán kính của (C') là: $R' = |-2|.5 = 10$.

Vậy phương trình của (C’) là: $(x-9)^2+(y+4)^2=100$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C) và (T) định bởi $(C):(x-1)^2+(y+5)^2=25, (T):x^2+y^2+6x-2y-15=0$. Tâm vị tự trong của (C) và (T) là điểm E có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(4;-1)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;-5)$ bán kính $R=5$.

+ Phương trình đường tròn (T) viết lại: $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

Suy ra (T) có tâm $J(-3;1)$, bán kính $r=5$.

Như thế hai đường tròn (C) và (T) bằng nhau, do đó chỉ có một phép vị tự biến (C) thành (T), đó là phép vị tự trong. Tâm vị tự trong là trung điểm A của IJ. Ta có: $A(-1;-2)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C) và (T) định bởi $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=4, (T):(x+3)^2+(y-3)^2=16$. Tâm vị tự ngoài của (C) và (T) là điểm P có tọa độ là:

A. $(6;5)$. **B.** $(7;-5)$. **C.** $(5;-7)$. **D.** $(4;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=2$.

+ Đường tròn (T) có tâm $J(-3;3)$, bán kính $r=4$.

Nếu P là tâm vị tự ngoài của (C) và (T) thì ta có: $\overrightarrow{PJ}=\frac{r}{R}\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{PI}$. Tọa độ của P là:

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{-3-2.2}{1-2}=7 \\ y_P=\dfrac{3-2.(-1)}{1-2}=-5 \end{cases}$$

Câu 45. Cho hai đường tròn (C) và (T) tiếp xúc với nhau tại điểm A. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Điểm A là một tâm vị tự của hai đường tròn.

B. Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài thì A là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn.

C. Nếu (C) và (T) tiếp xúc trong thì A là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

D. Hai đường tròn (C) và (T) luôn có hai tâm vị tự (trong và ngoài).

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

+ Hiển nhiên A là một tâm vị tự của hai đường tròn.

+ Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài thì A là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

+ Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài trong thì A là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn.

+ Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài và bán kính của hai đường tròn bằng nhau thì không có tâm vị tự ngoài.

BÀI 8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Phép biến hình f gọi là phép đồng dạng với tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M’, N’ của chúng, ta có: $M'N'=kMN$.

2. Định lí: Mọi phép đồng dạng f tỉ số k $(k>0)$ đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

3. Tính chất của phép đồng dạng

Phép đồng dạng:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số đồng dạng);
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k;
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R'=kR$;
- Biến một góc thành một góc bằng nó.

4. Hai hình đồng dạng

Định nghĩa: Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định các yếu tố cơ bản của phép đồng dạng

Phương pháp giải: Sử dụng định lí: “Mọi phép đồng dạng f tỉ số k $(k>0)$ đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình”.

Ví dụ: Cho phép đồng dạng f là hợp thành của phép quay tâm O, góc quay φ và phép vị tự cùng tâm O, tỉ số vị tự k $(k>0)$. Chứng minh rằng ảnh M’ của điểm M xác định bởi: $\begin{cases} OM'=kOM \\ (OM,OM')=\varphi \end{cases}$.

Giải

Gọi M_1 là ảnh của M trong phép quay tâm O, góc quay φ. Ta có: $\begin{cases} OM=OM_1 & (1) \\ (OM,OM_1)=\varphi & (2) \end{cases}$

Gọi M’ là ảnh của M_1 trong phép vị tự tâm O, tỉ số k $(k>0)$, ta có:

$$\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=kOM_1 & (3) \\ (OM_1,OM')=0 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có: $OM'=kOM$.

Từ (2) và (4) ta có: $(OM, OM') = \varphi$.

Tóm lại, phép đồng dạng f là hợp thành của phép quay $Q(O;\varphi)$ và phép vị tự $V(O;k), (k>0)$ biến điểm M thành điểm M’ xác định bởi: $\begin{cases} OM' = kOM \\ (OM, OM') = \varphi \end{cases}$.

Dạng 2. Tìm ảnh của một điểm M qua một phép đồng dạng

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa của phép đồng dạng.

Ví dụ: Chứng minh rằng, nếu một phép đồng dạng f biến tam giác ABC thành tam giác A’B’C’ thì trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm của tam giác A’B’C’.

Giải

- Gọi D là trung điểm của cạnh BC, thì: $f: D \mapsto D'$, D’ là trung điểm của cạnh B’C’.

Do đó: f biến trung tuyến AD thành trung tuyến A’D’.

Tương tự, f biến trung tuyến BE thành trung tuyến B’E’.

