Sprawdzanie z pierwszego zadania numerycznego **NUM1**

Marian Wąchała

1 Polecenie

Zadanie polega na analizie błędu wartości `pochodnej wyliczonej wzorem` `pochodnej wyliczonej sposobem numerycznym` przy zmianie parametru h.

Należy sprawdzić zachowanie błędu $|D_h f(x) - f'(x)|$ na przykładzie funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ oraz punktu $x = 0.2$.

Wzory użyte w tym zadaniu do policzenia pochodnej w sposób numeryczny:

(a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

2 Użyte narzędzia

Program został napisany w języku „Python”. Do przeprowadzania obliczeń posłużyłem się biblioteką „numpy”, natomiast do wizualizacji danych za pomocą wykresów „matplotlib”

3 Wstęp teoretyczny

Na samym początku należy wyjaśnić, czym jest pochodna funkcji w punkcie. Pochodną funkcji w punkcie oznaczamy granicą:
$D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

h - przyrost zmiennej niezależnej.
Ponieważ komputery operują w systemie binarnym, mają trudności z dokładnym obliczaniem niektórych wartości granicznych. Liczby, które w systemie dziesiętnym mają skończone rozwinięcie, w systemie binarnym mogą być reprezentowane jako nieskończone ciągi. W efekcie, precyzja obliczeń w komputerach jest ograniczona przez architekturę sprzętową, która w przypadku liczb zmiennoprzecinkowych opiera się na 32-bitowych (typ float) i 64-bitowych (typ double) formatach. Oznacza to, że precyzja zapisu liczb zmiennoprzecinkowych jest ograniczona odpowiednio do około 7 miejsc po przecinku w formacie float i 16 miejsc w formacie double.

Z tego powodu komputery nie obliczają dokładnych wartości pochodnych, lecz ich przybliżenia, które uzyskuje się za pomocą metod numerycznych. Istnieją trzy główne wzory do obliczania pochodnych w sposób numeryczny, jednak na potrzeby tego zadania skorzystamy z dwóch z nich:
wzór metodę różnic w przód:
$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

wzór metodę różnic centralnych:
$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Aby zweryfikować skuteczność powyższych wzorów, obliczamy wielkość błędu między wyliczoną a faktyczną pochodną funkcji:

$$|D_h f(x) - f'(x)|$$

gdzie: $D_h f(x)$ - przybliżona wartość pochodnej
$f'(x)$ - faktyczna wartość pochodnej.

4 Wizualizacja zebranych danych

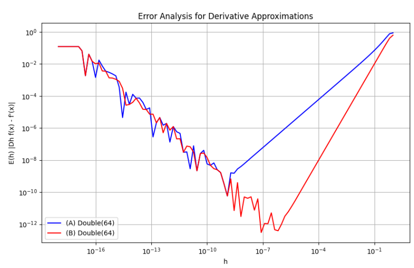

Figure 1: Wyniki dla double dla x = 0.2 i funkcji f(x) = sin(x^3)

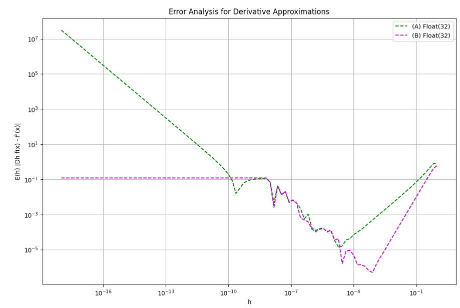

Figure 2: Wyniki dla float dla x = 0.2 i funkcji f(x) = sin(x^3)

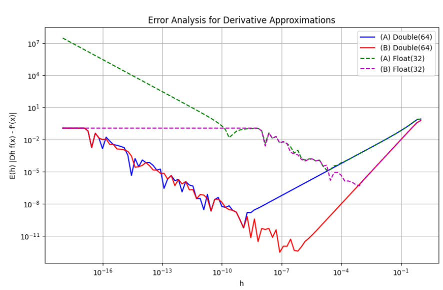

Figure 3: Wszystkie wykresy dla x = 0.2 i funkcji f(x) = sin(x^3)

