Sprawdzanie z pierwszego zadania numerycznego **NUM1**

Marian Wąchała

1 Polecenie

Zadanie polega na analizie błędu wartości `pochodnej wyliczonej wzorem` `pochodnej wyliczonej sposobem numerycznym` przy zmianie parametru h.

Należy sprawdzić zachowanie błędu $|D_h f(x) - f'(x)|$ na przykładzie funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ oraz punktu $x = 0.2$.

Wzory użyte w tym zadaniu do policzenia pochodnej w sposób numeryczny:

(a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

2 Cel ćwiczenia

`Analiza błędu wartości pochodnej wyliczonej numerycznie w stosunku do pochodnej liczonej wzorem.`

3 Wstęp teoretyczny

Na samym początku należy wyjaśnić, czym jest pochodna funkcji w punkcie. Pochodną funkcji w punkcie oznaczamy granicą:
$D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

h - przyrost zmiennej niezależnej.
Ponieważ komputery używają systemu binarnego, nie są w stanie policzyć takiej granicy. Liczby, które w systemie dziesiętnym mają skończone rozwinięcie, mogą okazać się mieć nieskończone w systemie binarnym. Komputery bazują na systemach 32- i 64-bitowych (float i double), które to ograniczają precyzję zapisu liczb do 10^{-7} (float) i 10^{-16} (double).

Z tego powodu komputery nie liczą dokładnych wartości pochodnych, a ich przybliżenia, które można uzyskać poprzez wzory numeryczne. Wyróżniamy 3 wzory numeryczne, jednakże na potrzeby zadania będziemy używać dwóch:
wzór na różnicę w przód:
$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

wzór na różnicę centralną:
$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Aby zweryfikować skuteczność powyższych wzorów, obliczamy wielkość błędu między wyliczoną a faktyczną pochodną funkcji:

$$|D_h f(x) - f'(x)|$$

gdzie: $D_h f(x)$ - przybliżona wartość pochodnej
$f'(x)$ - faktyczna wartość pochodnej.

4 Wyniki

Wyniki dla Double

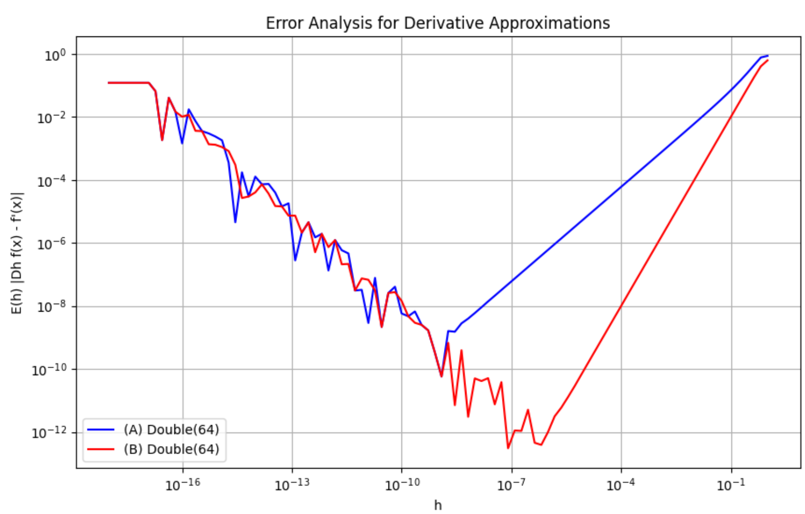

Figure 1: Wyniki dla double

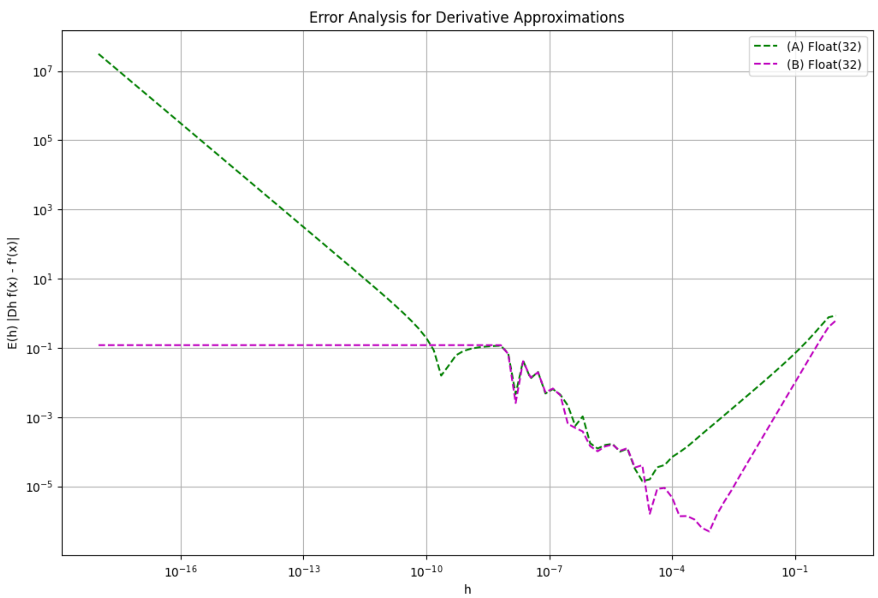

Figure 2: Wyniki dla float

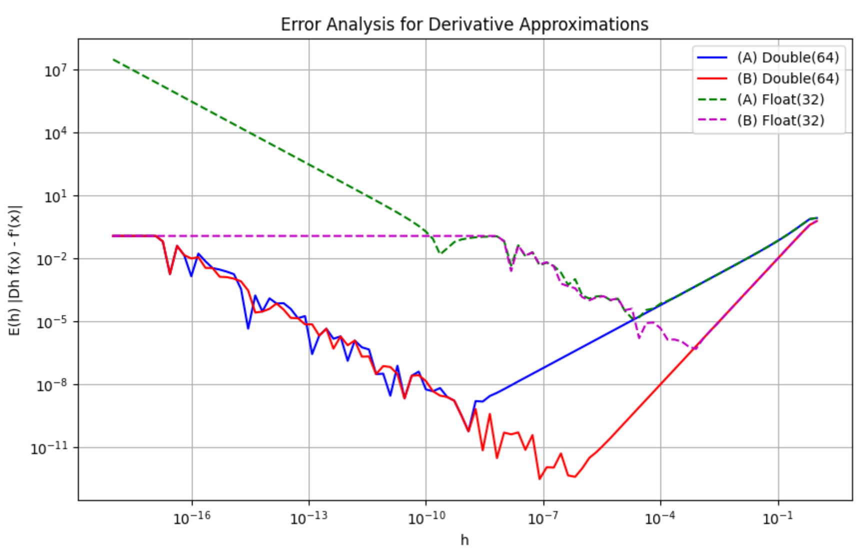

Figure 3: Wszystkioe

5 Wnioski

Dobranie odpowiedniej wartości dla h pozwala na dokładniejsze wyliczenie pochodnej. Jeśli wybierzemy za małe h, powstaną nam duże błędy spowodowanem zaokrąglaniem przy odejmowaniu.
Natomiast, jeśli wartość h będzie zbyt duża otrzymamy błąd związany z obcinaniem nieskończonego rozwinięcia Taylora.
Na podstawie wyników przedstawionych na wykresach możemy odczytać dla typu double ze wzorem na pochodną centralną (podpunkt b).