Vậy: $f: G = AD \cap BE \mapsto G' = A'D' \cap B'E'$, tức là f biến trọng tâm G của tam giác ABC thành trọng tâm G’ của tam giác A’B’C’.

- Gọi AA_1 là đường cao của tam giác ABC thì: $f: BC \mapsto B'C'; f: AA_1 \mapsto A'A_1'$.

Mà $AA_1 \perp BC$ nên $A'A_1' \perp B'C'$. Như thế f biến đường cao AA_1 của tam giác ABC thành đường cao $A'A_1'$ của tam giác A’B’C’.

Tương tự, f biến đường cao BB_1 của tam giác ABC thành đường cao $B'B_1'$ của tam giác A’B’C’.

Do đó f biến $H = AA_1 \cap BB_1$ thành $H' = A'A_1' \cap B'B_1'$, tức là f biến trực tâm H của tam giác ABC thành trực tâm H’ của tam giác A’B’C’.

Tương tự, ta cũng chứng minh được f biến tâm O của đường tròn (ABC) thành tâm O’ của đường tròn (A’B’C’).

Dạng 3. Chứng minh hai hình H và H’ đồng dạng

Phương pháp giải: Ta chứng minh có một phép đồng dạng f biến H thành H’.

Ví dụ: Chứng minh rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Giải

Cho hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có cùng số cạnh là n và có tâm lần lượt là O và O’.

Hai tam giác câu A_1OA_2 và $B_1O'B_2$ có góc ở đỉnh $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{B_1O'B_2} = \dfrac{2\pi}{n}$ nên đồng dạng. Do đó, đặt: $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{O'B_1}{OA_1}$ (1)

Gọi $V(O;k)$ là phép vị tự tâm O, tỉ số k, thì $V(O;k)$ biến đa giác đều $A_1A_2...A_n$ thành đa giác đều $C_1C_2...C_n$, và ta có: $\frac{C_1C_2}{A_1A_2}=k$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta: $C_1C_2=B_1B_2$.

Vậy, hai n – giác đều $C_1C_2...C_n$ và $B_1B_2...B_n$ có cạnh bằng nhau, nên có một phép dời hình D biến $C_1C_2...C_n$ thành $B_1B_2...B_n$.

Nếu gọi f là hợp thành của $V(O;k)$ và D, thì f là một phép đồng dạng biến n – giác đều $A_1A_2...A_n$ thành n – giác đều $B_1B_2...B_n$. Vậy hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ đồng dạng với nhau.

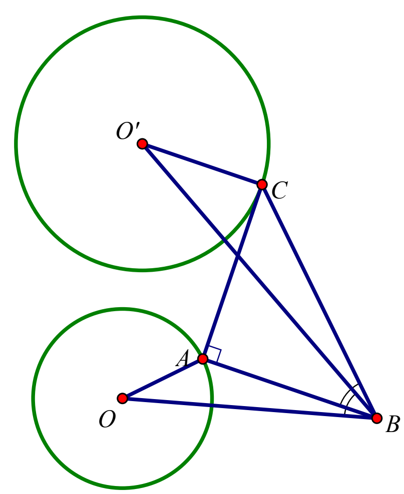
Dạng 4. Tìm tập hợp các điểm M' là ảnh của điểm M qua một phép đồng dạng

Phương pháp giải:

- Xác định phép đồng dạng $f:M\mapsto M'$.
- Tìm tập hợp H của các điểm M. Suy ra tập hợp các điểm M' là H', ảnh của H qua phép đồng dạng f.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông cân ở A (các đỉnh vẽ theo chiều dương, tức ngược chiều quay của kim đồng hồ). Biết đỉnh B cố định, đỉnh A di động trên đường tròn $(O;R)$. Tìm tập hợp các đỉnh C.

Giải



Tam giác ABC vuông cân ở A nên $BC=AB\sqrt{2}$. Xét phép vị tự tâm B tỉ số $k=\sqrt{2}$ biến A thành A', với $\overrightarrow{BA'}=\sqrt{2}\overrightarrow{BA}$. Ta có A' thuộc nửa đường thẳng BA và $BA'=BA\sqrt{2}$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} BC=BA' \\ \left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right)=-45^o \end{cases}$$

Do đó C là ảnh của A' trong phép quay tâm B, góc -45^o, suy ra C là ảnh của A qua phép hợp thành của phép vị tự $V\left(B;\sqrt{2}\right)$ và phép quay $Q\left(B;-45^o\right)$. Vậy, C là ảnh của A qua một phép đồng dạng tỉ số $k=\sqrt{2}$.

