Sprawozdanie z Zadania numerycznego **NUM2**

Marian Wąchała

22 października 2024

1 Polecenie

Zadanie numeryczne NUM2:
Zadane są macierze

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

oraz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & -1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}$$

Zdefiniujmy wektor

$$\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} -2.8634904630 \\ -4.8216733374 \\ -4.2958468309 \\ -0.0877703331 \\ -2.0223464006 \end{pmatrix}$$

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania macierzowe $A_i\mathbf{y} = \mathbf{b}$ dla $i = 1, 2$. Ponadto, rozwiąż analogiczne równania z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych, $A_i\mathbf{y} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Zaburzenie $\Delta\mathbf{b}$ wygeneruj jako losowy wektor o małej normie euklidesowej (np. $\|\Delta\mathbf{b}\|_2 \approx 10^{-6}$). Przeanalizuj jak wyniki dla macierzy A_1 i A_2 zależą od $\Delta\mathbf{b}$ i zinterpretuj zaobserwowane różnice.

2 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest rozwiązanie dwóch układów równań, a następnie obliczenie tych samych wektorów przy użyciu zaburzonych wektorów wyrazów wolnych oraz porównanie uzyskanych wyników.

3 Opis ćwiczenia

1) obliczam rozwiązania równań.
2) obliczam rozwiązania równań z zaburzonymi wektorami.
3) porównuję wyniki.

4 Wstęp teoretyczny

4.1 Wrażliwość układów równań na zaburzenia danych.

Wrażliwość układów równań na zaburzenia danych odnosi się do tego, jak małe zmiany danych wejściowych mogą wpływać na wyniki rozwiązania układu równań. Jest to istotne zagadnienie, ponieważ wejściowe dane mogą być obarczone błędami pomiarowymi lub innymi zakłóceniami. Umiejętność stwierdzenia, czy układ jest dobrze uwarunkowany, jest kluczowa, ponieważ wpływa to na dokładność wyników w systemach mających arytmetykę skończonej precyzji.

4.2 Współczynnik uwarunkowania macierzy

Współczynnik uwarunkowania macierzy, oznaczany jako $\kappa(A)$, jest miarą tego, jak bardzo rozwiązanie układu równań zmienia się w odpowiedzi na niewielkie zmiany w danych wejściowych. Wartość $\kappa(A)$ jest obliczana jako iloczyn normy macierzy A i normy jej macierzy odwrotnej A^{-1}:

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- Współczynnik uwarunkowania:
- Jeśli $\kappa(A) \approx 1$, układ równań jest dobrze uwarunkowany.
- Jeśli $\kappa(A) \gg 1$, układ jest źle uwarunkowany. W takim przypadku nawet małe zmiany w danych mogą prowadzić do dużych zmian w rozwiązaniu, co skutkuje niestabilnością obliczeniową.

W praktyce obliczenie współczynnika uwarunkowania może pomóc w ocenie jakości układu równań oraz w podjęciu decyzji dotyczących metod numerycznych, które powinny być zastosowane do jego rozwiązania.

5 Wyniki

5.1 Uwarunkowanie macierzy A1 oraz A2

na samym początku należy sprawdzić jak podatne na błędy są macierze A1 oraz A2, do tego celu posłużyłem się metodą linalg.cond() z biblioteki Numpy.
- uwarunkowanie dla macierzy A1 - 7.000000000838202
- uwarunkowanie dla macierzy A2 - 116451992037.37253

5.2 Wyniki dla niezaburzonych wartości

Do obliczenia układów równań użyłem metody linalg.solve() z biblioteki Numpy. Wynik dla układu równań $A_1\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0.02556195 \\ -1.35714283 \\ -3.94075752 \\ -0.48893629 \\ 0.10097805 \end{pmatrix}$$

Wynik dla układu równań $A_2\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -0.408759 \\ -0.56030065 \\ -4.11200041 \\ -1.5242021 \\ -0.7752022 \end{pmatrix}$$

5.3 Wyniki dla zaburzonych wartości

Ponieważ zaburzenia wektorów są generowane losowo, przy każdym uruchomieniu programu wynik będzie różnił się.
Wynik dla układu równań ($\mathrm{A}_1\mathbf{y} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$):

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0.02556199 \\ -1.35714295 \\ -3.94075719 \\ -0.48893615 \\ 0.1009778 \end{pmatrix}$$

Wynik dla układu równań ($\mathrm{A}_2\mathbf{y} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$):

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1318.14266017 \\ -2419.68698899 \\ 515.76288754 \\ 3141.43081889 \\ 2659.21328424 \end{pmatrix}$$

6 Analiza zebranych Wyników

Na podstawie zebranych danych można wywnioskować, że współczynnik uwarunkowania ma kolosalny wpływ na ostateczny wynik równania. Dla macierzy **A1** , której współczynnik uwarunkowania wynosił

7.000000000838202, obserwowane wyniki różnią się między sobą, jednak ta różnica nie jest aż tak znacząca. Umożliwia to zachowanie pewnej stabilności wyników, nawet w obliczu niewielkich zaburzeń w danych wejściowych.

Z kolei w przypadku macierzy **A2** , której współczynnik uwarunkowania wynosił aż 116451992037.37253, sytuacja jest znacznie gorsza. Tak wysoki współczynnik wskazuje na to, że układ równań jest źle uwarunkowany, co prowadzi do dużych wahań w wynikach w odpowiedzi na niewielkie zmiany w danych wejściowych. W rezultacie wyniki uzyskane z tą macierzą, zwłaszcza w przypadku wprowadzenia błędów, stają się niemal bezużyteczne.

Wysoka wrażliwość wyników na drobne perturbacje danych w macierzy **A2** podkreśla znaczenie analizy uwarunkowania w kontekście numerycznych rozwiązań układów równań. Takie analizy są kluczowe, aby zapewnić dokładność i niezawodność w obliczeniach.