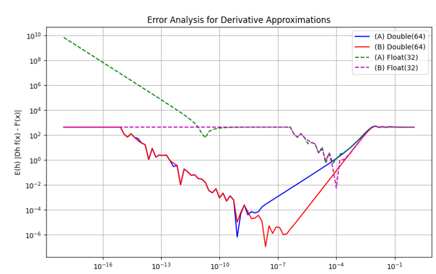

Figure 4: Wszystkie wykresy dla x = 12 i funkcji f(x) = sin(x^3)

Poniżej jeszcze przykład na funkcji: f(x) = cos(x^3)

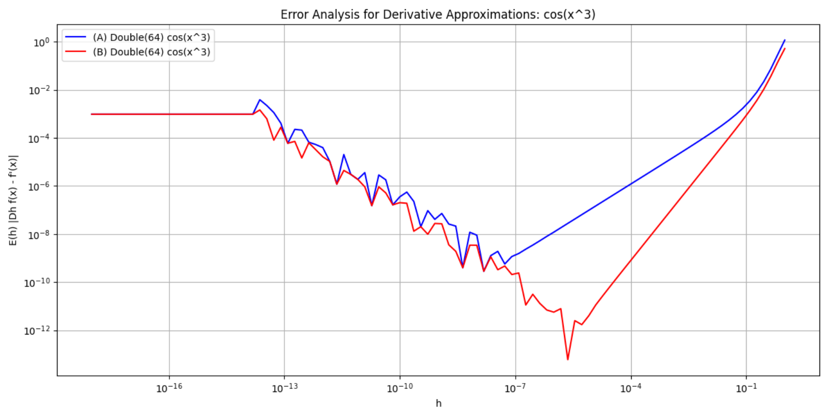

Figure 5: Wyniki dla double dla
x = 0.2 i funkcji f(x) = cos(x^3)

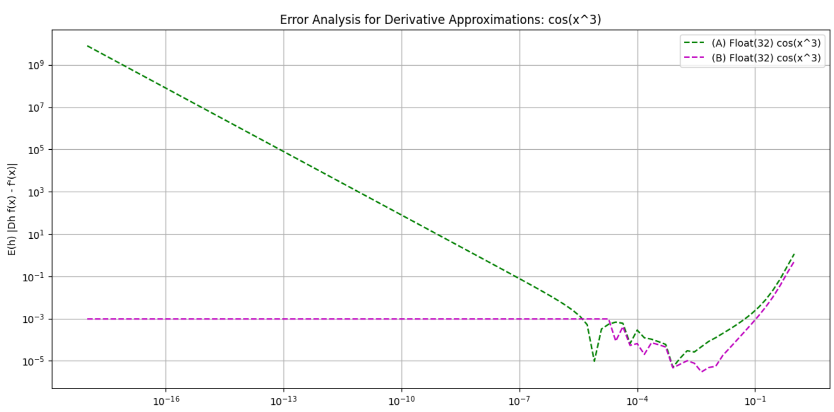

Figure 6: Wyniki dla float dla
x = 0.2 i funkcji f(x) = cos(x^3)

5 Analiza zebranych danych

Na przedstawionych wykresach widać, że błąd przybliżenia jest wysoki zarówno dla skrajnie niskich, jak i wysokich wartości parametru „h”. Optymalna wartość „h” znajduje się blisko środka skali, a jej dokładność zależy od wybranego wzoru na pochodną oraz typu zmiennoprzecinkowego.

Szukając optymalnej wartości „h”, musimy znaleźć kompromis między małą wartością, która zapewni precyzyjne przybliżenie, a większą, która zminimalizuje ryzyko utraty informacji zwaną „underflow”. Typ float, mający mniej bitów na przechowywanie danych, wymaga większego „h” niż double, co może prowadzić do utraty precyzji. Natomiast double, z dwukrotnie większą liczbą bitów, pozwala na użycie mniejszego „h”, co zwiększa dokładność obliczeń. Należy jednak pamiętać, że zbyt mała wartość „h” również może okazać się nieefektywna.