Theo giả thiết, A di động trên đường tròn $(O;R)$, nên tập hợp của C là đường tròn $\left(O';R\sqrt{2}\right)$, ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép đồng dạng đó. Tâm O' được xác định bởi:

$$\begin{cases} (BO,BO')=-45^o \\ BO'=BO\sqrt{2} \end{cases}.$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép vị tự với tỉ số $k > 0$ là một phép đồng dạng.

B. Phép đồng dạng là một phép dời hình.

C. Phép vị tự với tỉ số $k \neq \pm 1$ không phải là một phép dời hình.

D. Phép quay là một phép đồng dạng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép đồng dạng nói chung không phải là một phép dời hình. Thật vậy:

Nếu phép đồng dạng với tỉ số k biến điểm M, N thành M', N' thì ta có: $M'N' = kMN$.

Do đó, nếu $k \neq 1$ thì $M'N' \neq MN$, trong trường hợp này phép đồng dạng không phải là một phép dời hình.

Câu 2. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép vị tự với tỉ số k là một phép đồng dạng với tỉ số $|k|$.

B. Phép đồng dạng là một phép vị tự.

C. Nếu ta thực hiện liên tiếp một phép vị tự và một phép dời hình thì ta được một phép đồng dạng.

D. Nếu hai đa giác đồng dạng thì tỉ số các cạnh tương ứng của chúng bằng tỉ số đồng dạng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $P(3;-1)$. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự $V(O;4)$ và $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ điểm P biến thành điểm P' có tọa độ là:

A. $(4;-6)$. **B.** $(6;-2)$. **C.** $(-6;2)$. **D.** $(12;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Giả sử ta có: Phép vị tự $V(I;k_1)$ biến điểm M thành điểm N và phép vị tự $V(I;k_2)$ biến điểm N thành điểm P. Khi đó ta có: $\overrightarrow{ON} = k_1\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OP} = k_2\overrightarrow{ON}$. Suy ra $\overrightarrow{OP} = k_1k_2\overrightarrow{OM}$.

Như thế P là ảnh của M qua phép vị tự $V(O;k_1k_2)$.

Áp dụng kết quả trên phép vị tự biến điểm P thành điểm P' là phép vị tự V tâm I theo tỉ số $k = k_1k_2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

Ta được: $\overrightarrow{OP'} = -2\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = (-6;2)$.

Vậy $P'(-6;2)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Nếu có phép đồng dạng biến cạnh AB thành cạnh BC thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta dễ thấy tỉ số đồng dạng là $k = \frac{BC}{AB} = \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-2;1)$, $B(0;3)$, $C(1;-3)$, $D(2;4)$. Nếu có phép đồng dạng biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng:

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $AB = 2\sqrt{2}$, $CD = 5\sqrt{2}$.

Suy ra tỉ số của phép đồng dạng là $k = \frac{CD}{AB} = \frac{5}{2}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$, $(D): x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. Nếu có phép đồng dạng biến đường tròn (C) thành đường tròn (D) thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

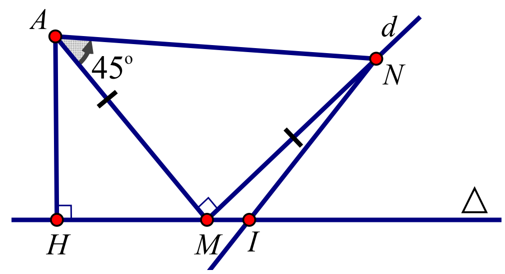
ĐÁP ÁN D.

+ Phương trình của $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R = 2$.

+ Phương trình của $(D): (x+6)^2 + (y-8)^2 = 100 \Rightarrow (T)$ có tâm $J(-6;8)$, bán kính $r = 10$.

Tỉ số của phép đồng dạng là $k = \frac{r}{R} = 5$.

Câu 7. Cho điểm A và đường thẳng Δ không đi qua A. Một điểm M thay đổi trên Δ. Vẽ tam giác AMN vuông cân tại M (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều ngược kim đồng hồ). Đi tìm tập hợp các điểm N, một học sinh lập luận qua ba bước như sau:



Bước 1: Từ giả thiết suy ra $\left(AM;AN\right)=45^{o}$ và $AN=\sqrt{2}AM$.

Suy ra N là ảnh của M qua phép đồng dạng gồm hợp của hai phép vị tự $V\left(A;\sqrt{2}\right)$ và phép quay $Q\left(A;45^{o}\right)$.

Bước 2: Do đó khi M thay đổi trên Δ thì tập hợp các điểm N là ảnh đường thẳng d của Δ qua đồng dạng trên.

