Sprawdzanie z pierwszego zadania numerycznego **NUM1**

Marian Wąchała

1 Polecenie

Zadanie polega na analizie błędu wartości `pochodnej wyliczonej wzorem` `pochodnej wyliczonej sposobem numerycznym` przy zmianie parametru h.

Należy sprawdzić zachowanie błędu $|D_h f(x) - f'(x)|$ na przykładzie funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ oraz punktu $x = 0.2$.

Wzory użyte w tym zadaniu do policzenia pochodnej w sposób numeryczny:

(a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

2 Użyte narzędzia

Program został napisany w języku Python, wykorzystując bibliotekę „numpy” do przeprowadzania obliczeń. Do wizualizacji wyników w formie wykresów posłużyłem się biblioteką „matplotlib”.

3 Wstęp teoretyczny

Na samym początku należy wyjaśnić, czym jest pochodna funkcji w punkcie. Pochodną funkcji w punkcie oznaczamy granicą:
$D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

h - przyrost zmiennej niezależnej.
Ponieważ komputery operują w systemie binarnym, mają trudności z dokładnym obliczaniem niektórych wartości granicznych. Liczby, które w systemie dziesiętnym mają skończone rozwinięcie, w systemie binarnym mogą być reprezentowane jako nieskończone ciągi. W efekcie, precyzja obliczeń w komputerach jest ograniczona przez architekturę sprzętową, która w przypadku liczb zmiennoprzecinkowych opiera się na 32-bitowych (typ float) i 64-bitowych (typ double) formatach. Oznacza to, że precyzja zapisu liczb zmiennoprzecinkowych jest ograniczona odpowiednio do około 7 miejsc po przecinku w formacie float i 16 miejsc w formacie double.

Z tego powodu komputery nie obliczają dokładnych wartości pochodnych, lecz ich przybliżenia, które uzyskuje się za pomocą metod numerycznych. Istnieją trzy główne wzory do obliczania pochodnych w sposób numeryczny, jednak na potrzeby tego zadania skorzystamy z dwóch z nich:
wzór metodę różnic w przód:
$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

wzór metodę różnic centralnych:
$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Aby zweryfikować skuteczność powyższych wzorów, obliczamy wielkość błędu między wyliczoną a faktyczną pochodną funkcji:

$$|D_h f(x) - f'(x)|$$

gdzie: $D_h f(x)$ - przybliżona wartość pochodnej
$f'(x)$ - faktyczna wartość pochodnej.

4 Wizualizacja zebranych danych

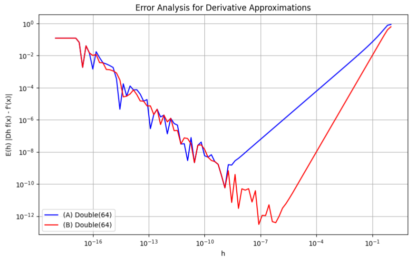

Figure 1: Wyniki dla double dla x = 0.2 i funkcji f(x) = sin(x^3)

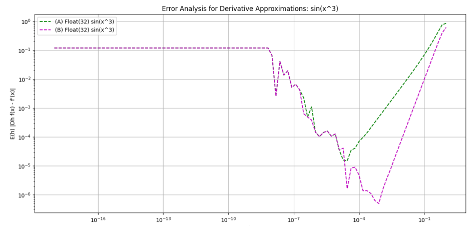

Figure 2: Wyniki dla float dla x = 0.2 i funkcji f(x) = sin(x^3)

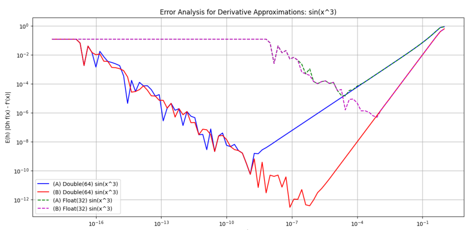

Figure 3: Wszystkie wykresy dla x = 0.2 i funkcji f(x) = sin(x^3)

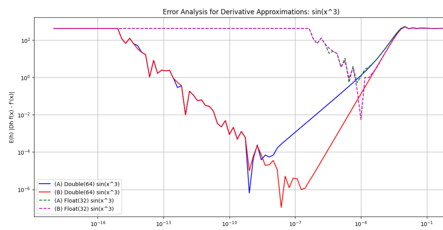

Figure 4: Wszystkie wykresy dla x = 12 i funkcji f(x) = sin(x^3)

