

Sprawdzanie z pierwszego zadania numerycznego NUM1

Marian Wąchała

1 Polecenie

Zadanie polega na analizie błędu wartości pochodnej wyliczonej wzorem pochodnej wyliczonej sposobem numerycznym przy zmianie parametru h .

Należy sprawdzić zachowanie błędu $|D_h f(x) - f'(x)|$ na przykładzie funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ oraz punktu $x = 0.2$.

Wzory użyte w tym zadaniu do policzenia pochodnej w sposób numeryczny:

$$(a) \quad D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(b) \quad D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

2 Instrukcja uruchomienia

Aby uruchomić program, należy użyć `make run` (program rysuje wszystkie wykresy).

3 Cel ćwiczenia

Analiza błędu wartości pochodnej wyliczonej numerycznie w stosunku do pochodnej liczonej wzorem.

4 Wstęp teoretyczny

Na samym początku należy wyjaśnić, czym jest pochodna funkcji w punkcie. Pochodną funkcji w punkcie oznaczamy granicą:

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h - przyrost zmiennej niezależnej.

Ponieważ komputery używają systemu binarnego, nie są w stanie policzyć takiej

granicy. Liczby, które w systemie dziesiętnym mają skończone rozwinięcie, mogą okazać się mieć nieskończone w systemie binarnym. Komputery bazują na systemach 32- i 64-bitowych (float i double), które to ograniczają precyzję zapisu liczb do 10^{-7} (float) i 10^{-16} (double).

Z tego powodu komputery nie liczą dokładnych wartości pochodnych, a ich przybliżenia, które można uzyskać poprzez wzory numeryczne. Wyróżniamy 3 wzory numeryczne, jednakże na potrzeby zadania będziemy używać dwóch:

wzór na różnicę w przód:

$$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wzór na różnicę centralną:

$$D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Aby zweryfikować skuteczność powyższych wzorów, obliczamy wielkość błędu między wyliczoną a faktyczną pochodną funkcji:

$$|D_h f(x) - f'(x)|$$

gdzie: $D_h f(x)$ - przybliżona wartość pochodnej

$f'(x)$ - faktyczna wartość pochodnej.

5 Wyniki

Wyniki dla Double

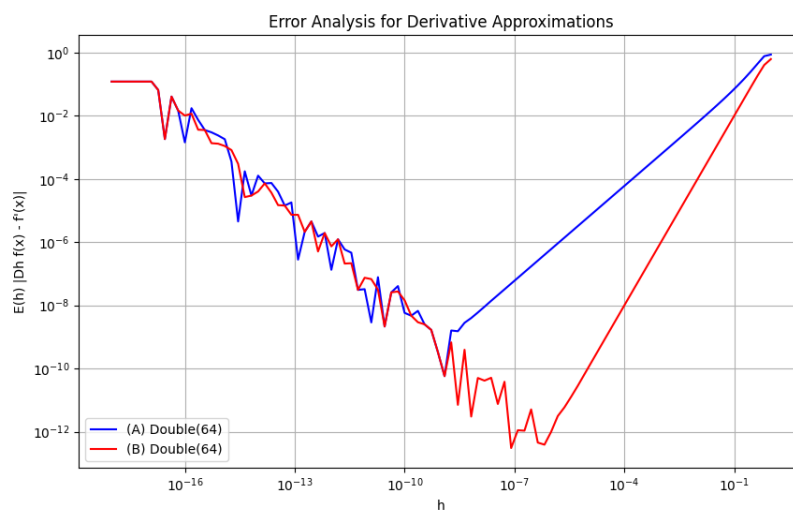


Figure 1: Wyniki dla double

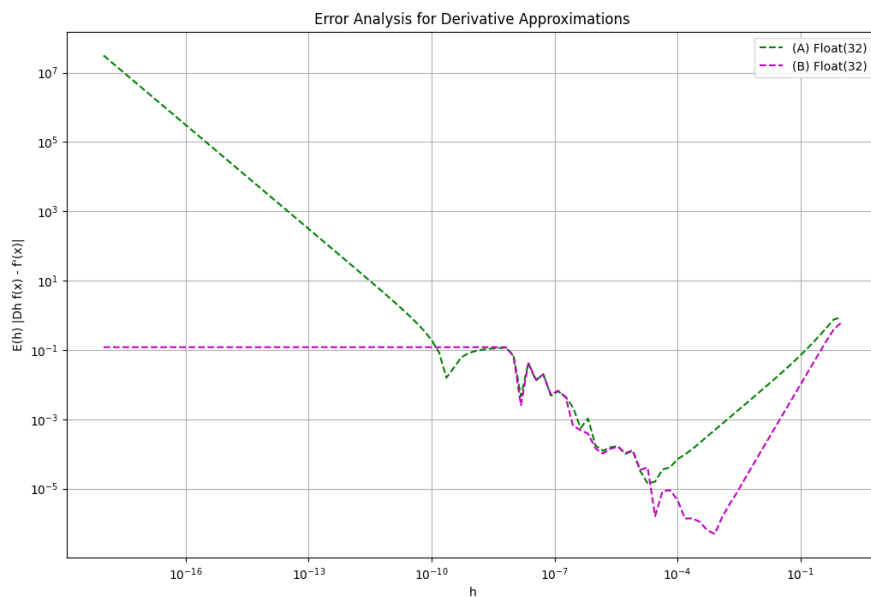


Figure 2: Wyniki dla float

6 Wnioski

Dobranie odpowiedniej wartości dla h pozwala na dokładniejsze wyliczenie pochodnej. Jeśli wybierzemy za małe h , powstaną nam duże błędy spowodowane zaokrąglaniem przy odejmowaniu.

Natomiast, jeśli wartość h będzie zbyt duża otrzymamy błąd związany z obcinaniem nieskończonego rozwinięcia Taylora.

Na podstawie wyników przedstawionych na wykresach możemy odczytać dla typu double ze wzorem na pochodną centralną (podpunkt b).