Bước 3: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ, vẽ tam giác vuông cân AHI (hình vẽ); ta thấy d là đường thẳng qua I và tạo với Δ một góc 45^{o}.

Kết luận: tập hợp các điểm N là đường thẳng d.

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Lập luận hoàn toàn đúng. **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai hình tròn bất kì thì đồng dạng.

B. Hai đa giác đều bất kì có cùng số cạnh thì đồng dạng.

C. Hai elip bất kì thì đồng dạng.

D. Hai parabol bất kì thì đồng dạng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

+ Dễ thấy hai câu A và B đều đúng.

+ Hai elip chỉ đồng dạng khi và chỉ khi tỉ số độ dài các trục lớn và tỉ số độ dài các trục nhỏ của hai elip bằng nhau.

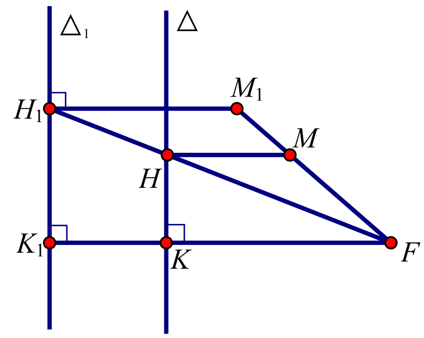
+ Hai parabol bất kì thì đồng dạng.

Thật vậy, ta hãy xem cách chứng minh bài toán tổng quát hơn sau đây: "Hai cô-nic có cùng tâm sai thì đồng dạng".

Ta xét hai cô-nic có cùng tâm sai e:

- Cô-nic (C) có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ.

- Cô-nic (C') có tiêu điểm F', đường chuẩn Δ'.



Ta có thể thực hiện liên tiếp một phép tịnh tiến và một phép quay (tức là thực hiện một phép dời hình) để biến F' thành F và biến Δ' thành Δ_1 song song với Δ. Phép dời hình này biến (C') thành cô-nic (C_1) bằng với (C'), (C_1) có tâm sai e.

Theo đề bài, ta sẽ chứng minh (C) và (C_1) đồng dạng với nhau.

Gọi K và K_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên Δ và Δ_1. Đặt $k = \frac{Fk_1}{Fk}$.

Thực hiện phép vị tự V tâm F tỉ số k, phép vị tự này biến Δ thành Δ_1.

Trên (C) lấy điểm M bất kì, gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ.

Phép vị tự V biến M thành M_1 và H thành H_1, H_1 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên Δ_1.

Hai tam giác FMH và FM_1H_1 đồng dạng cho: $\frac{MF}{MH} = \frac{M_1F}{M_1H_1} = e$.

Do đó M_1 nằm trên cô-nic (C_1). Suy ra phép vị tự V biến (C) thành cô-nic (C_1), nên hai cô-nic (C) và (C_1) đồng dạng.

Vậy bài toán được chứng minh.

Trở lại bài toán: Hai parabol bất kì thì đồng dạng vì chúng có cùng tâm sai $e = 1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Các câu hỏi trắc nghiệm sau đây đều sử dụng trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Câu 1. Cho đường thẳng d và qua điểm $A(3;1)$, có vectơ phép tuyến $\vec{n}=(2;3)$. Ảnh d' của d trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-6;4)$ có phương trình là:

A. $2x-3y-9=0$. **B.** $2x+3y-9=0$. **C.** $2x-3y+9=0$. **D.** $2x+3y+9=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Đường thẳng d qua $A(-4;3)$ với vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(1;\frac{1}{2}\right)$ có ảnh d' trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-2)$ là:

A. $x-2y+10=0$. **B.** $x+2y-10=0$. **C.** $x+2y+8=0$. **D.** $2x+y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 3. Phương trình trục đối xứng của $Đ_d: A\mapsto B$, với $A(2;1)$ và $B(-2;3)$ là:

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y-2=0$. **C.** $2x-y+2=0$. **D.** $2x+y+2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 4. Cho hai điểm $A\left(-1;\sqrt{3}\right)$ và $B\left(5;\sqrt{3}\right)$. Trục đối xứng d của $Đ_d$ có phương trình:

A. $y=x\sqrt{3}+1$. **B.** $y=x\sqrt{3}-1$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $y=3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 5. Cho đường thẳng $d: x+4y-5=0$. Ảnh của d trong phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-8;2)$ là d' có phương trình:

A. $x-4y-5=0$. **B.** $x-4y+5=0$. **C.** $2x+3y-6=0$. **D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 6. Đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$ có ảnh qua $Đ_d$ có phương trình:

A. $2x + y + 2 = 0$. **B.** $2x - y - 0 = 0$. **C.** $x - 2y + 2 = 0$. **D.** $x + 2y + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 7. Trong phép $Đ_O$, ảnh của đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R = 3$ có phương trình:

A. $(x-4)^2 + y^2 = 9$.

B. $(x+4)^2 + y^2 = 9$.

C. $(x-4)^2 + y^2 = 8$.

D. Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 8. Trong phép đối xứng $Đ_O$, ảnh của đường tròn có đường kính AB với $A(-3;1)$ và $B(2;-5)$ có phương trình:

A. $x^2 + y^2 - x - 4y + 13 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - x - 4y - 11 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - x + 4y + 11 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - x + 4y - 11 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 9. Ảnh của đường tròn đường kính AB với $A(-9;2)$ và $B(3;6)$ qua phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 15 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 15 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 15 = 0$.

D. Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 10. Ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$ qua $Đ_{Oy}$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 5 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 5 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 11. Cho phép quay tâm $I(1;2)$ biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Điểm bất biến của phép quay có tọa độ là:

A. $(2;1)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 12. Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(3;0)$. Tìm tâm I của phép quay có góc quay 90^o biến A thành B.

A. $I(1;2)$. **B.** $I(2;2)$. **C.** $I(-2;2)$. **D.** $I(-1;2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 13. Cho hai điểm $M(2;-2)$ và $N(2;2)$. Tìm tâm của phép quay có góc quay -90^o biến M thành N.

A. $(0;0)$. **B.** $(4;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(4;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 14. Cho phép quay tâm $I(2;0)$ có góc quay -90^o biến O thành O’ có tọa độ là:

A. $O'(2;-2)$. **B.** $O'(2;1)$. **C.** $O'(2;2)$. **D.** $O'(-2;-2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 15. Phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{3}{4}$, biến điểm B thành điểm C, thỏa mãn hệ thức:

A. $4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. **B.** $4\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}$. **C.** $4\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CB}$. **D.** $4\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 16. Hệ thức $4\overrightarrow{OA}=5\overrightarrow{OB}$ biệt thị phép vị tự tâm O, biến điểm A thành điểm B có tỉ số k bằng:

A. $\frac{5}{4}$.　　**B.** $\frac{5}{7}$.　　**C.** $\frac{4}{5}$.　　**D.** $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 17. Nếu có hệ thức $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB}$ thì phép vị tự tâm I biến điểm A thành điểm B có tỉ số k bằng:

A. $\frac{2}{3}$.　　**B.** $\frac{3}{2}$.　　**C.** $\frac{1}{3}$.　　**D.** Một số khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 18. Nếu có hệ thức $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ thì phép vị tự tâm I biến điểm A thành điểm B có tỉ số k bằng:

A. 2.　　**B.** $\frac{1}{2}$.　　**C.** -2.　　**D.** $-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 19. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$ biến điểm $M(-1;2)$ thành điểm M có tọa độ:

A. $(-2;-4)$.　　**B.** $(-2;4)$.　　**C.** $(2;-4)$.　　**D.** $(2;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 20. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \sqrt{2}$ biến điểm trực tâm của tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(4;0)$, $C(-2;-2)$ thành điểm nào sau đây?

A. $(2;\sqrt{2})$.　　**B.** $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$.　　**C.** $(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$.　　**D.** $(\sqrt{2};2\sqrt{2})$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 21. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$ biến đường tròn tâm $A(1;-4)$, bán kính $R = 3$ thành đường tròn có phương trình:

A. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8 = 0$.　　**B.** $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 32 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$.　　**D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 22. Trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;4)$, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-3=0$ có ảnh là đường tròn:

A. $x^2+y^2+2x+2y+14=0$.

B. $x^2+y^2-2x+2y-14=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y-14=0$.

D. $x^2+y^2+2x-2y+14=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 23. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=4$. Phép đồng dạng f biến (C) thành $(C'): x^2+y^2=9$ có tỉ số đồng dạng bằng:

A. 2.

B. 3.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 24. Phép đồng dạng tâm O, tỉ số $k=\sqrt{2}$, góc 45^o biến đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn (C’) có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=3$.

B. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=9$.

D. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 25. Trong phép đồng dạng tâm I, tỉ số k. Câu nào sau đây đúng?

A. Biến một đường thẳng d thành đường thẳng d’ song song với d.

B. Biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng A’B’ có độ dài bằng $\frac{AB}{k}$.

C. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

D. Biến góc α thành góc β có số đo bằng $k\alpha$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.