Poniżej jeszcze przykład na funkcji: f(x) = cos(x^3)

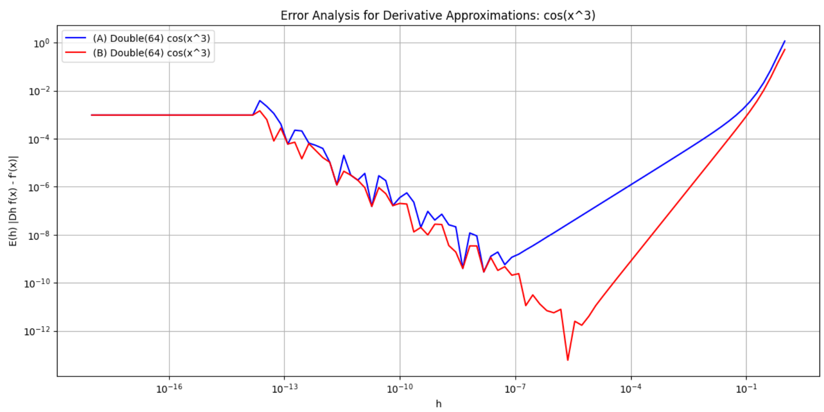

Figure 5: Wyniki dla double dla
x = 0.2 i funkcji f(x) = $\cos(x^3)$

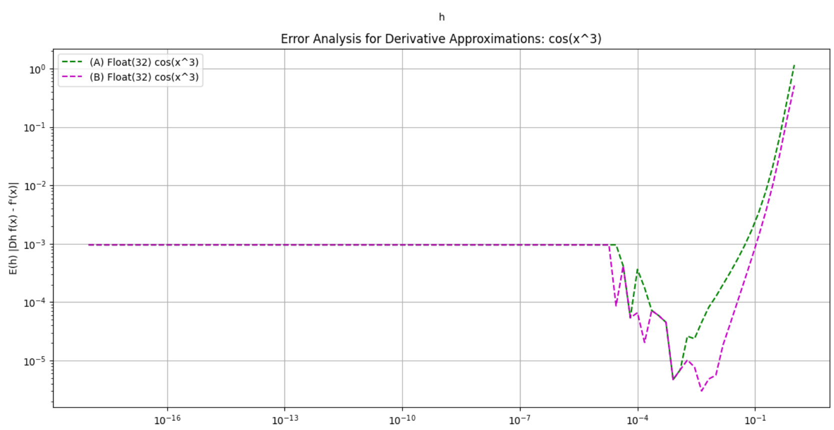

Figure 6: Wyniki dla float dla
x = 0.2 i funkcji f(x) = $\cos(x^3)$

5 Analiza zebranych danych

Na przedstawionych wykresach widać, że błąd przybliżenia jest wysoki zarówno dla skrajnie niskich, jak i wysokich wartości parametru „h". Optymalna wartość „h" znajduje się blisko środka skali, a jej dokładność zależy od wybranego wzoru na pochodną oraz typu zmiennoprzecinkowego.

Szukając optymalnej wartości „h", musimy znaleźć kompromis między małą wartością, która zapewni precyzyjne przybliżenie, a większą, która zminimalizuje ryzyko utraty informacji zwaną „underflow". Typ float, mający mniej bitów na przechowywanie danych, wymaga większego „h" niż double, co może prowadzić do utraty precyzji. Natomiast double, z dwukrotnie większą liczbą bitów, pozwala na użycie mniejszego „h", co zwiększa dokładność obliczeń. Należy jednak pamiętać, że zbyt mała wartość „h" również może okazać się nieefektywna.

Warto również omówić wpływ wybranego wzoru na precyzję obliczeń. Zebrane dane wyraźnie pokazują, że wzór z podpunktu b (metoda różnic centralnych) daje lepsze rezultaty niż wzór z podpunktu a (metoda różnic w przód). Różnice te wynikają z faktu, że wzór na pochodną centralną uwzględnia wartości funkcji zarówno z prawej, jak i z lewej strony punktu x, co lepiej odzwierciedla średnią wartość pochodnej. Natomiast wzór z podpunktu "a" wykorzystuje jedynie wartości położone na prawo od punktu x, co prowadzi do mniej dokładnych wyników.